Modelagem Matemático-computacional
Aula 8

Nesta aula abordamos a Transformada de Fourier de tempo discreto (DFTF) e a Transformada de Hadamard.

I. TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO

Vimos em aulas precendentes, a transformada de Fourier de variáveis contínuas (2). No caso em que a variável independente é discreta (1), é possível construir a sua transformada de Fourier na forma:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-i\omega_n}, \tag{1}$$

com $\omega_n = \frac{2\pi n}{N}$, que é equivalente a fazer a multiplicação matricial de uma variável discreta $\vec{x} = W$ por uma matriz de tranformação W, tal que $\vec{X} = W\vec{x}$. No caso, W é construída segunda o diagrama 1, de modo que $W_{ij} = z_{i*j}$. Como W é unitária, a transformada inversa pode ser obtida na forma:

$$\vec{x} = (W*)^T \vec{X} \rightarrow \vec{x} = W^{-1}\vec{X}. \tag{2}$$

Sinais de amostragem digital são, de modo geral, um sinal contínuo discretizado, e são podem ser adotados como função de entrada $\vec{x}$. O domínio de frequência da transformada de tempo discreto de Fourier é sempre periódico, de modo que somente um período pode representar a informação do sistema.

II. TRANSFORMADA DE HADAMARD

A transformada de Hadamardé um exemplo da generalização da transformada de Fourier. Sendo uma transformação linear, esta transformada realiza uma operação ortogonal, simétrica em números reais (ou mesmo número complexos).

Matricialmente, a transformada é representada por uma matriz quadrada H_N, que transforma N números reais $\vec{x}$ em N números $\vec{X}$ na forma $\vec{X} = H\vec{x}$. A matriz H pode ser obtida recursivamente ou usando a base binária para os índices de $\vec{x}$ e $\vec{X}$. No primeiro caso (que será o adotado na disciplina), definimos a matriz $H_0 = 1$, sendo as matrizes para $N = 2, 4, 8, ...$ obtidas na forma:

$$H_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{N-1} & H_{N-1} \\ H_{N-1} & -H_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

o que equivale a construir $(H_N)_{ij} = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}(-1)^{ij}$.

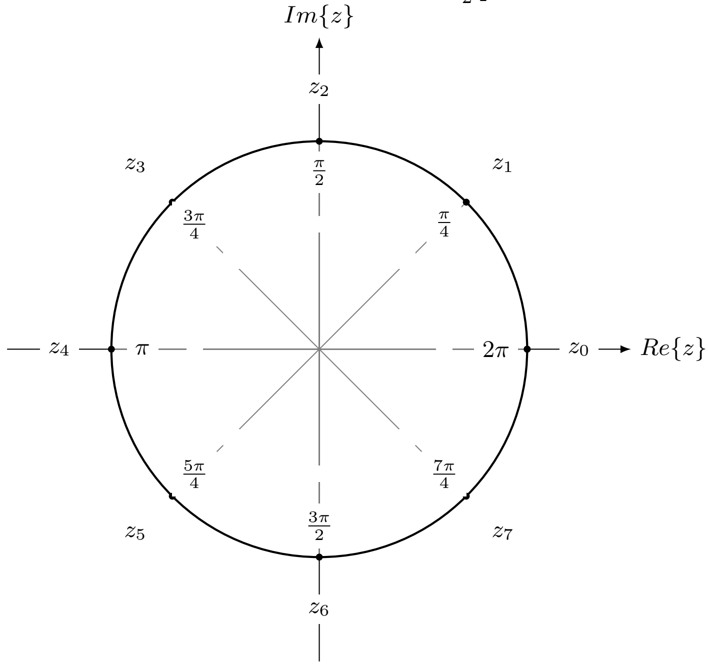

Figura 1: Diagrama de construção da transformada de Fourier de tempo discreto.

Aplicações da transformada de Hadamard envolvem desde o processamento de imagens e sinais, até encriptação e computação quântica (3).

A complexidade da transformada de Hadamard é $Nlog(N)$ na sua versão rápida.

Referências

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete-time_Fourier_transform

[2] Sundararajan, D. THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM Theory, Algorithms and Applications. World Scientific, 2001. ISBN 9810245211, 9789810245214

[3] Horadam, K.J, Hadamard Matrices and Their Applications. Princeton University Press, 2011. ISBN 9780691119212, 2006049331.