INF3470 – Ukeoppgaver 6

AV MAGNUS ANDERSEN (MAGNUAND)

Oppgave 1: Spektrum, periodiske sign.

(oppgave 5.14 fra læreboka)

a)

$$x[n] = \cos(0.5n\pi) = \{\dots, 1, 0, -1, 0, \overset{\Downarrow}{1}, 0, -1, 0, 1, \dots\}$$

Dette signalet er periodisk med periode $N = 4$. Én periode av $x[n]$ er

$$x_1[n] = \{1, 0, -1, 0\}$$

DTFT-en av x_1 fra $k = 0$ til og med $k = 3$ er

$$X_1(F) = \sum_{k=0}^{k=3} x_1[k]e^{-j2\pi kF} = 1 - e^{-j4\pi F}$$

Får videre for de samme k

$$X_1(kF_0) = X_1\left(\frac{k}{4}\right) = 1 - e^{-\frac{j4\pi k}{4}} = \{0, 2, 0, 2\}$$

DTFT-en for $x[n]$ over én periode er følgelig

$$X(F) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X_1(kF_0)\,\delta\left(F - \frac{k}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(F - \frac{1}{4}\right) + \delta\left(F - \frac{3}{4}\right)\right)$$

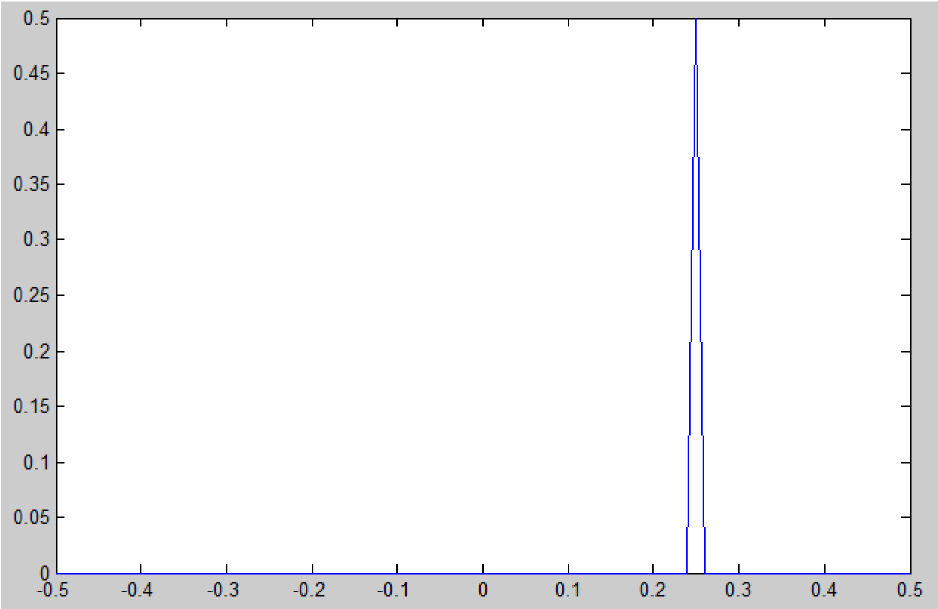
Magnituden er

$$|X(F)| = \left|\frac{1}{2}\left(\delta\left(F - \frac{1}{4}\right) + \delta\left(F - \frac{3}{4}\right)\right)\right|$$

og faseresponsen er

$$\phi(F) = -\arctan\left(\frac{Im(X(z))}{Re(X(z))}\right)$$

Plott av magnituden:



Oppgave 2: Frekvensrespons

(oppgave 5.26 fra læreboka)

a)

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & n \neq 0,1 \end{cases}$$

Bruker at

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] - y[n-1]) * h_1[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[n-k] - y[n-k-1](\delta[k] - \delta[k-1]) \\ &= \sum_{k=0}^{1} (x[n-k] - y[n-k-1]) \\ &= (x[n] - y[n-1]) + (x[n-1] - y[n-2]) \\ &= x[n] + x[n-1] - y[n-1] - y[n-2] \end{aligned}$$

Skriver om til

$$y[n] + y[n-1] + y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

Transferfunksjonen blir

$$Y(z)(1 + z^{-1} + z^{-2}) = X(z)(1 + z^{-1}) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{z^2 + z + 1}$$

Denne har poler i $z = \pm \frac{j\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ og $|z| = 1$ for begge, så systemet er *ustabilt*.

Substituerer inn $z = e^{j2\pi F}$ og finner frekvensresponsen:

$$H(F) = \frac{1 + \left(e^{j2\pi F}\right)^{-1}}{1 + (e^{j2\pi F})^{-1} + (e^{j2\pi F})^{-2}} = \frac{1 + e^{-j2\pi F}}{1 + e^{-j2\pi F} + e^{-j4\pi F}}$$

b)

$$h_1[n] = 0.5(\delta[n] - \delta[n-1]) = \begin{cases} 0.5, & n = 0, 1 \\ 0, & n \neq 0,1 \end{cases}$$

Gjør det på samme måte som i a) og får

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] - y[n-1]) * h_1[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[n-k] - y[n-k-1]) 0.5(\delta[k] - \delta[k-1]) \\ &= 0.5 \sum_{k=0}^{1} (x[n-k] - y[n-k-1]) \\ &= 0.5\big((x[n] - y[n-1]) + (x[n-1] - y[n-2])\big) \\ &= 0.5(x[n] + x[n-1] - y[n-1] - y[n-2]) \end{aligned}$$

Skriver om til

$$y[n] + 0.5y[n-1] + 0.5y[n-2] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$$

Vi får

$$Y(z)(1 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}) = X(z)(0.5 + 0.5z^{-1})$$

og transferfunksjonen blir

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.5 + 0.5z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{2 + z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{2z^2 + z + 1}$$

som har poler i $z = \pm \frac{j\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{4}$ og $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ for begge, så systemet er nå *stabilt*.

Substituerer inn $z = e^{j2\pi F}$ og finner frekvensresponsen:

$$H(F) = \frac{0.5 + 0.5e^{-j2\pi F}}{1 + 0.5e^{-j2\pi F} + 0.5e^{-j4\pi F}}$$

Oppgave 6: Tidligere eksamensoppgave (utdrag)

Vi har

$$y[n] = x[R-n]$$

z-transformen blir

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[R-k]z^{-k}$$

Skifter variabel til $m = R - k$, noe som gir $-k = m - R$, og vi får

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{m-R} = z^{-R}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{m} = z^{-R}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\frac{1}{z}\right)^{-m} = z^{-R}X(1/z)$$

siden

$$X(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\frac{1}{z}\right)^{-k}$$

Q.E.D.

Oppgave 7: Tidligere eksamensoppgave

<u>System S_1:</u>

Transferfunksjonen blir

$$H_{S_1}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.77z^{-1}} = \frac{z + 1}{z - 0.77}$$

Ett nullpunkt i $z = -1$ og én pol i $z = 0.77$. Dette stemmer bra med figuren "Pol-nullpunkts plott, III".

Frekvensresponsen blir

$$H_{S_1}(w) = \frac{e^{jw} + 1}{e^{jw} - 0.77}$$

Noen magnituder er

$$\left|H_{S_1}(0)\right| = \left|\frac{1 + 1}{1 - 0.77}\right| = \left|\frac{2}{0.23}\right| = \approx 8.7$$

Den enese frekvensresponsen som stemmer med dette er figur "Frekvens respons, B".

<u>System S_2:</u>

Transferfunksjonen blir

$$H_{S_2}(z) = \frac{0.77 - z^{-1}}{1 - 0.77z^{-1}} = \frac{0.77z - 1}{z - 0.77}$$

Ett nullpunkt i $z \approx 1.3$ og én pol i $z = 0.77$. Dette stemmer bra med figuren "Pol-nullpunkts plott, I".

Frekvensresponsen blir

$$H_{S_2}(w) = \frac{0.77e^{jw} - 1}{e^{jw} - 0.77}$$

Noen magnituder blir

$$\left|H_{S_2}(0)\right| = \left|\frac{0.77 - 1}{1 - 0.77}\right| = |-1| = 1$$

$$\left|H_{S_2}(\pi)\right| = \left|\frac{-0.77-1}{-1-0.77}\right| = 1$$

Ser at dette er det eneste som kan stemme med figuren "Frekvens respons, C".

System S_3:

Transferfunksjonen er

$$H_{S_3}(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+0.77z^{-1}} = \frac{z-1}{z+0.77}$$

Ett nullpunkt i $z=1$ og én pol i $z=-0.77$. Dette stemmer ikke med noen av pol-nullpunkts-plottene.

Frekvensresponsen blir

$$H_{S_3}(w) = \frac{e^{jw}-1}{e^{jw}+0.77}$$

Noen magnituder blir

$$\left|H_{S_3}(0)\right| = 0$$

$$\left|H_{S_3}(\pi)\right| = \left|-\frac{2}{-0.23}\right| \approx 8.69$$

Dette stemmer kun overens med figur "Frekvens respons, F".

System S_4:

Transferfunksjonen er

$$H_{S_4}(z) = \frac{1}{1}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5} = \frac{z^5}{z^5}+\frac{z^4}{z^5}+\frac{z^3}{z^5}+\frac{z^2}{z^5}+\frac{1}{z^5} = \frac{z(z^4+z^3+z^2+z)+1}{z^5}$$

Dette kunne kanskje ha stemt med "Pol-nullpunkts plott II", men $z=1$ er ikke et gyldig nullpunkt i transferfunksjonen ovenfor, siden $1(1^4+1^3+1^2+1)+1 = 5 \neq 0$.

Frekvensresponsen blir

$$H_{S_4}(w) = \frac{e^{jw}\left(e^{4jw}+e^{3jw}+e^{2jw}+e^{jw}\right)+1}{e^{5jw}}$$

Og noen magnituder blir

$$\left|H_{S_4}(0)\right| = 5$$

Dette stemmer ikke overens med noen av frekvensresponsene.

System S_5:

Transferfunksjonen er

$$H_{S_5}(z) = \frac{3}{1} - \frac{3}{z} = \frac{3z}{z} - \frac{3}{z} = \frac{3z - 3}{z}$$

Ett nullpunkt i $z = 1$ og én pol i $z = 0$. Dette stemmer bra med ”Pol-nullpunktsplott, IV”.

Noen magnituder blir

$$|H(0)| = \left|\frac{3-3}{3}\right| = 0$$

$$|H(\pi)| = \left|\frac{-3-3}{-1}\right| = 6$$

Ser at dette stemmer bra med figur ”Frekvens respons, A”.

System S_6:

Her har vi

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + x[n-5] + x[n-6] + x[n-7]$$

Transferfunksjonen blir

$$\begin{aligned} H_{S_6}(z) &= \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^7} \\ &= \frac{z^7}{z^7} + \frac{z^6}{z^7} + \frac{z^5}{z^7} + \frac{z^4}{z^7} + \frac{z^3}{z^7} + \frac{z^2}{z^7} + \frac{z}{z^7} + \frac{1}{z^7} \\ &= \frac{z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^7} \end{aligned}$$

Det er ingen pol-nullpunktsplott med pol $z = 0$ med multiplisitet 7, så dette systemet tilhører ikke noe pol-nullpunktsplott.

Noen magnituder blir

$$|H(0)| = 8$$

Dette stemmer ikke med noen av frekvensresponsene.

System S_7:

Transferfunksjonen blir

$$H_{S_7}(z) = \frac{1}{1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} = \frac{z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1}{z^5}$$

Jeg tolker det dit hen at vi *må* ha et system til hvert av pol-nullpunktsplottene, og siden S_7 er det eneste som står igjen, samt at det har en pol $z = 0$ med multiplisitet 5, velger jeg å knytte dette systemet til ”Pol-nullpunkts plott, II”, siden det stemmer bra polmessig.

Noen magnituder blir

$$|H(0)| = 0$$

$$|H(\pi)| = 6$$

Dette stemmer bra med ”Frekvensrespons, E”

Kommentar: Vet at magnitudene til S_7 og S_5 er like for de verdiene jeg har testet, men jeg ettersjekket med ytterligere verdier at konklusjonene mine stemte.

Oppgave 8: Tidligere eksamensoppgave

```
function c = konvolver(a,b)

    % Definér størrelsen på konvolusjonssekvensen
    conv_size = length(a) + length(b) - 1;

    % Opprett konvolusjonsarray
    C = zeros(1, conv_size);

    % Zero-padder inputvektorene slik at de blir like lange som konvolusjonsarrayen
    a = padarray(a, [0 (conv_size-length(a))], 0, 'post');
    b = padarray(b, [0 (conv_size-length(b))], 0, 'post');

    % Utfør konvolusjonssummeringen
    for n=1:conv_size
        for k=1:n
            C(n) = C(n)+(a(k)*b(n-k+1));
        end
    end

    % Returnér
    c = C;

end
```

Kjøring av ovenstående og *conv(a, b)* produserer identiske resultater:

```
>> konvolver([1 2], [3 4])

ans =

     3    10     8

>> conv([1 2], [3 4])

ans =

     3    10     8

>> konvolver([1 2 3], [3 4 4 5 6])

ans =

     3    10    21    25    28    27    18

>> conv([1 2 3], [3 4 4 5 6])

ans =

     3    10    21    25    28    27    18
```