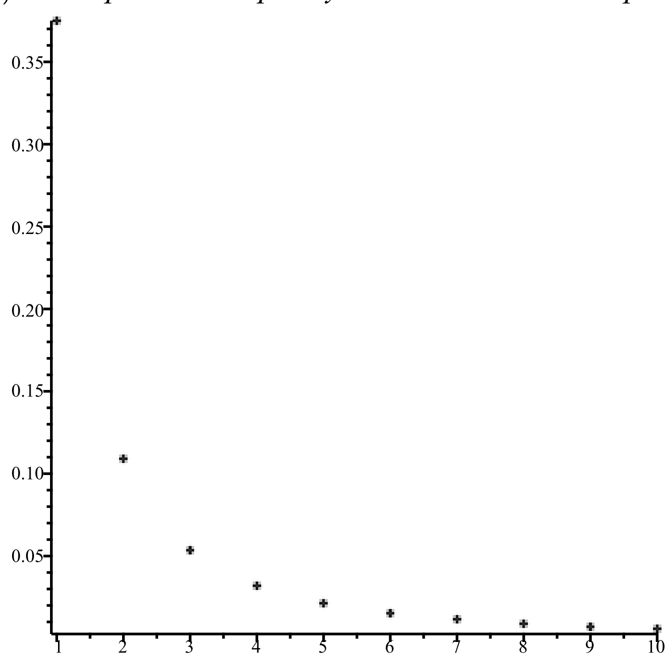
Лабораторная работа 2. Числовые ряды
Выполнила Криштафович Карина Дмитриевна, гр. 053501
Вариант 1

№1.1

> $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}\right)$:*#исходный ряд*
$a := seq\left(\left[n, \frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}\right], n=1..10\right)$
#вычислим первые 10 членов последовательности

$$a := \left[1, \frac{3}{8}\right], \left[2, \frac{6}{55}\right], \left[3, \frac{3}{56}\right], \left[4, \frac{6}{187}\right], \left[5, \frac{3}{140}\right], \left[6, \frac{6}{391}\right], \left[7, \frac{3}{260}\right], \left[8, \frac{6}{667}\right], \left[9, \frac{3}{416}\right], \left[10, \frac{6}{1015}\right] \quad (1)$$

> $plots[pointplot](\{a\})$ *#построим их в прямоугольной системе координат*



> *#убедимся в выполнении необходимого признака сходимости*

> $'limit\left(\frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}, n=\text{infinity}\right)' = limit\left(\frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}, n=\text{infinity}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}=0 \quad (2)$$

> *#найдем сумму ряда*

> $'\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9\,n^2+12\,n-5}=\frac{7}{10} \quad (3)$$

> *#найдем номер n_ε, кри котором погрешность нахождения суммы не превосходит* $\varepsilon = 0.1$

> $solve\left(\left\{\operatorname{abs}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{9k^2+12k-5}\right)-0.7\right) < 0.1, n \geq 0\right\}\right)$

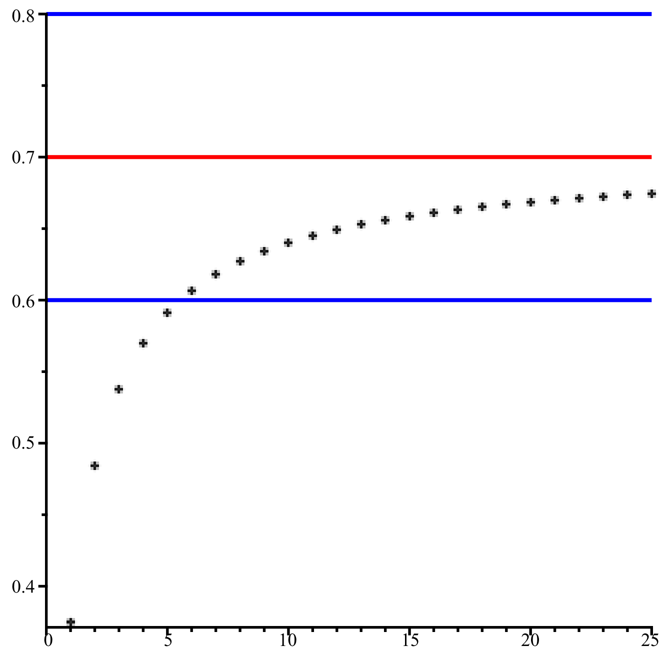
$$\{5.537291403 < n\} \tag{4}$$

> *#изобразим на графике члены ряда, сумму и её ε-окрестность*

> $g1 := plots[pointplot]\left(\left\{seq\left(\left[n, \operatorname{abs}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{9k^2+12k-5}\right)\right)\right], n = 1..25\right)\right\}\right) :$

> $g2 := plot\left(\left[\frac{7}{10} - \frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\right], x = 0..25, color = [blue, red, blue]\right) :$

> $plots[display](g1, g2);$



> *#начиная с n=6, члены ряда попадают в ε-окрестность суммы ряда*

> $restart;$

> **№1.2**

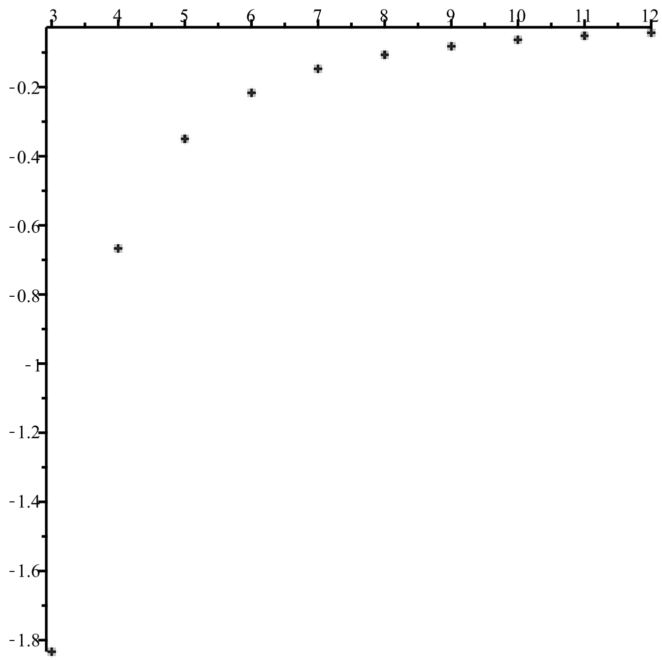
> $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{4-5n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}\right)$ *:#исходный ряд*

$b := seq\left(\left[n, \frac{4-5n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}\right], n = 3..12\right)$

#вычислим первые 10 членов последовательности

$$b := \left[3, -\frac{11}{6}\right], \left[4, -\frac{2}{3}\right], \left[5, -\frac{7}{20}\right], \left[6, -\frac{13}{60}\right], \left[7, -\frac{31}{210}\right], \left[8, -\frac{3}{28}\right], \left[9, -\frac{41}{504}\right], \left[10, -\frac{23}{360}\right], \left[11, -\frac{17}{330}\right], \left[12, -\frac{7}{165}\right] \tag{5}$$

> $plots[pointplot](\{b\})$ *#построим их в прямоугольной системе координат*



> *#убедимся в выполнении необходимого признака сходимости*

> $'limit\left(\frac{4-5\,n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)},\,n=\text{infinity}\right)' = limit\left(\frac{4-5\,n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)},\,n=\text{infinity}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-5\,n}{n\,(n-1)\,(n-2)}=0 \qquad \textbf{(6)}$$

> *#найдем сумму ряда*

> $'\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{4-5\,n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}\right)' = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{4-5\,n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}\right)$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4-5\,n}{n\,(n-1)\,(n-2)}=-4 \qquad \textbf{(7)}$$

> *#найдем номер* n_{ε}, *кри котором погрешность нахождения суммы не превосходит* $\varepsilon = 0.1$

> $solve\left(\left\{\text{abs}\left(\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{4-5\,k}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}\right)+4\right)<0.1,\,n\geq 1\right\}\right)$

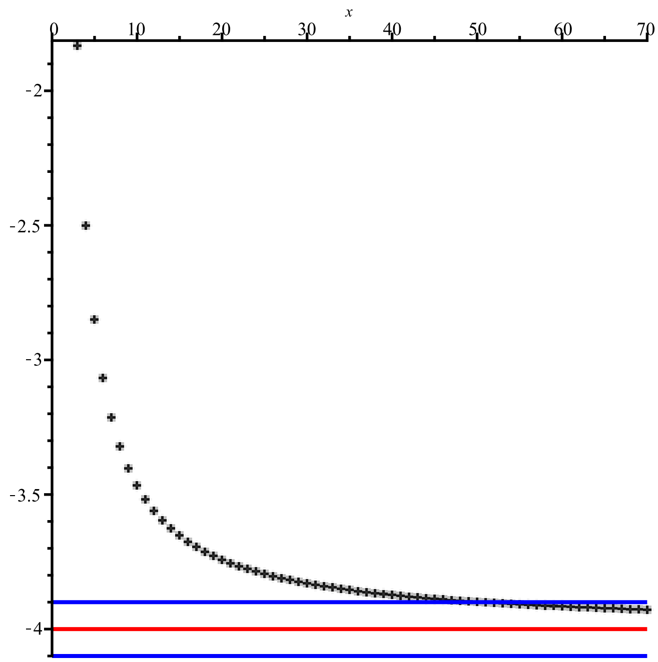
$$\{50.60478042 < n\} \qquad \textbf{(8)}$$

> *#изобразим на графике члены ряда, сумму и её ε-окрестность*

> $gr1 := plots[pointplot]\left(\left\{seq\left(\left[n,\,\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{4-5\,k}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}\right)\right],\,n=3\,..70\right)\right\}\right):$

> $gr2 := plot\left(\left[-4-\frac{1}{10},\,-4,\,-4+\frac{1}{10}\right],\,x=0\,..70,\,color=[blue,\,red,\,blue]\right):$

> $plots[display](gr1,\,gr2);$



> *#начиная с n=51, члены ряда попадают в ε-окрестность суммы ряда*

> *restart*;

> **№2**

> $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)$:*#исходный ряд*

> *#проверим ряд на абсолютную сходимость*

> $limit\left(\frac{1}{3\,n^2}\,\frac{n^2}{1}, n = \text{infinity}\right)$

$$\frac{1}{3} \qquad (9)$$

> *#модуль знакопеременного ряда сравним со сходящимся рядом Дирихле, поэтому исходный ряд является абсолютно сходящимся*

> $'\,limit\left(\frac{1}{3\,n^2}, n = \text{infinity}\right)' = limit\left(\frac{1}{3\,n^2}, n = \text{infinity}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\,n^2} = 0 \qquad (10)$$

> *#найдем предел общего члена для доказательство, что ряд является рядом Лейбница*

> *#найдем номер* n_{ε}*, кри котором погрешность нахождения суммы не превосходит* $\varepsilon = 0.01$

> $isolve\left(\frac{1}{3\,(n+1)^2} < 0.01\right)$;

$$\{n = -7 - \_NN2\sim\}, \{n = 5 + \_NN1\sim\} \qquad (11)$$

> $solve\left(\left\{\frac{1}{3\,(n+1)^2} < 0.01, n \geq 1\right\}\right)$

$$\{4.773502692 < n\} \qquad (12)$$

(13)

> $'\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)$ *#найдем сумму ряда*

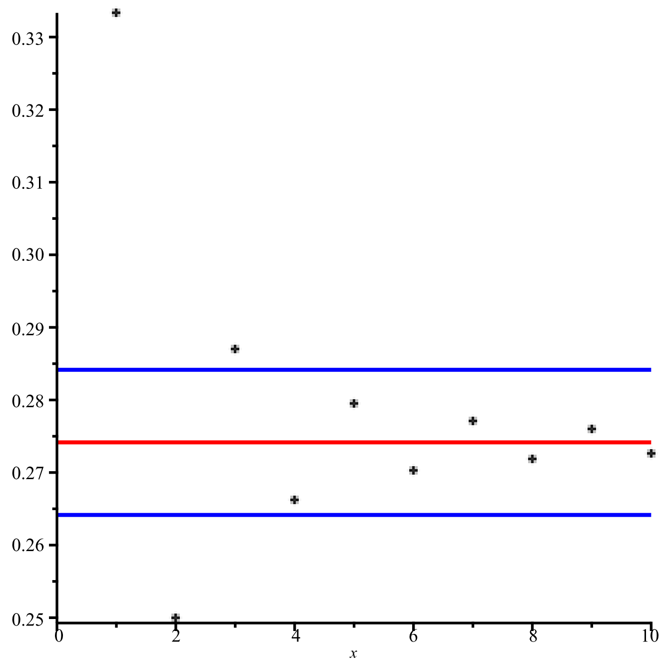
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2} = \frac{\pi^2}{36} \qquad (14)$$

> *#изобразим на графике члены ряда, сумму и её ε-окрестность*

$g1 := plots[pointplot]\left(\left\{seq\left(\left[n, \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{3\,k^2}\right)\right], n=1..10\right)\right\}\right):$

> $g2 := plot\left(\left[\frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{100}, \frac{\pi^2}{36}, \frac{\pi^2}{36} + \frac{1}{100}\right], x=0..10, color=[blue, red, blue]\right):$

> $plots[display](g1, g2);$



> *#начиная с n=4, члены ряда попадают в ε-окрестность суммы ряда*

> *#рассчитаем* S_5 и S_4 и *сравним, на сколько они отличаются от суммы ряда*

> $'\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{5}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2} = \frac{3019}{10800} \qquad (15)$$

> $'\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{4}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2} = \frac{115}{432} \qquad (16)$$

> $evalf\left(simplify\left(\mathrm{abs}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)-\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0079519742 \tag{17}$$

> $evalf\left(simplify\left(\mathrm{abs}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)-\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3\,n^2}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0053813591 \tag{18}$$

> *#как видно* S_5 и S_4 *отличаются от суммы меньше, чем на* ε

> *#restart;*

> **№3**

> $'limit\left(\frac{n!}{n^n}, n=\mathrm{infinity}\right)'=limit\left(\frac{n!}{n^n}, n=\mathrm{infinity}\right)$;*# исходный придел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0 \tag{19}$$

> *#докажем, что соответствующий числовой ряд сходящийся, а значит выполняется необходимое условие сходимости*

> $'limit\left(\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)}\cdot n!}, n=\mathrm{infinity}\right)'=limit\left(\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)}\cdot n!}, n=\mathrm{infinity}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!}=\mathrm{e}^{-1} \tag{20}$$

> **if** $evalf\left(limit\left(\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)}\cdot n!}, n=\mathrm{infinity}\right)\right)<1$ **then**
> '*сходится по предельному признаку Даламбера*' **end if**;

сходится по предельному признаку Даламбера **(21)**

>