Лабораторная работа 3. Функциональные ряды. Степенные ряды.
Выполнила Криштафович Карина Дмитриевна, гр. 053501
Вариант 1

№1

$$> \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\cdot\frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}\right)\text{#исходный ряд}$$

> *#найдем область абсолютной сходимости*

$$> f := limit\left(\sqrt[n]{\frac{2n}{n+1}\cdot\frac{1}{|3x^2+4x+2|^n}}, n=\text{infinity}\right)\ \text{#радикальный признак Коши}$$

$$f := \frac{1}{|3x^2+4x+2|} \qquad (1)$$

$$> solve(f<1)\text{#область абсолютной сходимости}$$

$$(-\infty, -1), \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \qquad (2)$$

$$> solve(f>1)\text{#область расходимости}$$

$$\left(-1, -\frac{1}{3}\right) \qquad (3)$$

> *#проверка в граничных точках*

$$> \text{'}limit\left(\frac{2n}{n+1}, n=\text{infinity}\right)\text{'}=limit\left(\frac{2n}{n+1}, n=\text{infinity}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2 \qquad (4)$$

> *#необходимый признак сходимости не выполняется*

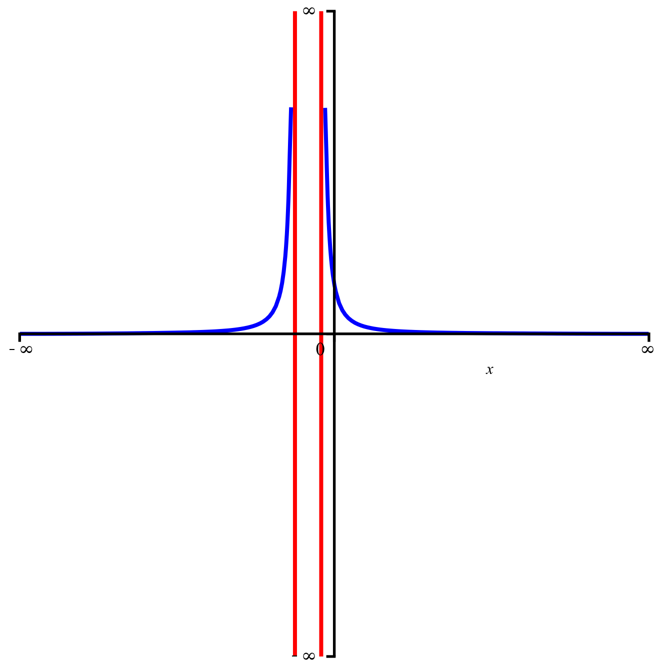
> *#построим график суммы ряда*

$$> S := limit\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{1}{(3x^2+4x+2)^k}\right), n=\text{infinity}\right):$$

$$> assimp1 := [-1, y, y=-\text{infinity}..\text{infinity}]:\text{#вертикальные ассимтоты}$$

$$> assimp2 := \left[-\frac{1}{3}, y, y=-\text{infinity}..\text{infinity}\right]:$$

$$> plot([S, assimp1, assimp2], x=-\text{infinity}..\text{infinity}, color=[blue, red, red]);$$



> #restart

> **№2**

> $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cdot x^n}{7\,n - 11} \right)$ #исходный ряд

> #найдем n минимальное остаток меньше ε=0.01

> $solve\left(\left\{ \frac{1}{7\,n - 4} < 0.01,\, n \geq 1 \right\} \right)$

$$\{14.85714286 < n\} \tag{5}$$

> $n0 := \text{floor}(14.85714286) + 1$

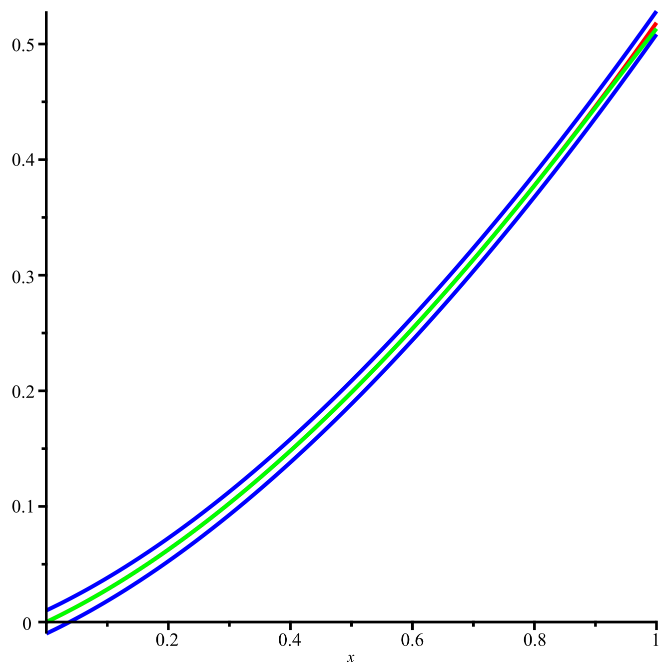
$$n0 := 15 \tag{6}$$

> #убедимся на графике, что найденная частичная сумма удовлетворяет условию задачи

> $f := x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cdot x^n}{7\,n - 11} \right)$

$$f := x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{7 \cdot n - 11} \tag{7}$$

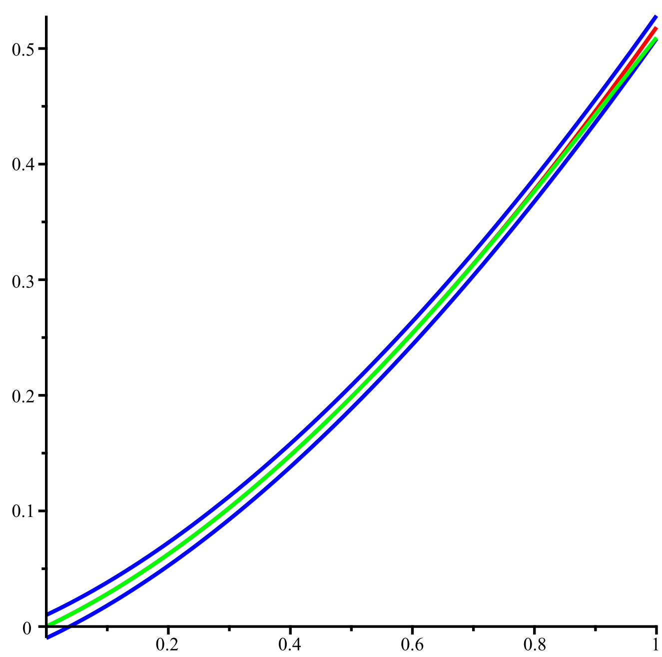
> $plot\left(\left[f(x), f(x) - 0.01, f(x) + 0.01, \sum_{n=1}^{n0} \left(\frac{(-1)^n \cdot x^n}{7\,n - 11} \right) \right], x = 0\,..1, color = [red, blue, blue, green] \right)$



> *#график частичной суммы не выходит из полосы заданной ширины относительно графика суммы ряда*

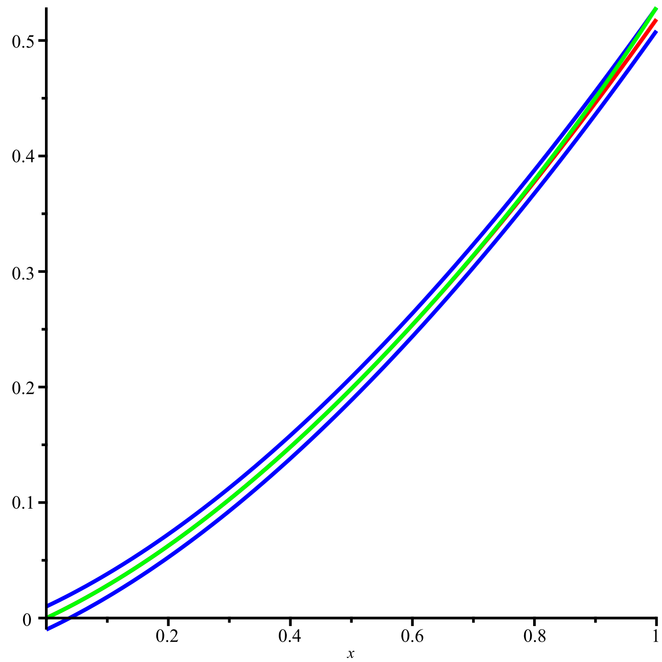
> *#найдем практическую оценку n, при которой график частичной суммы очень близок к границе*

> $$plot\left(\left[f(x), f(x)-0.01, f(x)+0.01, \sum_{n=1}^{9}\left(\frac{(-1)^n \cdot x^n}{7\,n-11}\right)\right], x=0..1, color=[red, blue, blue, green]\right)$$



> $$plot\left(\left[f(x), f(x)-0.01, f(x)+0.01, \sum_{n=1}^{8}\left(\frac{(-1)^n \cdot x^n}{7\,n-11}\right)\right], x=0..1, color=[red, blue, blue,\right.$$

$green]\Big)$



>

> *#n=8 видно, что частичная сумма вышла за пределы полосы*

> *# ряд сходится равномерно к своей сумме на промежутке [0,1], причем* $n_{\min} = 8$ *при* $\varepsilon = 0.01$

restart;

> **№3**

> $\int_0^{0.1} e^{-6x^2}\, dx$ *#исходный интеграл*

> *#разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора*

> $'e^{-6x^2}' = taylor\left(e^{-6x^2}, x = 0, 10\right)$

$$e^{-6x^2} = 1 - 6x^2 + 18x^4 - 36x^6 + 54x^8 + O\left(x^{10}\right) \quad \textbf{(8)}$$

> *#проверка условия т. Лейбница*

> $'limit\left(\frac{6^n \cdot 0.1^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}, n = \text{infinity}\right)' = limit\left(\frac{6^n \cdot 0.1^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}, n = \text{infinity}\right)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{6^n\, 0.1^{2n+1}}{n!\, (2n+1)} = 0. \quad \textbf{(9)}$$

>

> *#найдем первообразную полученного многочлена Тейлора*

> $T := convert\left(taylor\left(e^{-6x^2}, x = 0, 10\right), polynom\right)$

$$T := 54x^8 - 36x^6 + 18x^4 - 6x^2 + 1 \quad \textbf{(10)}$$

> $\int T\, dx$

$$6x^9 - \frac{36}{7}x^7 + \frac{18}{5}x^5 - 2x^3 + x \quad \textbf{(11)}$$

> $x := 0.1:$

> $is(2x^3 > 0.001)$

$$true \quad \textbf{(12)}$$

> $is\left(\frac{18}{5}x^5 > 0.001\right)$

$$false \quad \textbf{(13)}$$

> *#для получения требуемой точности интеграла достаточно взять 2 слагаемых*

> $x :=\text{'}x\text{'}:$

> $\text{'}\int_0^{0.1}(1-6x^2)\,dx\text{'}=\int_0^{0.1}(1-6x^2)\,dx$

$$\int_0^{0.1}(-6x^2+1)\,dx = 0.09800000000 \quad \textbf{(14)}$$

> *#значение заданного интеграла*

> $\text{'}\int_0^{0.1}e^{-6x^2}\,dx\text{'}=\int_0^{0.1}e^{-6x^2}\,dx$

$$\int_0^{0.1}e^{-6x^2}\,dx = 0.09803549166 \quad \textbf{(15)}$$

> *#сравним значения между собой*

> $a := \text{abs}\left(\int_0^{0.1}(1-6x^2)\,dx - \int_0^{0.1}e^{-6x^2}\,dx\right)$

$$a := 0.00003549166 \quad \textbf{(16)}$$

> $is(a < 0.001)$

$$true \quad \textbf{(17)}$$

> *#точность суммы не превосходит ε=0.001*