Лабораторная работа 8. Элементы операционного исчисления.
Выполнила Криштафович Карина Дмитриевна, гр. 053501
Вариант 1

№1

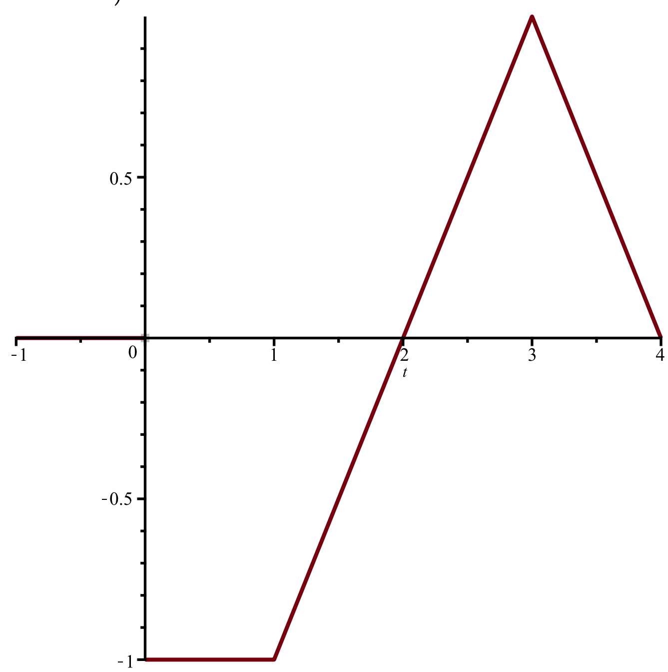
> $f := piecewise\left(t \le 0, 0, 0 < t \le a, -1, a < t \le 3\,a, \frac{t-2\,a}{a}, 3\,a < t \le 4\,a, \frac{4\,a-t}{a}\right)$
#исходная функция

$$f := \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ -1 & 0 < t \le a \\ \frac{t-2\,a}{a} & a < t \le 3\,a \\ \frac{4\,a-t}{a} & 3\,a < t \le 4\,a \end{cases} \qquad (1)$$

(2)

> $a := 1:$

> $plot(f, t = -1..4, discont = true)$



> $with(inttrans):$

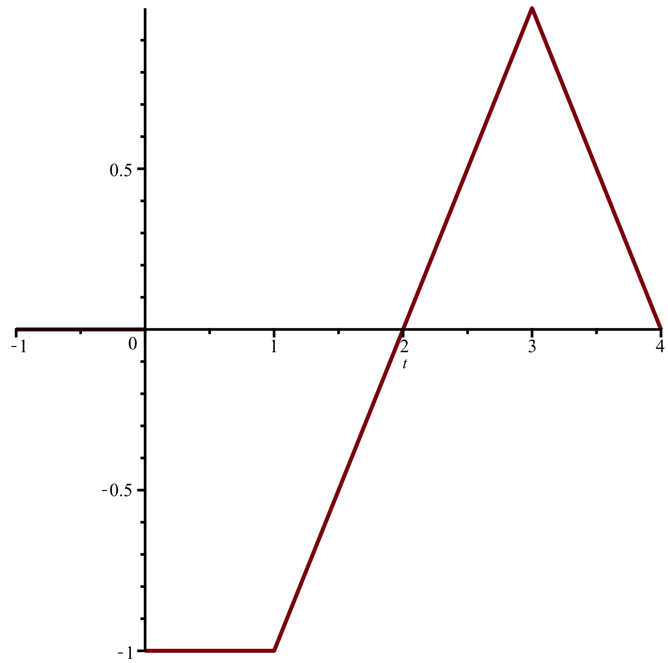
> $assume(k, positive):$

> $Fp := laplace\left(\left(-\text{Heaviside}(t) + \frac{1}{k}\,\text{Heaviside}(t-k)\cdot(t-k) - \frac{2}{k}\,\text{Heaviside}(t-3\,k)\cdot(t-3\,k)\right), t, p\right)$

$$Fp := -\frac{1}{p} + \frac{e^{-p\,k\sim} - 2\,e^{-3\,p\,k\sim}}{k\sim\,p^2} \qquad (3)$$

> $k := 1:$

> $plot\left(-\text{Heaviside}(t) + \frac{1}{k}\text{Heaviside}(t-k)\cdot(t-k) - \frac{2}{k}\text{Heaviside}(t-3k)\cdot(t-3k), t=-1..4, discont=true\right)$



> *#исходный и полученный графики совпадают*

>

> **№2**

> $\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$ *:#исходное изображение*

> $invlaplace\left(\frac{(4p+5)}{(p-2)\cdot(p^2+4p+5)}, p, t\right)$

$$\frac{13\,e^{2t}}{17} + \frac{(-13\cos(t) + 16\sin(t))\,e^{-2t}}{17} \tag{4}$$

>

> **№3**

>

> *restart* :

> $\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) - 2\frac{d}{dx}(y(x)) + y(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ *:#исходное уравнение*

> $dsolve\left(\left\{\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) - 2\frac{d}{dt}(y(t)) + y(t) = \frac{e^t}{1+t^2}, y(0)=0, y'(0)=0\right\}\right)$

$$y(t) = -\frac{e^t\,(-2\arctan(t)\,t + \ln(t^2+1))}{2} \tag{5}$$

> *#проверим некоторые промежуточные вычисления*

> $dsolve\left(\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) - 2\frac{d}{dt}(y(t)) + y(t) = 0\right)$ *#однородное уравнение*

$$y(t) = \_C1\, e^t + \_C2\, e^t\, t \quad (6)$$

> $dsolve\left(\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) - 2\frac{d}{dt}(y(t)) + y(t) = \frac{e^t}{1+t^2}\right)$ *#общее решение*

$$y(t) = e^t\,\_C2 + e^t\, t\,\_C1 - \frac{e^t\left(-2\arctan(t)\, t + \ln\left(t^2+1\right)\right)}{2} \quad (7)$$

> $with(inttrans):$

> $laplace\left(\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) - 2\frac{d}{dt}(y(t)) + y(t) = 1, t, p\right)$

$$p^2\,\mathcal{L}(y(t), t, p) - \mathrm{D}(y)(0) - p\,y(0) - 2\,p\,\mathcal{L}(y(t), t, p) + 2\,y(0) + \mathcal{L}(y(t), t, p) = \frac{1}{p} \quad (8)$$

> $obr := invlaplace\left(\frac{1}{p\cdot(p-1)^2}, p, t\right)$

$$obr := 1 + (t-1)\,e^t \quad (9)$$

> $dif := \frac{d}{dt}(obr)$

$$dif := e^t + (t-1)\,e^t \quad (10)$$

>

> **№4**

> $\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) + y(t) = 6e^{-t}$:*#исходное уравнение*

> $dsolve\left(\left\{\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) + y(t) = 6e^{-t}, y(0) = 3, y'(0) = 1\right\}\right)$

$$y(t) = 4\sin(t) + 3\,e^{-t} \quad (11)$$

> *#проверим некоторые промежуточные вычисления*

> $laplace\left(\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) + y(t) = 6e^{-t}, t, p\right)$

$$p^2\,\mathcal{L}(y(t), t, p) - \mathrm{D}(y)(0) - p\,y(0) + \mathcal{L}(y(t), t, p) = \frac{6}{1+p} \quad (12)$$

> $invlaplace\left(\frac{3p^2+4p+7}{(p+1)\cdot(p^2+1)}, p, t\right)$

$$4\sin(t) + 3\,e^{-t} \quad (13)$$

>

> **№5**

> $\begin{cases} \frac{d}{dt}(x(t)) = x(t) + 3\,y(t) + 2 \\ \frac{d}{dt}(y(t)) = x(t) - y(t) + 1 \end{cases}$:*#исходная система*

> $dsolve\left(\left\{\frac{d}{dt}(x(t)) = x(t) + 3\,y(t) + 2, \frac{d}{dt}(y(t)) = x(t) - y(t) + 1, x(0) = -1, y(0) = 2\right\}\right)$

$$\left\{x(t) = \frac{15\,e^{2t}}{8} - \frac{13\,e^{-2t}}{8} - \frac{5}{4}, y(t) = \frac{5\,e^{2t}}{8} + \frac{13\,e^{-2t}}{8} - \frac{1}{4}\right\} \qquad (14)$$

> *#проверим некоторые промежуточные вычисления*

> $solve\left(\left\{p\cdot x + 1 = x + 3\,y + \frac{2}{p}, p\cdot y - 2 = x - y + \frac{1}{p}\right\}\right)$

$$\left\{p = p, x = -\frac{p^2 - 7\,p - 5}{p\,(p-2)\,(p+2)}, y = \frac{2\,p^2 - 2\,p + 1}{p\,(p-2)\,(p+2)}\right\} \qquad (15)$$

> $convert\left(-\frac{p^2 - 7\,p - 5}{p\,(p-2)\,(p+2)}, parfrac\right)$

$$-\frac{13}{8\,(p+2)} - \frac{5}{4\,p} + \frac{15}{8\,(p-2)} \qquad (16)$$

> $convert\left(\frac{2\,p^2 - 2\,p + 1}{p\,(p-2)\,(p+2)}, parfrac\right)$

$$\frac{13}{8\,(p+2)} - \frac{1}{4\,p} + \frac{5}{8\,(p-2)} \qquad (17)$$

> $invlaplace\left(-\frac{p^2 - 7\,p - 5}{p\,(p-2)\,(p+2)}, p, t\right)$

$$\frac{\cosh(2\,t)}{4} + \frac{7\sinh(2\,t)}{2} - \frac{5}{4} \qquad (18)$$

> $invlaplace\left(\frac{2\,p^2 - 2\,p + 1}{p\,(p-2)\,(p+2)}, p, t\right)$

$$\frac{5\,e^{2t}}{8} + \frac{13\,e^{-2t}}{8} - \frac{1}{4} \qquad (19)$$

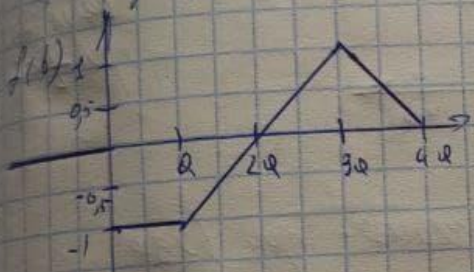
>

Лабораторная работа №8

Тема: Элементы операционного исчисления

Цель: Научиться находить изобр Лапласа для функций-оригиналов, решать обратную задачу, применять операторный метод для решения задачи Коши линейных уравнений с постоянными коэфф-ми и их систем, контрол. полученные результаты с помощью средств Maple

Задание 1. По данному графику ф-ции оригинала найти ее изобр. Лапласа. Получить ответ в системе Maple и сравнить результаты

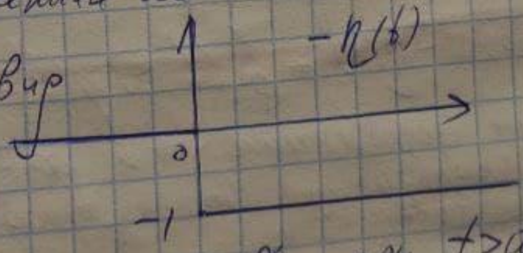


Решение

$$f(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ -1 & 0<t\le a\\ \frac{t-2a}{a} & a<t\le 3a\\ \frac{4a-t}{a} & 3a<t\le 4a\end{cases}$$ — исходная ф-ция

На пр-ке $t\in[0,a]$ ф-ция совпадает с ф-цией Хевисайда умноженной на -1

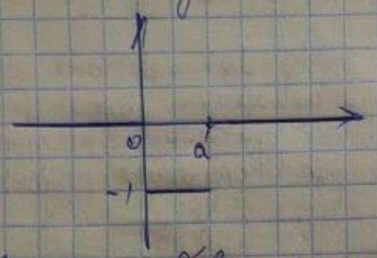
Она имеет вид



Найдем такую ф-цию, чтобы при $t>a$ получить

$$f(t)=-\eta(t)+f_1(t)=0$$

Очевидно, что $f_1(t) = \eta(t-a)$ по т. о запаздывании мы получим

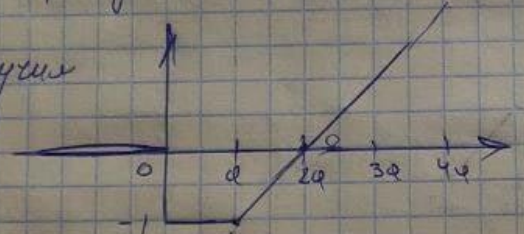


$$f(t) = -\eta(t) + \eta(t-a)$$

Теперь добавим к имеющ. ф-ции $f_2(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-a)$

обнуляет при $t<a$

Получим



Теперь надо обнулить значения при $t>3a$

т.е. $f(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-a) + f_3(t) = 0$

$$f_3(t) = -\frac{t-2a}{a}\eta(t-3a)$$

$$f(t) = -\eta(t) + \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-a) - \frac{t-2a}{a}\eta(t-3a)$$

Добавим к им. формуле $f_4(t) = \frac{4a-t}{a}\eta(t-3a)$

В итоге получим:

$$f(t) = -\eta(t) + \frac{1}{a}(t-a)\eta(t-a) - \frac{2}{a}(t-3a)\eta(t-3a)$$

Найдем изображение. т.к. ф-ция оригинал – сумма ф-ций воспользуемся таблицей преобр. Лапласа и теоремой о запаздывании: и

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{a}e^{-ap}\frac{1}{p^2} - \frac{2}{a}e^{-3ap}\frac{1}{p^2}$$

Задание 2. Найдите оригинал по заданному изображению „вручную" и с помощью Maple

$$\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$$

Решение

$$\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+4p+5} = X$$

$$\begin{aligned} p^2&: \\ p&: \\ p^0&: \end{aligned}\begin{cases} A+B=0 \\ 4A-2B+C=4 \\ 5A-2C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{13}{17} \\ B=-\frac{13}{17} \\ C=-\frac{10}{17} \end{cases}$$

$$X = \frac{13}{17}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{17}\cdot\frac{13p+10}{p^2+4p+5}$$

Воспользуемся таблицей преобраз. Лапласа

~~Оригинал~~

$$\frac{1}{p-2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{2t}$$

$$\frac{13p+10+3-3}{(p+2)^2+1} = 13\left(\frac{p+1-\frac{3}{13}+1-1}{(p+2)^2+1}\right) = 13\left(\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{\frac{16}{13}}{(p+2)^2+1}\right)$$

$$\frac{p+2}{(p+2)^2+1} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-2t}\cos t \qquad \frac{1}{(p+2)^2+1} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-2t}\sin t$$

Тогда оригинал: $f(t) = \frac{13}{17}e^{2t} - \frac{13}{17}e^{-2t}\cos t + \frac{16}{17}e^{-2t}\sin t$

Задание 3. Найдите решение дифф. ур-я удовл. условиям $y(0)=0$ и $y'(0)=0$, операционным методом (Дюамеля) и методом Лагранжа. Сравните результаты и проиллюстр. их с помощью Марк

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2}$$

Решение

Метод Лагранжа

$$\begin{cases} y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2} \\ y(0)=0 \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

Однородное ДУ $\quad y''-2y'+y=0$

Хар. ур-е: $\lambda^2-2\lambda+1=0$

$\lambda=1$ кратности 2

Тогда общее решение

$$y=C_1e^x+C_2xe^x$$

Пусть $C_1(x)$ $C_2(x)$ – функциональн. коэффициенты

Сост. систему $\begin{cases} C_1'e^x+C_2'xe^x=0 \\ C_1'e^x+C_2'(1e^x+xe^x)=\frac{e^x}{1+x^2} \end{cases}$

Найдем C_1' и C_2'

$$C_1'=-xC_2' \Rightarrow -xC_2'+C_2'(1+x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$C_2' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow C_1' = -\frac{x}{1+x^2}$

Тогда $C_2 = \int \frac{dx}{1+x^2} + C_2 = \operatorname{arctg} x + C_2$

$C_1 = \int -\frac{x}{1+x^2}\,dx + C_1 = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C_1$

Общее решение: $y = C_1 e^x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| e^x + C_2 x e^x + \operatorname{arctg} x \cdot x e^x$

Задача Коши $y(0)=0 \quad y'(0)=0$

$y(0) \Rightarrow 0 = C_1 \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| e^x + C_2 e^x \cdot x + x e^x \operatorname{arctg} x + C_1 e^x$

$y' = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{1+x^2} e^x + \ln|1+x^2| e^x\right) + C_2(e^x + x e^x) + C_1$

$+ x \operatorname{arctg} x\, e^x + \frac{e^x \operatorname{arctg} x + x^2 \operatorname{arctg} x\, e^x + x e^x}{1+x^2}$

$y'(0)=0 \qquad 0 = -\frac{1}{2}(2)^{-1} + C_2 + C_1 \Rightarrow C_2 = 0$

т.е. $\quad y = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| e^x + \operatorname{arctg} x \cdot x \cdot e^x$

Операторный метод (интеграл Дюамеля)

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2} \qquad y(0) = y'(0) = 0$

$y(t) \xrightarrow{L} Y(p)$

$y'(t) \xrightarrow{L} pY(p) - y(0) = pY(p)$

$y''(t) \xrightarrow{L} p^2 Y(p) - py_0 - y'(0) = p^2 Y(p)$

1) Пусть известно решение $y_1(t)$ для $f(t) = 1$

Тогда $\quad p^2 Y_1 - 2pY_1 + Y_1 = \frac{1}{p}$

$$(p-1)^2 y_1 = \frac{1}{p}$$

$$y_1 = \frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2}$$

$$\begin{array}{l} p^2: \\ p: \\ p^0 \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\downarrow L^{-1}$$

$$1 - e^t + te^t$$

$$y_1'(t) = -e^t + te^t + e^t = te^t$$

$$y(p) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)y(0) + \int_0^t f(u) y_1'(t-u)\,du =$$

$$= \int_0^t f(u) y_1'(t-u)\,du = y(t)$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{e^u}{1+u^2}(t-u)e^{t-u}\,du = e^t \int_0^t \frac{t-u}{1+u^2}\,du =$$

$$= e^t t \int_0^t \frac{1}{1+u^2}\,du - e^t \int_0^t \frac{u\,du}{1+u^2} =$$

$$= e^t \cdot t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} e^t \ln(t^2+1)$$

Задание 4 Операторным методом решите задачу Коши и сравните с решением в пакете

$$\begin{cases} y'' + y = 6e^{-t} \\ y(0) = 3 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Решение

$y(t) \xrightarrow{L} Y(p)$

$y'(t) \xrightarrow{L} p\cancel{Y}(p) - y(0) = pY(p) - 3$

$y''(t) \xrightarrow{L} p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 3p - 1 = p^2 Y(p) - 3p - 1$

$e^{-t} \to \frac{1}{p+1}$

Тогда получим операторное уравнение

$p^2 Y(p) - 3p - 1 + Y(p) = \frac{6}{p+1}$

$Y(p) = \frac{6 \cancel{+4p+4} + (3p+1)}{\cancel{(p+1)}(p^2+1)} \quad \cancel{\frac{4p+10}{(p+1)(p^2+1)}} \cancel{+12p} + 20$

$$Y(p) = \frac{\frac{6}{p+1} + 3p + 1}{p^2+1} = \frac{3p^2 + 4p + 7}{(p^2+1)(p+1)} = \frac{Ap + B}{p^2+1} + \frac{C}{p+1}$$

$$\begin{aligned} p^2 &: \begin{cases} A + C = 3 \\ A + B = 4 \\ B + C = 7 \end{cases} \\ p &: \\ p^0 &: \end{aligned} \qquad \begin{cases} A = 0 \\ B = 4 \\ C = 3 \end{cases}$$

$$Y(p) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{3}{p+1} \xrightarrow{L^{-1}} 4\sin t + 3e^{-t}$$

$y(t) = 4\sin t + 3e^{-t}$

Задание 5. Решите систему ДУ операторным методом. Сравните с Мэпле

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2 & x(0) = -1 \\ y' = x - y + 1 & y(0) = 2 \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t) \xrightarrow{L} X(p)$
$y(t) \xrightarrow{L} Y(p)$

$x'(t) = pX(p) - x(0) = pX + 1$

$y'(t) = pY - 2$

Тогда соотв операторная система примет вид

$$\begin{cases} pX + 1 = X + 3Y + \frac{2}{p} \\ pY - 2 = X - Y + \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p-1) - 3Y = \frac{2-p}{p} \\ Y(p+1) - X = \frac{1+2p}{p} \end{cases}$$

Найдем X и Y

$$\begin{cases} X = Y(p+1) - \frac{1+2p}{p} \\ Y(p+1)(p-1) - \frac{1+2p}{p}(p-1) - 3Y = \frac{2-p}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \frac{2p^2 - 2p + 1}{p(p-2)(p+2)} \\ X = -\frac{p^2 - 4p - 5}{p(p-2)(p+2)} \end{cases}$$

$X = -$

$p^2:$

$p:$

$p^0:$

$X = -$

$x(t)$

$y =$

$y(t) =$

Ответ:

одоц

$$X = -\frac{p^2-7p-5}{p(p-2)(p+2)} = \frac{A}{p}\Big\backslash^{p^2-4} + \frac{B}{p-2}\Big\backslash^{p^2+2p} + \frac{C}{p+2}\Big\backslash^{p^2-2p}$$

$$\begin{aligned} p^2&: \\ p&: \\ p^0&: \end{aligned}\begin{cases} A+B+C=-1 \\ 2B-2C=7 \\ -4A=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-\frac{13}{8} \\ B=\frac{15}{8} \\ A=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$X = -\frac{5}{4}\frac{1}{p} + \frac{15}{8}\frac{1}{p-2} - \frac{13}{8}\frac{1}{p+2}$$

$$\downarrow L^{-1}$$

$$x(t) = -\frac{5}{4} + \frac{15}{8}e^{2t} - \frac{13}{8}e^{-2t}$$

$$y = \frac{2p^2-2p+1}{p(p-2)(p+2)} = \frac{13}{8}\frac{1}{p+2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p} + \frac{5}{8}\frac{1}{p-2}$$

$$\downarrow L^{-1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}e^{2t} + \frac{13}{8}e^{-2t}$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = \frac{15}{8}e^{2t} - \frac{13}{8}e^{-2t} - \frac{5}{4} \\ y(t) = \frac{13}{8}e^{-2t} + \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{1}{4} \end{cases}$