

Rendszeroptimalizálás vizsgatételek (2015/2016. második félév)

Marussy Kristóf

2016. június 11.

Lineáris programozás

1. Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmus.

- **1.1. példa:** egy cég számos megrendelést kap különböző „egyszemélyes”, egyforma idő alatt elvégezhető munkák elvégzésére
 - kimutatást készítünk arról, hogy melyik dolgozó melyik munkát tudja elvégezni
 - cél a profit maximalizálása (lehető legtöbb munka elvégzése)
- **1.2. algoritmus:** „magyar módszer”
 - INPUT: $G = (F, L; E)$ páros gráf
 - OUTPUT: $M \subseteq G$ egy maximális méretű párosítás
 - induljunk ki egy tetszőleges (pl. az üres) M párosításból
 - *alternáló út* = párosítatlan F -beli csúcsból indul, \forall második éle az M -hez tartozik
 - *javító út* = olyan alternáló út, ami párosítatlan L -beli pontban ér véget
 - amíg találunk J javítóutat (pl. szélességi kereséssel) $\implies M \leftarrow M - (J \cap M) \cup (J - M)$
- **1.3. tétel:** a „magyar módszer” valóban maximális párosítást talál G -ben
 - *bizonyítás:* $M :=$ a párosítás, amit az algoritmus megtalált

$F_1 := F - M$, az M által le nem fedett F -beli pontok halmaza,

$L_2 :=$ az F_1 -ből alternáló úton elérhető pontok halmaza,

$F_2 :=$ az L_2 -beli pontok M szerinti párjai,

$L_3 :=$ az F_1 -ből alternáló úton nem elérhető L -beli pontok halmaza,

$F_3 :=$ az L_3 -beli pontok M szerinti párjai,

$L_1 := L - M$, az M által le nem fedett L -beli pontok halmaza

- vegyük észre, hogy G -ben nem vezethet $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között él

	F_1	F_2
L_1	1 hosszú javító út lenne	≥ 3 hosszú javító út lenne
L_3	az L_3 -beli csúcs 1 hosszú alternáló úton elérhető lenne, azaz L_2 -beli	az L_3 -beli csúcs ≥ 3 hosszú alternáló úton elérhető lenne, azaz L_2 -beli

- $F_1 \cup F_2 \nexists$ szomszédja L_2 -beli, $L_2 \cup F_3$ egy lefogó ponthalmaz

- mivel épp $|M| = |L_2 \cup F_3|$, M valóban maximális méretű

– 1.4. probléma: optimális hozzárendelés

- INPUT: $G = (F, L; E)$ páros gráf, $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény
- OUTPUT: $M \subseteq G$ párosítás úgy, hogy $\sum_{e \in M} w(e)$ maximális
- az optimális hozzárendelés megoldható maximális súlyú *teljes* párosítás keresésével
 - ha $|F| \neq |L|$, adjunk G -hez annyi csúcsot, hogy egyenlőek legyenek



- legyen $G' = (F, L; E')$ teljes páros gráf ($E' = F \times L$), $w'(e) := \begin{cases} w(e), & \text{ha } e \in E, \\ 0, & \text{ha } e \notin E \end{cases}$
 - G' egy M' maximális súlyú teljes párosítása a G maximális súlyú párosítása az $E' - E$ élek elhagyása után
 - G maximális súlyú M párosításához megfelelő $E' - E$ éleket hozzávéve G' maximális súlyú teljes párosítását kapjuk
 - **1.5. definíció:** a $c: F \cup L \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *címkézés* a $G = (F, L; E)$ páros gráfra és a $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvényre nézve, ha $\forall e = \{x, y\} \in E: c(x) + c(y) \geq w(e)$
 - **1.6. lemma:** a w súlyfüggvénnyel súlyozott $G = (F, L; E)$ páros gráf tetszőleges M teljes párosítására és tetszőleges c címkézésére igaz, hogy $\sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in F \cup L} c(v)$
 - *bizonyítás:* $\sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{e=\{f,l\} \in M} c(f) + c(l) \leq \sum_{f \in F} c(f) + \sum_{l \in L} c(l) = \sum_{v \in F \cup L} c(v)$ ■
 \forall csúcs legfeljebb 1-szer szerepel M -ben
 - **1.7. definíció:** a G gráf $e = \{x, y\}$ éle *piros*, ha $c(x) + c(y) = w(e)$
 - **1.8. következmény:** ha az M teljes párosítás \forall éle piros valamely c címkézésre nézve, akkor M maximális súlyú teljes párosítás
 - **1.9. algoritmus:** Egerváry algoritmus
 - INPUT: $G = (F, L; E)$ páros gráf, $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény
 - OUTPUT: $M \subseteq G$ teljes párosítás úgy, hogy $\sum_{e \in M} w(e)$ maximális
 - 0. lépés: legyen $M = \emptyset$, $c(v) = \begin{cases} \max_{y \in L, \{v,y\} \in E} w(v, y), & \text{ha } v \in F, \\ 0, & \text{ha } v \in L \end{cases}$
 - 1. lépés: a javító utas algoritmussal keressünk bővítsük M -et maximális élszámú párosítássá a piros részgráfban
 - ha M most már teljes \implies STOP, M a keresett párosítás, c a keresett címkézés, $w(M) = c(M)$
 - 2. lépés: $\delta := \min\{c(x) + c(y) - w(\{x, y\}) \mid \{x, y\} \in E, x \in F_1 \cup F_2, y \in L_1 \cup L_3\}$
 - állítsuk elő a $c(v) \leftarrow \begin{cases} c(v) - \delta, & \text{ha } v \in F_1 \cup F_2, \\ c(v) + \delta, & \text{ha } v \in L_2, \\ c(v), & \text{ha } v \in F_3 \cup L_1 \cup L_3 \end{cases}$ új címkézést, majd GOTO 1.
 - **1.10. tétel:** Egerváry algoritmus $O(n^2e)$ lépésben maximális súlyú teljes párosítást állít elő
 - *bizonyítás:* a 0. lépésben megadott c valóban címkézés
 - a 2. lépésben δ kiszámításához valóban van él $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között
 - ha nem lenne, $N(F_1 \cup F_2) = L_2$
 - $|F_1 \cup F_2| > |F_2| = |L_2|$ miatt ekkor nem teljesül a Hall-feltétel $\implies \nexists$ teljes párosítás!
 - a 2. lépés után is címkézés marad c
 - csak az $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között vezető élekre csökken $c(x) + c(y)$
- | | F_1 | F_2 | F_3 |
|-------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| L_1 | $-\delta$ (nem lehet piros) | $-\delta$ (nem lehet piros) | 0 |
| L_2 | $-\delta + \delta$ | $-\delta + \delta$ | $+\delta$ (piros eltűnhet) |
| L_3 | $-\delta$ (nem lehet piros) | $-\delta$ (nem lehet piros) | 0 |
- δ definíciója garantálja, hogy továbbra is $c(x) + c(y) \geq w(\{x, y\})$
 - M élei a 2. lépés után is pirosak
 - csak $x \in F_3, y \in L_2$ élek színeződhetnek vissza (itt nőtt $c(x) + c(y)$)
 - ezek nem lehetnek M élei, mert F_3 párja L_3 , L_2 párja F_2
 - továbbra is van F_1 -ből piros alternáló út L_2 csúcsaiba
 - egy iterációban vagy M , vagy L_2 elemszáma nő
 - $O(n)$ lépés után M elemszáma mindenképp nő, mert ekkorra már L_2 lefedné L -t
 - $O(n^2)$ iterációban M maximális párosítás lesz
 - ezért $O(n^2e)$ időben az algoritmus véget ér ■

2. A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier – Motzkin eliminációval.

- legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n \implies$ *lineáris program*
- **2.1. definíció:** *lineáris programozás alapfeladata:* $\min_x \{cx : Ax \leq b\}$
- kétdimenziós feladat megoldása
 - az $p_1x_1 + p_2x_2 \geq k$ alakú feltétel $p_1x_1 + p_2x_2 = k$ egyenese két félsíkra bontja a síkot
 - $a \geq$ jelnek megfelelő félsíkok metszete adja megengedett megoldások tartományát
 - ha $c = (q_1, q_2) \implies q_1x_1 + q_2x_2 = 0$ -val párhuzamos egyeneseket húzunk
 - minden egyenesre kiszámítjuk a célfüggvény értékét
 - a maximumhely a legnagyobb egyenes és a félsíkok metszetének közös pontja
 - általánosítás: *hipersíkok* által határolt *poliéder*
- ekvivalens átalakítások
 - egyenlőtlenség megszorozása *pozitív* számmal
 - két egyenlőtlenség összegének hozzávétele az egyenlőtlenségrendszerhez
 - *nem* ekvivalens: szorzás negatív számmal
- **2.2. algoritmus:** Fourier – Motzkin elimináció
 - n változós lineáris program visszavezetése egy $n - 1$ változós A^* , b^* lineáris programra
 - végül 1 változós lineáris program megoldása
 - $(A|b)$ bővített együttható mátrix
 - szorozzuk pozitív számokkal a sorokat, hogy az 1. oszlopban csak $-1, 0, 1$ legyen
 - legyen I, J, K rendre az 1-gyel, -1 -gyel és 0-val kezdődő sorok indexeinek halmaza
 - $\mathbb{R}^{|K| \times n} \ni (A_0|b_0) = (A|b)$ 0-val kezdődő sorai az első oszlop elhagyásával
 - $Ax \leq b$ egy megoldása $x = (\lambda, \bar{x})$ alakú $\implies A_0\bar{x} \leq b_0 \implies$ mikor van megfelelő λ ?
 - ha $J = \emptyset$ (nincs -1 -gyel kezdődő sor)
 - $\forall i \in I : \lambda + \bar{a}_i\bar{x} \leq b_j \implies \lambda \leq \min_{i \in I} b_i - \bar{a}_i\bar{x}$, ami mindig kielégíthető
 - $A^*, b^* =$ az \bar{A} -ból és b -ből az $i \in I$ indexű sorok elhagyásával kapott rendszer
 - ha $I = \emptyset$ (nincs 1-gyel kezdődő sor)
 - $\forall j \in J : -\lambda + \bar{a}_j\bar{x} \leq b_j \implies \lambda \geq \max_{j \in J} \bar{a}_j\bar{x} - b_j$, ami mindig kielégíthető
 - $A^*, b^* =$ az \bar{A} -ból és b -ből az $j \in J$ indexű sorok elhagyásával kapott rendszer
 - ha $I \neq \emptyset$ és $J \neq \emptyset \implies \forall i \in I : \lambda + \bar{a}_i\bar{x} \leq b_j$ és $\forall j \in J : -\lambda + \bar{a}_j\bar{x} \leq b_j$
 - $\forall i \in I, j \in J : \bar{a}_j\bar{x} - b_j \leq \lambda \leq b_i - \bar{a}_i\bar{x} \implies \forall i \in I, j \in J : (\bar{a}_i + \bar{a}_j)\bar{x} \leq b_i + b_j$
 - $A^*, b^* =$ az \bar{A} és b -ből $i \in I$ és $j \in J$ indexű sorait az összes lehetséges módon összeadjuk, a $k \in K$ indexű sorokat hozzávesszük és a csupa 0 első oszlopot elhagyjuk
 - egyváltozós rendszer megoldása
 - ha $\exists k \in K : b_k < 0 \implies$ a rendszer nem megoldható
 - ha $\max_{j \in J} -b_j > \min_{i \in I} b_i \implies$ a rendszer nem megoldható
 - egyébként $\implies x_1 \in [\max_{j \in J} -b_j, \min_{i \in I} b_i]$ megoldás

3. Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.

- **3.1. lemma:** Farkas-lemma, 1. alak
 - tetszőleges A és b esetén az alábbi két rendszer közül pontosan egynek van megoldása:
 - (1) $Ax \leq b$ (2) $yA = 0, y \geq 0, yb < 0$
- *bizonyítás:* (1) megoldható \implies (2) nem megoldható
 - $0 = 0x = (yA)x = y(Ax) \leq yb < 0$, ellentmondás
- (1) nem megoldható \implies (2) megoldható
 - alkalmazzuk a Fourier – Motzkin eliminációt az (1) egyenletrendszerre
 - a feltevés szerint a kapott egyváltozós $(A^*|b^*)$ rendszer nem megoldható
 - ha van $(0|\beta)$, $\beta < 0$ sor

- * $\exists (A|b)$ sorainak olyan nemnegatív y együtthatós lin. kombinációja, hogy $y(A|b) = (0, 0, \dots, 0|b) \implies y$ kielégíti (2)-t
- ha van $(-1, \beta_j)$ és $(1, \beta_i)$ sor úgy, hogy $-\beta_j > \beta_i \implies \beta = \beta_i + \beta_j < 0$
 - * $\exists y_j \geq 0 : y_j(A|b) = (0, 0, \dots, 0, -1|\beta_j)$ és $\exists y_i \geq 0 : y_i(A|b) = (0, 0, \dots, 0, 1|\beta_i)$
 - * ekkor $y = y_i + y_j \geq 0$, $y(A|b) = (0, 0, \dots, 0|b) \implies y$ kielégíti (2)-t ■
- **3.2. lemma:** Farkas-lemma, 2. alak
 - tetszőleges A és b esetén az alábbi két rendszer közül pontosan egynek van megoldása:
 - (1) $Ax = b$, $x \geq 0$ (2) $yA \geq 0$, $yb < 0$
 - *bizonyítás:* (1) megoldható \implies (2) nem megoldható
 - $0 \leq (yA)x = y(Ax) = yb < 0$, ellentmondás
 - (2) nem megoldható \implies (1) megoldható
 - vizsgáljuk az ekvivalens $y(-A) \leq 0$, $yb = -1 < 0$ rendszert
 - tömör alakban $(-A|b| -b)^T y \leq (0, 0, \dots, 0, -1, 1)^T$
 - a lemma 1. alakja szerint $\exists x : x(-A|b| -b)^T = 0$, $x \geq 0$, $x(0, 0, \dots, 0, -1, 1)^T < 0$
 - legyen $x = (\bar{x}|\lambda, \mu) \implies -A\bar{x} + (\lambda - \mu)b = 0$, $\bar{x} \geq 0$, $\lambda, \mu \geq 0$, $-\lambda + \mu < 0$
 - ekkor $A \frac{\bar{x}}{\lambda - \mu} = b$ és $\lambda - \mu > 0$ miatt $\frac{\bar{x}}{\lambda - \mu} \geq 0 \implies \frac{\bar{x}}{\lambda - \mu}$ kielégíti (1)-et ■
- **3.3. tétel:** ha $Ax \leq b$ megoldható, c tetszőleges \implies az alábbi állítások ekvivalensek
 - (1) az $Ax \leq b$ megoldáshalmazán cx felülről korlátos
 - (2) nincs megoldása az $Az \leq 0$, $cz > 0$ rendszernek
 - (3) van megoldása az $yA = c$, $y \geq 0$ rendszernek
 - *bizonyítás:* (1) \implies (2), legyen x_0 (1) egy megoldása és indir. tfh. z (2) egy megoldása
 - ekkor $A(x_0 + \lambda z) \leq b$, de $\lambda > 0$ esetén $c(x_0 + \lambda z) = cx_0 + \lambda cz$ tetszőlegesen nagy
 - cx nem felülről korlátos \implies ellentmondás
 - (2) \implies (3), tekintsük a (nem megoldható) $z(-A)^T \geq 0$, $z(-c) < 0$ rendszert
 - a Farkas-lemma 2. alakja szerint $\exists y : (-A)^T y = -c$, $y \geq 0$
 - $(-A)^T y = -c \implies A^T y = yA = c \implies$ ez az y épp kielégíti a (3)-as rendszert
 - (3) \implies (1), legyen y a (3)-as rendszer egy megoldása
 - $cx = (yA)x = y(Ax) \stackrel{y \geq 0, Ax \leq b}{\leq} yb \implies yb$ a cx egy felső korlátja ■

4. A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).

- **4.1. tétel:** a lineáris programozás dualitástétele
 - ha $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) program megoldható és felülről korlátos, akkor
 - (1) $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ (duális) program megoldható és alulról korlátos
 - (2) a primál programnak \exists maximuma és a duális programnak \exists minimuma
 - (3) $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$
- **4.2. lemma:** legyen $Ax \leq b$ megoldható, $t \in \mathbb{R}$, de $Ax \leq b$, $cx \geq t$ nem megoldható
 - ekkor a $yA = c$, $y \geq 0$, $yb < t$ rendszer megoldható
 - *bizonyítás:* alkalmazzuk a Farkas-lemmát a $(A| -c)x \leq (b| -t)$ -re, $y := (\bar{y}|\lambda)$
 - $\bar{y}A - \lambda c = 0$, $\bar{y} \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\bar{y}b - \lambda t < 0$
 - ha $\lambda = 0 \implies 0 = 0x = (\bar{y}A)x = \bar{y}(Ax) \stackrel{\bar{y} \geq 0, Ax \leq b}{\leq} \bar{y}b < 0 \implies$ lehetetlen
 - ezek szerint $y = \frac{\bar{y}}{\lambda}$ létezik, $yA = c$, $y \geq 0$, $yb < t$ ■
- a 4.1. tétel bizonyítása:
 - (1): már beláttuk a „3 kalickás tétel” (3.3. tétel) (1) \iff (3) eseténél
 - $cx \leq yb$ miatt cx felülről, yb alulról korlátos
 - (2), primál állítás: legyen $t = \sup\{cx : Ax \leq b\}$
 - indir. tfh. $\nexists x : Ax \leq b, (t \geq) cx \geq t \implies$ alkalmazzuk a 4.2. lemmát
 - $\exists y : yA = c, y \geq 0, yb < t \implies y$ a duális egy megoldása

- $t = \sup\{cx : Ax \leq b\} \leq yb < t \implies$ ellentmondás $\implies \exists$ primál megoldás, hogy $cx \geq t$
- így a szuprémum egyben maximum kell legyen
- (2), duális állítás: $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\} = -\max\{-by : A^T y \leq c, -A^T y \leq -c, -y \leq 0\}$
 - alkalmazzuk a primál állítást a duálisra, mint primál feladatra
- (3): indir. tfh. $\exists t : \max\{cx : Ax \leq b\} < t < \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$
 - a 4.2. lemma szerint $\exists y : yA = c, y \geq 0, yb < t$
 - $t < \min\{yb : yA = c, y \geq 0\} < yb < t \implies$ ellentmondás ■
- **4.3. tétel:** a lineáris programozás dualitástétele, ekvivalens alak
 - ha $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ (primál) program megoldható és felülről korlátos, akkor
 - (1) $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ (duális) program megoldható és alulról korlátos
 - (2) a primál programnak \exists maximuma és a duális programnak \exists minimuma
 - (3) $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$
 - *bizonyítás:* $\max\{cx : (A|-I)x \leq (b|0)\}$ duálisa $\min\{y(b|0) : y(A|-I) = 0, y \geq 0\}$
 - legyen $y = (y_1|y_2) \implies \min\{y_1 b : y_1 A - y_2 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$
 - $y_1 A = y_2 \geq 0 \implies$ a duális valóban $\min\{y_1 b : y_1 A \geq 0, y_1 \geq 0\}$ alakú ■
- lineáris programozás bonyolultsága
 - döntési probléma
 - INPUT: A mátrix, b és c vektorok, $t \in \mathbb{R}$
 - OUTPUT: van-e olyan x vektor, melyre $Ax \leq b, cx \geq t$
 - NP-beli \rightarrow tanú a feltételeket kielégítő x
 - co-NP-beli \rightarrow a dualitástétel szerint tanú egy $yA = c, y \geq 0, (cx \leq) yb < t$ vektor
 - 1947 (Dantzig): *simplex-módszer*
 - nem polinomiális futásidejű, de a gyakorlatban gyors
 - 1979 (Hacsijan): *ellipszoid-módszer*
 - polinomiális futásidejű \implies bizonyítja, hogy a feladat P-ben van
 - gyakorlatban a simplex sokkal hatékonyabb
 - 1984 (Karmarkar): polinomiális és a gyakorlatban is használható módszer

5. Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).

- **5.1. definíció:** *egészértékű programozás alapfeladata:* $\max_x\{cx : Ax \leq b, x \text{ egész}\}$ (IP)
 - duálisa $\min_y\{yb : yA = c, y \geq 0, y \text{ egész}\}$ (DIP)
 - $\max_{IP} \leq \max_{LP} = \min_{DLP} \leq \max_{DIP} \implies$ állhat $<$ is, nincs általános dualitástétel
- egészértékű programozás bonyolultsága
 - döntési probléma
 - INPUT: A mátrix, b és c vektorok, $t \in \mathbb{R}$
 - OUTPUT: van-e olyan x egészértékű vektor, melyre $Ax \leq b, cx \geq t$
 - NP-beli \rightarrow tanú a feltételeket kielégítő x
 - dualitástétel hiányában a co-NP beliség nem látható be
 - **5.2. tétel:** az egészértékű lineáris programozás NP-teljes
 - *bizonyítás:* azt már láttuk, hogy IP \in NP
 - adunk egy MAXFTLN \prec IP Karp-redukciót (MAXFTLN NP-teljes)
 - a $G = (V, E)$ gráf $\forall v_i$ csúcsához vegyünk fel egy $x_i \in \mathbb{Z}, -x_i \leq 0, x_i \leq 1$ változót
 - * ha $v_i \in F$ a független ponthalmaz eleme, $x_i = 1$, egyébként $x_i = 0$
 - $\forall e = \{v_i, v_j\} \in E$ élre vegyük még fel az $x_i + x_j \leq 1$ feltételt
 - a célfüggvény $\sum_{v_i \in V} x_i = |F| \implies c = (1, 1, \dots, 1)$
 - x maximumhely $\iff F \subseteq E$ a G maximális független ponthalmaza

- * F független, mert $x_i + x_j \leq 1 \implies \{v_i, v_j\} \in E$ legfeljebb egyik vége lehet F -beli
- * ha $F' \subseteq E$ független, $|F'| > |F| \implies x'$ megoldás, $cx' > cx$
- * x nem lehet maximumhely \implies ellentmondás ■
- hasonló 3-SAT \prec IP redukciót is lehet adni (0-1 változók, termék \rightarrow feltételek)
- **5.3. algoritmus:** Branch and Bound $\max\{cx : Ax \leq b, f \leq x \leq g; f, g, x \text{ egész}\}$ problémára
 - (IP) feladat szétvágása (IP)' és (IP)'' feladatokra
 - választunk egy x_j *elágazási változót* és $f_j \leq t < g_j$ közbülső értéket
 - az új problémák (IP)': (IP) $\cup g'_j := t$ és (IP)'': (IP) $\cup f''_j := t$
 - részproblémák $\mathcal{L} = \{(IP^{(i)}) = (f^{(i)}, g^{(i)}, w^{(i)}) : i = 1, 2, \dots\}$ listáját tartjuk karban, ahol $\max (IP^{(i)}) \leq w^{(i)}$
 - x^* az eddig megtalált legjobb megoldás, $z^* = cx^*$ a hozzá tartozó függvényérték
 - 0. lépés: $\mathcal{L} \leftarrow \{(f, g, \infty)\}$, $z^* \leftarrow -\infty$, x^* nem definiált
 - 1. lépés: ha $\mathcal{L} = \emptyset \implies$ STOP, egyébként válasszunk egy (IP⁽ⁱ⁾)-t és töröljük \mathcal{L} -ből
 - 2. lépés: ha $w^{(i)} \leq z^* \implies$ nem lehet jobb megoldás, mint az eddigi, GOTO 1.
 - 3. lépés: oldjuk meg az (IP⁽ⁱ⁾)-nek megfelelő (LP⁽ⁱ⁾) relaxált LP feladatot
 - ha \nexists megoldás \implies GOTO 1., egyébként legyen $x^{(i)}$ a megoldás és $cx^{(i)} = z^{(i)}$
 - 4. lépés
 - (4a) ha $z^{(i)} \leq z^* \implies$ GOTO 1., $f^{(i)} \leq x \leq g^{(i)}$ -ben már nincs jobb megoldás
 - (4b) ha $z^{(i)} > z^*$ és $x^{(i)}$ egész vektor $\implies x^* \leftarrow x^{(i)}$, $z^* \leftarrow z^{(i)}$, GOTO 1.
 - (4c) ha $z^{(i)} > z^*$, de $x^{(i)}$ nem egész vektor
 - * vágjuk két részre az (IP⁽ⁱ⁾) problémát valamely x_j elágazási változó mentén
 - * $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{(f^{(i)'}, g^{(i)'}, z^{(i)}), (f^{(i)''}, g^{(i)''}, z^{(i)})\}$, GOTO 1.
 - **5.4. tétel:** a B&B véges sok lépésben leáll és megtalálja (IP) optimumát
 - *bizonyítás:* f és g egész \implies véges sok részprobléma van \implies véges sok lépés
 - indir. tfh. az eljárás leállt, de $z^* < z_0$, ahol $z_0 = \max (IP)$
 - az algoritmus futása közben mindig volt olyan (IP⁽ⁱ⁾) $\in \mathcal{L}$, hogy $z_0 = \max (IP^{(i)})$
 - * kezdetben ez maga (IP)
 - * $z_0 \leq w^{(i)} \leq z^* < z_0$ ellentmondás \implies (IP⁽ⁱ⁾) mindig eljut a 4. lépésig
 - * (4a) nem teljesülhet, mert $z_0 \leq z^{(i)} \leq z^* < z_0$ ellentmondás
 - * (4b) után $z^* = z^{(i)} = z_0$ lesz $\implies z_0 = z^* < z_0$ ellentmondás
 - * (4c)-ben (IP⁽ⁱ⁾) vágása után $z_0 = \max (IP^{(i)'})$ vagy $z_0 = \max (IP^{(i)''})$
 - \mathcal{L} sosem lesz üres \implies az algoritmus nem áll le \implies ellentmondás ■
 - *branch and bound fa:* (IP) a gyökér, (IP⁽ⁱ⁾) gyerekei (IP^{(i)'}) és (IP^{(i)''})
 - heurisztika (IP⁽ⁱ⁾) választására
 - LIFO, ha az (IP⁽ⁱ⁾) a 3. lépésben utoljára vizsgált probléma fia
 - * inkrementális megoldás *duál simplex módszerrel*
 - egyébként válasszuk azt a problémát, amire $w^{(i)}$ maximális
 - heurisztika az x_j elágazási változó és t választására
 - x_j az változó, aminek az $\{x_j^{(i)}\}$ törtrésze legközelebb van $\frac{1}{2}$ -hez, $t \leftarrow \lfloor x_j^{(i)} \rfloor$
 - a gyakorlatban még a heuristikákkal sem mindig alkalmas nagy problémákhoz
- **5.5. definíció:** $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ az A mátrix *négyzetes részmátrixa*, ha A tetszőleges k sorának és k oszlopának kereszteződése határozza meg
- **5.6. definíció:** A *totálisan unimoduláris*, ha \forall négyzetes részmátrixára $\det = 0, 1$ vagy -1
 - **5.7. következmény:** ha A TU $\implies A$ minden eleme 0, 1 vagy -1 (1×1 -es részmátrix)
- **5.8. lemma:** egy mátrix totálisan unimoduláris marad, ha
 - (1) egy sorát vagy oszlopát (-1) -gyel szorozzuk
 - (2) egységvektort veszünk hozzá új sorként vagy oszlopként
 - (3) egyik sorát (ill. oszlopát) új sorként (ill. oszlopként) új példányban hozzávesszük
 - (4) transzponáljuk

- *bizonyítás:* csak azoknak a részmátrixoknak változik a \det -a, amiket a módosítás érint
 - (1) sor vagy oszlop (-1) -gyel szorzása $\implies \det$ (-1) -gyel szorzása $\implies 0, 1, -1$
 - (2) alkalmazzuk a kifejtési tételt az új sor/oszlop szerint
 - * csak egy nemnulla együtthatójú aldetermináns van
 - * az új részmátrix determinánsa megegyezik egy régebbiével $\implies 0, 1$ vagy -1
 - (3) két azonos sor/oszlop $\implies \det = 0$
 - (4) $\det B^T = \det B \implies$ a determináns nem változik ■
- **5.9. példa:** $\vec{G} = (V, \vec{E})$ irányított gráf $A \in \mathbb{R}^{|V| \times |E|}$ illeszkedési mátrixszá TU
 - *bizonyítás:* a $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ részmátrixra k szerinti teljes indukcióval
 - $k = 1$ -re nyilván $\det B = 0, 1$ vagy -1 , mert csak ez lehet a mátrix eleme
 - ha B -ben van csupa 0 oszlop $\implies \det B = 0$
 - ha B -ben van egyetlen 1-est vagy -1 -est tartalmazó oszlop
 - * fejtsük ki a determinánst eszerint az oszlop szerint
 - * az nem 0 együtthatós $B' \in \mathbb{R}^{(k-1) \times (k-1)}$ aldet.-ra $\det B'$ jó az indukció szerint
 - * a kifejtési tétel szerint $\det B = \pm \det B'$
 - ha $B \forall$ oszlopában van 1 és -1 is $\implies (1, 1, \dots, 1)B = 0 \implies \det B = 0$ ■
- **5.10. példa:** $G = (F, L; E)$ páros irányítatlan gráf A illeszkedési mátrixszá TU
 - *bizonyítás:* irányítsuk G éleit $F \rightarrow L$ irányba $\implies \vec{G}$
 - a \vec{G} irányított gráf \vec{A} illeszkedési mátrixszá TU az 5.9. példa szerint
 - szorozzuk meg az \vec{A} mátrix L -hez tartozó sorait (-1) -gyel
 - az így kapott mátrix épp A , és az 5.8. lemma miatt szintén TU ■
- **5.11. tétel:** ha A TU mátrix, b egész vektor, c valós vektor
 - és $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (LP) megoldható és a maximuma véges
 - $\implies \max\{cx : Ax \leq b, x \text{ egész}\}$ (IP) megoldható és a maximuma véges
 - és $\max\{cx : Ax \leq b\} = A \max\{cx : Ax \leq b, x \text{ egész}\}$
 - *nem bizonyítjuk*

6. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.

- **6.1. tétel:** (Egerváry Jenő tétele) legyen $G = (F, L; E)$ páros gráf, $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény \implies a maximális összsúlyú párosítás összsúlya $\min \sum_{v \in F \cup L} c(v)$, ahol a minimum a nemnegatív $c: F \cup L \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényeken értendő, melyekre $\forall e = \{x, y\} \in E : c(x) + c(y) \geq w(e)$
 - *bizonyítás:* legyen G illeszkedési mátrixszá $B \in \mathbb{R}^{|F \cup L| \times |E|}$
 - a $Bx \leq (1, 1, \dots, 1)^T, x \geq 0, x$ egész rendszer minden megoldása 0-1 értékű
 - az 1 komponensek G egy független élhalmazát (párosítását) határozzák meg
 - $\max\{wx : Bx \leq (1, 1, \dots, 1)^T, x \geq 0, x \text{ egész}\}$ megoldása maximális súlyú párosítás
 - B TU mátrix (5.10. példa) $\implies \max_{IP} = \max_{LP}$ (5.11. tétel)
 - $\max\{wx : Bx \leq (1, 1, \dots, 1)^T, x \geq 0\} = \min\{y(1, 1, \dots, 1)^T : yB \geq w, y \geq 0\}$
 - az y duális megoldás \forall csúcshoz egy $c(v_i) = y_i$ címkét rendel
 - $yB \geq w \implies \forall \{x, y\} \in E : c(x) + c(y) = w(\{x, y\})$ ■
- **6.2. definíció:** $G = (\mathcal{I}, E)$ intervallumgráf, ha $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ intervallumok rendszere és $\{I_i, I_j\} \in E \iff I_i \cap I_j \neq \emptyset$
 - ált. megszk. nélkül feltehető, hogy $\forall I \in \mathcal{I}$ az $[1, n]$ egész végpontú, zárt részintervalluma
- $A(\mathcal{I}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ahol \mathcal{I} $[1, n]$ egész végpontú intervallumrendszer, $a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in I_j, \\ 0, & \text{ha } i \notin I_j \end{cases}$
 - **6.3. lemma:** az így definiált $A(\mathcal{I})$ mátrix TU
 - *bizonyítás:* teljes indukcióval A egyeseinek száma szerint
 - ha A -ban 0 db egyes van $\implies \det A = 0$
 - \forall oszlopban egy darabig 0-k, utána 1-esek, majd megint 0-k vannak

- ha \exists két oszlop, ahol ugyanott van a legfelső egyes
 - * a több egyes tartalmazóból a másikat kivonva csökken az egyesek száma
 - * ez nem változtatja a \det -t \implies ind. feltevés szerint $\det = 0, 1$ vagy -1
- ha \exists csupa 0 oszlop $\implies \det = 0$
- egyébként minden oszlopban máshol van a legfelső egyes
 - * sor- és oszlopcserékkel alsó háromszögmátrixszá alakítható $\implies \det = \pm 1$ ■
- **6.4. tétel:** az $[1, n]$ egész végpontú, zárt I_1, I_2, \dots, I_m részintervallumai $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ -re megszínezhetőek k színnel úgy, hogy ha az i -t d_i db intervallum tartalmazza, akkor ezek között minden színből vagy $\lfloor \frac{d_i}{k} \rfloor$ vagy $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ van
 - *bizonyítás:* válasszunk ki néhány intervallumot úgy, hogy $\forall i$ -re $\lfloor \frac{d_i}{k} \rfloor$ vagy $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ kiválasztott intervallum tartalmazza i -t
 - ezt az eljárást ismételhetjük $k-1$ -re, $k-1$ -re, \dots , 1 -re
 - így épp k színnel színezhetőek az intervallumok a megadott feltételnek megfelelően
 - legyen $A = A(I), \lfloor \frac{d}{k} \rfloor$ i . komponense $\lfloor \frac{d_i}{k} \rfloor, \lceil \frac{d}{k} \rceil$ hasonló
 - $\lfloor \frac{d}{k} \rfloor \leq Ax \leq \lceil \frac{d}{k} \rceil, 0 \leq x \leq (1, 1, \dots, 1)^T$ megoldható, pl. $x = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ megoldás
 - az 5.11. tétel miatt \exists egészértékű (0-1) megoldás \implies ez épp egy jó kiválasztás ■
- **6.5. definíció:** a G gráf *perfekt*, ha $\chi(F) = \omega(F) \forall F \subseteq G$ feszített részgráfjára
 - χ a kromatikus szám, ω a klikkszám
- **6.6. következmény:** minden intervallumgráf perfekt
 - *bizonyítás:* a G intervallumgráf minden feszített részgráfja intervallumgráf
 - elég belátni, hogy $\chi(G) = \omega(G)$
 - alkalmazzuk a 6.4. tételt $k = \omega(G)$ választással
 - $\forall i : d_i \leq \omega(G) \implies \forall$ klikkben \forall színt legfeljebb egyszer használtuk
 - a kapott színezés egy jó színezés $\implies \chi(G) \leq k = \omega(G)$
 - mivel minden gráfban $\chi(G) \geq \omega(G) \implies \chi(G) = \omega(G)$ ■

7. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

- legyen $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V, c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ *kapacitásfüggvény*
 - jelölje $x: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ $v \in V$ -be belépő éleken felvett összegét $\rho_x(v)$
 - jelölje x a v -ből kilépő éleken felvett összegét $\delta_x(v)$
 - **7.1. definíció:** $x: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *folyam*, ha $\forall v \in V - \{s, t\} : \rho_x(v) = \delta_x(v)$
 - **7.2. definíció:** x folyam *megengedett*, ha $\forall e \in E : x(e) \leq c(e)$
 - **7.3. definíció:** az x megengedett folyam *értéke* $\delta_x(s) - \rho_x(s) = \rho_x(t) - \delta_x(t)$
- **7.4. definíció:** a $C = (S, T)$ *vágás*, ha $S \cup T = V, S \cap T = \emptyset, s \in S, t \in T$
 - **7.5. definíció:** a $C = (S, T)$ vágás *értéke* $m_C = \sum_{(x,y) \in E, x \in S, y \in T} c(x, y)$
 - tetszőleges C vágás értéke felső becslés minden folyam nagyságára
- **7.6. lemma:** ha $x: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ -ra $\forall v \in V - \{s, t\} : \rho_x(v) \geq \delta_x(v)$ és $\rho_x(t) \geq \delta_x(s) \implies x$ folyam
 - *bizonyítás:* az $S = \sum_{v \in V - \{s, t\}} \rho_x(v) - \delta_x(v)$ összeg \forall tagja nemnegatív $\implies 0 \leq S$
 - vegyük észre, hogy $S = \delta_x(s) - \rho_x(t)$
 - ha $e = (u, v), u \neq s, v \neq t \implies x(e)$ pozitív és negatív előjellel is megjelenik S -ben
 - ha $u = s, v \neq t \implies x(e)$ csak $+$ előjellel jelenik meg $\rho_x(v)$ -nél
 - ha $u \neq s, v = t \implies x(e)$ csak $-$ előjellel jelenik meg $\delta_x(u)$ -nál
 - az $e = (s, t)$ él nem jelenik meg S -ben, és kiesik $\delta_x(s) - \rho_x(t)$ -ben
 - $0 \leq S = \delta_x(s) - \rho_x(t) \leq 0 \implies S = 0$
 - ez csak úgy lehet, ha \forall (nemnegatív) tag $= 0 \implies \forall v \in V - \{s, t\} : \rho_x(v) = \delta_x(v)$ ■
- **7.7. probléma:** maximális értékű folyam
 - INPUT: $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V, c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény

- OUTPUT: az x maximális értékű folyam
- legyen G illeszkedési mátrixsza B , ennek $v \in V$ -hez tartozó sora b_v
- legyen $G^* := (V, E^*)$, $E^* := E \cup \{(t, s)\}$, az illeszkedési mátrixsza $B^* = (B|b^*)$
- ha $x^* = (x|\mu)$ és $B^*x^* \leq 0$
 - $\forall v \in V - \{s, t\} : b_v x \leq 0 \implies \delta_x(v) - \rho_x(v) \leq 0 \implies \delta_x(v) \leq \rho_x(v)$
 - s -re és t -re nézve $\delta_x(s) - \mu \leq 0$ és $-\rho_x(t) + \mu \leq 0 \implies \delta_x(s) \leq \mu \leq \rho_x(t)$
 - a 7.6. lemma szerint x valóban folyam, az értéke μ
- max. folyam lineáris programja: $\max\{(0, 0, \dots, 0, 1)x^* : B^*x^* \leq 0, x^* \geq 0, x \leq c\}$
 - ekvivalensen $\max\{\mu : (B^*|, I'')(x, \mu|x) \leq (0, 0|c), x \geq 0, \mu \geq 0\}$
 - a második „egységmátrixból” hiányzik az $e^* = (t, s)$ -hez tartozó oszlop
- a duális feladatot a kényelmesen a dualitástétel ekvivalens alakjából kapjuk
 - $\forall v \in V$ csúcshoz $\pi(v)$ és $\forall e \in E$ élhez $w(e)$ változó
 - $\min\{\sum_e w(e)c(e) : \forall v : \pi(v) \geq 0; \forall e = (u, v) : w(e) \geq 0, \pi(u) - \pi(v) + w(e) \geq 0; \pi(t) - \pi(s) \geq 1\}$
- **7.8. tétel:** a fenti duális minimuma épp a maximális hálózati folyam értéke
 - bizonyítás: (\Leftarrow) tetszőleges $C = (S, T)$ vágáshoz $\exists \pi, w : \sum_e w(e)c(e) = m_C$
 - legyen $\pi(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } v \in S, \\ 1, & \text{ha } v \in T \end{cases}$, $w(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } u \in S, v \in T \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$
 - ez kielégíti a feltételeket, és $\sum_e w(e)c(e)$ tényleg a vágás értéke
 - (\Rightarrow) a duális feladat mátrixsza TU (G illeszkedési mátrixsza + egységvektorok)
 - a jobb oldal egészértékű $\implies w$ és π is lehet egészértékű az optimális megoldásban
 - készítünk egy 0-1 megoldást: $\pi'(v) := \begin{cases} 0, & \text{ha } \pi(v) \leq \pi(s), \\ 1, & \text{ha } \pi(v) > \pi(s) \end{cases}$, $w'(e) := \begin{cases} 0, & \text{ha } w(e) = 0, \\ 1, & \text{ha } w(e) \geq 1 \end{cases}$
 - * $\pi'(t) - \pi'(s) \geq 0$, mert $\pi(t) - \pi(s) \geq 0$ miatt $\pi(t) > \pi(s)$ teljesült
 - * ha $\pi'(u) - \pi'(v) + w(u, v) < 0 \implies \pi'(u) = 0, \pi'(v) = 1, w(u, v) = 0$
 - * de $\pi(u) \leq \pi(s) < \pi(v)$, $w(e) = 0 \implies \pi(u) - \pi(v) + w(e) < 0$, ellentmondás
 - $\forall e : w'(e) \leq w(e) \implies \sum_e w'(e)c(e) \leq \sum_e w(e)c(e) \implies (\pi', w')$ tényleg optimális
 - $S = \{v : \pi'(v) = 0\}$, $T = \{v : \pi'(v) = 1\}$ egy vágás, $m_C = \sum_e w'(e)c(e)$
 - a minimális kapacitású vágás kapacitása tényleg a duál optimauma
 - * a dualitástétel miatt ez a primál optimauma
 - * ami épp a maximális folyam nagysága
 - beláttuk, hogy a maximális folyam polinomiális időben meghatározható
 - pl. ellipszoid módszerrel
 - * de a gyakorlatban Edmonds–Karp algoritmus nem használ LP-t
 - $(B^*|, I'')$ TU \implies ha c egész, a maximális egészértékű folyam is meghatározható
- **7.9. tétel:** (Ford–Fulkerson) a maximális hálózati folyam nagysága megegyezik a minimális kapacitású vágás kapacitásával
 - bizonyítás: a 7.8. tétel alapján triviális
- **7.10. probléma:** minimális költségű folyam
 - INPUT: $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ költségfüggvény, M folyamérték
 - OUTPUT: x legalább M értékű, minimális $\sum_{e \in E} k(e)x(e)$ költségű folyam
 - $\max\{-kx : B^*x^* \leq 0, x^* \geq 0, x \leq c, \mu \geq M\}$ LP feladat \implies polinomiális időben megoldható
 - ha c és M egész \implies az IP verzió is polinomiális, mert a mátrix megint TU
- **7.11. probléma:** többtermékes folyamprobléma
 - INPUT: $G = (V, E)$, $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$
 - OUTPUT: x_1, x_2, \dots, x_k folyamok, melyekre $\forall e \in E : \sum_{i=1}^k x_i(e) \leq c(e)$ és az összes folyam-nagyság $\sum_{i=1}^k \delta_{x_i}(s) - \rho_{x_i}(t)$ maximális
 - legyen B_i^* a $G_i^* = (V, E \cup (t_i, s_i))$ illeszkedési mátrixsza, $x_i^* = (x_i, \mu_i)$
 - $\max\{\sum_{i=1}^k \mu_i : \forall_{i=1}^k B_i^*x_i^* \leq 0, x_i^* \geq 0; (\sum_{i=1}^k x_i) \leq c\} \implies$ polinomiális időben megoldható

- az egészértékű változat $k \geq 2$ esetén nem TU
 - ha $k = 1 \implies$ maximális folyam probléma, egész c esetén polinomiális
 - ha $k = 2 \implies$ a feladat NP-nehéz (*nem bizonyítjuk*)

Matroidok

8. Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.

- **8.1. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ pár ($\mathcal{F} \subseteq 2^E$) *matroid*, ha
 - (F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ (F2) ha $Y \subseteq X$ és $X \in \mathcal{F} \implies Y \in \mathcal{F}$
 - (F2) ha $X, Y \in \mathcal{F}$ és $|X| > |Y| \implies \exists x \in X - Y : Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$
- **8.2. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroidban $X \subseteq E$ *független*, ha $X \in \mathcal{F}$
 - egyébként X *összefüggő*
- **8.3. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroidban $X \in \mathcal{F}$ független halmaz *bázis*, ha tartalmazásra nézve maximális (tovább már nem bővíthető E -ben)
- **8.4. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroidban $E \supseteq X \notin \mathcal{F}$ összefüggő halmaz *kör*, ha tartalmazásra nézve minimális (\forall valódi részhalmaza független)
- **8.5. lemma:** ha $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid; $A \subseteq E$; $A \supseteq X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ tovább már nem bővíthetők $\implies |X_1| = |X_2|$
 - *bizonyítás:* indir. tfh. $|X_1| < |X_2| \xrightarrow{(F3)} \exists e \in X_2 - X_1 : X_1 \subset X_1 \cup \{e\} \in \mathcal{F}$
 - ez ellentmondás, X_1 mégis tovább bővíthető ■
 - azt kaptuk, hogy tetszőleges X független halmaz kiegészíthető maximálissá
- **8.6. következmény:** az \mathcal{M} matroid \forall bázisa azonos elemszámu
- **8.7. definíció:** $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroidban az $X \subseteq E$ halmaz *rangja* $r(X) =$ az X -beli maximális független halmaz mérete (a 8.5. lemma szerint ez mindig egyértelmű)
- **8.8. példa:** a $G = (V, E)$ gráf *grafikus matroidja* $\mathcal{M}(G) = (E, \mathcal{F})$, ahol $F \in \mathcal{F}$ pontosan akkor, ha az F élek erdőt alkotnak G -ben
- **8.9. példa:** valamely T test felett az $M \in T^{n \times m}$ mátrix oszlopvektorai által indukált matroid *mátrixmatroid*, ahol a független halmazok a lineárisan független vektorhalmazok
- $\mathcal{U}_{n,k} = (E, \mathcal{F})$ *uniform matroid*, ahol $|E| = n$, $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : |X| \leq k\}$
 - $\mathcal{U}_{n,n}$ *teljes (szabad) matroid*, $\mathcal{U}_{n,0}$ *triviális matroid*
- **8.10. tétel:** $r(x)$ *szubmoduláris*, azaz $\forall X, Y \subseteq E : r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$
 - *bizonyítás:* legyen A maximális független halmaz $X \cap Y$ -ban $\implies r(A) = r(X \cap Y)$
 - legyen $B \supseteq A$ maximális független halmaz $X \cup Y$ -ban $\implies r(B) = r(X \cup Y)$
 - $B \cap (X \cap Y) = A \implies |B \cap X| + |B \cap Y| = |B| + |A|$
 - $B \cap X, B \cap Y \subseteq B \in \mathcal{F}$ függetlenek $\implies |B \cap X| \leq r(X), |B \cap Y| \leq r(Y)$
 - $r(X) + r(Y) \geq |B| + |A| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$ ■

9. Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.

- **9.1. algoritmus:** mohó algoritmus
 - INPUT: $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ halmazrendszer, ami kielégíti az (F1–2) tulajdonságokat (nem üres, „leszálló”), $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ *súlyfüggvény*
 - OUTPUT: olyan $X \in \mathcal{F}$, melyre $\sum_{e \in X} w(e)$ maximális
 - 0. lépés: legyen $X := \emptyset \in \mathcal{F}$
 - 1. lépés: létezi-e $e \in E - X : X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$
 - $\exists \implies e := \arg \max \{w(e') : e' \in E - X, X \cup \{e'\} \in \mathcal{F}\}; \nexists \implies$ STOP

- 2. lépés: $X \leftarrow X \cup \{e\}$, GOTO 1.
- **9.2. tétel:** a mohó algoritmus pontosan akkor ad helyes eredmény $\forall w$ súlffüggvénnyel az (E, \mathcal{F}) halmazrendszeren, ha az (F1–2) mellett (F3)-at is kielégíti $((E, \mathcal{F})$ matroid)
 - *bizonyítás:* (\Leftarrow) matroidon működik a mohó algoritmus
 - indir. tfh. $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a mohó algoritmus kimenete
 - de $\exists Y = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \in \mathcal{F}$, $w(Y) > w(X)$
 - ált. megsz. nélkül tfh.
$$\begin{array}{ccccccc} w(a_1) & \geq & w(a_2) & \geq & \dots & \geq & w(a_{k-1}) \geq w(a_k) \geq w(a_{k+1}) \geq \dots \geq w(a_n) \\ \vee & & \vee & & & & \vee \quad \quad \quad \wedge \\ w(b_1) & \geq & w(b_2) & \geq & \dots & \geq & w(b_{k-1}) \geq w(b_k) \geq w(b_{k+1}) \geq \dots \geq w(b_m) \end{array}$$
 - $A := \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\} \in \mathcal{F}$, $B := \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \in \mathcal{F}$, $|A| \leq |B|$
 - $\xrightarrow{(F3)} \exists b^* \in B : A \cup \{b^*\} \in \mathcal{F}$, és a megadott sorrend miatt $w(b^*) \geq w(b_k) > w(a_k)$
 - a mohó algoritmus a k . lépésben nem választhatta a_k -t, mert b^* jobb nála, ellentmondás
 - (\Rightarrow) ha (F3) nem teljesül, \exists olyan w , hogy a mohó algoritmus rossz eredményt ad
 - $\exists X, Y \in \mathcal{F} : |X| > |Y|$, de $\nexists x \in X - Y : Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$; legyen $w(e) := \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in Y, \\ 1-\epsilon & \text{ha } e \in X - Y, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$
 - a mohó algoritmus beválasztja Y elemeit, majd nem tud több nem 0 súlyú elemet beválasztani $\Rightarrow w(Y) = |Y|$ a maximum
 - de $w(X) = |X \cap Y| + (1-\epsilon)|X - Y| = |X| - \epsilon|X - Y| > w(Y) = |Y|$, ha $0 < \epsilon < \frac{|X| - |Y|}{|X - Y|}$
 - a mohó algoritmus nem adott optimális megoldást w -re! ■
- **9.3. tétel:** ha r az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid rangfüggvénye, akkor
 - (R1) $r(\emptyset) = 0$ (R2) $\forall X \subseteq E : r(x) \leq |X|$ (R3) ha $Y \subseteq X \Rightarrow r(Y) \leq r(X)$
 - (R4) $\forall X, Y \subseteq E : r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$, azaz r szubmoduláris
 - ha r kielégíti az (R1–4) feltételeket \Rightarrow az $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : r(X) = |X|\}$ rangfüggvénye
 - *nem bizonyítjuk*
- **9.4. tétel:** ha \mathcal{B} az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid bázisainak halmaza, akkor
 - (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ (B2) $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{B} : |X_1| = |X_2|$
 - (B3) $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$, $e_1 \in X_1 \Rightarrow \exists e_2 \in X_2 : X_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\} \in \mathcal{B}$
 - ha \mathcal{B} kielégíti a (B1–3) feltételeket \Rightarrow az $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : X \subseteq B \in \mathcal{B}\}$ bázisainak halmaza
 - *nem bizonyítjuk*
- **9.5. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ matroid duálisa $\mathcal{M}^* = (E, \mathcal{B}^*)$
 - $\mathcal{B}^* = \{X \subseteq E : E - X \in \mathcal{B}\} \iff \mathcal{F}^* = \{X \subseteq E : E - X \text{ tartalmazza } \mathcal{M} \text{ egy bázisát}\}$
 - $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$ **9.6. példa:** $\mathcal{U}_{n,k}$ duálisa $(\mathcal{U}_{n,k})^* = \mathcal{U}_{n,n-k}$
- **9.7. tétel:** az $\mathcal{M} = (E, r)$ duálisának rangfüggvénye $r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$
 - *bizonyítás:* $r^*(X) = X$ -beli max. független halmaz mérete $= \max\{|X \cap B^*| : B^* \in \mathcal{B}^*\}$
 - $|X \cap B^*| = |X \cap (E - B)| = |X - B| = |X| - |X \cap B|$, ahol $E - B^* = B \in \mathcal{B}$
 - $r^*(X) = \max(|X| - |X \cap B|) = |X| - \min|X \cap B| = |X| - |B| + \max|(E - X) \cap B|$
 - $\max|(E - X) \cap B| = r(E - X) \Rightarrow r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$ ■

10. Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.

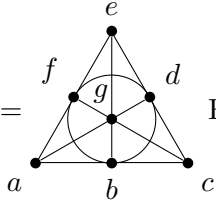
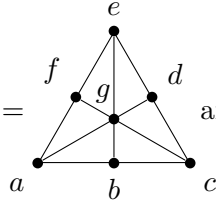
- **10.1. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroidból X elhagyásával az $\mathcal{M} \setminus X = (E - X, \mathcal{F}')$ matroidot kapjuk, ahol $\mathcal{F}' := \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq E - X\}$
 - grafikus matroidoknál ez nem más, mint élek elhagyása a gráfból
 - $\mathcal{M} \setminus X$ rangfüggvénye $r|_{E-X}$
- **10.2. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, r)$ matroidból X összehúzásával az $\mathcal{M}/X = (E - X, r')$ matroidot kapjuk, ahol $r'(Y) = r(X \cup Y) - r(X)$
 - **10.3. lemma:** az $(E - X, r')$ pár valóban matroid

- *bizonyítás:* (R1): $r'(\emptyset) = r(X \cup \emptyset) - r(X) = 0$
 - (R2): $r'(Y) = r(X \cup Y) - r(X) \stackrel{r(R4)}{\leq} (r(X) + r(Y) - r(X \cap Y)) - r(X) \leq r(Y) \leq |Y|$
 - (R3): $Z \subseteq Y \implies r'(Z) = r(X \cup Z) - r(X) \stackrel{X \cup Z \subseteq Z \cup Y, r(R3)}{\leq} r(X \cup Y) - r(X) = r'(Y)$
 - (R4): $r'(Y) + r'(Z) = r(X \cup Y) + r(X \cup Z) - 2r(X) \stackrel{r(R4)}{\geq} r((X \cup Y) \cap (X \cup Z)) + r((X \cup Y) \cup (X \cup Z)) - 2r(X) =$
 $= r(X \cup (Y \cap Z)) + r(X \cup (Y \cup Z)) - 2r(X) =$
 $= r'(Y \cap Z) + r'(Y \cup Z)$ ■
- **10.4. tétel:** ha $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid, $X \subseteq E \implies (\mathcal{M}/X)^* = \mathcal{M}^* \setminus X$, $(\mathcal{M} \setminus X)^* = \mathcal{M}^*/X$
 - *bizonyítás:* $\mathcal{M}^* \setminus X = ((\mathcal{M}^* \setminus X)^*)^* = ((\mathcal{M}^*)^*/X)^* = (\mathcal{M}/X)^*$
 - ezért elég az $(\mathcal{M} \setminus X)^* = \mathcal{M}^*/X$ egyenlőséget belátni
 - legyen $(\mathcal{M} \setminus X)^* = (E - X, r_1)$, $\mathcal{M}^*/X = (E - X, r_2)$
 - $r_1(Y) = |Y| - r(E - X) + r((E - X) - Y)$
 - $r_2(Y) = r^*(X \cup Y) - r^*(X) = |X \cup Y| - r(E) + r(E - (X \cup Y)) - |X| + r(E) - r(E - X)$
 - * $Y \subseteq E - X \implies X \cap Y = \emptyset \implies |X \cup Y| - |X| = |Y|$
 - * $(E - X) - Y = E - (X \cup Y) \implies r_2(Y) = |Y| - r(E - X) + r((E - X) - Y)$
 - $r_1 = r_2$, ezért a két matroid is megegyezik ■
- **10.5. definíció:** az \mathcal{M} matroidból összehúzások és törlések sorozatával \mathcal{M} *minora* áll elő
- **10.6. lemma:** $\mathcal{M} \setminus A_1/B_1 \setminus A_2/B_2 \setminus \dots \setminus A_k/B_k = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i / \bigcup_{i=1}^k B_i$
 - *nem bizonyítjuk*
- **10.7. tétel:** az \mathcal{M} matroid \forall minora előáll $\mathcal{M} \setminus A/B$ alakban
 - *bizonyítás:* a 10.6. lemma alapján triviális ■
- **10.8. definíció:** az $\mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{F}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{F}_2)$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ matroidok *direkt összege* $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F})$, $E = E_1 \cup E_2$, $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : X \cap E_1 \in \mathcal{F}_1, X \cap E_2 \in \mathcal{F}_2\}$
- **10.9. definíció:** az \mathcal{M} matroid *összefüggő*, ha nem áll elő két matroid direkt összegeként
- **10.10. definíció:** az \mathcal{M} matroid *reprezentálható (koordinátázható)* az T test felett, ha izomorf egy T feletti mátrixmatroiddal
 - ha \mathcal{M} -et A koordinátázza, és $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$ négyzetes nonszinguláris mátrix, akkor BA is \mathcal{M} -et koordinátázza
- **10.11. tétel:** ha \mathcal{M} reprezentálható a T test felett, akkor \mathcal{M}^* is
 - *bizonyítás:* legyen $r := r(\mathcal{M}) = r(A)$, ahol $A \in \mathbb{R}^{r \times n}$ az \mathcal{M} -et reprezentáló mátrix
 - Gauss-eliminációval hozzuk \mathcal{M} mátrixszát $(I_r | A_0)$ alakúra
 - vizsgáljuk az $A' = (-A_0 | I_{n-r})$ által reprezentált $\mathcal{M}(A')$ matroidot
 - A és A' oszlopai természetes módon megfeleltethetők egymásnak
 - legyen B egy bázis \mathcal{M} -ben
 - * ált. megsz. tff. B az I_r utolsó t oszlopából és A_0 első $r - t$ oszlopából áll
 - * ekkor $E - B$ a $-A_0^T$ első $r - t$ és az E_{n-r} utolsó $n - 2r - t$ oszlopából áll
 - * a B elemeihez tartozó $r \times (t + (r - t))$ -s részmátrix A -ban: $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots \\ \vdots & 1 \end{array} \right)$
 - * az $E - B$ elemeihez tartozó részmátrix A' -ben: $A'_1 = \left(\begin{array}{c|c} -C^T & 0 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 \end{array} \right)$
 - $r = r(B) \iff 0 \neq |\det A_1| = |\det C| = |\det -C^T| = |\det A_2| \iff n - r = r(E - B)$
 - $r(\mathcal{M}(A')) \leq n - r = r(E - B) \implies r(\mathcal{M}(A')) = n - r$, $E - B$ valóban bázis $\mathcal{M}(A')$ -ben
 - bázis komplementere bázis (és ezt fordítva is elmondhatjuk)
 - $\mathcal{B}(A') = \{E - B : B \in \mathcal{B}(A)\} \implies \mathcal{M}(A') = \mathcal{M}^*$ ■

11. Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).

- **11.1. definíció:** az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid *grafikus*, ha előáll valamely $G = (V, E)$ gráf $\mathcal{M}(G)$ körmatroidjaként, ahol \mathcal{F} elemei a G -beli erdők
- **11.2. definíció:** az \mathcal{M} matroid *kografikus*, ha egy grafikus matroid $[\mathcal{M}(G)]^*$ duálisa
 - \mathcal{F} elemei nem tartalmazznak G -beli *vágást* (vágásmatroid)
 - $X \in \mathcal{F} \iff (V(G), E(G) - X)$ ugyanannyi összefüggő komponensből áll, mint G
- **11.3. tétel:** egy $\mathcal{M}(G)$ grafikus matroid pontosan akkor kografikus, ha G síkbarajzolható
 - ekkor $[\mathcal{M}(G)]^* = \mathcal{M}(G^*)$, a matroid duális épp a gráfelméleti duális körmatroidja
 - *nem bizonyítjuk*
- **11.4. definíció:** az \mathcal{M} matroid *lineáris*, ha reprezentálható valamely T test felett
- **11.5. definíció:** az \mathcal{M} matroid *bináris*, ha reprezentálható a GF_2 kételemű test felett
 - minden bináris matroid lineáris a GF_2 test felett
- **11.6. definíció:** az \mathcal{M} matroid *reguláris*, ha minden T test felett reprezentálható
 - minden reguláris matroid bináris (és lineáris) $T = \text{GF}_2$ választással
- matroidok halmazainak kapcsolatai
 - grafikus, kografikus \subset reguláris \subset bináris \subset lineáris \subset matroidok
 - grafikus \cap kografikus $\neq \emptyset$
- **11.7. tétel:** minden $\mathcal{M}(G)$ grafikus matroid reguláris
 - *bizonyítás:* legyen T test, $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ és irányítsuk G éleit tetszőlegesen
 - rendeljük az x_i csúcshoz a v_i egységvektort és az $e = (x_i, x_j)$ élhez a $w_e = v_i - v_j$
 - ez épp G egy irányításának illeszkedési mátrixsza
 - $X \subseteq E$ tartalmaz kört $\implies W = \{w_e : e \in X\}$ lineárisan összefüggő
 - legyen $C \subseteq X$ egy kör X -ben valamilyen irányítással
 - ha $e \in C$ párhuzamos C -vel, $\alpha_e := 1$; ha ellentétes irányú, $\alpha_e := -1$
 - ekkor $\sum_{e \in C} \alpha_e w_e = 0$ W elemeinek nemtriviális 0 lineáris kombinációja
 - $X \subseteq E$ tartalmaz kört $\iff W = \{w_e : e \in X\}$ lineárisan összefüggő
 - legyen $\sum_{w_e \in W} \beta_e w_e = 0$ egy nemtriviális 0 lineáris kombináció
 - $Y := \{e \in X : \beta_e \neq 0\}$ és $V' :=$ az Y -beli élek végpontjainak halmaza
 - $\sum_{e \in Y} \beta_e w_e = 0 \implies \forall v \in V'$ -re legalább 2 Y -beli él illeszkedik
 - a (V', Y) részgráf \forall pontja legalább 2-fokú $\implies (V', Y) \subseteq G$ tartalmaz kört
- **11.8. tétel:** minden $[\mathcal{M}(G)]^*$ kografikus matroid reguláris
 - *bizonyítás:* a 10.11 tétel szerint ha \mathcal{M} reprezentálható T felett, akkor \mathcal{M}^* is
 - $\mathcal{M}(G)$ minden T felett reprezentálható $\implies [\mathcal{M}(G)]^*$ is

- **11.9. definíció:** a T test *karakterisztikája* az a min. k , melyre $\forall x \in T : \overbrace{x+x+\dots+x}^{k \text{ db}} = 0$
 - ha valamely $x \neq 0$ -ra $\overbrace{x+\dots+x}^{k \text{ db}} = 0$, akkor ez $\forall y \in T$ -re is teljesül, mert $\overbrace{y+y+\dots+y}^{k \text{ db}} = \frac{y}{x} \overbrace{(x+x+\dots+x)}^{k \text{ db}} = \frac{y}{x} \cdot 0$

- **11.10. példa:** $\mathcal{F}_7 =$  Fano-matroid, $\mathcal{F}_7^- =$  anti-Fano-matroid

- \forall 4 elemű halmaz összefüggő, a 3 eleműek közül az egy egyenesre / körre esők

- \mathcal{F}_7 pontosan a $k = 2$ karakterisztikájú testek felett koordinátázható
- \mathcal{F}_7^- pontosan a $k \neq 2$ karakterisztikájú testek felett koordinátázható
- *bizonyítás:* $r(\mathcal{F}_7) = r(\mathcal{F}_7^-) = 3 \implies$ feltehető: $a \mapsto (1, 0, 0)$, $c \mapsto (0, 1, 0)$, $e \mapsto (0, 0, 1)$
 - ekkor $b \mapsto (x, y, 0)$, $d \mapsto (0, z, u)$, $f \mapsto (v, 0, w)$, $g \mapsto (q, r, s)$
 - $\{a, d, g\} \notin \mathcal{F} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & q \\ 0 & z & r \\ 0 & u & s \end{vmatrix} = 0 \implies sz = ru$; hasonlóan $sv = qw$, $rx = qy$
 - $\{b, d, f\} \notin \mathcal{F}(\mathcal{F}_7)$, $de \in \mathcal{F}(\mathcal{F}_7^-) \implies \begin{vmatrix} x & 0 & v \\ y & z & 0 \\ 0 & u & w \end{vmatrix} = 0$ \mathcal{F}_7 -ben, $de = 0$ \mathcal{F}_7^- -ban
 - * $wxz + uvy = 0$ \mathcal{F}_7 -ben, $de \neq \mathcal{F}_7^-$ -ban
 - * $de \frac{sz}{u}x = \frac{sv}{w}y \implies swxz = suvy \implies wxz = uvy$
 - * $wxz + wxz = 0$ \mathcal{F}_7 -ben pontosan akkor teljesül, ha T karakterisztikája $= 2$
 - * $wxz + wxz \neq 0$ \mathcal{F}_7^- -ban pontosan akkor teljesül, ha T karakterisztikája $\neq 2$ ■
- **11.11. következmény:** az $\mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_7^-$ matroid nem lineáris
 - T karakterisztikája egyszerre kellene 2 és nem 2 legyen
- **11.12. példa:** példák matroidokra

nem lineáris	$\mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_7^-$	lineáris, de nem bináris	$\mathcal{U}_{4,2}, \mathcal{F}_7^-$
bináris, de nem reguláris	\mathcal{F}_7	reguláris, de nem grafikus	$\mathcal{M}(K_5) \oplus [\mathcal{M}(K_5)]^*$
grafikus, de nem kografikus	$\mathcal{M}(K_5)$	kografikus, de nem grafikus	$[\mathcal{M}(K_5)]^*$
grafikus és kografikus	$\mathcal{M}(G)$, G síkbarajzolható		

 - K_5 helyett tetszőleges nem síkbarajzolható gráf (pl. $K_{3,3}$) állhat
- **11.13. tétel:** Tutte tételei
 - \mathcal{M} bináris \iff nem minorja az $\mathcal{U}_{4,2}$
 - $\mathcal{U}_{4,2}$ rangja 2, de 2 dimenziós bináris vektorokból nem létezik 4 db páronként lineárisan független; $\mathcal{U}_{4,2} = \mathcal{M}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
 - \mathcal{M} reguláris \iff nem minorja az $\mathcal{U}_{4,2}$, \mathcal{F}_7 és \mathcal{F}_7^*
 - \mathcal{M} grafikus \iff nem minorja az $\mathcal{U}_{4,2}$, \mathcal{F}_7 , \mathcal{F}_7^* , $[\mathcal{M}(K_5)]^*$ és $[\mathcal{M}(K_{3,3})]^*$
 - ha $\mathcal{M}(G)$ egy G' gráf $[\mathcal{M}(G')]^*$ vágásmatroidja, akkor $\mathcal{M}(G)$ kografikus és G' síkbarajzolható kell legyen
 - *nem bizonyítjuk*
- **11.14. tétel:** $\mathcal{U}_{n,k}$ pontosan akkor grafikus, ha $k = 0, 1, n - 1$ vagy n
 - *bizonyítás:* $\mathcal{U}_{n,0}$ egy csúccsal és n hurokkal reprezentálható, $\mathcal{U}_{n,1}$ n párhuzamos éllel
 - $\mathcal{U}_{n,n-1}$ n élű körrel reprezentálható, $\mathcal{U}_{n,n}$ n élű erdővel
 - $\mathcal{U}_{n,k} \setminus \{a\} = \mathcal{U}_{n-1,k}$, $\mathcal{U}_{n,k}/\{a\} = \mathcal{U}_{n-1,k-1}$
 - ha $2 \leq k \leq n - 2 \implies \mathcal{U}_{n,k}$ -nak van $\mathcal{U}_{4,2}$ minorja
 - ehhez $n - k - 2$ törlés és $k - 2$ összehúzás kell ■

12. Matroidok összege. k -matroid-metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.

- **12.1. definíció:** az $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2), \dots, \mathcal{M}_k = (E, \mathcal{F}_k)$ matroidok összege az $\mathcal{N} = \bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i = (E, \mathcal{F}')$ halmazrendszer, ahol $\mathcal{F}' = \{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k : X_i \in \mathcal{F}_i (i = 1, 2, \dots, k)\}$
 - $\bigvee_{i=1}^k (\mathcal{M}_i \setminus X) = (\bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i) \setminus X$, de az $/$ és a \oplus műveletekre ez már nem igaz
- **12.2. tétel:** matroidok $\bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ összege matroidot alkot
 - *bizonyítás:* $\mathcal{M}_1 \vee (\mathcal{M}_2 \vee \mathcal{M}_3) = (\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2) \vee \mathcal{M}_3 \implies$ elegendő $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ -t vizsgálni
 - (F1): $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$
 - (F2): $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \in \mathcal{F}_1$, $X_2 \in \mathcal{F}_2$, $Y \subseteq X$
 - ekkor $X_1 \supseteq Y \cap X_2 \in \mathcal{F}_1$, $X_2 \supseteq Y \cap X_2 \in \mathcal{F}_2$, $(Y \cap X_2) \cup (Y \cap X_2) = Y \in \mathcal{F}'$
 - (F3): legyen $X, Y \in \mathcal{F}'$; $|X| > |Y|$; $X = X_1 \cup X_2$; $Y = Y_1 \cup Y_2$; $X_1, X_2 \in \mathcal{F}_1$; $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_2$
 - ált. megsz. nélkül tfh. $|X_1 \cap Y_2| + |X_2 \cap Y_1|$ minimális, $X_1 \cap X_2 = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$

- ált. megsz. nélkül tfh. $|X_1| > |Y_1| \implies \exists e \in X_1 - Y_1 : Y_1 \cup \{e\} \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$
- ha $e \notin Y_2 \implies e \in X - Y, Y \cup \{e\} = (Y_1 \cup \{e\}) \cup Y_2 \in \mathcal{F}'$
- ha $e \in Y_2 \implies Y = Y'_1 \cup Y'_2 = (Y_1 \cup \{e\}) \cap (Y_2 - \{e\})$ is egy jó felbontása Y -nak
 - * vegyük észre, hogy $X_1 \cap X_2 = \emptyset, e \in X_1 \implies e \notin X_2$
 - * $|X_1 \cap (Y_2 - \{e\})| + |X_2 \cap (Y_1 \cup \{e\})| = |X_1 \cap Y_2| - 1 + |X_2 \cap Y_1|$
 - * a metszetek méretének összege nem lehetett minimális, ellentmondás ■
- **12.3. definíció:** az $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2), \dots, \mathcal{M}_k = (E, \mathcal{F}_k)$ matroidok *metszete* az (E, \mathcal{F}') halmazrendszer, ahol $\mathcal{F}' = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{F}_i$
 - ez nem mindig matroid, pl. $\mathcal{M} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \quad \quad 3 \end{array} \right)$ és $\mathcal{M} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \quad \quad 3 \end{array} \right)$ metszete nem az, mert $\mathcal{F}' = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} \implies (\text{F3})$ nem teljesül
- **12.4. probléma:** (súlyozott) k -matroid metszet (k -MMP)
 - INPUT: $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2), \dots, \mathcal{M}_k = (E, \mathcal{F}_k), p \in \mathbb{N} (w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, W \in \mathbb{R}_{\geq 0})$
 - OUTPUT: \exists -e olyan $X \in \bigcap_{i=1}^k \mathcal{F}_i$, hogy $|X| \geq p$ (illetve $w(X) \geq W$)
- **12.5. tétel:** $k \geq 3$ esetén k -MMP NP-nehéz
 - *bizonyítás:* 3-MPP NP-nehéz $\implies k > 3, k$ -MMP NP-nehéz
 - adunk egy 3-MPP $\prec k$ -MMP Karp-redukciót ($k > 3$)
 $\xrightarrow{k-2 \text{ db}}$
 - $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) \in 3\text{-MPP} \iff (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \overbrace{\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_3, \dots, \mathcal{M}_3}^{k-2 \text{ db}}) \in k\text{-MPP}$
 - irányított s - t -HAMÚT $\prec 3\text{-MPP} \implies 3\text{-MPP}$ NP-teljes
 - $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(G)$
 - $\mathcal{F}(\mathcal{M}_2) =$ azon élhalmazok, melyekben \forall pont be-foka $\leq 1, d_{\text{be}}(s) = 0$
 * egy partíció-matroidból kapjuk s bemenő éleinek összehúzásával
 - $\mathcal{F}(\mathcal{M}_3) =$ azon élhalmazok, melyekben \forall pont ki-foka $\leq 1, d_{\text{ki}}(t) = 0$
 - $p = |V| - 1 \implies X \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3; |X| \geq p$ épp s - t Hamilton-út ■

13. A k -matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.

- **13.1. probléma:** k -matroid partíció (k -MPP)
 - INPUT: $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2), \dots, \mathcal{M}_k = (E, \mathcal{F}_k)$
 - OUTPUT: E független-e $\bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ -ben? $\iff \bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i \stackrel{?}{=} (E, 2^E)$
 - $\iff \exists E_1 \in \mathcal{F}_1, E_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, E_k \in \mathcal{F}_k : E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$
- **13.2. algoritmus:** k -matroid partíció algoritmus¹
 - 0. lépés: $E_1 \leftarrow \emptyset, E_2 \leftarrow \emptyset, \dots, E_k \leftarrow \emptyset$
 - 1. lépés ha $\bigcup_{i=1}^k E_i = E \implies \text{STOP}$, igaz
 - 2. lépés van-e $x \in E - \bigcup_{i=1}^k E_i$, hogy $\bigcup_{i=1}^k E_i \cup \{x\}$ -t partícionálható?
 - ha igen \implies legyen E_1, E_2, \dots, E_k az új partícionálás, GOTO 1.
 - ha nem $\implies \text{STOP}$, hamis
 - irányított $\vec{G} = (V, \vec{E})$ segédgráf konstrukció a 2. lépés elvégzéséhez
 - $V = E \cup P = E \cup \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$
 - $(a, p_i) \in \vec{E} \iff a \notin E_i, \text{ de } E_i \cup \{a\} \in \mathcal{F}_i$
 - $(a, b) \in \vec{E} \iff$ valamely i -re $b \in E_i, a \notin E_i, E_i \cup \{a\} \notin \mathcal{F}_i, E_i \cup \{a\} - \{b\} \in \mathcal{F}_i$
 - szélességi kereséssel keressük meg a legrövidebb utat $E' = E - \bigcup_{i=1}^k E_i$ -ből P -be
 - van $\implies (a, b)$ -kre $b \in E_i$ esetén $E_i \leftarrow E_i \cup \{a\} - \{b\}; (a, p_i)$ -re $E_i \leftarrow E_i \cup \{a\}$
 * \vec{G} definíciója miatt még $\forall E_i \in \mathcal{F}_i; E'$ mérete 1-gyel (út első csúcsa) nőtt

¹Edmonds, J. és D. R. Fulkerson (1965). Transversals and Matroid Partition. In: *J. OF RESEARCH of the Nat. Bureau of Standards—B. Math. and Math. Phys. Vol. 69B, No. 3*

- nincs \implies legyen $X \subset E$ az E' -ből irányított úton elérhető csúcsok halmaza
 - * $r(X) \leq \sum_{i=1}^k r_i(X) < |X| \implies E \supset X \notin \bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i \xrightarrow{(F2)} E$ nem lehet független
- lépésszám: $O(|E| + \overbrace{c(n+k)^2}^{\text{gráf}} + \overbrace{c(n+k)^2}^{\text{szélességi}})$
- **13.3. tétel:** az $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ azonos rangú ($r_1(E) = r_2(E)$) matroidoknak pontosan akkor van közös bázisa, ha $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^* = (E, 2^E)$
 - (\implies) ha B közös bázis, akkor $E - X$ bázisa \mathcal{M}_2^* -nak
 - $E = X \cup (E - X)$ független az összegben $\implies \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^*$ teljes
 - (\impliedby) legyen $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \in \mathcal{F}_1$, $E_2 \in \mathcal{F}_2^*$
 - $|E| \leq |E_1| + |E_2| = r_1(E_1) + r_2^*(E_2) = r_1(E_1) + (|E| - r_2(E) + r_2(E - E_2)) \leq r_1(E) + (|E| - r_2(E)) = |E|$
 - mindenhol egyenlőség kell álljon, tehát $|E| \leq |E_1| + |E_2| \implies E_1 = E - E_2$
 - $r_1(E_1) = r_1(E)$, $r_2(E) = r_2(E - E_2) = r_2(E_1) \implies E_1$ közös bázis
- **13.4. következmény:** 2-MMP visszavezetése 2-MPP
 - legyen $\mathcal{M}'_1 = (E, \mathcal{F}'_1)$, $\mathcal{M}'_2 = (E, \mathcal{F}'_2)$, ahol $\mathcal{F}'_i = \{X \in \mathcal{F}_i : |X| \leq p\}$ a matroidok *csonkoltjai*
 - $\forall p$ méretű független halmaz bázis a megfelelő csonkolt matroidban
 - $\mathcal{M}'_1 \vee (\mathcal{M}'_2)^* = (E, 2^E) \iff \mathcal{M}'_1$ -nek és \mathcal{M}'_2 -nek van közös bázisa
 - ez a bázis a 2-MMP-ben keresett p méretű közös független halmaz \mathcal{M}_1 -ben és \mathcal{M}_2 -ben

14. k -polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

- **14.1. definíció:** $r: 2^E \rightarrow \mathbb{N}$ k -polimatroid rangfüggvény, ha
 - (R1) $r(\emptyset) = 0$ (R2') $\forall e \in E : r(\{e\}) \leq k$ (R3) $Y \subseteq X \implies r(Y) \leq r(X)$
 - (R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$
 - a matroid rangfüggvények $k = 1$ választással adódnak
 - $X = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_m\} \xrightarrow{(R4)} m \leq \sum_{i=1}^m r(\{e_i\}) \leq r(X)$
 - másik irány: $\forall X \subseteq E : r(X) \leq k|X|$
- **14.2. definíció:** $X \subseteq E$ egy k -matching, ha $r(X) = k|X|$
- **14.3. példa:** $G = (V, E)$ gráf, $r(X)$ = az $X \subseteq E$ élek által lefedett csúcsok halmaza
 - r egy 2-polimatroid-rangfüggvény, a 2-matchingegek G párosításai
- **14.4. probléma:** k -polimatroid matching (k -PMMP)
 - INPUT: $r: 2^E \rightarrow \mathbb{N}$ k -polimatroid rangfüggvény, $p \in \mathbb{N}$
 - OUTPUT: létezik-e $X \subseteq E$, hogy $r(X) = k|X|$ és $|X| \geq p$
- **14.5. tétel:** a k -PMMP $k \geq 3$ esetén NP-nehéz
 - *bizonyítás:* k -MMP $\prec k$ -PMMP és k -MMP NP-nehéz
 - ha $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$ matroidok $\implies r(X) = \sum_{i=1}^k r_i(X)$ k -polimatroid rangfüggvény
 - a k -matchingegek pontosan a független halmazok $\forall \mathcal{M}_i$ -ben
 - $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k; p) \in k$ -MMP $\iff (\sum_{i=1}^k r_i, p) \in k$ -PMMP
- **14.6. tétel:** ha r mindössze egy $O(1)$ időben kiszámolható orákulummal adott \implies 2-PMMP nem oldható meg polinomidőben
 - *bizonyítás:* legyen $|E| = 2n$, $E_0 \subset E$, $|E_0| = n$
 - $r_1(X) := \begin{cases} 2|X|, & \text{ha } |X| < n, \\ 2n-1, & \text{ha } |X| = n, \\ 2n, & \text{ha } |X| > n, \end{cases} \quad r_2(X) := \begin{cases} 2|X|, & \text{ha } |X| < n, \\ 2n, & \text{ha } X = E_0, \\ 2n-1, & \text{ha } X \neq E_0, |X| = n, \\ 2n, & \text{ha } |X| > n, \end{cases} \quad p := n$
 - $(r_1, p) \notin 2$ -PMMP, de $(r_2, p) \in 2$ -PMMP (E_0 egy $p = n$ elemű k -matching)
 - ennek eldöntéséhez az összes n elemű részhalmazt meg kell vizsgálni
 - ez $\binom{2n}{n} = O(4^n / \sqrt{\pi n})$ darab r hívást igényel

- nem használtuk ki, hogy 2-PMMP NP-nehéz, a bizonyítás $P = NP$ esetén is működik
- **14.7. tétel:** (Lovász László tétele)
 - ha az r 2-polimatroid rangfüggvény $r(X) = \dim\langle \bigcup_{i \in X} \{a_i, b_i\} \rangle$ alakban adott, ahol $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $\{a_i, b_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^k \implies r$ -en 2-PMMP polinomidőben megoldható
 - az ilyen r mindig 2-polimatroid rangfüggvény
 - *nem bizonyítjuk*

Közelítő és ütemezési algoritmusok

15. Polinomiális időben megoldható feladat fogalma, példák. Az NP, co-NP, NP-nehéz és NP-teljes problémaosztályok definíciója, viszonyaik, példák problémákra valamennyi osztályból. NP-nehéz feladatok polinomiális speciális esetei: algoritmus a maximális független ponthalmaz problémára és az élszínezési problémára páros gráfokon. Additív hibával közelítő algoritmusok speciális pont-, illetve élszínezési problémákra.

- algoritmuselméleti alapfogalmak
 - **15.1. definíció:** *kiszámítási problémáról* akkor beszélünk, ha egy I bemenet $f(I)$ függvényét szeretnénk kimenetként megadni
 - *eldöntési probléma:* $f(I) \in \{\text{IGEN}, \text{NEM}\}$
 - **15.2. definíció:** *optimalizálási probléma* olyan kiszámítási probléma, ahol
 - az I bemenethez X_I a *lehetséges kimenetek* halmaza, $c: X_I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény
 - $f(I) = x^* \in X_I$, hogy $c(x^*) = \max\{c(x) : x \in X_I\}$ (illetve $c(x^*) = \min\{c(x) : x \in X_I\}$)
 - a kimenet nemcsak az optimum értéke, hanem maga az x^* optimális megoldás
 - **15.3. definíció:** egy $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény *polinomiális*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq c_1 n^{c_2}$
 - egy algoritmus akkor *polinomiális* ha $\forall n$ méretű bemenetre $f(n)$ időben kiszámítja a kimenetet, ahol f polinomiális
 - egy probléma *polinom időben megoldható*, ha \exists rá polinomiális algoritmus
 - **15.4. definíció:** az A probléma *polinom időben visszavezethető* B -re ($A \prec_{\text{Cook}} B$), ha A polinom időben megoldható a B -t megoldó algoritmus szubrutinként hívásával
 - B hívása $O(1)$ lépésnek számít
 - **15.5. definíció:** döntési problémák osztályai
 - $P :=$ a polinom időben megoldható eldöntési problémák osztálya
 - * pl. teljes párosítás páros gráfban, k -matroid-partíció
 - $NP :=$ azon eldöntési problémák osztálya, ahol az IGEN válaszra létezik polinomiális méretű, polinomiális időben ellenőrizhető tanú
 - * pl. Hamilton-kör, k -matroid-metszet ($k \geq 2$)
 - $co-NP :=$ azon eldöntési problémák osztálya, ahol az NEM válaszra létezik polinomiális méretű, polinomiális időben ellenőrizhető tanú
 - * pl. teljes párosítás páros gráfban (Kőnig tétele, Hall-tétel), síkbarajzolhatóság (Kuratowski-tétel), teljes párosítás tetszőleges gráfban (Tutte-tétel)
 - egy B probléma *NP-nehéz*, ha $\forall A \in NP : A \prec_{\text{Cook}} B$
 - * pl. az általános k -polimatroid matching NP-nehéz, de nem NP-beli
 - egy B probléma *NP-teljes*, ha NP-beli és NP-nehéz
 - * pl. SAT (Cook–Levin tétel), 3SZÍN, HAM, LÁDAPAKOLÁS
 - $P \subseteq NP \cap co-NP$, NP -teljes $= NP \cap NP$ -nehéz, $P \stackrel{?}{=} NP$
- **15.6. probléma:** maximális független ponthalmaz páros gráfban
 - INPUT: $G = (A, B; E)$ páros gráf OUTPUT: F maximális független ponthalmaz
 - a probléma általános gráfra NP-nehéz, de páros gráfra polinomiális
 - futtasuk le a gráfra a javítóutas algoritmust (polinom idejű)

- **15.7. állítás:** ekkor $F = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_3$ maximális független ponthalmaz
 - A_1, B_1 = az A -, illetve B -beli párosítatlan pontok halmaza
 - B_2 = az A_1 -ből alternáló úton elérhető pontok (nincs javító út \implies mind van párjuk)
 - A_1 = a B_2 -beli pontok párjai
 - $A_3 = A - A_1 - A_2$, $B_3 = B - B_1 - B_2$
 - *bizonyítás:* az algoritmus által megtalált M párosítás maximális $\implies |M| = \nu(G)$
 - * $\nu(G)$ = maximális párosítás mérete, $\tau(G)$ = min. lefogó ponthalmaz mérete
 - * nincs él $A_1 \cup A_2$ és $B_1 \cup B_2$ között (1.3. tétel) $\implies F$ független
 - * $A \cup B - F = A_3 \cup B_2$ lefogó ponthalmaz $\implies \tau(G) \leq |A_3 \cup B_2| = |F| = \nu(G)$
 - * egy lefogó ponthalmaz egy párosítás \forall élét le kell fogja $\implies \nu(G) \leq \tau(G)$
 - * így $\tau(G) \leq |A_3 \cup B_2| = |F| = \nu(G) \leq \tau(G) \implies \nu(G) = \tau(G)$
 - indir. tfh. $\exists F' \subseteq A \cup B$ független ponthalmaz, $|F'| > |F|$
 - * ekkor $A \cup B - F'$ lefogó ponthalmaz, de $|A \cup B - F'| < |A \cup B - F| = \tau(G)$
 - * ez ellentmondás, F maximális kell legyen ■
- **15.8. probléma:** élszínezés páros gráfokon
 - INPUT: $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf OUTPUT: G élszínezése $\Delta(G)$ színnel
 - a probléma általános gráfra NP-nehéz, de páros gráfra polinomiális
 - **15.9. tétel:** (Vizing tétele) ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf $\implies \Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$
 - *nem bizonyítjuk*
 - **15.10. tétel:** (Kőnig tétele) ha $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf $\implies \chi_e(G) = \Delta(G)$
 - *bizonyítás:* meg fogunk adni egy polinomiális algoritmust a színezésre
 - vegyük a gráf $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ éleit sorban, és színezzük meg őket egy-egy szabad színnel
 - legyen $e_i = \{u, v\}$, $u \in A$, $v \in B$ a most megszínezendő él
 - $d(u), d(v) \leq \Delta(G)$, és illeszkedik rájuk színezetlen él (e_i)
 - * \implies mindkét csúcsnak \exists szabad színe \implies ha \exists közös szabad szín, e_i kapja meg azt
 - tfh. az u szabad színe a *piros*, de a v -é a *kék*
 - legyen P_u az u -ból induló, felváltva kék–piros út (kör nem lehet)
 - ekkor $v \notin P_u$, mert akkor a végpontja lenne (v -ben a kék szabad)
 - * de $u \in A$, $v \in B \implies P_u$ páratlan hosszú $\implies P_u$ utolsó éle kék
 - cseréljük fel P_u mentén a piros és a kék színeket
 - * ez a meglevő színezést nem ronthatja el
 - * u -ban most már a kék szabad, v -ben maradt szabad $\implies e_i$ színezhető kékre ■
- **15.11. definíció:** egy maximalizálási (minimalizálási) problémát egy algoritmus C *additív hibától eltekintve helyesen old meg*, ha $\forall I : c(x^*) \geq \max_{x \in X_i} c(x) - C$ ($c(x^*) \leq \min_{x \in X_i} c(x) + C$)
- **15.12. definíció:** egy algoritmus C *additív hibával közelítő algoritmus*, ha adott optimalizálási problémát polinom időben, C additív hibától eltekintve helyesen old meg
- **15.13. probléma:** egyszerű gráfok élszínezése
 - INPUT: $G = (V; E)$ egyszerű gráf OUTPUT: G minimális élszínezése
 - Vizing tétele (15.9. tétel) szerint $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$
 - a tétel bizonyítása konstruktív, ad egy $\Delta(G) + 1$ polinom időben
 - így a tételben szereplő algoritmus 1 additív hibával közelítő
- **15.14. probléma:** síkgráfok csúcsszínezése
 - INPUT: $G = (V; E)$ síkgráf OUTPUT: G minimális csúcsszínezése
 - **15.15. tétel:** (négyszíntétel) minden síkgráf színezhető 4 színnel, *nem bizonyítjuk*
 - létezik algoritmikus bizonyítás, ami polinomidőben előállít egy 4-színezést
 - ez egy 2 additív hibával közelítő algoritmus
 - ha a 4-színező algoritmus előtt ellenőrizzük, hogy G páros-e \implies 2-színezhető
 - ez szélességi kereséssel polinomidőben megtehető

16. A Hamilton-kör probléma visszavezetése a leghosszabb kör probléma additív közelítésére. k -approximációs algoritmus fogalma, példák: két-két algoritmus a minimális lefogó ponthalmaz keresésére és a maximális páros részgráf keresésére. Minimális levelű, illetve maximális belső csúcsú feszítőfa keresése. Approximációs algoritmus az utóbbi feladatra (biz. nélkül).

- **16.1. probléma:** leghosszabb kör (LHK)
 - INPUT: $G = (V, E)$ gráf OUTPUT: G egy leghosszabb köre
 - **16.2. tétel:** ha $P \neq NP \implies$ LHK-re nincs C additív hibával közelítő algoritmus
 - *bizonyítás:* megmutatjuk, hogy $HAM \prec LHK$ C -additív közelítése
 - indir. tfh. $\exists C$ -additív hibájú közelítés LHK-ra
 - $G' :=$ osszuk fel a G gráf \forall élet C új ponttal \implies egy él helyett $C+1$ új él
 - G' $k(C+1)$ hosszú körei G k hosszú köreinek felelnek meg
 - G' -ben van $n(C+1)$ hosszú kör $\iff G$ -ben van n hosszú kör $\iff G$ hamiltoni
 - G hamiltoni \implies a közelítő algoritmus $\geq n(C+1) - C$ hosszú x^* kört talál G' -ben
 - * de G' köreinek hossza osztható $(C+1)$ -gyel $\implies x^*$ csak a Hamilton-kör lehet ■
- **16.3. definíció:** egy maximalizálás (minimalizálási) problémát egy algoritmus k *multiplikatív hibától eltekintve helyesen old meg*, ha $\forall I : c(x^*) \geq \frac{1}{k} \max_{x \in X_I} c(x)$ ($c(x^*) \leq k \min_{x \in X_I} c(x)$)
- **16.4. definíció:** egy algoritmus k -*approximációs algoritmus*, ha polinomiális és k multiplikatív hibától eltekintve helyesen oldja meg az adott problémát
- **16.5. probléma:** minimális lefogó ponthalmaz (MLP)
 - INPUT: $G = (V, E)$ OUTPUT: egy X minimális lefogó ponthalmaz G -ben
 - MLP NP-nehéz, mert a maximális független halmaz (MFP) is az, és $MFP \prec MFP$
 - X minimális független ponthalmaz $\iff V - X$ maximális lefogó ponthalmaz
 - az MFP nem k -approximálható (*nem bizonyítjuk*)
 - **16.6. algoritmus:** 2-közelítő algoritmus maximális párosítással
 - 1. lépés: keressük meg G egy M maximális párosítását
 - * páros gráfban: magyar módszer, általános gráfban: Edmonds algoritmus
 - 2. lépés $X :=$ az M -beli élek végpontjai
 - **16.7. tétel:** az így meghatározott X -re $|X| \leq 2\tau(G)$
 - * *bizonyítás:* egy lefogó ponthalmaz $M \forall$ élet le kell fogja $\implies |M| = \nu(G) \leq \tau(G)$
 - * $|F| = 2|M| = 2\nu(G) \leq 2\tau(G)$ ■
 - **16.8. algoritmus:** 2-közelítő algoritmus tovább nem bővíthető párosítással
 - 0. lépés: $M := \emptyset$
 - 1. lépés: ha van olyan $e \in E$, hogy $M \cup \{e\}$ párosítás $\implies M \leftarrow M \cup \{e\}$, GOTO 1.
 - * egyébként M egy tovább nem bővíthető párosítás
 - 2. lépés: $X :=$ az M -beli élek végpontjai
 - **16.9. tétel:** az így meghatározott X -re $|X| \leq 2\tau(G)$
 - * *bizonyítás:* a 16.7. tételben nem használtuk ki, hogy M maximális
 - * így továbbra is $|F| = 2|M| \leq 2\nu(G) \leq 2\tau(G)$ ■
 - éles példa: m darab diszjunkt 1 hosszú út
 - optimális megoldás: mindegyik élnek csak az egyik végét vesszük bele $\implies m$ csúcs
 - közelítő megoldás: mindegyik él mindkét vége $\implies 2m$ csúcs
- **16.10. probléma:** maximális páros részgráf (MPR) \implies NP-nehéz (*nem bizonyítjuk*)
 - INPUT: $G = (V, E)$ gráf
 - $A, B : A \cup B = G, A \cap B = \emptyset$, az A és B között menő élek száma maximális
 - **16.11. algoritmus:** 2-approximációs algoritmus 1.
 - 1. lépés: osszuk ketté a csúcshalmazat A -ra és B -re tetszőlegesen
 - $d_s(v) := v$ -ből a saját csoportjába menő élek száma
 - $d_m(v) := v$ -ből a másik csoportba menő élek száma

- 2. lépés: keressünk egy olyan v csúcsot, amire $d_s(v) > d_m(v)$
 - * ha van ilyen v , helyezzük át a másik csoportba; GOTO 2.
- 3. lépés: (A, B) egy 2-approximáció az MPR problémára
- **16.12. tétel:** az így meghatározott (A, B) valóban 2-approximáció
 - * *bizonyítás:* \forall lépésben az A és B között haladó élek száma nő $\implies \leq |E|$ lépés
 - * $\forall v \in V : d_m(v) \geq d_s(v) \implies \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_m(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_s(v)$
 - * $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_m(v)$ az A és B között menő élek száma
 - * $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_m(v) = \frac{1}{4} \sum_{v \in V} d_m(v) + d_m(v) \geq \frac{1}{4} \sum_{v \in V} d_m(v) + d_s(v) = \frac{1}{2} |E| \geq \frac{1}{2} |E_{\max}|$, ahol $E_{\max} \subseteq E$ a maximális páros részgráf éleinek halmaza ■
- **16.13. algoritmus:** 2-approximációs algoritmus 2.
 - 1. lépés $A := \emptyset, B := \emptyset$
 - 2. lépés G pontjait valamilyen sorrendben véve helyezzük el azoka a halmazokba, ahol *kevesebb* szomszédjuk van
 - **16.14. tétel:** az így meghatározott (A, B) valóban 2-approximáció
 - * továbbra is igaz az, hogy $\forall v \in V : d_m(v) \geq d_s(v) \implies$ lásd a 16.12. tételt ■
 - jobb közelítéshez (ha szerencsénk van) még futtathatjuk a 16.11. algoritmust
- **16.15. probléma:** minimális levelű feszítőfa (MLF)
 - INPUT: $G = (V, E)$ összefüggő gráf
 - OUTPUT: F minimális számú 1 fokú csúcsot tartalmazó feszítőfa G -ben
 - **16.16. tétel:** MLF NP-nehéz
 - *bizonyítás:* HAMÚT \prec MLF
 - * a Hamilton-út 2 levelű feszítőfa, ennél kevesebb levelű pedig nem létezhet ■
 - MLF-re nem létezik k -approximációs algoritmus (*nem bizonyítjuk*)
- **16.17. probléma:** maximális belső csúcsú feszítőfa (MBF)
 - INPUT: $G = (V, E)$ összefüggő gráf
 - OUTPUT: F maximális számú *nem* 1 fokú csúcsot tartalmazó feszítőfa G -ben
 - MBF ekvivalens MLF-fel, ezért szintén NP-nehéz, de már k -approximálható
 - **16.18. algoritmus:** 2-approximációs algoritmus MBF-re
 - ILST = Independent Leaves Spanning Tree
 - 0. lépés: legyen F egy tetszőleges feszítőfa G -ben
 - 1. lépés: ha F Hamilton-út, vagy a levelei független halmazt alkotnak \implies STOP
 - 2. lépés: legyen a és b F két levele, ahol $\{a, b\} \in E$ (szomszédosak G -ben)
 - * keressük meg a $P = a \rightsquigarrow b$ (egyértelmű) utat F -ben
 - * F nem Hamilton-út $\implies P$ -nek van F -ben ≥ 3 . fokú csúcsa \implies az egyik legyen v
 - 3. lépés: legyen $w : \{v, w\} \in E, F \leftarrow F - \{\{v, w\}\} \cup \{\{a, b\}\}$, GOTO 1.
 - * az így kapott F továbbra is feszítőfa, a levelek száma csökkent
 - **16.19. tétel:** a fenti algoritmus polinomiális, F egy 2-approximáció MBF-re
 - * *nem bizonyítjuk*
 - **16.20. algoritmus:** 2-approximációs algoritmus MBF-re mélységi kereséssel
 - 1. lépés: legyen F a G mélységi feszítőfája $r \in E$ -ből indítva
 - 2. lépés: ha F Hamilton-út, vagy $d(r) > 1 \implies$ STOP
 - * ha $d(r) = 1$, de r nem szomszédos F másik levelével \implies STOP
 - 3. lépés: legyen a olyan levele F -nek, mellyel r szomszédos
 - * keressük meg a $P = r \rightsquigarrow a$ utat F -ben (egyértelmű)
 - * v az a -hoz legközelebbi ≥ 3 . fokú csúcs P -ben
 - * w a v -vel szomszédos csúcs a $v \rightsquigarrow a$ úton P -ben (lehet, hogy $w = a$)
 - 4. lépés: $F \leftarrow F - \{\{v, w\}\} \cup \{\{r, a\}\}$
 - **16.21. tétel:** a fenti algoritmus $O(|E|)$ idejű, F egy 2-approximáció MBF-re
 - * *nem bizonyítjuk*

17. A minimális lefogó ponthalmaz probléma visszavezetése a halmazfedési feladatra, a halmazfedési feladat közelítése, éles példa. Közelítő algoritmus a Steiner-fa problémára, éles példa.

- **17.1. probléma:** súlyozott halmazfedés (SHF)
 - INPUT: n elemű U alaphalmaz, $\mathcal{R} \subseteq 2^U : \bigcup_{S \in \mathcal{R}} S = U$, $c: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ költségfüggvény
 - OUTPUT: $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, ahol $\bigcup_{S \in \mathcal{R}'} S = U$ és $\sum_{S \in \mathcal{R}'} c(S)$ minimális
 - **17.2. tétel:** a súlyozott halmazfedés probléma NP-nehéz
 - *bizonyítás:* megmutatjuk, hogy $\text{MLP} \prec \text{SHF}$
 - keressük a $G = (V, E)$ gráf minimális lefogó ponthalmazát
 - $U := E$, $\mathcal{R} := \{E_v = \{e : u \in V, e = \{v, u\} \in E\} : v \in V\}$, $c(E_v) := 1$
 - \mathcal{R}' minimális fedés $\iff F \subseteq V$ min. lefogó ponthalmaz, ahol $\mathcal{R}' = \{E_v : v \in \mathcal{R}'\}$ ■
 - **17.3. tétel:** ha $P \neq NP \implies \nexists$ konstans k -faktorú approximáció SHF-re (*nem bizonyítjuk*)
 - **17.4. algoritmus:** Chvátal mohó algoritmus
 - 0. lépés: $\mathcal{R}' := \emptyset$, $C := \emptyset$ a már lefedett elemek halmaza
 - 1. lépés: ha $C = U \implies \text{STOP}$, egyébként $S = \arg \min_{S \in \mathcal{R}} \frac{c(S)}{|S-C|}$
 - 2. lépés: $\mathcal{R}' \leftarrow \mathcal{R}' \cup \{S\}$, $C \leftarrow C \cup S$, GOTO 1.
 - **17.5. tétel:** Chvátal mohó algoritmus H_k -approximáció, ahol $k = \max_{S \in \mathbb{R}} |S|$
 - $\ln n \leq H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln n + 1$
 - *bizonyítás:* az algoritmus polinomiális
 - az x elem $p(x)$ ára az öt első két fedő $S \in \mathcal{R}'$ halmazra jutó $\frac{c(S)}{|S-C|}$ költség
 - * $c(S) = \sum_{x \in S-C} \frac{c(S)}{|S-C|} = \sum_{x \in S-C} p(x) \implies c(\mathcal{R}') = \sum_{S \in \mathcal{R}'} c(S) = \sum_{x \in U} p(x)$
 - legyen \mathcal{R}^* egy min. összsúlyú fedés, $S = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \in \mathcal{R}^*$ ($r \leq k$)
 - * ált. megsz. tfh. az algoritmus S elemeit x_r, x_{r-1}, \dots, x_1 sorrendben fedte le
 - * amikor x_i -t lefedtük, $x_r, x_{r-1}, \dots, x_{i-1} \in C \implies \frac{c(S)}{|S-C|} \geq \frac{c(S)}{i}$
 - * $\forall x_i \in S$ -t fedő S'_i -re $\frac{c(S'_i)}{|S'_i-C|} \leq \frac{c(S)}{i} \implies \sum_{x_i \in S} p(x_i) \leq \sum_{x_i \in S} \frac{c(S)}{i} = H_r c(S)$
 - * $c(\mathcal{R}') = \sum_{x \in U} p(x) \leq \sum_{S^* \in \mathcal{R}^*} \sum_{x_i \in S^*} p(x_i) \leq \sum_{S^* \in \mathcal{R}^*} H_{|S^*|} c(S^*) \leq \sum_{S^* \in \mathcal{R}^*} H_k c(S^*) = H_k \sum_{S^* \in \mathcal{R}^*} c(S^*) = H_k c(\mathcal{R}^*)$ ■
 - éles példa: $U := \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{R} := \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, U\}$, $c(\{i\}) := \frac{1}{i}$, $c(U) := 1 + \epsilon$ ($\epsilon > 0$)
 - $\mathcal{R}' = \{\{n\}, \{n-1\}, \dots, \{1\}\}$ ebben a sorrendben
 - * a j . halmaz bevétele után $\{n-j\}$ költsége $= \frac{c(\{n-j\})}{1} = \frac{1}{n-j} < U$ költsége $= \frac{c(U)}{n-j} = \frac{1+\epsilon}{n-j}$
 - $\mathcal{R}^* = \{U\}$, $c(\mathcal{R}^*) = 1 + \epsilon$, de $c(\mathcal{R}') = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = H_n \implies \frac{c(\mathcal{R}')}{c(\mathcal{R}^*)} = \frac{H_n}{1+\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} H_n = H_k$
 - **17.6. probléma:** Steiner-fa
 - INPUT: $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf; $S \subset V$ Steiner-pontok; $T = V - S$ terminálok; $c := E \rightarrow \mathbb{Q}^+$ költségfüggvény
 - OUTPUT: $F \subseteq G$ a T minden csúcsát tartalmazó Steiner-fa, ahol $\sum_{e \in F} c(e)$ minimális
 - **17.7. tétel:** a Steiner-fa probléma NP-nehéz (*nem bizonyítjuk*)
 - **17.8. probléma:** metrikus Steiner-fa
 - INPUT: mint a Steiner-fa problémánál, de G teljes gráf és c teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget
 - **17.9. algoritmus:** 2-approximáció a metrikus Steiner-fa problémára
 - * legyen az $X \subseteq V$ által feszített részgráf G -ben $G[X]$
 - * (pl. Kruskal algoritmusával) keressük $G[T]$ min. feszítőfáját \implies ez a Steiner-fa
 - **17.10. lemma:** ha c a G teljes gráf metrikus élsúlyozása és $R = x \rightsquigarrow y$ élsorozat $\implies c(x, y) \leq c(R)$
 - * *bizonyítás:* teljes indukcióval R éleinek r száma szerint
 - * ha $r = 1$, az állítás triviális
 - * legyen $R = ((x, z), R') \implies$ az ind. feltevés szerint $c(z, y) \leq c(R')$
 - * $c(R) = c(x, z) + c(R') \geq c(x, z) + c(z, y) \overset{\Delta\text{-egyenlőtlenség}}{\geq} c(x, y)$ ■

- **17.11. tétel:** $F=G[T]$ min. feszítőfája 2-approximáció a metrikus Steiner-fa problémára
 - * *bizonyítás:* az eljárás polinomiális, F tényleg Steiner-fa
 - * legyen D az optimális Steiner-fa
 - * $D' :=$ duplazzuk meg D éleit $\implies D'$ -ben minden foksám páros
 - * D' euleri \implies legyen D' Euler-körsétája $U = (u_0, f_1, u_1, f_2, u_2, \dots, f_m, u_m = u_0)$
 - * legyenek $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{|R|}}$ $G[T]$ csúcsai az U szerinti sorrendben
 - * ekkor $H = ((u_{i_1}, u_{i_2}), (u_{i_2}, u_{i_3}), \dots, (u_{i_{|T|}}, u_{i_1}))$ a $G[T]$ Hamilton-köre („levágás”)
 - * $H' = H - \{\text{tetszőleges } H\text{-beli él}\}$ Hamilton-út $\implies H'$ egy feszítőfa $G[T]$ -ben
 - * $2c(D) = c(D') \stackrel{17.10. \text{ lemma}}{\geq} c(H) \geq c(H') \stackrel{F \text{ minimális}}{\geq} c(F)$ ■
- **17.12. algoritmus:** 2-approximáció a Steiner-fa problémára
 - legyen $G' :=$ teljes gráf $V(G)$ -n, $c'(x, y) :=$ a legrövidebb $x \rightsquigarrow y$ út súlya G -ben
 - * c' metrikus, mert $c'(x, z) = c_{\min}(x \rightsquigarrow z) \leq c_{\min}(x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z) = c'(x, y) + c'(y, z)$
 - legyen F' az (G', S, T, c') metrikus Steiner-fa approximációja
 - legyen $K = \bigcup_{e=\{x,y\} \in F'} \{ \text{a legrövidebb } x \rightsquigarrow y \text{ út élei} \}$
 - $F'' =$ egy min. feszítőfa K -ban lesz a Steiner-fa
- **17.13. tétel:** F'' 2-approximáció a Steiner-fa problémára
 - *bizonyítás:* az eljárás polinomiális, és F'' tényleg Steiner-fa, mert K lefedi T -t
 - legyen D az optimális (G', S, T, c') metrikus Steiner-fa, F^* az optimális Steiner-fa
 - F^* Steiner-fa G' -ben $\implies c'(D) \leq c'(F^*)$
 - $e = \{x, y\}$ 1 hosszú $x \rightsquigarrow y$ út $\implies \forall e \in E : c'(e) \leq c(e) \implies c'(F^*) \leq c(F^*)$
 - $c(F'') \leq c(K) \leq c'(F') \leq 2c'(D) \leq 2c'(F^*) \leq 2c(F^*)$ ■
- éles példa: legyen $G = (V, E)$ teljes gráf, $V := \{1, 2, \dots, n\}$, $S = \{1\}$, $c(\{i, j\}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 1, \\ 2, & \text{ha } i, j \neq 1 \end{cases}$
 - ez metrikus \implies nincs szükség metrizálásra, $F'' = F' = G[T]$ feszítőfája
 - $c(F'') = 2(n-2)$, de az optimális Steiner-fa $F^* = 1$ középpontú csillag, $c(F^*) = n-1$
 - $\frac{c(F'')}{c(F^*)} = \frac{2(n-2)}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \implies \forall k < 2$ approximációs faktorra \exists ellenpélda elég nagy n -nel

18. A Hamilton-kör probléma visszavezetése az általános utazóügynök probléma k -approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmus.

19. Teljesen polinomiális approximációs séma fogalma. A részösszeg probléma, bonyolultsága. Teljesen polinomiális approximációs séma a részösszeg problémára.

20. Ütemezési feladatok típusai. Az $1|\text{prec}|C_{\max}$ és az $1|\Sigma C_j$ feladat. Approximációs algoritmusok a $P||C_{\max}$ feladatra: listás ütemezés tetszőleges sorrendben, éles példa tetszőleges számú gép esetére; listás ütemezés LPT sorrendben (biz. nélkül), éles példa tetszőleges számú gép esetére. Approximációs algoritmus a $P|\text{prec}|C_{\max}$ feladatra (biz. nélkül), példák: az LPT sorrend, illetve a leghosszabb út szerinti ütemezés sem jobb, mint $(2 - \frac{m}{1})$ -approximáció. A $P|\text{prec}, p_i = 1|C_{\max}$ feladat, Hu algoritmus (biz. nélkül).

Megbízható hálózatok tervezése

21. Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma, Menger irányítatlan gráfokra és élösszefüggőségre vonatkozó két tétele (biz. nélkül). $\lambda(G)$ meghatározása folyamok segítségével négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel.

22. $\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader tétele, Nagamochi és Ibaraki algoritmus.

23. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráfok keresése. A probléma NP-nehézsége, Khuller – Vishkin algoritmus (biz. nélkül).

Hálózatelméleti alkalmazások

24. Kirchhoff tételei a klasszikus villamos hálózatok analízisére.

25. Kirchhoff eredményeinek általánosítása transzformátorokat vagy girátorokat is tartalmazó hálózatokra (biz. nélkül). Algoritmusok a feltételek ellenőrzésére.

26. Kirchhoff eredményeinek általánosítása: szükséges feltétel tetszőleges lineáris sok-kapukat is tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságára. Villamos hálózatok duálisa.

Statikai alkalmazások

27. Rúdszerkezetek, merevségi mátrix, merevség, egyszerű rácsos tartók, Cremona – Maxwell diagramok.

28. Minimális merev rúdszerkezetek általános helyzetben, Laman tétele (biz. nélkül), Lovász és Yemini tétele.

29. Síkbeli négyzetrácsok és egyszintes épületek átlós merevítése.