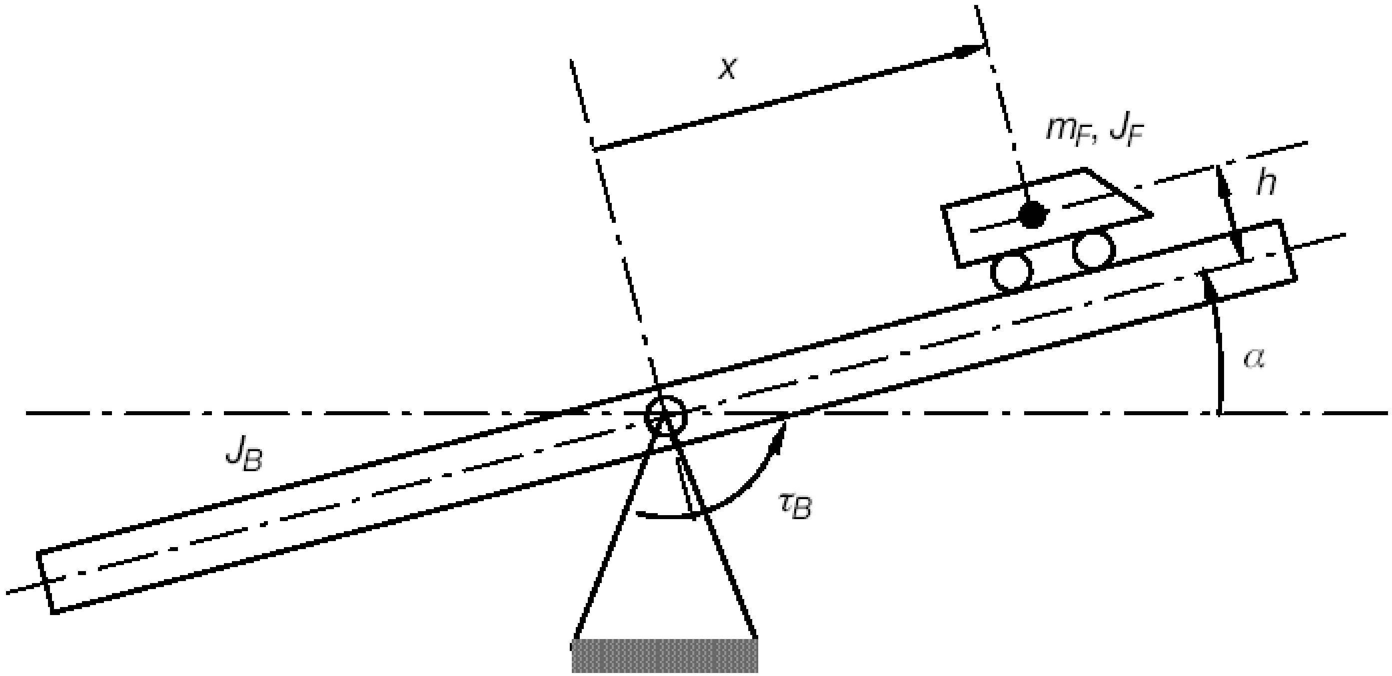
Modellierung/Regelung eines Fahrzeugs auf einer Wippe



Stellgröße:	τ_B	(Antriebsmoment der Wippe)
Regelgröße:	x	(Position des Wagens auf der Wippe)
weitere Größen:	α	(Steigungswinkel der Wippe)
	J_F, J_B	(Trägheitsmoment des Wagens und der Wippe)
	m_F	(Masse des Wagens)
	h	(Höhe des Wagens über Balkenmitte)

Prof. Dr. Karsten Peter

Lagrange-Formalismus

Lagrange-Funktion: $$L = E_{kin} - E_{pot}$$

Lagrange-Gleichung: $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = Q_i$$

generalisierte Koordinaten: $$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

generalisierte (nicht-konservative) Kräfte: $$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

Literatur:

Nolting, W.: *Grundkurs theoretische Physik 2: Analytische Mechanik*, Springer-Verlag
Landau, L.D., Lifschitz, E.M., Ziesche, P.: *Lehrbuch der theoretischen Physik 1*, Harri Deutsch

Kräfte

allgemein: $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

Gravitationskraft: $\mathbf{F}_\mathrm{g} = m \cdot \mathbf{g}$

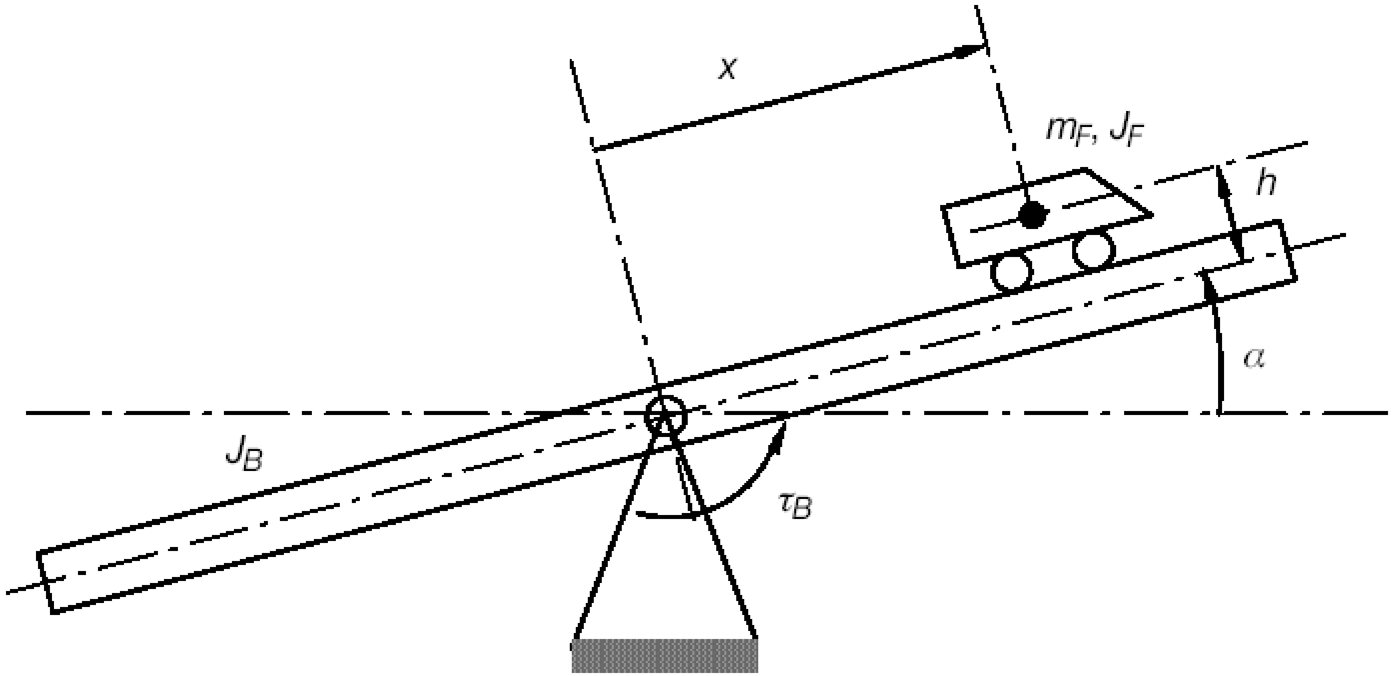
Corioliskraft: $\mathbf{F}_\mathrm{c} = 2 \cdot m \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$

Zentrifugalkraft: $\mathbf{F}_\mathrm{z} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

Literatur:

Kuchling, H.: *Taschenbuch der Physik*, Hanser-Verlag

Systembeschreibung Wippe/Fahrzeug



$$\ddot{\alpha} = \underbrace{\frac{1}{J_{\mathrm{konst}} + m_{\mathrm{F}} \cdot x^2}\tau_{\mathrm{B}}}_{\text{Antriebsb.}} \underbrace{- \frac{m_{\mathrm{F}} \cdot g \cdot x}{J_{\mathrm{konst}} + m_{\mathrm{F}} \cdot x^2}\cos(\alpha) + \frac{m_{\mathrm{F}} \cdot g \cdot h}{J_{\mathrm{konst}} + m_{\mathrm{F}} \cdot x^2}\sin(\alpha)}_{\text{Gravitationsb.}} \underbrace{- \frac{2 \cdot m_{\mathrm{F}} \cdot x}{J_{\mathrm{konst}} + m_{\mathrm{F}} \cdot x^2}\dot{x}\dot{\alpha}}_{\text{Coriolisb.}}$$

$$\ddot{x} = \underbrace{x \cdot \dot{\alpha}^2}_{\text{Zentrifugalb.}} - \underbrace{g \cdot \sin(\alpha)}_{\text{Gravitationsb.}} \qquad \text{mit} \quad J_{\mathrm{konst}} = J_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{F}} h^2$$

Linearisierung

Linearisierung der Funktion $f\,(x_1,\cdots,x_n)$ im Arbeitspunkt $(x_{10},\cdots,x_{n0})$:

$$f\,(x_1,\cdots,x_n) \approx f\,(x_{10},\cdots,x_{n0}) + \left.\frac{\partial f\,(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1}\right|_{x_{10},\cdots,x_{n0}} \left(x_1 - x_{10}\right) + \cdots + \left.\frac{\partial f\,(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_{10},\cdots,x_{n0}} \left(x_n - x_{n0}\right)$$

Literatur:

Lunze, J.: *Regelungstechnik 1*, Springer-Verlag
Föllinger, O.: *Regelungstechnik*, Hüthig
Ludyk, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1*, Springer-Verlag
Dorf, R.C.; Bishop, R.H.: *Moderne Regelungssysteme*, Pearson-Verlag

Linearisierung des Wippe/Fahrzeug-Systems

Linearisierung um die instabilen Ruhelage $(\dot{\alpha} = 0, \alpha = 0, \dot{x} = 0, x = 0, \tau_{\mathrm{B}} = 0)$:

$$\ddot{x} = -g \cdot \alpha$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J_{\mathrm{konst}}} \tau_{\mathrm{B}} - \frac{m_{\mathrm{F}} \cdot g}{J_{\mathrm{konst}}} x + \frac{m_{\mathrm{F}} \cdot g \cdot h}{J_{\mathrm{konst}}} \alpha$$

Zustandsraumdarstellung:

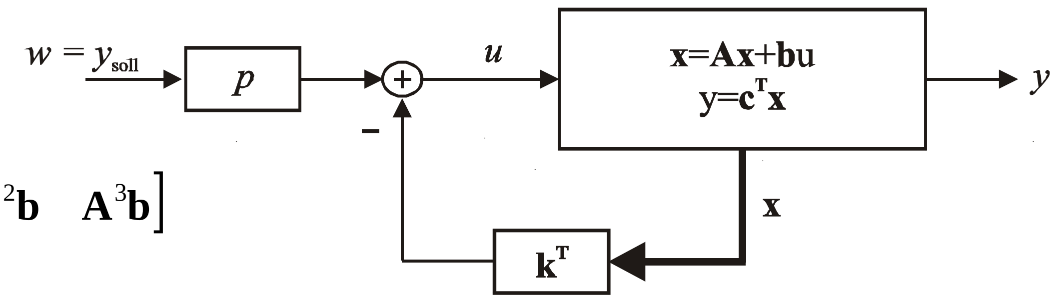
$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{\mathrm{F}} \cdot g \cdot h}{J_{\mathrm{konst}}} & 0 & -\frac{m_{\mathrm{F}} \cdot g}{J_{\mathrm{konst}}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \alpha \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{J_{\mathrm{konst}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \tau_{\mathrm{B}}$$

Zustandsreglerentwurf nach Ackermann

Systembeschreibung eines Einfachsystems vierter Ordnung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u$$

$$y = \mathbf{c}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{x}$$



Steuerbarkeitsmatrix: $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \mathbf{A}^3\mathbf{b} \end{bmatrix}$

Letzte Zeile $\mathbf{q}$ der invertiersten Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

wählbares Verhalten: $G_{\text{soll}}(s) = \dfrac{1}{(s+\gamma_1)(s+\gamma_2)(s+\gamma_3)(s+\gamma_4)} = \dfrac{1}{s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$

Für den Zustandsregler $\mathbf{k}^{\mathsf{T}}$ und das Vorfilter p ergeben sich dann:

$$\mathbf{k}^{\mathsf{T}} = \mathbf{q}^{\mathsf{T}} \left(\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \alpha_3 \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^4 \right)$$

$$p = \frac{1}{\mathbf{c}^{\mathsf{T}} \left(\mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathsf{T}} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{b}}$$

Prof. Dr. Karsten Peter