LAPORAN TUGAS BESAR I

IF2123 - Aljabar Linier dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan dan Aplikasinya

Kelompok 19

Kristo Abdi Wiguna	**13520058**
Dimas Shidqi Parikesit	**13520087**
Hilda Carissa Widelia	**13520164**

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2021

Daftar Isi

Deskripsi Masalah 2

Teori Singkat 4

Metode Eliminasi Gauss 4

Metode Eliminasi Gauss-Jordan 4

Determinan 4

Matriks Balikan 5

Matriks Kofaktor 5

Matriks Adjoin 5

Kaidah Cramer 5

Interpolasi Polinom 6

Regresi linier berganda 6

Implementasi Pustaka dan Program dalam Java 7

Eksperimen 12

Kesimpulan, saran, dan refleksi 28

Daftar Referensi 28

Deskripsi Masalah

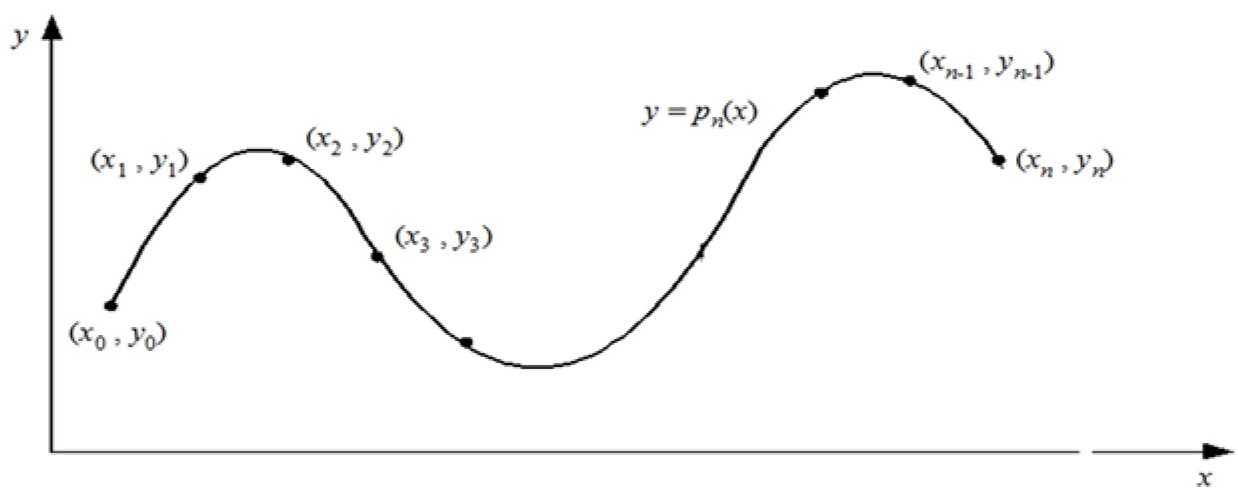
Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan (x = A-1b), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, anda diminta membuat satu atau lebih library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, gunakan library tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Penjelasan tentang interpolasi dan regresi adalah seperti di bawah ini.
Beberapa tulisan cara membuat library di Java:

1. https://www.programcreek.com/2011/07/build-a-java-library-for-yourself/
2. https://developer.ibm.com/tutorials/j-javalibrary/
3. https://stackoverflow.com/questions/3612567/how-to-create-my-own-java-libraryapi

I. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan $n + 1$ buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, $(x_0, y_0), dan\,(x_1, y_1)$ maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) , maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia $(n + 1)$ buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, ... n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1x_0 + a_1x_0^2 + ... + a_nx_0^n = y_o \\
&a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n = y_1 \\
&\qquad ... \qquad ... \\
&a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_0^n = y_n
\end{aligned}
$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai $a_0 a_{1,...} a_n$, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada x = 9.2. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$
\begin{aligned}
&a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2x^2 = 2.0974 \\
&a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2x^2 = 2.1972 \\
&a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2x^2 = 2.2513
\end{aligned}
$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan a_0 = 0.6762, a_1 = 0.2266, dan a_2 = -0.0064. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 9.2 dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) + 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$

II. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

Teori Singkat

Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode ini merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi , yaitu dengan menghilangkan atau mengurangi jumlah variabel sehingga dapat memperoleh nilai dari suatu variabel yang bebas. Dalam penggunaannya, pertama kita harus menyatakan SPL dalam bentuk matriks *augmented*. Setelah matriks *augmented* terbentuk, terapkan OBE (Operasi Baris Elementer) hingga didapatkan matriks eselon baris.

Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan adalah variasi dari eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauss-Jordan, suatu diagonal utama matriks memiliki elemen nol di bawah maupun di atas leading one. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (Semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol). Metode eliminasi Gauss-Jordan kurang efisien untuk menyelesaikan sebuah SPL, tetapi lebih efisien daripada eliminasi Gauss jika kita ingin menyelesaikan SPL dengan matriks koefisien sama. Eliminasi Gauss Jordan sering digunakan untuk reduksi baris untuk mencari invers dari suatu matrik dilakukan dengan menambahkan matriks identitas.

Determinan

Dalam bidang aljabar linear, determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi. Determinan matriks A ditulis dengan tanda det(A), det A, atau |A|. Determinan dapat dianggap sebagai faktor penskalaan transformasi yang digambarkan oleh matriks. Determinan dapat dicari dengan cara ekspansi kofaktor dan reduksi baris.

Apabila matriksnya berbentuk 2 × 2, rumus untuk mencari determinan adalah:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Apabila matriksnya berbentuk 3 × 3 matrix A, rumusnya adalah: (ekspansi kofaktor poros baris 1)

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh. \end{aligned}$$

Matriks Balikan

Invers matriks adalah sebuah (invers) dari matriks di mana apabila matriks tersebut dikalikan menghasilkan matriks persegi. Simbol dari invers matriks adalah pangkat -1 di atas hurufnya. Invers matriks dapat dicari dengan metode reduksi baris menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan dan metode adjoin dimana adjoin adalah transpose dari matriks ekspansi kofaktor yang nantinya akan dibagi determinan matriks tersebut. Sebuah matriks memiliki invers jika dan hanya jika determinan matriks tersebut tidak sama dengan 0.

Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor merupakan matriks yang terdiri dari kofaktor-kofaktor matriks itu sendiri. Katakanlah matriks A, maka matriks kofaktor A merupakan matriks yang terdiri dari kofaktor - kofaktor dari matriks A. Susunan elemen matriks kofaktor juga mengikuti susunan (letak) kofaktor - kofaktornya. Kofaktor matriks bisa dicari dengan mencari minor lalu mencari kofaktor dengan rumus C*ij* = (-1)^(i+j)*i+j M*ij*. Matriks mxn juga akan memiliki matriks kofaktor mxn.

Matriks Adjoin

Adjoin dari matriks persegi A = nxn didefinisikan sebagai transpos dari matriks A di mana Aij adalah kofaktor dari elemen aij. Adjoin dari matriks A dilambangkan dengan adj(A). Untuk mencari adjoin dari sebuah matriks, pertama-tama cari kofaktor dari matriks yang diberikan. Kemudian temukan transpos dari matriks kofaktor tersebut.

Kaidah Cramer

Kaidah Cramer adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan banyak persamaan sama dengan banyak variabel, dan berlaku ketika sistem tersebut memiliki solusi yang tunggal. Metode ini menyatakan solusi dengan menggunakan determinan matriks koefisien (dari sistem persamaan) dan determinan matriks lain yang diperoleh dengan mengganti salah satu kolom matriks koefisien dengan vektor yang berada sebelah kanan persamaan. Rumus kaidah Cramer untuk 3 variabel peubah dapat dilihat sebagai berikut :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \text{ dan } z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Interpolasi Polinom

Interpolasi dapat digunakan untuk memprediksi suatu fungsi, yang mana fungsi tersebut tidak terdefinisi dengan suatu formula, tetapi didefinisikan hanya dengan data-data atau tabel atau titik - titik, misalnya tabel dari hasil percobaan. Salah satu cara melakukan interpolasi polinom ini adalah dengan menggunakan pencocokan kurva polinomial, dimana kumpulan titik data yang ada akan dicari kurva polinomial yang melewati semua titik tersebut. Derajat maksimal polinomial yang dapat dicari menggunakan n data adalah n itu sendiri. Rumus umum polinomial berderajat n adalah

Pn = α + β1 X + β2 X^2 + … + βn Xn

Keterangan:

Pn = Variabel terikat atau variabel response

X = Variabel bebas atau variabel predictor

α = konstanta

β = koefisien polinomial

Regresi linier berganda

Regresi linear berganda adalah model prediksi atau peramalan dengan menggunakan data berskala interval serta terdapat lebih dari satu prediktor. Skala data yang dimaksud diatas adalah pada semua variabel terutama variable terikat. Pada regresi linear, tidak menutup kemungkinan digunakannya data dummy pada variabel bebas. Perbedaan regresi linear dibandingkan dengan interpolasi polinomial dalam melakukan prediksi adalah pada interpolasi, kurva yang dicari adalah kurva yang melewati semua titik, sementara pada regresi, kurva yang dicari adalah kurva yang memiliki nilai *cost function* yang paling kecil. Perbedaan dengan regresi sederhana adalah regresi linier berganda memiliki dua atau lebih variabel bebas atau prediktor. Regresi linier berganda dapat dilakukan dengan metode eliminasi Gauss untuk mencari koefisien estimate masing - masing variabel peubah. Rumus regresi linier berganda adalah $Y = \alpha + \beta 1\ X2 + \beta 2\ X2 + \beta n\ Xn + e$

Keterangan:

Y = Variabel terikat atau variabel response.

X = Variabel bebas atau variabel predictor.

α = Konstanta.

β = Slope atau Koefisien estimate.

Implementasi Pustaka dan Program dalam Java

Implementasi ADT Matriks terdiri dari struktur data Matrix, konstruktor Matriks, Getter Setter Matriks, Input/Display Output Matriks, Sifat Matriks, dan Method/Operasi Matriks. Tipe data elemen pada matriks yaitu *double* untuk keakuratan floating point.

Struktur data Matriks terdiri dari jumlah baris, jumlah kolom, dan array dua dimensi isi elemen.

Konstruktor data Matriks berjumlah tiga yaitu pertama, dengan mengisi Matriks isi 0, kedua, menerima parameter array dua dimensi dan menyalin isinya, ketiga yaitu menerima dan menyalin matriks tersebut.

Getter dan setter Matriks terdiri dari getElmt untuk mendapat elemen matriks, getRow untuk mendapat jumlah baris matriks, getCol untuk mendapat jumlah kolom matriks, dan setElmt untuk mengubah elemen matriks.

Input/Output terdiri printMatrix untuk menampilkan keluaran Matriks.

Sifat Matriks terdiri dari isSquare untuk mengecek apakah matriks persegi (NxN) dan isRowSPLZero untuk mengecek apakah suatu baris 0 semua.

Method/Operasi Matriks terdiri dari getDeterminantCofactor yaitu untuk mendapatkan determinan dari suatu matriks dan mengeluarkan -9999 jika matriks tidak terdefinisi, dan getCountZero untuk menghitung nilai 0 pada suatu row.

```java
public class Matrix {
    private double[][] elements;
    private int row, col;
    //Konstruktor
    public Matrix(int rows, int cols) {
        row = rows;
        col = cols;
        elements = new double[row][col];

        for (int i = 0; i < row; i++) {
            for (int j = 0; j < col; j++) {
                elements[i][j] = 0;
            }
        }
    }
    public Matrix(double[][] m1) {
        row = m1.length;
        col = m1[0].length;

        elements = new double[row][col];
        for (int i=0; i<row; i++) {
            for (int j=0; j<col; j++) {
                elements[i][j] = m1[i][j];
            }
        }
    }
```
Gambar 3.1 Konstruktor data Matriks

```java
    public Matrix(Matrix m1) {
        row = m1.getRow();
        col = m1.getCol();
        elements = new double[row][col];
        for (int i=0; i<row; i++) {
            for (int j=0; j<col; j++) {
                setElmt(i,j,m1.getElmt(i,j));
            }
        }
    }
    //Getter Setter
    public void setElmt(int row, int col, double val) {
        elements[row][col] = val;
    }
    public double getElmt(int row, int col) {
        return elements[row][col];
    }
    public int getCol() {
        return col;
    }
    public int getRow() {
        return row;
    }
    // I/O
    public void printMatrix() {
        for (int i =0; i < row; i++) {
            for (int j=0; j < col; j++) {
                System.out.printf("%.2f ", elements[i][j]);
            }
            System.out.println();
        }
    }
```
Gambar 3.2 Getter, Setter dan Input/Output Matriks.

```java
    // Sifat
    public boolean isSquare() {
        return (row==col);
    }

    public boolean isRowSPLZero(int rw) {
        for(int j=0; j<getCol(); j++){
            if(getElmt(rw, j)!=0.0){
                return false;
            }
        }
        return true;
    }
    // Method
    public int getCountZero(int rw){
        int zero = 0;
        for(int j=0; j<getCol(); j++){
            if(getElmt(rw, j)==0.0){
                zero++;
            }
        }
        return zero;
    }
```

Gambar 3.3 Sifat dan Metode Matriks lainnya..

```java
    public double getDeterminantCofactor() {
        if (isSquare()) {
            double det = 0.0;
            int rowSmallMtr = 0;
            int colSmallMtr = 0;

            if (row == 1) {
                return getElmt(0,0);
            } else if (row == 2) {
                return ((getElmt(0,0)*getElmt(1,1)) - (getElmt(1,0)*getElmt(0,1)));
            } else {
                for (int j=0; j<row; j++) {
                    Matrix smallMtr = new Matrix(row-1,col-1);
                    rowSmallMtr = 0;
                    colSmallMtr = 0;
                    for (int p=1; p<row; p++) {
                        for (int q=0; q<col; q++) {
                            if (q!=j) {
                                smallMtr.setElmt(rowSmallMtr, colSmallMtr, getElmt(q,p));
                                rowSmallMtr+=1;
                            }
                        }
                        colSmallMtr += 1;
                        rowSmallMtr = 0;
                    }
                    if (j%2==0) {
                        det += getElmt(j,0) * smallMtr.getDeterminantCofactor();
                    } else {
                        det += getElmt(j,0) * smallMtr.getDeterminantCofactor()  * -1;
                    }
                }
            }
            return det;
        } else {
            return -9999.000;
        }
    }

}

```

Gambar 3.4 Metode untuk mendapatkan determinan dengan cara kofaktor.

Eksperimen

Test Case SPL

1a.

a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
==============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
1
Masukkan baris matriks A
4
Masukkan kolom matriks A
4
Input matrix!
1 1 -1 -1
2 5 -7 -5
2 -1 1 3
5 2 -4 2
Input array!
1 -2 4 6
SPL tidak memiliki solusi.
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
1a_solvedd.txt
==============================
```

1b.

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
===============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
2
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
1b.txt
SPL memiliki tak hingga solusi.
3.00 0.00 -1.00 a
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
1b_solved.txt
===============================
```

1c.

c.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
===============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
1c.txt
SPL memiliki solusi unik.
x[1] = 3.00
x[2] = -1.00
x[3] = 1.00
x[4] = 0.00
x[5] = 0.00
x[6] = 0.00
x[7] = 0.00

Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
1c_solved.txt
===============================
```

1d.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H adalah matriks Hilbert. Cobakan untuk n = 6 dan n = 10.

Untuk n = 6

```
===============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
1da.txt
SPL memiliki solusi unik.
x[1] = 5.42
x[2] = 7.02
x[3] = -118.96
x[4] = 86.92
x[5] = 213.34
x[6] = -198.02
x[7] = 0.00

Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
1da_solved.txt
===============================
```

Untuk n = 10

```
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
1db.txt
SPL memiliki solusi unik.
x[1] = 1.54
x[2] = 8.63
x[3] = -45.63
x[4] = 43.11
x[5] = -1.68
x[6] = -28.22
x[7] = 38.20
x[8] = 30.56
x[9] = -35.00
x[10] = -13.08
x[11] = 0.00

Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
1db_solved.txt
===============================
```

2a

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

```
Selamat datang di aplikasi slonongboy!
Silakan pilih salah satu menu dibawah ini!
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
2a.txt
SPL memiliki tak hingga solusi.
-1.00-1.0-2.0b+0.0a+2.0b+-1.0a -2.0b+0.0a b a
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
2a_solved.txt
===============================
```

2b.

b.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
================================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
2b.txt
SPL tidak memiliki solusi.
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
2b_solved.txt
================================
```

3a.

a. $$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

```
=================================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
3a.txt
SPL memiliki solusi unik.
x[1] = -0.22
x[2] = 0.18
x[3] = 0.71
x[4] = -0.26
x[5] = 0.00

Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
3a_solved.txt
=================================
```

3b.

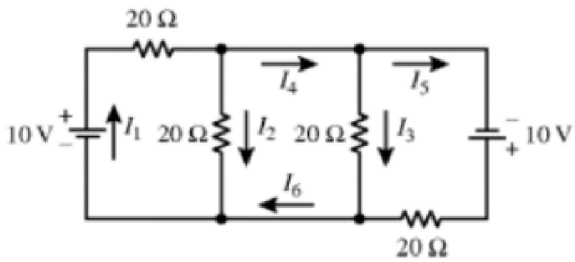
b.

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

```
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
3b.txt
SPL tidak memiliki solusi.
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
3b_solved.txt
===============================
```

4.

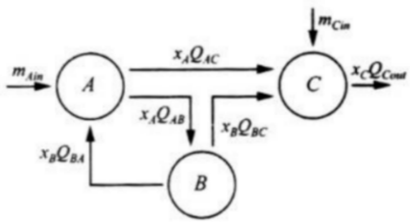
Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik di bawah ini:




```
==============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
4.txt
SPL memiliki tak hingga solusi.
Exception in thread "main" java.lang.ArrayIndexOutOfBoundsException: Index 6 out of bound
s for length 6
        at operation.MatrixUtil.bSubSol(MatrixUtil.java:152)
        at App.main(App.java:55)
```

5.

Lihatlah sistem reaktor pada gambar berikut



Dengan laju volume Q dalam m^3/s dan input massa m_{in} dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\text{A:} \quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0$$

$$\text{B:} \quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0$$

$$\text{C:} \quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s.

```
===============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
1
Pilih sub-menu (metode) :
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Pilih sub-menu :
1
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file :
5.txt
SPL memiliki solusi unik.
x[1] = 14.44
x[2] = 7.22
x[3] = 10.00
x[4] = 0.00

Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
5_Solved.txt
===============================
```

6a.

a. Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai *x* yang akan dicari nilai fungsi *f*(*x*).

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

$x = 0.2$ f(x) = ?
$x = 0.55$ f(x) = ?
$x = 0.85$ f(x) = ?
$x = 1.28$ f(x) = ?

```
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
4
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file
6a.txt
Masukkan jumlah titik yang akan ditaksir nilai fungsinya
4
Masukkan titik-titik yang akan ditaksir nilai fungsinya
0.2 0.55 0.85 1.28
P(7) = -0.0230+0.2400x+0.1974x^2+0.0000x^3+0.0260x^4+0.0000x^5-0.0000x^6
P(0.20) = 0.0330
P(0.55) = 0.1711
P(0.85) = 0.3372
P(1.28) = 0.6775
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
6a_solved.txt
================================
```

6b.

b. Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2021 hingga 31 Agustus 2021:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2021 (dibaca: 17 Juni 2021) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

Tanggal(desimal) = 6 + (17/30) = 6,567

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2021
b. 10/08/2021
c. 05/09/2021
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

```
===============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
4
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file
6b.txt
Masukkan jumlah titik yang akan ditaksir nilai fungsinya
3
Masukkan titik-titik yang akan ditaksir nilai fungsinya
7.516 8.323 9.167
P(10) = 7187066071.6616-9346993079.1738x+5334203055.2403x^2-1756810186.3613x^3+368550807.
1755x^4-51131876.7601x^5+4695806.3154x^6-275474.5394x^7+9372.8492x^8-140.9937x^9
P(7.52) = 53.5378
P(8.32) = 36.2950
P(9.17) = -667.6929
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
6b_solved.txt
===============================
```

6c

c. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak $h = (2 – 0)/5 = 0.4$.

```
===============================
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
4
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file
6c.txt
Masukkan jumlah titik yang akan ditaksir nilai fungsinya

3
Masukkan titik-titik yang akan ditaksir nilai fungsinya
0.58 0.87 1.64
P(20) = 0.1018+2.8069x-17.4400x^2+89.3813x^3-355.8910x^4+1107.9499x^5-2721.8216x^6+5324.0138x^7-8353.
1501x^8+10563.6338x^9-10789.9946x^10+8892.3899x^11-5885.9236x^12+3101.3374x^13-1282.0010x^14+406.3678
x^15-95.2753x^16+15.5559x^17-1.5783x^18+0.0749x^19
P(0.58) = 0.4641
P(0.87) = 0.5188
P(1.64) = 0.5843
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
6c_solved.txt
===============================
```

7.

7. **Studi Kasus Regresi Linier Berganda**

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Dari data-data tersebut, apabila diterapkan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*, maka diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 = 19.42$$

$$863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477$$

$$1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437$$

$$587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219$$

```
Menu tersedia :
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Pilih menu :
5
Cara input :
1. Dengan Keyboard
2. Dari file (augmented matriks)
Pilih :
2
Masukkan nama file
7.txt
Masukkan jumlah x yang akan ditaksir!
4
Masukkan nilai x yang akan ditaksir!
50 76 29 30
20.00 863.10 1530.40 587.84
863.10 54876.89 67000.09 25283.40
1530.40 67000.09 117912.32 44976.87
587.84 25283.40 44976.87 17278.51

-3.5077781408835103-0.002624990745878327x1+7.989410472218274E-4x2+0.15415503019830143x3
0.8921877171621739
Apakah ingin save ke file? (Y/N)
Y
Tulis nama file!
7_solved.txt
===============================
```

Kesimpulan, saran, dan refleksi

Menemukan solusi dari persoalan sistem persamaan linier, mencari determinan, dan matriks balikan dapat dilaksanakan dengan menggunakan berbagai metode. Hasil yang diperoleh akan sama terlepas dari metode yang digunakan. Aljabar linear dapat digunakan dalam berbagai bidang, diantaranya yaitu pada bidang statistika maupun pembelajaran mesin, dengan beberapa contohnya yaitu interpolasi polinomial dan regresi linear berganda.

Tugas Besar 1 Aljabar Linier dan Geometri ini dapat dilaksanakan dengan lancar walaupun terdapat beberapa kendala dalam pelaksanaannya seperti ada anggota kelompok yang perlu menjalani pengobatan di rumah sakit sehingga waktu pengerjaan sedikit mundur. Selain itu, dalam pengerjaannya masih banyak yang kurang seperti ada beberapa kasus yang tidak ter-handle, lalu ada juga beberapa test case yang tidak dapat ditemukan solusinya. Akan tetapi, secara garis besar penulis merasa berhasil membuat tugas besar pertama ini dengan sebaik dan saemampu kami. Saran dari penulis yaitu penulis merasa perlu adanya mentoring dengan mentor agar dapat bisa meminta saran dari mentor untuk kejelasan tugas besar dan source code program. Penulis menyadari pentingnya kerjasama dari pengerjaan tugas besar ini. Dari otomasi sistem persamaan linier, interpolasi polinom, dan regresi linier berganda ini, penulis juga menyadari otomasi sangat penting di kehidupan sehari - hari agar hidup lebih efisien.

Daftar Referensi

https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination
https://stackoverflow.com/