Modelagem Matemático-computacional
Aula 8

Nesta aula apresentaremos equações diferenciais ordinárias e parciais. Exemplificaremos a modelagem de dinâmicas populacionais por meio de equações diferenciais, apresentando seus parâmetros e suas soluções.

I. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação diferencial é uma equação na qual a incógnita a ser determinada é uma função. Este tipo de equação envolve, além da função, suas derivadas e uma ou mais variáveis da função. Existem duas categorias de equações diferenciais: ordinárias (E.D.O) e parciais (E.D.P). Em uma E.D.O. a função $y(x)$ da equação envolve apenas uma variável x e derivadas em relação a esta variável, como por exemplo $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$. Por outro lado, uma E.D.P. contém uma função $z(x,y)$ e suas derivadas em relação a x e/ou y, como por exemplo $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Campos direcionais

A solução de uma dada E.D.O. depende das condições iniciais impostas pelo problema modelado, ao passo que uma E.D.P. requer também as condições de contorno do problema. Em geral, uma E.D.O. de 1ª ordem é resolvida analiticamente produzindo uma expressão conveniente para trabalhar o problema. É possível que uma dada solução de uma E.D.O. seja obtida graficamente: são os chamados *campos direcionais*. Um campo direcional associa a cada ponto do espaço y', y ou x, y um vetor cuja direção e magnitude são determinadas pela equação diferencial. Mais adiante, discutiremos como são construídos campos direcionais para modelos de crescimento de populações. Escolhido um ponto do espaço onde o campo direcional foi desenhado, basta seguir a direção dos vetores que a solução será dada graficamente.

Pontos de equilíbrio

Em Física, define-se equilíbrio de um corpo como a situação na qual a força resultante externa é nula e a soma de todos os momentos de todas as forças externas sobre uma linha é nula. Um ponto de equilíbrio é classificado conforme uma perturbação é capaz de levá-lo a uma situação em que o equilíbrio possa ou não ser restabelecido. Quando uma perturbação provocada no sistema causa um movimento que leva à situação original, o equilíbrio é dito *estável*. Caso contrário, temos um ponto de equilíbrio *instável*.

Sendo força e momentos associados a equações diferenciais para o movimento do corpo, pode-se usar conceitos de cálculo para determinar em qual situação o equilíbrio pode ser atingido. Em cálculo, quando uma derivada é nula existe um ponto de mínimo, máximo ou uma inflexão associados àquele ponto. Por exemplo, se um sistema está isento de momentos externos e sua força externa resultante é nula em um dado ponto, este ponto é dito um ponto de equilíbrio. A classificação do equilíbrio como instável ou estável requer o sinal da segunda derivada, que no exemplo de Física é a energia potencial. Quando a segunda derivada é negativa no ponto onde a derivada primeira se anula, ou seja, a energia potencial tem um mínimo local, temos um ponto de equilíbrio instável. Por outro lado, quando a energia potencial tem um máximo local, ou seja, é positiva, temos um ponto de equilíbrio estável. Caso a segunda derivada seja nula ou inexista, temos um ponto de inflexão.

Exemplos

As equações diferenciais, sejam ordinárias ou parciais, aparecem na formulação de muitos problemas em Física (1–3; 5). Exemplos:

- *Decaimento radioativo*: supondo que a taxa de decaimento nuclear seja λ, o número de decaimentos $-dN$ ocorridos num pequeno intervalo de tempo dt deve ser proporcional ao número N de átomos no momento presente. Então:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \qquad (1)$$

- *Oscilador Harmônico*: Um pêndulo, um sistema massa-mola, uma corda de violão ou mesmo um circuito RLC podem ser modelados pela equação de um oscilador harmônico. Esta equação envolve sempre derivadas segundas e pode ou não conter derivadas primeiras, um termo linear ou mesmo um termo inomogêneo:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t), \qquad (2)$$

onde m é a massa do oscilador, c está associada ao amortecimento provocado por uma força viscosa, k está associada à frequência natural de oscilação do sistema na ausência de c e $f(t)$ e, finalmente, $f(t)$ é uma força externa ao oscilador.

- *Difusão*: A difusão é um dos inúmeros processos de transporte que ocorrem na natureza. No processo de difusão uma substância (gás ou líquido por exemplo) se espalha no meio passando a ocupá-lo totalmente. Assim, a variação da densidade da substância a ser difundida obedece à equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\vec{\nabla}^2\phi, \tag{3}$$

com D sendo o coeficiente de difusão.

- *Equações de Maxwell*: No vácuo, as equações que descrevem como campos elétricos e magnéticos são gerados e alterados por cargas e correntes são equações diferenciais parciais.

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \\ &\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ é o divergente do campo vetorial $\vec{V}$ e $\vec{\nabla}\times\vec{V} = (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})\hat{x} + (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})\hat{y} + (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})\hat{z}$ é o rotacional de $\vec{V}$.

II. MODELOS POPULACIONAIS E E.D.O.'S

A. Equação de Malthus

Thomas Robert Malthus foi um economista britânico que viveu entre os séculos XVIII e XIX (4). Ele concebeu uma teoria populacional que ficou conhecida por *malthusianismo*, segundo a qual a demanda populacional não era acompanhada pela produção de recursos alimentícios. Uma frase baseada neste ideologia que que ficou bastante famosa foi 'A população cresce em progressão geométrica, enquanto os alimentos crescem em progrssão aritmética'. Malthus propôs soluções radicais para conter o crescimento populacional que deveria ser aplicada severamente às classes pobres. Ele preconizava abstenção sexual, defendia a eliminação da assistência do Estado aos pobres, indicando também a necessidade de 'obstáculos positivos' ao crescimento como guerras ou epidemias.

Em seu modelo matemático-demográfico, a equação diferencial que poderia servir como modelo era:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \tag{5}$$

que tem como solução $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$, sendo N o número de pessoas. Aqui, o parâmetro α está associado ao tempo que leva para a população prraticamente triplicar.

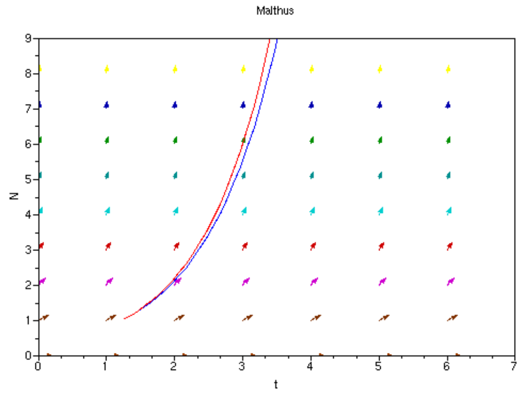

Figura 1 Campo direcional e duas soluções do modelo de Malthus com $\alpha = 1$.

B. Equação Logística

Outro modelo para o crescimento populacional foi proposto por Pierre François Verhulst na metade do século XIX (6) . Como uma pequena alteração do modelo de Malthus, a equação logística incorpora um fator de retardo do crescimento que garante o controle populacional.

Matematicamente, a equação diferencial para este modelo é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = P - P^2, \tag{6}$$

onde P é a população num dado instante de tempo. Podemos observar que esta equação tem dois pontos de equilíbrio: $P = 0$ é um ponto de equilíbrio instável ao passo que $P = 1$ é um ponto de equilíbrio estável. No campo direcional associado à equação logística é possível avaliar as soluções bem como os pontos de equilíbrio.

III. MODELOS PREDADOR-PRESA E SISTEMAS DE E.D.O'S

A. Equação de Lotka-Volterra

A interação entre duas espécies diferentes, particularmente entre presa e predador foi modelada por Alfred J. Lotka e Vito Volterra independentemente (7). Para tanto, ambos propuseram um sistema de equações diferenciais que acoplavam o número de predadores y com o número de presas x. Este sistema de equação é :

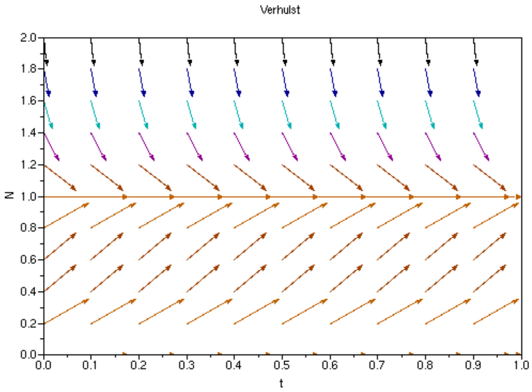

Figura 2 Campo direcional associado à equação logística.

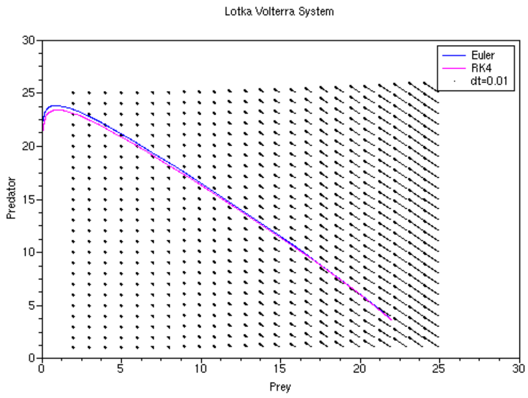

Figura 3 Campo direcional associado ao sistema de equações de Lotka-Volterra com todos os parâmetros fixados iguais a 1.

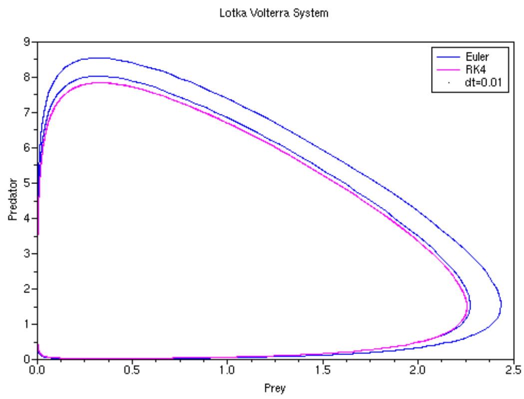

Figura 4 Soluções do sistema Lotka-Volterra com parâmetros normalizados em 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -y(\gamma - \delta x) \\
\frac{dx}{dt} &= x(\alpha - \beta y),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

onde as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são parâmetros definidos pela taxa de interação entre as espécies. Note que os sinais são importantes. Quanto maior o número de predadores, menor será o número de presas e maior a competição entre predadores.

O campo direcional do sistema de equações é construído associando a casa ponto do espaço predador-presa $(y-x)$ um vetor cujo módulo e direção é dado pelos valores de $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ nas respectivas direções. As soluções para o sistema são tangentes a estas derivadas e aparecem na figura 4.

Referências

[1] Boas, L. M., Mathematical Methods in the Physical Sciences. John Wiley & Sons, 2005. ISBN 0471198269, 9780471198260.

[2] Zill, D. G., Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem. Cengage Learning Editores. ISBN 8522103143, 9788522103140.

[3] Coelho, F.C. Computação Científica com Python. Flávio Codeço Coelho. ISBN 8590734609, 9788590734604.

[4] Petersen, W., Malthus: Founder of Modern Demography. Transaction Publishers, 1999. ISBN 0765804816, 9780765804815.

[5] Barnes, B.; Fulford, G.R., Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equations Approach Using Maple and Matlab. CRC Press, 2009. ISBN 1420083481, 9781420083484.

[6] Ausloos, M.; Dirickx, M., The Logistic Map and the Route to Chaos: From the Beginnings to Modern Applications. Editora Springer, 2006. ISBN 3540283668, 9783540283669.

[7] Takeuchi, Y., Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra System. Editora World Scientific, 1996. ISBN 9810224710, 9789810224714.