Висша алгебра, ТК3, Информатика

Кристиян Стоянов

25 май 2019 г.

1

1.1 Теорема за делене на полиноми с остатък

F - поле и $f, g \in F[x], g \neq 0$
Съществува двойка полиноми $q, r \in F[x]$, такива че
$f = gq + r$ и $degr < degg$

1.2 Схема на хорнер

Нека $f = a_0x^n + ... + a_n, g = x - \alpha \in F[x]$
Нека $f = gq + r$, където $degr < degg$ и $r \in F$ и $q = b_0x^{n-1} + ... + b_{n-1}$
Тогава

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = a_1 + \alpha b_0$$
$$b_2 = a_2 + \alpha b_1$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2},$$
$$r = a_n + \alpha b_{n-2}$$

1.3

Ако F е поле, всеки идеал I от пръстена $F[x]$ е главен идеал.

1.4

К област $f \in K[x], degf \leq n$ и $f \neq 0$. f не може да има повече от n различни корена.

1.5 Сравнение на коефициенти на полиноми

Нека К - област и $g_1, g_2 \in K[x]$. Нека $degg_1, degg_2 \leq n$ и съществуват два по два различни елемента $\alpha_1, ...\alpha_n + 1$ от К, такива че $g_1(\alpha_i) = g_2(\alpha_i)$ $i = 1, ..., n+1$. Тогава $g_1 = g_2$

2

2.1 Делимост на полином

Нека $f, g \in F[x]$ и $g \neq 0$.
Ако $\exists q \in F[x]$, такова че $f = qg$. Тогава $g|f$.

2.2

Нека $f_1, f_2, g \in F[x]$.
Ако $g|f_1f_2$ и $(g, f_1) = 1$ тогава $g|f_2$.

2.3 НОД

Нека $f, g \in F[x]$ и $f \neq 0 \vee g \neq 0$.
d е най-голям общ делител на f и g ако:
1. $d|f, d|g$
2. Ако $d_1|f, d_1|g$ то $d_1|d$.
Записва се: $(f, g) = d$

2.4 Безу

Нека $f, g \in F[x]$ и $f \neq 0 \vee g \neq 0$.
Ако $(f, g) = d$ то $\exists u, v \in F[x]$, такова че $uf + vg = d$.

2.5 НОК

Нека $f, g, k \in F[x]$ k е най-малко общо кратно f и g ако:
1)$f|k \wedge g|k$
2)$f|k_1 \wedge g|k_1$ то $k|k_1$
Записва се: $[f, g] = k$

2.6

Нека $f, g \in F[x]$
1) Идеалът $(f) + (g)$ е породен от (f, g)
2) Идеалът $(f) \cap (g)$ е породен от $[f, g]$

2.7

Нека $f \in F[x]$ и $degf > 0$. f е неразложим над F ако не може да се представи като произведението на два полинома $g, q \in F[x]$ където $degg, degq < degf$.

2.8

Ако $f_1, f_2, p \in F[x]$, където p е неразложим и $p|f_1f_2 \wedge p \nmid f_1$ то $p|f$.

2.9 Теорема за еднозначно разлагане на полиноми

$\forall f \in F[x], f \neq const$ се разлага на неразложими над F полиноми.
Ако $f = p_1...p_k = q_1...q_s$ са две разлагания, то $k = s \wedge \forall i = 1, ..., k : p_i = a_i q_i$

3

3.1

Ако $f \in F[x], degf > 0$ и $I = (f)$ тогава
$F[x]/I$ е поле само когато f е неразложим над F.

3.2 Поле на разлагане на полином над поле

Нека $f \in F[x], degf > 0$ L е разширение на F, което съдържа всички корени на f и $L_i \subset L$, $i \in I$.

Сечението $\cap_i L_i$, където L_i съдържа F и всички корени на f ще наричаме поле на разлагане на f над полето F.

3.3 Формули на Виет

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}$
$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$
.
.
.
$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = (-1)^n \frac{\alpha_n}{\alpha_0}$

3.4 К-кратен корен

Нека $f \in F[x]$, K е разширение на F и $\alpha \in K$.
α е к-кратен корен на f $(k >= 1)$ ако $f = (x - \alpha)^k g$, $g \in K[x] \wedge g(\alpha) \neq 0$.

3.5 НДУ за кратен корен на полином

Един полином има кратен корен, когато има общ корен с производната си.

4

4.1 Лема за старши едночлен на полином с много променливи

Нека A - област $\wedge$ $0 \neq f, g \in A[x_1, ..., x_n]$.
Тогава старшият едночлен на полинома fg е равен на произведението на старшите едночлени на f и g.

4.2 Симетрични полиноми

Нека $f = f(x_1, ..., x_n) \in A[x_1, ..., x_n]$.
f е симетричен полином ако $\forall \sigma \in S_n : f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$.

4.3 Основна теорема за симетрични полиноми

Нека $f = f(x_1, ..., x_n) \in A[x_1, ..., x_n]$. f е симетричен
Тогава $\exists! g \in A[x_1, ..., x_n]$, такова че $f(x_1, ..., x_n) = g(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

4.4

$\sigma_1(x_1, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$,
$\sigma_2(x_1, ..., x_n) = x_1x_2 + x_1x_2 + ...x_{n-1}x_n$,
.
.
.
$\sigma_n(x_1, ..., x_n) = x_1x_2...x_n$

4.5 Формули на Нютон

$S_k = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$, $k = 0, 1, 2$
S_k - симетричен полином наричан степенна сума
$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + ... + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k \sigma_k = 0$

5

5.1 Дискриминанта на полином

Нека $f = a_0x^n + ...a_n \in F[x], a_0 \neq 0 \wedge n > 0$. и Нека L е разширение на полето F, което съдържа всички корени на f.

$$D(f) = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \text{ (for } n > 1)$$

5.2

$D(f) = a_0^{n-2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(\alpha_1) \dots f'(\alpha_n)$.

5.3 Резултанта

Нека $f = a_0x^n + ... + a_n$, $g = b_0x^s + \cdots + b_s \in F[x], a_0 \neq 0 \wedge b_0 \neq 0$ и $n, s > 0$.
и нека L е разширение на F, което съдържа всички корени $\alpha_1, ..., \alpha_n$ на f и всички корени $\beta_1, ..., \beta_s$ на g

$$R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_i) \in L$$

5.4

$R(f, g) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i).$

5.5

$R(f, f') = a_0(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(f).$

6

6.1 Примитивни полиноми

$f = a_0x^n + \cdots + a_n \in Z[x]$ е примитивен ако $(a_0, ..., a_n) = 1$.

6.2 Лема(Гаус)

Произведението на два примитивни полинома също е примитивен полином.

6.3

$f \in Z[x]$ и неразложим над Q тогава и само тогава, когато f не е разложим и над Z.

6.4 Критерий на Айзенщайн

Ако $f = a_0x^n + ... + a_n \in Z[x] \wedge \exists$ число p(просто), за което:
1) $p \nmid a_0$
2) $p \mid a1, ..., a_n$
3) $p^2 \nmid a_n$
То f е неразложим над Q.