Лабораторная работа 4. Ряды Фурье.
Выполнила Криштафович Карина Дмитриевна, гр. 053501
Вариант 1

№1

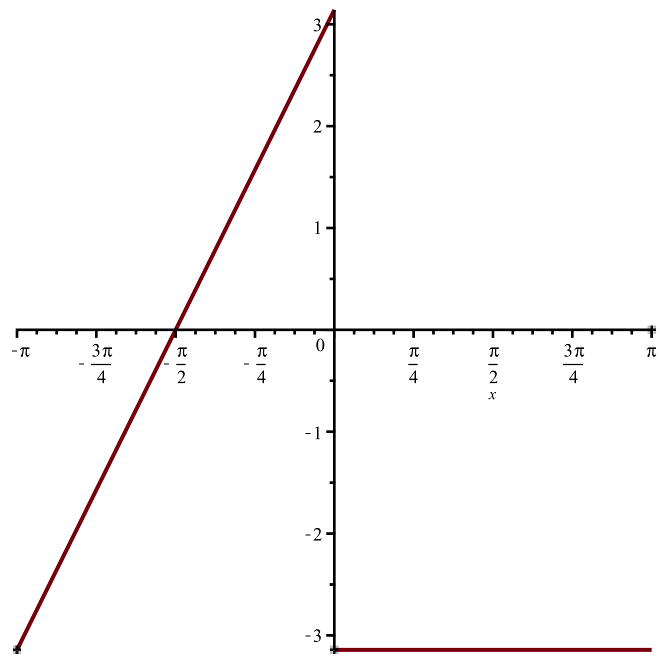
> *restart*;
> $g := piecewise(-\pi \le x < 0, \pi + 2x, 0 \le x < \pi, -\pi)$;
> *#исходная кусочно непрерывная функция*

$$g := \begin{cases} \pi + 2x & -\pi \le x < 0 \\ -\pi & 0 \le x < \pi \end{cases} \quad (1)$$

> $f := unapply(g, x)$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \pi + 2 \cdot x & -\pi \le x < 0 \\ -\pi & 0 \le x < \pi \end{cases} \quad (2)$$

> *#построим график исходной функции на ее глаавном периоде*
> $plot(f(x), x = -\pi..\pi, discont = true)$



> *#найдем коэффициенты Фурье вручную*
> $a0 := simplify\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\right)$;

$$a0 := -\pi \quad (3)$$

> $an := simplify\left(\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx\right)$ assuming $n :: posint$

$$an := \frac{-2(-1)^n + 2}{\pi n^2} \quad (4)$$

> $bn := simplify\left(\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\,\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$bn := -\frac{2}{n} \tag{5}$$

> *#напишем процедуру для нахождения суммы*
$FurieCoefficient2Pi :=$ **proc**(g, k) **local** $a0, an, bn, S$;

$a0 := simplify\left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g\,\mathrm{d}x\right)$;

$an := simplify\left(\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g\cdot\cos(n\cdot x)\,\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$;

$bn := simplify\left(\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g\ \ \sin(n\cdot x)\,\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$;

$S := m \rightarrow \dfrac{a0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{m} (an\cdot\cos(n\cdot x) + bn\cdot\sin(n\cdot x))$;

return $S(k)$
end proc

$FurieCoefficient2Pi :=$ **proc**(g, k) (6)
local $a0, an, bn, S$;
$a0 := simplify(int(g, x = -\pi..\pi)/\pi)$;
$an := simplify(int(g * \cos(n * x), x = -\pi..\pi)/\pi)$ assuming $n::posint$;
$bn := simplify(int(g * \sin(n * x), x = -\pi..\pi)/\pi)$ assuming $n::posint$;
$S := m \rightarrow 1/2 * a0 + sum(an * \cos(n * x) + bn * \sin(n * x), n = 1..m)$;
return $S(k)$
end proc

> *#вид ряда Фурье*
$Summ := FurieCoefficient2Pi(g, \text{infinity})$

$$Summ := -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-2(-1)^n + 2)\cos(n x)}{\pi n^2} - \frac{2\sin(n x)}{n}\right) \tag{7}$$

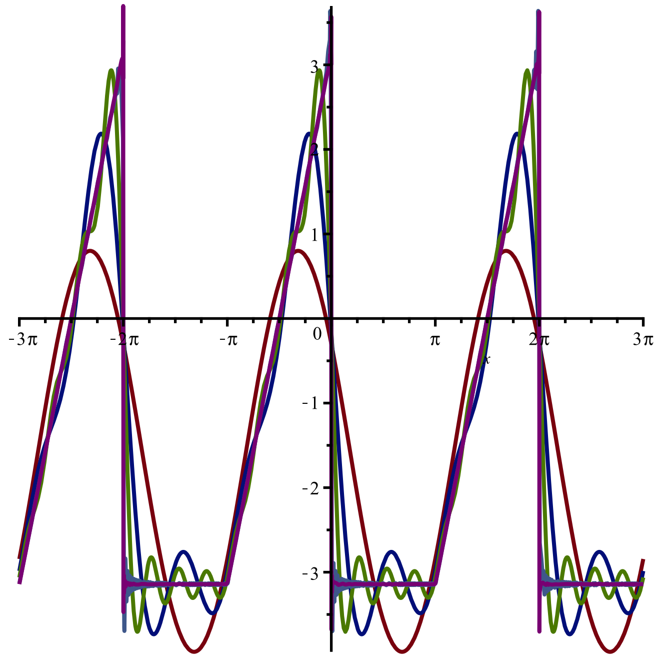
> *#зададим частичную сумму как функциональный оператор*

$S := m \rightarrow \dfrac{a0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{m} (an\cdot\cos(n\cdot x) + bn\cdot\sin(n\cdot x))$;

$$S := m \mapsto \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (an\cdot\cos(n\cdot x) + bn\cdot\sin(n\cdot x)) \tag{8}$$

> #построим графики частичных сумм на промежутке $[-3\pi, 3\pi]$

$plot([S(1), S(3), S(7), S(100), S(1000)], x = -3\pi..3\pi, discont = true)$



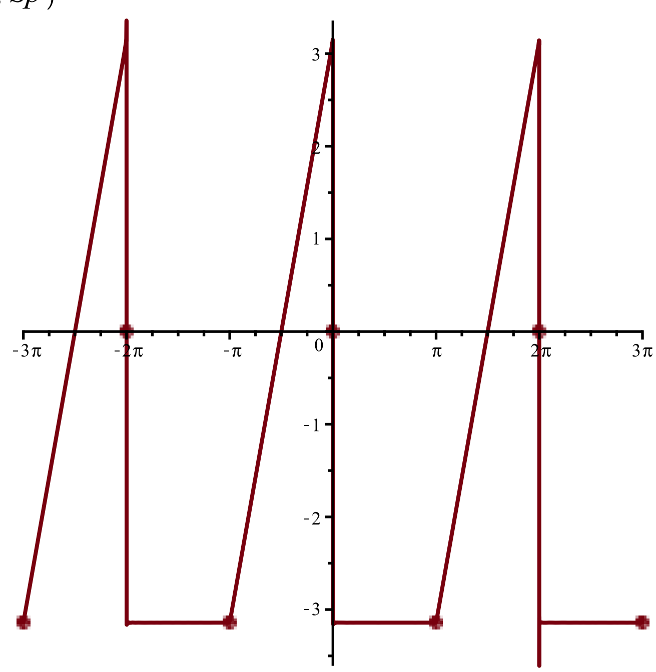
> #зададим значение суммы ряда Фурье в точках разрыва для последующего вывода на графике

$points := plot([[-3\pi, -\pi], [-2\pi, 0], [-\pi, -\pi], [0, 0], [\pi, -\pi], [2\pi, 0], [3\pi, -\pi]], style = point,):$

> #график суммы ряда в точках непрерывности

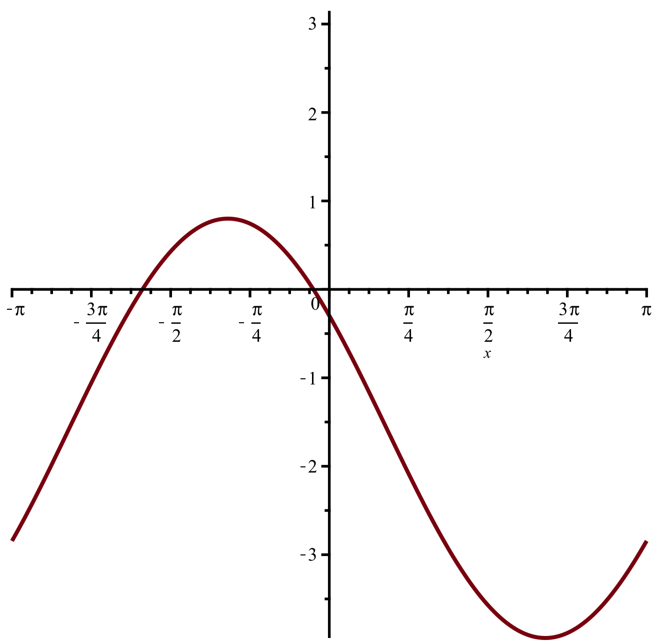
$Sp := plot(S(10000), x = -3\pi..3\pi, discont = true):$

> $plots[display](points, Sp)$



> #добавим анимацию

$plots[animate](plot, [FurieCoefficient2Pi(g, k), x = -\pi..\pi], k = [seq(i, i = 1 .. 10)])$



> **№2**

> #restart

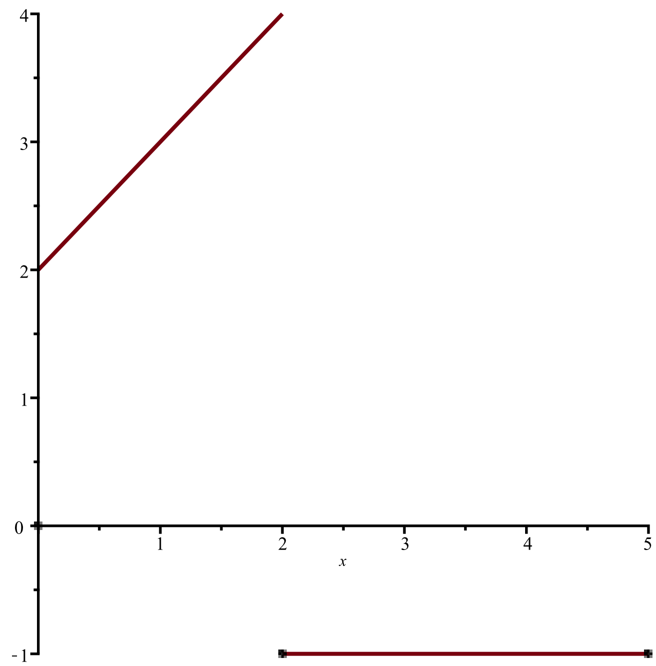
> $g := piecewise(0 < x < 2, x + 2, 2 \le x \le 5, -1)$;
#исходная кусочно непрерывная функция

$$g := \begin{cases} x+2 & 0 < x < 2 \\ -1 & 2 \le x \le 5 \end{cases} \tag{9}$$

> $f := unapply(g, x)$

$$f := x \mapsto \begin{cases} x+2 & 0 < x < 2 \\ -1 & 2 \le x \le 5 \end{cases} \tag{10}$$

> #построим график исходной функции на ее глаавном периоде
$plot(f(x), x = 0..5, discont = true)$



> $l := \frac{5}{2}$: *#полупериод функции*

> *#найдем коэффициенты Фурье вручную*

$a0 := simplify\left(\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\,\mathrm{d}x\right);$

$$a0 := \frac{6}{5} \quad \textbf{(11)}$$

> $an := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_0^{2l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$an := \frac{5\left(2\,\pi\,n\,\sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right)-1\right)}{2\,n^2\,\pi^2} \quad \textbf{(12)}$$

> $bn := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_0^{2l} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$bn := \frac{-10\,\pi\,n\cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right)+6\,\pi\,n+5\sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right)}{2\,n^2\,\pi^2} \quad \textbf{(13)}$$

> *#исправим процедуру для нахождения суммы*

FurieCoefficient2l :=**proc**$(g, k, x1, x2)$ **local** $a0, an, bn, S, l;$

$l := \frac{x2 - x1}{2};$

$$a0 := simplify\left(\frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\,\mathrm{d}x\right);$$

$$an := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_{0}^{2l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right) \text{ assuming } n :: posint;$$

$$bn := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_{0}^{2l} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right) \text{ assuming } n :: posint;$$

$$S := m \rightarrow \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(an\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\right);$$

return $S(k)$
end proc

```
FurieCoefficient2l := proc(g, k, x1, x2)                                    (14)
    local a0, an, bn, S, l;
    l := 1/2*x2 - 1/2*x1;
    a0 := simplify(int(f(x), x = 0..2*l)/l);
    an := simplify(int(f(x)*cos(π*n*x/l), x = 0..2*l)/l) assuming n::posint;
    bn := simplify(int(f(x)*sin(π*n*x/l), x = 0..2*l)/l) assuming n::posint;
    S := m→1/2*a0 + sum(an*cos(π*n*x/l) + bn*sin(π*n*x/l), n = 1..m);
    return S(k)
end proc
```

>

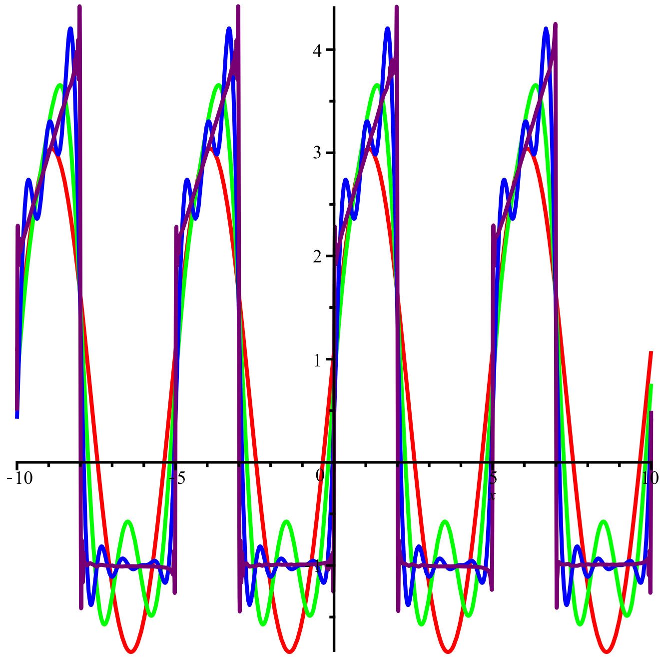
> *#вид ряда Фурье*
Summ := *FurieCoefficient2l*(*g*, infinity, 0, 5)

$$Summ := \frac{3}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5\left(2\,\pi\,n\sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right) - 1\right)\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{5}\right)}{2\,n^{2}\,\pi^{2}} + \frac{\left(-10\,\pi\,n\cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right) + 6\,\pi\,n + 5\sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{5}\right)\right)\sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{5}\right)}{2\,n^{2}\,\pi^{2}}\right) \tag{15}$$

> *#зададим частичную сумму как функциональный оператор*

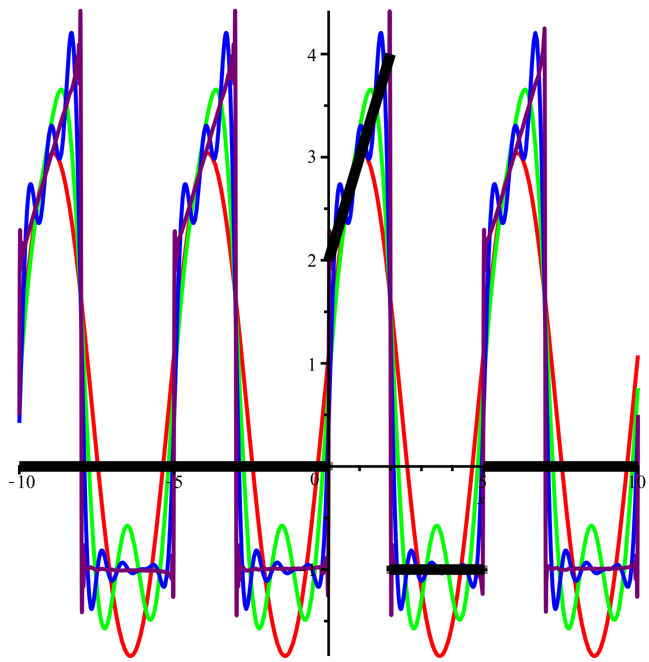
$$S := m \rightarrow \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(an\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\right):$$

> *#построим графики частичных сумм на промежутке* [-10, 10]
Splot := *plot*([*S*(1), *S*(3), *S*(7), *S*(100)], *x* = -10..10, *discont* = *true*, *color* = [*red*, *green*, *blue*, *purple*])



> $Funcplot := plot(f(x), x = -10..10, discont = true, color = black, thickness = 4)$:

> $with(plots)$: $display(Splot, Funcplot)$#сравним с нашей функцией



>

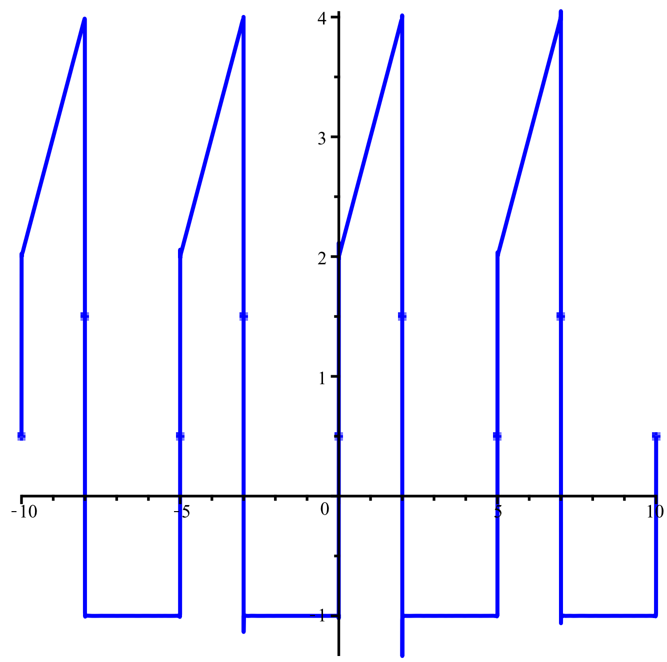
> #зададим значение суммы ряда Фурье в точках разрыва для последующего вывода на графике

$points := plot([[-10, 0.5], [-8, 1.5], [-5, 0.5], [0, 0.5], [2, 1.5], [5, 0.5], [10, 0.5], [7, 1.5], [-3, 1.5]], style = point, color = blue)$:

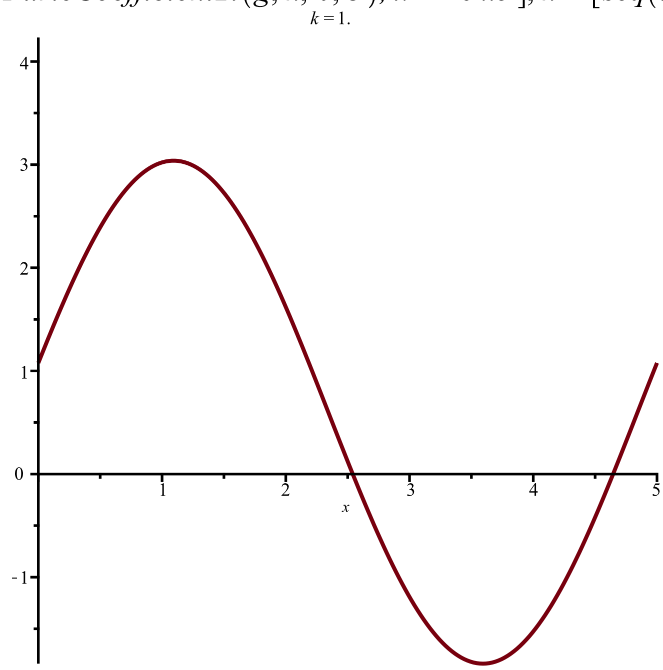
> #график суммы ряда в точках непрерывности

$Sp := plot(S(10000), x = -10..10, discont = true, color = blue)$:

> $plots[display](points, Sp)$



> *#добавим анимацию*
> *plots[animate](plot, [FurieCoefficient2l(g, k, 0, 5), x = -0..5], k = [seq(i, i = 1 .. 10)])*



>

№3

>

> *#restart*

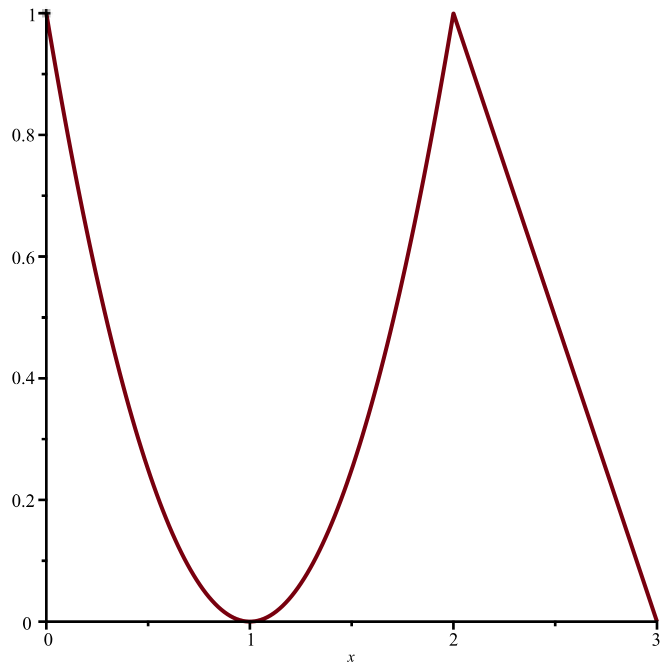
> $g := piecewise(0 \le x \le 2,\ (x-1)^2,\ 2 < x < 3,\ 3 - x)$;
> *#исходная кусочно непрерывная функция*

$$g := \begin{cases} (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \end{cases} \tag{16}$$

> $f := unapply(g, x)$

$$f := x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 < x < 3 \end{cases} \tag{17}$$

> #построим график исходной функции на ее глаавном периоде
> $plot(f(x), x = 0..3, discont = true)$



> #на полном периоде

> $l := \frac{3}{2}$: #полупериод функции

> #найдем коэффициенты Фурье вручную
> $a0 := simplify\left(\frac{1}{l}\int_0^{2\,l} f(x)\,\mathrm{d}x\right);$

$$a0 := \frac{7}{9} \tag{18}$$

> $an := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_0^{2\,l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$an := \frac{9\,\pi\,n\cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right) + 3\,\pi\,n - 9\sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right)}{2\,n^3\,\pi^3} \tag{19}$$

> $bn := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_0^{2\,l} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$bn := \frac{2\,\pi^2\,n^2 + 9\,\pi\,n\sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right) + 9\cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right) - 9}{2\,n^3\,\pi^3} \tag{20}$$

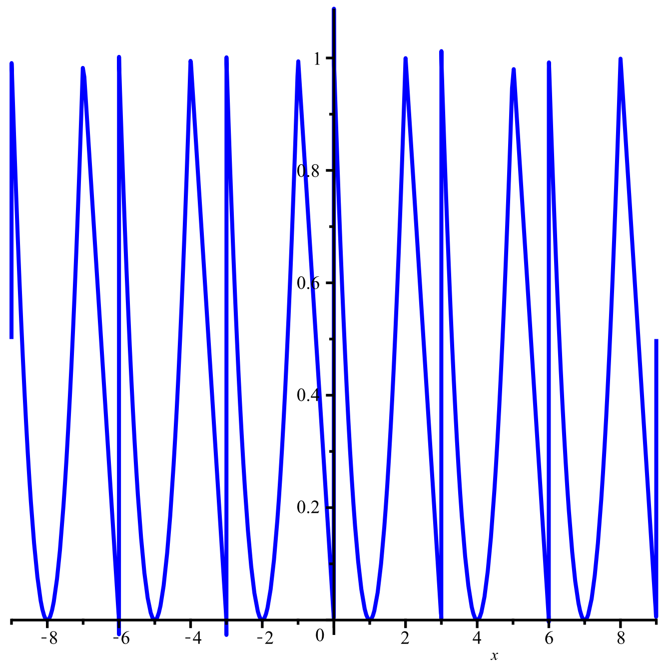
>

> #зададим частичную сумму как функциональный оператор

$S := m \rightarrow \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(an \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} \right) + bn \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} \right) \right):$

> #график суммы ряда в точках непрерывности

$Sp := plot(S(10000), x = -9..9, discont = true, color = blue);$



>

> restart

> #на полупериоде (четная)

> $g := piecewise(-2 \le x \le 0, (-x-1)^2, -3 < x < -2, 3 + x, 0 \le x \le 2, (x-1)^2, 2 < x < 3, 3 - x)$; #исходная кусочно непрерывная функция

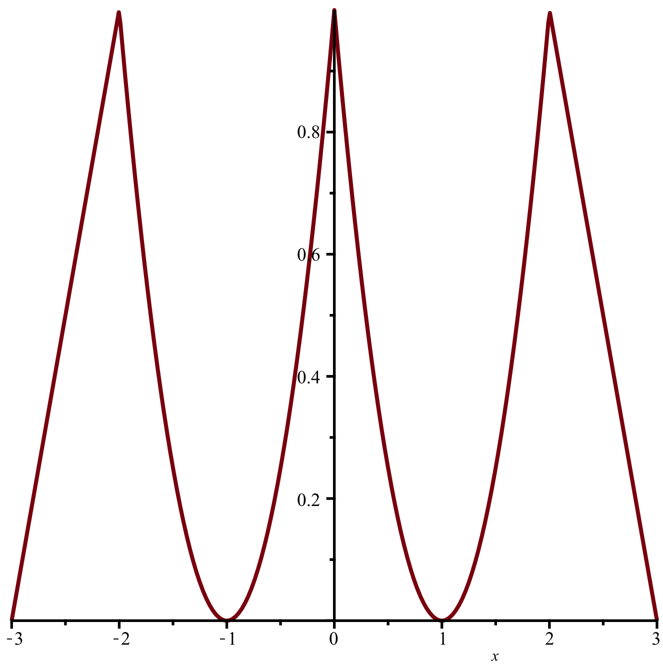
$$g := \begin{cases} (-x-1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ x+3 & -3 < x < -2 \\ (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 < x < 3 \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

> $f := unapply(g, x)$

$$f := x \mapsto \begin{cases} (-x-1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ 3+x & -3 < x < -2 \\ (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 < x < 3 \end{cases} \qquad \textbf{(22)}$$

> #построим график исходной функции на ее глаавном периоде

$plot(f(x), x = -3..3, discont = true)$



> $l := 3$: *#полупериод функции*
#найдем коэффициенты Фурье вручную
$a0 := simplify\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x\right);$

$$a0 := \frac{7}{9} \qquad \textbf{(23)}$$

> $an := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$an := \frac{18\,\pi\,n\cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{3}\right) - 6\,\pi\,(-1)^n\,n + 12\,\pi\,n - 36\sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{3}\right)}{n^3\,\pi^3} \qquad \textbf{(24)}$$

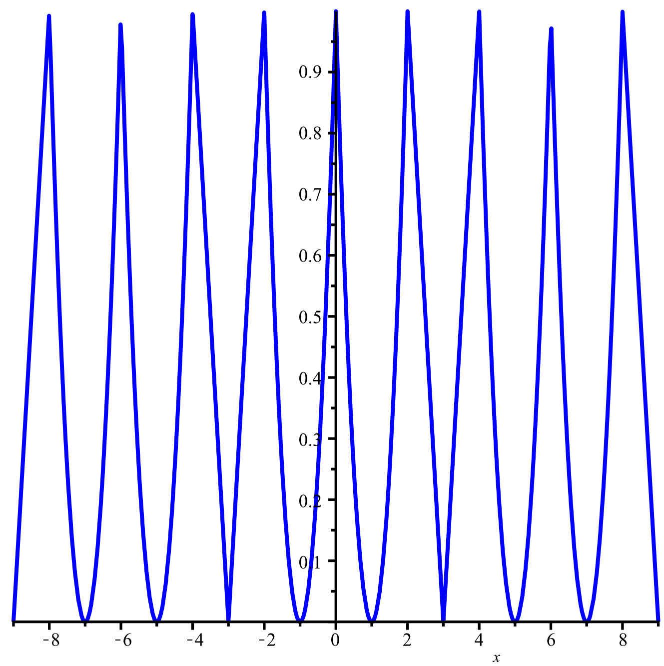
> $bn := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$bn := 0 \qquad \textbf{(25)}$$

>

> *#зададим частичную сумму как функциональный оператор*
$S := m \rightarrow \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(an\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\right)$:

> *#график суммы ряда в точках непрерывности*
$Sp := plot(S(10000), x = -9..9, discont = true, color = blue);$



>

> *restart*

> *#на полупериоде (нечетная)*

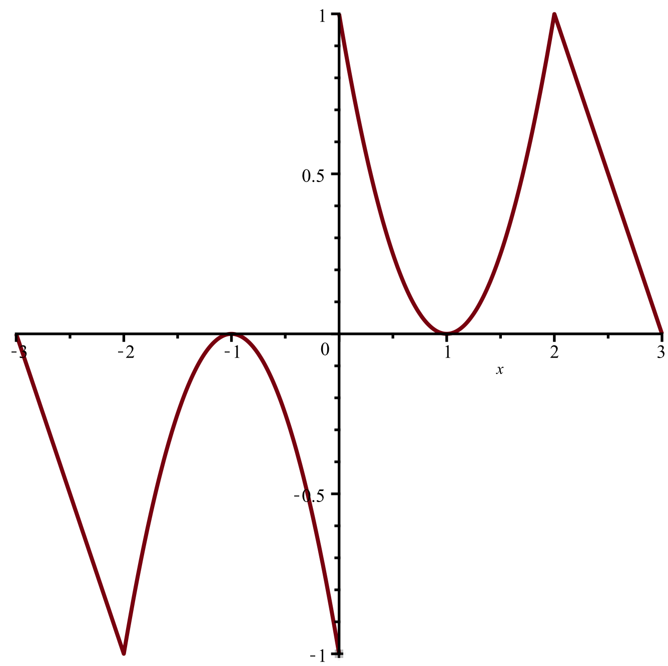
> $g := piecewise(-2 \le x \le 0, -(x+1)^2, -3 < x < -2, -3 - x, 0 \le x \le 2, (x-1)^2, 2 < x < 3, 3 - x)$; *#исходная кусочно непрерывная функция*

$$g := \begin{cases} -(x+1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ -3 - x & -3 < x < -2 \\ (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \end{cases} \tag{26}$$

> $f := unapply(g, x)$

$$f := x \mapsto \begin{cases} -(x+1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ -3 - x & -3 < x < -2 \\ (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \end{cases} \tag{27}$$

> *#построим график исходной функции на ее глаавном периоде*
plot(f(x), x = -3 ..3, discont = true)



> $l := 3$: #полупериод функции
#найдем коэффициенты Фурье вручную
$a0 := simplify\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x\right);$

$$a0 := 0 \tag{28}$$

> $an := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$an := 0 \tag{29}$$

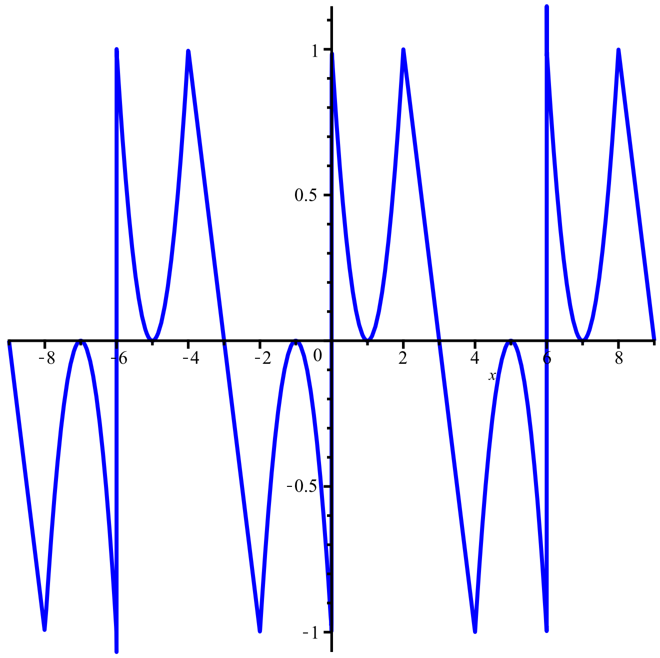
> $bn := simplify\left(\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right)$ assuming $n :: posint$

$$bn := \frac{2\,n^2\,\pi^2 + 18\,\pi\,n\sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{3}\right) + 36\cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{3}\right) - 36}{n^3\,\pi^3} \tag{30}$$

>

> #зададим частичную сумму как функциональный оператор
$S := m \rightarrow \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(an\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{l}\right)\right)$:

> #график суммы ряда в точках непрерывности
$Sp := plot(S(10000), x = -9..9, discont = true, color = blue);$



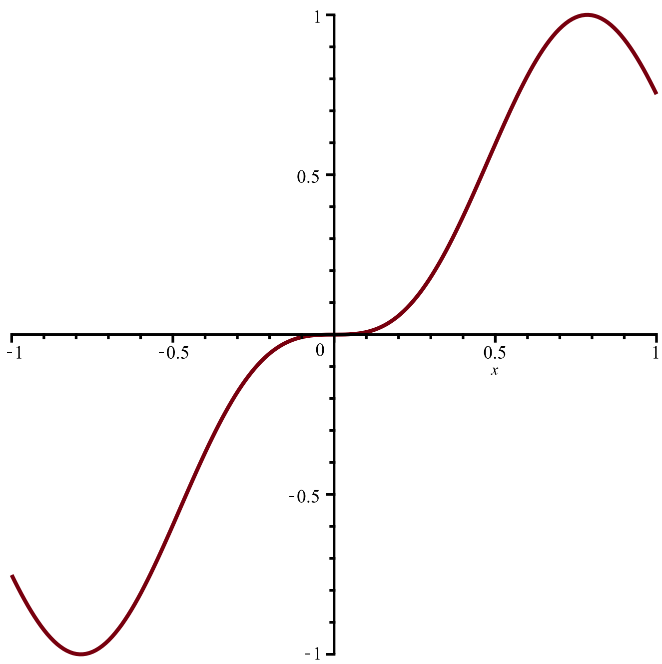
>

№4

> *restart*

> $f := \sin^3(2\,x)$: *#исходная функция*

> $S := plot(f, x = -1\,..1)$



> $with(orthopoly)$

$$[G, H, L, P, T, U] \tag{31}$$

> **for** n **from** 0 **to** 7 **do** $c[n] := \dfrac{\int_{-1}^{1} f \cdot P(n, x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} P(n, x)^2 \mathrm{d}x}$; **end do**

#значение коэффициентов по полиному Лежандра

$$c_0 := 0$$

$$c_1 := -\frac{\sin(2)^2\cos(2)}{2} - \cos(2) + \frac{\sin(2)^3}{12} + \frac{\sin(2)}{2}$$

$$c_2 := 0$$

$$c_3 := -\frac{49\sin(2)^2\cos(2)}{72} + \frac{133\cos(2)}{18} + \frac{77\sin(2)}{36} + \frac{469\sin(2)^3}{432}$$

$$c_4 := 0$$

$$c_5 := -\frac{6215\sin(2)}{96} - \frac{6721\cos(2)}{48} + \frac{209\sin(2)^2\cos(2)}{96} + \frac{715\sin(2)^3}{576}$$

$$c_6 := 0$$

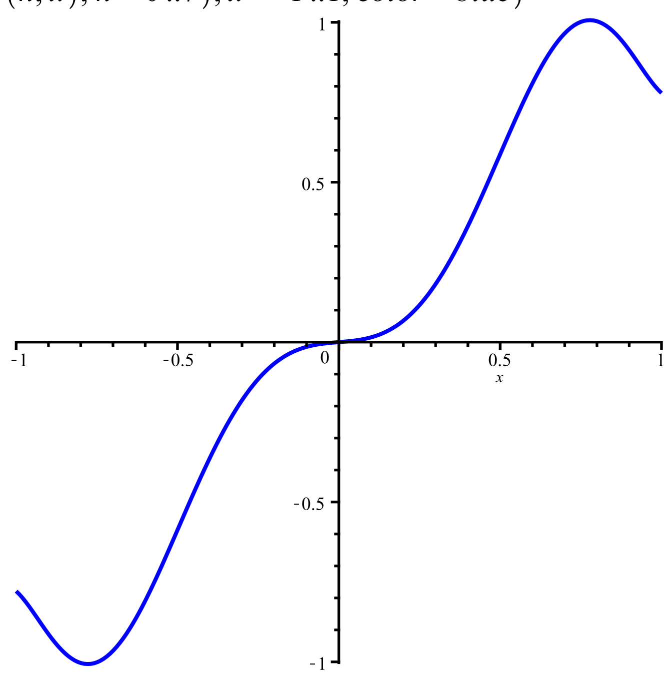
$$c_7 := \frac{2499805\sin(2)}{864} + \frac{681785\cos(2)}{108} - \frac{8395\sin(2)^2\cos(2)}{3456} - \frac{123305\sin(2)^3}{20736} \quad \textbf{(32)}$$

>

(33)

> *#найдем частичную сумму и построим ее график*

> $n := plot(add(c[n]\cdot P(n,x), n=0..7), x=-1..1, color=blue)$

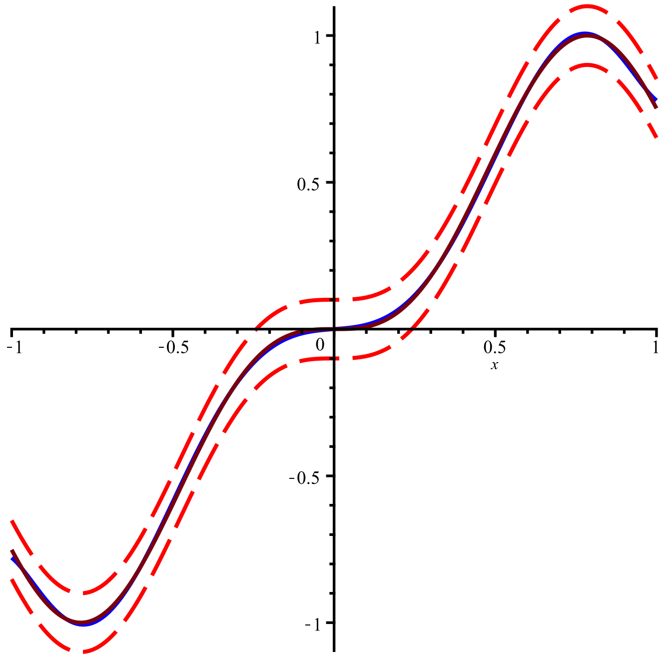


>

> $f1 := plot(f+0.1, x=-1..1, linestyle=dash, color=red)$:

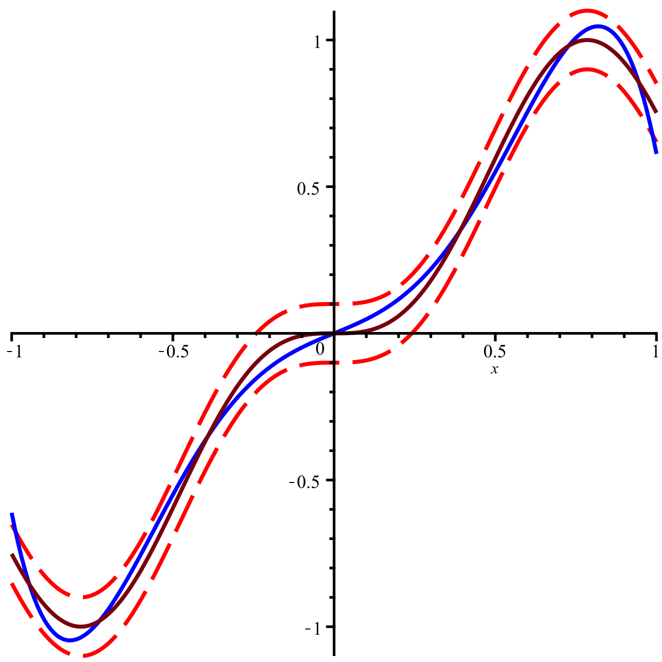
> $f2 := plot(f-0.1, x=-1..1, linestyle=dash, color=red)$:

> $plots[display](f1, f2, n, S)$



> $nmin := plot(add(c[n]\cdot P(n, x), n = 0..6), x = -1..1, color = blue)$:

> $plots[display](f1, f2, nmin, S)$ *#нахождение минимального порядка с точностью n=0.1*



> *#при n=6 функция отклоняется больше, чем на 0.1*

> *#полиномы Чебышева*

> **for** n **from** 0 **to** 7 **do** $c[n] := \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f\cdot T(n, x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; **end do**

#значение коэффициентов по полиному Чебышева

$$c_0 := 0$$

$$c_1 := \frac{2\left(\int_{-1}^{1} \frac{\sin(2\,x)^3\,x}{\sqrt{-x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right)}{\pi}$$

$$c_2 := 0$$

$$c_3 := \frac{2\left(\int_{-1}^{1} \frac{\sin(2\,x)^3\,(4\,x^3-3\,x)}{\sqrt{-x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right)}{\pi}$$

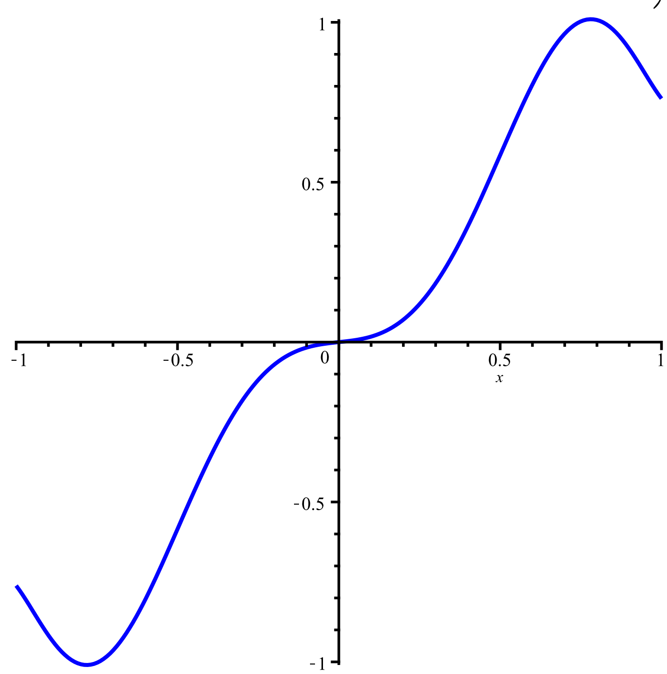
$$c_4 := 0$$

$$c_5 := \frac{2\left(\int_{-1}^{1} \frac{\sin(2\,x)^3\,(16\,x^5-20\,x^3+5\,x)}{\sqrt{-x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right)}{\pi}$$

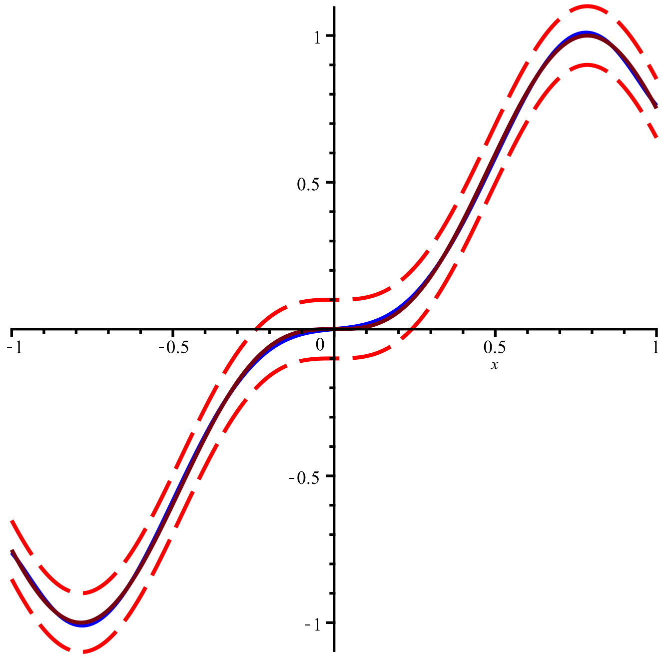
$$c_6 := 0$$

$$c_7 := \frac{2\left(\int_{-1}^{1} \frac{\sin(2\,x)^3\,(64\,x^7-112\,x^5+56\,x^3-7\,x)}{\sqrt{-x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right)}{\pi} \qquad \mathbf{(34)}$$

> $n := plot\left(\frac{c[0]}{2} + add(c[n]\cdot T(n,x),\, n=1\,..7),\, x=-1\,..1,\, color=blue\right)$

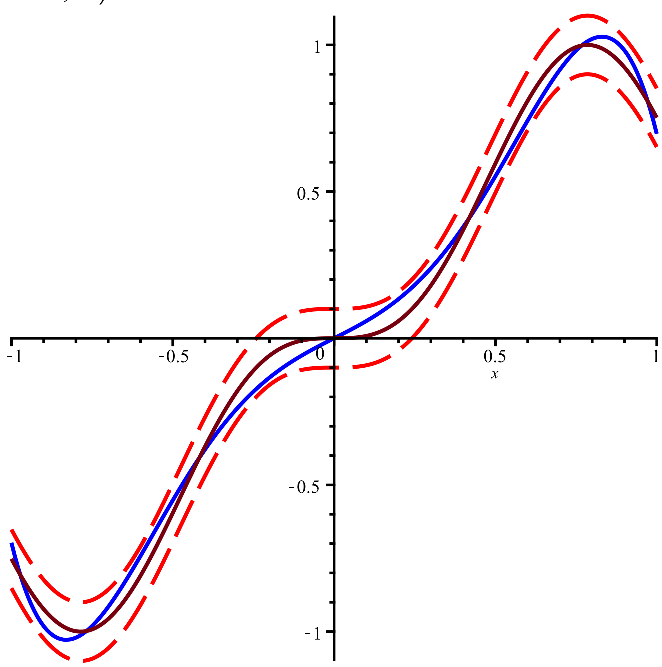


> $plots[display](f1, f2, n, S)$ #нахождение минимального порядка с точностью n=0.1



> $nmin := plot\left(\frac{c[0]}{2} + add(c[n]\cdot T(n,x), n=1..5), x=-1..1, color=blue\right):$

> $plots[display](f1, f2, nmin, S)$



> *#при n <5 функция отклоняется больше, чем на 0.1*

> *#разложим функцию в тригонометрический ряд при помощи коэффициентов Фурье*
> *# так как функция нечетная достаточно найти только bn*

>

> $bn := simplify\left(\int_{-1}^{1} \sin^3(2x) \cdot \sin(\pi \cdot n \cdot x)\,dx\right)$ assuming $n :: posint$

(25)

$$bn := -\frac{3\,\pi\,(-1)^n\,n\left(\sin(2)\,\pi^2\,n^2 - \frac{\sin(6)\,\pi^2\,n^2}{3} - 36\sin(2) + \frac{4\sin(6)}{3}\right)}{2\,\pi^4\,n^4 - 80\,\pi^2\,n^2 + 288} \qquad \textbf{(35)}$$

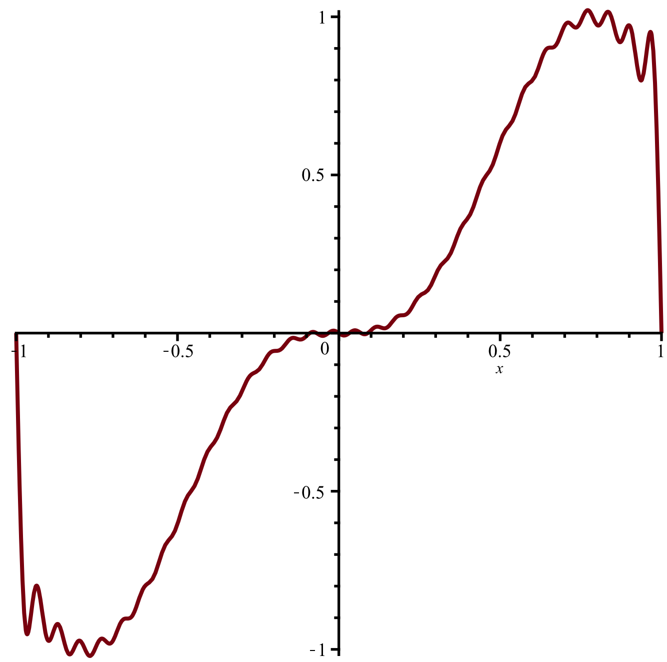
> *#зададим сумму функцию через функциональный оператор*

> $Sm := m \rightarrow \sum_{n=1}^{m} (bn \cdot \sin(\pi \cdot n \cdot x))$

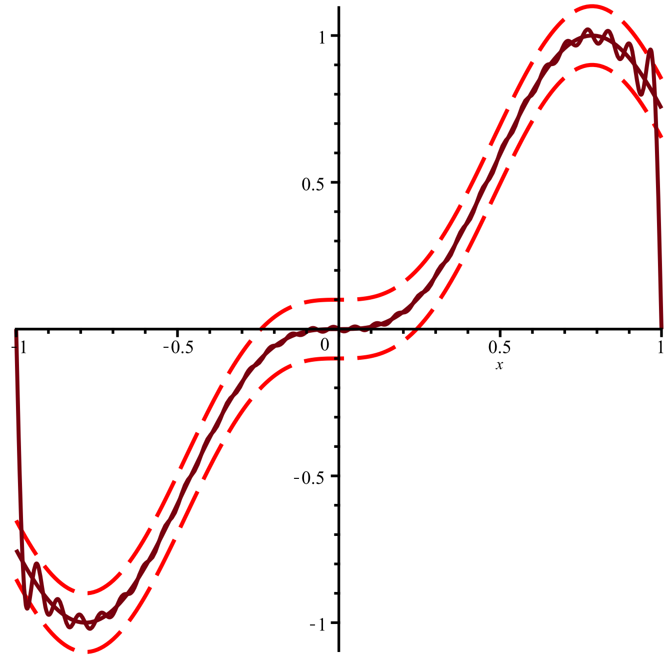
$$Sm := m \mapsto \sum_{n=1}^{m} bn \cdot \sin(\pi \cdot n \cdot x) \qquad \textbf{(36)}$$

> *#построим график частичной суммы*

> $Strig := plot(Sm(30), x = -1\,..1, discont = true)$



> $plots[display](f1, f2, Strig, S)$



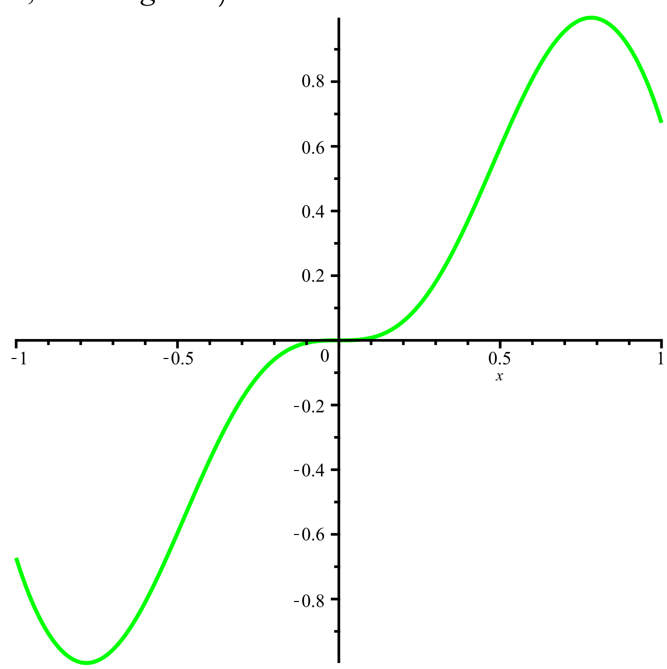
> #при n=30 функция отклоняется больше, чем на 0.1

>

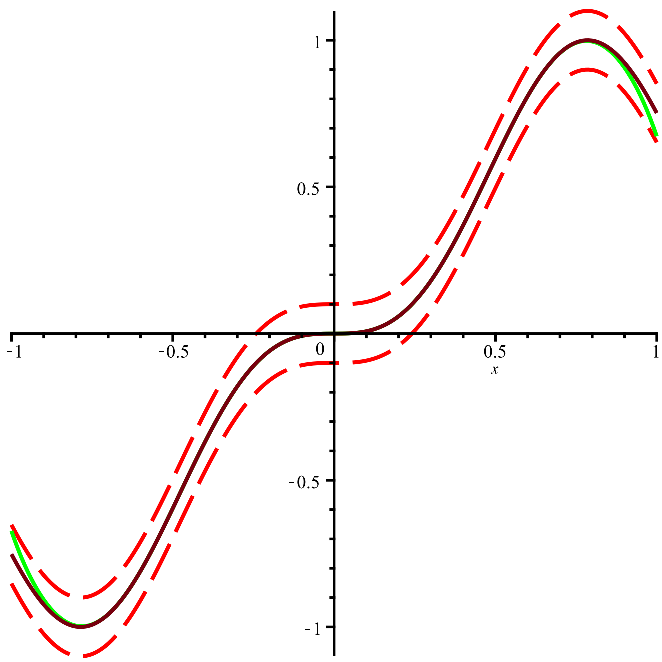
> #получим и построим на графике разложение Тейлора

> $St := taylor(f, x = 0, 14)$:

> $StF := plot(St, x = -1 ..1, color = green)$



> $plots[display](f1, f2, StF, S)$



> *#при n <14 функция отклоняется больше, чем на 0.1*

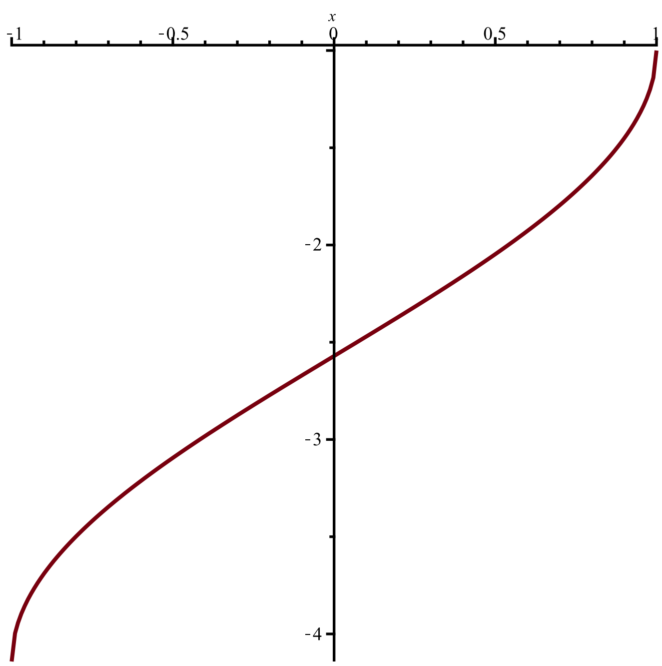
#по результатам работы видно, что полиномы Лежандра и Чебышева дают более точное приближение, чем степенные и тригонометрические ряды

> *restart*

>

> $f := -\arccos(x) - 1$: *#исходная функция*

> $S := plot(f, x = -1..1)$



> $with(orthopoly)$

$$[G, H, L, P, T, U] \quad \textbf{(37)}$$

> **for** n **from** 0 **to** 7 **do** $c[n] := \dfrac{\int_{-1}^{1} f \cdot P(n, x)\, dx}{\int_{-1}^{1} P(n, x)^2 dx}$; **end do**

#значение коэффициентов по полиному Лежандра

$$c_0 := -1 - \frac{\pi}{2}$$

$$c_1 := \frac{3\,\pi}{8}$$

$$c_2 := 0$$

$$c_3 := \frac{7\,\pi}{128}$$

$$c_4 := 0$$

$$c_5 := \frac{11\,\pi}{512}$$

$$c_6 := 0$$

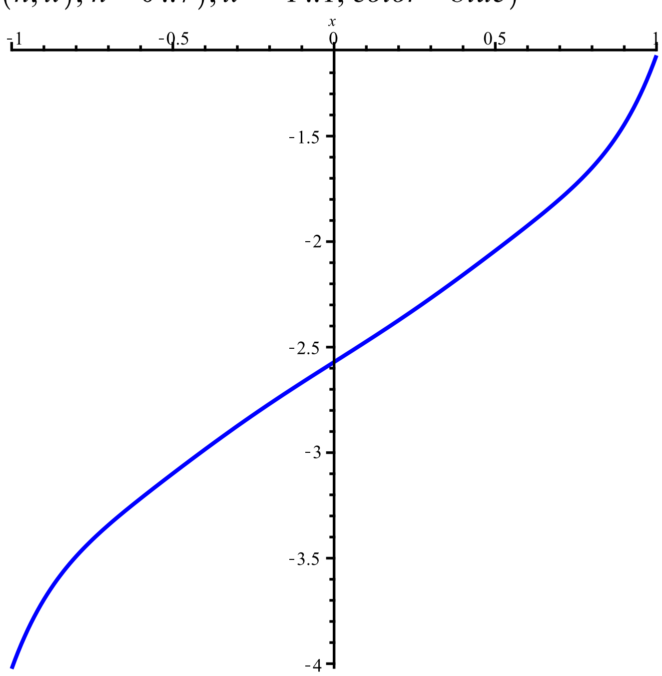
$$c_7 := \frac{375\,\pi}{32768} \qquad \textbf{(38)}$$

>

(39)

> *#найдем частичную сумму и построим ее график*

> $n := plot(add(c[n] \cdot P(n, x), n = 0..7), x = -1..1, color = blue)$

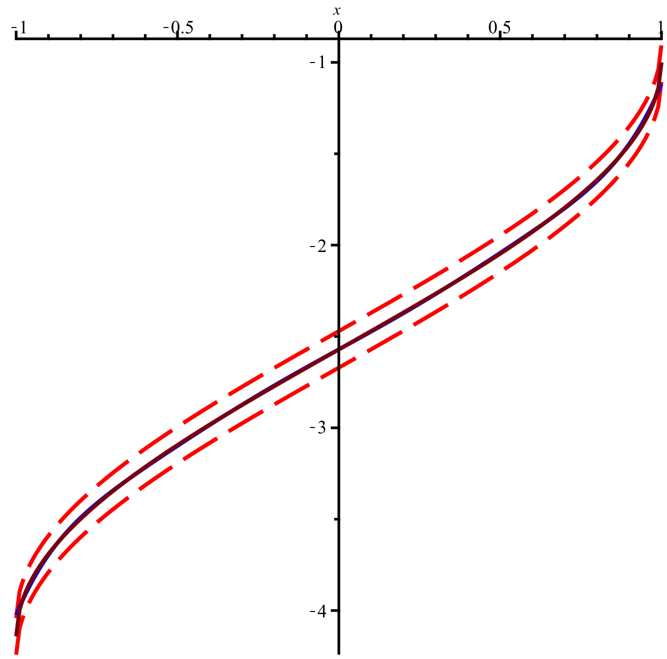


>

> $f1 := plot(f + 0.1, x = -1..1, linestyle = dash, color = red)$:

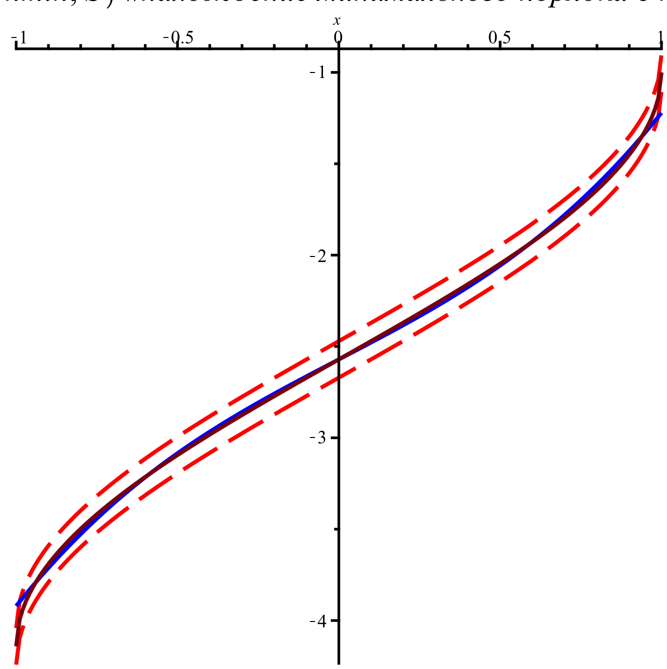
> $f2 := plot(f - 0.1, x = -1..1, linestyle = dash, color = red)$:

> $plots[display](f1, f2, n, S)$



> $nmin := plot(add(c[n] \cdot P(n, x), n = 0..4), x = -1..1, color = blue)$:

> $plots[display](f1, f2, nmin, S)$ *#нахождение минимального порядка с точностью n=0.1*



> *#при n=4 функция отклоняется больше, чем на 0.1*

> *#полиномы Чебышева*

> **for** n **from** 0 **to** 7 **do** $c[n] := \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f \cdot T(n, x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; **end do**

#значение коэффициентов по полиному Чебышева

$$c_0 := \frac{2\left(-\frac{1}{2}\pi^2 - \pi\right)}{\pi}$$

$$c_1 := \frac{4}{\pi}$$

$$c_2 := 0$$

$$c_3 := \frac{4}{9\pi}$$

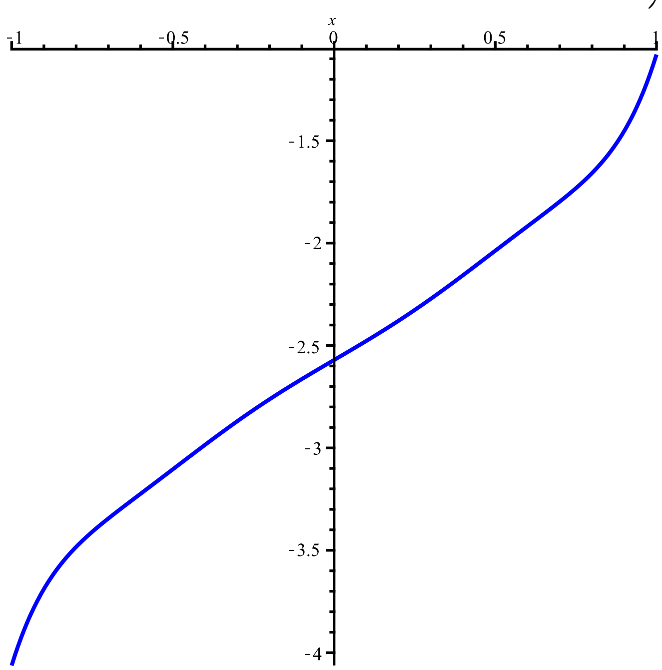
$$c_4 := 0$$

$$c_5 := \frac{4}{25\pi}$$

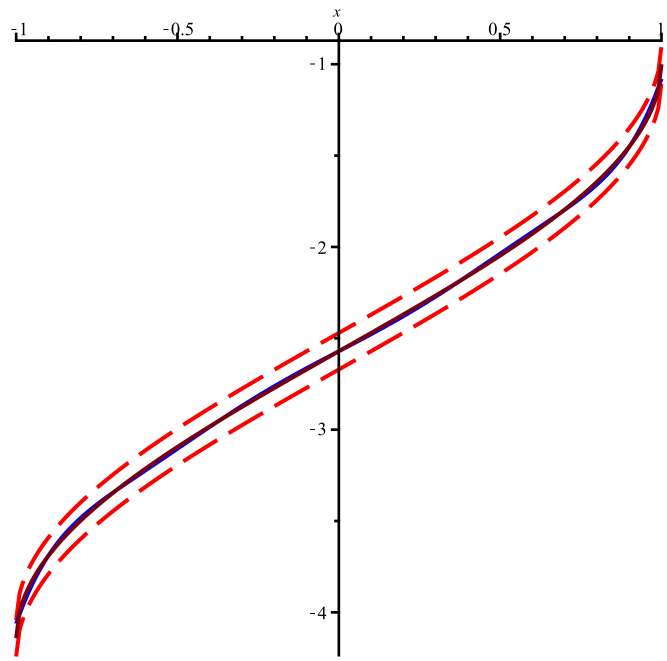
$$c_6 := 0$$

$$c_7 := \frac{4}{49\pi} \qquad \textbf{(40)}$$

> $n := plot\left(\frac{c[0]}{2} + add(c[n]\cdot T(n,x), n=1..7), x=-1..1, color=blue\right)$

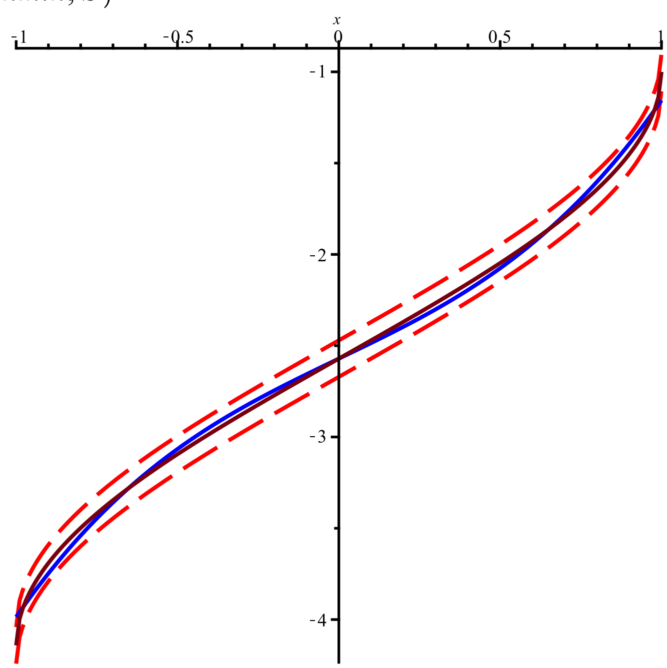


> $plots[display](f1, f2, n, S)$ *#нахождение минимального порядка с точностью n=0.1*



> $nmin := plot\left(\frac{c[0]}{2} + add(c[n] \cdot T(n, x), n = 1..3), x = -1..1, color = blue\right):$

> $plots[display](f1, f2, nmin, S)$



> *#при n <4 функция отклоняется больше, чем на 0.1*

> *#разложим функцию в тригонометрический ряд при помощи коэффициентов Фурье*

>

#найдем коэффициенты Фурье вручную

$a0 := simplify\left(\int_{-1}^{1} (-\arccos(x) - 1)\,dx\right);$

$$a0 := -2 - \pi \tag{41}$$

> $an := simplify\left(\int_{-1}^{1} (-\arccos(x) - 1)\cdot\cos(\pi\cdot n\cdot x)\,dx\right)$ assuming $n :: posint$

$$an := 0 \quad (42)$$

>

>

> $bn := simplify\left(\int_{-1}^{1} (-\arccos(x) - 1)\cdot\sin(\pi\cdot n\cdot x)\,dx\right)$ assuming $n :: posint$

$$bn := -\left(\int_{-1}^{1} (\arccos(x) + 1)\,\sin(\pi\,n\,x)\,dx\right) \quad (43)$$

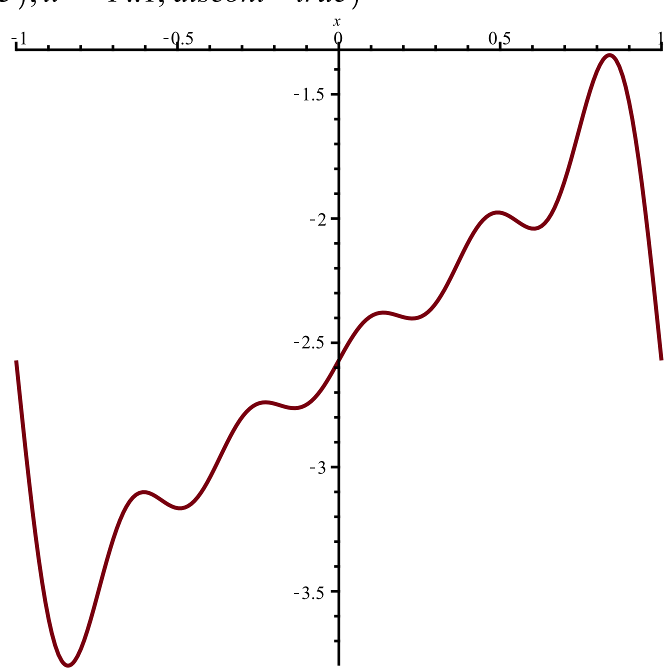
> *#зададим сумму функцию через функциональный оператор*

> $Smnew := m \to \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(simplify\left(\int_{-1}^{1} (-\arccos(x) - 1)\cdot\sin(\pi\cdot n\cdot x)\,dx\right)\cdot\sin(\pi\cdot n\cdot x)\right)$ assuming $n :: posint$

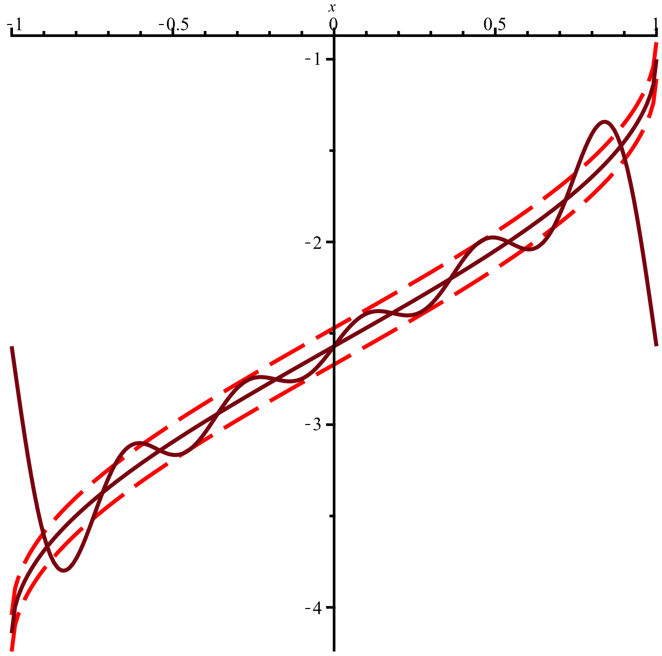
$$Smnew := m \mapsto \frac{a0}{2} + \left(\sum_{n=1}^{m} simplify\left(\int_{-1}^{1} (-\arccos(x) - 1)\cdot\sin(\pi\cdot n\cdot x)\,dx\right)\cdot\sin(\pi\cdot n\cdot x)\right) \quad (44)$$

> *#построим график частичной суммы*

> $Strig := plot(Smnew(5), x = -1..1, discont = true)$



> $plots[display](f1, f2, Strig, S)$



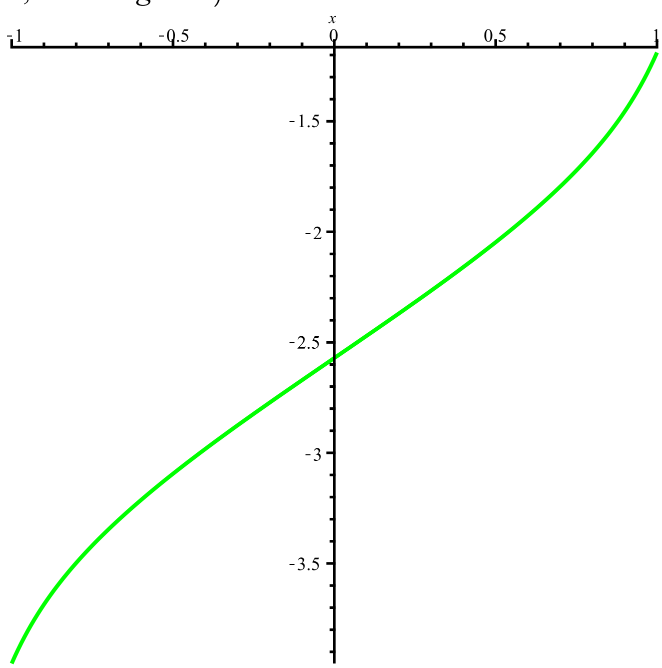
> #функция отклоняется больше, чем на 0.1

>

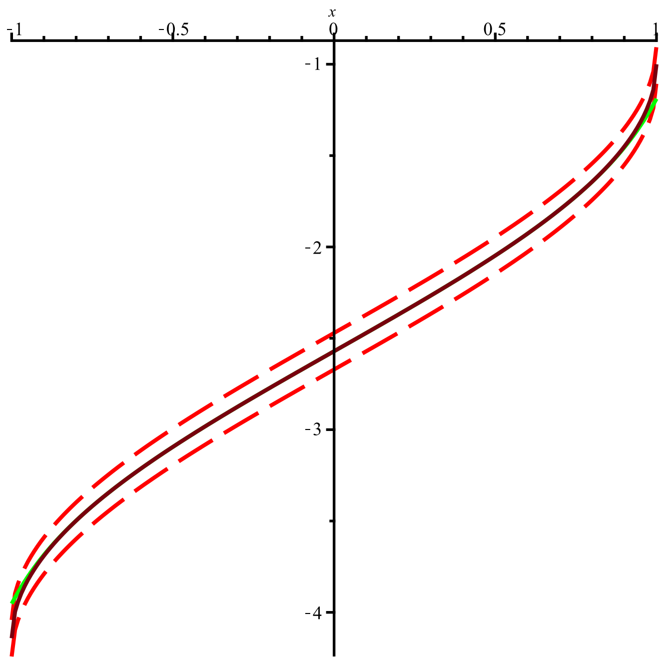
> #получим и построим на графике разложение Тейлора

> $St := taylor(f, x = 0, 19)$:

> $StF := plot(St, x = -1\,..1, color = green)$



> $plots[display](f1, f2, StF, S)$



> #при $n < 19$ функция отклоняется больше, чем на 0.1

#по результатам работы видно, что полиномы Лежандра и Чебышева дают более точное приближение, чем степенные и тригонометрические ряды

>

>