Лабораторная работа №13

Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности

Вариант 15. Задачи 2.3.15, 2.4.8

Задание 1. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(K(x)\frac{du}{dx}) = f, \\ u(a) = U_A, u(b) = U_B. \end{cases} \tag{1}$$

Задание 2. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задач переменного коэффициента теплопроводности $k(x)$ и плотности источников тепла $f(x)$:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(k(x)\frac{du}{dx}) = f, \\ u(a) = U_A, u(b) = U_B. \end{cases} \tag{2}$$

Задание 3. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи − коэффициента теплопроводности и начальной температуры:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}((k(x)\frac{du}{dx}) + f(x)(1-e^{-t}), 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(0,t) = U_A, u(l,b) = U_B, 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le t. \end{cases} \tag{3}$$

Задание 4. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2} + f(x,t), a < x < b, 0 < t \le T \\ u(a,t) = g_1(t), u(b,t) = g_2(t), 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), a \le x \le b. \end{cases} \tag{4}$$

In [17]:
```
#importing necessary libraries
import math
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits import mplot3d
```

In [18]:
```
x, t = sp.symbols('x t')
```

Вывод формул для задачи 2

Рассмотрим уравнение баланса, которое на любом отрезке $[a,b]$, где $0 < a < b < l$, имеет вид:

$$W(a) - W(b) - \int_a^b q(x)u(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 0$$

$$W(x) = -k(x)u'(x)$$

$\int_a^b q(x)u(x)dx$ опустим, так как $q(x) = 0$

Введём:

$$x_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N, Nh = l$$

А также промежуточные (потоковые) узлы:

$$x_{n+-0.5} = x_n + -0.5h$$

Запишем уравнение баланса на отрезке $[x_{n-0.5}, x_{n+0.5}]$:

$$W_{n-0.5} - W_{n+0.5} + \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} f(x)dx = 0$$

Найдём $W_{n-0.5}, W_{n+0.5}$. Для этого проинтегрируем $u'(x) = -\frac{W(x)}{k(x)}$ на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$:

$$u_{n-1} - u_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{W(x)}{k(x)} dx$$

Тогда при $x_{n-0.5} \le x \le x_{n+0.5}$:

$$W_{n-0.5} \approx -a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

$$a_n = (\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)})^{-1}$$

А

$$W_{n+0.5} \approx -b_n \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$b_n = (\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)})^{-1}$$

Также обозначим:

$$\varphi_n = \frac{1}{h} \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} f(x)dx$$

Получим систему для решения

$$\frac{1}{h}(b_n \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h}) = -\varphi_n$$

И $y_0 = g_1, y_N = g_2$

Итоговая формула

$$\frac{a_n}{h^2} y_{n-1} - \frac{a_n + b_n}{h^2} + \frac{b_n}{h^2} = -\varphi_n$$

Задание 2.

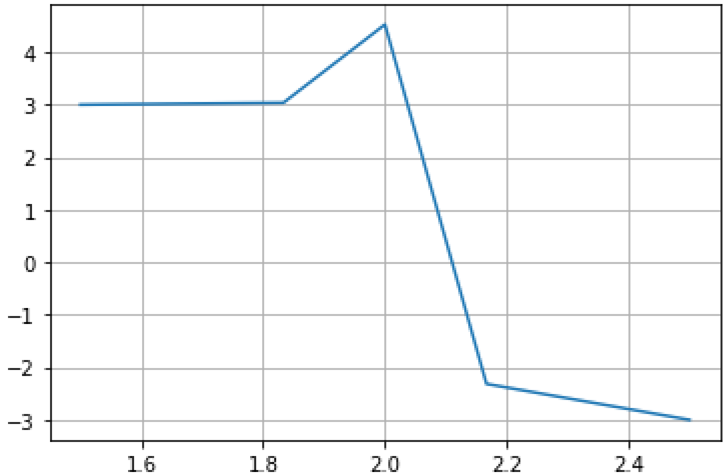
Начальные условия для задачи 2

In [19]:
```
ua, ub = 1.5, 2.5
ya, yb = 3, -3
k1, k2, k3 = 80, 1, 20
x0, c = ua + (ub - ua) / 2, 100
h = (ub - ua) / 150
k = sp.Piecewise(
    (k1, x < ua + (ub - ua) / 3),
    (k3, ua + 2 * (ub - ua) / 3 <= x),
    (k2, True),
)
source = [(100, ua + (ub - ua) / 2)]

# integral for delta function
def phi(x, x0, c):
    if abs(x - x0) - h / 2 < 1e-5:
        return c / 2
    elif 2*x - h < 2*x0 < 2*x + h:
        return c
    else:
        return 0
```

In [20]:
```
def task2(a, b, ya, yb, h, phi, k_expr, sources):
    l, r = sp.symbols('l r')
    ab = sp.lambdify((l, r), h * (sp.integrate(1/k_expr, (x, l, r)))**(-1))
    n = int((b - a) / h) + 1

    matrix = np.zeros(shape=(n, n))
    t = np.zeros(shape=(n, 1))
    xs = np.linspace(a, b, n)
    matrix[0,0] = matrix[-1, -1] = 1
    t[0] = ya
    t[-1] = yb

    for i in range(1, n -1):
        matrix[i,i-1] = ab(xs[i-1], xs[i])
        matrix[i, i] = -ab(xs[i-1], xs[i]) - ab(xs[i], xs[i+1])
        matrix[i, i+1] =  ab(xs[i], xs[i+1])
        t[i] = -h * sum(phi(xs[i], x0i, ci) for ci, x0i in sources)

    return xs, np.linalg.solve(matrix, t)
```

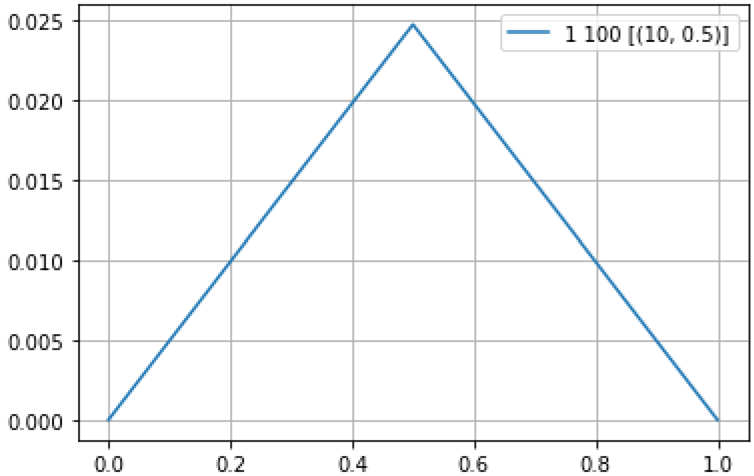
Решение задачи для одного примера

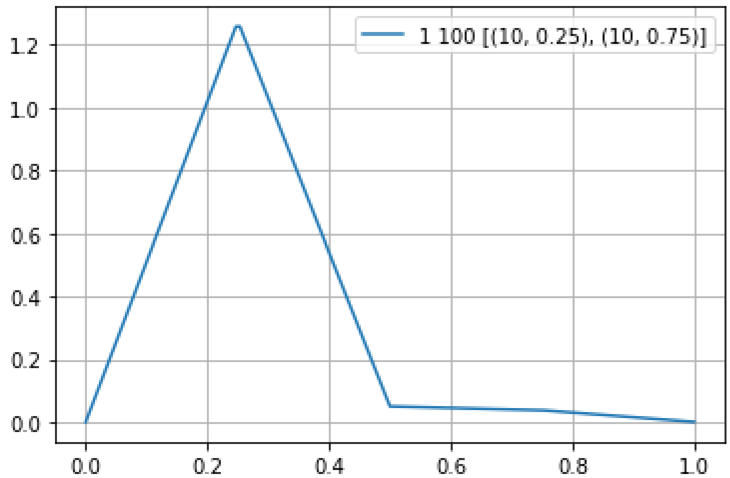
In [21]:
```
xs, ys = task2(ua, ub, ya, yb, h, phi, k, source)

plt.plot(xs, ys)
plt.grid()
plt.show()
```

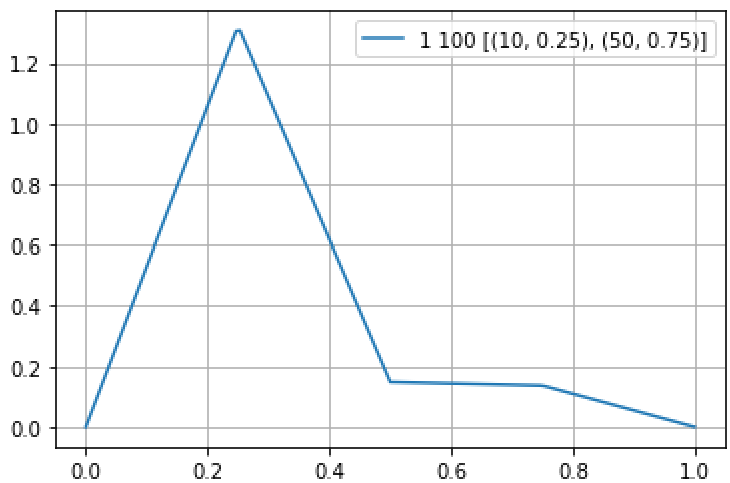


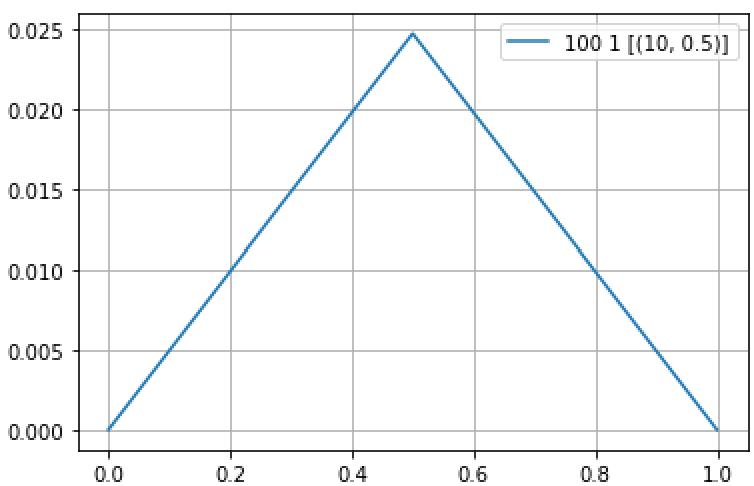
Условия для решения задач из методички (для разных плотностей и разных источников)

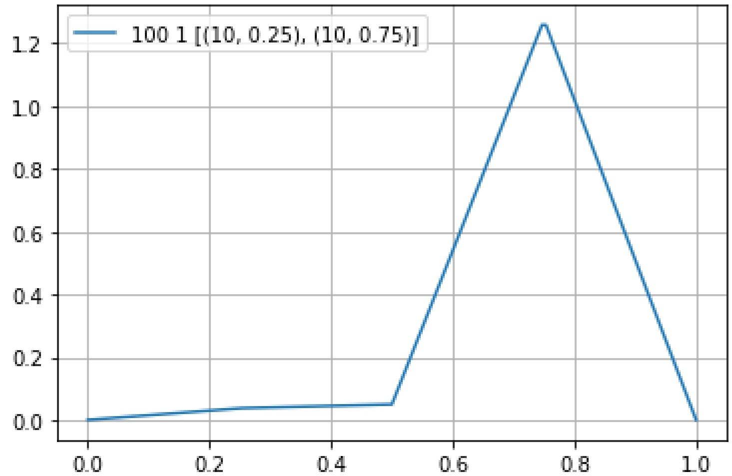
In [22]:
```
ua, ub = 0, 1
ya, yb = 0, 0
x0, c = ua + (ub - ua) / 2, 100
h = (ub - ua) / 150

sources = [
    [(10, ua + (ub - ua) / 2)],
    [(10, ua + (ub - ua) / 4), (10, ua + 3 * (ub - ua) / 4)],
    [(10, ua + (ub - ua) / 4), (50, ua + 3 * (ub - ua) / 4)],
]

# for two k's
for k1, k2 in [[1, 100], [100, 1]]:
    k = sp.Piecewise(
        (k1, x < ua + (ub - ua) / 2),
        (k2, True),
    )
    for source in sources:
        xs, ys = task2(ua, ub, ya, yb, h, phi, k, source)
        plt.plot(xs, ys, label='{} {} {}'.format(k1, k2, source))
        plt.legend()
        plt.grid()
        plt.show()

for k1, k2, k3 in [
    [1, 3, 9],
    [9, 3, 1],
    [1, 2, 1],
    [20, 1, 20]
]:
    k = sp.Piecewise(
        (k1, x < ua + (ub - ua) / 3),
        (k3, ua + 2 * (ub - ua) / 3 <= x),
        (k2, True),
    )
    for source in sources:
        xs, ys = task2(ua, ub, ya, yb, h, phi, k, source)
        plt.plot(xs, ys, label='{} {} {} {}'.format(k1, k2, k3, source))
        plt.legend()
        plt.grid()
        plt.show()
```

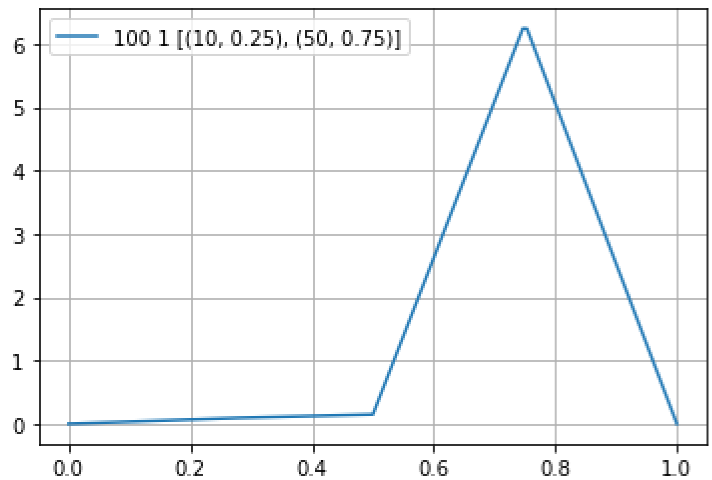

1 100 [(10, 0.5)]

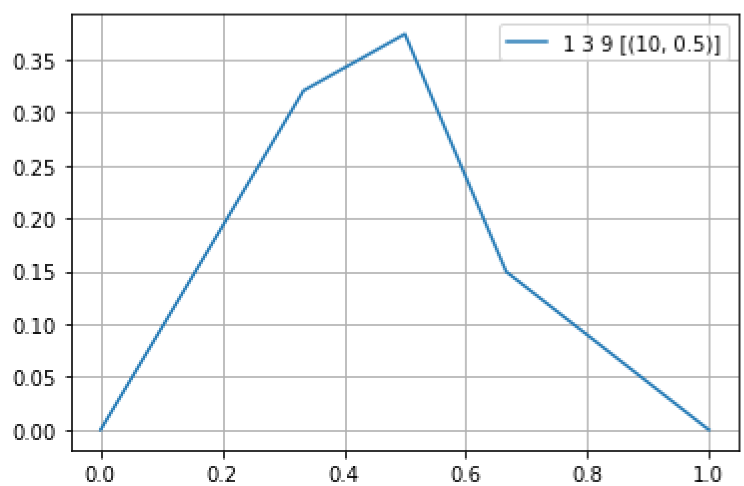

1 100 [(10, 0.25), (10, 0.75)]

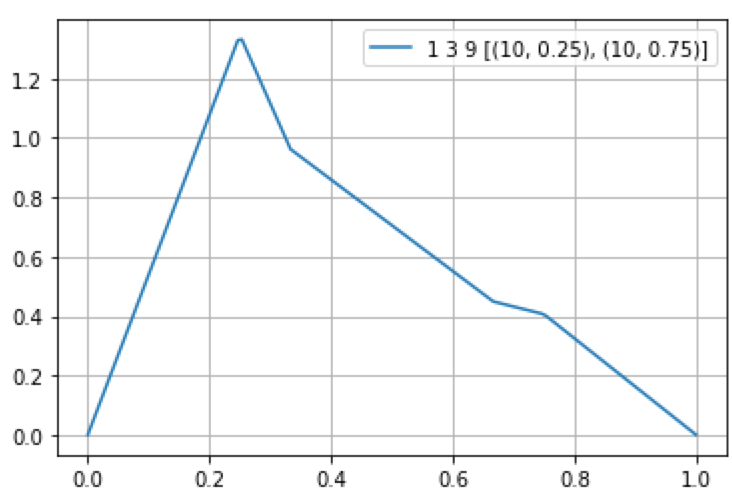

1 100 [(10, 0.25), (50, 0.75)]

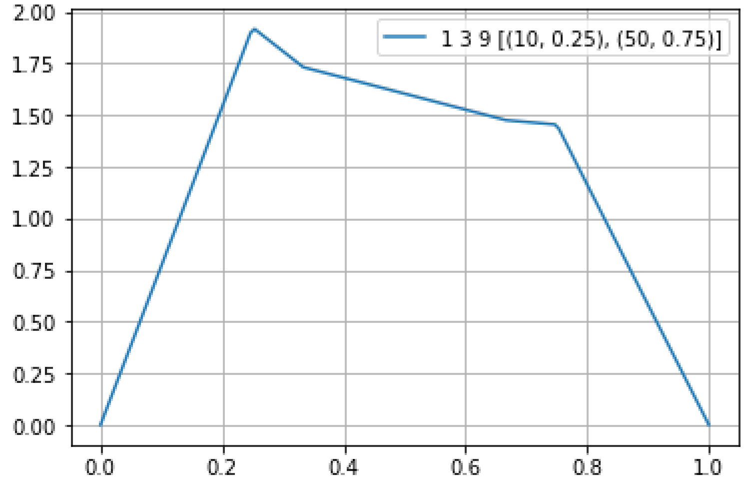

100 1 [(10, 0.5)]

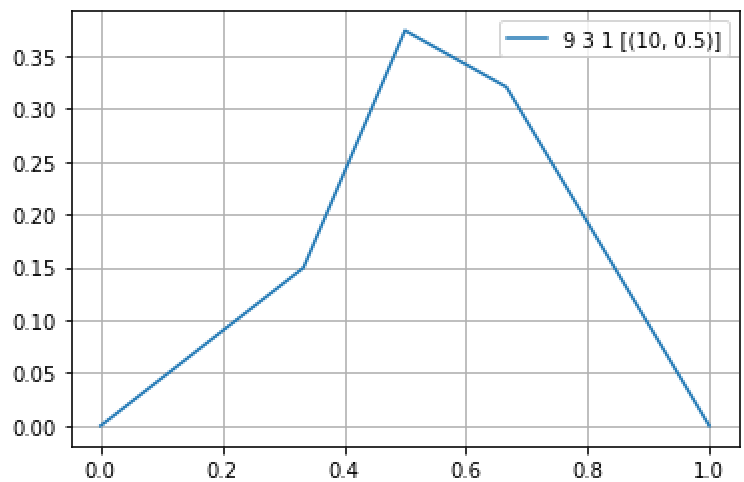

100 1 [(10, 0.25), (10, 0.75)]
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

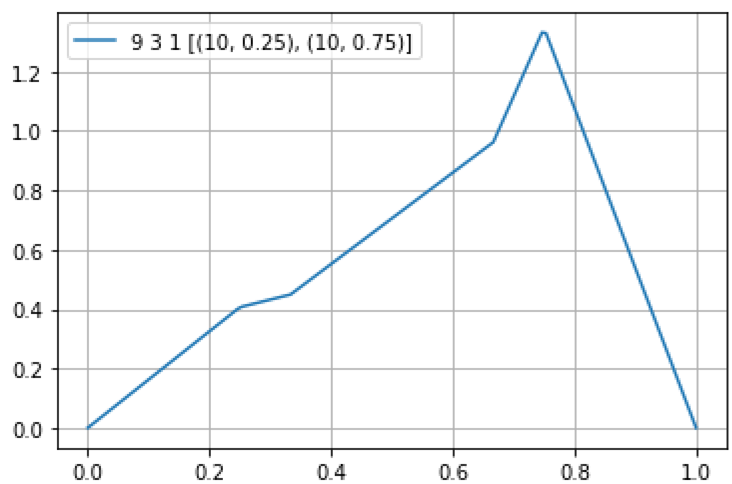

100 1 [(10, 0.25), (50, 0.75)]
6
5
4
3
2
1
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

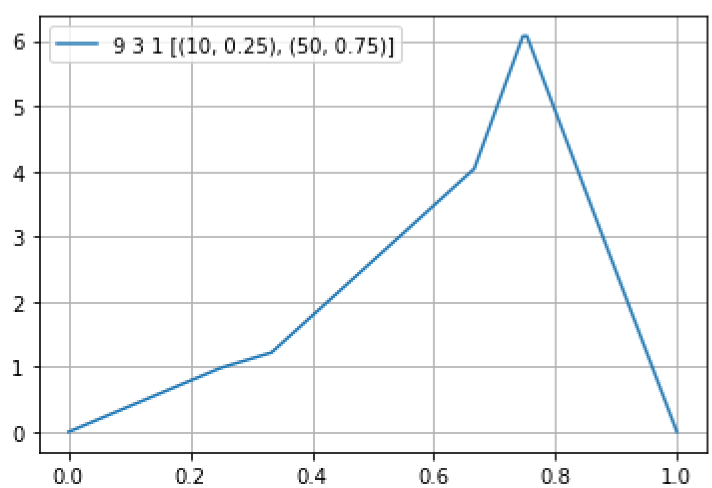

1 3 9 [(10, 0.5)]
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

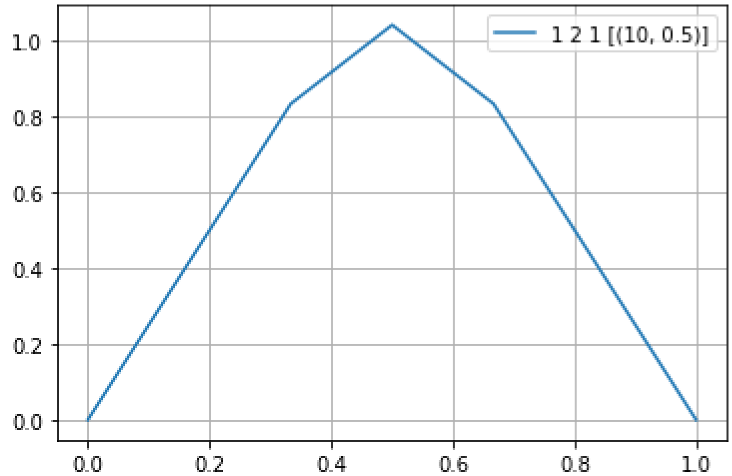

1 3 9 [(10, 0.25), (10, 0.75)]
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

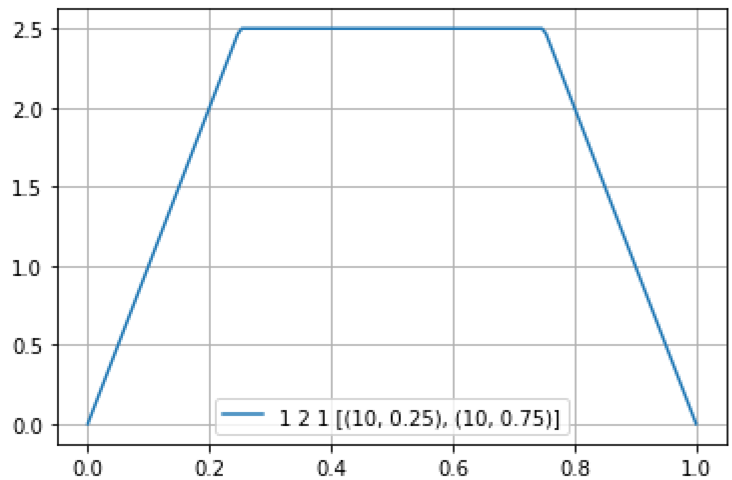

1 3 9 [(10, 0.25), (50, 0.75)]
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

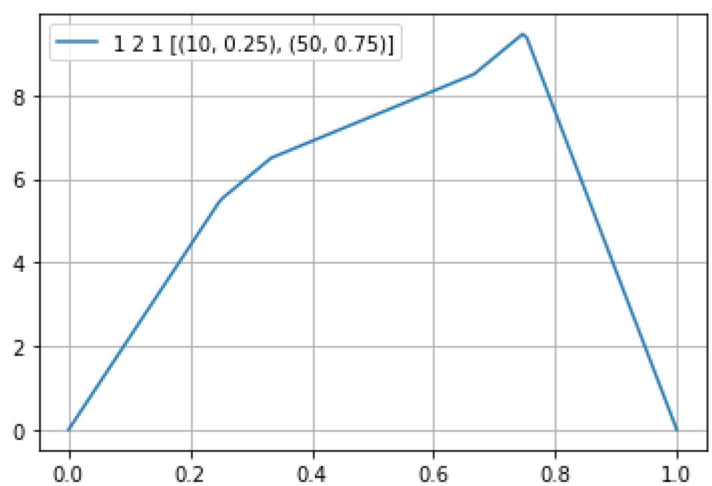

9 3 1 [(10, 0.5)]
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

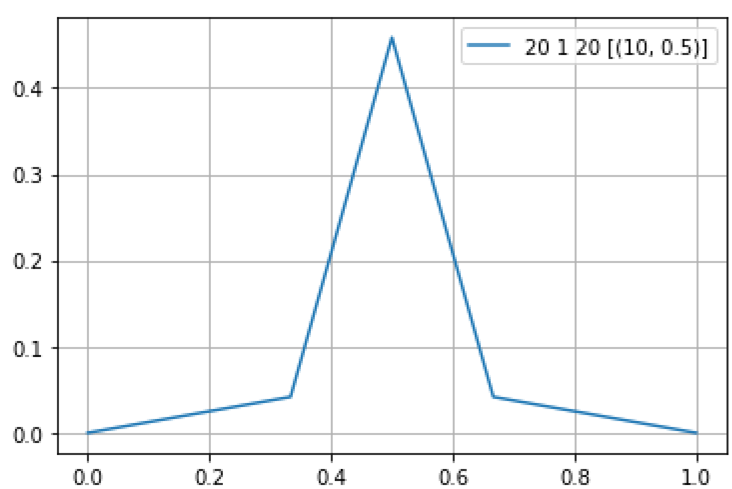

9 3 1 [(10, 0.25), (10, 0.75)]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

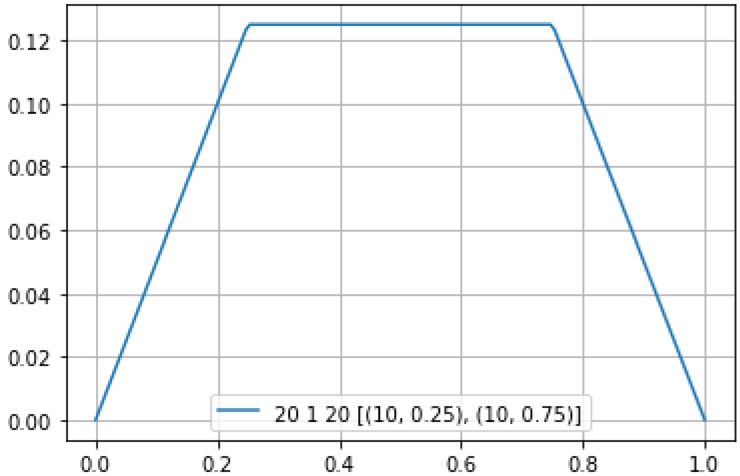

9 3 1 [(10, 0.25), (50, 0.75)]
0
1
2
3
4
5
6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

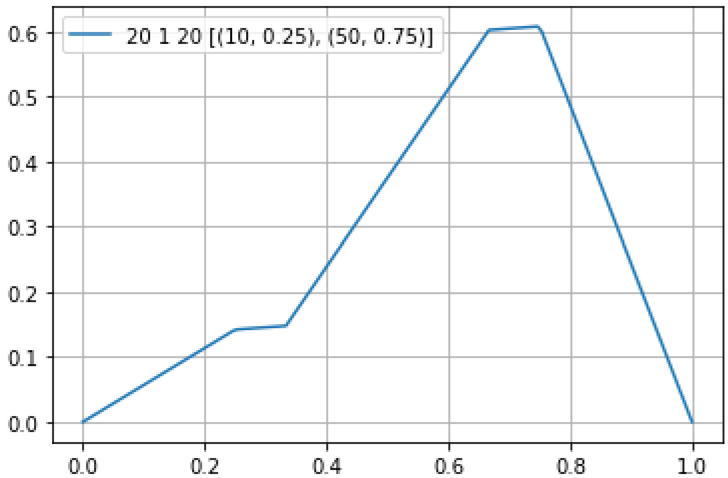

1 2 1 [(10, 0.5)]


1 2 1 [(10, 0.25), (10, 0.75)]


1 2 1 [(10, 0.25), (50, 0.75)]

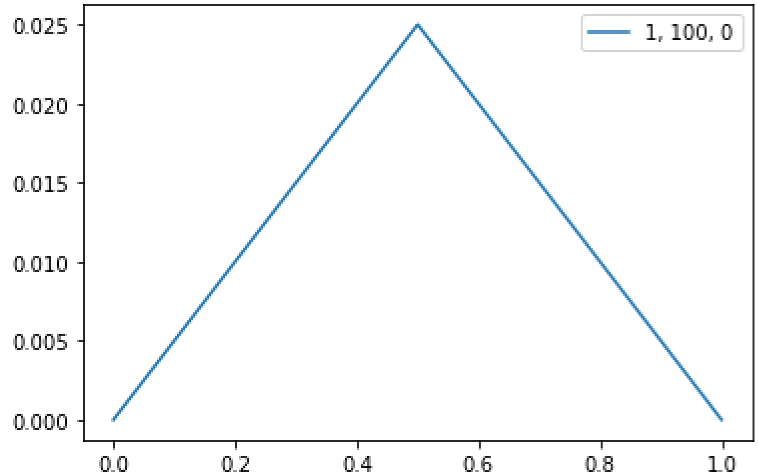

20 1 20 [(10, 0.5)]

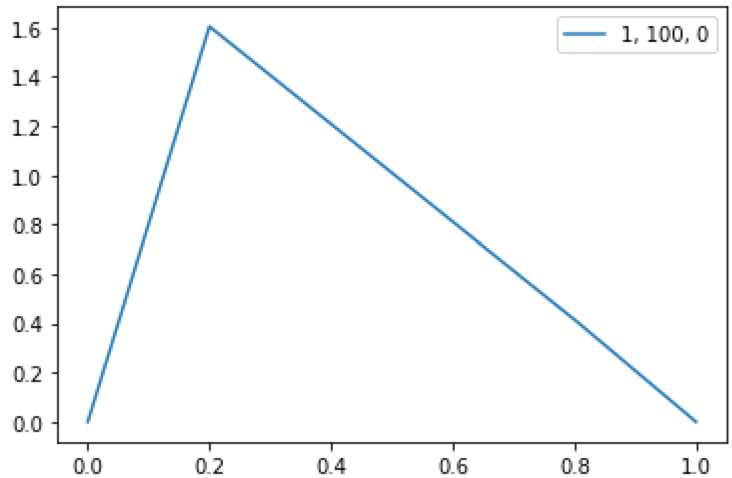


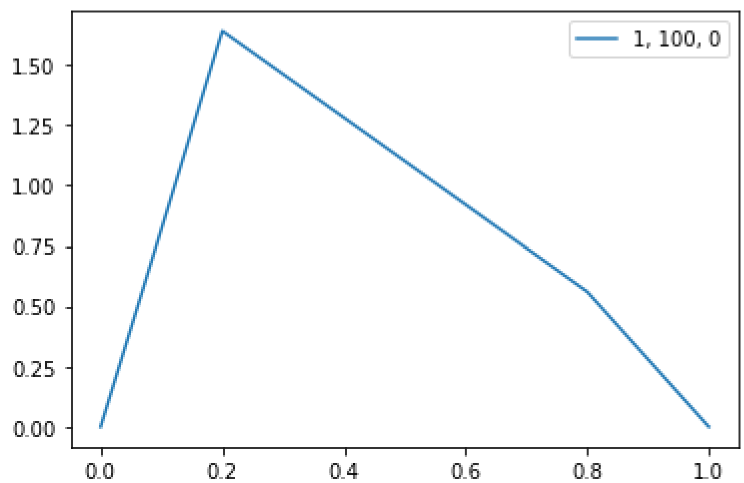


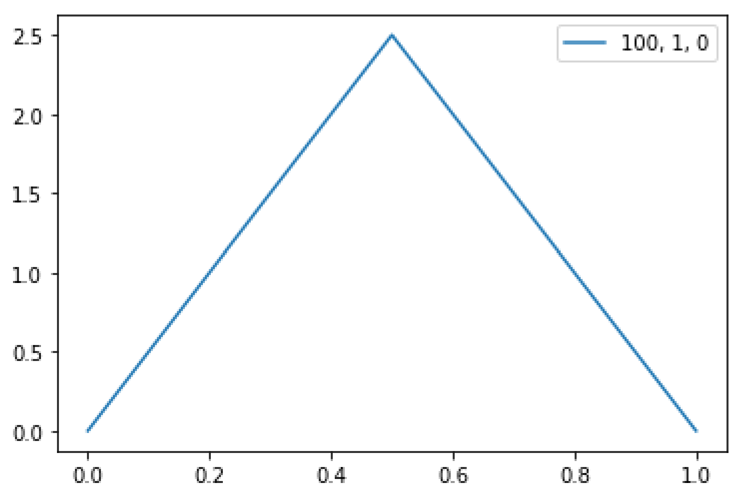
In [9]:
```
# set what consists of k1, k2, k3, xr1, xr2

sets = [
    [1, 100, 0, (b + a)/2, 2*b],
    [100, 1, 0, (b + a)/2, 2*b],
    [10, 25, 75, a + (b - a)/3, a + 2*(b - a)/3],
    [100, 40, 15, a + (b - a)/3, a + 2*(b - a)/3],
    [30, 60 , 30, a + (b - a)/3, a + 2*(b - a)/3],
    [100, 5, 100, a + (b - a)/3, a + 2*(b - a)/3]
]

conditions = [
    [((b + a)/2, 20)],
    [((b + a)*(0.5 - 0.3), 20), ((b + a)*(0.5 + 0.3), 20)],
    [((b + a)*(0.5 - 0.3), 20), ((b + a)*(0.5 + 0.3), 200)]
]
```

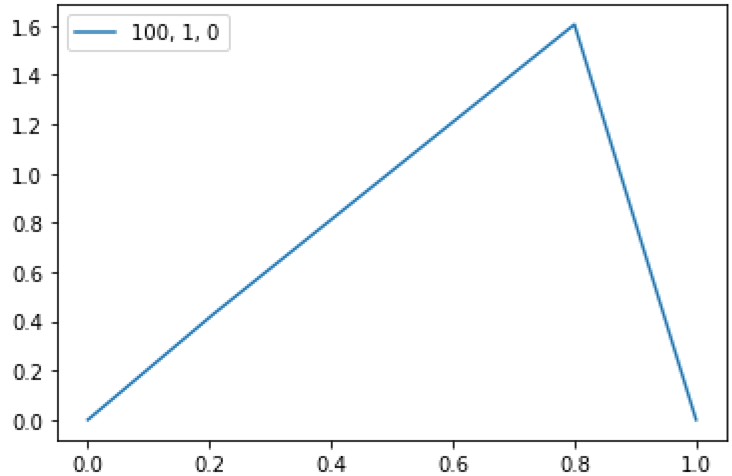
In [10]:
```
for s in sets:
    for conds in conditions:
        plt.plot(*solve2(a, b, ua, ub, h, *s, conds), label='{}, {}, {}'.format(*s))
        plt.plot()
        plt.legend()
        plt.show()
```

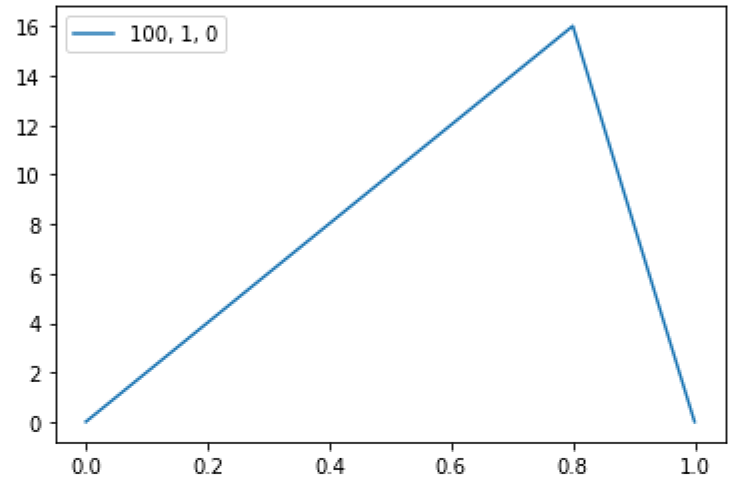

1, 100, 0
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

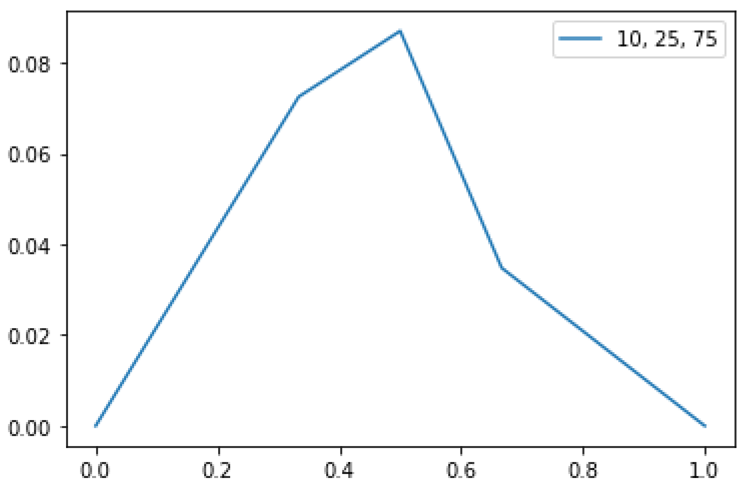

1, 100, 0
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

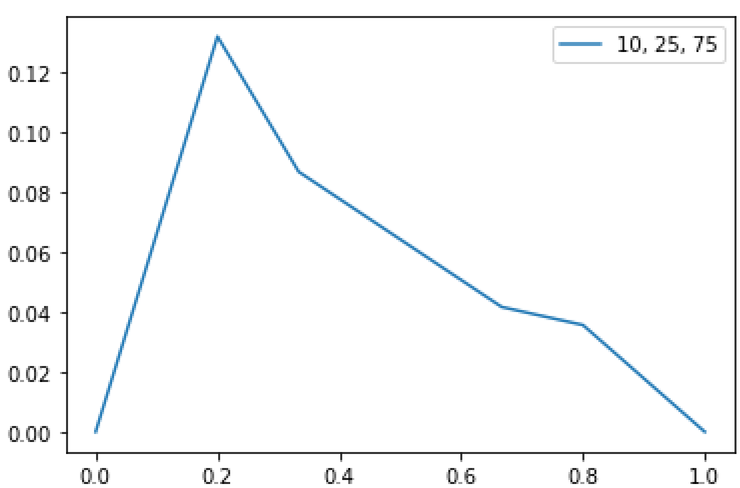

1, 100, 0
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

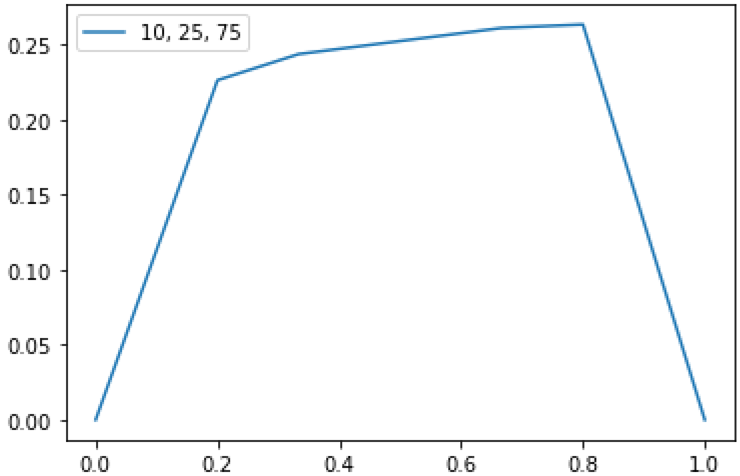

100, 1, 0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

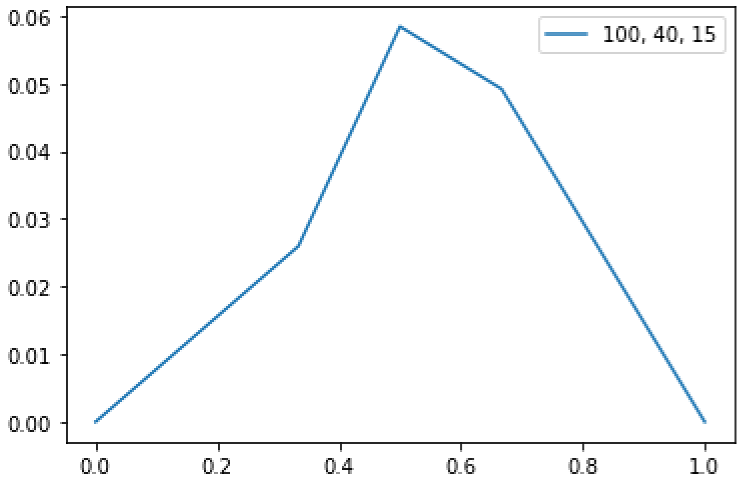

100, 1, 0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

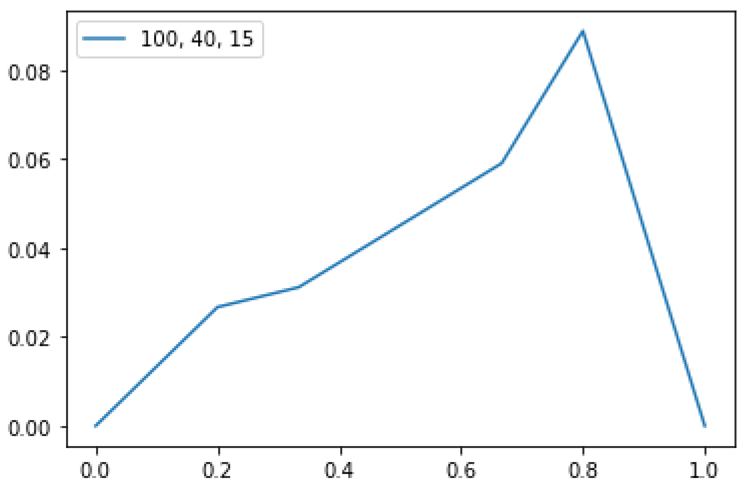

100, 1, 0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

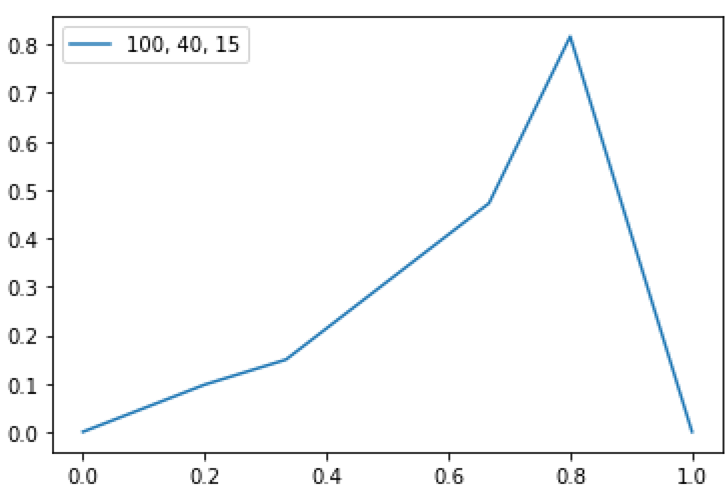

10, 25, 75
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

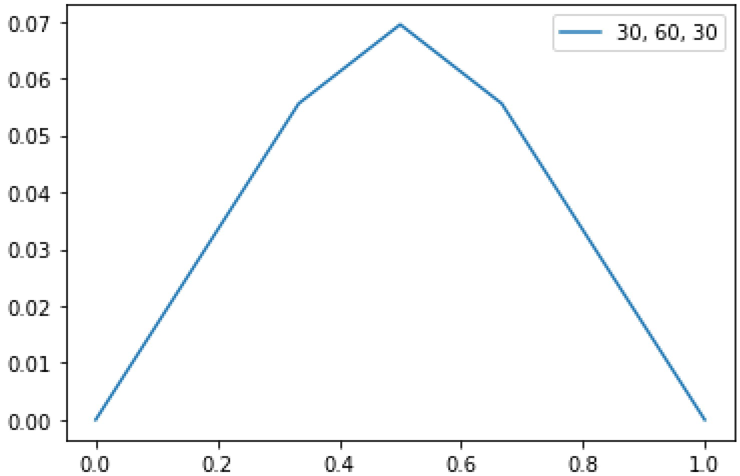

10, 25, 75
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


10, 25, 75

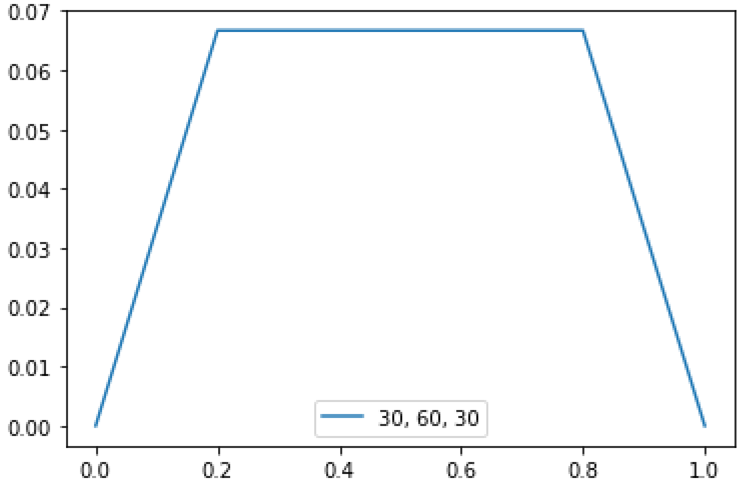

100, 40, 15


100, 40, 15

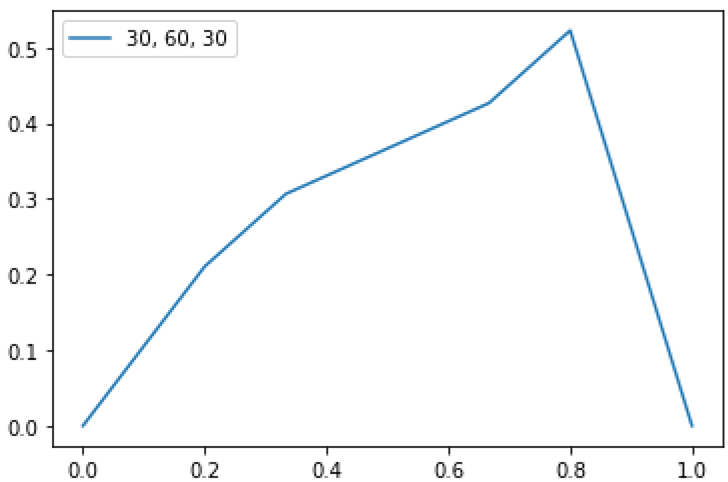

100, 40, 15



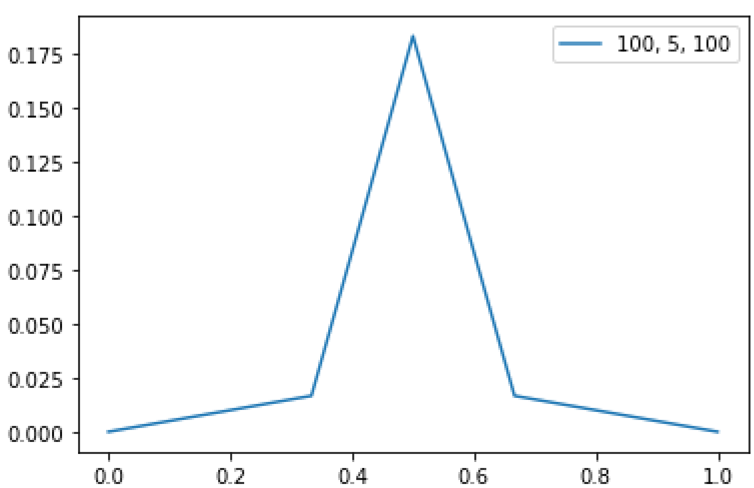
30, 60, 30
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



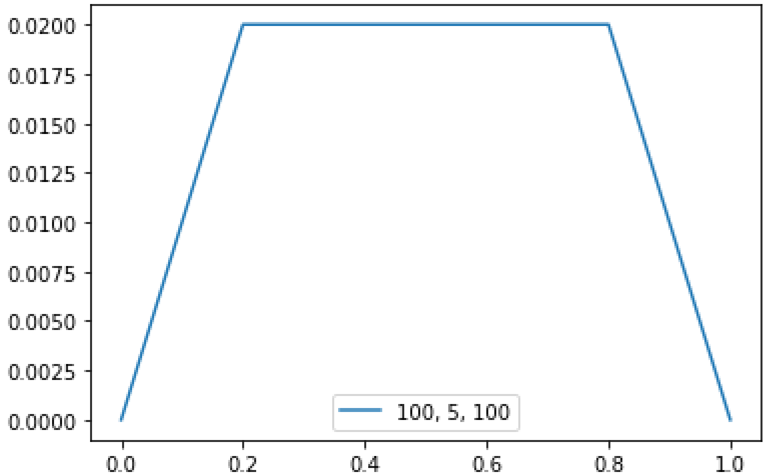
30, 60, 30
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

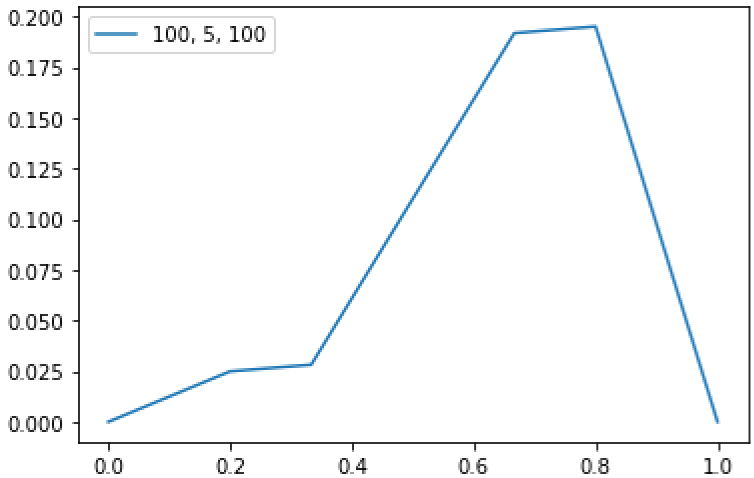


30, 60, 30
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



100, 5, 100
0.000
0.025
0.050
0.075
0.100
0.125
0.150
0.175
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0





Вывод используемых формул для задачи 3 и 4

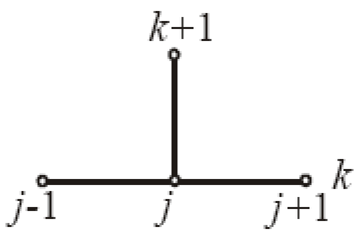
Дано следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), x \in [a, b], t \in [0, T]$$

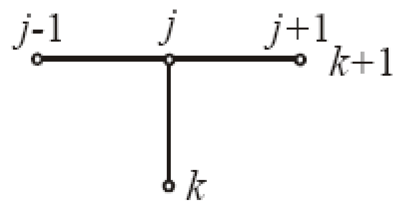
Зададим оператор L:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Для аппроксимации оператора L с помощью явной схемы используем следующие точки:



шаблон явной схемы



шаблон неявной схемы

Обозначим для удобства точки следующим образом:

$$x_{j,k} = (x, t)$$

Тогда, обозначив разность

$$x_{j,k} - x_{j-1,k} = h$$

А

$$x_{j,k+1} - x_{j,k} = \tau$$

Получаем:

$$x_{j-1,k} = (x - h, t)$$

$$x_{j+1,k} = (x + h, t)$$

$$x_{j,k+1} = (x, t + \tau)$$

Используя эти точки можем аппроксимировать функции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, t+\tau) - u(x,t)}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + y(x-h,t)}{h^2}$$

Таким образом результат оператора Lu:

$$Lu = \frac{u(x, t+\tau) - u(x,t)}{\tau} - \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + y(x-h,t)}{h^2}$$

Теперь давайте выразим отсюда $u(x, t+\tau)$:

$$u(x, t+\tau) = u(x,t) + \tau(\frac{u(x+h,t)}{h^2} - 2\frac{u(x,t)}{h^2} + \frac{u(x-h,t)}{h^2})$$

Итого приведя слагаемые:

$$u(x, t+\tau) = \frac{\tau}{h^2}u(x-h,t) + (1 - \frac{\tau}{h^2})u(x,t) + \frac{\tau}{h^2}u(x+h,t)$$

Что в итоге?

Зная значения из нижниго слоя, можно найти значения на верхнем слое

Примечание для задачи 3

В задаче 3 есть $\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x})$.

В данном случае аппроксимировать будем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{k(x+\frac{h}{2})u'(x+\frac{h}{2}) - k(x-\frac{h}{2})u'(x-\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$$

Теперь аппроксимируя $\frac{\partial u}{\partial x}$ и выражая $u(x, t+\tau)$:

$$u(x,t+\tau) = \frac{k(x-\frac{h}{2})\tau}{h^2}u(x-h,t) + (1 - \frac{(k(x-\frac{h}{2}) - k(x+\frac{h}{2}))\tau}{h^2}u(x,t) + \frac{k(x+\frac{h}{2})\tau}{h^2}u(x+h,t)$$

Примечание для задачи 4

В задаче 4 перед $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ стоит $const$.

Несложно заметить, что таким образом при выводе эта константа окажется перед аппроксимацией данной производной и получится следующая формула:

$$u(x,t+\tau) = \frac{c\cdot\tau}{h^2}u(x-h,t) + (1 - \frac{c\cdot\tau}{h^2})u(x,t) + \frac{c\cdot\tau}{h^2}u(x+h,t), c - const$$

Задача 3

In [23]:

```
def task3(x_h, t_h, a, b, k, T, g1, g2, phi, f):
    x_h_step_amount = int((b - a) / x_h) + 1
    t_h_step_amount = int(T / t_h) + 1
    x_hs = np.linspace(a, b, x_h_step_amount)
    t_hs = np.linspace(0, T, t_h_step_amount)

    matrix = np.zeros(shape=(t_h_step_amount, x_h_step_amount))

    # initial condition
    matrix[0, 1:-1] = np.array([phi(x_hs[i]) for i in range(1, x_h_step_amount-1)])

    # bounds condition
    matrix[:, 0] = np.array([g1(x_hs[0], t_hs[i]) for i in range(t_h_step_amount)])
    matrix[:, -1] = np.array([g2(x_hs[-1], t_hs[i]) for i in range(t_h_step_amount)])

    for i in range(1, t_h_step_amount):
        for j in range(1, x_h_step_amount-1):
            matrix[i,j] = sum([
                k(x_hs[j] - x_h/2) * t_h / x_h**2 * matrix[i-1, j-1],
                (1 - (k(x_hs[j] - x_h / 2) + k(x_hs[j] + x_h / 2)) * t_h / x_h**2) * mat
                k(x_hs[j] + x_h/2) * t_h / x_h**2 * matrix[i-1, j+1],
                t_h * f(x_hs[j], t_hs[i]) * (1 - math.exp(-t_hs[i]))
            ])

    # plotting
    ax = plt.axes(projection='3d')
    ax.set_ylabel('$T$ time axis')
    ax.set_xlabel('$X$ spatial axis')
    ax.set_zlabel('$Y$ function value axis')


    for i in range(0, t_h_step_amount, 100):
        ax.plot3D(x_hs, np.array([t_hs[i]]*x_h_step_amount), matrix[i,:])
```

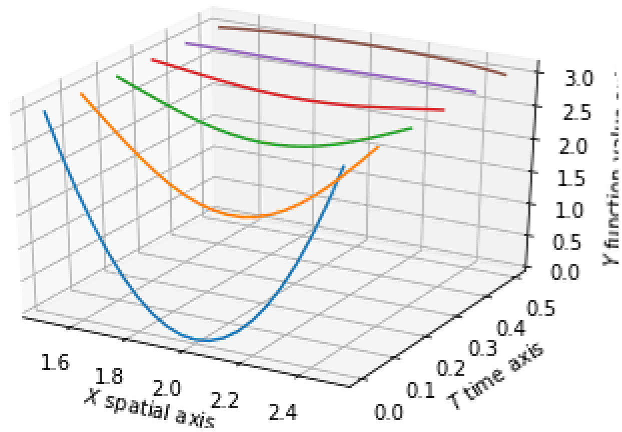
Условия для задачи 3

In [31]:

```
a, b = 1.5, 2.5
g1 = sp.lambdify((x, t), 3)
g2 = sp.lambdify((x, t), 3)
f = sp.lambdify((x, t), x + x**0.5)
k = sp.lambdify(x, x**(-1/3))
```

```
phi = sp.lambdify(x, 12*(x-2)**2)
h_x, h_t = 0.05, 0.001
T = 500 * h_t
```

In [32]:
```
task3(h_x, h_t, a, b, k, T, g1, g2, phi, f)
```



Задача 4

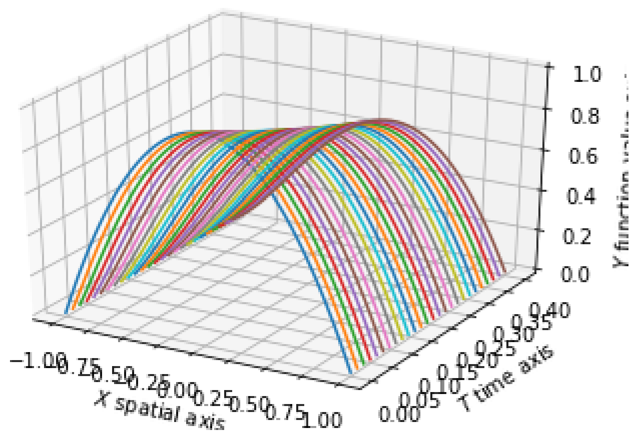
In [26]:
```
def task4(a, b, k, T, phi, g1, g2, f):
    x_h = (b - a) / 50
    x_h_step_amount = int((b - a) / x_h) + 1
    t_h = 0.5 * x_h**2 / k
    t_h_step_amount = int(T / t_h) + 1
    x_hs = np.linspace(a, b, x_h_step_amount)
    t_hs = np.linspace(0, T, t_h_step_amount)

    matrix = np.zeros(shape=(t_h_step_amount, x_h_step_amount))

    # initial condition
    matrix[0, 1:-1] = np.array([phi(x_hs[i], t_hs[0]) for i in range(1, x_h_step_amount-

    # bounds condition
    matrix[:, 0] = np.array([g1(x_hs[0], t_hs[i]) for i in range(t_h_step_amount)])
    matrix[:, -1] = np.array([g2(x_hs[-1], t_hs[i]) for i in range(t_h_step_amount)])

    coef = np.array([k * t_h / x_h**2, 1 - 2 * k * t_h / x_h**2, k * t_h / x_h**2])

    for i in range(1, t_h_step_amount):
        for j in range(1, x_h_step_amount-1):
            matrix[i][j] = matrix[i-1, j-1:j+2].dot(coef) + t_h * f(x_hs[j], t_hs[i-1])

    # plotting
    ax = plt.axes(projection='3d')
    ax.set_ylabel('$T$ time axis')
    ax.set_xlabel('$X$ spatial axis')
    ax.set_zlabel('$Y$ function value axis')


    for i in range(0, t_h_step_amount, 10):
        ax.plot3D(x_hs, np.array([t_hs[i]]*x_h_step_amount), matrix[i,:])
```

Условия для задачи 4

In [33]:
```
# k = 1
# T = 0.05
# a, b = 0, 1
# phi = sp.lambdify((x, t), 1)
```

```
# g1 = sp.lambdify((x, t), sp.exp(t))
# g2 = sp.lambdify((x, t), sp.exp(10*t))
# f = sp.lambdify((x, t), 0)

k = 0.5
T = 0.4
a, b = -1, 1
phi = sp.lambdify((x, t), 1-x*x)
g1 = sp.lambdify((x, t), 0)
g2 = sp.lambdify((x, t), 0)
f = sp.lambdify((x, t), x)
```

In [34]:
```
task4(a, b, k, T, phi, g1, g2 , f)
```



In [ ]:

In [ ]:

In [ ]: