Model matematyczny planowania zajęć na AGH

1) Potrzebne struktury danych

1. Rozpiska prowadzących: Każdemu prowadzącemu przypisujemy listę prowadzonych przedmiotów np.:
   dr hab. Wojciech Chmiel – [wykład BO2, ćw. BO2 gr.1, ćw. BO2 gr.3 ...]
   Oznaczmy ją przez $P(p) = G_p$, gdzie P oznacza funkcję przypisania prowadzącego p do listy grup zajęciowych prowadzącego G_p.
2. Każdemu studentowi także przypisujemy jego grupę w danym przedmiocie, np.:
   Krzysztof Piwkowski – [wykład BO2, ćw. BO2 gr.2, wykład TS, ćw. TS gr.4 ...]
   Oznaczmy to jako $S(s) = G_s$, gdzie S oznacza funkcję przypisania studenta s do listy grup zajęciowych studenta G_s. Jeżeli kilku różnych studentów posiada te same grupy zajęciowe
3. Każdej sali przypisujemy możliwe do prowadzenia w niej przedmioty. Niektóre sale, np. wykładowe, audytoryjne, będą mogły przeprowadzać wykład/ćw. aud. dla wszystkich przedmiotów, natomiast sale laboratoryjne powinny mieć ściśle określone ćwiczenia np.:
   Sala H24, HB1B2 – [wykład BO2, wykład TS, wykład MO, ...]
   Sala D2, 1.11 – [ćw. BO2 gr.1, ćw. BO2 gr.2, ćw. BO2 gr.3, ...]
   Oznaczmy je jako $R(r) = G_r$ (R jak Room), gdzie R oznacza funkcję przypisania sali r do listy grup zajęciowych G_r, które można poprowadzić w konkretnej sali.

WAŻNE! Każdy student i prowadzący musi mieć w swoim planie wszystkie grupy zajęciowe do niego przypisane, czyli te, które znajdują się w listach grup G_s i G_p. Każda sala musi mieć w planie użytkowania wszystkie grupy zajęciowe do niej przypisane - G_r. Oznacza to, że w omawianym problemie **nie określamy przypisania grup zajęciowych do studentów i prowadzących**. Są one z góry określone. **Sale jednak są przypisywane w rozwiązaniu** i wiele różnych sal może mieć przypisane te same przedmioty w funkcji R.

4. Przypisanie czasu trwania do konkretnych zajęć, zwykle 1:30, ale może być dłużej, np. 2:15, 3:00...
   Oznaczenie: $T(g) = t_g$, gdzie T to funkcja przypisania czasu trwania t_g grupy zajęciowej g
5. Przypisanie czasu potrzebnego do przygotowania zajęć. Czas ten będzie wliczany do planu sali i prowadzącego, jednak nie do planu studenta.
   Oznaczmy to jako $T_{add}(g) = t_{add}$, gdzie funkcja T_{add} oznacza przypisanie do każdej grupy zajęciowej g dodatkowego czasu t_{add} potrzebnego do przygotowania zajęć przed ich odbyciem.

6. Określone godziny możliwych zajęć na uczelni

$$t_0 = 8{:}00$$
$$t_k = 20{:}00$$

gdzie t_0 to planowa godzina rozpoczęcia zajęć na AGH, a t_k to planowy czas zakończenia zajęć na AGH.

2) Postać rozwiązania

Rozwiązaniem jest przypisanie każdej grupie zajęciowej na każdym przedmiocie na danym kierunku - dnia tygodnia i godziny rozpoczęcia zajęć np.:
ćw. BO2 gr.2 – [środa, 8:00, D1 1.11]
Oznaczmy to jako $x = x(g) = [d, h, s]$, czyli rozwiązaniem jest funkcja x przypisująca każdej grupie zajęciowej g wektor składający się z dnia tygodnia d, godziny rozpoczęcia h i sali zajęciowej s.

Rezultatem otrzymanego rozwiązania są trzy zestawy funkcji $P_{s_i}(x), P_{p_i}(x)$ i $P_{r_i}(x)$, reprezentujące odpowiednio plan i-tego studenta, prowadzącego i sali zajęciowej. Te plany będą podlegały ocenie następującymi funkcjami celu:

3) Funkcja celu

Podstawową funkcją celu do oceny jakości otrzymanego rozwiązania jest ilość kolizji w planie. W rzeczywistym planie zajęciowym każdy student oraz prowadzący muszą mieć statutową przerwę między zajęciami, to jest co najmniej 15 minut:

$$\Delta h \geq 15\mathrm{min}$$

gdzie:
$\Delta \mathrm{h} = \mathrm{h}_{\mathrm{n+1}} - (\mathrm{h}_{\mathrm{n}} + T(g_n))$, dla studentów, i
$\Delta \mathrm{h} = \mathrm{h}_{\mathrm{n+1}} - (\mathrm{h}_n + T(g_n) + T_{add}(g_n))$, dla prowadzących

Przepis przerw między zajęciami nie usługuje wuefistom AGH, którzy mogą prowadzić zajęcia bez przerw.
Sale zajęciowe nie potrzebują 15 minutowych przerw, lecz obowiązuje dla nich czas potrzebny do przygotowania zajęć:

$$\Delta \mathrm{h} = \mathrm{h}_{\mathrm{n+1}} - (\mathrm{h}_n + T(g_n) + T_{add}(g_n)),$$

lecz w tym przypadku $\Delta h \geq 0min$

Możemy sumować ilość kolizji w różnych planach, aby otrzymać wspólne kryterium jakości:

$$f(x) = k_s + k_p + k_r,$$

gdzie f to nasza funkcja celu przypisująca każdemu rozw. x sumę liczby kolizji w planach studentów k_s, prowadzących k_p i sal k_r.

Przykładowy sposób obliczania kolizji w planach (przykładowo dla planu studentów, inne plany można liczyć analogicznie z małymi zmianami):

1. Początkowo $k_s = 0$.
2. Dla każdego studenta:
   Sprawdzamy listę grup zajęciowych, do których został przypisany. Sprawdzamy dni tygodnia przypisane do grup z rozwiązania x i dzielimy je na odpowiednie dni tygodnia. Następnie sortujemy w każdym dniu tygodnia grupy zajęciowe, wobec ich czasów rozpoczęcia, otrzymując ciąg kolejnych zajęć w ciągu konkretnego dnia. Np.:
   Środa – (ćw. BO2 gr.2 $[h_1 = 8{:}00]$, wykład BO2 $[h_2 = 9{:}45]$, wykład AA $[h_3 = 18{:}30]$).
3. Następnie liczymy różnice między godziną rozpoczęcia, a godziną zakończenia zajęć kolejnych wyrazów ciągu:
   $$\Delta h = h_{n+1} - (h_\mathrm{n} + T(g_n))$$
   Jeżeli $\Delta h < 15min \rightarrow k_s = k_s + 1$
   Operację tę wykonujemy dla każdego ciągu zajęć w tygodniu.
4. Po przejrzeniu planów wszystkich studentów -> STOP

Naszym zadaniem jest minimalizacja kolizji w planie zajęciowym, więc naszym rozwiązaniem optymalnym jest:

$$x^* = argmin_{x \in X}\{f(x)\}$$

Głównym celem modelu jest otrzymanie rozwiązania (lub zbioru rozwiązań), w którym ilość kolizji będzie równa 0, czyli:

$$f(x) = 0$$

taki plan może już zostać użyty w rzeczywistych zastosowaniach.

Po otrzymaniu planu z zerową ilością kolizji możemy go dalej optymalizować pod względem wygody dla prowadzących/studentów. Dodatkowe kryteria poprawiające jego jakość końcową to np.:

1. Ilość niepotrzebnych „okienek” w planie
2. Czy uczestnicy zajęć mają przerwę obiadową?
3. Czy uczestnicy mają dłuższą przerwę między długimi seriami zajęć? (np. co 3 godziny powinna być dłuższa przerwa)
4. Czy zajęcia kończą się możliwie najwcześniej?
5. Czy zajęcia rozprowadzone są między każdy dzień tygodnia równomiernie?
6. Czy dałoby się wyznaczyć wolny poniedziałek/piątek, bez zbędnego przeciążania planów w środku tygodnia?

Te cele poboczne optymalizacji mogą zostać dostosowane po otrzymaniu gotowego planu. Możliwe mogłoby być wybranie planu ze zbioru rozwiązań z zerową ilością kolizji.

4) Ograniczenia i warunki

1. Zajęcia mają trwać podczas godzin planowych na AGH, czyli od 8:00 do 20:00:
   Dla każdej wartości h w $x(g) = [d, h, r]$:
   $$h - T_{add}(g) \geq t_o = 8:00$$
   $$h + T(g) \leq t_k = 20:00$$
2. Ze względu na praktyczność uzyskanego planu, konieczna jest dyskretyzacja możliwych godzin zajęć (tak, aby w ostatecznym wyniku zajęcia nie zaczynały się np. o 12:53). W takim razie należy ułożyć siatkę godzin, w których możliwe jest rozstawienie zajęć – najlepiej co kwadrans. W takim razie od 8:00 do 20:00 mamy 12 x 4 + 1 = 49 możliwych miejsc ustawienia zajęć. Niektóre z nich natomiast nie mają sensu:
   - Zajęcia nie mogą zaczynać się później niż o 18:30: 49 – 6 = 43
   - Jeżeli zajęcia zaczynałyby się o 8.00, to nie ma sensu mieć możliwości ustawiania ich o 8:15, 8:30, 8:45, …, aż do 9:30: 43 – 6 = 37.
   Ostatecznie uzyskujemy 37 możliwych ustawień jednego przedmiotu na siatce zajęć jednego dnia. Mnożąc tę liczbę razy ilość dni roboczych w tygodniu uzyskujemy 37 x 5 = 185, co jest ilością możliwych ułożeń jednego przedmiotu w całym planie.