

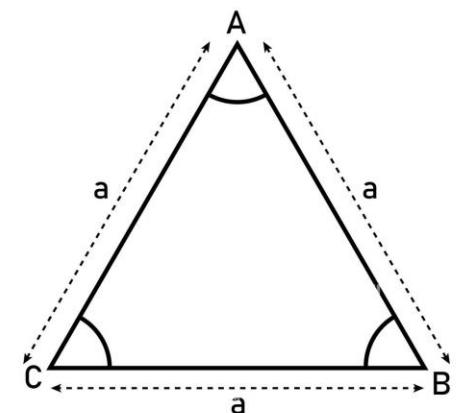
TREKENDESHI

Trekëndëshi është një figurë gjeometrike që ka tre brinjë, tre kënde dhe tre kulme. Ai formohet kur tre pika lidhen me tri vija të drejta dhe përbëjnë një figurë të mbyllur.

Pjesët e një trekëndëshi

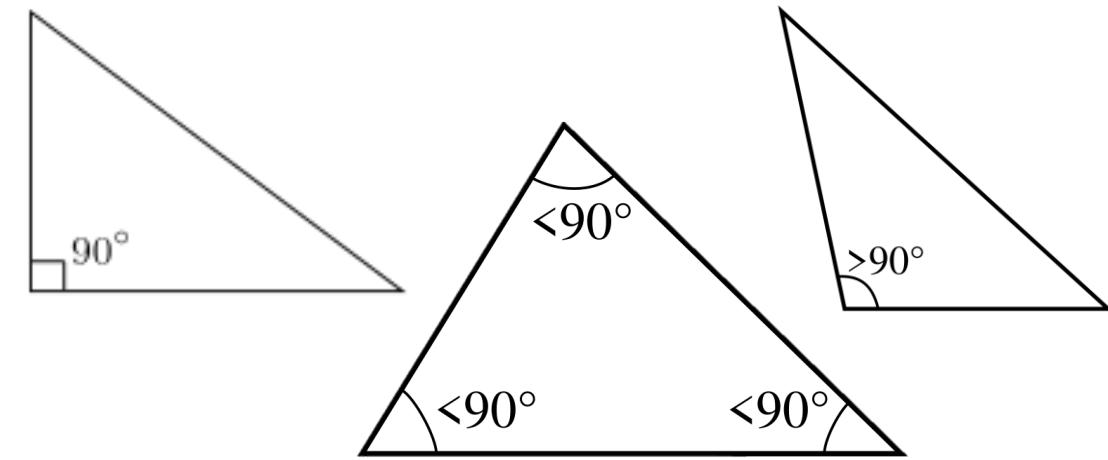
- Brinjët** – Janë vijat që formojnë trekëndëshin. Ka 3 brinjë.
- Këndet** – Janë hapësirat që formohen midis dy brinjëve. Ka 3 kënde.
- Kulmet** – Janë pikat ku takohen dy brinjë. Ka 3 kulme.

Equilateral Triangle



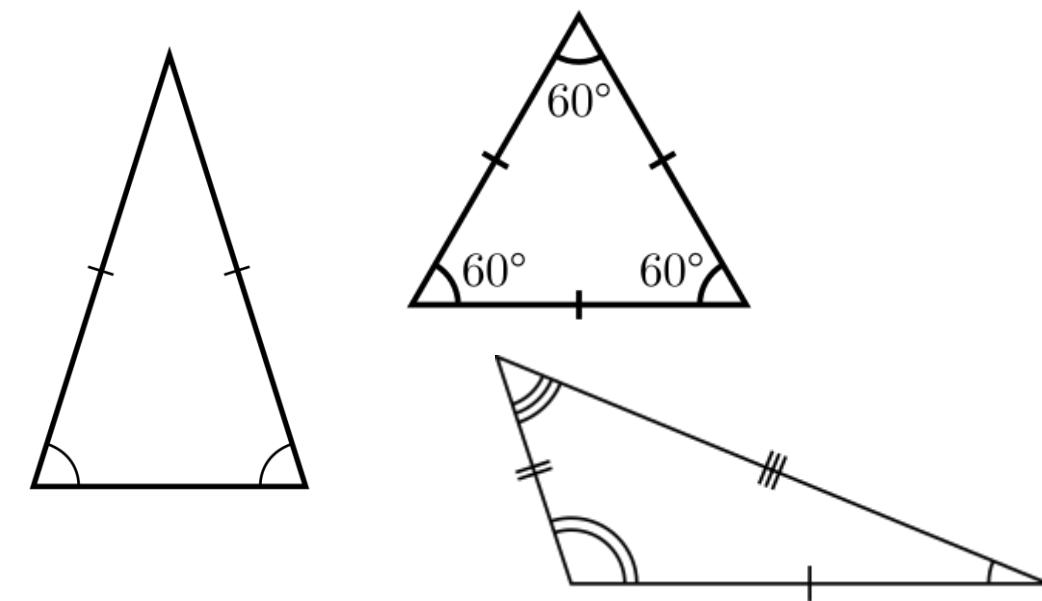
Klasifikimi sipas këndeve

- **Trekëndëshi kënddrejtë** ka një kënd të brendshëm prej 90° .
- **Trekëndësh këndgjërë** ka një kënd më të madh se 90° .
- **Trekëndësh këndngushtë** të tre këndet i ka më të vogla se 90° .



Klasifikimi sipas brinjëve

- **Trekëndëshi barabrinjës**, të gjitha brinjët i ka të barabarta poashtu edhe këndet e brendshme i ka të barabarta dhe secili prej tyre është nga 60°
- **Trekëndëshi barakrahës ose dybrinjëshëm**, ka dy brinjë respektivisht kënde të barabarta.
- **Trekëndëshi brinjëndryshëm**, të tre brinjët dhe këndet i ka të ndryshme



Teorema e Pitagorës

Përdoret vetëm për trekëndëshin kënddrejtë (pra, me një kënd 90°).

Përkufizimi:

Në një trekëndësh kënddrejtë, katorri i brinjës përballe këndit të drejtë (**hipotenuza**) është i barabartë me shumën e katorëve të dy brinjëve të tjera (këndeve të mprehtë).

₁₂ ₃₄ Formula:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

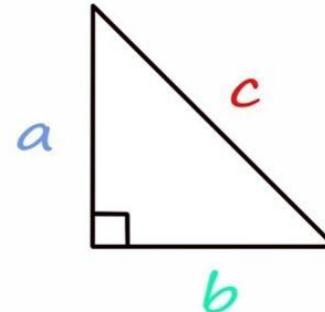
Ku:

- **c** është **hipotenuza** (brinja më e gjatë, përballe këndit të drejtë),
- **a** dhe **b** janë brinjët e tjera.



Teorema e Pitagorës

$$\underline{a^2 + b^2 = c^2}$$



hipotenuza² = shuma e kateteve në katror

Teoremat e Euklidit

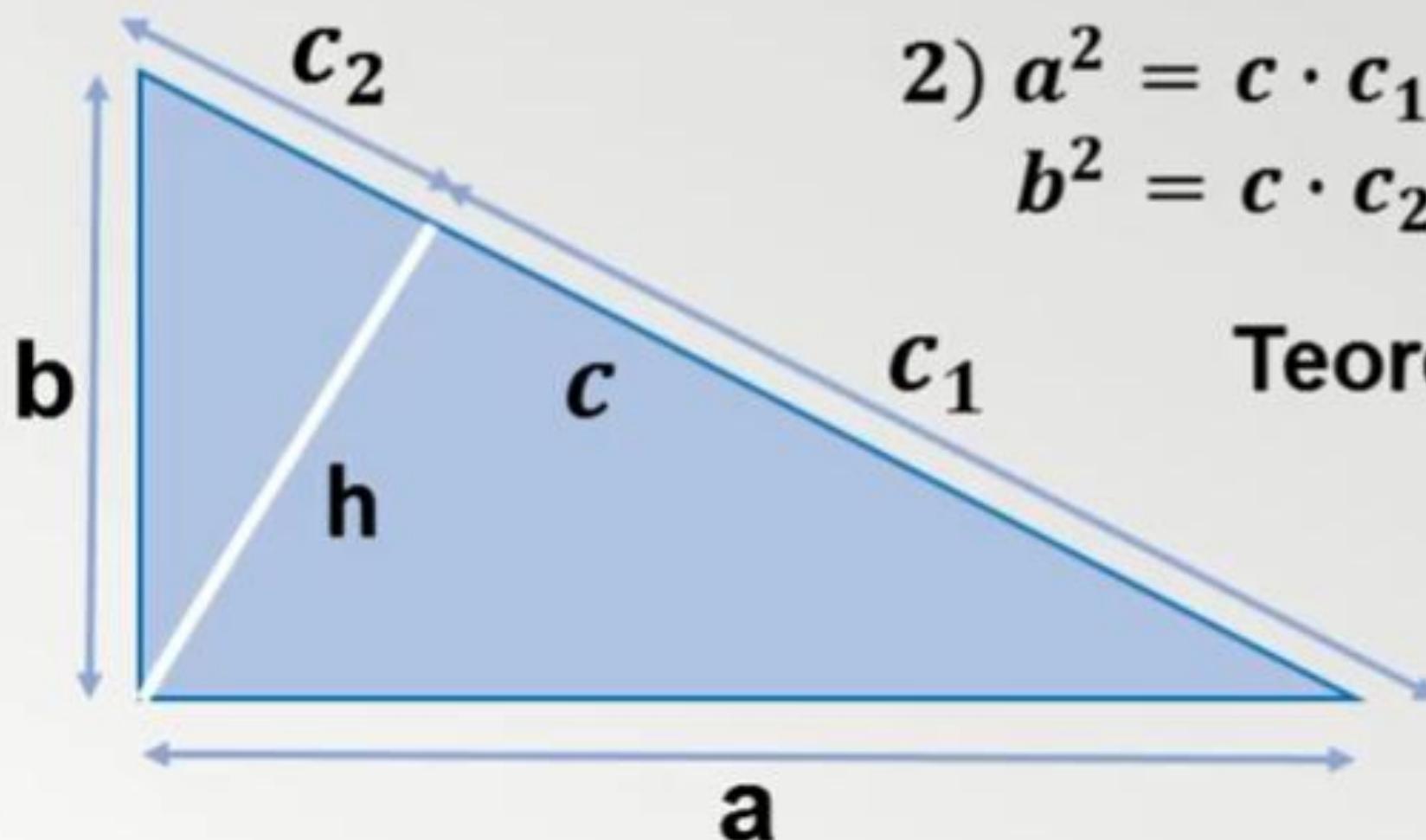
$$1) h^2 = c_1 \cdot c_2$$

$$\begin{aligned} 2) a^2 &= c \cdot c_1 \\ b^2 &= c \cdot c_2 \end{aligned}$$

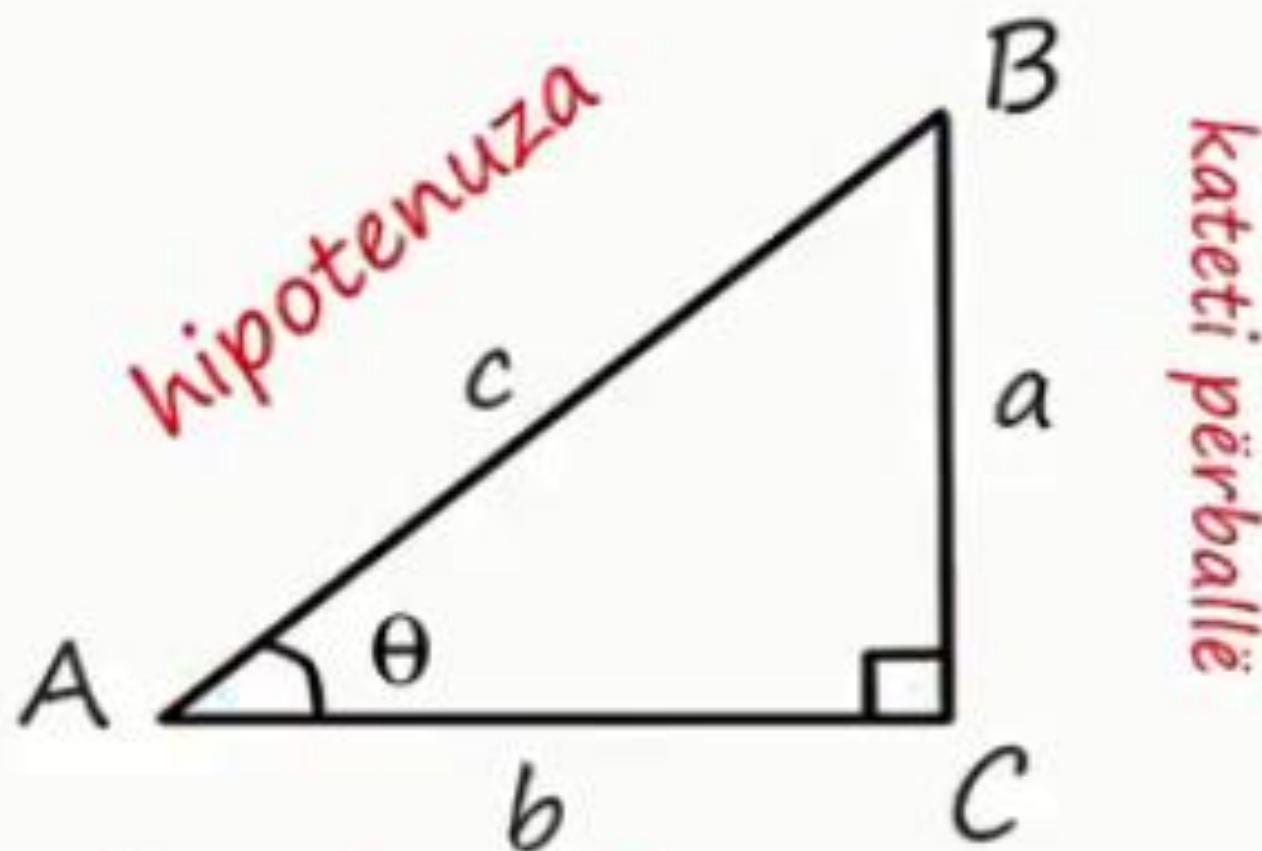


Teorema e Pitagorës

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Funkcionet trigonometrike



kateti anëshkruar

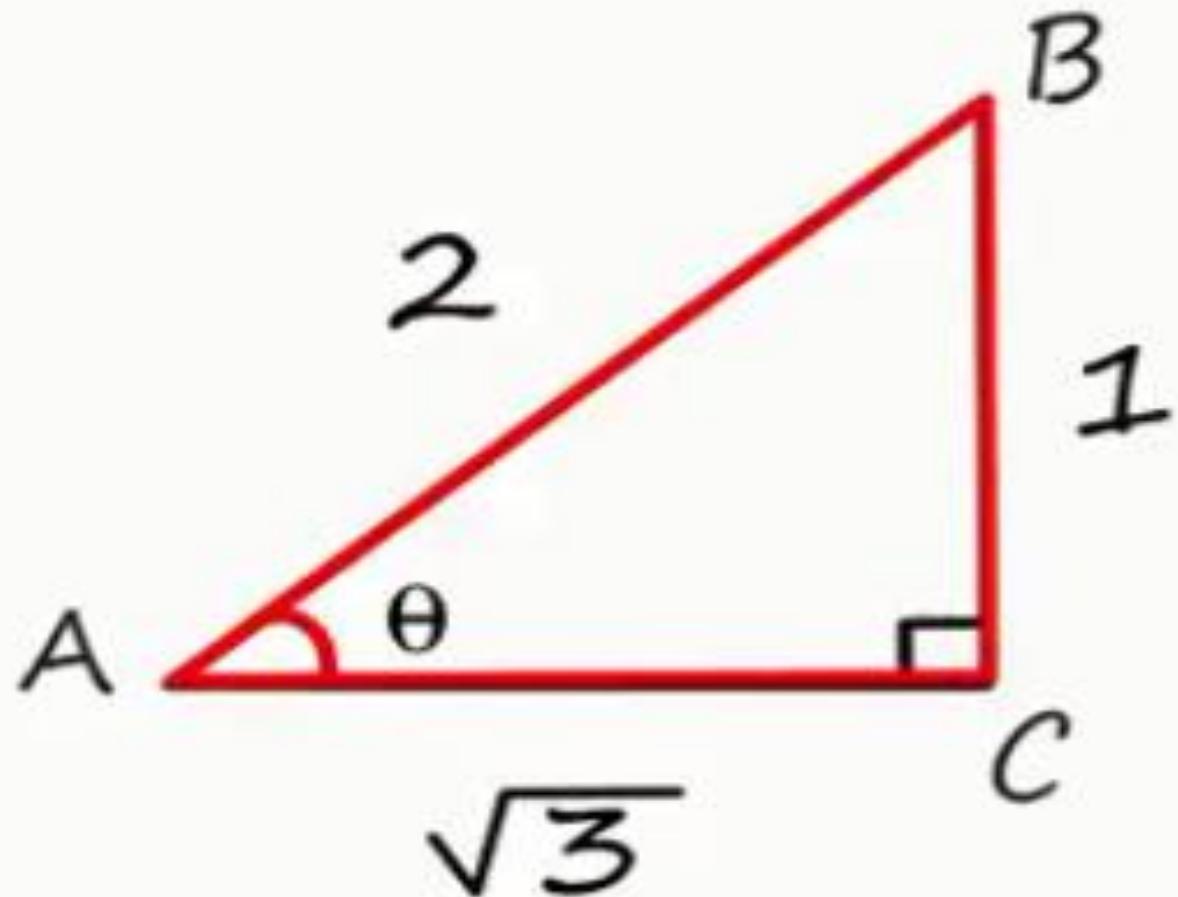
kateti përballe

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{b}$$

Trigonometria e trekendeshit kenddrejt



$$\sin \theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

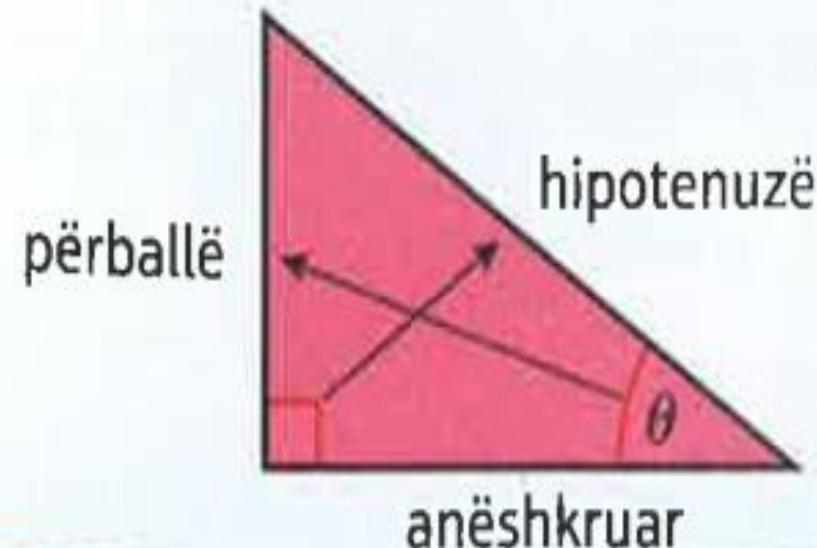
$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Argumenti kyç 9

Brinja përballë këndit të drejtë quhet **hipotenuzë**.

Brinja përballë këndit θ quhet **kateti përballë**.

Brinja anëshkruar këndit θ quhet **kateti anëshkruar**.



U4a Udhëzim
Përdor $\sin x = \frac{\text{kateti përballë}}{\text{hipotenuzë}}$

U4c Udhëzim
Përdor $\tan x = \frac{\text{kateti përballë}}{\text{kateti anëshkruar}}$

U4b Udhëzim
Përdor $\cos x = \frac{\text{kateti anëshkruar}}{\text{hipotenuzë}}$

Shembull 8

Gjej masën e këndit x .

$$\text{këndi} = x$$

$$\text{Brinja përballë} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Hipotenuza} = 9 \text{ cm}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{brinja përballë}}{\text{hipotenuzë}}$$

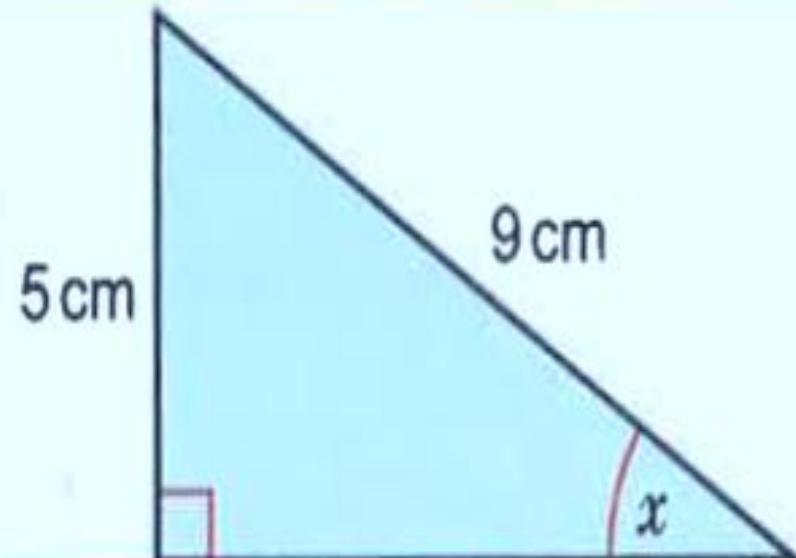
$$\sin x = \frac{5}{9}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$x = 33.7489\dots$$

$$x = 33.7^\circ \text{ (një shifër pas presjes)}$$

Identifiko informacionin e dhënë, këndin, katetin përballë dhe hipotenuzën.



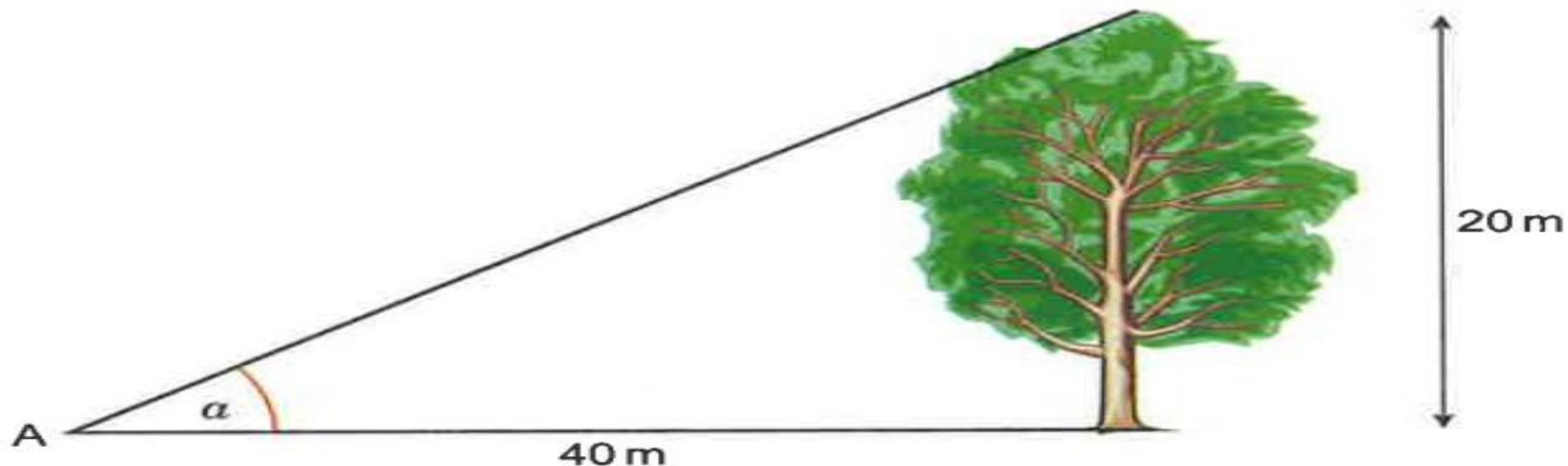
Eshtë dhënë brinja përballë dhe hipotenuza kështu që përdor raportin e sinusit.

Zëvendëso brinjët dhe këndin në raportin e sinusit.

Përdor \sin^{-1} për të gjetur këndin.

Rrumbullakos përgjigjen deri në një numër pas presjes.

Gjej këndin e ngritjes nga pika A në majën e pemës.



Diskuto Diskuto Si mund ta gjesh këndin e zbritjes të pikës A nga maja e pemës?

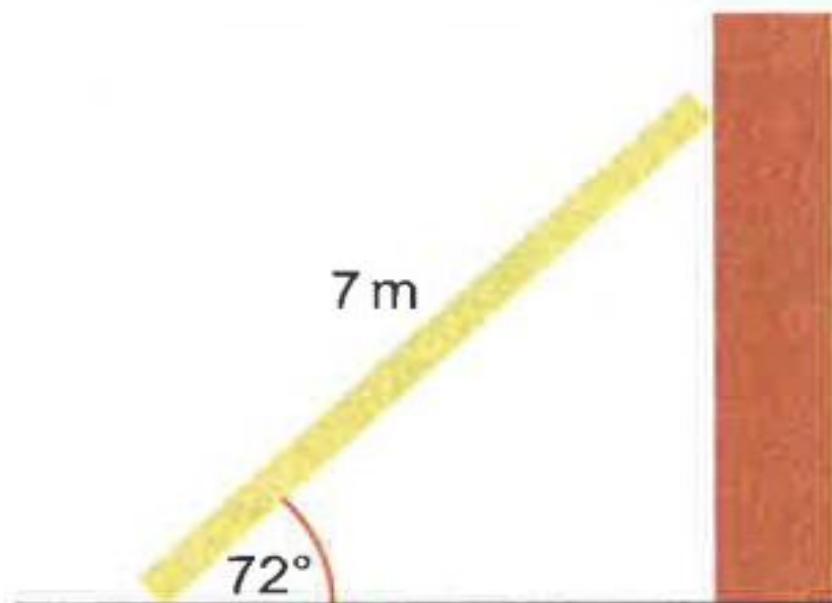
Situatë reale / Modelo Një shkallë 7m mbështetet në mur.

Këndi i ngritjes është 72° .

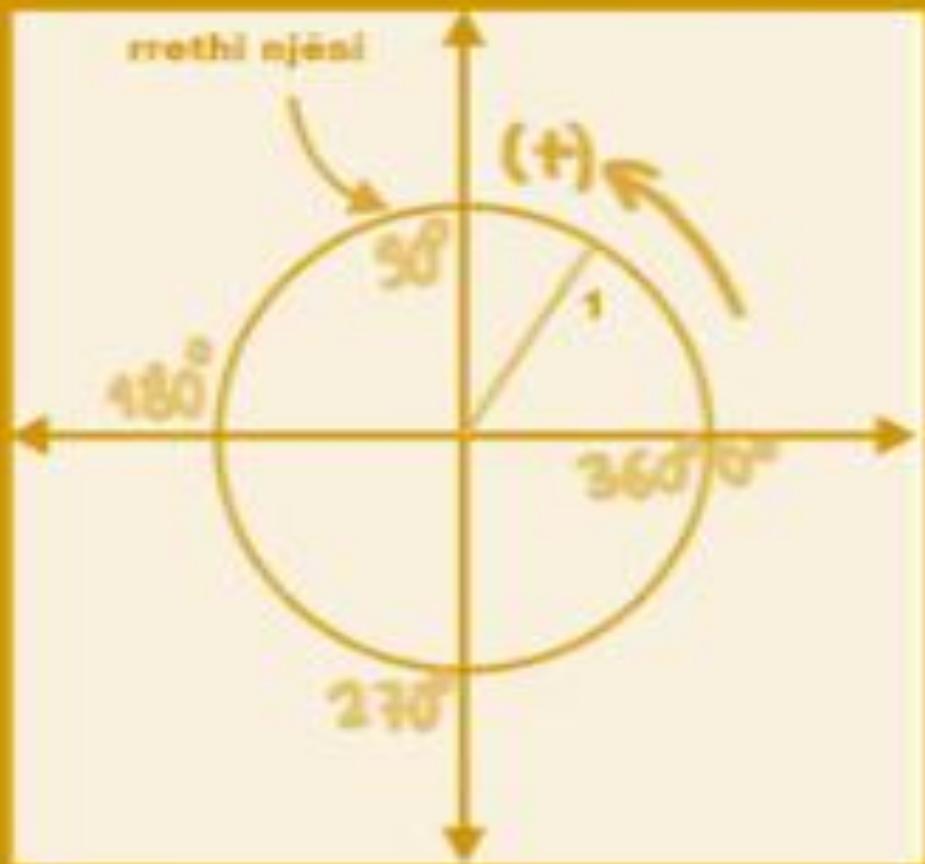
Çfarë lartësie arrin shkalla?

U11 Informacion ndihmës

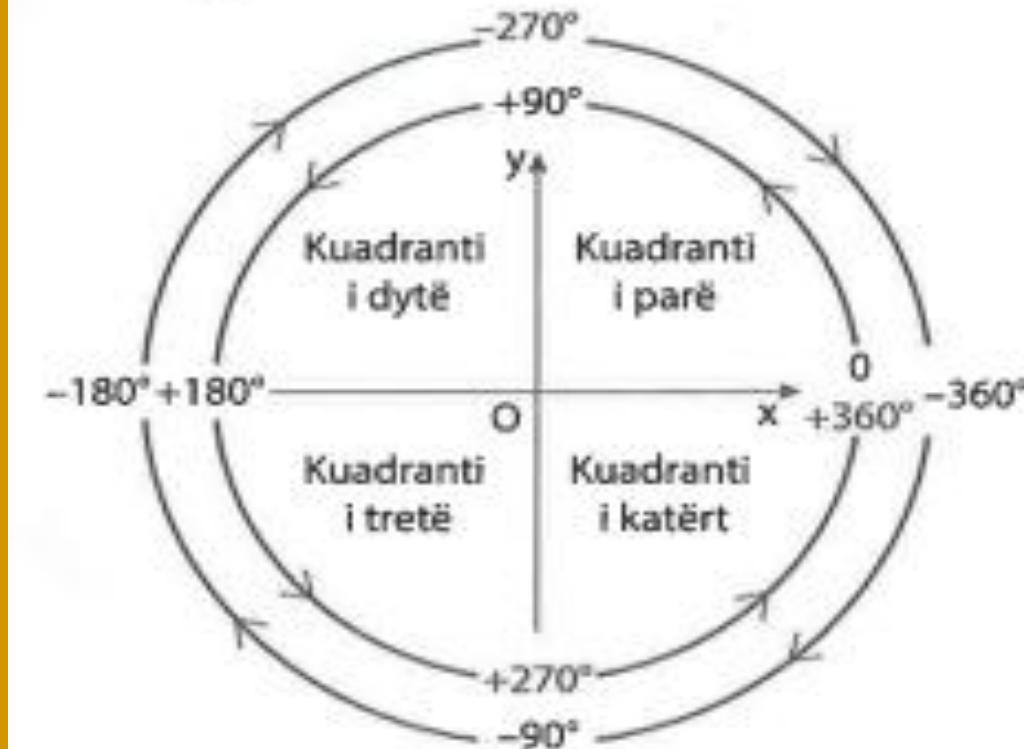
Përdor një skemë.



RRETHI TRIGONOMETRIK



Plani xoy ndahet në **kuadrante**:



Përkufizim. Rrethi me qendër në origjinën e sistemit koordinativ, i orientuar dhe me rreze një njësi, quhet **rreth trigonometrik**.

Rrethi trigonometrik

Fig. 10.1

$$\sin x = y_p \quad \cos x = x_p \quad \operatorname{tg} x = \frac{y_p}{x_p} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{x_p}{y_p}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Teorema e sinusit: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Teorema e kosinusit: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Syprina e trekëndëshit: $S = \frac{1}{2}ab \sin C$

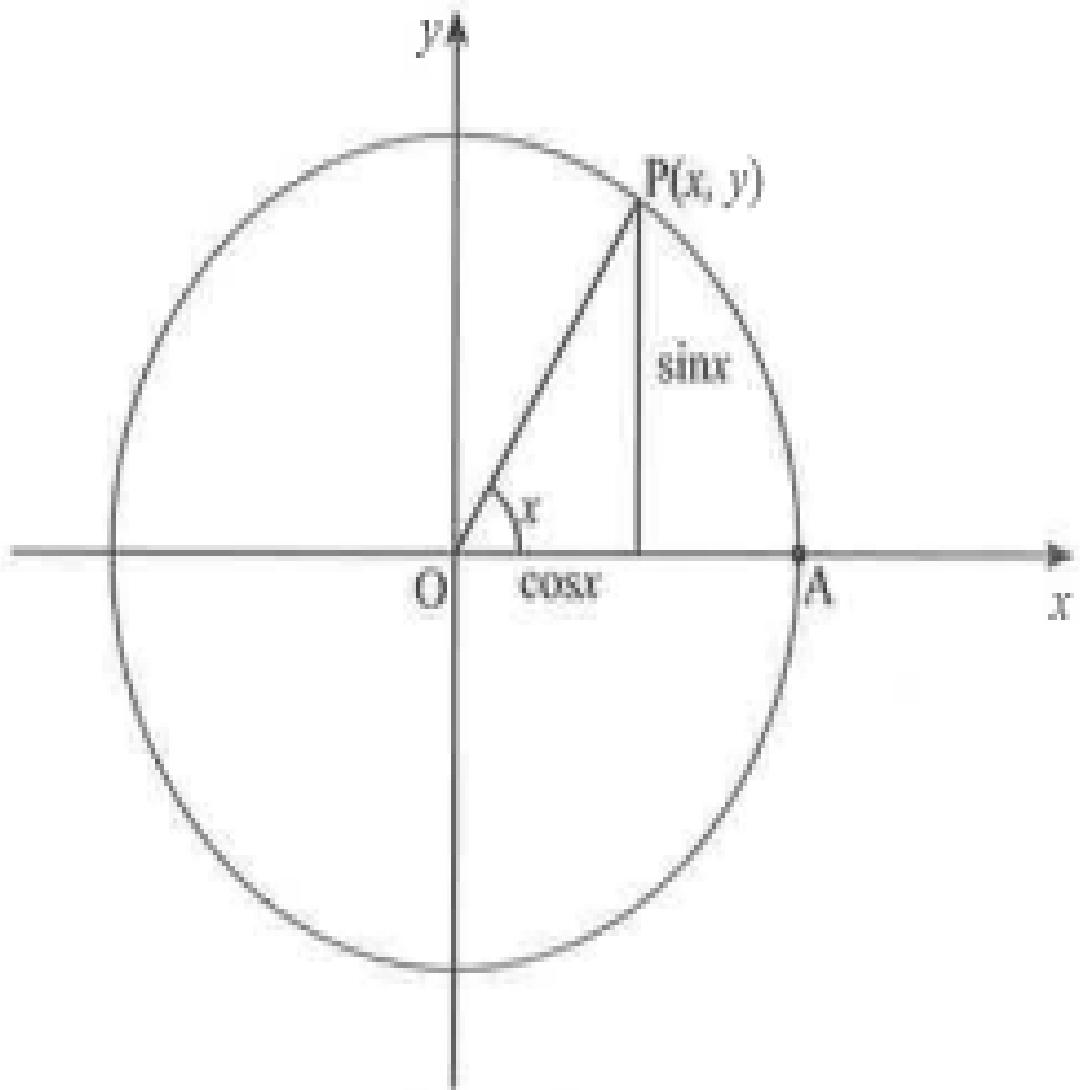
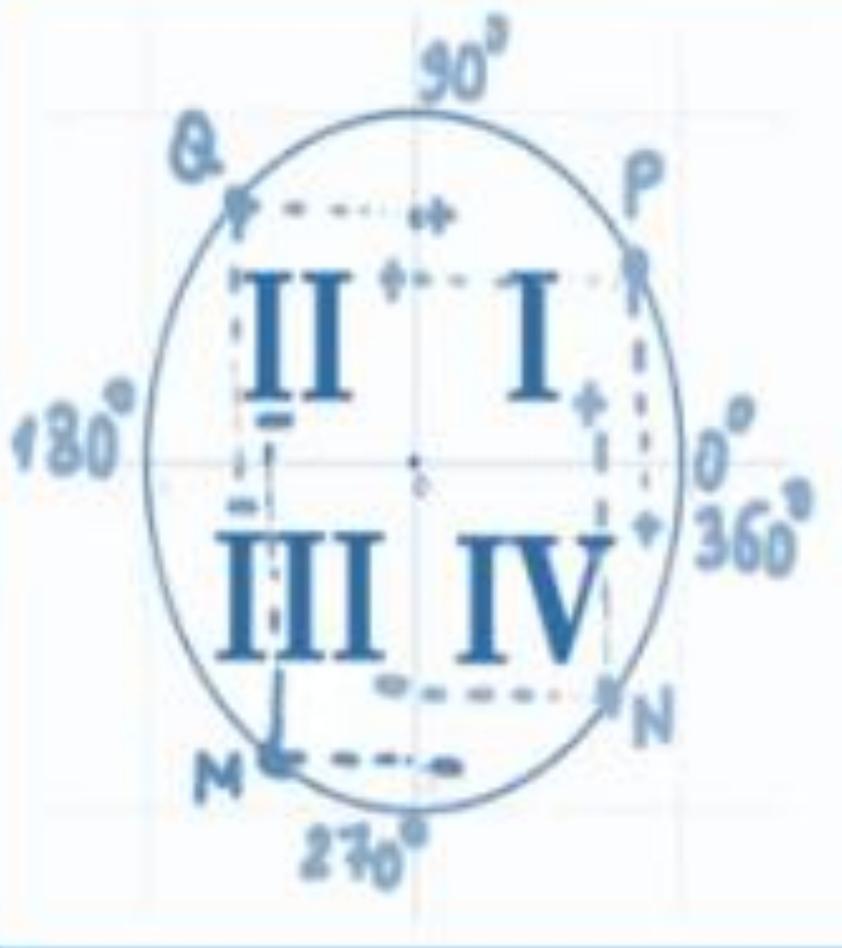


Fig. 10.1

SHENJAT E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE NËPËR KUADRANTE



	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

Vlerat e funksioneve trigonometrike të disa këndeve

α (gradë)	α (radian)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	?	0
180°	π	0	-1	0	?
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	?	0

Jepet $\sin \alpha = 0.7$

Këndi α përfundon në kuadrantin e dytë. Të gjendet $\cos \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(0.7)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

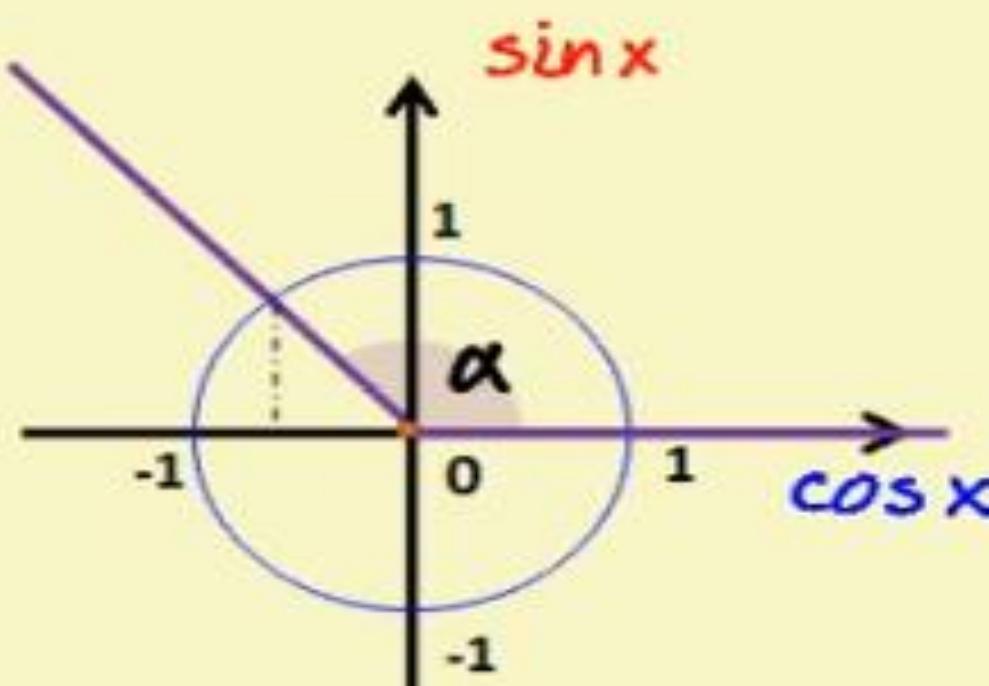
$$0.49 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 0.49$$

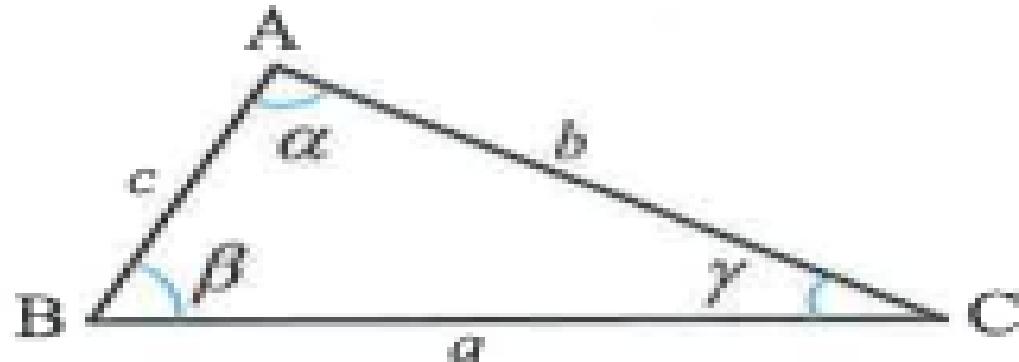
$$\cos^2 \alpha = 0.51$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{0.51}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{0.51}$$



TEOREMA E KOSINUSIT



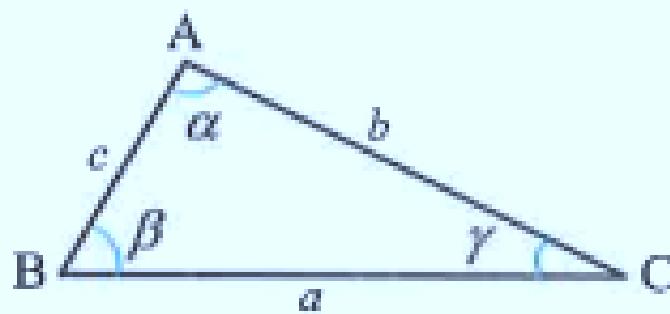
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

TEOREMA E SINUSIT

Në çdo trekëndësh raporti i secilës brinjë me sinusin e këndit përballetë është konstant.

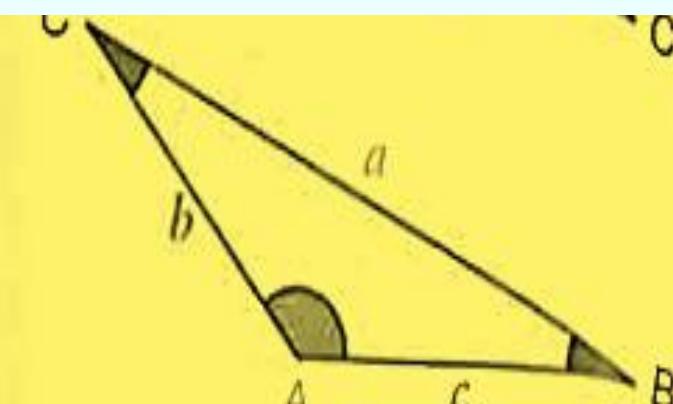


$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, ku R është rrezja e rrethit të jashtëshkruar
trekëndëshit.

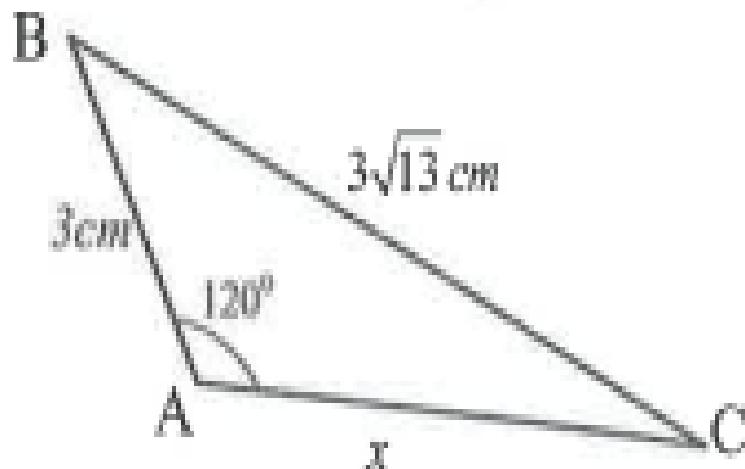
gjatësitë e të tria brinjëve, atëherë mund të përdorni teoremën e kosinusit:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{ose} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- Nëse janë dhënë dy brinjë dhe këndi ndërmjet tyre, atëherë për të gjetur



Shembulli 2. Gjej vlerën e saktë të x në skicën e mëposhtme.



Zgjidhje

Në $\triangle ABC$ zbatojmë teoremën e kosinust

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$

Zëvendësojmë:

$$(3\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$117 = 9 + x^2 + 3x \Rightarrow x^2 + 3x - 108 = 0$$

Të ky ekuacion kuadratik ku $a=1$, $b=3$ dhe $c=-108$ gjejmë dallorin:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 9 + 4 \cdot 108 = 441$$

$$x_2 = \frac{-3 \pm 21}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 21}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 21}{2}$$

$$x_1 = 9$$

$$x_2 = -12$$

Pranohet vetëm $x = 9 \text{ cm}$, sepse s'ka gjatësi negative.

Gjeni x në figurë.

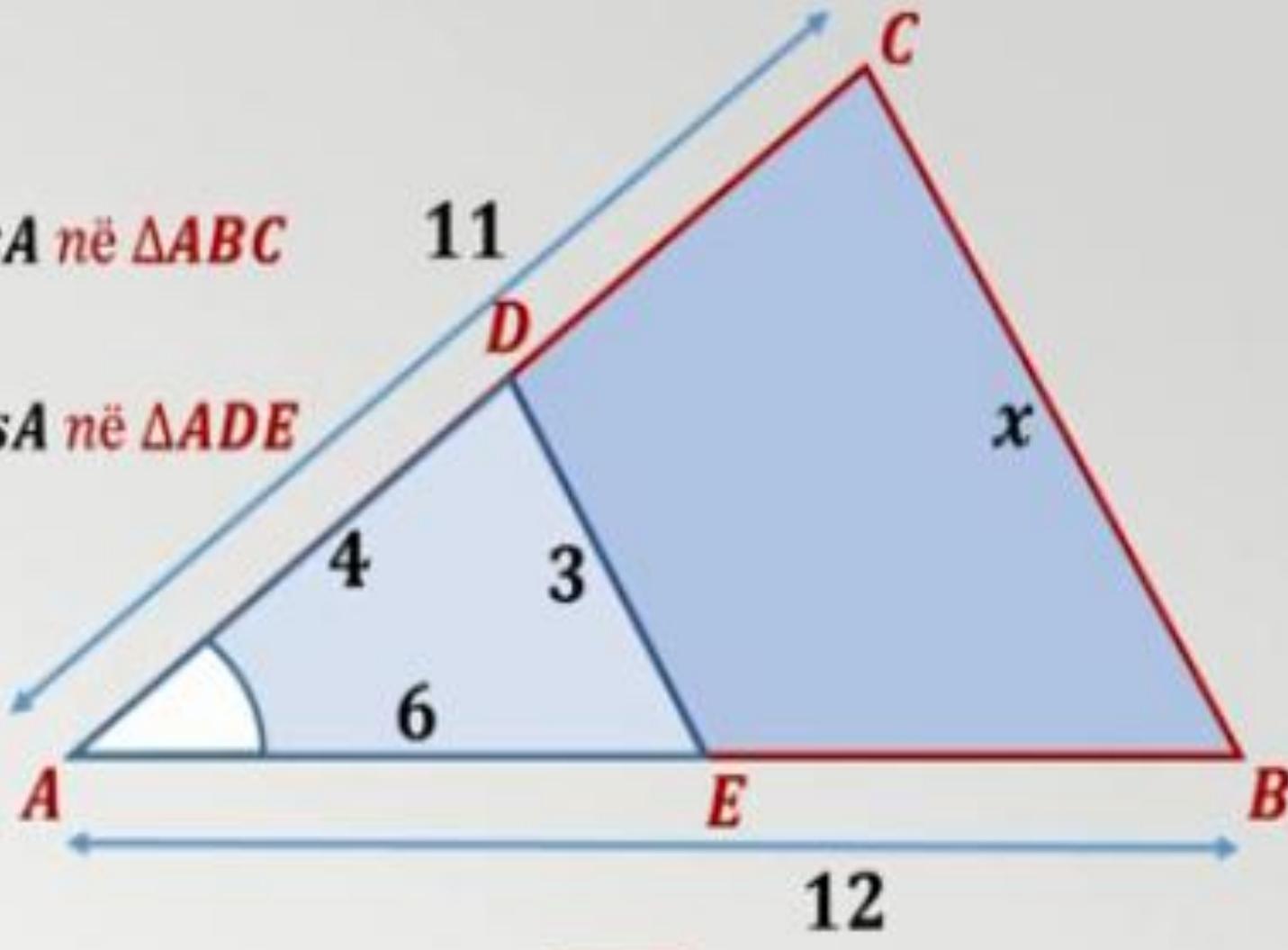
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \text{ në } \triangle ABC$$

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos A \text{ në } \triangle ADE$$

$$3^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{43}{48}$$

$$BC^2 = 12^2 + 11^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \frac{43}{48} = 28.5$$



$$BC = \sqrt{28.5}$$

Përcaktimi i llojit të trekëndëshit

$$a \leq b \leq c$$

γ përcakton llojin e trekëndëshit

$$a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow \gamma > 90^\circ$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

$$a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow \gamma < 90^\circ$$

$$6^2 + 8^2 < 11^2 \Rightarrow \gamma > 90^\circ$$

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$