全国硕士研究生
统一入学考试数学公式大全

krifan[1]

2019 年 12 月 8 日

[1]xdu

目录

第一章　高等数学部分

1.1　函数、极限

1.1.1　一些初等函数

双曲正弦

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

双曲正切

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

反双曲正弦

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

反双曲余弦

$$\operatorname{arccosh} x = \pm\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

反双曲正切

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

1.1.2　两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459\ldots$$

1.1.3 三角函数公式

和差角公式

$$
\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}
\end{aligned}
$$

积化和差公式

$$
\begin{aligned}
2 \cos x \cos y &= \cos (x - y) + \cos (x + y) \\
2 \sin x \sin y &= \cos (x + y) - \cos (x + y) \\
2 \sin x \cos y &= \sin (x - y) + \sin (x + y)
\end{aligned}
$$

和差化积公式

$$
\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \\
\cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}
\end{aligned}
$$

倍角公式

$$
\begin{gathered}
\sin 2x = 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \\
\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\
\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\
\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\
\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^3 x}
\end{gathered}
$$

半角公式

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ (R\ \text{是外接圆半径})$$

余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

反三角函数性质

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\qquad \arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$$

1.2 一元函数微分学

1.2.1 导数公式

$$\begin{aligned}
{a^x}' &= a^x\ln x & \log_a x' &= \frac{1}{x\ln a}\\
\sin x' &= \cos x & \cos x' &= -\sin x\\
\tan x' &= \sec^2 x & \cot x' &= -\csc^2 x\\
\sec x' &= \sec x\tan x & \csc x' &= -\csc x\cot x\\
\arcsin x' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos x' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\arctan x' &= \frac{1}{1+x^2} & \operatorname{arccot} x' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

1.2.2 莱布尼兹 (Leibniz) 公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^k$$

1.2.3 中值定理与导数应用

拉格朗日 (LaGrange) 中值定理

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

柯西 (Cauchy) 中值定理

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

当 $F(x) = x$ 时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

1.3 一元函数积分学

1.3.1 基本不定积分表

含三角函数积分

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$
$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

含分式积分

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

含根式的积分

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+a^2}dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C \\
\int \sqrt{x^2-a^2}dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C \\
\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C
\end{aligned}
$$

三角函数的有理式积分

$$
\sin x=\frac{2u}{1+u^2}\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}\quad du=\tan\frac{x}{2}\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}
$$

1.3.2 定积分

三角函数的定积分

$$
I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\frac{n-1}{n}I_{n-2}
$$

换元积分

分部积分

1.3.3 曲率

弧微分公式 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$

平均曲率 $\bar{K}=|\Delta\alpha/\Delta s|$，$\Delta\alpha$ 表示从 M 点到 M' 斜线斜率倾角变化量，Δs 表示 MM' 弧长。

M 点的曲率

$$
K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}
$$

直线 $K=0$，半径为 a 的圆 $K=1/a$

1.3.4 定积分的近似计算

矩形法

$$
\int_a^b f(x)\approx\frac{b-a}{n}\left(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}\right)
$$

梯形法

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+\cdots+y_{n-1}\right]$$

抛物线法

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{3n}\left[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})\right]$$

1.3.5　定积分应用相关公式

功：$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$　引力：$F=km_1m_2/r^2$

函数的平均值：

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

均方根：

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$$

1.4　空间解析几何和向量代数

1.4.1　数量积

向量的数量积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

1.4.2　向量积

向量的向量积

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$$

1.4.3　混合积

向量的混合积，θ 为锐角时，代表平行六面体的体积。

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\sin\theta$$

1.4.4　向量夹角

设向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 则两个向量之间的夹角：

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

1.4.5 两点距离

空间 2 点的距离:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

1.4.6 点到平面的距离

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

1.4.7 点到直线的距离

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $L_0: \frac{x-x_0}{l_0}+\frac{y-y_0}{m_0}+\frac{z-z_0}{n_0}$ 的距离为，其中 $\overrightarrow{M_1P}$ 为直线 L_0 的法向量。

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\overrightarrow{M_1P}|}{\overrightarrow{M_1P}}$$

1.4.8 二次曲面方程

圆柱面

$$x^2+y^2=R^2$$

椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

1.5 多元函数微分学

1.5.1 复合函数的微分

设 $z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$，则

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

设 $z=f(x,y,u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$，则

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

1.5.2 全微分公式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

1.5.3 隐函数微分

设 $F(x,y)=0$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

设 $F(x,y,z)=0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=--\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=--\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

1.5.4 微分法在几何上的应用

设曲面 $F(x,y,z)=0$ 上有一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则过此点的法向量为

$$\vec{n}=\left(F'_x\left(x_0,y_0,z_0\right),F'_y\left(x_0,y_0,z_0\right),F'_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\right)$$

过此点的切平面方程

$$F'_x\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(x-x_0\right)+F'_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(y-y_0\right)+F'_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(z-z_0\right)=0$$

过此点的法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x\left(x_0,y_0,z_0\right)}=\frac{y-y_0}{F'_y\left(x_0,y_0,z_0\right)}=\frac{z-z_0}{F'_z\left(x_0,y_0,z_0\right)}$$

1.5.5 方向导数与梯度

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 u 在点 M_0 沿任意方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 存在方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$，且有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma \\ &= \nabla f_{M_0}\cdot\vec{l}\end{aligned}$$

其中 ∇f_{M_0} 是函数 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 出的梯度，即梯度

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

1.5.6 多元函数的极值

必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 存在一阶偏导数，且点 P 是函数 z 的极值点，则 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$

充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 存在二阶连续偏导数，且点 P 是函数 z 的极值点，则 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$ 。令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A,f_{xy}(x_0,y_0)=B,f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则有

- $AC-B^2>0$ 时，$A<0$ 为极大值，$A>0$ 为极小值
- $AC-B^2<0$ 时，无极值
- $AC-B^2=0$ 时，不确定

1.6 多元函数积分学

1.6.1 重积分及其应用

曲面面积

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，D_{xy} 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域，则曲面面积

$$\begin{aligned}A&=\int_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy\\ &=\int_{D_{yz}}\sqrt{1+g_y^2(x,y)+g_z^2(x,y)}dydz\\ &=\int_{D_{zx}}\sqrt{1+h_z^2(x,y)+h_x^2(x,y)}dzdx\end{aligned}$$

平面薄片的质心

对于由 n 个质点组成的系统，其质心坐标 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i / \sum_{i=1}^{n} m_i$ ，$\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i / \sum_{i=1}^{n} m_i$ 。设一平面薄片在 xOy 面的闭曲域 D 上连续，其面密度函数为 $\rho(x,y)$ ，则其质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma} \quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$$

平面薄片的转动惯量

质点系对于 x 轴和 y 轴的质量分别为 $I_x=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i$ ，$I_y=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$。对于平面薄片。有

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma \quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

1.6.2 柱面坐标和球面坐标

柱面坐标

坐标变换与积分元

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \qquad dS=\rho d\rho d\varphi\ (z\text{方向}) \quad dV=\rho d\rho d\varphi dz$$

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_\Omega F(\rho,\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz \\ &= \iiint_\Omega f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

球面坐标

坐标变换与积分元

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \qquad dS=r^2\sin\theta d\theta d\varphi\ (r\text{方向}) \quad dV=\rho d\rho d\varphi dz$$

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_\Omega F(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \iiint_\Omega f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \end{aligned}$$

1.6.3 曲线积分

对弧长的曲线积分

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上连续且有定义，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},(\alpha \leq t \leq \beta)$$

且 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续偏导数，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \ (\alpha<\beta)$$

对坐标的曲线积分 (求环流量)

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在曲线弧 L 上连续且有定义，L 的参数方程同上，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta (P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t))dt$$

两类曲线积分的关系

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

1.6.4 曲面积分

对面积的曲面积分

设积分曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 给出，则被积函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的积分为

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\iint_{D_w} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

对坐标的曲面积分 (求通量)

当取曲面的上、前、右侧时取正号。

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$
$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$
$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

1.6.5 格林公式

在一重积分中，牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

反映了函数在区间的积分与其原函数在区间端点值的情况，在二重积分中，有类似的格林公式。

设闭曲线 D 由分段光滑的曲线 L 围成，L 是 D 取正向的边界曲线，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

1.6.6 高斯公式

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 围成,若函数 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一节连续偏导数，则有

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\right) dV &= \oiint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\ &= \oiint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS\end{aligned}$$

这里 Σ 时整个边界曲面 Ω 的外侧，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦。高斯公式揭示了通量与散度的关系。设向量场

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

则向量场 $\vec{A}$ 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量为积分

$$\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

将向量场 $\vec{A}$ 的散度记作 $\nabla\cdot\vec{A}$，有

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

利用向量场的通量和散度的关系，高斯公式可以写成向量形式

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \oiint_\Sigma A_n\,dS$$

1.6.7 斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系

设 Γ 为分段光滑的有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的侧与 Σ 的正向符合右手规则，若函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在曲线 Σ 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

斯托克斯公式揭示了环流量与旋度的关系。设向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中函数 P,Q,R 均连续，Γ 是 A 的定义域里面一条分段光滑的有向闭曲线，$\vec{\tau}$ 是 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量，则积分

$$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds$$

为向量场 A 沿有向闭曲线 Γ 的环流量。将向量场 $\vec{A}$ 的旋度记作 $\nabla\times\vec{A}$，有

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

利用环流量与旋度的关系，斯托克斯公式可以写成向量形式

$$\iint_\Sigma \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS=\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds$$

1.7 无穷级数

1.7.1 常数项级数

等比数列:

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$$

等差数列:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

平方和数列:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

立方和数列:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.7.2　正项级数审敛法

比较审敛法

设 $A:\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $B:\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，令

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$$

收敛情况如下

- $0\leq l\leq\infty$，且级数 B 收敛，那么级数 A 收敛。
- $0<l$ 或者 $l=+\infty$，且级数 B 发散，那么级数 A 发散。

比值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，令

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

收敛情况如下

- $\rho<1$ 级数收敛
- $\rho>1$ $(\lim_{n\to\infty}u_{n+1}/u_n=\infty)$ 级数发散
- $\rho=1$ 不确定

根值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，令

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

收敛情况如下

- $\rho<1$ 级数收敛
- $\rho>1$ $(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty)$ 级数发散
- $\rho=1$ 不确定

1.7.3　交错级数审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数，满足条件

$$u_n\geq u_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

那么级数收敛。

1.7.4 绝对收敛与条件收敛

设级数 A，B 分别为

$$A:\sum_{n=1}^{\infty}u_n \quad B:\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

那么有

- 若级数 B 收敛，则称级数 A **绝对收敛**
- 若级数 A 收敛，而级数 B 发散，则称级数 A **条件收敛**
- 若级数 A 绝对收敛，那么 A 必定收敛

1.7.5 幂级数

如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x),u_2(x),u_3(x),\cdots,u_1(x),\cdots$$

那么由函数列构成的表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_1(x)+\cdots$$

称为定义在区间 I 上的函数项无穷级数，函数项级数。

对于一个确定的 $x_0\in I$，这个级数有可能收敛也有可能发散。如果 x_0 使这个级数收敛，则称它为函数项级数的收敛点，否则称为发散点。由全体收敛点构成的集合称为函数项级数的收敛域，由全体发散点构成的集合称为函数项级数的发散域。

函数项级数中最简单常见的一类就是幂级数，它的形式为

$$A:\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

如果幂级数 A 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，那么必定存在一个确定的正数 R 使得

- $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛
- $|x|>R$ 时，幂级数发散
- $|x|=\pm R$ 时，幂级数可能收敛，也可能发散

正数 R 叫做幂级数的收敛半径。R 可以由下面方法得来

$$令\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\ ,\quad 则\ R=\begin{cases}1/\rho, & \rho\neq 0\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

1.7.6 函数展开成幂级数

函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 具有各阶导数，展开为泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, x\in U(x_0)$$

的充分必要条件是 $f(x)$ 在该邻域内的泰勒公式的余项 R_n 的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}=0$$

1.7.7 常见函数展开成幂级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, x\in(-1,+1)$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots, x\in(-1,1)$$

1.7.8 欧拉公式

$$e^ix=\cos x+i\sin x \quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

1.7.9 三角级数

设由正弦级数组成的函数 $f(t)$ 为

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

其中 A_0, A_n, φ_n 为常数，将正弦函数 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 展开得

$$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_n\sin n\omega t\cos\varphi_n+A_n\cos n\omega t\sin\varphi_n$$

令 $a_0/2=A_0$, $a_n=A_n\sin\varphi_n$, $b_n=A_n\cos\varphi_n$, $\omega=\pi/(2l)$, $\pi t/l=x$ 得到三角级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

1.7.10 傅立叶级数

设 $f(x)$ 是以周期为 2π 的周期函数，且能展开成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

对等式两边在区间 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

由三角函数的正交性，在积分式两边依次乘 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 可求得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2,...)$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,3,...)$$

当 a_n，b_n 满足上述关系时，三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

1.7.11 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数

若 $f(x)$ 是以周期不是 2π，而是以 $2l$ 为周期的周期函数，且在 $[-l,l]$ 上可积，则

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\ (n=0,1,2,...)$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\ (n=1,2,3,...)$$

1.8 常微分方程

1.8.1 微分方程的相关概念

一般地，表示未知函数、未知函数的导数与自变量间的关系的方程，叫做微分方程。微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的结束叫做微分方程的阶。n 阶微分方程的一般形式是

$$F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0$$

需要指出，方程中 $y^{(n)}$ 是必须出现的，其他变量不一定要出现。

设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上具有 n 阶连续偏导数，如果在区间 I 上 $y=\varphi(x)$ 满足方程

$$F\left(x,\varphi(x),\varphi(x)',\varphi(x)'',\cdots,\varphi(x)^{(n)}\right)\equiv 0$$

则称 $y=\varphi(x)$ 是微分方程的解。如果微分方程的解含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同[1]，这样的解叫做微分方程的通解。给定初始条件，确定了通解中的所有任意常数后，就得到微分方程的特解。

1.8.2 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程，如

$$y'+p(x)y=q(x)$$

它对于未知函数及其导数来讲都是一次方程，即线性的。如果方程的 $q(x)=0$，那么方程就是齐次的，否则就是非齐次的。

$$\begin{cases} q(x)=0 & ,y=Ce^{-\int p(x)dx} \\ q(x)\neq 0 & ,y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)}dx+C\right) \end{cases}$$

1.8.3 二阶常系数齐次线性微分方程

对于二阶齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

如果其中 p，q 均为常数，则称方程为二阶常系数齐次线性微分方程，若 p，q 不全为常数，则称其为二阶变系数齐次线性微分方程。二阶常系数齐次线性微分方程的通解求法如下

1. 写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$
2. 求出特征方程的两个根 r_1,r_2
3. 根据表 1.1 写出通解。

表 1.1: 微分方程通解求法

特征方程的根 r_1,r_2	微分方程通解
不等实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
相等实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)\,e^{r_1x}$
共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

[1]任意常数必须相互独立

1.8.4 二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

其通解可以归结为对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解和其本身的一个特解。具体解法参考第 1.8.5 节。

1.8.5 n 阶常系数线性微分方程

齐次方程的通解 $y_h(x)$ 形式

表 1.2: 不同特征根对应的通解

特征根 r	通解 $y_h(x)$
单实根	e^{rx}
r 重实根	$(C_{r-1}x^{r-1} + C_{r-2}x^{r-2} + \cdots + C_1x + C_0)\, e^{rx}$
共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta j$	$e^{\alpha x}[C\cos\beta x + D\sin\beta x]$
r 重共轭复根	$(A_{r-1}x^{r-1}\cos(\beta x + \theta_{r-1}) + \cdots + A_0\cos(\beta x + \theta_0))$

非齐次方程的特解 $y_p(x)$ 形式

表 1.3: 不同激励对应的特解

激励 $f(x)$	特解 $y_p(x)$	
x^m	$P_mx^m + P_{m-1}x^{m-1} + \cdots + P_1x + P_0$	所有特征根不相等
	$x^r\,(P_mx^m + P_{m-1}x^{m-1} + \cdots + P_1x + P_0)$	有 r 重相等特征根
$e^{\alpha x}$	$Pe^{\alpha x}$	α 不等于特征根
	$(P_1x + P_0)e^{\alpha x}$	α 等于特征单根
	$P_rx^r + P_{r_1}x^{r_1} + \cdots + P_1x + P_0$	α 等于 r 重特征单根
$\cos(\beta x)$ 或 $\sin(\beta x)$	$P\cos\beta x + Q\sin\beta x$	所有特征根不相等

第二章　线性代数部分

2.1　行列式

2.2　矩阵

2.3　向量

2.4　线性方程组

2.5　矩阵的特征值和特征向量

2.6　相似矩阵和二次型

第三章　概率论部分

3.1　随机事件及其概率

3.1.1　概率的定义及其计算

3.1.2　随机变量及其分布

3.1.3　离散型随机变量

3.1.4　连续型随机变量

3.2　一维随机变量及其分布

3.3　多维随机变量及其分布

3.4　大数定律和中心极限定理

3.5　数理统计

3.6　随机变量的数字特征

3.6.1　数学期望

离散型随机变量

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

连续性随机变量

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

3.6.2 方差

$$D(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E(X^2) - E^2(X)$$

3.6.3 协方差

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E\Big((x - E(x))(Y - E(Y))\Big) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \pm\frac{1}{2}(D(X \pm Y) - D(X) - D(Y)) \end{aligned}$$

3.6.4 相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$