Лабораторная работа 7. Системы дифференциальных уравнений.
Выполнила Криштафович Карина Дмитриевна, гр. 053501
Вариант 1

№1

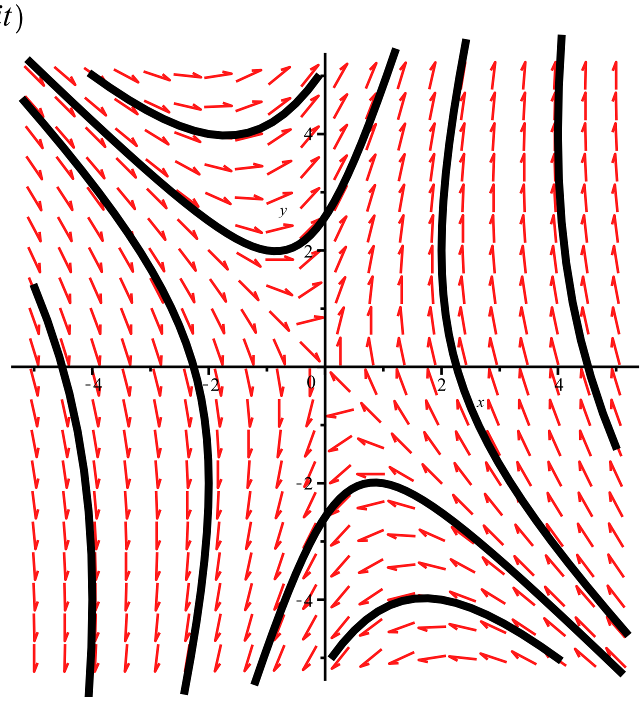
$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(y1(x)) = -2\,y1(x) + 2\,y2(x) \\ \frac{d}{dx}(y2(x)) = 7\,y1(x) + 3\,y2(x) \end{cases} \quad : \#исходная\ система$$

with(*DEtools*) :
with(*LinearAlgebra*) :

#построим фазовый портрет системы ДУ

$portrait := phaseportrait\left(\left[\frac{d}{dt}(x(t)) = -2\,x(t) + 2\,y(t), \frac{d}{dt}(y(t)) = 7\,x(t) + 3\,y(t)\right], [x, y], t = -5..5, [[0, 2, -4], [0, -2, 4], [0, 4, 4], [0, -4, -4], [0, 1, -2], [0, -1, 2], [0, 2, 2], [0, -2, -2]], x = -5..5, y = -5..5, stepsize = 0.02, linecolor = black\right) :$

plots[*display*](*portrait*)



#видно, что точка покоя - седло

$dsolve\left(\left[\frac{d}{dx}(y1(x)) = -2\,y1(x) + 2\,y2(x), \frac{d}{dx}(y2(x)) = 7\,y1(x) + 3\,y2(x)\right]\right)$

#решим систему ДУ

$$\left\{y1(x) = \_C1\,e^{-4x} + \_C2\,e^{5x}, y2(x) = -\_C1\,e^{-4x} + \frac{7\,\_C2\,e^{5x}}{2}\right\} \quad (1)$$

#проверим линейную независимость Вронскиана

> $A := \begin{bmatrix} 2e^{5x} & e^{-4x} \\ 7e^{5x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} 2\,e^{5x} & e^{-4x} \\ 7\,e^{5x} & -e^{-4x} \end{bmatrix} \tag{2}$$

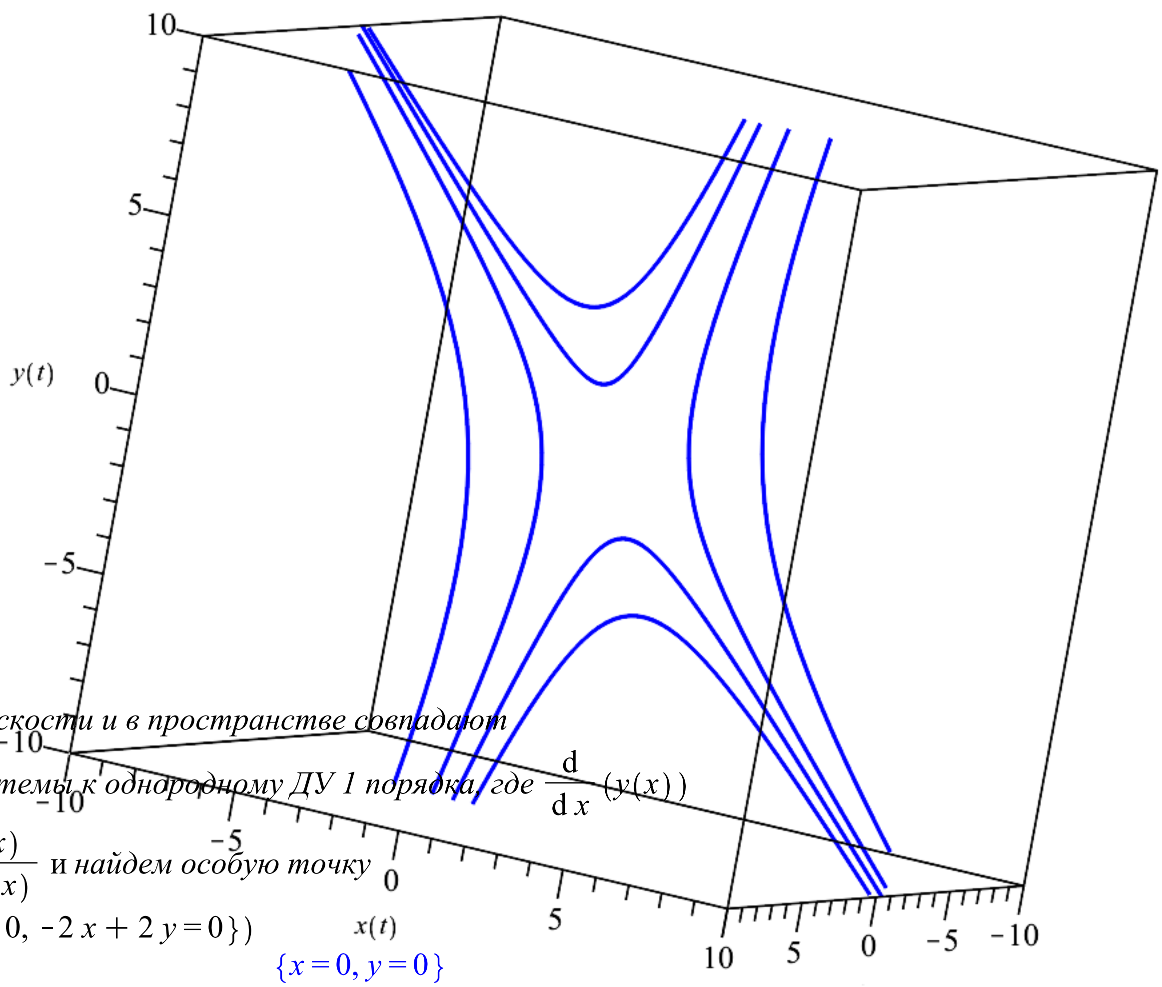
> *Determinant*(*A*)

$$-9\,e^{5x}\,e^{-4x} \tag{3}$$

> *#построим пространственные кривые*

> $kr := DEplot3d\left(\left[\frac{d}{dt}(x(t)) = -2\,x(t) + 2\,y(t),\ \frac{d}{dt}(y(t)) = 7\,x(t) + 3\,y(t)\right], [x(t), y(t)], t = -10\,..10, [[0, 2, -4], [0, -2, 4], [0, 4, 4], [0, -4, -4], [0, 1, -2], [0, -1, 2], [0, 2, 2], [0, -2, -2]], y = -10\,..10, x = -10\,..10, stepsize = 0.02, linecolor = blue\right) :$

> *plots*[*display*](*kr*)



> *#чертежи на плоскости и в пространстве совпадают*

> *#перейдем от системы к однородному ДУ 1 порядка, где* $\frac{d}{dx}(y(x)) = \frac{7\,x + 3\,y(x)}{-2\,x + 2\,y(x)}$ *и найдем особую точку*

> $solve(\{7\,x + 3\,y = 0,\ -2\,x + 2\,y = 0\})$

$$\{x = 0, y = 0\}$$

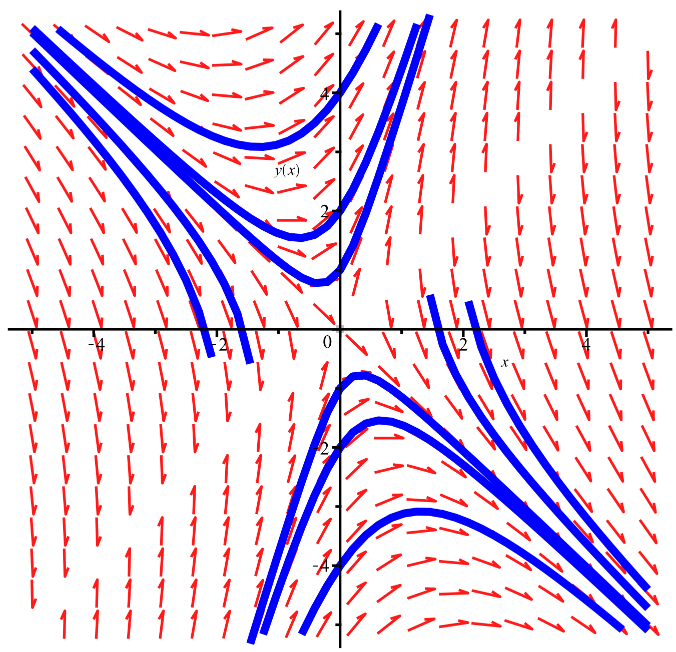
> #поле направлений вблизи особой точки

> $dfield := DEplot\left(\left[\frac{d}{dx}(y(x)) = \frac{7x+3y(x)}{-2x+2y(x)}\right], y(x), x=-5..5, y(x)=-5..5, [y(0)=-2, y(0)=2, y(0)=4, y(0)=-4, y(0)=1, y(0)=-1, y(2)=1, y(-2)=-1, y(2)=-1, y(-2)=1], linecolor=blue\right):$

```
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were issued:
   cannot evaluate the solution further left of 1.9475618, probably a
singularity
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were issued:
   cannot evaluate the solution further right of -1.9475618, probably
a singularity
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were issued:
   cannot evaluate the solution further left of 1.4023221, probably a
singularity
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were issued:
   cannot evaluate the solution further right of -1.4023221, probably
a singularity
```

> $dpoint := plot([[0,0]], style=point, color=black):$

> $plots[display](dfield, dpoint)$



>

> **№2**

> $$\begin{cases} \frac{d}{dx}(y1(x)) = 5\,y1(x) + 3\,y2(x) \\ \frac{d}{dx}(y2(x)) = 4\,y1(x) + 9\,y2(x) \end{cases}$$: #исходная система

> $dsolve\left(\left\{\frac{d}{dx}(y1(x)) = 5\,y1(x) + 3\,y2(x), \frac{d}{dx}(y2(x)) = 4\,y1(x) + 9\,y2(x)\right\}, \{y1, y2\}\right)$

$$\left\{y1(x) = \_C1\,e^{11x} + \_C2\,e^{3x}, y2(x) = 2\,\_C1\,e^{11x} - \frac{2\,\_C2\,e^{3x}}{3}\right\} \quad \textbf{(5)}$$

> **№3**

>

> $$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x(t)) = x(t) + 2\,y(t) \\ \frac{d}{dt}(y(t)) = 2\,x(t) + y(t) + 1 \end{cases}$$: *#исходная система*

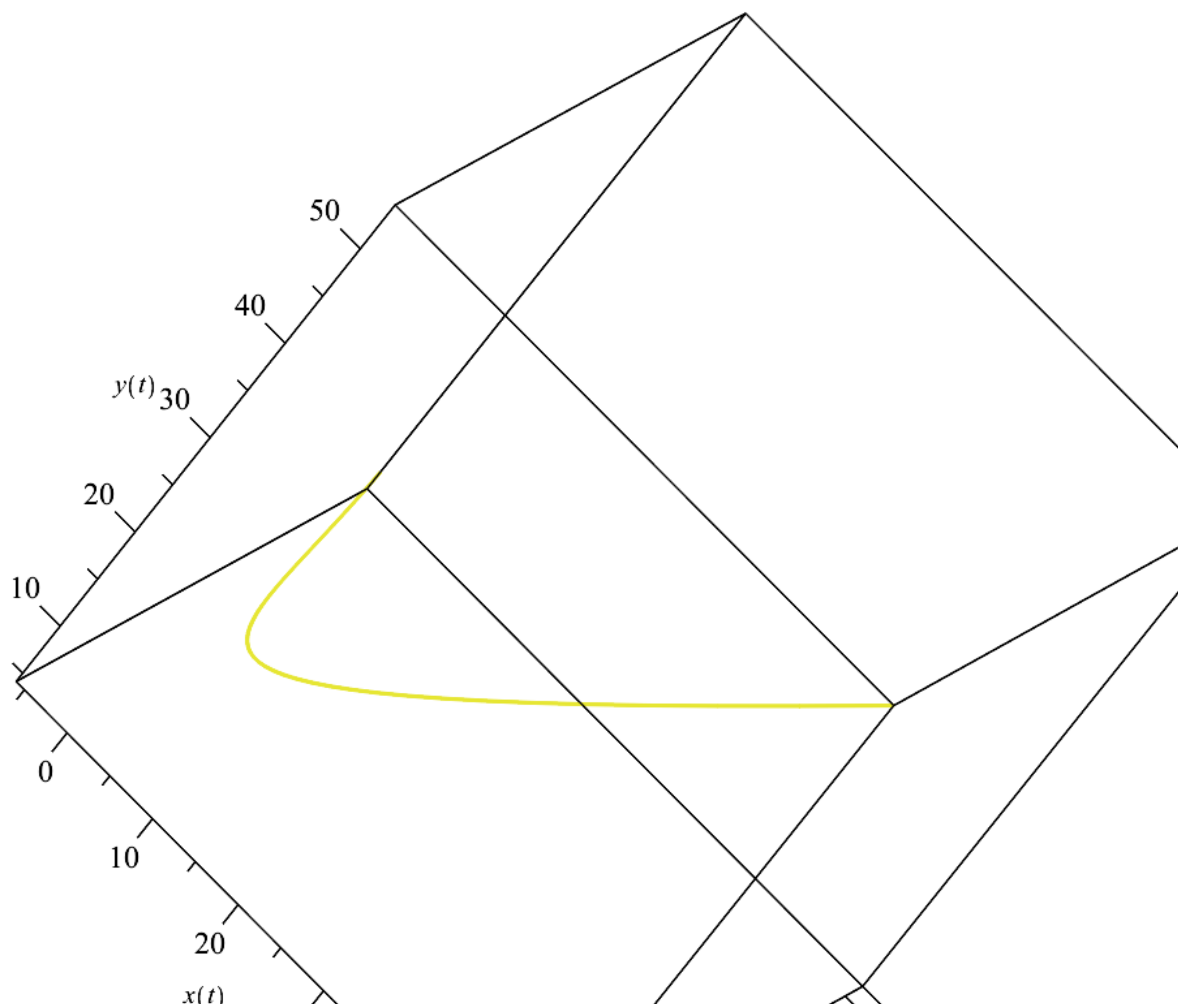
> $dsolve\left(\left[\frac{d}{dt}(x(t)) = x(t) + 2\,y(t), \frac{d}{dt}(y(t)) = 2\,x(t) + y(t) + 1, x(0) = 0, y(0) = 5\right]\right)$

$$\left\{x(t) = -2\,e^{-t} + \frac{8\,e^{3t}}{3} - \frac{2}{3}, y(t) = 2\,e^{-t} + \frac{8\,e^{3t}}{3} + \frac{1}{3}\right\} \quad (6)$$

> *#построим чертеж*

> $with(DEtools)$:

> $DEplot3d\left(\left[\frac{d}{dt}(x(t)) = x(t) + 2\,y(t), \frac{d}{dt}(y(t)) = 2\,x(t) + y(t) + 1\right], [x(t), y(t)], t = -1..1, [[x(0) = 0, y(0) = 5]]\right)$



>

Лабораторная работа № 6

Тема: Системы дифференциальных уравнений

Цель: научиться строить фазовый портрет нормальной системы 2-го порядка в точке покоя, аналитически находить общее и частное решения линейных систем методами Лагранжа, Эйлера, Даламбера и контролир. результаты с помощью СКА Maple

Задание 1. Исследуйте поведение фазовых кривых систем уравнений вблизи точки покоя. Сделайте чертеж.

Определите тип точки покоя по фазовому проекту и собственным значениям матрицы системы.

Найдите общее решение системы и выделите фундаментальную систему решений. Сравните с результатами в Maple.

Постройте в прямоугольной системе координат Oxy_1y_2 пространственные кривые, удовлетв. заданной системе и содержащие соответственно точки $(0, y_1^0, y_2^0)$. Значения y_1^0, y_2^0 те же, что и для фазового портрета. Сравните чертежи полученные на плоскости и в пространстве.

Перейдите от системы ур-ний к однородному ДУ I порядка отн. ф-ции $y_2(y_1)$, постройте поле направлений в окрестности особой точки. Сравните с фазовым портретом системы.

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Решение: Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 14 = 0 \qquad \lambda^2 - \lambda - 20 = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -4$$

Т.к. корни характеристического уравнения различны и действительны, то общее решение ур-я имеет вид

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \gamma_2 e^{\lambda_2 t} \\ y_2(x) = C_1 \mu_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mu_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Найдем γ_1 γ_2 и μ_1, μ_2

1) $\lambda_1 = 5$

$$\begin{cases} -\cancel{7}\gamma_1 + 2\mu_1 = 0 \\ 7\gamma_1 - 2\mu_1 = 0 \end{cases}$$

$\mu_1 = \frac{7}{2}\gamma_1$

Тогда при $\gamma_1 = 2$ $\mu_1 = 7$

2) $\lambda_2 = -4$

$$\begin{cases} 2\gamma_2 + 2\mu_2 = 0 \\ 7\gamma_2 + 7\mu_2 = 0 \end{cases}$$

$\gamma_2 = -\mu_2$

при $\gamma_2 = 1$ $\mu_2 = -1$

Тогда получаем общее решение исходной системы

$$\begin{cases} y_1 = 2C_1 e^{5x} + C_2 e^{-4x} \\ y_2 = 7C_1 e^{5x} - C_2 e^{-4x} \end{cases}$$

т.к. $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ точка покоя седло

Найдем фундаментальную систему решений

$$\begin{bmatrix} 2e^{5x} & e^{-4x} \\ 7e^{5x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}$$

Посчитаем определитель чтобы убедиться, что система линейно независима

$$\begin{vmatrix} 2e^{5x} & e^{-4x} \\ 7e^{5x} & -e^{-4x} \end{vmatrix} = -2e^{x} - 7e^{x} \neq 0 \Rightarrow$$ система линейно независима

$$\bar{y} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} e^{5x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4x}$$

Перейдем от системы к одному ДУ 1 пор-ка $y_2(y_1)$

Для этого поделим 2-е ур-е сист на 1-е

$$\frac{\frac{dy_2}{dx}}{\frac{dy_1}{dx}} = \frac{7y_1 + 3y_2}{-2y_1 + 2y_2} \qquad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{7y_1 + 3y_2}{-2y_1 + 2y_2}$$

Найдем особую точку $\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 = 0 \\ -2y_1 + 2y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0;0)$

Задание 2. Решите систему уравнений методом исключений и сравните результат с ответом в Марле

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 3y_2 \quad (1) \\ y_2' = 4y_1 + 9y_2 \quad (2) \end{cases}$$

Решение Продифф. второе ур-е системы по x:

$$y_2'' = 4y_1' + 9y_2' \Rightarrow y_1' = \frac{y_2'' - 9y_2'}{4}$$

из (2) $y_1 = \dfrac{y_2' - 9y_2}{4}$

Подставим
$y_2 \dfrac{'' - 9y_2}{4}$
$y_2'' - 14y_2'$
Сост
$\lambda^2 - 14$
$\lambda_1 =$
Тогда
$y_2 =$
$y_2' $
Тогд
Общее
Зада
Лагр
Реш

Подставим полученные y_1' и y_1 в 1

$$\frac{y_2''-9y_2'}{4} = \frac{5(y_2'-9y_2)}{4} + 3y_2$$

$y_2'' - 14y_2' + 33y_2 = 0$ — линейное однородное ДУ с коэфф.

Составим характ. ур-е

$$\lambda^2 - 14\lambda + 33 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 11$$

Тогда общее решение одн. ур-я:

$$y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{11x}$$

$$y_2' = 3C_1 e^{3x} + 11C_2 e^{11x}$$

Тогда $y_1 = \frac{y_2' - 9y_2}{4} = \frac{C_2 e^{11x} - 3C_1 e^{3x}}{2}$

Общее решение системы

$$\begin{cases} y_1 = \frac{C_2 e^{11x} - 3C_1 e^{3x}}{2} \\ y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{11x} \end{cases}$$

Задание 3. Решите задачу Коши с помощью методов Лагранжа и Даламбера. Сравните с результатом в Maple. Сравните график

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 5 \end{matrix}$$

Решение: Метод Лагранжа

стема

-ия

$y_2(y_1)$

$;0)$

ол

тоя

по x:

1) Ищем общее реш. соотв. однор. системе

Ее характ. ур-е:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$

При $\lambda_1 = 3$ соотв. алгебр. система

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \end{cases} \qquad \gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = 1$$

Получаем частные решения

$$x_1 = e^{3t} \quad y_1 = e^{3t}$$

При $\lambda_2 = -1$ система принимает вид

$$\begin{cases} 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = -\gamma_2 \quad \gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = -1$$

$$x_2 = e^{-t} \quad y_2 = -e^{-t}$$

Общее решение исходной одн. системы

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \\ y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} \end{cases}$$

$C_1 = C_1(t)$ $C_2 = C_2(t)$ подставим в заданную неодн. систему, предварительно найдя производные этих ф-ций

Получим следующее:

$$\begin{cases} C_1' e^{3t} + C_2' e^{-t} = 0 \\ C_1' e^{3t} - C_2' e^{-t} = 1 \end{cases}$$

Найдем C_1' и C_2' из этой системы

$$\begin{cases} C_2' = -\frac{1}{2} e^{t} \\ C_1' = \frac{1}{2} e^{-3t} \end{cases} \rightarrow \text{интегрируем и получаем} \quad \begin{cases} C_2 = -\frac{1}{2} e^{t} + C_2 \\ C_1 = -\frac{1}{6} e^{-3t} + C_1 \end{cases}$$

Окончательно после подстановки

$$\begin{cases} x(t) = \left(-\frac{1}{6} e^{-3t} + C_1\right) e^{3t} + \left(-\frac{e^{t}}{2} + C_2\right) \cdot e^{-t} \\ y(t) = \left(-\frac{e^{-3t}}{6} + C_1\right) e^{3t} - \left(-\frac{e^{t}}{2} + C_2\right) e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \frac{2}{3} \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Решим задачу Коши $\quad x(0)=0 \quad y(0)=5$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 - \frac{2}{3} \\ 5 = C_1 - C_2 + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{8}{3} \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} e^{3t} - 2e^{-t} - \frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3} e^{3t} + 2e^{-t} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Метод Даламбера

Находим λ из ур-я $\qquad \frac{2+\lambda}{1+2\lambda} = \lambda$

$2 + \lambda = \lambda + 2\lambda^2 \qquad \lambda = \pm 1$

Значит получили 2 интегр. комбинации

Для $\lambda = 1$ $\quad z = x+y$

$$z' = 3z + 1$$

$$\frac{dz}{3z+1} = dt$$

$$\frac{1}{3}\ln|3z+1| = t + C_1$$

$$3z+1 = e^{3t}\cdot C_1$$

$$z = x+y = \frac{e^{3t}\cdot C_1 - 1}{3}$$

Для $\lambda = -1$ $\quad z = x-y$

$$z' = -z + 1$$

$$\frac{dz}{-z+1} = dt$$

$$x - y = z = e^{-t}C_2 + 1$$

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{e^{3t}C_1 - 1}{3} \\ x - y = e^{-t}C_2 + 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{решаем систему}} \begin{cases} x = C_2e^{-t} + e^{3t}C_1 + \frac{1}{3} \\ y = e^{3t}C_1 - e^{-t}C_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

Задача Коши (аналогично)

$$C_1 = \frac{8}{3} \qquad C_2 = -2$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{8}{3}e^{3t} - 2e^{-t} + \frac{1}{3} \\ y = \frac{8}{3}e^{3t} + 2e^{-t} - \frac{2}{3} \end{cases}$$