> **Лабораторная работа 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков.**

Выполнила Криштафович Карина Дмитриевна, гр. 053501

Вариант 1

>

> **№1.1**

> $x = \frac{d^2}{dx^2}(y(x)) + e^{\frac{d^2}{dx^2}(y(x))}$: *#исходное уравневие*

> $dsolve\left(x = \frac{d^2}{dx^2}(y(x)) + e^{\frac{d^2}{dx^2}(y(x))}\right)$ *#решим ДУ*

$$y(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{\mathrm{LambertW}(e^x)^3}{6} - \frac{3\,\mathrm{LambertW}(e^x)^2}{4} - \mathrm{LambertW}(e^x) + \_C1\,x + \_C2 \qquad (1)$$

> *#решим уравнение с помощью замены, для этого проверим вычисление интегралов*

> $\int x - xe^{-x}\,dx$

$$\frac{x^2}{2} + x\,e^{-x} + e^{-x} \qquad (2)$$

> $\int\left(\frac{x^2}{2} + x\,e^{-x} + e^{-x} + C1\right)\cdot\left(1 - e^{-x}\right)dx$

$$\frac{x^3}{6} + C1\,x + \frac{3\,(e^{-x})^2}{4} + e^{-x}\,C1 + \frac{x\,(e^{-x})^2}{2} + \frac{e^{-x}x^2}{2} - e^{-x} \qquad (3)$$

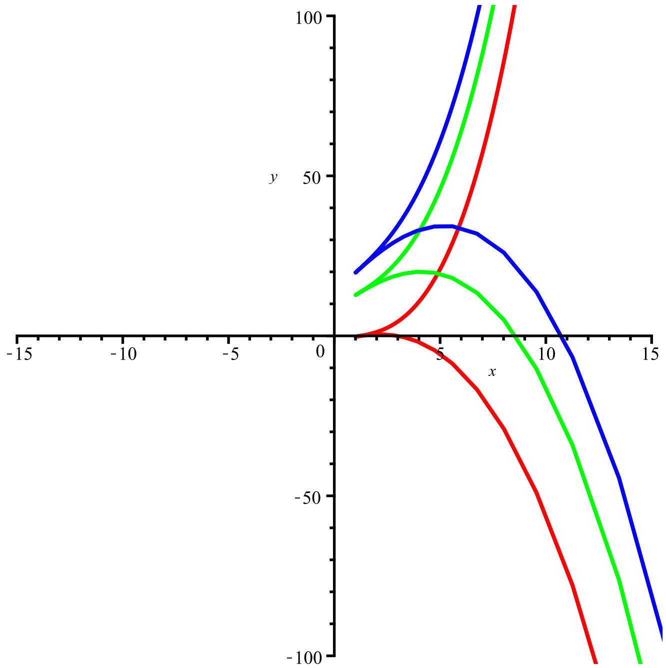
> *#построим несколько интегральных кривых*

> $\mathrm{int1} := \mathrm{plot}\left(\left[t + e^{-t}, \frac{t^3}{6} + \frac{3\,(e^{-t})^2}{4} + \frac{t\,(e^{-t})^2}{2} + \frac{e^{-t}t^2}{2} - e^{-t}, t = -15..15\right], x = -15..15, y = -100..100, color = red\right)$:*#C1=C2=0*

> $\mathrm{int2} := \mathrm{plot}\left(\left[t + e^{-t}, \frac{t^3}{6} + 3\,t + \frac{3\,(e^{-t})^2}{4} + e^{-t}\cdot 3 + \frac{t\,(e^{-t})^2}{2} + \frac{e^{-t}t^2}{2} - e^{-t} + 10, t = -15..15\right], x = -15..15, y = -100..100, color = green\right)$:*#C1=3 C2=10*

> $\mathrm{ints} := \mathrm{plot}\left(\left[t + e^{-t}, \frac{t^3}{6} + 5\,t + \frac{3\,(e^{-t})^2}{4} + 5e^{-t} + \frac{t\,(e^{-t})^2}{2} + \frac{e^{-t}t^2}{2} - e^{-t} + 15, t = -15..15\right], x = -15..15, y = -100..100, color = blue\right)$:*#C1=5 C2=15*

> $plots[display](\mathrm{int1}, \mathrm{int2}, \mathrm{ints})$



>

> **№1.2**

> *restart*;

> $\frac{d^2}{dx^2}(y(x))\cdot y(x) - \left(\frac{d}{dx}(y(x))\right)^2 - y(x)\cdot\frac{d}{dx}(y(x))\cdot\cot(x) = 0$: *#исходное уравневие*

> $resh := dsolve\left(\frac{d^2}{dx^2}(y(x))\cdot y(x) - \left(\frac{d}{dx}(y(x))\right)^2 - y(x)\cdot\frac{d}{dx}(y(x))\cdot\cot(x) = 0\right)$

$$resh := y(x) = \frac{\_C2}{e^{-\_C1\cos(x)}} \qquad (4)$$

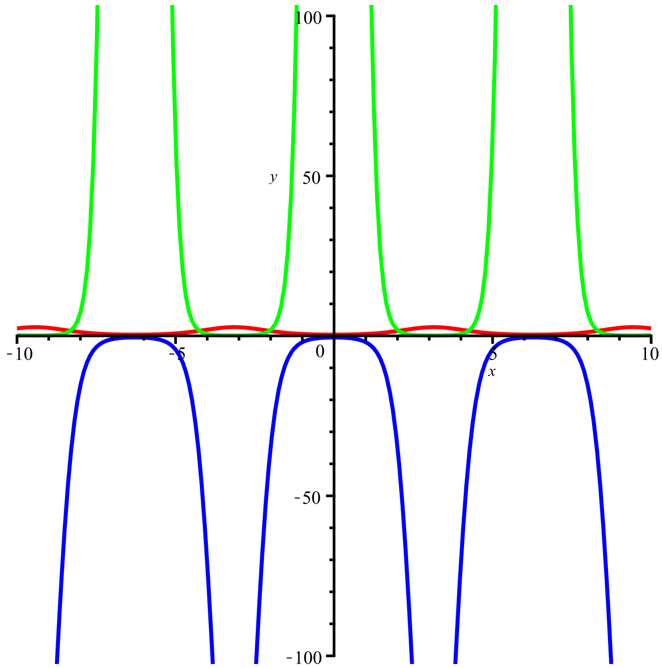
> *#построим интегральные кривые*

> $int1 := plot\left(\frac{1}{e^{\cos(x)}}, x = -10..10, y = -100..100, color = red\right)$:*# C1=1 C2=1*

> $int2 := plot\left(\frac{-10}{e^{3\cos(x)}}, x = -10..10, y = -100..100, color = blue\right)$:*# C1=3 C2=-10*

> $int3 := plot\left(\frac{15}{e^{-5\cos(x)}}, x = -10..10, y = -100..100, color = green\right)$:*# C1=-5 C2=15*

> $plots[display](int1, int2, int3)$



>

>   **№1.3**

> *restart*;

> $\frac{d^2}{dx^2}(y(x))\cdot((y(x))^2+1)+\left(\frac{d}{dx}(y(x))\right)^3=0$: *#исходное уравневие*

> $dsolve\left(\frac{d^2}{dx^2}(y(x))\cdot((y(x))^2+1)+\left(\frac{d}{dx}(y(x))\right)^3=0\right)$

$$y(x)=\_C1,\ y(x)\arctan(y(x))-\frac{1}{2}\ln\left(y(x)^2+1\right)+\_C1\,y(x)-x-\_C2=0 \quad \textbf{(5)}$$

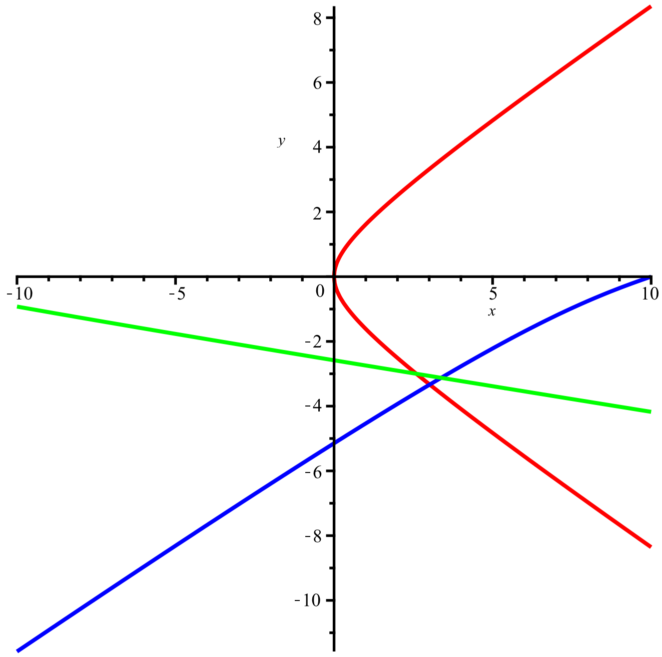
> *#построим интегральные кривые*

> $int1 := plots[implicitplot]\left(y(x)\arctan(y(x))-\frac{1}{2}\ln\left(y(x)^2+1\right)-x=0, x=-10..10, y=-100..100, color=red\right)$:*# C1=0 C2=0*

> $int2 := plots[implicitplot]\left(y(x)\arctan(y(x))-\frac{1}{2}\ln\left(y(x)^2+1\right)+3\,y(x)-x+10=0, x=-10..10, y=-100..100, color=blue\right)$:*# C1=3 C2=-10*

> $int3 := plots[implicitplot]\left(y(x)\arctan(y(x))-\frac{1}{2}\ln\left(y(x)^2+1\right)-5\,y(x)-x-15=0, x=-10..10, y=-100..100, color=green\right)$:*# C1=-5 C2=15*

> $plots[display](int1, int2, int3)$



>

> **№1.4**

> *restart*;

> $\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) = 3\cdot\left(\frac{\frac{d}{dx}(y(x))}{x} - \frac{y(x)}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$: *#исходное уравневие*

> $dsolve\left(\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) = 3\cdot\left(\frac{\frac{d}{dx}(y(x))}{x} - \frac{y(x)}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$y(x) = x^3\ \_C2 + \_C1\ x - \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2} \quad (6)$$

>

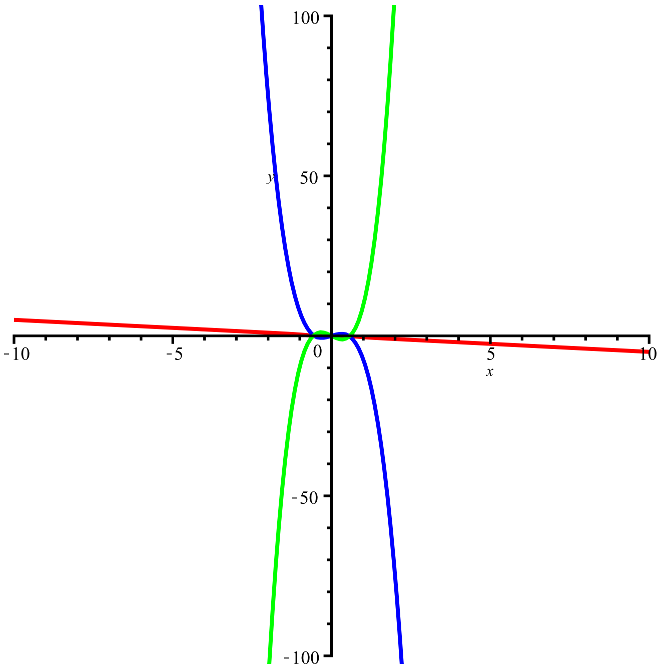
> *#построим интегральные кривые*

> $int1 := plot\left(-\frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2}, x = -10..10, y = -100..100, color = red\right)$:*# C1=0 C2=0*

> $int2 := plot\left(-10\,x^3 + 3\,x - \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2}, x = -10..10, y = -100..100, color = blue\right)$:
 # C1=3 C2=-10

> $int3 := plot\left(15\,x^3 - 5\,x - \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2}, x = -10..10, y = -100..100, color = green\right)$:
 # C1=-5 C2=15

> $plots[display](int1, int2, int3)$



>

> **№2**

> *restart*;

> $\frac{d^3}{dx^3}(y(x))\cdot x\cdot \ln(x) = \frac{d^2}{dx^2}(y(x))$: *#исходное уравневие*

> *dsolve*$\left(\frac{d^3}{dx^3}(y(x))\cdot x\cdot \ln(x) = \frac{d^2}{dx^2}(y(x))\right)$

$$y(x) = \frac{\_C1 \ln(x)\, x^2}{2} - \frac{3\,\_C1\, x^2}{4} + \_C2\, x + \_C3 \quad (7)$$

>

> **№3**

> *restart*;

> $\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) + 2\cdot\frac{d}{dx}(y(x)) = 4e^{x}(\sin(x)+\cos(x))$: *#исходное уравневие*

> *dsolve*$\left(\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) + 2\cdot\frac{d}{dx}(y(x)) = 0\right)$*#решение однородного уравнения*

$$y(x) = \_C1 + \_C2\, e^{-2x} \quad (8)$$

> *dsolve*$\left(\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) + 2\cdot\frac{d}{dx}(y(x)) = 4e^{x}(\sin(x)+\cos(x))\right)$

$$y(x) = \int \left(4\left(\int (e^{x})(\sin(x)+\cos(x))\, e^{2x}\, dx\right) + \_C1\right) e^{-2x}\, dx + \_C2 \quad (9)$$

> *#посчитаем этот интеграл*

(10)

> *int1* $:= \int e^{3x}\sin(x)\,dx$

$$int1 := -\frac{e^{3x}\cos(x)}{10} + \frac{3\,e^{3x}\sin(x)}{10} \tag{11}$$

> $int2 := \int e^{3x}\cos(x)\,dx$

$$int2 := \frac{3\,e^{3x}\cos(x)}{10} + \frac{e^{3x}\sin(x)}{10} \tag{12}$$

> $int3 := (4(int1 + int2) + C1)\cdot e^{-2x}$

$$int3 := \left(\frac{4\,e^{3x}\cos(x)}{5} + \frac{8\,e^{3x}\sin(x)}{5} + C1\right)e^{-2x} \tag{13}$$

> $int4 := \int \left(\frac{4\,e^{3x}\cos(x)}{5} + \frac{8\,e^{3x}\sin(x)}{5} + C1\right)e^{-2x}\,dx$

$$int4 := -\frac{2\,e^{x}\cos(x)}{5} + \frac{6\,e^{x}\sin(x)}{5} - \frac{C1}{2\left(e^{x}\right)^{2}} \tag{14}$$

> $intFinal := int4 + C2$ #общее решение уравнения

$$intFinal := -\frac{2\,e^{x}\cos(x)}{5} + \frac{6\,e^{x}\sin(x)}{5} - \frac{C1}{2\left(e^{x}\right)^{2}} + C2 \tag{15}$$

>

Лабораторная работа №6

Тема: Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

Цель: научиться находить общее и частное решение некоторых уравнений высших порядков и контролировать результаты с помощью средств системы Maple

Задание 1. Решите уравнение и сравните с результатами, полученными в Maple. Постройте в одной системе координат несколько интегральных кривых

Решение 1) $x=y''+e^{-y''}$

Замена $y''=z$

$$x=z+e^{-z}$$

$$dx=(1-e^{-z})dz \qquad dy'=z\,dx=z(1-e^{-z})dz$$

$$y'=\frac{z^2}{2}-\int ze^{-z}dz+C_1=\frac{z^2}{2}+ze^{-z}+e^{-z}+C_1$$

$$dy=y'dx=\left(\frac{z^2}{2}+ze^{-z}+e^{-z}+C_1\right)(1-e^{-z})dz=$$

$$=\left(\frac{z^2}{2}+ze^{-z}+e^{-z}+C_1-\frac{z^2}{2}e^{-z}-ze^{-2z}-e^{-2z}-C_1e^{-z}\right)dz$$

общее решение в парам. виде

$$\begin{cases} y=\frac{z^3}{6}-\cancel{ze^{-z}}-e^{-z}-e^{-z}+\frac{1}{2}z^2e^{-z}+\cancel{ze^{-z}}+C_1e^{-z}+ \\ +C_1z+\frac{z}{2}e^{-2z}+\frac{e^{-2z}}{4}+\frac{e^{-2z}}{2}+C_2=\frac{z^3}{6}+\frac{z^2e^{-z}}{2}+ \\ +\frac{3e^{-2z}}{4}+\frac{ze^{-2z}}{2}+C_1z+e^{-z}(C_1-1)+C_2 \\ x=z+e^{-z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y = \frac{z^3}{6} + \frac{z^2e^{-z}}{2} + \frac{3e^{-2z}}{4} + \frac{ze^{-2z}}{2} + C_1 z + e^{-z}C_1 - e^{-z} + C_2 \\ x = z + e^{-z} \end{cases}$

2) $yy'' - y'^2 - yy'\operatorname{ctg}x = 0$

$\lambda y \cdot \lambda y'' - (\lambda y')^2 - \lambda y \lambda y' \operatorname{ctg}x = 0$ – однородное уравнение

Делаем замену $z = \frac{y'}{y}$, где $z = z(x)$ отсюда $y' = zy$

$y'' = z'y + y'z = z'y + z^2 y$

$y(z'y + z^2y) - z^2y^2 - y \cdot zy \cdot \operatorname{ctg}x = 0$

$z'y^2 + z^2y^2 - z^2y^2 - y^2 z \operatorname{ctg}x = 0 \quad | : y^2$

$z' - z\operatorname{ctg}x = 0$

$\frac{dz}{z} = \frac{\cos x\, dx}{\sin x}$

$\ln z = \ln \sin x + \ln C$

$z = C_1 \sin x = \frac{y'}{y}$

$\frac{dy}{y} = dx \cdot C_1 \sin x$

$\ln y = -C_1 \cos x + C_2$

$y = C_2 e^{-C_1 \cos x}$ – общее решение

Ответ: $y = C_2 e^{-C_1 \cos x}$

3) $y''(1+y^2) + y'^3 = 0$

ДУ 2 порядка, не содержащее x ⟹ замена $z = y'$, $z = z(y)$

$y'' = z'z$

$z \cdot z'(1+y^2) + z^3 = 0$

$\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{1+y^2}$ $\qquad -\frac{dz}{z^2} = \frac{dy}{1+y^2}$

$\frac{1}{z} = \operatorname{arctg} y + C_1$

$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} y + C_1}$

$(\operatorname{arctg} y + C_1)\,dy = dx$

$\int \underbrace{\operatorname{arctg} y}_{u}\, \underbrace{dy}_{dv} + C_1 y = x + C_2$

$du = \frac{dy}{1+y^2}$ $\qquad y \cdot \operatorname{arctg} y - \int \frac{y\,dy}{1+y^2} + C_1 y = x + C_2$

$v = y$

$y \cdot \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \ln|1+y^2| + C_1 y = x + C_2$

Ответ: $y \cdot \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \ln|1+y^2| + C_1 y = x + C_2$

4) $y'' = 3\left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3} \sin \frac{1}{x^2}$

$z = y' - \frac{3y}{x}$ $\qquad z' = y'' + \frac{3y}{x^2} - \frac{3y'}{x}$

$z' = \frac{2}{x^3} \sin \frac{1}{x^2}$

$dz = \frac{2}{x^3} \sin \frac{1}{x^2}\, dx$ $\qquad z = -\int \sin \frac{1}{x^2}\, d\frac{1}{x^2} + C_1$

$z = +\cos\frac{1}{x^2} + C_1$

$y' - \frac{3y}{x} = +\cos\frac{1}{x^2} + C_1$ — линейное ур-е 1 порядка

Метод Лагранжа

$y' - \frac{3y}{x} = 0$

$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x}$ $\quad \ln y = 3\ln y + \ln C$

$y = \cancel{3}\, Cx^3$

$y = C(x)\,x^3 \quad y' = C'x^3 + C\cdot 3x^2$

$C'x^3 = +\cos\frac{1}{x^2} + C_1$

$C = \int \frac{\cos\frac{1}{x^2} + C_1}{x^3}\,dx + C_2 = -\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{2} - \frac{C_1}{2x^2} + C_2$

$y = \left(-\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{2} - \frac{C_1}{2x^2} + C_2\right)x^3 = -\frac{x^3}{2}\sin\frac{1}{x^2} - C_1 x + C_2 x^3$

Ответ: $y = -\frac{x^3}{2}\sin\frac{1}{x^2} - C_1 x + C_2 x^3$

Задание 2. Найдите общее решение ДУ и сравните с результатом, полученным в Maple

$y''' \cdot x\ln x = y''$

Решение $\quad y'' = z \quad z = z(x) \quad y''' = z'$

$z' \cdot x\ln x = z$ $\quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x}$ $\quad \ln z = \ln\ln x + \ln C_1$

$z = C_1 \cdot \ln x$

$y'' = C_1 \ln x$

$y' = \int C_1 \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{d\vartheta} + C_2 = C_1(x\ln x - x) + C_2 = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$

$y = \int C_1 x(\ln x - 1) + C_2\, dx = C_1 \int x \underbrace{\ln x}_{u}\, dx - \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$

$d\vartheta$

$du = \frac{1}{x}$

$d\vartheta = \frac{x^2}{2}$

$= C_1 \frac{x^2}{2}\ln x - C_1 \frac{x^2}{4} - \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \frac{C_1}{2} x^2 \ln x - \frac{3C_1 x^2}{4} + C_2 x + C_3$

Ответ: $\frac{C_1}{2} x^2 \ln x + \frac{3}{4} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

Задание 3. Найти общее решение ДУ

$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$

Решение

Замена $y' = z \quad y'' = z'$

$z' + 2z = 4e^x(\sin x + \cos x)$

Но в этом случае мы получаем сложный интеграл, поэтому воспользуемся Методом неопределенных коэффициентов

Составим характерестич. ур-е $\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\lambda = \left[\begin{array}{l} 0 \Rightarrow y_1 = e^{0x} = 1 \\ -2 \Rightarrow y_2 = e^{-2x} \end{array}\right.$

Общее решение однородного уравнения

$y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}$

Найдем частное решение

$y_ч = e^x(A\cos x + B\sin x)$ $\lambda = 1+i \to$ не явл корнем хар. ур-я

$y_ч' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) =$

$= e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x)$

$y_ч'' = e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x) + e^x(-(A+B)\sin x + (B-A)\cos x)$

$e^x(2B\cos x - 2A\sin x)$

Исходное $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$

$$e^x\sin x: \begin{cases} -2A + 2(B-A) = 4 \\ 2B + 2(A+B) = 4 \end{cases} \qquad e^x\cos x \qquad \begin{cases} -2A + B = 2 \\ 2B + A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{2}{5} \\ B = \frac{6}{5} \end{array}$$

$y_ч = e^x\left(\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x\right)$

Общее решение: $y = e^x\left(\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x\right) + C_1 + C_2e^{-2x}$

Ответ: $y = e^x\left(\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x\right) + C_1 + C_2e^{-2x}$