Czym jest optymalizacja liniowa?

Krzysztof Makowski, Kamil Pietruszewski

W tym artykule skupimy się na optymalizacji liniowej, a dokładniej programie liniowym, czyli problemie polegającym na maksymalizacji lub minimalizacji pewnego wyrażenia liniowego n zmiennych nazywanego funkcją celu. Warunki ograniczające zmienne mają postać równań i nieostrych nierówności liniowych. Istnieje gros problemów, które daje się w ten właśnie sposób zapisać oraz aparat matematyczny, który przy pomocy komputera pozwala na szybkie znajdowanie optymalnej wartości i argumentów, dla których jest ona przyjmowana.

Okazuje się, że każdy taki problem daje się po pewnej modyfikacji sprowadzić do tzw. postaci standardowej, tj. maksymalizacji funkcji celu przy założeniach tworzących układ jedynie nieostrych nierówności $\leqslant$ i założeniu, że wszystkie (być może sztucznie zmodyfikowane zmienne) są nieujemne.

Ograniczmy się przez chwilę do przypadku dwóch zmiennych. Weźmy warunki $y \leqslant -\frac{1}{2}x+1$ i $y \leqslant -2x+2$ oraz oczywiście $y,x \geqslant 0$. Widzimy, że obszarem na którym maksymalizować będziemy funkcję celu jest czworokąt ABCD, gdzie A(0,0), B(0,2), C($\frac{2}{3}$,$\frac{2}{3}$), D(0,2). W trójwymiarowych przykładach będzie to wielościan, a dla 4 i więcej zmiennych wielościan przestrzenny, który ... trudno sobie wyobrazić. Daje się uzasadnić, że wartość maksymalna istnieje i "wybijana" jest w jakimś wierzchołku. Student Matematyki mógłby to zrobić np. używając pojęć takich jak zwartość i gradient. Istnieje pewna metoda, zwana metodą sympleks, graficznie polegająca na wędrowaniu po wierzchołkach wielościanu tak, by wartość funkcji celu powiększać w sposób możliwie największy. Jest ona bardzo popularna i na niej też bazować będzie nasze rozwiązanie zaimplementowane w solwerze. Warto tutaj zaznaczyć, że nie istnieje metoda jednostajnie poprawna; tzn. dla każdej ze znanych metod poszukiwania rozwiązania optymalnego, w tym dla metody sympleks (o której przeczytać można pod adresem http://pl.wikipedia.org/wiki/Algorytm_sympleksowy), daje się skonstruować program liniowy, na którym algorytm się "zatnie", np. poprzez wpadnięcie w cykl. Jednak w przykładach "z życia" takie sytuacje raczej się nie zdarzają.

Przykładowe problemy dające się zakodować jako program liniowy to przepływy gotówkowe, planowanie lotów personelu lotniczego, przepływ ropy, problem hetmanów, problem kojarzenia małżeństw, problem komiwojażera i wiele innych..

Rozważmy praktyczny problem. W pewnej szkole stołówka chciałaby skomponować dania obiadowe składające się z mięsa, produktu mącznego (np. ryżu) i surówki. Z powodów dietetycznych i formalnych takie zestawy muszą spełniać pewne założenia. Dla uproszczenia załóżmy, że w skład każdego takiego zestawu wchodzi dokładnie jeden rodzaj mięsa, jeden rodzaj produktu mącznego lub zbożowego, jak i jeden rodzaj surówki. Naszym zadaniem będzie nie tylko skomponowanie takich zestawów, które spełniać będą całkiem mocno wiążące wymagania kaloryczne i odżywcze, ale i wybranie spośród nich tych, które są cenowo najbardziej opłacalne. W tym celu posłużymy się optymalizacją liniową i pomocą komputera.

Dla uproszczenia wybraliśmy 10 rodzajów mięs, 10 rodzajów produktów mącznych i 10 rodzajów surówek. Dla każdego z 10^3 zestawów napisaliśmy warunki kaloryczne i odżywcze i minimalizowaliśmy dla niego cenę, po czym takie optymalnie skomponowane cenowo zestawy uporządkowaliśmy od najtańszego do najdroższego. Przyjęliśmy, że posiłek powinien mieć (z tolerancją 20%) 800 kalorii, 26g tłuszczów, 120g węglowodanów, co najmniej 20g białka i 8g błonnika. Założyliśmy również, że mięsa jak i produktu mącznego ma być 100-400g, a surówki 100-280g. Zwycięzcą został się Zestaw nr 1 składający się z wątróbki drobiowej, surówki z marchwi i jabłka oraz kaszy pęczak. Cena jego produkcji wyniosła 1,58zł. Pełna listę dopuszczalnych obiadów (których swoją drogą jest tylko/aż 146) można obejrzeć pod adresem http://tinyurl.com/zywnosc.

Jeśli więc drogi Czytelnik zobaczy na stołówce Zestaw nr 1, może spytać, czy do jego skomponowania użyto metody sympleks..