Rendszeroptimalizálás vizsgatételek (2015/2016. második félév)

Marussy Kristóf

2016. június 11.

Lineáris programozás

1. Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmusa.

- **1.1. példa:** egy cég számos megrendelést kap különböző „egyszemélyes”, egyforma idő alatt elvégezhető munkák elvégzésére
  - kimutatást készítünk arról, hogy melyik dolgozó melyik munkát tudja elvégezni
  - cél a profit maximalizálása (lehető legtöbb munka elvégzése)
- **1.2. algoritmus:** „magyar módszer”
  - Input: $G = (F, L; E)$ páros gráf
  - Output: $M \subseteq G$ egy maximális méretű párosítás
  - induljunk ki egy tetszőleges (pl. az üres) M párosításból
  - *alternáló út* = párosítatlan F-beli csúcsból indul, $\forall$ második éle az M-hez tartozik
    - *javító út* = olyan alternáló út, ami párosítatlan L-beli pontban ér véget
  - amíg találunk J javítóutat (pl. szélességi kereséssel) $\Longrightarrow M \leftarrow M - (J \cap M) \cup (J - M)$
- **1.3. tétel:** a „magyar módszer” valóban maximális párosítást talál G-ben
  - *bizonyítás:* $M :=$ a párosítás, amit az algoritmus megtalált

$$\begin{aligned}
F_1 &:= F - M, \text{az } M \text{ által le nem fedett } F\text{-beli pontok halmaza},\\
L_2 &:= \text{az } F_1\text{-ből alternáló úton elérhető pontok halmaza},\\
F_2 &:= \text{az } L_2\text{-beli pontok } M \text{ szerinti párjai},\\
L_3 &:= \text{az } F_1\text{-ből alternáló úton nem elérhető } L\text{-beli pontok halmaza},\\
F_3 &:= \text{az } L_3\text{-beli pontok } M \text{ szerinti párjai},\\
L_1 &:= L - M, \text{az } M \text{ által le nem fedett } L\text{-beli pontok halmaza}
\end{aligned}$$

  - vegyük észre, hogy G-ben nem vezethet $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között él

	F_1	F_2
L_1	1 hosszú javító út lenne	≥ 3 hosszú javító út lenne
L_3	az L_3-beli csúcs 1 hosszú alternáló úton elérhető lenne, azaz L_2-beli	az L_3-beli csúcs ≥ 3 hosszú alternáló úton elérhető lenne, azaz L_2-beli

  - $F_1 \cup F_2$ $\forall$ szomszédja L_2-beli, $L_2 \cup F_3$ egy lefogó ponthalmaz
  - mivel épp $|M| = |L_2 \cup F_3|$, M valóban maximális méretű ■
- **1.4. probléma:** optimális hozzárendelés
  - Input: $G = (F, L; E)$ páros gráf, $w\colon E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény
  - Output: $M \subseteq G$ párosítás úgy, hogy $\sum_{e \in M} w(e)$ maximális
  - az optimális hozzárendelés megoldható maximális súlyú *teljes* párosítás keresésével
    - ha $|F| \neq |L|$, adjunk G-hez annyi csúcsot, hogy egyenlőek legyenek

- ◦ legyen $G' = (F, L; E')$ teljes páros gráf ($E' = F \times L$), $w'(e) := \begin{cases} w(e), & \text{ha } e \in E, \\ 0, & \text{ha } e \notin E \end{cases}$
  - ◦ G' egy M' maximális súlyú teljes párosítása a G maximális súlyú párosítása az $E' - E$ élek elhagyása után
  - ◦ G maximális súlyú M párosításához megfelelő $E' - E$ éleket hozzávéve G' maximális súlyú teljes párosítását kapjuk
- – **1.5. definíció:** a $c\colon F \cup L \to \mathbb{R}$ függvény *címkézés* a $G = (F, L; E)$ páros gráfra és a $w\colon E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvényre nézve, ha $\forall e = \{x, y\} \in E\colon c(x) + c(y) \geq w(e)$
- – **1.6. lemma:** a w súlyfüggvénnyel súlyozott $G = (F, L; E)$ páros gráf tetszőleges M teljes párosítására és tetszőleges c címkézésére igaz, hogy $\sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in F \cup L} c(v)$
  - • *bizonyítás:* $\displaystyle\sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{e=\{f,l\} \in M} c(f) + c(l) \overset{\substack{\forall \text{ csúcs legfeljebb} \\ \text{1-szer szerepel } M\text{-ben}}}{\leq} \sum_{f \in F} c(f) + \sum_{l \in L} c(l) = \sum_{v \in F \cup L} c(v)$ ■
  - • **1.7. definíció:** a G gráf $e = \{x, y\}$ éle *piros*, ha $c(x) + c(y) = w(e)$
  - • **1.8. következmény:** ha az M teljes párosítás $\forall$ éle piros valamely c címkézésre nézve, akkor M maximális súlyú teljes párosítás
- – **1.9. algoritmus:** Egerváry algoritmusa
  - • INPUT: $G = (F, L; E)$ páros gráf, $w\colon E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény
  - • OUTPUT: $M \subseteq G$ *teljes* párosítás úgy, hogy $\sum_{e \in M} w(e)$ maximális
  - • 0. lépés: legyen $M = \emptyset$, $c(v) = \begin{cases} \max_{y \in L, \{v,y\} \in E} w(v, y), & \text{ha } v \in F, \\ 0, & \text{ha } v \in L \end{cases}$
  - • 1. lépés: a javító utas algoritmussal keressünk bővítsük M-et maximális élszámú párosítássá a piros részgráfban
    - ◦ ha M most már teljes $\Longrightarrow$ STOP, M a keresett párosítás, c a keresett címkézés, $w(M) = c(M)$
  - • 2. lépés: $\delta := \min\{c(x) + c(y) - w(\{x, y\}) \mid \{x, y\} \in E, x \in F_1 \cup F_2, y \in L_1 \cup L_3\}$
    - ◦ állítsuk elő a $c(v) \leftarrow \begin{cases} c(v) - \delta, & \text{ha } v \in F_1 \cup F_2, \\ c(v) + \delta, & \text{ha } v \in L_2, \\ c(v), & \text{ha } v \in F_3 \cup L_1 \cup L_3 \end{cases}$ új címkézést, majd GOTO 1.
- – **1.10. tétel:** Egerváry algortimusa $O(n^2 e)$ lépésben maximális súlyú teljes párosítást állít elő
  - • *bizonyítás:* a 0. lépésben megadott c valóban címkézés
  - • a 2. lépésben δ kiszámításához valóban van él $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között
    - ◦ ha nem lenne, $N(F_1 \cup F_2) = L_2$
    - ◦ $|F_1 \cup F_2| > |F_2| = |L_2|$ miatt ekkor nem teljesül a Hall-feltétel $\Longrightarrow \nexists$ teljes párosítás!
  - • a 2. lépés után is címkézés marad c
    - ◦ csak az $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között vezető élekre csökken $c(x) + c(y)$

	F_1	F_2	F_3
L_1	$-\delta$ (nem lehet piros)	$-\delta$ (nem lehet piros)	0
L_2	$-\delta + \delta$	$-\delta + \delta$	$+\delta$ (piros eltűnhet)
L_3	$-\delta$ (nem lehet piros)	$-\delta$ (nem lehet piros)	0

    - ◦ δ definíciója garantálja, hogy továbbra is $c(x) + c(y) \geq w(\{x, y\})$
  - • M élei a 2. lépés után is pirosak
    - ◦ csak $x \in F_3$, $y \in L_2$ élek színeződhetnek vissza (itt nőtt $c(x) + c(y)$)
    - ◦ ezek nem lehetnek M élei, mert F_3 párja L_3, L_2 párja F_2
    - ◦ továbbra is van F_1-ből piros alternáló út L_2 csúcsaiba
  - • egy iterációban vagy M, vagy L_2 elemszáma nő
    - ◦ $O(n)$ lépés után M elemszáma mindenképp nő, mert ekkorra már L_2 lefedné L-t
    - ◦ $O(n^2)$ iterációban M maximális párosítás lesz
    - ◦ ezért $O(n^2 e)$ időben az algoritmus véget ér ■

2. A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier – Motzkin eliminációval.

- legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n \implies$ *lineáris program*
- **2.1. definíció:** *linerási programozás alapfeladata*: $\min_x \{cx : Ax \leq b\}$
- kétdimenziós feladat megoldása
  - az $p_1x_1 + p_2x_2 \geq k$ alakú feltétel $p_1x_1 + p_2x_2 = k$ egyenese két félsíkra bontja a síkot
    - a $\geq$ jelnek megfelelő félsíkok metszete adja megengedett megoldások tartományát
  - ha $c = (q_1, q_2) \implies q_1x_1 + q_2x_2 = 0$-val párhuzamos egyeneseket húzunk
    - minden egyenesre kiszámítjuk a célfüggvény értékét
    - a maximumhely a legnagyobb egyenes és a félsíkok metszetének közös pontja
  - általánosítás: *hipersíkok* által határolt *poliéder*
- ekvivalens átalakítások
  - egyenlőtlenség megszorzása *pozitív* számmal
  - két egyenlőtlenség összegének hozzávétele az egyenlőtlenségrendszerhez
  - *nem* ekvivalens: szorzás negatív számmal
- **2.2. algoritmus:** Fourier – Motzkin elimináció
  - n változós lineáris program visszavezetése egy $n-1$ változós A^*, b^* lineáris programra
  - végül 1 változós lineáris program megoldása
  - $(A|b)$ bővített együttható mátrix
    - szorozzuk pozitív számokkal a sorokat, hogy az 1. oszlopban csak $-1, 0, 1$ legyen
  - legyen I, J, K rendre az 1-gyel, -1-gyel és 0-val kezdődő sorok indexeinek halmaza
  - $\mathbb{R}^{|K| \times n} \ni (A_0|b_0) = (A|b)$ 0-val kezdődő sorai az első oszlop elhagyásával
  - $Ax \leq b$ egy megoldása $x = (\lambda, \bar{x})$ alakú $\implies A_0\bar{x} \leq b_0 \implies$ mikor van megfelelő λ?
  - ha $J = \emptyset$ (nincs -1-gyel kezdődő sor)
    - $\forall i \in I : \lambda + \bar{a}_i\bar{x} \leq b_j \implies \lambda \leq \min_{i \in I} b_i - \bar{a}_i\bar{x}$, ami mindig kielégíthető
    - $A^*, b^* =$ az $\bar{A}$-ból és b-ből az $i \in I$ indexű sorok elhagyásával kapott rendszer
  - ha $I = \emptyset$ (nincs 1-gyel kezdődő sor)
    - $\forall j \in J : -\lambda + \bar{a}_j\bar{x} \leq b_j \implies \lambda \geq \max_{j \in J} \bar{a}_j\bar{x} - b_j$, ami mindig kielégíthető
    - $A^*, b^* =$ az $\bar{A}$-ból és b-ből az $j \in J$ indexű sorok elhagyásával kapott rendszer
  - ha $I \neq \emptyset$ és $J \neq \emptyset \implies \forall i \in I : \lambda + \bar{a}_i\bar{x} \leq b_j$ és $\forall j \in J : -\lambda + \bar{a}_j\bar{x} \leq b_j$
    - $\forall i \in I, j \in J : \bar{a}_j\bar{x} - b_j \leq \lambda \leq \bar{b}_i - \bar{a}_i\bar{x} \implies \forall i \in I, j \in J : (\bar{a}_i + \bar{a}_j)\bar{x} \leq b_i + b_j$
    - $A^*, b^* =$ az $\bar{A}$ és b-ből $i \in I$ és $j \in J$ indexű sorait az összes lehetséges módon összeadjuk, a $k \in K$ indexű sorokat hozzávesszük és a csupa 0 első oszlopot elhagyjuk
  - egyváltozós rendszer megoldása
    - ha $\exists k \in K : b_k < 0 \implies$ a rendszer nem megoldható
    - ha $\max_{j \in J} -b_j > \min_{i \in I} b_i \implies$ a rendszer nem megoldható
    - egyébként $\implies x_1 \in [\max_{j \in J} -b_j, \min_{i \in I} b_i]$ megoldás ■

3. Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.

- **3.1. lemma:** Farkas-lemma, 1. alak
  - tetszőleges A és b esetén az alábbi két rendszer közül pontosan egynek van megoldása:
    (1) $Ax \leq b$ (2) $yA = 0$, $y \geq 0$, $yb < 0$
- *bizonyítás:* (1) megoldható $\implies$ (2) nem megoldható
  - $0 = 0x = (yA)x = y(Ax) \leq yb < 0$, ellentmondás
- (1) nem megoldható $\implies$ (2) megoldható
  - alkalmazzuk a Fourier – Motzkin eliminációt az (1) egyenletrendszerre
  - a feltevés szerint a kapott egyváltozós $(A^*|b^*)$ rendszer nem megoldható
    - ha van $(0|\beta)$, $\beta < 0$ sor

        * $\exists$ $(A|b)$ sorainak olyan nemnegatív y együtthatós lin. kombinációja, hogy $y(A|b) = (0,0,\ldots,0|\beta) \Longrightarrow y$ kielégíti (2)-t
      - ha van $(-1,\beta_j)$ és $(1,\beta_i)$ sor úgy, hogy $-\beta_j > \beta_i \Longrightarrow \beta = \beta_i + \beta_j < 0$
        * $\exists y_j \geq 0 : y_j(A|b) = (0,0,\ldots,0,-1|\beta_j)$ és $\exists y_i \geq 0 : y_i(A|b) = (0,0,\ldots,0,1|\beta_i)$
        * ekkor $y = y_i + y_j \geq 0$, $y(A|b) = (0,0,\ldots,0|\beta) \Longrightarrow y$ kielégíti (2)-t ■
- **3.2. lemma:** Farkas-lemma, 2. alak
  - tetszőleges A és b esetén az alábbi két rendszer közül pontosan egynek van megoldása: (1) $Ax = b$, $x \geq 0$ (2) $yA \geq 0$, $yb < 0$
  - *bizonyítás:* (1) megoldható $\Longrightarrow$ (2) nem megoldható
    - $0 \leq (yA)x = y(Ax) = yb < 0$, ellentmondás
  - (2) nem megoldható $\Longrightarrow$ (1) megoldható
    - vizsgáljuk az ekvivalens $y(-A) \leq 0$, $yb = -1 < 0$ rendszert
    - tömör alakban $(-A|b|-b)^{\mathrm{T}} y \leq (0,0,\ldots,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$
    - a lemma 1. alakja szerint $\exists x : x(-A|b|-b)^{\mathrm{T}} = 0, x \geq 0, x(0,0,\ldots,0,-1,1)^{\mathrm{T}} < 0$
    - legyen $x = (\bar{x}|\lambda,\mu) \Longrightarrow -A\bar{x} + (\lambda-\mu)b = 0$, $\bar{x} \geq 0$, $\lambda,\mu \geq 0$, $-\lambda+\mu < 0$
    - ekkor $A\frac{\bar{x}}{\lambda-\mu} = b$ és $\lambda - \mu > 0$ miatt $\frac{\bar{x}}{\lambda-\mu} \geq 0 \Longrightarrow \frac{\bar{x}}{\lambda-\mu}$ kielégíti (1)-et ■
- **3.3. tétel:** ha $Ax \leq b$ megoldható, c tetszőleges $\Longrightarrow$ az alábbi állítások ekvivalensek
  - (1) az $Ax \leq b$ megoldáshalmazán cx felülről korlátos
  - (2) nincs megoldása az $Az \leq 0$, $cz > 0$ rendszernek
  - (3) van megoldása az $yA = c$, $y \geq 0$ rendszernek
  - *bizonyítás:* (1) $\Longrightarrow$ (2), legyen x_0 (1) egy megoldása és indir. tfh. z (2) egy megoldása
    - ekkor $A(x_0 + \lambda z) \leq b$, de $\lambda > 0$ esetén $c(x_0 + \lambda z) = cx_0 + \lambda cz$ tetszőlegesen nagy
    - cx nem felülről korlátos $\Longrightarrow$ ellentmondás
  - (2) $\Longrightarrow$ (3), tekintsük a (nem megoldható) $z(-A)^{\mathrm{T}} \geq 0$, $z(-c) < 0$ rendszert
    - a Farkas-lemma 2. alakja szerint $\exists y : (-A)^{\mathrm{T}} y = -c, y \geq 0$
    - $(-A)^{\mathrm{T}} y = -c \Longrightarrow A^{\mathrm{T}} y = yA = c \Longrightarrow$ ez az y épp kielégíti a (3)-as rendszert
  - (3) $\Longrightarrow$ (1), legyen y a (3)-as rendszer egy megoldása
    - $cx = (yA)x = y(Ax) \overset{y\geq 0, Ax\leq b}{\leq} yb \Longrightarrow yb$ a cx egy felső korlátja ■

4. A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).

- **4.1. tétel:** a lineáris programozás dualitástétele
  - ha $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) program megoldható és felülről korlátos, akkor
    - (1) $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ (duális) program megoldható és alulról korlátos
    - (2) a primál programnak $\exists$ maximuma és a duális programnak $\exists$ minimuma
    - (3) $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$
- **4.2. lemma:** legyen $Ax \leq b$ megoldható, $t \in \mathbb{R}$, de $Ax \leq b$, $cx \geq t$ nem megoldható
  - ekkor a $yA = c$, $y \geq 0$, $yb < t$ rendszer megoldható
  - *bizonyítás:* alkalmazzuk a Farkas-lemmát a $(A|-c)x \leq (b|-t)$-re, $y := (\bar{y}|\lambda)$
    - $\bar{y}A - \lambda c = 0$, $\bar{y} \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\bar{y}b - \lambda t < 0$
    - ha $\lambda = 0 \Longrightarrow 0 = 0x = (\bar{y}A)x = \bar{y}(Ax) \overset{\bar{y}\geq 0, Ax\leq b}{\leq} \bar{y}b < 0 \Longrightarrow$ lehetetlen
    - ezek szerint $y = \frac{\bar{y}}{\lambda}$ létezik, $yA = c$, $y \geq 0$, $yb < t$ ■
- *a 4.1. tétel bizonyítása:*
  - (1): már beláttuk a „3 kalickás tétel” (3.3. tétel) (1) $\Longleftrightarrow$ (3) eseténél
    - $cx \leq yb$ miatt cx felülről, yb alulról korlátos
  - (2), primál állítás: legyen $t = \sup\{cx : Ax \leq b\}$
    - indir. tfh. $\nexists x : Ax \leq b, (t \geq)\, cx \geq t \Longrightarrow$ alkalmazzuk a 4.2. lemmát
    - $\exists y : yA = c, y \geq 0, yb < t \Longrightarrow y$ a duális egy megoldása

  - ◦ $t = \sup\{cx : Ax \le b\} \le yb < t \Longrightarrow$ ellentmondás $\Longrightarrow \exists$ primál megoldás, hogy $cx \ge t$
  - ◦ így a szuprémum egyben maximum kell legyen
- • (2), duális állítás: $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\} = -\max\{-by : A^{\mathrm{T}}y \le c, -A^{\mathrm{T}}y \le -c, -y \le 0\}$
  - ◦ alkalmazzuk a primál állítást a duálisra, mint primál feladatra
- • (3): indir. tfh. $\exists t : \max\{cx : Ax \le b\} < t < \min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$
  - ◦ a a 4.2. lemma szerint $\exists y : yA = c, y \ge 0, yb < t$
  - ◦ $t < \min\{yb : yA = c, y \ge 0\} < yb < t \Longrightarrow$ ellentmondás ■

- **4.3. tétel:** a lineáris programozás dualitástétele, ekvivalens alak
  - • ha $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\}$ (primál) program megoldható és felülről korlátos, akkor
    - ◦ (1) $\min\{yb : yA \ge c, y \ge 0\}$ (duális) program megoldható és alulról korlátos
    - ◦ (2) a primál programnak $\exists$ maximuma és a duális programnak $\exists$ minimuma
    - ◦ (3) $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\} = \min\{yb : yA \ge c, y \ge 0\}$
  - • *bizonyítás:* $\max\{cx : (A|-I)x \le (b|0)\}$ duálisa $\min\{y(b|0) : y(A|-I) = 0, y \ge 0\}$
    - ◦ legyen $y = (y_1|y_2) \Longrightarrow \min\{y_1 b : y_1 A - y_2 = 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0\}$
    - ◦ $y_1 A = y_2 \ge 0 \Longrightarrow$ a duális valóban $\min\{y_1 b : y_1 A \ge 0, y_1 \ge 0\}$ alakú ■
- lineáris programozás bonyolultsága
  - • döntési probléma
    - ◦ INPUT: A mátrix, b és c vektorok, $t \in \mathbb{R}$
    - ◦ OUTPUT: van-e olyan x vektor, melyre $Ax \le b$, $cx \ge t$
  - • NP-beli $\to$ tanú a feltételeket kielégítő x
  - • co-NP-beli $\to$ a dualitástétel szerint tanú egy $yA = c$, $y \ge 0$, $(cx \le)\, yb < t$ vektor
  - • 1947 (Dantzig): *szimplex-módszer*
    - ◦ nem polinomiális futásidejű, de a gyakorlatban gyors
  - • 1979 (Hacsijan): *ellipszoid-módszer*
    - ◦ polinomiális futásidejű $\Longrightarrow$ bizonyítja, hogy a feladat P-ben van
    - ◦ gyakorlatban a szimplex sokkal hatékonyabb
  - • 1984 (*Karmarkar*): polinomiális és a gyakorlatban is használható módszer

5. Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).

- **5.1. definíció:** *egészértékű programozás alapfeladata:* $\max_x\{cx : Ax \le b, x \text{ egész}\}$ (IP)
  - • duálisa $\min_y\{yb : yA = c, y \ge 0, y \text{ egész}\}$ (DIP)
  - • $\max_{IP} \le \max_{LP} = \min_{DLP} \le \max_{DIP} \Longrightarrow$ állhat $<$ is, nincs általános dualitástétel
- egészértékű programozás bonyolultsága
  - • döntési probléma
    - ◦ INPUT: A mátrix, b és c vektorok, $t \in \mathbb{R}$
    - ◦ OUTPUT: van-e olyan x egészértékű vektor, melyre $Ax \le b$, $cx \ge t$
  - • NP-beli $\to$ tanú a feltételeket kielégítő x
  - • dualitástétel hiányában a co-NP beliség nem látható be
  - • **5.2. tétel:** az egészértékű lineáris programozás NP-teljes
    - ◦ *bizonyítás:* azt már láttuk, hogy IP $\in$ NP
    - ◦ adunk egy MAXFTLN $\prec$ IP Karp-redukciót (MAXFTLN NP-teljes)
    - ◦ a $G = (V, E)$ gráf $\forall$ v_i csúcsához vegyünk fel egy $x_i \in \mathbb{Z}$, $-x_i \le 0$, $x_i \le 1$ változót
      - * ha $v_i \in F$ a független ponthalmaz eleme, $x_i = 1$, egyébként $x_i = 0$
    - ◦ $\forall e = \{v_i, v_j\} \in E$ élre vegyük még fel az $x_i + x_j \le 1$ feltételt
    - ◦ a célfüggvény $\sum_{v_i \in V} x_i = |F| \Longrightarrow c = (1, 1, \ldots, 1)$
    - ◦ x maximumhely $\Longleftrightarrow F \subseteq E$ a G maximális független ponthalmaza

    - F független, mert $x_i + x_j \leq 1 \Longrightarrow \{v_i, v_j\} \in E$ legfeljebb egyik vége lehet F-beli
    - ha $F' \subseteq E$ független, $|F'| > |F| \Longrightarrow x'$ megoldás, $cx' > cx$
    - x nem lehet maximumhely $\Longrightarrow$ ellentmondás ∎
  - hasonló 3-SAT $\prec$ IP redukciót is lehet adni (0-1 változók, termek $\to$ feltételek)
- **5.3. algoritmus:** Branch and Bound $\max\{cx : Ax \leq b, f \leq x \leq g; f, g, x \text{ egész}\}$ problémára
  - (IP) feladat szétvágása (IP)$'$ és (IP)$''$ feladatokra
    - választunk egy x_j *elágazási változót* és $f_j \leq t < g_j$ közbülső értéket
    - az új problémák (IP)$'$: (IP) $\cup\, g'_j := t$ és (IP)$''$: (IP) $\cup\, f''_j := t$
  - részproblémák $\mathcal{L} = \{(\mathrm{IP}^{(i)}) = (f^{(i)}, g^{(i)}, w^{(i)}) : i = 1, 2, \ldots\}$ listáját tartjuk karban, ahol $\max(\mathrm{IP}^{(i)}) \leq w^{(i)}$
  - x^* az eddig megtalált legjobb megoldás, $z^* = cx^*$ a hozzá tartozó függvényérték
  - 0. lépés: $\mathcal{L} \leftarrow \{(f, g, \infty)\}$, $z^* \leftarrow -\infty$, x^* nem definiált
  - 1. lépés: ha $\mathcal{L} = \emptyset \Longrightarrow$ STOP, egyébként válasszunk egy $(\mathrm{IP}^{(i)})$-t és töröljük $\mathcal{L}$-ből
  - 2. lépés: ha $w^{(i)} \leq z^* \Longrightarrow$ nem lehet jobb megoldás, mint az eddigi, GOTO 1.
  - 3. lépés: oldjuk meg az $(\mathrm{IP}^{(i)})$-nek megfelelő $(\mathrm{LP}^{(i)})$ relaxált LP feladatot
    - ha $\nexists$ megoldás $\Longrightarrow$ GOTO 1., egyébként legyen $x^{(i)}$ a megoldás és $cx^{(i)} = z^{(i)}$
  - 4. lépés
    - (4a) ha $z^{(i)} \leq z^* \Longrightarrow$ GOTO 1., $f^{(i)} \leq x \leq g^{(i)}$-ben már nincs jobb megoldás
    - (4b) ha $z^{(i)} > z^*$ és $x^{(i)}$ egész vektor $\Longrightarrow x^* \leftarrow x^{(i)}$, $z^* \leftarrow z^{(i)}$, GOTO 1.
    - (4c) ha $z^{(i)} > z^*$, de $x^{(i)}$ nem egész vektor
      - vágjuk két részre az $(\mathrm{IP}^{(i)})$ problémát valamely x_j elágazási változó mentén
      - $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{(f^{(i)\prime}, g^{(i)\prime}, z^{(i)}), (f^{(i)\prime\prime}, g^{(i)\prime\prime}, z^{(i)})\}$, GOTO 1.
  - **5.4. tétel:** a B&B véges sok lépésben leáll és megtalálja (IP) optimumát
    - *bizonyítás:* f és g egész $\Longrightarrow$ véges sok részprobléma van $\Longrightarrow$ véges sok lépés
    - indir. tfh. az eljárás leállt, de $z^* < z_0$, ahol $z_0 = \max(\mathrm{IP})$
    - az algoritmus futása közben mindig volt olyan $(\mathrm{IP}^{(i)}) \in \mathcal{L}$, hogy $z_0 = \max(\mathrm{IP}^{(i)})$
      - kezdetben ez maga (IP)
      - $z_0 \leq w^{(i)} \leq z^* < z_0$ ellentmondás $\Longrightarrow (\mathrm{IP}^{(i)})$ mindig eljut a 4. lépésig
      - (4a) nem teljesülhet, mert $z_0 \leq z^{(i)} \leq z^* < z_0$ ellentmondás
      - (4b) után $z^* = z^{(i)} = z_0$ lesz $\Longrightarrow z_0 = z^* < z_0$ ellentmondás
      - (4c)-ben $(\mathrm{IP}^{(i)})$ vágása után $z_0 = \max(\mathrm{IP}^{(i)})'$ vagy $z_0 = \max(\mathrm{IP}^{(i)})''$
    - $\mathcal{L}$ sosem lesz üres $\Longrightarrow$ az algoritmus nem áll le $\Longrightarrow$ ellentmondás ∎
  - *branch and bound fa:* (IP) a gyökér, $(\mathrm{IP}^{(i)})$ gyerekei $(\mathrm{IP}^{(i)})'$ és $(\mathrm{IP}^{(i)})''$
  - heurisztika $(\mathrm{IP}^{(i)})$ választására
    - LIFO, ha az $(\mathrm{IP}^{(i)})$ a 3. lépésben utoljára vizsgált probléma fia
      - inkrementális megoldás *duál szimplex módszerrel*
    - egyébként válasszuk azt a problémát, amire $w^{(i)}$ maximális
  - heurisztika az x_j elágazási változó és t választására
    - x_j az változó, aminek az $\{x_j^{(i)}\}$ törtrésze legközelebb van $\frac{1}{2}$-hez, $t \leftarrow \lfloor x_j^{(i)} \rfloor$
  - a gyakorlatban még a heurisztikákkal sem mindig alkalmas nagy problémákhoz
- **5.5. definíció:** $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ az A mátrix *négyzetes részmátrixa*, ha A tetszőleges k sorának és k oszlopának kereszteződései határozzák meg
- **5.6. definíció:** A *totálisan unimoduláris*, ha $\forall$ négyzetes részmátrixára $\det = 0, 1$ vagy -1
  - **5.7. következmény:** ha A TU $\Longrightarrow A$ minden eleme 0, 1 vagy -1 (1×1-es részmátrix)
- **5.8. lemma:** egy mátrix totálisan unimoduláris marad, ha
  - (1) egy sorát vagy oszlopát (-1)-gyel szorozzuk
  - (2) egységvektort veszünk hozzá új sorként vagy oszlopként
  - (3) egyik sorát (ill. oszlopát) új sorként (ill. oszlopként) új példányban hozzávesszük
  - (4) transzponáljuk

- *bizonyítás:* csak azoknak a részmátrixoknak változik a det-a, amiket a módosítás érint
  - (1) sor vagy oszlop (-1)-gyel szorzása $\Longrightarrow$ det (-1)-gyel szorzása $\Longrightarrow$ 0, 1, -1
  - (2) alkalmazzuk a kifejtési tételt az új sor/oszlop szerint
    - csak egy nemnulla együtthatójú aldetermináns van
    - az új részmátrix determinánsa megegyezik egy régébbiével $\Longrightarrow$ 0, 1 vagy -1
  - (3) két azonos sor/oszlop $\Longrightarrow$ $\det = 0$
  - (4) $\det B^{\mathrm{T}} = \det B$ $\Longrightarrow$ a determináns nem változik ■

– **5.9. példa:** $\vec{G} = (V, \vec{E})$ irányított gráf $A \in \mathbb{R}^{|V|\times|E|}$ illeszkedési mátrixsza TU
- *bizonyítás:* a $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ részmátrixra k szerinti teljes indukcióval
  - $k = 1$-re nyilván $\det B = 0, 1$ vagy -1, mert csak ez lehet a mátrix eleme
  - ha B-ben van csupa 0 oszlop $\Longrightarrow$ $\det B = 0$
  - ha B-ben van egyetlen 1-est vagy -1-est tartalmazó oszlop
    - fejtsük ki a determinánst eszerint az oszlop szerint
    - az nem 0 együtthatós $B' \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ aldet.-ra $\det B'$ jó az indukció szerint
    - a kifejtési tétel szerint $\det B = \pm \det B'$
  - ha B $\forall$ oszlopában van 1 és -1 is $\Longrightarrow$ $(1, 1, \ldots, 1)B = 0$ $\Longrightarrow$ $\det B = 0$ ■

– **5.10. példa:** $G = (F, L; E)$ páros irányítatlan gráf A illeszkedési mátrixsza TU
- *bizonyítás:* irányítsuk G éleit $F \to L$ irányba $\Longrightarrow$ $\vec{G}$
  - a $\vec{G}$ irányított gráf $\vec{A}$ illeszkedési mátrixsza TU az 5.9. példa szerint
  - szorozzuk meg az $\vec{A}$ mátrix L-hez tartozó sorait (-1)-gyel
  - az így kapott mátrix épp A, és az 5.8. lemma miatt szintén TU ■

– **5.11. tétel:** ha A TU mátrix, b egész vektor, c valós vektor
- és $\max\{cx : Ax \le b\}$ (LP) megoldható és a maximuma véges
- $\Longrightarrow$ $\max\{cx : Ax \le b, x \text{ egész}\}$ (IP) megoldható és a maximuma véges
- és $\max\{cx : Ax \le b\} = A \max\{cx : Ax \le b, x \text{ egész}\}$
- *nem bizonyítjuk*

6. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.

– **6.1. tétel:** (Egerváry Jenő tétele) legyen $G = (F, L; E)$ páros gráf, $w \colon E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény $\Longrightarrow$ a maximális összsúlyú párosítás összsúlya $\min \sum_{v\in F\cup L} c(v)$, ahol a minimum a nemnegatív $c \colon F \cup L \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ függvényeken értendő, melyekre $\forall e = \{x, y\} \in E : c(x) + c(y) \ge w(e)$
- *bizonyítás:* legyen G illeszkedési mátrixsza $B \in \mathbb{R}^{|F\cup L|\times|E|}$
- a $Bx \le (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$, $x \ge 0$, x egész rendszer minden megoldása 0-1 értékű
  - az 1 komponensek G egy független élhalmazát (párosítását) határozzák meg
- $\max\{wx : Bx \le (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}, x \ge 0, x \text{ egyész}\}$ megoldása maximális súlyú párosítás
- B TU mátrix (5.10. példa) $\Longrightarrow$ $\max_{IP} = \max_{LP}$ (5.11. tétel)
- $\max\{wx : Bx \le (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}, x \ge 0\} = \min\{y(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} : yB \ge w, y \ge 0\}$
- az y duális megoldás $\forall$ csúcshoz egy $c(v_i) = y_i$ címkét rendel
  - $yB \ge w$ $\Longrightarrow$ $\forall \{x, y\} \in E : c(x) + c(y) = w(\{x, y\})$ ■

– **6.2. definíció:** $G = (\mathcal{I}, E)$ *intervallumgráf*, ha $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ intervallumok rendszere és $\{I_i, I_j\} \in E \Longleftrightarrow I_i \cap I_j \ne \emptyset$
- ált. megsz. nélkült feltehető, hogy $\forall I \in \mathcal{I}$ az $[1, n]$ egész végpontú, zárt részintervalluma

– $A(\mathcal{I}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ahol $\mathcal{I}$ $[1, n]$ egész végpontú intervallumrendszer, $a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in I_j, \\ 0, & \text{ha } i \notin I_j \end{cases}$
- **6.3. lemma:** az így definiált $A(\mathcal{I})$ mátrix TU
- *bizonyítás:* teljes indukcióval A egyeseinek száma szerint
  - ha A-ban 0 db egyes van $\Longrightarrow$ $\det A = 0$
  - $\forall$ oszlopban egy darabig 0-k, utána 1-esek, majd megint 0-k vannak

- ha $\exists$ két oszlop, ahol ugyanott van a legfelső egyes
  - a több egyes tartalmazóból a másikat kivonva csökken az egyesek száma
  - ez nem változtatja a det-t $\Longrightarrow$ ind. feltevés szerint det $= 0, 1$ vagy -1
- ha $\exists$ csupa 0 oszlop $\Longrightarrow$ det $= 0$
- egyébként minden oszlopban máshol van a legfelső egyes
  - sor- és oszlopcserékkel alsó háromszögmátrixszá alakítható $\Longrightarrow$ det $= \pm 1$ ■

– **6.4. tétel:** az $[1, n]$ egész végpontú, zárt $I_1, I_2, \ldots, I_m$ részintevallumai $\forall k \in \mathbb{Z}^+$-re megszínezhetőek k színnel úgy, hogy ha az i-t d_i db intervallum tartalmazza, akkor ezek között minden színből vagy $\lfloor \frac{d_i}{k} \rfloor$ vagy $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ van
- *bizonyítás:* válasszunk ki néhány intervallumot úgy, hogy $\forall i$-re $\lfloor \frac{d_i}{k} \rfloor$ vagy $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ kiválasztott intervallum tartalmazza i-t
  - ezt az eljárást ismételhetjük $k-1$-re, $k-1$-re, $\ldots$, 1-re
  - így épp k színnel színezhetőek az intervallumok a megadott feltételnek megfelelően
- legyen $A = A(\mathcal{I})$, $\lfloor \frac{d}{k} \rfloor$ i. komponense $\lfloor \frac{d_i}{k} \rfloor$, $\lceil \frac{d}{k} \rceil$ hasonló
- $\lfloor \frac{d}{k} \rfloor \le Ax \le \lceil \frac{d}{k} \rceil$, $0 \le x \le (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ megoldható, pl. $x = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})$ megoldás
  - az 5.11. tétel miatt $\exists$ egészértékű (0-1) megoldás $\Longrightarrow$ ez épp egy jó kiválasztás ■

– **6.5. definíció:** a G gráf *perfekt*, ha $\chi(F) = \omega(F)$ $\forall F \subseteq G$ feszített részgráfjára
- χ a kromatikus szám, ω a klikkszám

– **6.6. következmény:** minden intervallumgráf perfekt
- *bizonyítás:* a G intervallumgráf minden feszített részgráfja intervallumgráf
  - elég belátni, hogy $\chi(G) = \omega(G)$
- alkalmazzuk a 6.4. tételt $k = \omega(G)$ választással
  - $\forall i : d_i \le \omega(G) \Longrightarrow \forall$ klikkben $\forall$ színt legfeljebb egyszer használtuk
  - a kapott színezés egy jó színezés $\Longrightarrow \chi(G) \le k = \omega(G)$
- mivel minden gráfban $\chi(G) \ge \omega(G) \Longrightarrow \chi(G) = \omega(G)$ ■

7. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

– legyen $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$, $c \colon E \to \mathbb{R}_+$ *kapacitásfüggvény*
- jelölje $x \colon E \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ $v \in V$-be belépő éleken felvett összegét $\rho_x(v)$
- jelölje x a v-ből kilépő éleken felvett összegét $\delta_x(v)$
- **7.1. definíció:** $x \colon E \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *folyam*, ha $\forall v \in V - \{s, t\} : \rho_x(v) = \delta_x(v)$
- **7.2. definíció:** x folyam *megengedett*, ha $\forall e \in E : x(e) \le c(e)$
- **7.3. definíció:** az x megengedett folyam *értéke* $\delta_x(s) - \rho_x(s) = \rho_x(t) - \delta_x(t)$

– **7.4. definíció:** a $C = (S, T)$ *vágás*, ha $S \cup T = V$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$
- **7.5. definíció:** a $C = (S, T)$ vágás *értéke* $m_C = \sum_{(x,y) \in E, x \in S, y \in T} c(x, y)$
- tetszőleges C vágás értéke felső becslés minden folyam nagyságára

– **7.6. lemma:** ha $x \colon E \to \mathbb{R}_{\ge 0}$-ra $\forall v \in V - \{s, t\} : \rho_x(v) \ge \delta_x(v)$ és $\rho_x(t) \ge \delta_x(s) \Longrightarrow x$ folyam
- *bizonyítás:* az $S = \sum_{v \in V - \{s,t\}} \rho_x(v) - \delta_x(v)$ összeg $\forall$ tagja nemnegatív $\Longrightarrow 0 \le S$
- vegyük észre, hogy $S = \delta_x(s) - \rho_x(t)$
  - ha $e = (u, v)$, $u \ne s$, $v \ne t \Longrightarrow x(e)$ pozitív és negatív előjellel is megjelenik S-ben
  - ha $u = s$, $v \ne t \Longrightarrow x(e)$ csak + előjellel jelenik meg $\rho_x(v)$-nél
  - ha $u \ne s$, $v = et \Longrightarrow x(e)$ csak $-$ előjellel jelenik meg $\delta_x(u)$-nál
  - az $e = (s, t)$ él nem jelenik meg S-ben, és kiesik $\delta_x(s) - \rho_x(t)$-ben
- $0 \le S = \delta_x(s) - \rho_x(t) \le 0 \Longrightarrow S = 0$
  - ez csak úgy lehet, ha $\forall$ (nemnegatív) tag $= 0 \Longrightarrow \forall v \in V - \{s, t\} : \rho_x(v) = \delta_x(v)$ ■

– **7.7. probléma:** maximális értékű folyam
- INPUT: $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$, $c \colon E \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény

- OUTPUT: az x maximális értékű folyam
- legyen G illeszkedési mátrixsza B, ennek $v \in V$-hez tartozó sora b_v
- legyen $G^* := (V, E^*)$, $E^* := E \cup \{(t,s)\}$, az illeszkedési mátrixsza $B^* = (B|b^*)$
- ha $x^* = (x|\mu)$ és $B^* x^* \leq 0$
  - $\forall v \in V - \{s,t\} : b_v x \leq 0 \Longrightarrow \delta_x(v) - \rho_x(v) \leq 0 \Longrightarrow \delta_x(v) \leq \rho_x(v)$
  - s-re és t-re nézve $\delta_x(s) - \mu \leq 0$ és $-\rho_x(t) + \mu \leq 0 \Longrightarrow \delta_x(s) \leq \mu \leq \rho_x(t)$
  - a 7.6. lemma szerint x valóban folyam, az értéke μ
- max. folyam lineáris programja: $\max\{(0,0,\ldots,0,1)x^* : B^* x^* \leq 0, x^* \geq 0, x \leq c\}$
  - ekvivalensen $\max\{\mu : (B^*|„I”)(x,\mu|x) \leq (0,0|c), x \geq 0, \mu \geq 0\}$
  - a második „egységmátrixból” hiányzik az $e^* = (t,s)$-hez tartozó oszlop
- a duális feladatot a kényelmesen a dualitástétel ekvivalens alakjából kapjuk
  - $\forall v \in V$ csúcshoz $\pi(v)$ és $\forall e \in E$ élhez $w(e)$ változó
  - $\min\{\sum_e w(e)c(e) : \forall v : \pi(v) \geq 0; \forall e = (u,v) : w(e) \geq 0, \pi(u) - \pi(v) + w(e) \geq 0;$
    $\pi(t) - \pi(s) \geq 1\}$

– **7.8. tétel:** a fenti duális minimuma épp a maximális hálózati folyam értéke
- *bizonyítás:* ($\Longleftarrow$) tetszőleges $C = (S,T)$ vágáshoz $\exists \pi, w : \sum_e w(e)c(e) = m_C$
  - legyen $\pi(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } v \in S, \\ 1, & \text{ha } v \in T \end{cases}$, $w(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } u \in S,\ v \in T \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$
  - ez kielégíti a feltételeket, és $\sum_e w(e)c(e)$ tényleg a vágás értéke
- ($\Longrightarrow$) a duális feladdat mátrixsza TU (G illeszkedési mátrixsza + egységvektorok)
  - a jobb oldal egészértékű $\Longrightarrow$ w és π is lehet egészértékű az optimális megoldásban
  - készítünk egy 0-1 megoldást: $\pi'(v) := \begin{cases} 0, & \text{ha } \pi(v) \leq \pi(s), \\ 1, & \text{ha } \pi(v) > \pi(s) \end{cases}$, $w'(e) := \begin{cases} 0, & \text{ha } w(e) = 0, \\ 1, & \text{ha } w(e) \geq 1 \end{cases}$
    - $\pi'(t) - \pi'(s) \geq 0$, mert $\pi(t) - \pi(s) \geq 0$ miatt $\pi(t) > \pi(s)$ teljesült
    - ha $\pi'(u) - \pi'(v) + w(u,v) < 0 \Longrightarrow \pi'(u) = 0$, $\pi'(v) = 1$, $w(u,v) = 0$
    - de $\pi(u) \leq \pi(s) < \pi(v)$, $w(e) = 0 \Longrightarrow \pi(u) - \pi(v) + w(e) < 0$, ellentmondás
  - $\forall e : w'(e) \leq w(e) \Longrightarrow \sum_e w'(e)c(e) \leq \sum_e w(e)c(e) \Longrightarrow (\pi', w')$ tényleg optimális
  - $S = \{v : \pi'(v) = 0\}$, $T = \{v : \pi'(v) = 1\}$ egy vágás, $m_C = \sum_e w'(e)c(e)$
  - a minimális kapacitású vágás kapacitása tényleg a duál optimuma
    - a dualitástétel miatt ez a primál optimuma
    - ami épp a maximális folyam nagysága ■
- beláttuk, hogy a maximális folyam polinomiális időben meghatározható
  - pl. ellipszoid módszerrel
    - de a gyakorlatban Edmonds – Karp algoritmusa nem használ LP-t
  - $(B^*|„I”)$ TU $\Longrightarrow$ ha c egész, a maximális egészértékű folyam is meghatározható

– **7.9. tétel:** (Ford – Fulkerson) a maximális hálózati folyam nagysága megegyezik a minimális kapacitású vágás kapacitásával
- *bizonyítás:* a 7.8. tétel alapján triviális ■

– **7.10. probléma:** minimális költségű folyam
- INPUT: $G = (V,E)$, $s,t \in V$, $c \colon E \to \mathbb{R}^+$, $k \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *költségfüggvény*, M folyamérték
- OUTPUT: x legalább M értékű, minimális $\sum_{e \in E} k(e)x(e)$ költségű folyam
- $\max\{-kx : B^* x^* \leq 0, x^* \geq 0, x \leq c, \mu \geq M\}$ LP feladat $\Longrightarrow$ polinomiális időben megoldható
- ha c és M egész $\Longrightarrow$ az IP verzió is polinomiális, mert a mátrix megint TU

– **7.11. probléma:** többtermékes folyamprobléma
- INPUT: $G = (V,E)$, $(s_1,t_1), (s_2,t_2), \ldots, (s_k,t_k)$, $c \colon E \to \mathbb{R}^+$
- OUTPUT: $x_1, x_2, \ldots, x_2$ folyamok, melyekre $\forall e \in E : \sum_{i=1}^k x_i(e) \leq c(e)$ és az összes folyamnagyság $\sum_{i=1}^k \delta_{x_i}(s) - \rho_{x_i}(t)$ maximális
- legyen B_i^* a $G_i^* = (V, E \cup (t_i, s_i))$ illeszkedési mátrixsza, $x_i^* = (x_i, \mu_i)$
- $\max\{\sum_{i=1}^k \mu_i : \forall_{i=1}^k B_i^* x_i^* \leq 0, x_i^* \geq 0; (\sum_{i=1}^k x_i) \leq c\} \Longrightarrow$ polinomiális időben megoldható

- az egészértékű változat $k \geq 2$ esetén nem TU
  - ha $k=1 \Longrightarrow$ maximális folyam probléma, egész c esetén polinomiális
  - ha $k=2 \Longrightarrow$ a feladat NP-nehéz (*nem bizonyítjuk*)

Matroidok

8. Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.

– **8.1. definíció:** az $\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ pár ($\mathcal{F} \subseteq 2^E$) *matroid*, ha
  - (F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ (F2) ha $Y \subseteq X$ és $X \in \mathcal{F} \Longrightarrow Y \in \mathcal{F}$
  - (F2) ha $X,Y \in \mathcal{F}$ és $|X|>|Y| \Longrightarrow \exists x \in X-Y : Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

– **8.2. definíció:** az $\mathcal{M}=(F,\mathcal{F})$ matroidban $X \subseteq E$ *független*, ha $X \in \mathcal{F}$
  - egyébként X *összefüggő*

– **8.3. definíció:** az $\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ matroidban $X \in \mathcal{F}$ független halmaz *bázis*, ha tartalmazásra nézve maximális (tovább már nem bővíthető E-ben)

– **8.4. definíció:** az $\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ matroidban $E \supseteq X \notin \mathcal{F}$ összefüggő halmaz *kör*, ha tartalmazásra nézve minimális ($\forall$ valódi részhalmaza független)

– **8.5. lemma:** ha $\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ matroid; $A \subseteq E$; $A \supseteq X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ tovább már nem bővítehetőek $\Longrightarrow |X_1|=|X_2|$
  - *bizonyítás:* indir. tfh. $|X_1|<|X_2| \overset{\text{(F3)}}{\Longrightarrow} \exists e \in X_2 - X_1 : X_1 \subset X_1 \cup \{e\} \in \mathcal{F}$
  - ez ellentmondás, X_1 mégis tovább bővíthető ■
  - azt kaptuk, hogy tetszőleges X független halmaz kiegészíthető maximálissá

– **8.6. következmény:** az $\mathcal{M}$ matroid $\forall$ bázisa azonos elemszámú

– **8.7. definíció:** $\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ matroidban az $X \subseteq E$ halmaz *rang*ja $r(X)=$ az X-beli maximális független halmaz mérete (a 8.5. lemma szerint ez mindig egyértelmű)

– **8.8. példa:** a $G=(V,E)$ gráf *grafikus matroid*ja $\mathcal{M}(G)=(E,\mathcal{F})$, ahol $F \in \mathcal{F}$ pontosan akkor, ha az F élek erdőt alkotnak G-ben

– **8.9. példa:** valamely T test felett az $M \in T^{n \times m}$ mátrix oszlopvektorai által indukált matroid *mátrixmatroid*, ahol a független halmazok a lineárisan független vektorhalmazok

– $\mathcal{U}_{n,k}=(E,\mathcal{F})$ *uniform matroid*, ahol $|E|=n$, $\mathcal{F}=\{X \subseteq E : |X| \leq k\}$
  - $\mathcal{U}_{n,n}$ *teljes (szabad) matroid*, $\mathcal{U}_{n,0}$ *triviális matroid*

– **8.10. tétel:** $r(x)$ *szubmoduláris*, azaz $\forall X,Y \subseteq E : r(X)+r(Y) \geq r(X \cap Y)+r(X \cup Y)$
  - *bizonyítás:* legyen A maximális független halmaz $X \cap Y$-ban $\Longrightarrow r(A)=r(X \cap Y)$
  - legyen $B \supseteq A$ maximális független halmaz $X \cup Y$-ban $\Longrightarrow r(B)=r(X \cup Y)$
  - $B \cap (X \cap Y)=A \Longrightarrow |B \cap X|+|B \cap Y|=|B|+|A|$
  - $B \cap X, B \cap Y \subseteq B \in \mathcal{F}$ függetlenek $\Longrightarrow |B \cap X| \leq r(X)$, $|B \cap Y| \leq r(Y)$
  - $r(X)+r(Y) \geq |B|+|A| = r(X \cup Y)+r(X \cap Y)$ ■

9. Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.

– **9.1. algoritmus:** mohó algoritmus
  - INPUT: $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ halmazrendszer, ami kielégíti az (F1–2) tulajdonságokat (nem üres, „leszálló”), $w\colon E \to \mathbb{R}^+$ *súlyfüggvény*
  - OUTPUT: olyan $X \in \mathcal{F}$, melyre $\sum_{e \in X} w(e)$ maximális
  - 0. lépés: legyen $X := \emptyset \in \mathcal{F}$
  - 1. lépés: létezi-e $e \in E-X : X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$
    - $\exists \Longrightarrow e := \arg\max\{w(e') : e' \in E-X, X \cup \{e\} \in \mathcal{F}\}$; $\nexists \Longrightarrow$ STOP

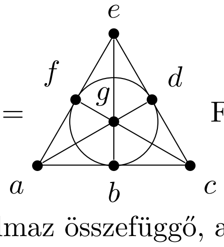
    - 2. lépés: $X \leftarrow X \cup \{e\}$, GOTO 1.
- **9.2. tétel:** a mohó algoritmus pontosan akkor ad helyes eredmény $\forall w$ súlfüggvénnyel az $(E,\mathcal{F})$ halmazrendszeren, ha az (F1–2) mellett (F3)-at is kielégíti ($(E,\mathcal{F})$ matroid)
    - *bizonyítás:* ($\Longleftarrow$) matroidon működik a mohó algoritmus
        - indir. tfh. $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a mohó algoritmus kimenete
        - de $\exists Y = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \in \mathcal{F}$, $w(Y) > w(X)$
        - ált. megsz. nélkül tfh. $\begin{array}{ccccccccccccc} w(a_1) & \geq & w(a_2) & \geq \cdots \geq & w(a_{k-1}) & \geq & w(a_k) & \geq & w(a_{k+1}) & \geq \cdots \geq & w(a_n) \\ \vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| & & \wedge & & & & \\ w(b_1) & \geq & w(b_2) & \geq \cdots \geq & w(b_{k-1}) & \geq & w(b_k) & \geq & w(b_{k+1}) & \geq \cdots \geq & w(b_m) \end{array}$
        - $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\} \in \mathcal{F}$, $B := \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \in \mathcal{F}$, $|A| \leq |B|$
            - $\overset{\text{(F3)}}{\Longrightarrow} \exists b^* \in B : A \cup \{b^*\} \in \mathcal{F}$, és a megadott sorrend miatt $w(b^*) \geq w(b_k) > a_k$
            - a mohó algoritmus a k. lépésben nem választhatta a_k-t, mert b^* jobb nála, ellentmondás
    - ($\Longrightarrow$) ha (F3) nem teljesül, $\exists$ olyan w, hogy a mohó algoritmus rossz eredményt ad
        - $\exists X, Y \in \mathcal{F} : |X| > |Y|$, de $\nexists x \in X - Y : Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$; legyen $w(e) := \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in Y, \\ 1-\epsilon & \text{ha } e \in X - Y, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$
        - a mohó algoritmus beválasztja Y elemeit, majd nem tud több nem 0 súlyú elemet beválasztani $\Longrightarrow w(Y) = |Y|$ a maximum
        - de $w(X) = |X \cap Y| + (1-\epsilon)|X - Y| = |X| - \epsilon|X - Y| > w(Y) = |Y|$, ha $0 < \epsilon < \frac{|X|-|Y|}{|X-Y|}$
        - a mohó algoritmus nem adott optimális megoldást w-re! ■
- **9.3. tétel:** ha r az $\mathcal{M} = (E,\mathcal{F})$ matroid rangfüggvénye, akkor
    - (R1) $r(\emptyset) = 0$ (R2) $\forall X \subseteq E : r(x) \leq |X|$ (R3) ha $Y \subseteq X \Longrightarrow r(Y) \leq r(X)$
    - (R4) $\forall X, Y \subseteq E : r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$, azaz r *szubmoduláris*
    - ha r kielégíti az (R1–4) feltételeket $\Longrightarrow$ az $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : r(X) = |X|\}$ rangfüggvénye
    - *nem bizonyítjuk*
- **9.4. tétel:** ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{M} = (E,\mathcal{F})$ matroid bázisainak halmaza, akkor
    - (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ (B2) $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{B} : |X_1| = |X_2|$
    - (B3) $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$, $e_1 \in X_1 \Longrightarrow \exists e_2 \in X_2 : X - \{e_1\} \cup \{e_2\} \in \mathcal{B}$
    - ha $\mathcal{B}$ kielégíti a (B1–3) feltételeket $\Longrightarrow$ az $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : X \subseteq B \in \mathcal{B}\}$ bázisainak halmaza
    - *nem bizonyítjuk*
- **9.5. definíció:** az $\mathcal{M} = (E,\mathcal{B})$ matroid *duálisa* $\mathcal{M}^* = (E,\mathcal{B}^*)$
    - $\mathcal{B}^* = \{X \subseteq E : E - X \in \mathcal{B}\} \Longleftrightarrow \mathcal{F}^* = \{X \subseteq E : E - X \text{ tartalmazza } \mathcal{M} \text{ egy bázisát}\}$
    - $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$ **9.6. példa:** $\mathcal{U}_{n,k}$ duálisa $(\mathcal{U}_{n,k})^* = \mathcal{U}_{n,n-k}$
- **9.7. tétel:** az $\mathcal{M} = (E,r)$ duálisának rangfüggvénye $r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$
    - *bizonyítás:* $r^*(X) = X$-beli max. független halmaz mérete $= \max\{|X \cap B^*| : B^* \in \mathcal{B}^*\}$
    - $|X \cap B^*| = |X \cap (E - B)| = |X - B| = |X| - |X \cap B|$, ahol $E - B^* = B \in \mathcal{B}$
    - $r^*(X) = \max(|X| - |X \cap B|) = |X| - \min|X \cap B| = |X| - |B| + \max|(E - X) \cap B|$
    - $\max|(E - X) \cap B| = r(E - X) \Longrightarrow r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$ ■

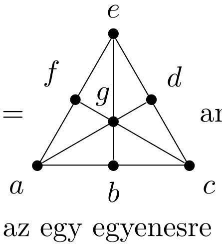
10. Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.

- **10.1. definíció:** az $\mathcal{M} = (E,\mathcal{F})$ matroidból X *elhagyás*ával az $\mathcal{M} \setminus X = (E - X, \mathcal{F}')$ matroidot kapjuk, ahol $\mathcal{F}' := \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq E - X\}$
    - grafikus matroidoknál ez nem más, mint élek elhagyása a gráfból
    - $\mathcal{M} \setminus X$ rangfüggvénye $r|_{E-X}$
- **10.2. definíció:** az $\mathcal{M} = (E,r)$ matroidból X *összehúzás*ával az $\mathcal{M}/X = (E - X, r')$ matroidot kapjuk, ahol $r'(Y) = r(X \cup Y) - r(X)$
    - **10.3. lemma:** az $(E - X, r')$ pár valóban matroid

  - *bizonyítás:* (R1): $r'(\emptyset) = r(X \cup \emptyset) - r(X) = 0$
    - (R2): $r'(Y) = r(X \cup Y) - r(X) \overset{r\text{ (R4)}}{\leq} (r(X) + r(Y) - r(X \cap Y)) - r(X) \leq r(Y) \leq |Y|$
    - (R3): $Z \subseteq Y \implies r'(Z) = r(X \cup Z) - r(X) \overset{X \cup Z \subseteq Z \cup Y,\ r\text{ (R3)}}{\leq} r(X \cup Y) - r(X) = r'(Y)$
    - (R4): $r'(Y) + r'(Z) = r(X \cup Y) + r(X \cup Z) - 2r(Z) \overset{r\text{ (R4)}}{\geq}$
      $\geq r((X \cup Y) \cap (X \cup Z)) + r((X \cup Y) \cup (X \cup Z)) - 2r(X) =$
      $= r(X \cup (Y \cap Z)) + r(X \cup (Y \cup Z)) - 2r(X) =$
      $= r'(Y \cap Z) + r'(Y \cup Z)$ ■
- **10.4. tétel:** ha $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid, $X \subseteq E \implies (\mathcal{M}/X)^* = \mathcal{M}^* \setminus X$, $(\mathcal{M} \setminus X)^* = \mathcal{M}^*/X$
  - *bizonyítás:* $\mathcal{M}^* \setminus X = ((\mathcal{M}^* \setminus X)^*)^* = ((\mathcal{M}^*)^*/X)^* = (\mathcal{M}/X)^*$
    - ezért elég az $(\mathcal{M} \setminus X)^* = \mathcal{M}^*/X$ egyenlőséget belátni
  - legyen $(\mathcal{M} \setminus X)^* = (E - X, r_1)$, $\mathcal{M}^*/X = (E - X, r_2)$
    - $r_1(Y) = |Y| - r(E - X) + r((E - X) - Y)$
    - $r_2(Y) = r^*(X \cup Y) - r^*(X) = |X \cup Y| - r(E) + r(E - (X \cup Y)) - |X| + r(E) - r(E - X)$
      - $Y \subseteq E - X \implies X \cap Y = \emptyset \implies |X \cup Y| - |X| = |Y|$
      - $(E - X) - Y = E - (X \cup Y) \implies r_2(Y) = |Y| - r(E - X) + r((E - X) - Y)$
    - $r_1 = r_2$, ezért a két matroid is megegyezik ■
- **10.5. definíció:** az $\mathcal{M}$ matroidból összehúzások és törlések sorozatával $\mathcal{M}$ *minor*a áll elő
- **10.6. lemma:** $\mathcal{M} \setminus A_1/B_1 \setminus A_2/B_2 \setminus \cdots \setminus A_k/B_k = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=0}^{k} A_i / \bigcup_{i=0}^{k} B_i$
  - *nem bizonyítjuk*
- **10.7. tétel:** az $\mathcal{M}$ matroid $\forall$ minora előáll $\mathcal{M} \setminus A/B$ alakban
  - *bizonyítás:* a 10.6. lemma alapján triviális ■
- **10.8. definíció:** az $\mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{F}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{F}_2)$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ matroidok *direkt összeg*e $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F})$, $E = E_1 \cup E_2$, $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : X \cap E_1 \in \mathcal{F}_1, X \cap E_2 \in \mathcal{F}_2\}$
- **10.9. definíció:** az $\mathcal{M}$ matroid *összefüggő*, ha nem áll elő két matroid direkt összegeként
- **10.10. definíció:** az $\mathcal{M}$ matroid *reprezentálható* (*kooridnátázható*) az T test felett, ha izomorf egy T feletti mátrixmatroiddal
  - ha $\mathcal{M}$-et A koordinátázza, és $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$ négyzetes nemszinguláris mátrix, akkor BA is $\mathcal{M}$-et koordinátázza
- **10.11. tétel:** ha $\mathcal{M}$ reprezentálható a T test felett, akkor $\mathcal{M}^*$ is
  - *bizonyítás:* legyen $r := r(\mathcal{M}) = r(A)$, ahol $A \in \mathbb{R}^{r \times n}$ az $\mathcal{M}$-et reprezentáló mátrix
    - Gauss-eliminációval hozzuk $\mathcal{M}$ mátrixszát $(I_r|A_0)$ alakúra
  - vizsgáljuk az $A' = (-A_0|I_{n-r})$ által reprezentált $\mathcal{M}(A')$ matroidot
    - A és A' oszlopai természetes módon megfeleltethetőek egymásnak
    - legyen B egy bázis $\mathcal{M}$-ben
      - ált. megsz. tfh. B az I_r utolsó t oszlopából és A_0 első $r - t$ oszlopából áll
      - ekkor $E - B$ a $-A_0^{\mathrm{T}}$ első $r - t$ és az E_{n-r} utolsó $n - 2r - t$ oszlopából áll
      - a B elemeihez tartozó $r \times (t + (r - t))$-s részmátrix A-ban: $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \end{array}\right)$
      - az $E - B$ elemeihez tartozó részmátrix A'-ben: $A_1' = \left(\begin{array}{c|c|c} -C^{\mathrm{T}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} & 0 \\ \hline & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$
    - $r = r(B) \iff 0 \neq |\det A_1| = |\det C| = |\det -C^T| = |\det A_2| \iff n - r = r(E - B)$
  - $r(\mathcal{M}(A')) \leq n - r = r(E - B) \implies r(\mathcal{M}(A')) = n - r$, $E - B$ valóban bázis $\mathcal{M}(A')$-ben
    - bázis komplementere bázis (és ezt fordítva is elmondhatjuk)
    - $\mathcal{B}(A') = \{E - B : B \in \mathcal{B}(A)\} \implies \mathcal{M}(A') = \mathcal{M}^*$ ■

11. Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).

- **11.1. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid *grafikus*, ha előáll valamely $G = (V, E)$ gráf $\mathcal{M}(G)$ körmatroidjaként, ahol $\mathcal{F}$ elemei a G-beli erdők
- **11.2. definíció:** az $\mathcal{M}$ matroid *kografikus*, ha egy grafikus matroid $[\mathcal{M}(G)]^*$ duálisa
  - $\mathcal{F}$ elemei nem tartalmaznak G-beli *vágást* (vágásmatroid)
  - $X \in \mathcal{F} \iff (V(G), E(G) - X)$ ugyanannyi összefüggő komponensből áll, mint G
- **11.3. tétel:** egy $\mathcal{M}(G)$ grafikus matroid pontosan akkor kografikus, ha G síkbarajzolható
  - ekkor $[\mathcal{M}(G)]^* = \mathcal{M}(G^*)$, a matroid duális épp a gráfelméleti duális körmatroidja
  - *nem bizonyítjuk*
- **11.4. definíció:** az $\mathcal{M}$ matroid *lineáris*, ha reprezentálható valamely T test felett
- **11.5. definíció:** az $\mathcal{M}$ matroid *bináris*, ha reprezentálható a GF_2 kételemű test felett
  - minden bináris matroid lineáris a GF_2 test felett
- **11.6. definíció:** az $\mathcal{M}$ matroid *reguláris*, ha minden T test felett reprezentálható
  - minden reguláris matroid bináris (és lineáris) $T = \mathrm{GF}_2$ választással
- matroidok halmazainak kapcsolatai
  - grafikus, kografikus $\subset$ reguláris $\subset$ bináris $\subset$ lineáris $\subset$ matroidok
  - grafikus $\cap$ kografikus $\neq \emptyset$
- **11.7. tétel:** minden $\mathcal{M}(G)$ grafikus matroid reguláris
  - *bizonyítás:* legyen T test, $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ és irányitsuk G éleit tetszőlegesen
  - rendeljük az x_i csúcshoz a v_i egységvektort és az $e = (x_i, x_j)$ élhez a $w_e = v_i - v_j$
    - ez épp G egy irányításának illeszkedési mátrixsza
  - $X \subseteq E$ tartalmaz kört $\Longrightarrow W = \{w_e : e \in X\}$ lineárisan összefüggő
    - legyen $C \subseteq X$ egy kör X-ben valamilyen irányítással
    - ha $e \in C$ párhuzamos C-vel, $\alpha_e := 1$; ha ellentétes irányú, $\alpha_e := -1$
    - ekkor $\sum_{e \in C} \alpha_e w_e = 0$ W elemeinek nemtriviális 0 lineáris kombinációja
  - $X \subseteq E$ tartalmaz kört $\Longleftarrow W = \{w_e : e \in X\}$ lineárisan összefüggő
    - legyen $\sum_{w_e \in W} \beta_e w_e = 0$ egy nemtriviális 0 linearis kombináció
    - $Y := \{e \in X : \beta_e \neq 0\}$ és $V' :=$ az Y-beli élek végpontjainak halmaza
    - $\sum_{e \in Y} \beta_e w_e = 0 \Longrightarrow \forall v \in V'$-re legalább 2 Y-beli él illeszkedik
    - a (V', Y) részgráf $\forall$ pontja legalább 2.-fokú $\Longrightarrow (V', Y) \subseteq G$ tartalmaz kört ■
- **11.8. tétel:** minden $[\mathcal{M}(G)]^*$ kografikus matroid reguláris
  - *bizonyítás:* a 10.11 tétel szerint ha $\mathcal{M}$ reprezentálható T felett, akkor $\mathcal{M}^*$ is
  - $\mathcal{M}(G)$ minden T felett reprezentálható $\Longrightarrow [\mathcal{M}(G)]^*$ is ■
- **11.9. definíció:** a T test *karakterisztiká*ja az a min. k, melyre $\forall x \in T : \overbrace{x + x + \ldots + x}^{k \text{ db}} = 0$
  - ha valamely $x \neq 0$-ra $\overbrace{x + \ldots + x}^{k \text{ db}} = 0$, akkor ez $\forall y \in T$-re is teljesül, mert $\overbrace{y + y + \ldots + y}^{k \text{ db}} =$ $= \frac{y}{x}(\overbrace{x + x + \ldots + x}^{k \text{ db}}) = \frac{y}{x} \cdot 0$
- **11.10. példa:** $\mathcal{F}_7 =$ 

Fano-matroid, $\mathcal{F}_7^- =$ 

anti-Fano-matroid
  - $\forall$ 4 elemű halmaz összefüggő, a 3 eleműek közül az egy egyenesre / körre esők

- $\mathcal{F}_7$ pontosan a $k=2$ karakterisztikájú testek felett koordinátázható
- $\mathcal{F}_7^-$ pontosan a $k\neq 2$ karakterisztikájú testek felett koordinátázható
- *bizonyítás:* $r(\mathcal{F}_7)=r(\mathcal{F}_7^-)=3 \Longrightarrow$ feltehető: $a\mapsto(1,0,0)$, $c\mapsto(0,1,0)$, $e\mapsto(0,0,1)$
  - ekkor $b\mapsto(x,y,0)$, $d\mapsto(0,z,u)$, $f\mapsto(v,0,w)$, $g\mapsto(q,r,s)$
  - $\{a,d,g\}\notin\mathcal{F} \Longrightarrow \begin{vmatrix}1&0&q\\0&z&r\\0&u&s\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow sz=ru$; hasonlóan $sv=qw$, $rx=qy$
  - $\{b,d,f\}\notin\mathcal{F}(\mathcal{F}_7)$, de $\in\mathcal{F}(\mathcal{F}_7^-) \Longrightarrow \begin{vmatrix}x&0&v\\y&z&0\\0&u&w\end{vmatrix}=0$ $\mathcal{F}_7$-ben, de $=0$ $\mathcal{F}_7^-$-ban
    - $wxz+uvy=0$ $\mathcal{F}_7$-ben, de $\neq$ $\mathcal{F}_7^-$-ban
    - de $\frac{sz}{u}x=\frac{sv}{w}y \Longrightarrow swxz=suvy \Longrightarrow wxz=uvy$
    - $wxz+wxz=0$ $\mathcal{F}_7$-ben pontosan akkor teljesül, ha T karakterisztikája $=2$
    - $wxz+wxz\neq 0$ $\mathcal{F}_7^-$-ban pontosan akkor teljesül, ha T karakterisztikája $\neq 2$ ■
- **11.11. következmény:** az $\mathcal{F}_7\oplus\mathcal{F}_7^-$ matroid nem lineáris
  - T karakteriszikája egyszerre kellene 2 és nem 2 legyen

– **11.12. példa:** példák matroidokra

nem lineáris	$\mathcal{F}_7\oplus\mathcal{F}_7^-$	lineáris, de nem bináris	$\mathcal{U}_{4,2}, \mathcal{F}_7^-$
bináris, de nem reguláris	$\mathcal{F}_7$	reguláris, de nem grafikus	$\mathcal{M}(K_5)\oplus[\mathcal{M}(K_5)]^*$
grafikus, de nem kografikus	$\mathcal{M}(K_5)$	kografikus, de nem grafikus	$[\mathcal{M}(K_5)]^*$
grafikus és kografikus	$\mathcal{M}(G)$, G síkbarajzolható		

- K_5 helyett tetszőleges nem síkbarajzolható gráf (pl. $K_{3,3}$) állhat

– **11.13. tétel:** Tutte tételei

- $\mathcal{M}$ bináris $\Longleftrightarrow$ nem minorja az $\mathcal{U}_{4,2}$
  - $\mathcal{U}_{4,2}$ rangja 2, de 2 dimenziós bináris vektorokból nem létezik 4 db páronként lineárisan független; $\mathcal{U}_{4,2}=\mathcal{M}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&\mathbf{2}\end{pmatrix}$
- $\mathcal{M}$ reguláris $\Longleftrightarrow$ nem minorja az $\mathcal{U}_{4,2}$, $\mathcal{F}_7$ és $\mathcal{F}_7^*$
- $\mathcal{M}$ grafikus $\Longleftrightarrow$ nem minorja az $\mathcal{U}_{4,2}$, $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_7^*$, $[\mathcal{M}(K_5)]^*$ és $[\mathcal{M}(K_{3,3})]^*$
  - ha $\mathcal{M}(G)$ egy G' gráf $[\mathcal{M}(G')]^*$ vágásmatroidja, akkor $\mathcal{M}(G)$ kografikus és G' síkbarajzolható kell legyen
- *nem bizonyítjuk*

– **11.14. tétel:** $\mathcal{U}_{n,k}$ pontosan akkor grafikus, ha $k=0,1,n-1$ vagy n

- *bizonyítás:* $\mathcal{U}_{n,0}$ egy csúccsal és n hurokkal reprezentálható, $\mathcal{U}_{n,1}$ n párhuzamos éllel
- $\mathcal{U}_{n,n-1}$ n élű körrel reprezentálható, $\mathcal{U}_{n,n}$ n elű erdővel
- $\mathcal{U}_{n,k}\setminus\{a\}=\mathcal{U}_{n-1,k}$, $\mathcal{U}_{n,k}/\{a\}=\mathcal{U}_{n-1,k-1}$
  - ha $2\le k\le n-2 \Longrightarrow \mathcal{U}_{n,k}$-nak van $\mathcal{U}_{4,2}$ minorja
  - ehhez $n-k-2$ törlés és $k-2$ összehúzás kell ■

12. Matroidok összege. k-matroid-metszet probléma, ennek bonyolultsága $k\ge 3$ esetén.

– **12.1. definíció:** az $\mathcal{M}_1=(E,\mathcal{F}_1),\mathcal{M}_2=(E,\mathcal{F}_2),\ldots,\mathcal{M}_k=(E,\mathcal{F}_k)$ matroidok *összege* az $\mathcal{N}= =\bigvee_{i=1}^k\mathcal{M}_i=(E,\mathcal{F}')$ halmazrendszer, ahol $\mathcal{F}'=\{X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k : X_i\in\mathcal{F}_i\ (i=1,2,\ldots,k)\}$

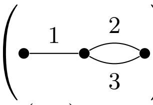
- $\bigvee_{i=1}^k(\mathcal{M}_i\setminus X)=(\bigvee_{i=1}^k\mathcal{M}_i)\setminus X$, de az / és a $\oplus$ műveletekre ez már nem igaz

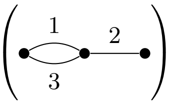
– **12.2. tétel:** matroidok $\bigvee_{i=1}^k\mathcal{M}_i$ összege matroidot alkot

- *bizonyítás:* $\mathcal{M}_1\vee(\mathcal{M}_2\vee\mathcal{M}_3)=(\mathcal{M}_1\vee\mathcal{M}_2)\vee\mathcal{M}_3 \Longrightarrow$ elegendő $\mathcal{M}_1\vee\mathcal{M}_2$-t vizsgálni
- (F1): $\emptyset=\emptyset\cup\emptyset\in\mathcal{F}_1\vee\mathcal{F}_2$
- (F2): $X=X_1\cup X_2$, $X_1\in\mathcal{F}_1$, $X_2\in\mathcal{F}_2$, $Y\subseteq X$
  - ekkor $X_1\supseteq Y\cap X_2\in\mathcal{F}_1$, $X_2\supseteq Y\cap X_2\in\mathcal{F}_2$, $(Y\cap X_2)\cup(Y\cap X_2)=Y\in\mathcal{F}'$
- (F3): legyen $X,Y\in\mathcal{F}'$; $|X|>|Y|$; $X=X_1\cup X_2$; $Y=Y_1\cup Y_2$; $X_1,X_2\in\mathcal{F}_1$; $Y_1,Y_2\in\mathcal{F}_2$
  - ált. megsz. nélkül tfh. $|X_1\cap Y_2|+|X_2\cap Y_1|$ minimális, $X_1\cap X_2=Y_1\cap Y_2=\emptyset$

- ált. megsz. nélkül tfh. $|X_1| > |Y_1| \implies \exists e \in X_1 - Y_1 : Y_1 \cup \{e\} \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$
- ha $e \notin Y_2 \implies e \in X - Y$, $Y \cup \{e\} = (Y_1 \cup \{e\}) \cup Y_2 \in \mathcal{F}'$
- ha $e \in Y_2 \implies Y = Y_1' \cup Y_2' = (Y_1 \cup \{e\}) \cap (Y_2 - \{e\})$ is egy jó felbontása Y-nak
  - vegyük észre, hogy $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $e \in X_1 \implies e \notin X_2$
  - $|X_1 \cap (Y_2 - \{e\})| + |X_2 \cap (Y_1 \cup \{e\})| = |X_1 \cap Y_2| - 1 + |X_2 \cap Y_1|$
  - a metszetek méretének összege nem lehetett minimális, ellentmondás ■

– **12.3. definíció:** az $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2), \ldots, \mathcal{M}_k = (E, \mathcal{F}_k)$ matroidok *metszet*e az $(E, \mathcal{F}')$ halmazrendszer, ahol $\mathcal{F}' = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{F}_i$

- ez nem mindig matroid, pl. $\mathcal{M}$(

) és $\mathcal{M}$(

) metszete nem az, mert $\mathcal{F}' = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} \implies$ (F3) nem teljesül

– **12.4. probléma:** (súlyozott) k-matroid metszet (k-MMP)
- INPUT: $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2), \ldots, \mathcal{M}_k = (E, \mathcal{F}_k)$, $p \in \mathbb{N}$ ($w\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $W \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)
- OUTPUT: $\exists$-e olyan $X \in \bigcap_{i=1}^k \mathcal{F}_i$, hogy $|X| \geq p$ (illetve $w(X) \geq W$)

– **12.5. tétel:** $k \geq 3$ esetén k-MMP NP-nehéz
- *bizonyítás:* 3-MPP NP-nehéz $\implies k > 3$, k-MMP NP-nehéz
  - adunk egy 3-MMP $\prec$ k-MMP Karp-redukciót ($k > 3$)
  - $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) \in$ 3-MPP $\iff (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \overbrace{\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_3, \ldots, \mathcal{M}_3}^{k-2 \text{ db}}) \in k$-MPP
- irányított s-t-HAMÚT $\prec$ 3-MMP $\implies$ 3-MPP NP-teljes
  - $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(G)$
  - $\mathcal{F}(\mathcal{M}_2) =$ azon élhalmazok, melyekben $\forall$ pont be-foka ≤ 1, $d_{\text{be}}(s) = 0$
    - egy partíció-matroidból kapjuk s bemenő éleinek összehúzásával
  - $\mathcal{F}(\mathcal{M}_3) =$ azon élhalmazok, melyekben $\forall$ pont ki-foka ≤ 1, $d_{\text{ki}}(t) = 0$
  - $p = |V| - 1 \implies X \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$; $|X| \geq p$ épp s-t Hamilton-út ■

13. A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.

– **13.1. probléma:** k-matroid partíció (k-MPP)
- INPUT: $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2), \ldots, \mathcal{M}_k = (E, \mathcal{F}_k)$
- OUTPUT: E független-e $\bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i$-ben? $\iff \bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i \stackrel{?}{=} (E, 2^E)$
  - $\iff \stackrel{?}{\exists} E_1 \in \mathcal{F}_1, E_2 \in \mathcal{F}_2, \ldots, E_k \in \mathcal{F}_k : E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$

– **13.2. algoritmus:** k-matroid partíció algoritmus[1]
- 0. lépés: $E_1 \leftarrow \emptyset$, $E_2 \leftarrow \emptyset$, $\ldots$, $E_k \leftarrow \emptyset$
- 1. lépés ha $\bigcup_{i=1}^k E_i = E \implies$ STOP, igaz
- 2. lépés van-e $x \in E - \bigcup_{i=1}^k E_i$, hogy $\bigcup_{i=1}^k E_i \cup \{x\}$-t partícionálható?
  - ha igen $\implies$ legyen $E_1, E_2, \ldots E_k$ az új partícionálás, GOTO 1.
  - ha nem $\implies$ STOP, hamis
- irányított $\vec{G} = (V, \vec{E})$ segédgráf konstrukció a 2. lépés elvégzéséhez
  - $V = E \cup P = E \cup \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$
  - $(a, p_i) \in \vec{E} \iff a \notin E_i$, de $E_i \cup \{a\} \in \mathcal{F}_i$
  - $(a, b) \in \vec{E} \iff$ valamely i-re $b \in E_i$, $a \notin E_i$, $E_i \cup \{a\} \notin \mathcal{F}_i$, $E_i \cup \{a\} - \{b\} \in \mathcal{F}_i$
- szélességi kereséssel keressük meg a legrövidebb utat $E' = E - \bigcup_{i=1}^k E_i$-ből P-be
  - van $\implies (a, b)$-kre $b \in E_i$ esetén $E_i \leftarrow E_i \cup \{a\} - \{b\}$; (a, p_i)-re $E_i \leftarrow E_i \cup \{a\}$
    - $\vec{G}$ definíciója miatt még $\forall E_i \in \mathcal{F}_i$; E' mérete 1-gyel (út első csúcsa) nőtt

[1] Edmonds, J. és D. R. Fulkerson (1965). Transversals and Matroid Partition. In: *J. OF RESEARCH of the Nat. Bureau of Standards—B. Math. and Math. Phys. Vol. 69B, No. 3*

- nincs $\Longrightarrow$ legyen $X \subset E$ az E'-ből irányított úton elérhető csúcsok halmaza
  - $r(X) \leq \sum_{i=1}^{k} r_i(X) < |X| \Longrightarrow E \supset X \notin \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i \overset{(F2)}{\Longrightarrow} E$ nem lehet független
- lépésszám: $O(|E| + \overbrace{c(n+k)^2}^{\text{gráf}} + \overbrace{c(n+k)^2}^{\text{szélességi}})$

– **13.3. tétel:** az $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ azonos rangú ($r_1(E) = r_2(E)$) matroidoknak pontosan akkor van közös bázisa, ha $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^* = (E, 2^E)$
- ($\Longrightarrow$) ha B közös bázis, akkor $E - X$ bázisa $\mathcal{M}_2^*$-nak
  - $E = X \cup (E - X)$ független az összegben $\Longrightarrow \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^*$ teljes
- ($\Longleftarrow$) legyen $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \in \mathcal{F}_1$, $E_2 \in \mathcal{F}_2^*$
  - $|E| \leq |E_1| + |E_2| = r_1(E_1) + r_2^*(E_2) = r_1(E_1) + (|E| - r_2(E) + r_2(E - E_2)) \leq$
    $\leq r_1(E) + (|E| - r_2(E)) = |E|$
  - mindenhol egyenlőség kell álljon, tehát $|E| \leq |E_1| + |E_2 \Longrightarrow E_1 = E - E_2$
  - $r_1(E_1) = r_1(E)$, $r_2(E) = r_2(E - E_2) = r_2(E_1) \Longrightarrow E_1$ közös bázis ■

– **13.4. következmény:** 2-MMP visszavezetése 2-MPP
- legyen $\mathcal{M}_1' = (E, \mathcal{F}_1')$, $\mathcal{M}_2' = (E, \mathcal{F}_2')$, ahol $\mathcal{F}_i' = \{X \in \mathcal{F}_i : |X| \leq p\}$ a matroidok *csonkoltjai*
- $\forall$ p méretű független halmaz bázis a megfelelő csonkolt matroidban
- $\mathcal{M}_1' \vee (\mathcal{M}_2')^* = (E, 2^E) \Longleftrightarrow \mathcal{M}_1'$-nek és $\mathcal{M}_2'$-nek van közös bázisa
- ez a bázis a 2-MMP-ben keresett p méretű közös független halmaz $\mathcal{M}_1$-ben és $\mathcal{M}_2$-ben

14. k-polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

– **14.1. definíció:** $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ *k-polimatroid rangfüggvény*, ha
- (R1) $r(\emptyset) = 0$ (R2$'$) $\forall e \in E : r(\{e\}) \leq k$ (R3) $Y \subseteq X \Longrightarrow r(Y) \leq r(X)$
- (R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$
- a matroid rangfüggvények $k = 1$ választással adódnak
  - $X = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \ldots \cup \{e_m\} \overset{(R4)}{\Longrightarrow} m \leq \sum_{i=1}^{m} r(\{e_i\}) \leq r(X)$
- másik irány: $\forall X \subseteq E : r(X) \leq k|X|$

– **14.2. definíció:** $X \subseteq E$ egy k-matching, ha $r(X) = k|X|$

– **14.3. példa:** $G = (V, E)$ gráf, $r(X) =$ az $X \subseteq E$ élek által lefedett csúcsok halmaza
- r egy 2-polimatroid-rangfüggvény, a 2-matchingek G párosításai

– **14.4. probléma:** k-polimatroid matching (k-PMMP)
- INPUT: $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ k-polimatroid rangfüggvény, $p \in \mathbb{N}$
- OUTPUT: létezik-e $X \subseteq E$, hogy $r(X) = k|X|$ és $|X| \geq p$

– **14.5. tétel:** a k-PMMP $k \geq 3$ esetén NP-nehéz
- *bizonyítás:* k-MMP $\prec$ k-PMMP és k-MMP NP-nehéz
- ha $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k$ matroidok $\Longrightarrow r(X) = \sum_{i=1}^{k} r_i(X)$ k-polimatroid rangfüggvény
  - a k-matchingek pontosan a független halmazok $\forall \mathcal{M}_i$-ben
  - $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k; p) \in k\text{-MMP} \Longleftrightarrow (\sum_{i=1}^{k} r_i, p) \in k\text{-PMMP}$ ■

– **14.6. tétel:** ha r mindössze egy $O(1)$ időben kiszámolható orákulummal adott $\Longrightarrow$ 2-PMMP nem oldható meg polinomidőben
- *bizonyítás:* legyen $|E| = 2n$, $E_0 \subset E$, $|E_0| = n$
- $r_1(X) := \begin{cases} 2|X|, & \text{ha } |X| < n, \\ 2n-1, & \text{ha } |X| = n, \\ 2n, & \text{ha } |X| > n, \end{cases}$ $r_2(X) := \begin{cases} 2|X|, & \text{ha } |X| < n, \\ 2n, & \text{ha } X = E_0, \\ 2n-1, & \text{ha } X \neq E_0, |X| = n, \\ 2n, & \text{ha } |X| > n, \end{cases}$ $p := n$
- $(r_1, p) \notin$ 2-PMMP, de $(r_2, p) \in$ 2-PMMP (E_0 egy $p = n$ elemű k-matching)
  - ennek eldöntéséhez az összes n elemű részhalmazt meg kell vizsgálni
  - ez $\binom{2n}{n} = O(4^n / \sqrt{\pi n})$ darab r hívást igényel ■

    - nem használtuk ki, hogy 2-PMMP NP-nehéz, a bizonyítás P = NP esetén is működik
- **14.7. tétel:** (Lovász László tétele)
    - ha az r 2-polimatroid rangfüggvény $r(X) = \dim\langle\bigcup_{i\in X}\{a_i, b_i\}\rangle$ alakban adott, ahol $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\{a_i, b_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^k \implies r$-en 2-PMMP polinomidőben megoldható
    - az ilyen r mindig 2-polimatroid rangfüggvény
    - *nem bizonyítjuk*

Közelítő és ütemezési algoritmusok

15. Polinomiális időben megoldható feladat fogalma, példák. Az NP, co-NP, NP-nehéz és NP-teljes problémaosztályok definíciója, viszonyaik, példák problémákra valamennyi osztályból. NP-nehéz feladatok polinomiális speciális esetei: algoritmus a maximális független ponthalmaz problémára és az élszínezési problémára páros gráfokon. Additív hibával közelítő algoritmusok speciális pont-, illetve élszínezési problémákra.

- algoritmuselméleti alapfogalmak
    - **15.1. definíció:** *kiszámítási problémá*ról akkor beszélünk, ha egy I bemenet $f(I)$ függvényét szeretnénk kimenetként megadni
        - *eldöntési probléma*: $f(I) \in \{\textsc{Igen}, \textsc{Nem}\}$
    - **15.2. definíció:** *optimalizálási probléma* olyan kiszámítási probléma, ahol
        - az I bemenethez X_I a *lehetséges kimenetek* halmaza, $c\colon X_I \to \mathbb{R}$ valós függvény
        - $f(I) = x^* \in X_I$, hogy $c(x^*) = \max\{c(x) : x \in X_I\}$ (illetve $c(x^*) = \min\{c(x) : x \in X_I\}$)
        - a kimenet nemcsak az optimum értéke, hanem maga az x^* optimális megoldás
    - **15.3. definíció:** egy $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény *polinomális*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N} : f(n) \le c_1 n^{c_2}$
        - egy algoritmus akkor *polinomiális* ha $\forall$ n méretű bemenetre $f(n)$ időben kiszámítja a kimenetet, ahol f polinomiális
        - egy probléma *polinom időben megoldható*, ha $\exists$ rá polinomiális algoritmus
    - **15.4. definíció:** az A probléma *polinom időben visszavezethető* B-re ($A \prec_{\text{Cook}} B$), ha A polinom időben megoldható a B-t megoldó algoritmus szubrutinként hívásával
        - B hívása $O(1)$ lépésnek számit
    - **15.5. definíció:** döntési problémák osztályai
        - P := a polinom időben megoldható eldöntési problémák osztálya
            - pl. teljes párosítás páros gráfban, k-matroid-partíció
        - NP := azon eldöntési problémák osztálya, ahol az Igen válaszra létezik polinomiális méretű, polinomiális időben ellenőrizhető tanú
            - pl. Hamilton-kör, k-matroid-metszet ($k \ge 2$)
        - co-NP := azon eldöntési problémák osztálya, ahol az Nem válaszra létezik polinomiális méretű, polinomiális időben ellenőrizhető tanú
            - pl. teljes párosítás páros gráfban (Kőnig tétele, Hall-tétel), síkbarajzolhatóság (Kuratowski-tétel), teljes párosítás tetszőleges gráfban (Tutte-tétel)
        - egy B probléma *NP-nehéz*, ha $\forall A \in \text{NP} : A \prec_{\text{Cook}} B$
            - pl. az általános k-polimatroid matching NP-nehéz, de nem NP-beli
        - egy B probléma *NP-teljes*, ha NP-beli és NP-nehéz
            - pl. SAT (Cook – Levin tétel), 3SZÍN, HAM, LÁDAPAKOLÁS
    - P $\subseteq$ NP $\cap$ co-NP, NP-teljes = NP $\cap$ NP-nehéz, P $\overset{?}{=}$ NP
- **15.6. probléma:** maximális független ponthalmaz páros gráfban
    - Input: $G = (A, B; E)$ páros gráf   Output: F maximális független ponthalmaz
    - a probléma általános gráfra NP-nehéz, de páros gráfra polinomiális
    - futtasuk le a gráfra a javítóutas algoritmust (polinom idejű)

- **15.7. állítás:** ekkor $F = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_3$ maximális független ponthalmaz
  - $A_1, B_1 =$ az A-, illetve B-beli párosítatlan pontok halmaza
  - $B_2 =$ az A_1-ből alternáló úton elérhető pontok (nincs javító út $\Longrightarrow$ mind van párjuk)
  - $A_1 =$ a B_2-beli pontok párjai
  - $A_3 = A - A_1 - A_2$, $B_3 = B - B_1 - B_2$
  - *bizonyítás:* az algoritmus által megtalált M párosítás maximális $\Longrightarrow |M| = \nu(G)$
    - $\nu(G) =$ maximális párosítás mérete, $\tau(G) =$ min. lefogó ponthalmaz mérete
    - nincs él $A_1 \cup A_2$ és $B_1 \cup B_2$ között (1.3. tétel) $\Longrightarrow F$ független
    - $A \cup B - F = A_3 \cup B_2$ lefogó ponthalmaz $\Longrightarrow \tau(G) \leq |A_3 \cup B_2| = |F| = \nu(G)$
    - egy lefogó ponthalmaz egy párosítás $\forall$ élét le kell fogja $\Longrightarrow \nu(G) \leq \tau(G)$
    - így $\tau(G) \leq |A_3 \cup B_2| = |F| = \nu(G) \leq \tau(G) \Longrightarrow \nu(G) = \tau(G)$
  - indir. tfh. $\exists F' \subseteq A \cup B$ független ponthalmaz, $|F'| > |F|$
    - ekkor $A \cup B - F'$ lefogó ponthalmaz, de $|A \cup B - F'| < |A \cup B - F| = \tau(G)$
    - ez ellentmondás, F maximális kell legyen ■

– **15.8. probléma:** élszínezés páros gráfokon
- INPUT: $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf OUTPUT: G élszínezése $\Delta(G)$ színnel
- a probléma általános gráfra NP-nehéz, de páros gráfra polinomiális
- **15.9. tétel:** (Vizing tétele) ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf $\Longrightarrow \Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$
  - *nem bizonyítjuk*
- **15.10. tétel:** (Kőnig tétele) ha $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf $\Longrightarrow \chi_e(G) = \Delta(G)$
  - *bizonyítás:* meg fogunk adni egy polinomiális algoritmust a színezésre
- vegyük a gráf $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ éleit sorban, és színezzük meg őket egy-egy szabad színnel
  - legyen $e_i = \{u, v\}$, $u \in A$, $v \in b$ a most megszínezendő él
  - $d(u), d(v) \leq \Delta(G)$, és illeszkedik rájuk színezetlen él (e_i)
    - $\Longrightarrow$ mindkét csúcsnak $\exists$ szabad színe $\Longrightarrow$ ha $\exists$ közös szabad szín, e_i kapja meg azt
- tfh. az u szabad színe a *piros*, de a v-é a *kék*
  - legyen P_u az u-ból induló, felváltva kék–piros út (kör nem lehet)
  - ekkor $v \notin P_u$, mert akkor a végpontja lenne (v-ben a kék szabad)
    - de $u \in A$, $v \in B \Longrightarrow P_u$ páratlan hosszú $\Longrightarrow P_u$ utolsó éle kék
  - cseréljük fel P_u mentén a piros és a kék színeket
    - ez a meglevő színezést nem ronthatja el
    - u-ban most már a kék szabad, v-ben maradt szabad $\Longrightarrow e_i$ színezhető kékre ■

– **15.11. definíció:** egy maximalizálási (minimalizálási) problémát egy algoritmus C *additív hibától eltekintve helyesen old meg*, ha $\forall I : c(x^*) \geq \max_{x \in X_i} c(x) - C$ $(c(x^*) \leq \min_{x \in X_i} c(x) + C)$

– **15.12. definíció:** egy algoritmus C *additív hibával közelítő algoritmus*, ha adott optimalizálási problémát polinom időben, C additív hibától eltekintve helyesen old meg

– **15.13. probléma:** egyszerű gráfok élszínezése
- INPUT: $G = (V; E)$ egyszerű gráf OUTPUT: G minimális élszínezése
- Vizing tétele (15.9. tétel) szerint $\chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$
  - a tétel bizonyítása konstruktív, ad egy $\Delta(G)+1$ polinom időben
  - így a tételben szereplő algoritmus 1 additív hibával közelítő

– **15.14. probléma:** síkgráfok csúcsszínezése
- INPUT: $G = (V; E)$ síkgráf OUTPUT: G minimális csúcsszínezése
- **15.15. tétel:** (négyszíntétel) minden síkgráf színezhető 4 színnel, *nem bizonyítjuk*
  - létezik algoritmikus bizonyítás, ami polinomidőben előállít egy 4-színezést
  - ez egy 2 additív hibával közelítő algoritmus
- ha a 4-színező algoritmus előtt ellenőrizzük, hogy G páros-e $\Longrightarrow$ 2-színezhető
  - ez szélességi kereséssel polinomidőben megtehető

16. A Hamilton-kör probléma visszavezetése a leghosszabb kör probléma additív közelítésére. k-approximációs algoritmus fogalma, példák: két-két algoritmus a minimális lefogó ponthalmaz keresésére és a maximális páros részgráf keresésére. Minimális levelű, illetve maximális belső csúcsú feszítőfa keresése. Approximációs algoritmus az utóbbi feladatra (biz. nélkül).

- **16.1. probléma:** leghosszabb kör (LHK)
  - INPUT: $G = (V, E)$ gráf OUTPUT: G egy leghosszabb köre
  - **16.2. tétel:** ha P $\neq$ NP $\Longrightarrow$ LHK-re nincs C additív hibával közelítő algoritmus
    - *bizonyítás:* megmutatjuk, hogy HAM $\prec$ LHK C-additív közelítése
    - indir. tfh. $\exists$ C-additív hibájú közelítés LHK-ra
    - $G' :=$ osszuk fel a G gráf $\forall$ élét C új ponttal $\Longrightarrow$ egy él helyett $C+1$ új él
    - G' $k(C+1)$ hosszú körei G k hosszú köreinek felelnek meg
    - G'-ben van $n(C+1)$ hosszú kör $\Longleftrightarrow$ G-ben van n hosszú kör $\Longleftrightarrow$ G hamiltoni
    - G hamiltoni $\Longrightarrow$ a közelítő algoritmus $\geq n(C+1) - C$ hosszú x^* kört talál G'-ben
      - de G' köreinek hossza osztható $(C+1)$-gyel $\Longrightarrow$ x^* csak a Hamilton-kör lehet ■
- **16.3. definíció:** egy maximalizálás (minimalizálási) problémát egy algoritmus k *multiplikatív hibától eltekintve helyesen old meg*, ha $\forall I : c(x^*) \geq \frac{1}{k} \max_{x \in X_I} c(x)$ $(c(x^*) \leq k \min_{x \in X_I} c(x))$
- **16.4. definíció:** egy algoritmus k-*approximációs algoritmus*, ha polinomiális és k multiplikatív hibától eltekintve helyesen oldja meg az adott problémát
- **16.5. probléma:** minimális lefogó ponthalmaz (MLP)
  - INPUT: $G = (V, E)$ OUTPUT: egy X minimális lefogó ponthalmaz G-ben
  - MLP NP-nehéz, mert a maximális független halmaz (MFP) is az, és MFP $\prec$ MFP
    - X minimális független ponthalmaz $\Longleftrightarrow$ $V - X$ maximális lefogó ponthalmaz
    - az MFP nem k-approximálható (*nem bizonyítjuk*)
  - **16.6. algoritmus:** 2-közelítő algoritmus maximális párosítással
    - 1. lépés: keressük meg G egy M maximális párosítását
      - páros gráfban: magyar modszer, általános gráfban: Edmonds algoritmusa
    - 2. lépés $X :=$ az M-beli élek végpontjai
    - **16.7. tétel:** az így meghatározott X-re $|X| \leq 2\tau(G)$
      - *bizonyítás:* egy lefogó ponthalmaz M $\forall$ élét le kell fogja $\Longrightarrow$ $|M| = \nu(G) \leq \tau(G)$
      - $|F| = 2|M| = 2\nu(G) \leq 2\tau(G)$ ■
  - **16.8. algoritmus:** 2-közelítő algoritmus tovább nem bővíthető párosítással
    - 0. lépés: $M := \emptyset$
    - 1. lépés: ha van olyan $e \in E$, hogy $M \cup \{e\}$ párosítás $\Longrightarrow$ $M \leftarrow M \cup \{e\}$, GOTO 1.
      - egyébként M egy tovább nem bővíthető párosítás
    - 2. lépés: $X :=$ az M-beli élek végpontjai
    - **16.9. tétel:** az így meghatározott X-re $|X| \leq 2\tau(G)$
      - *bizonyítás:* a 16.7. tételben nem használtuk ki, hogy M maximális
      - így továbbra is $|F| = 2|M| \leq 2\nu(G) \leq 2\tau(G)$ ■
  - éles példa: m darab diszjunkt 1 hosszú út
    - optimális megoldás: mindegyik élnek csak az egyik végét vesszük bele $\Longrightarrow$ m csúcs
    - közelítő megoldás: mindegyik él mindkét vége $\Longrightarrow$ $2m$ csúcs
- **16.10. probléma:** maximális páros részgráf (MPR) $\Longrightarrow$ NP-nehéz (*nem bizonyítjuk*)
  - INPUT: $G = (V, E)$ gráf
  - $A, B : A \cup B = G, A \cap B = \emptyset$, az A és B között menő élek száma maximális
  - **16.11. algoritmus:** 2-approximációs algoritmus 1.
    - 1. lépés: osszuk ketté a csúcshalmazat A-ra és B-re tetszőlegesen
    - $d_s\ (v) :=$ v-ből a saját csoportjába menő élek száma
    - $d_m(v) :=$ v-ből a másik csoportba menő élek száma

        - 2. lépés: keressünk egy olyan v csúcsot, amire $d_s(v) > d_m(v)$
            - ha van ilyen v, helyezzük át a másik csoportba; GOTO 2.
        - 3. lépés: (A, B) egy 2-approximáció az MPR problémára
        - **16.12. tétel:** az így meghatározott (A, B) valóban 2-approximáció
            - *bizonyítás:* $\forall$ lépésben az A és B között haladó élek száma nő $\Longrightarrow \le |E|$ lépés
            - $\forall v \in V : d_m(v) \ge d_s(v) \Longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_m(v) \ge \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_s(v)$
            - $\frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_m(v)$ az A és B között menő élek száma
            - $\frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_m(v) = \frac{1}{4}\sum_{v\in V} d_m(v) + d_m(v) \ge \frac{1}{4}\sum_{v\in V} d_m(v) + d_s(v) = \frac{1}{2}|E| \ge \frac{1}{2}|E_{\max}|$, ahol $E_{\max} \subseteq E$ a maximális páros részgráf éleinek halmaza ■
    - **16.13. algoritmus:** 2-approximációs algoritmus 2.
        - 1. lépés $A := \emptyset$, $B := \emptyset$
        - 2. lépés G pontjait valamilyen sorrendben véve helyezzük el azoka a halmazokba, ahol *kevesebb* szomszédjuk van
        - **16.14. tétel:** az így meghatározott (A, B) valóban 2-approximáció
            - továbbra is igaz az, hogy $\forall v \in V : d_m(v) \ge d_s(v) \Longrightarrow$ lásd a 16.12. tételt ■
        - jobb közelítéshez (ha szerencsénk van) még futtathatjuk a 16.11. algoritmust
- **16.15. probléma:** minimális levelű feszítőfa (MLF)
    - INPUT: $G = (V, E)$ összefüggő gráf
    - OUTPUT: F minimális számú 1 fokú csúcsot tartalmazó feszítőfa G-ben
    - **16.16. tétel:** MLF NP-nehéz
        - *bizonyítás:* HAMÚT $\prec$ MLF
            - a Hamilton-út 2 levelű feszítőfa, ennél kevesebb levelű pedig nem létezhet ■
        - MLF-re nem létezik k-approximációs algoritmus (*nem bizonyítjuk*)
- **16.17. probléma:** maximális belső csúcsú feszítőfa (MBF)
    - INPUT: $G = (V, E)$ összefüggő gráf
    - OUTPUT: F maximális számú *nem* 1 fokú csúcsot tartalmazó feszítőfa G-ben
    - MBF ekvivalens MLF-fel, ezért szintén NP-nehéz, de már k-approximálható
    - **16.18. algoritmus:** 2-appriximációs algorimus MBF-re
        - ILST = Independent Leaves Spanning Tree
        - 0. lépés: legyen F egy tetszőleges feszítőfa G-ben
        - 1. lépés: ha F Hamilton-út, vagy a levelei független halmazt alkotnak $\Longrightarrow$ STOP
        - 2. lépés: legyen a és b F két levele, ahol $\{a, b\} \in E$ (szomszédosak G-ben)
            - keressük meg a $P = a \rightsquigarrow b$ (egyértelmű) utat F-ben
            - F nem Hamilton-út $\Longrightarrow$ P-nek van F-ben ≥ 3. fokú csúcsa $\Longrightarrow$ az egyik legyen v
        - 3. lépés: legyen $w : \{v, w\} \in B$, $F \leftarrow F - \{\{v, w\}\} \cup \{\{a, b\}\}$, GOTO 1.
            - az így kapott F továbbra is feszítőfa, a levelek száma csökkent
        - **16.19. tétel:** a fenti algoritmus polinomiális, F egy 2-approximáció MBF-re
            - *nem bizonyítjuk*
    - **16.20. algoritmus:** 2-appriximációs algorimus MBF-re mélységi kereséssel
        - 1. lépés: legyen F a G mélységi feszítőfája $r \in E$-ből indítva
        - 2. lépés: ha F Hamilton-út, vagy $d(r) > 1 \Longrightarrow$ STOP
            - ha $d(r) = 1$, de r nem szomszédos F másik levelével $\Longrightarrow$ STOP
        - 3. lépés: legyen a olyan levele F-nek, mellyel r szomszédos
            - keressük meg a $P = r \rightsquigarrow a$ utat F-ben (egyértelmű)
            - v az a-hoz legközelebbi ≥ 3. fokú csúcs P-ben
            - w a v-vel szomszédos csúcs a $v \rightsquigarrow a$ úton P-ben (lehet, hogy $w = a$)
        - 4. lépés: $F \leftarrow F - \{\{v, w\}\} \cup \{\{r, a\}\}$
        - **16.21. tétel:** a fenti algoritmus $O(|E|)$ idejű, F egy 2-approximáció MBF-re
            - *nem bizonyítjuk*

17. A minimális lefogó ponthalmaz probléma visszavezetése a halmazfedési feladatra, a halmazfedési feladat közelítése, éles példa. Közelítő algoritmus a Steiner-fa problémára, éles példa.

- **17.1. probléma:** súlyozott halmazfedés (SHF)
  - INPUT: n elemű U alaphalmaz, $\mathcal{R} \subseteq 2^U : \bigcup_{S\in\mathcal{R}} S = U$, $c\colon \mathcal{R} \to \mathbb{Q}^+$ költségfüggvény
  - OUTPUT: $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, ahol $\bigcup_{S\in\mathcal{R}'} S = U$ és $\sum_{S\in\mathcal{R}'} c(S)$ minimális
  - **17.2. tétel:** a súlyozott halmazfedés probléma NP-nehéz
    - *bizonyítás:* megmutatjuk, hogy MLP $\prec$ SHF
    - keressük a $G = (V, E)$ gráf minimális lefogó ponthalmazát
    - $U := E$, $\mathcal{R} := \{E_v = \{e : u \in V, e = \{v, u\} \in E\} : v \in V\}$, $c(E_v) := 1$
    - $\mathcal{R}'$ minimális fedés $\iff F \subseteq V$ min. lefogó ponthalmaz, ahol $\mathcal{R}' = \{E_v : v \in \mathcal{R}'\}$ ■
  - **17.3. tétel:** ha P $\neq$ NP $\implies \nexists$ konstants k-faktorú approximáció SHF-re (*nem bizonyítjuk*)
  - **17.4. algoritmus:** Chvátal mohó algoritmusa
    - 0. lépés: $\mathcal{R}' := \emptyset$, $C := \emptyset$ a már lefedett elemek halmaza
    - 1. lépés: ha $C = U \implies$ STOP, egyébként $S = \arg\min_{S\in\mathcal{R}} \frac{c(S)}{|S-C|}$
    - 2. lépés: $\mathcal{R}' \leftarrow \mathcal{R}' \cup \{S\}$, $C \leftarrow C \cup S$, GOTO 1.
  - **17.5. tétel:** Chavátal mohó algoritmusa H_k-approximáció, ahol $k = \max_{S\in\mathbb{R}} |S|$
    - $\ln n \le H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \le \ln n + 1$
    - *bizonyítás:* az algoritmus polinomiális
    - az x elem $p(x)$ *ára* az őt elsőkét fedő $S \in \mathcal{R}'$ halmazra jutó $\frac{c(S)}{|S-C|}$ költség
      - $c(S) = \sum_{x\in S-C} \frac{c(S)}{|S-C|} = \sum_{x\in S-C} p(x) \implies c(\mathcal{R}') = \sum_{S\in\mathcal{R}'} c(S) = \sum_{x\in U} p(x)$
    - legyen $\mathcal{R}^*$ egy min. összsúlyú fedés, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \in \mathcal{R}^*$ $(r \le k)$
      - ált. megsz. tfh. az algoritmus S elemeit $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$ sorrendben fedte le
      - amikor x_i-t lefedtük, $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_{i-1} \in C \implies \frac{c(S)}{|S-C|} \ge \frac{c(S)}{i}$
      - $\forall x_i \in S$-t fedő S_i'-re $\frac{c(S_i')}{|S_i'-C|} \le \frac{c(S)}{i} \implies \sum_{x_i\in S} p(x_i) \le \sum_{x_i\in S} \frac{c(S)}{i} = H_r c(S)$
      - $c(\mathcal{R}') = \sum_{x\in U} p(x) \le \sum_{S^*\in\mathcal{R}^*} \sum_{x_i\in S^*} p(x_i) \le \sum_{S^*\in\mathcal{R}^*} H_{|S^*|} c(S^*) \le$
        $\le \sum_{S^*\in\mathcal{R}^*} H_k c(S^*) = H_k \sum_{S^*\in\mathcal{R}^*} c(S^*) = H_k c(\mathcal{R}^*)$ ■
  - éles példa: $U := \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{R} := \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, U\}$, $c(\{i\}) := \frac{1}{i}$, $c(U) := 1 + \epsilon$ $(\epsilon > 0)$
    - $\mathcal{R}' = \{\{n\}, \{n-1\}, \ldots, \{1\}\}$ ebben a sorrendben
      - a j. halmaz bevétele után $\{n-j\}$ költsége $= \frac{c(\{n-j\})}{1} = \frac{1}{n-1} < U$ költsége $= \frac{c(U)}{n-j} = \frac{1+\epsilon}{n-j}$
    - $\mathcal{R}^* = \{U\}$, $c(\mathcal{R}^*) = 1 + \epsilon$, de $c(\mathcal{R}') = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = H_n \implies \frac{c(\mathcal{R}')}{c(\mathcal{R}^*)} = \frac{H_k}{1+\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\to 0} H_n = H_k$
- **17.6. probléma:** Steiner-fa
  - INPUT: $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf; $S \subset V$ Steiner-pontok; $T = V - S$ terminálok; $c := E \to \mathbb{Q}^*$ költségfűggvény
  - OUTPUT: $F \subseteq G$ a T minden csúcsát tartalmazó *Steiner-fa*, ahol $\sum_{e\in F} c(e)$ minimális
  - **17.7. tétel:** a Steiner-fa probléma NP-nehéz (*nem bizonyítjuk*)
  - **17.8. probléma:** metrikus Steiner-fa
    - INPUT: mint a Steiner-fa problémánál, de G teljes gráf és c teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget
    - **17.9. algoritmus:** 2-approximáció a metrikus Steiner-fa problémára
      - legyen az $X \subseteq V$ által feszített részgráf G-ben $G[X]$
      - (pl. Kruskal algoritmusával) keressük $G[T]$ min. feszítőfáját $\implies$ ez a Steiner-fa
    - **17.10. lemma:** ha c a G teljes gráf metrikus élsúlyozása és $R = x \rightsquigarrow y$ élsorozat $\implies$ $c(x, y) \le c(R)$
      - *bizonyítás:* teljes indukcióval R éleinek r száma szerint
      - ha $r = 1$, az állítás triviális
      - legyen $R = ((x, z), R') \implies$ az ind. feltevés szerint $c(z, y) \le c(R')$
      - $c(R) = c(x, z) + c(R') \ge c(x, z) + c(z, y) \overset{\triangle\text{-egyenlőtlenség}}{\ge} c(x, y)$ ■

- **17.11. tétel:** $F = G[T]$ min. feszítőfája 2-approximáció a metrikus Steiner-fa problémára
  - *bizonyítás:* az eljárás polinomiális, F tényleg Steiner-fa
  - legyen D az optimális Steiner-fa
  - $D' :=$ duplázzuk meg D éleit $\implies D'$-ben minden fokszám páros
  - D' euleri $\implies$ legyen D' Euler-körsétája $U = (u_0, f_1, u_1, f_2, u_2, \ldots, f_m, u_m = u_0)$
  - legyenek $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{|R|}}$ $G[T]$ csúcsai az U szerinti sorrendben
  - ekkor $H = ((u_{i_1}, u_{i_2}), (u_{i_2}, u_{i_3}), \ldots, (u_{i_{|T|}}, u_{i_1}))$ a $G[T]$ Hamilon-köre („levágás")
  - $H' = H - \{$tetszőleges H-beli él$\}$ Hamilton-út $\implies H'$ egy feszítőfa $G[T]$-ben
  - $2c(D) = c(D') \overset{17.10.\text{ lemma}}{\geq} c(H) \geq c(H') \overset{F \text{ minimális}}{\geq} c(F)$ ■
- **17.12. algoritmus:** 2-approximáció a Steiner-fa problémára
  - legyen $G' :=$ teljes gráf $V(G)$-n, $c'(x,y) :=$ a legrövidebb $x \rightsquigarrow y$ út súlya G-ben
    - c' metrikus, mert $c'(x,z) = c_{\min}(x \rightsquigarrow z) \leq c_{\min}(x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z) = c'(x,y) + c'(y,z)$
  - legyen F' az (G', S, T, c') metrikus Steiner-fa approximációja
  - legyen $K = \bigcup_{e=\{x,y\} \in F'} \{$a legrövidebb $x \rightsquigarrow y$ út élei$\}$
  - $F'' =$ egy min. feszítőfa K-ban lesz a Steiner-fa
- **17.13. tétel:** F'' 2-aproximáció a Steiner-fa problémára
  - *bizonyítás:* az eljárás polinomiális, és F'' tényleg Steiner-fa, mert K lefedi T-t
  - legyen D az optimális (G', S, T, c') metrikus Steiner-fa, F^* az optimális Steiner-fa
  - F^* Steiner-fa G'-ben $\implies c'(D) \leq c'(F^*)$
  - $e = \{x,y\}$ 1 hosszú $x \rightsquigarrow y$ út $\implies \forall e \in E: c'(e) \leq c(e) \implies c'(F^*) \leq c(F^*)$
  - $c(F'') \leq c(K) \leq c'(F') \leq 2c'(D) \leq 2c'(F^*) \leq 2c(F^*)$ ■
- éles példa: legyen $G = (V, E)$ teljes gráf, $V := \{1, 2, \ldots, n\}$, $S = \{1\}$, $c(\{i,j\}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 1, \\ 2, & \text{ha } i, j \neq 1 \end{cases}$
  - ez metrikus $\implies$ nincs szükség metrizálásra, $F'' = F' = G[T]$ feszítőfája
  - $c(F'') = 2(n-2)$, de az optimális Steiner-fa $F^* = 1$ középpontú csillag, $c(F^*) = n-1$
  - $\frac{c(F'')}{c(F^*)} = \frac{2(n-2)}{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 2 \implies \forall k < 2$ approximációs faktorra $\exists$ ellenpélda elég nagy n-nel

18. A Hamilton-kör probléma visszavezetése az általános utazóügynök probléma k-approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmusa.

- **18.1. probléma:** általános utazóügynök probléma
  - Input: $G = (V, E)$ gráf, $c\colon E \to \mathbb{Q}^+$ súlyfüggvény
  - Output: G egy H minimális súlyú Hamilton-köre
  - **18.2. tétel:** P $\neq$ NP $\implies$ az általános utazóügynök problémára $\nexists$ k-approximáció
    - *bizonyítás:* indir. tfh. létezik k-approximáció $\implies$ ekkor HAM $\prec$ k-approx. utazóügynök
    - keressünk $G = (V, E)$-ben Hamilton-kört
      - $n = |V|$, $G' :=$ teljes gráf V-n, $c(e) := \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in E, \\ kn, & \text{ha } e \notin E \end{cases}$
      - G' mérete G méretében polinomiális
      - ha G hamiltoni $\implies G'$-ben van n súlyú Hamilton-kör
      - minden más Hamilton-köre G'-nek $\geq kn + n - 1$ súlyú
    - ha a k-approx. talál n súlyú kört $\implies$ ez G Hamilton-köre
    - egyébként a talált kör $\geq kn + n - 1$ súlyú
      - $n \leq \frac{kn+n-1}{k} \implies$ az optimális kör nem lehet G Hamilton-köre, G nem hamiltoni ■
- **18.3. probléma:** metrikus utazóügynök probléma
  - Input: mint az általános utazóügynöknél, de G teljes gráf és c teljesíti a $\triangle$-egyenlőtlenséget
  - **18.4. tétel:** a matrikus utazóügynök probléma NP-nehéz (*nem bizonyítjuk*)
- **18.5. algoritmus:** 2-approximáció a metrikus utazóügynök problémára
  - legyen G min. feszítőfája F, $F' =$ kettőzzük meg F éleit, $S = F'$ Euler-köre

    - az Euler-kör pl. zárt élsorozatok eltávolításával F'-ből és S-hez vételével polinom időben meghatározható
  - „vágjuk le” S-t egy H Hamilton-körré $\Longrightarrow$ ez lesz az utazóügynök Hamilton-köre
    - $\forall v \in V$-nek csak az első előfordulását tartjuk meg
    - az egymást követő $v_{i_j}, v_{i_{j+1}}$ csúcsokhoz bevesszük a $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\}$ élt
  - **18.6. tétel:** H valóban 2-approximáció
    - *bizonyítás:* az algoritmus polinomiális
    - legyen H^* az optimális Hamilton-kör
      - $H^{*\prime} = H^*$ egyik élének elhagyásával kapott Hamilton-út $\Longrightarrow$ H^* feszítőfa
      - $c(H) \overset{\text{17.10. lemma}}{\leq} c(F') = 2c(F) \overset{F \text{ min. feszítőfa}}{\leq} 2c(H^{*\prime}) \leq 2c(H^*)$ ■
- **18.7. algoritmus:** Christofides algoritmusa
  - F' előállításánál feleslgesen sok élt adtuk F-hez
    - elég csak a (páros sok) páratlan fokú csúcs fokszámát 1-gyel megnövelni
  - legyen V_p az F-ben páratlan fokú csúcsok halmaza
    - $|V_p|$ páros, mert egy gráfban a fokszámok összege mindig páros
  - $M = G[V_p]$ egy minimális költségű teljes párosítása, $F' \leftarrow F \uplus M$
    - ez Edmonds algoritmusával polinom időben meghatározható
  - az algoritmus többi része ugyanaz, mint a 2-approximáció
  - **18.8. tétel:** Christofides algoritmusa $\frac{3}{2}$-approximáció
    - *bizonyítás:* elég belátni, hogy $c(M) \leq \frac{1}{2}c(H^*)$
      - $\Longrightarrow c(F') = c(F) + c(M) \leq c(H^{*\prime}) + \frac{1}{2}c(H^*) \leq \frac{3}{2}c(H^*)$
    - legyen $V_p = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k}\}$ a csúcsok H^* menti sorrendje szerint
    - legyen $\widehat{H^*} = ((a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{2k}, a_1))$ Hamilton-kör $G[V_p]$-ben $\Longrightarrow c(\widehat{H^*}) \leq c(H^*)$
    - $\widehat{H^*} = P_1 \cup P_2$, ahol P_1 H páratlan, P_2 H páros indexű éleiből áll
    - $P_{1,2}$ párosítás $G[V_p]$-ben $\Longrightarrow c(M) \leq \min\{c(P_1), c(P_2)\} \leq \frac{1}{2}c(\widehat{H^*}) \leq \frac{1}{2}c(H^*)$ ■

19. Teljesen polinomiális approximációs séma fogalma. A részösszeg probléma, bonyolultsága. Teljesen polinomiális approximációs séma a részösszeg problémára.

20. Ütemezési feladatok típusai. Az $1|\text{prec}|C_{\max}$ és az $1\|\Sigma C_j$ feladat. Approximációs algoritmusok a $P\|C_{\max}$ feladatra: listás ütemezés tetszőleges sorrendben, éles példa tetszőleges számú gép esetére; listás ütemezés LPT sorrendben (biz. nélkül), éles példa tetszőleges számú gép esetére. Approximációs algoritmus a $P|\text{prec}|C_{\max}$ feladatra (biz. nélkül), példák: az LPT sorrend, illetve a leghosszabb út szerinti ütemezés sem jobb, mint $(2 - \frac{m}{1})$-approximáció. A $P|\text{prec}, p_i = 1|C_{\max}$ feladat, Hu algoritmusa (biz. nélkül).

Megbízható hálózatok tervezése

21. Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma, Menger irányítatlan gráfokra és élösszefüggőségre vonatkozó két tétele (biz. nélkül). $\lambda(G)$ meghatározása folyamok segítségével négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel.

22. $\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével,
Mader tétele, Nagamochi és Ibaraki algoritmusa.

23. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráfok keresése.
A probléma NP-nehézsége, Khuller – Vishkin algoritmus (biz. nélkül).

Hálózatelméleti alkalmazások

24. Kirchhoff tételei a klasszikus villamos hálózatok analízisére.

25. Kirchhoff eredményeinek általánosítása transzformátorokat vagy girátorokat is tartalmazó hálózatokra (biz. nélkül). Algoritmusok a feltételek ellenőrzésére.

26. Kirchhoff eredményeinek általánosítása: szükséges feltétel tetszőleges lineáris sok-kapukat is tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságára. Villamos hálózatok duálisa.

Statikai alkalmazások

27. Rúdszerkezetek, merevségi mátrix, merevség, egyszerű rácsos tartók,
Cremona – Maxwell diagramok.

28. Minimális merev rúdszerkezetek általános helyzetben, Laman tétele (biz. nélkül), Lovász és Yemini tétele.

29. Síkbeli négyzetrácsok és egyszintes épületek átlós merevítése.