Лабораторная работа 9. Элементы комплексного анализа.
Выполнила Криштафович Карина Дмитриевна, гр. 053501
Вариант 1

> **№1**

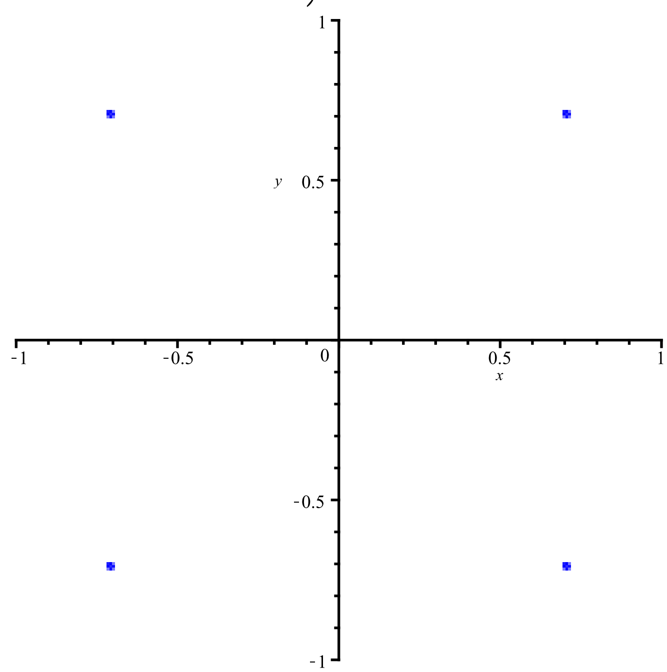
> $\sqrt[4]{-1}$:#условие

> $evalc\left(\left[solve\left(x^4=-1\right)\right]\right)$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{I\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{I\sqrt{2}}{2}\right] \tag{1}$$

> #построим точки на плоскости

> $plots[complexplot]\left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{I\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{I\sqrt{2}}{2}\right], x=-1..1, y=-1..1, style=point, color=blue\right)$



> **№2**

> $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2I\right)$:#условие

> $evalc\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+2I\right)\right)$

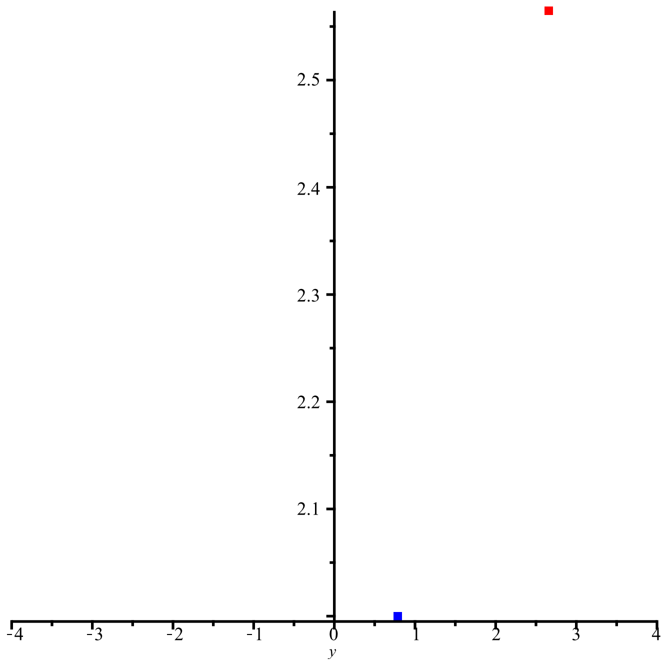
$$\frac{\sqrt{2}\cosh(2)}{2}+\frac{I\sqrt{2}\sinh(2)}{2} \tag{2}$$

> $dot1 := plots[complexplot]\left(\frac{\pi}{4}+2\,I, x=-4..4, y=-4..4, style=point, color=blue\right)$:

> $dot2 := plots[complexplot]\left(\frac{\sqrt{2}\cosh(2)}{2}+\frac{I\sqrt{2}\sinh(2)}{2}, x=-4..4, y=-4..4, style=point,\right.$

$color = red\Big)$:

> $plots[display](dot1, dot2)$



> **№3**

> $\arctan\left(\frac{(1 - I\cdot(\sqrt{3}-1))}{\sqrt{3}+1+I}\right)$:#условие

>

> $simplify\left(evalc\left(-\frac{I}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+I\cdot\frac{(1-I\cdot(\sqrt{3}-1))}{\sqrt{3}+1+I}}{1-I\cdot\frac{(1-I\cdot(\sqrt{3}-1))}{\sqrt{3}+1+I}}\right)\right)\right)$

$$\frac{\pi}{12} - \frac{\mathrm{I}\ln(2)}{2} \tag{3}$$

> $simplify\left(evalc\left(\arctan\left(\frac{(1-I\cdot(\sqrt{3}-1))}{\sqrt{3}+1+I}\right)\right)\right)$

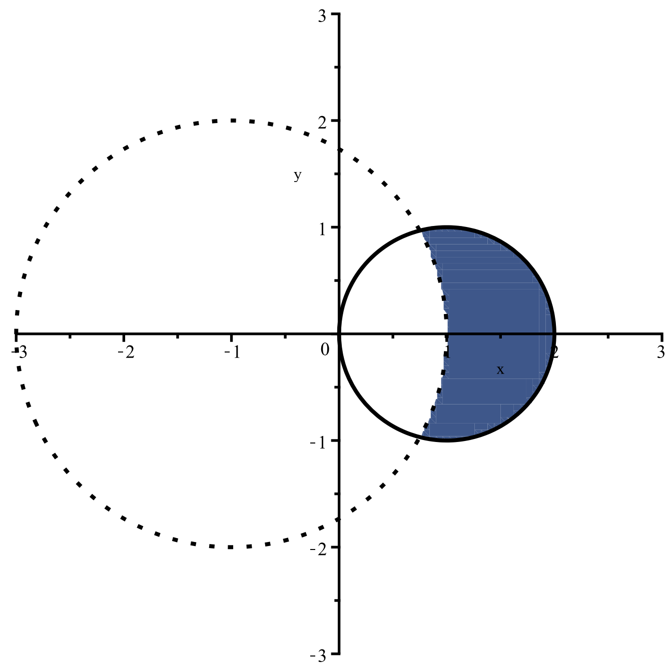
$$\frac{\pi}{12} - \frac{\mathrm{I}\ln(2)}{2} \tag{4}$$

> **№4.1**

> $\begin{cases} |z-1| \leq 1 \\ |z+1| > 2 \end{cases}$ #условие

> $z := x + I\cdot y$:

> $plots[inequal](\{evalc(|z-1|) \leq 1, evalc(|z+1|) > 2\}, evalc(\mathrm{Re}(z)) = -3..3, evalc(\mathrm{Im}(z)) = -3..3)$

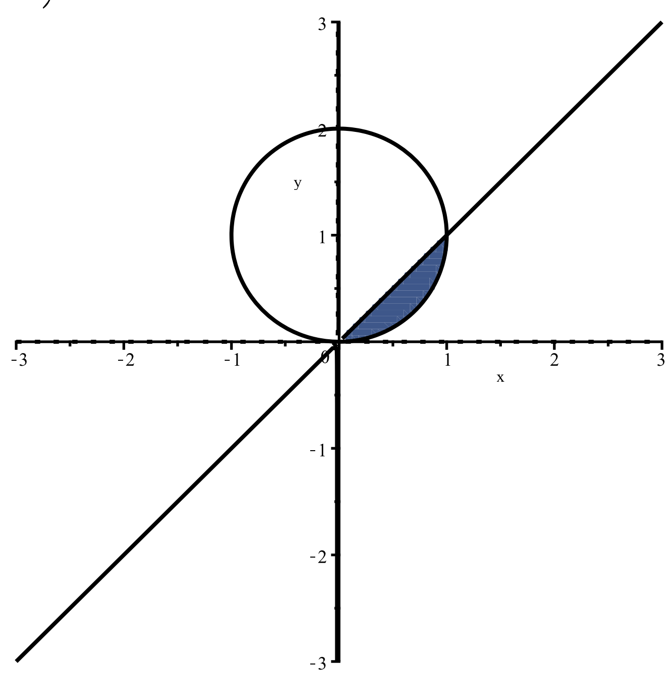


>
№4.2

>

> $\begin{cases} |z - I| \le 1 \\ 0 < arg(z) \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ *#условие*

> $plots[inequal]\left(\left\{evalc(|z - I|) \le 1, 0 < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \le \frac{\pi}{4}\right\}, evalc(\mathrm{Re}(z)) = -3..3, evalc(\mathrm{Im}(z)) = -3..3\right)$



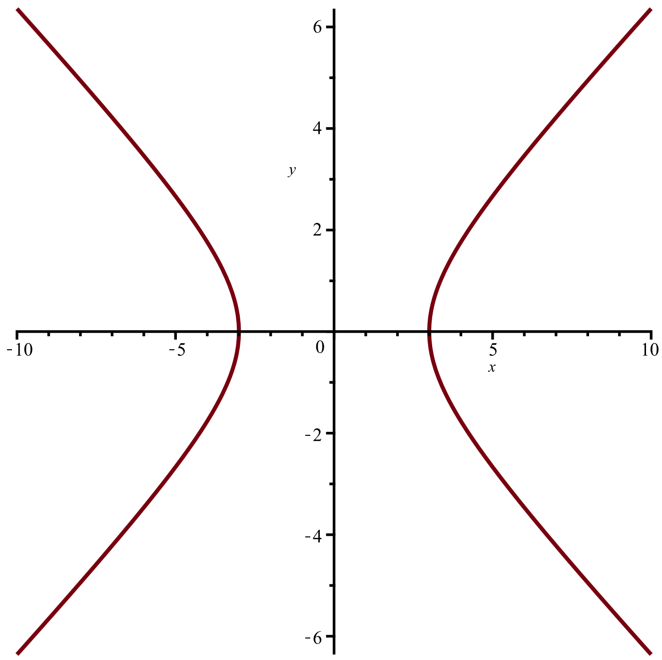
>
№5

> $z := 3\sec(t) + 2\cdot I\cdot\tan(t)$:#условие

> $solve\left(\arccos\left(\frac{5}{x}\right) = \arctan\left(\frac{y}{2}\right)\right)$

$$\left\{x = x,\, y = \frac{2\sqrt{\frac{x^2-25}{x^2}}\,x}{5}\right\} \tag{5}$$

> $plots[implicitplot]\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,\, x = -10..10,\, y = -10..10\right)$



> #как видно на графике, получено уравнение гиперболы

>

> **№6**

> restart :
$u := x^2 - y^2 + x$:#условие

> $R := u \rightarrow \frac{d}{dx}(u) - I\cdot\frac{d}{dy}(u)$

$$R := u \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\,u - \mathrm{I}\left(\frac{\partial}{\partial y}\,u\right) \tag{6}$$

> $simplify(R(u), \{x + I\cdot y = z\})$

$$1 + 2z \tag{7}$$

> $dsolve\left(\left\{\frac{d}{dz}(f(z)) = 1 + 2z, f(0) = 0\right\}\right)$

$$f(z) = z^2 + z \tag{8}$$

> **№7**

> restart :
$\int |z|\, dz$:#условие

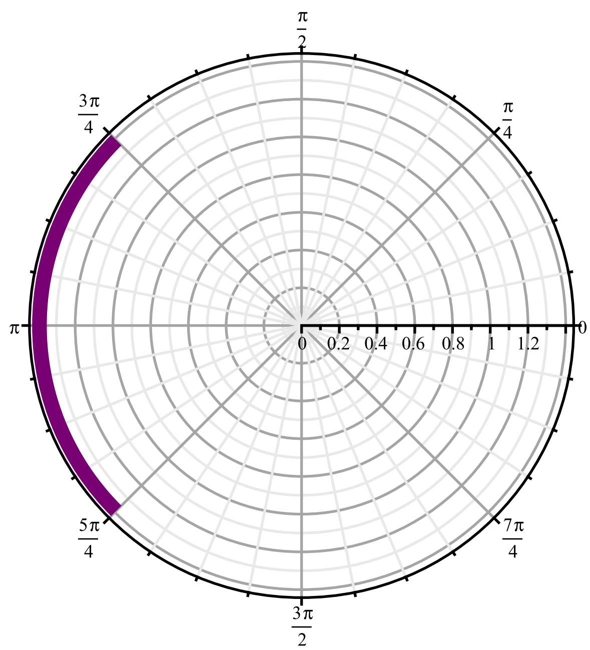
> $\frac{d}{d\,a}\left(\sqrt{2}\cdot e^{I\cdot a}\right)$

$$I\sqrt{2}\,e^{I\,a} \qquad (9)$$

> $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{2}\cdot e^{I\cdot a}\cdot\frac{d}{d\,a}\left(\sqrt{2}\cdot e^{I\cdot a}\right)\,da$

$$2\,I \qquad (10)$$

> $plots[polarplot]\left(\sqrt{2},\ \varphi = \frac{3\,\pi}{4}\,..\,\frac{5\,\pi}{4}\right)$



> **№8**

> *restart* :
with(*numapprox*) :
$\frac{z-4}{z^4+z^3-2\,z^2}$:#*условие*

> $a := convert\left(\frac{z-4}{z^4+z^3-2\,z^2},\ parfrac\right)$

$$a := \frac{1}{2\,z}+\frac{1}{2\,(z+2)}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{z-1} \qquad (11)$$

> $f := z \rightarrow a$:

> #*найдем все лорановские разложения заданной функции по степеням z*

> #0 <|*z*| < 1

> $laurent(op(1, f(z)), z=0, 5) + laurent(op(2, f(z)), z=0, 5) + laurent(op(3, f(z)), z=0, 5) + laurent(op(4, f(z)), z=0, 5)$

$$\left(\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\,z+\frac{1}{16}\,z^2-\frac{1}{32}\,z^3+\frac{1}{64}\,z^4+O\left(z^5\right)\right)+\left(2\,z^{-2}\right)+\left(1+z+z^2+z^3 \qquad (12)$$

$+ z^4 + O(z^5))$

> $\#1 < |z| < 2$
> $laurent(op(1, f(z)), z=0, 5) + laurent(op(2, f(z)), z=0, 5) + laurent(op(3, f(z)), z=0, 5) + \{asympt(op(4, f(z)), z, 5)\}$

$$\left(\frac{1}{2} z^{-1}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} z + \frac{1}{16} z^2 - \frac{1}{32} z^3 + \frac{1}{64} z^4 + O(z^5)\right) + (2 z^{-2}) + \left\{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right)\right\} \quad \textbf{(13)}$$

> $\#|z| > 2$
> $laurent(op(1, f(z)), z=0, 5) + \{asympt(op(2, f(z)), z, 5)\} + laurent(op(3, f(z)), z=0, 5) + \{asympt(op(4, f(z)), z, 5)\}$

$$\left(\frac{1}{2} z^{-1}\right) + \left\{\frac{1}{2 z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{4}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right)\right\} + (2 z^{-2}) + \left\{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right)\right\} \quad \textbf{(14)}$$

> **№9**

> $\frac{z+1}{z(z-1)}$:#условие

> $z0 := 1 + 2I:$

> $a := convert\left(\frac{z+1}{z^2 - z}, parfrac\right)$

$$a := -\frac{1}{z} + \frac{2}{z-1} \quad \textbf{(15)}$$

>

> $f := z \rightarrow a :$

> #найдем все лорановские разложения заданной функции по степеням z

> $\#0 < |z - z0| < 2$

> $laurent(op(1, f(z)), z=z0, 3) + laurent(op(2, f(z)), z=z0, 3)$

$$\left(-\frac{1}{5} + \frac{2\,\mathrm{I}}{5} + \left(-\frac{3}{25} - \frac{4\,\mathrm{I}}{25}\right)(z - 1 - 2\,\mathrm{I}) + \left(\frac{11}{125} - \frac{2\,\mathrm{I}}{125}\right)(z - 1 - 2\,\mathrm{I})^2 + O\left((z - 1 - 2\,\mathrm{I})^3\right)\right) + \left(-\mathrm{I} + \frac{1}{2}(z - 1 - 2\,\mathrm{I}) + \frac{\mathrm{I}}{4}(z - 1 - 2\,\mathrm{I})^2 + O\left((z - 1 - 2\,\mathrm{I})^3\right)\right) \quad \textbf{(16)}$$

> $\#2 < |z - z0| < \sqrt{5}$

>

> $subs(z - 1 - 2 \cdot I = z - z0, asympt(op(2, f(z)), z, 3)) + laurent(op(1, f(z)), z=z0, 3)$

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{2\,\mathrm{I}}{5} + \left(-\frac{3}{25} - \frac{4\,\mathrm{I}}{25}\right)(z - 1 - 2\,\mathrm{I}) + \left(\frac{11}{125} - \frac{2\,\mathrm{I}}{125}\right)(z \quad \textbf{(17)}$$

$- 1 - 2\,I)^2 + O\left((z-1-2\,I)^3\right)\Big)$

> #$|z - z0| > \sqrt{5}$

> $subs(z-1-2\cdot I = z - z0, asympt(op(1, f(z)), z, 3)) + subs(z-1-2\cdot I = z - z0, asympt(op(2, f(z)), z, 3))$

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \quad \textbf{(18)}$$

>

> **№10**

> *restart* :

> $z\cdot\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$:#*условие*

> $z0 := 2$:

> #*заданную функцию разложим в ряд Лорана в окрестности точки z0*

> $subs\left(asympt\left(simplify\left(z\cdot\cos\left(\frac{1}{z-2}\right), \{z-2=t\}\right), t, 7\right)\right)$

$$t + 2 - \frac{1}{2\,t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{24\,t^3} + \frac{1}{12\,t^4} - \frac{1}{720\,t^5} - \frac{1}{360\,t^6} + O\left(\frac{1}{t^7}\right) \quad \textbf{(19)}$$

>

> **№11**

> $\frac{1}{z\cdot(z^2+1)}$:#*вычислить интеграл*

> $f := z \rightarrow \frac{1}{z\cdot(z^2+1)}$

$$f := z \mapsto \frac{1}{z\cdot(z^2+1)} \quad \textbf{(20)}$$

> $points := [singular(f(z))]$

$$points := [\{z=0\}, \{z=-I\}, \{z=I\}] \quad \textbf{(21)}$$

> $n := nops(points)$:

> $F := 0$:

> **for** i **from** 1 **to** n **do**

if $evalf(evalc(|subs(\_Z1 = i, op(points[i][1])[2])|)) < \frac{1}{2}$ **then**

$F := F + residue(f(z), z = op(points[i][1])[2])$ **end if**;

end do;

> $Int\left(f(z), z = '|z| = \frac{1}{2}'..0\right) = simplify(F\cdot 2\cdot\pi\cdot I)$

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{z\,(z^2+1)}\,dz = 2\,I\,\pi \quad \textbf{(22)}$$

>

> **№12**

> $\dfrac{\cos(z^2)-1}{z^3}$:*#вычислить интеграл*

> $f := z \rightarrow \dfrac{\cos(z^2)-1}{z^3}$

$$f := z \mapsto \frac{\cos(z^2)-1}{z^3} \tag{23}$$

> *points* := [*singular*(*f*(*z*))] :
n := *nops*(*points*) :

> *F* := 0 :

> **for** *i* **from** 1 **to** *n* **do**
if *evalf*(*evalc*(|*subs*(_Z1 = *i*, *op*(*points*[*i*][1])[2])|)) < 1 **then**
F := *F* + *residue*(*f*(*z*), *z* = *op*(*points*[*i*][1])[2])**end if**;
end do;

> $Int(f(z), z='|z| = 0'..0) = simplify(F \cdot 2 \cdot \pi \cdot I)$

$$\int_{|z|=0}^{0} \frac{\cos(z^2)-1}{z^3}\,dz = 0 \tag{24}$$

>

> **№13**

> $\dfrac{3\pi \cdot z - \sin(3\pi \cdot z)}{z^2 - \sinh(\pi^2 \cdot z)^2}$:*#вычислить интеграл*

> $f := z \rightarrow \dfrac{3\pi \cdot z - \sin(3\pi \cdot z)}{z^2 - \sinh(\pi^2 \cdot z)^2}$

$$f := z \mapsto \frac{3 \cdot \pi \cdot z - \sin(3 \cdot \pi \cdot z)}{z^2 - \sinh(\pi^2 \cdot z)^2} \tag{25}$$

> *points* := [*singular*(*f*(*z*))] :
n := *nops*(*points*) :

> *F* := 0 :

> **for** *i* **from** 1 **to** *n* **do**
if *evalf*(*evalc*(|*subs*(_Z1 = *i*, *op*(*points*[*i*][1])[2])|)) < 0.2 **then**
F := *F* + *residue*(*f*(*z*), *z* = *op*(*points*[*i*][1])[2])**end if**;
end do;

> $Int(f(z), z='|z| = 0.2'..0) = simplify(F \cdot 2 \cdot \pi \cdot I)$

$$\int_{|z|=0.2}^{0} \frac{3\pi z - \sin(3\pi z)}{z^2 - \sinh(\pi^2 z)^2}\,dz = 0 \tag{26}$$

>

№14

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}\sin(t)}$$:#вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sqrt{3}\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$2\,\pi \qquad (27)$$

$$f := z \to \frac{2}{4\,z \cdot I + \sqrt{3} \cdot z^2 - \sqrt{3}}$$

$$f := z \mapsto \frac{2}{4 \cdot \mathrm{I} \cdot z + \sqrt{3} \cdot z^2 - \sqrt{3}} \qquad (28)$$

$points := [singular(f(z))]$;
$n := nops(points)$:

$$points := \left[\left\{z = -\mathrm{I}\sqrt{3}\right\}, \left\{z = -\frac{\mathrm{I}}{3}\sqrt{3}\right\}\right] \qquad (29)$$

№15

$z^2 - 2\,z + 3$:#условие

#постороим квадрат по найденым функциям

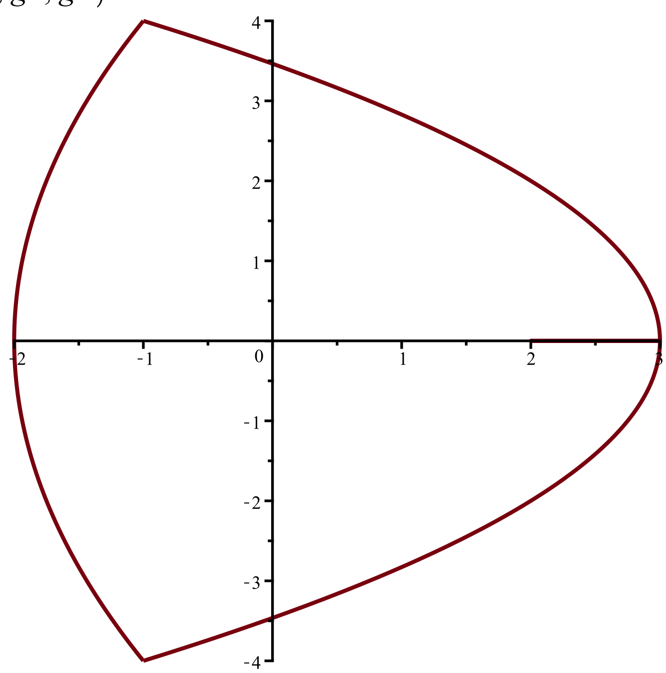
$g1 := plot([-t^2 + 3, -2\,t, t = 0\,..2])$:

$g2 := plot([t^2 - 2\,t + 3, 0, t = 0\,..2])$:

$g3 := plot([t^2 - 2\,t - 1, 4\,t - 4, t = 0\,..2])$:

$g4 := plot([3 - t^2, 2\,t, t = 0\,..2])$:

$plots[display](g1, g2, g3, g4)$



Лабораторная работа №9

Тема Элементы комплексного анализа

Цель научиться решать простейшие задачи теории функций комплексного переменного и контролир. полученные результаты с помощью Maple

Задание 1. Найдите все значения корня „вручную". С помощью системы Maple проконтр. полученные результаты и постройте точки в комплексной плоскости

$\sqrt[4]{-1}$

Решение

Корень 4-й степени из компл. числа имеет 4 различ. значения и нах. по формуле

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right)$$

$k=0 \ldots n-1$

$|z|=1$

$\varphi=\pi$

$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$w_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$w_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задание 2. Представьте выражение в алгебр. форме. Изобразите точки соотв. аргументу и значению ф-ции в одной системе коорд.

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$

Решение $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)}}{2i} =$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-2} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{2}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{e^{2}+e^{-2}}{2} + i\,\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch} 2 + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} 2$$

Задание 3. Представьте выражение в алгебраич. форме и получите его главное значение в Maple

$$\operatorname{arctg}\frac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i}$$

Решение

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\operatorname{Arctg}\frac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i} = -\frac{i}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1+i+i+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1+i-i-\sqrt{3}+1} = -\frac{i}{2}\ln(\sqrt{3}+i) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(\ln|\sqrt{3}+i| + i\arg(\sqrt{3}+i) + 2\pi i k\right) =$$

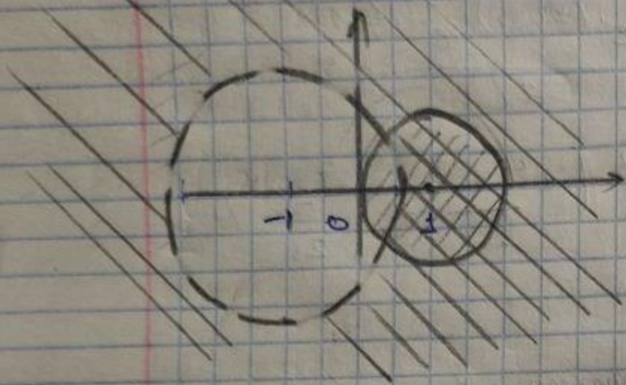
$$= -\frac{i}{2}\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{6} + 2\pi i k\right) = -\frac{i}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{12}$$

Задание 4. Изобразите области заданные неравенствами

1) $|z-1| \le 1 \quad |z+1| > 2$

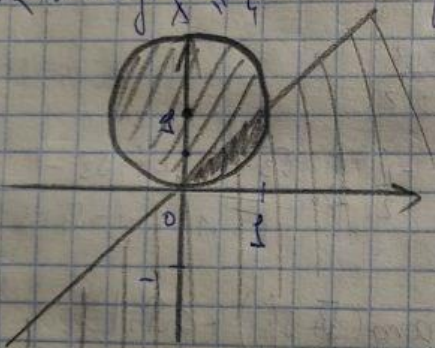
Решение:

$$\begin{cases} |x+iy-1| \le 1 \\ |x+iy+1| > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \le 1 \\ (x+1)^2+y^2 > 2 \end{cases}$$



2) $|z-i| \leq 1 \quad 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} |x+iy-i| \leq 1 \\ 0 \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leq 1 \\ 0 \leq \frac{y}{x} \leq 1 \end{cases}$$



Задание 5. Определите вид кривой. Сделайте чертеж в Maple

$z = 3\sec t + 2i \operatorname{tg} t$

Решение

$$\begin{cases} x = 5\sec t \\ y = 2\operatorname{tg} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \arccos \frac{5}{x} \\ t = \operatorname{arctg} \frac{y}{2} \end{cases}$$

$\arccos \frac{5}{x} = \operatorname{arctg} \frac{y}{2} \qquad \frac{5}{x} = \cos(\operatorname{arctg} \frac{y}{2})$

$\frac{5}{x} = \frac{2}{\sqrt{y^2+4}}$

$\frac{25}{x^2} = \frac{4}{y^2+4}$

$\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{4} + 1$ $\quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ – уравнение гиперболы

Задание 6 Восстановите аналитическую в окрестности точки z_0 ф-цию $f(z)$ по известной действительной (u) или мнимой (v) части и значению $f(z_0)$

$u = x^2 - y^2 + x \quad f(0) = 0$

Решение

$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - y^2 + x)'_x = 2x - \cancel{y^2} + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

По 1 условию Коши - Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2x+1$

Отсюда $v(x,y) = \int (2x+1)\,dy + \varphi(x) =$

$= 2xy + y + \varphi(x) \qquad v'_x = 2y + \varphi'(x)$

По 2 усл. Коши - Римана $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$2y + \varphi'(x) = 2y$

$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$

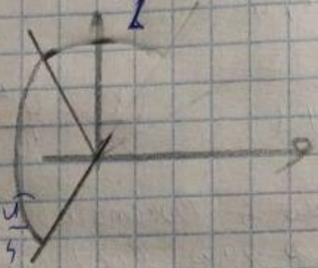
$v(x,y) = 2xy + y + C$

$f(z) = x^2 + y^2 + x + i(2xy + y + C) = z^2 + z + iC$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ имеем $f(z) = z^2 + z$

Задание 7. Вычислите интеграл от ф-ции комплексного переменного по заданному мн-ву L. Получите ответ в Maple. Сделайте чертеж

$$\int_L |z|\,dz \qquad L: \left\{ |z|=\sqrt{2} \quad \frac{3\pi}{4} \le \arg z \le \frac{5\pi}{4} \right\}$$



Решение

$$z=|z|e^{i\varphi}=\sqrt{2}e^{i\varphi}$$

$$\arg z=\varphi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$$

$$dz=\sqrt{2}\,i\,e^{i\varphi}d\varphi$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,i\,(e^{i\varphi})^2 d\varphi = 2i\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} e^{2i\varphi}d\varphi = e^{2i\varphi}\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= e^{\frac{5\pi}{2}i} - e^{\frac{3\pi}{2}i} = \underbrace{\cos\frac{5\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{5\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0} - i\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} =$$

$$=2i$$

Ответ: $2i$

Задание 8. Найдите все лорановские разложения заданной ф-ции по степеням z. Сравните с Maple

$$\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$$

Решение

$$\frac{z-4}{z^2(z+2)(z-1)} = \frac{1}{2(z+2)} - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z}$$

Функция имеет 3 особые точки 0; 1; -2

Имеет 3 области, в которых ф-ция аналитична

$0<|z|<1$, $1<|z|<2$, $|z|>2$

Найдем лорановские разлож. ф-ции в каждой из данных областей

1) $0<|z|<1$ D_1

$$f = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z}$$

Воспольз. $(1-b)^{-1} = 1+b+\dots+b^n$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} + 2z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-1}$$ – в круге $|z|<1$

2) кольцо $1<|z|<2$ D_2

Запишем ф-цию в след виде

$$\cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{1-z} \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} \qquad \frac{z}{2}<1$$

Тогда

$$f(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{4}\sum \frac{(-1)^n z^n}{2^n} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z}$$

3) $|z|>2$ D_3

$\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2}$ $\left|\frac{2}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^n}$$

Задание 9. Найти все лорановские разложения функции по степеням $z - z_0$. Сравните с Maple

$$\frac{z+1}{z(z-1)} \quad z_0 = 1+2i$$

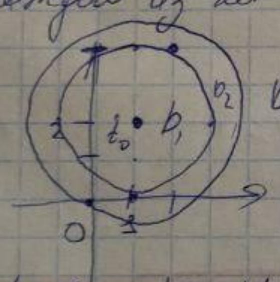
Решение: Представим дробь в виде суммы простейших

$$\frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z-1}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

Ф-ция имеет 2 особые точки 0 и 1

Имеем 3 круг. кольца с центром в точке $z_0 = 1+2i$ в каждом из которых ф-ция аналитична



1) круг $|z-(1+2i)| < 2$ D_1
2) кольцо $2 < |z-(1+2i)| < \sqrt{5}$ D_2
3) кольцо $|z-(1+2i)| > \sqrt{5}$ D_3

Найдем все лорановские разложения в каждой из областей

1) D_1:

$$-\frac{1}{z} + \frac{2}{z-1} = -\frac{1}{z-(1+2i)+(1+2i)} + \frac{2}{z+(1+2i)-(1+2i)-1} =$$

$$= -\frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-(1+2i)}{1+2i}} + \frac{2}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-(1+2i)}{2i}}$$

В D_1 $\left|\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right|<1$ и $\left|\frac{z-(1+2i)}{2i}\right|<1$

Поэтому

$$f(z) = -\frac{1}{1+2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right)^n + \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-(1+2i)}{2i}\right)^n$$

2) D_2

$$-\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1} = -\frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-(1+2i)}{1+2i}} + \frac{2}{z-(1+2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z-(1+2i)}}$$

в $D_2<1$ в $D_2<1$

Тогда $f(z) = -\frac{1}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-(1+2i)}{1+2i}\right)^n + \frac{2}{z-(1+2i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z-(1+2i)}\right)^n$

3) D_3

$$-\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1} = -\frac{1}{z-(1+2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{1+2i}{z-(1+2i)}} + \frac{2}{z-(1+2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z-(1+2i)}}$$

в $D_3<1$ в $D_3<1$

Поэтому $f(z) = -\frac{1}{z-(1+2i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+2i}{z-(1+2i)}\right)^n +$

$$+\frac{2}{z-(1+2i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z-(1+2i)}\right)^n$$

Задание 10. Заданную ф-цию разложите в ряд Лорана в окрестности точки z_0. Сравните с результатом Maple

$z\cdot\cos\frac{1}{z-2}$ $z_0=2$

Решение

$$f(z) = (z-2+2)\cos\frac{1}{z-2} = (z-2+2)\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4!(z-2)^4}+\ \ldots\ +\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}+\ldots\right) =$$

$$= (z-2) - \frac{1}{2!(z-2)} + \frac{1}{4!(z-2)^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n-1}} +$$

$$+ 2 - \frac{2}{2!(z-2)^2} + \frac{2}{4!(z-2)^4} + \ldots + \frac{2\cdot(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}} \ldots$$

Задание 11. Вычислите интеграл. Сравните с результатом в мере

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

Решение

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)} = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z-i)(z+i)}$$

Нашему кругу принадлежит точке 0

Воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$\oint\limits_{L} \frac{f_1(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f_1(a)$$

$$f_1 = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z^2+1} = 1$$

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i$$

Ответ: $2\pi i$

Задание 12. Вычислите интеграл. Сравните с результатом Maple

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$$

Решение

$z=0$ особая точка внутри круга $|z|<1$

z - полюс 3 пор-ка; тогда вычет:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(z^3 \cdot \frac{\cos z^2 - 1}{z^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z\to 0} (\cos z^2 - 1)'' = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} (-2\cancel{\cos} z \cdot \sin z^2)' =$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} (-2\sin z^2 - 4z^2 \cos z^2) = 0$$

Значит $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz = 2\pi i \operatorname{res} f(z) = 0$

Ответ: 0

Задание 13. Вычислите интеграл. Сравните с результатом Maple

$$\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} dz$$

Решение $\sin 3\pi z = 3\pi z - \frac{(3\pi z)^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(3\pi z)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

$$\operatorname{sh}^2 \pi^2 z = \left(\pi^2 z + \frac{\pi^6 z^3}{3!} + \ldots + \frac{(\pi^2 z)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right)^2$$

подставив это в исходную ф-цию получим

$$\lim_{z\to 0} \frac{3\pi z - 3\pi z + \frac{(3\pi z)^3}{3!} \dots}{z^2 - \pi^4 z^2 + \dots} = 0 \Rightarrow \text{вычет } \operatorname{res} f(z) = 0$$

$$\oint_{|z|=0,2} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Ответ: 0

Задание 14. Вычислите интеграл. Сравните с результатом Maple

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$$

Решение. Пусть $z = e^{it}$

$$dz = ie^{it}\,dt$$

$$dt = \frac{dz}{ie^{it}} = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

$\cancel{co}$ $\qquad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{ie^{it}}}{2+\sqrt{3}\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2ie^{it} + \frac{(\sqrt{3}z - \sqrt{3}z^{-1})\cdot z}{2}} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{4iz + \sqrt{3}z^2 - \sqrt{3}} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{3}(z+\sqrt{3}i)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)}$$

Особая точка $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$ лежит внутри круга $|z|=1$

Найдем вычет:

$$\operatorname{res} f(z) = \lim_{z \to -\frac{\sqrt{3}}{3} i} \left(z + \frac{\sqrt{3}}{3} i\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\,(z+\sqrt{3}i)(z+\frac{\sqrt{3}}{3}i)} =$$

$$= \frac{1}{2i}$$

Тогда интеграл: $2 \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{3}\,(z+\sqrt{3}i)(z+\frac{\sqrt{3}}{3}i)} = 2\pi i \operatorname{res} f(z) = \underline{2\pi}$

Значит: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t} = \underline{2\pi}$

Задание 15. Постройте образ квадрата, прилегающего к координатным осям компл. плоскости, с вершиной в точке $A(2,2)$ при заданном отображении. Сделайте чертеж в MathCAD

$$z \to z^2 - 2z + 3$$

Решение

$$z \to (x+iy)^2 - 2(x+iy) + 3 = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x - 2iy + 3 =$$

$$= (x^2 - y^2 - 2x + 3) + i(2xy - 2y)$$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 - 2x + 3 \\ v = 2xy - 2y \end{cases}$$

1) $x = 0 \quad 0 \le y \le 2$

$$\begin{cases} u = -y^2 - 3 \\ v = -2y \end{cases}$$

2) $y = 0 \quad 0 \le x \le 2$

$$\begin{cases} u = x^2 - 2x - 3 \\ v = 0 \end{cases}$$

3) $y=2 \quad 0 \le x \le 2$

$$\begin{cases} u = x^2 - 2x - 1 \\ v = 4x - 4 \end{cases}$$

4) $x = 2 \quad 0 \le y \le 2$

$$\begin{cases} u = 3 - y^2 \\ v = 2y \end{cases}$$