Exercícios - dúvidas

Krissia de Zawadzki [TA]

Vamos resolver abaixo alguns problemas das listas.

Problema 2

(a) Dado que

$$\hat{H}\,|\phi_n\rangle = E_n\,|\phi_n\rangle\,, \tag{1}$$

queremos mostrar que

$$\hat{H}(a^\dagger\,|\phi_n\rangle) = \alpha(a^\dagger\,|\phi_n\rangle), \tag{2}$$

e encontrar quem é α.

Temos o Hamiltoniano do Oscilador Harmônico Quântico definido em termos dos operadores posição de momento $\hat{X}$ e $\hat{P}$. Podemos mostrar que em termos dos operadores de aniquilação e destruição a e $a^\dagger$ o Hamiltoniano é escrito como

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \tag{3}$$

sendo que esses operadores obedecem à relação de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1. \tag{4}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned}\hat{H}(a^\dagger\,|\phi_n\rangle) &= \alpha(a^\dagger\,|\phi_n\rangle),\\ &= \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})a^\dagger\,|\phi_n\rangle\\ &= \hbar\omega\,a^\dagger a a^\dagger\,|\phi_n\rangle + \frac{\hbar\omega}{2}a^\dagger\,|\phi_n\rangle\\ &= \hbar\omega\,a^\dagger(1 + a^\dagger a)\,|\phi_n\rangle + \frac{\hbar\omega}{2}a^\dagger\,|\phi_n\rangle\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Observe o primeiro termo em parênteses $(1 + a^\dagger a)$. A menos de uma constante ele é equivalente ao operador Hamiltoniano. Pois, da relação(1), temos que $|\phi_n\rangle$ é autoestado do operador $a^\dagger a$. Explicitamente,

$$a^\dagger a\,|\phi_n\rangle = (\frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2})\,|\phi_n\rangle\,. \tag{6}$$

Voltando à equação 5, segue que

$$\begin{aligned}\hat{H}(a^\dagger\,|\phi_n\rangle) &= \hbar\omega\,a^\dagger(1 + \frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2})\,|\phi_n\rangle + \frac{\hbar\omega}{2}a^\dagger\,|\phi_n\rangle\\ &= \hbar\omega\left(1 + \frac{E_n}{\hbar\omega}\right)a^\dagger\,|\phi_n\rangle\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Desse modo, mostramos que $a^\dagger|\phi_n\rangle$ é autoestado de H com autovalor $\alpha = \hbar\omega\left(1 + \frac{E_n}{\hbar\omega}\right)$.

HOT HINT: Suponha que você está em dúvida quanto a essa resposta, mas soubesse que

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, ... \tag{8}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} a^\dagger|\phi_n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle \\ a\,|\phi_n\rangle &= \sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Perceba que $a^\dagger|\phi_n\rangle$ é autoestado de H com autovalor E_{n+1}!

Isso fica mais fácil de se perceber através das relações (9). [1]

Todos os ϕ_n's são autoestados de H. Então ϕ_{n+1} também é autoestado de H com autovalor E_{n+1}. Observe:

$$\begin{aligned} Ha^\dagger|\phi_n\rangle &= H\sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle \\ &= \sqrt{n+1}H\,|\phi_{n+1}\rangle \\ &= \sqrt{n+1}E_{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle \\ &= E_{n+1}\sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle \\ &= E_{n+1}(a^\dagger|\phi_n\rangle). \end{aligned} \tag{10}$$

(b) Da mesma forma que $a^\dagger|\phi_n\rangle$ é autoestado de H, o mesmo vale para $a\,|\phi_n\rangle$. Será que a combinação é autoestado também?

Para que a combinação

$$|\psi\rangle = (a + a^\dagger)\,|\phi_n\rangle \tag{11}$$

seja autoestado de H, ela deve satisfazer

$$\begin{aligned} H\,|\psi\rangle &= \beta\,|\psi\rangle \\ &= \beta(a\,|\phi_n\rangle) + \beta(a^\dagger|\phi_n\rangle). \end{aligned} \tag{12}$$

Verificando: sabemos que $Ha^\dagger|\phi_n\rangle = E_{n+1}a^\dagger|\phi_n\rangle$. Usando a dica acima ou repetindo os passos das equações (5)-(7), podemos mostrar que

$$\begin{aligned} Ha^\dagger|\phi_n\rangle &= E_{n+1}a^\dagger|\phi_n\rangle \\ Ha\,|\phi_n\rangle &= E_{n-1}a\,|\phi_n\rangle\,. \end{aligned} \tag{13}$$

[1] Das notas do OH quântico do prof. Luiz vocês não viram as relações (9). Mas, em caso de branco na prova, você pode usá-las mentalmente para conferir suas respostas ;)

Voltando à equação (12), segue que

$$H|\psi\rangle = E_{n+1}a^\dagger |\phi_n\rangle + E_{n-1}a|\phi_n\rangle\,. \tag{14}$$

Como não conseguimos escrever o lado direito como $\beta(a+a^\dagger)|\phi_n\rangle$, mas, sim, como $(\zeta a+\gamma a^\dagger)|\phi_n\rangle$ com $\zeta \neq \gamma$, $|\psi\rangle$ não é autoestado de H. [2]

Problema 3

Podemos mostrar que $a^\dagger a|\phi_n\rangle$ é autovetor de H calculando

$$\begin{aligned}
&Ha^\dagger a|\phi_n\rangle = \\
\hbar\omega\,(a^\dagger a+\frac{1}{2})a^\dagger a &= \hbar\omega\, a^\dagger a\;\underbrace{a^\dagger a|\phi_n\rangle}_{(\frac{E_n}{\hbar\omega}-\frac{1}{2})|\phi_n\rangle} + \frac{\hbar\omega}{2}a^\dagger a|\phi_n\rangle \\
&= E_n a^\dagger a|\phi_n\rangle - \frac{\hbar\omega}{2}a^\dagger a|\phi_n\rangle + \frac{\hbar\omega}{2}a^\dagger a|\phi_n\rangle \\
&= E_n a^\dagger a|\phi_n\rangle\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Então, o autovalor associado ao autoestado $a^\dagger a$ é E_n.

Apreciem: o fato de H e $N = a^\dagger a$ compartilharem os mesmos autoestados ocorre porque H é escrito em termos de N, como na equação (3). [3]

Problema 4

Nesse problema aparece o conceito de operador número

$$\mathcal{N} = a^\dagger a. \tag{16}$$

(a) Para mostrar que $\mathcal{N}$ é Hermitiano, devemos mostrar que $\mathcal{N}^\dagger = \mathcal{N}$. Para isso podemos trabalhar com as projeções

$$\langle\phi_m|\mathcal{N}|\phi_n\rangle = (\langle\phi_n|\mathcal{N}^\dagger|\phi_m\rangle)^*. \tag{17}$$

Assim, se $\mathcal{N}$ é Hermitiano, $\langle\phi_m|\mathcal{N}|\phi_n\rangle = \langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_m\rangle$.

No problema 2, eq. (6), mostramos qual o autovalor do operador $\mathcal{N}$ quando ele atua em $|\phi_n\rangle$. Sabendo que as energias do OH quântico são dadas como na eq. (8), segue que

$$\mathcal{N}|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle\,. \tag{18}$$

[2] Recordem-se que essa relação já apareceu antes nos autoestados da partícula no poço infinito quando tentávamos combinar os $\psi_n(x)$ com os $\psi_m(x)$ para formar autoestados de H.

[3] Em breve vocês vão ver uma discussão sobre os chamados (CSCO) *Complete set of commuting observables* em que a beleza desse compartilhamento de autovetores ficará explícita.

Com isto, os valores esperados que nos interessam são

$$\begin{aligned}\langle\phi_m|\mathcal{N}|\phi_n\rangle &= n\langle\phi_m|\phi_n\rangle\\ \langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_m\rangle &= m\langle\phi_n|\phi_m\rangle\,.\end{aligned}\tag{19}$$

Como os autoestados de H são ortonormais, $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{n,m}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\langle\phi_m|\mathcal{N}|\phi_n\rangle &= n\,\delta_{m,n}\\ \langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_m\rangle &= m\,\delta_{n,m}.\end{aligned}\tag{20}$$

Como $n\,\delta_{m,n} = m\,\delta_{m,n}$, pois sempre podemos mudar as variáveis $n \leftrightarrow m$, segue que a condição(17) é satisfeita.

Outra forma de pensar é relacionar H com o operador $\mathcal{N}$. Como H e $H - \frac{1}{2}\hbar\omega\mathcal{I}$ é Hermitiano, $\mathcal{N}$ também será. Note que a condição de H ser Hermitiano vem da definição do Hamiltoniano em termos dos operadores X e P. Ao reescrevê-lo em termos de a e $a^\dagger$ ele continua sendo Hermitiano.

(b) Queremos mostrar que

$$\mathcal{N} + 1 = aa^\dagger \tag{21}$$

a partir do comutador $[a, a^\dagger] = 1$. Temos que

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a = 1\\ &= aa^\dagger - \mathcal{N} = 1\\ aa^\dagger &= \mathcal{N} + 1.\end{aligned}\tag{22}$$

(c) O valor médio esperado de $\mathcal{N}$ pode ser obtido relacionando-o ao Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{N}\rangle &= \langle\phi_n|\,a^\dagger a\,|\phi_n\rangle\\ \langle\phi_n|\,H\,|\phi_n\rangle &= \hbar\omega(\langle\phi_n|\,a^\dagger a\,|\phi_n\rangle + \frac{1}{2})\\ E_n - \frac{\hbar\omega}{2} &= \hbar\omega\,\langle\phi_n|\,a^\dagger a\,|\phi_n\rangle\\ \langle\mathcal{N}\rangle &= \frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\\ \langle\phi_n|\,\underbrace{a^\dagger a}_{\mathcal{N}}\,|\phi_n\rangle &= n.\end{aligned}\tag{23}$$

(d) Queremos obter a norma do estado $|\psi\rangle = a\,|\phi_n\rangle$, isto é, encontrar a norma α tal que

$$\alpha^2 = \langle\psi|\psi\rangle\,. \tag{24}$$

Para isso, fazemos

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \langle\phi_n| a^\dagger a |\phi_n\rangle \\ &= n.\end{aligned} \tag{25}$$

Assim, $\alpha = \sqrt{n}$.

(e) Semelhantemente, queremos obter a norma do estado $|\varphi\rangle = a^\dagger |\phi_n\rangle$, isto é, encontrar a norma β tal que

$$\beta^2 = \langle\varphi|\varphi\rangle . \tag{26}$$

Para isso, fazemos

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\varphi\rangle &= \langle\phi_n| aa^\dagger |\phi_n\rangle \\ &= \langle\phi_n| (\mathcal{N}+1) |\phi_n\rangle \\ &= n+1.\end{aligned} \tag{27}$$

Assim, $\beta = \sqrt{n+1}$.

HOT HINT: guardem esse resultado! Lembrem que eu o evoquei no problema 3!

(f) O valor esperado de $|\phi_0\rangle$ que tem energia $E_{n'} = \frac{\hbar\omega}{2}$ pode ser obtido encontrando o número n' que satisfaz

$$\begin{aligned}\underbrace{E_n'}_{\frac{\hbar\omega}{2}} - \frac{\hbar\omega}{2} &= \hbar\omega\, n' \\ n' &= 0.\end{aligned} \tag{28}$$

(g) De modo análogo ao item (f), dada $E_{n'} = \frac{\hbar\omega}{2}$

$$\begin{aligned}\underbrace{E_n'}_{\frac{3\hbar\omega}{2}} - \frac{\hbar\omega}{2} &= \hbar\omega\, n' \\ n' &= 1.\end{aligned} \tag{29}$$

(h) Usando o resultado do problema 3, temos que

$$\begin{aligned}\langle\phi_n| Ha^\dagger a |\phi_n\rangle &= E_n \langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_n\rangle \\ (\frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}) \langle\phi_n| H |\phi_n\rangle &= E_n \langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_n\rangle \\ (\frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2})E_n &= E_n \langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_n\rangle \\ (\frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}) &= \langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_n\rangle .\end{aligned} \tag{30}$$

Para $E_n = \frac{\hbar\omega}{2}$, $\langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_n\rangle = 0$.

(i) Usando a relação de cima (30), com $E_n = \frac{3\hbar\omega}{2}$, $\langle\phi_n|\mathcal{N}|\phi_n\rangle = 1$.

Problemas 5 e 6

Vamos calcular os valores esperados dos operadores de destruição a e criação $a^\dagger$.

Aqui, eu vou pedir uma "licença poética"para fazer uma analogia que (talvez) facilite o entendimento dos operadores de criação e destruição. Se pensarmos que cada um dos n's que aparece nos autoestados $|\phi_n\rangle$ do OH Quântico está associado à "contagem de nós"do modo normal do OH, aplicar o a em $|\phi_n\rangle$ corresponderia a destruir um nó, enquanto aplicar $a^\dagger$ corresponderia a criar um nó a mais no modo normal. Uma outra forma é pensar em n como "número de partículas"do estado $|\phi_n\rangle$ e, aqui, estamos extrapolando a física do OH e fazendo uma analogia que aparece em outro contexto, mas que talvez torne mais fácil entender. Na analogia de N como o operador que conta o número partículas n de $|\phi_n\rangle$, a destrói uma partícula, fazendo com o que o estado vá para $n-1$ partículas, enquanto $a^\dagger$ faça o estado ganhar uma partícula e ficar em $n+1$. Novamente, eu reitero que essa analogia não está dizendo que o OH quântico em ϕ_n tem n partículas. É só uma forma de pensar.

Voltando ao problema 2, encontramos que $Ha^\dagger|\phi_n\rangle = E_{n+1}a^\dagger|\phi_n\rangle$ e $Ha|\phi_n\rangle = E_{n-1}a|\phi_n\rangle$. Veja que os índices $n+1$ e $n-1$ que aparecem nas energias nos mostram isso.

Podemos calcular o valor esperado dos operadores em questão através do comutadores

$$
\begin{aligned}
[H,a] &= -\hbar\omega a \\
\langle\phi_n|[H,a]|\phi_n\rangle &= -\hbar\omega\langle\phi_n|a|\phi_n\rangle \\
\langle\phi_n|Ha|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|aH|\phi_n\rangle &= -\hbar\omega\langle\phi_n|a|\phi_n\rangle \\
E_n\langle\phi_n|a|\phi_n\rangle - E_n\langle\phi_n|a|\phi_n\rangle &= -\hbar\omega\langle\phi_n|a|\phi_n\rangle \\
\langle\phi_n|a|\phi_n\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Aqui, note: na última passagem, como H é Hermitiano, ele pode atuar tanto nos bra's quanto nos ket's e retorna o seu autovalor!

Repetindo esse procedimento com o operador de criação, segue que

$$
\begin{aligned}
[H,a^\dagger] &= \hbar\omega a^\dagger \\
\langle\phi_n|[H,a^\dagger]|\phi_n\rangle &= -\hbar\omega\langle\phi_n|a^\dagger|\phi_n\rangle \\
\langle\phi_n|Ha^\dagger|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|a^\dagger H|\phi_n\rangle &= \hbar\omega\langle\phi_n|a^\dagger|\phi_n\rangle \\
E_n\langle\phi_n|a^\dagger|\phi_n\rangle - E_n\langle\phi_n|a^\dagger|\phi_n\rangle &= \hbar\omega\langle\phi_n|a^\dagger|\phi_n\rangle \\
\langle\phi_n|a^\dagger|\phi_n\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Com aquelas relações (9) que eu comentei acima que vocês ainda verão, também chegamos a esta conclusão. Os ϕ_n's ($n = 0, 1, 2...$) são autoestados ortonormais de H. Então

$$
\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{m,n}. \tag{33}
$$

Assim

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\,a\,|\phi_n\rangle &= \sqrt{n}\underbrace{\langle\phi_n|\phi_{n-1}\rangle}_{\delta_{n,n-1}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\,a^\dagger\,|\phi_n\rangle &= \sqrt{n+1}\underbrace{\langle\phi_n|\phi_{n+1}\rangle}_{\delta_{n,n+1}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{35}$$