UNIVERSITETET I OSLO

Ukeoppgaver 1

INF3470 – Digital signalbehandling

Magnus Andersen

8/22/2012

trigonometriske funksjoner, amplitude, faseskift, frekvens, fasorer, komplekse tall, geometriske rekker

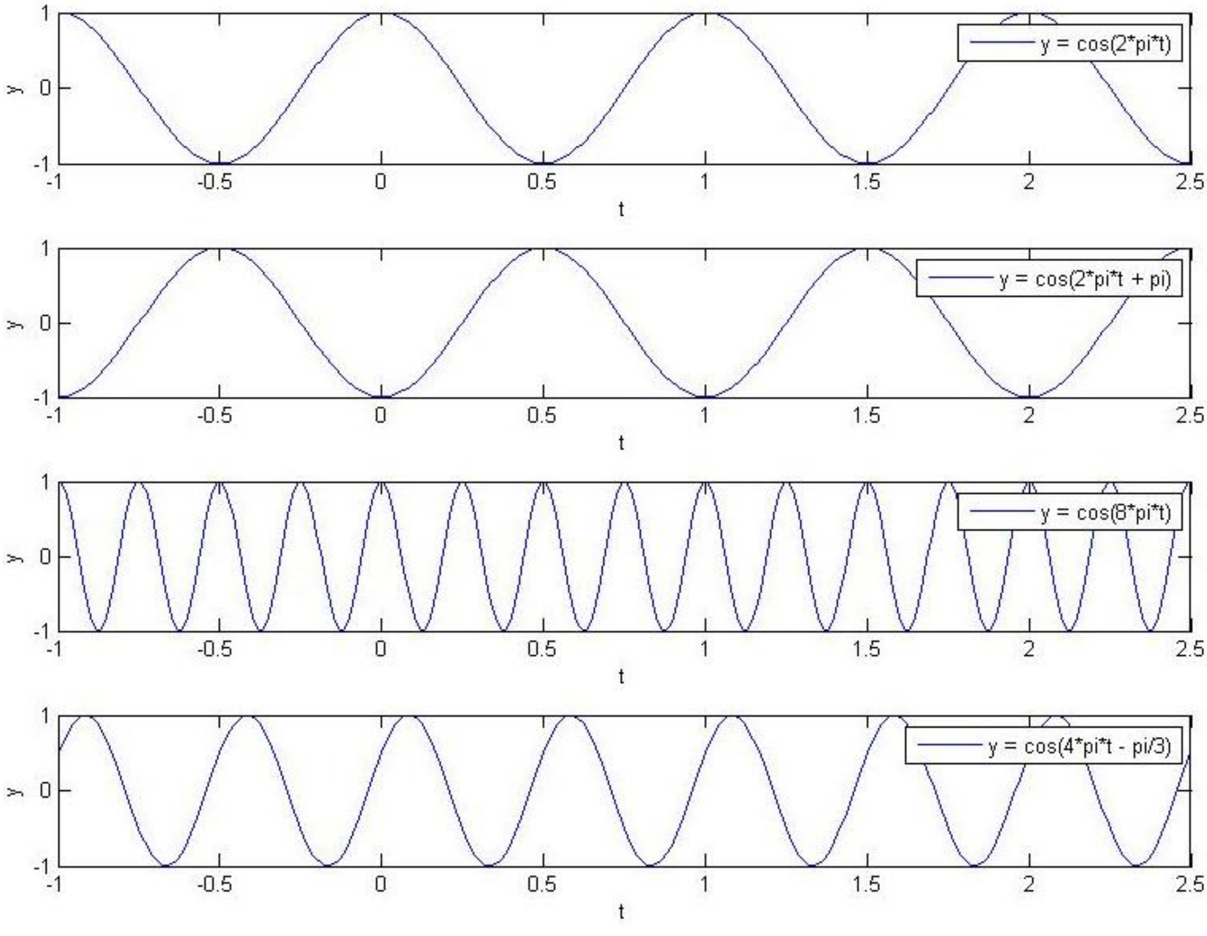
Innhold

Oppgave 1: Trigonometriske funksjoner

a)

Vi skal plotte forskjellige trigonometriske (cosinus)funksjoner under hverandre for intervallet $-1 \leq t \leq 2.5$. På denne måten får vi vist hvordan de forholder seg til hverandre mht. frekvens og faseskift.

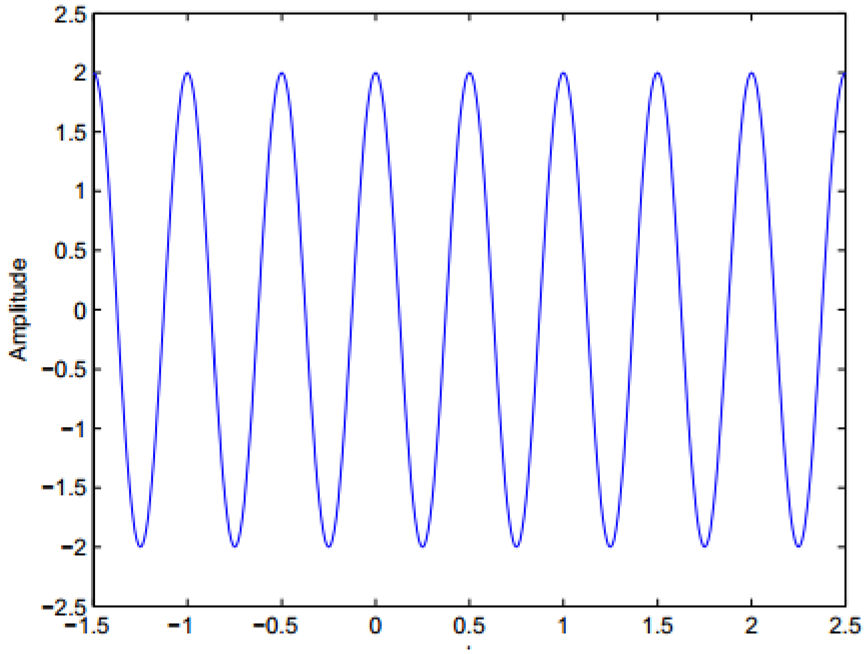
Resultatet ble slik:



Figur 1: MATLAB-plot av cosinus-funksjonene i oppgave 1 a)

b)

Vi skal finne frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur 1 i oppgaveteksten.



Figur 2: Første figur i figur 1 fra oppgaveteksten

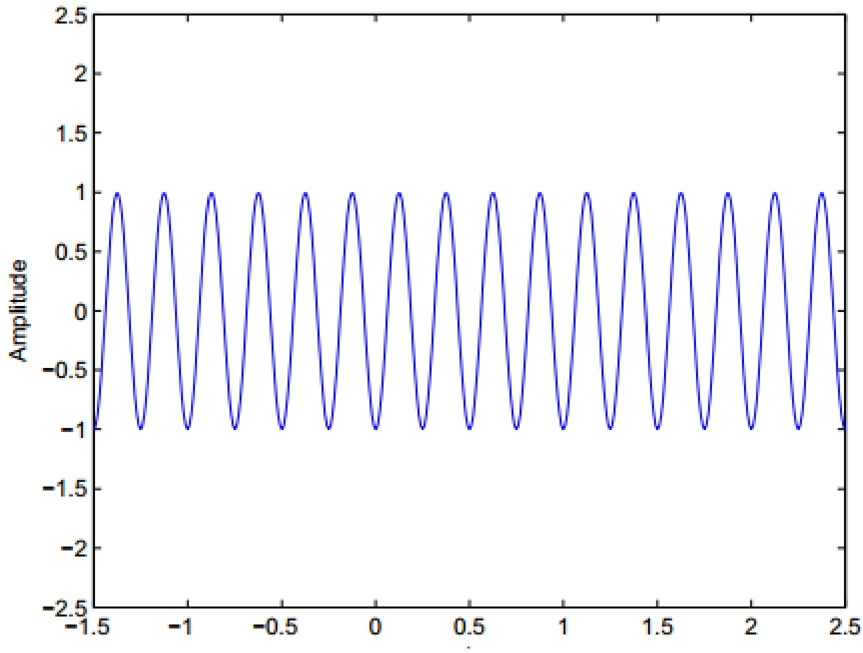
Vi ser at bølgen svinger mellom $y = \pm 2$. Ergo er

$$\boldsymbol{Amplitude = |A| = 2}$$

Videre ser vi at dersom man går 0.5 enheter langs den horisontale aksen, vil funksjonsverdien gjenta seg. Dette betyr at perioden er $T = 0.5\ s$ (enheten på den horisontale aksen er ikke eksplisitt nevnt, men jeg antar at det er snakk om tid og vil heretter benevne den som t-aksen). Gitt perioden, blir frekvensen følgelig

$$\boldsymbol{frekvens = f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5\ s} = 2\ Hz}$$

Siden funksjonen starter i et ekstremalpunkt er det intet faseskift.



Figur 3: Andre figur i figur 1 fra oppgaveteksten

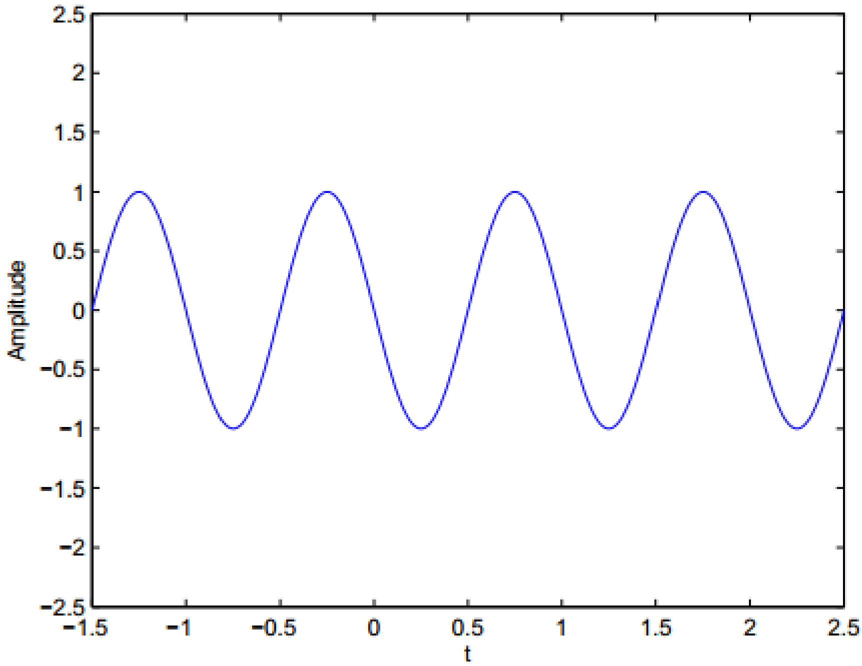
Analogt med hvordan vi gjorde det for Figur 2, ser vi her at

$$\boldsymbol{Amplitude = |A| = 1}$$

og

$$\boldsymbol{frekvens = f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.25\,s} = 4\ Hz}$$

Her er det heller intet faseskift.



Figur 4: Tredje figur i figur 1 fra oppgaveteksten

Her er

$$\textbf{amplitude} = |A| = \mathbf{1}$$

og

$$\textbf{frekvens} = f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1\,s} = \mathbf{1}\ Hz$$

Cosinus-funksjoner kan beskrives ved

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) + K,$$

hvor A er amplituden, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ er vinkelfrekvensen (vinkelfarten), ϕ er fasen og K er vertikalt skift. Dersom det horisontale linjestykket som deler spennet mellom ekstremalverdiene hadde ligget et annet sted enn $y = 0$, ville vi hatt et vertikalt skift. Dette er ikke tilfelle her, men vi har imidlertid et horisontalt skift, siden funksjonen ikke starter i et ekstremalpunkt. Ligningen som beskriver funksjonen er altså på formen

$$y(t) = \cos(2\pi t + \phi)$$

Siden grafen starter i $y = 0$ ved $t = 0$, må vi finne ut når

$$\cos(2\pi \cdot 0 + \phi) = \cos(\phi) = 0$$

Dette skjer ved $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$. Ved $\phi > 0$ shiftes grafen mot venstre, og ved $\phi < 0$ shiftes den mot høyre. Den "opprinnelige" cosinusfunksjonen (dvs. uten faseskift) starter i $y = 1$. Om vi forestiller oss at y-aksen var plassert litt lenger mot høyre, slik at grafen hadde startet i

$y = 1$ (uten faseskift), må vi flytte y-aksen en tilsvarende lengde mot $venstre$ for at det igjen skal stemme overens med figuren/grafen vi faktisk betrakter. Dette skjer som nevnt når $\phi > 0$, og da kan vi konkludere med at $\phi = \frac{\pi}{2}$. Denne lengden, la oss kalle den C, som som vi tenker oss at y-aksen må forflyttes (i negativ t-retning), er *faseskiftet* til funksjonen:

$$\textbf{faseskift} = \boldsymbol{C} = -\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\omega}}\right) = -\frac{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Årsaken til minustegnet er at funksjonen vår er faseskiftet til venstre, altså i negativ t-retning.

En liten digresjon:
En annen og kanskje bedre måte å beskrive cosinus-funksjoner på, er ved

$$y(t) = A \cdot \cos\big(\omega(t - C)\big) + K$$

Symbolene betyr det samme som før.

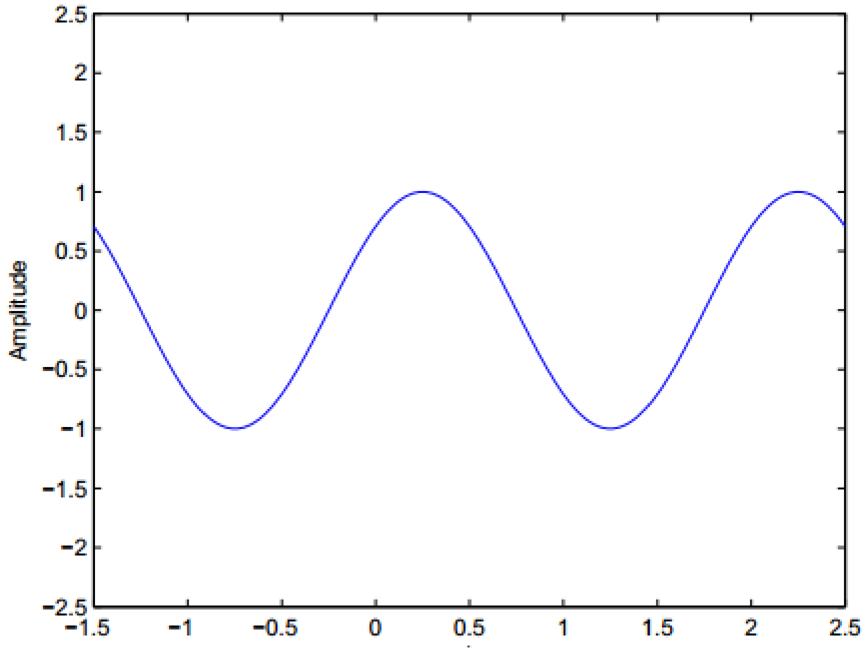
I dette tilfellet får vi ved denne representasjonen altså

$$y(t) = \cos\big(2\pi(t - C)\big)$$

For å finne faseskiftet C, ser vi i dette tilfellet på når $\cos(-2\pi C) = 0$. Dette skjer når $C = \pm\frac{1}{4}$. Negativ C indikerer faseskift mot venstre (som vi har i dette tilfellet her), hvilket betyr at $C = -\frac{1}{4}$ (akkurat samme verdi som vi fant ved bruk av den første metoden).

Den endelige likningen for funksjonen blir dermed

$$y(t) = \cos\left(2\pi\left(t - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)\right) = \cos\left(2\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)\right)$$



Figur 5: Fjerde figur i figur 1 fra oppgaveteksten

Ser at

$$\textbf{amplitude} = |\boldsymbol{A}| = \mathbf{1}$$

og

$$\textbf{frekvens} = \boldsymbol{f} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\,\boldsymbol{s}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{Hz}$$

Kan beskrive funksjonen ved

$$y(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}(t - C)\right) = \cos\big(\pi(t - C)\big)$$

Antar at grafen starter i $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$(. Må altså finne ut når $\cos(-\pi C) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cosinus antar denne verdien når argumentet enten er $\frac{\pi}{4}$ eller $\frac{7\pi}{4}$. Potensielle løsninger for C kan være

$$-\pi C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = -\frac{1}{4} \qquad \text{eller} \quad -\pi C = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

På samme måte som når det gjaldt forrige figur, kan vi tenke oss at cosinusfunksjonen *uten* faseskift starter i $y = 1$. Om vi dermed tenker oss at vi flytter y-aksen akkurat nok til venstre slik at grafen vår starter med denne y-verdien, må vi følgelig flytte y-aksen en tilsvarende lengde tilbake i positiv t-retning/*mot høyre* for å få grafen vi har med å gjøre her. Siden positiv C-verdi indikerer faseskift mot høyre, ergo er et passende faseskift:

$$\textbf{faseskift} = \boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

En ligning som vil reprodusere ovenstående graf dersom visualisert er dermed

$$y(t) = \cos\left(\pi\left(t - \tfrac{1}{4}\right)\right)$$

c)

Skal bruke fasoraddisjon til å skrive følgende funksjoner på formen $A\cos(\omega t + \phi)$:

1. $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi)$

$$\begin{aligned}
\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi) &= \mathrm{Re}\{e^{i}e^{i\omega t}\} + \mathrm{Re}\{e^{i\phi}e^{i\omega t}\} \\
&= \mathrm{Re}\{e^{i}e^{i\omega t} + e^{i\phi}e^{i\omega t}\} \\
&= \mathrm{Re}\{e^{i\omega t}(e^{i} + e^{i\phi})\} \\
&= \mathrm{Re}\{e^{i\omega t}(Ae^{i\theta})\} \\
&= A\cos(\omega t + \theta)
\end{aligned}$$

hvor

$$A = \sqrt{(1+\cos\phi)^2 + \sin^2\phi} = \sqrt{\left(1 + \cos\left(2\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 + \sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \left(2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1\right)\right)^2 + \sin^2\phi} = \sqrt{\left(2\cos^2\frac{\phi}{2}\right)^2 + \sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{4\cos^4\frac{\phi}{2} + \sin^2\phi} = 2\sqrt{\cos^2(1 - \cos^2\phi}$$

og

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}\right) = \arctan\left(\frac{\sin 2\frac{\phi}{2}}{1+\cos 2\frac{\phi}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{1+\left(2\cos^2\frac{\phi}{2}-1\right)}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{2\cos^2\frac{\phi}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\cancel{2\cos\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\phi}{2}}{\cancel{2\cos\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\phi}{2}}\right) = \arctan\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)$$

$$= \frac{\phi}{2}$$

Oppgave 2: Diskrete trigonometriske funksjoner

a)

Vi skal avgjøre hvilke av de følgende *diskrete* funksjonene som er periodiske, og dersom de er det, så skal vi også finne periodene deres (dvs. *N*):

1. $\boldsymbol{\cos\left(0.5n + \frac{\pi}{2}\right)}$

For at denne funksjonen skal være periodisk, må vi være i stand til å finne et ikke-null heltall p slik at

$$\cos\left(\left(0.5n + \frac{\pi}{2}\right) + \left(0.5p + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(0.5n + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dette kan bare være sant dersom

$$0.5p + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$$

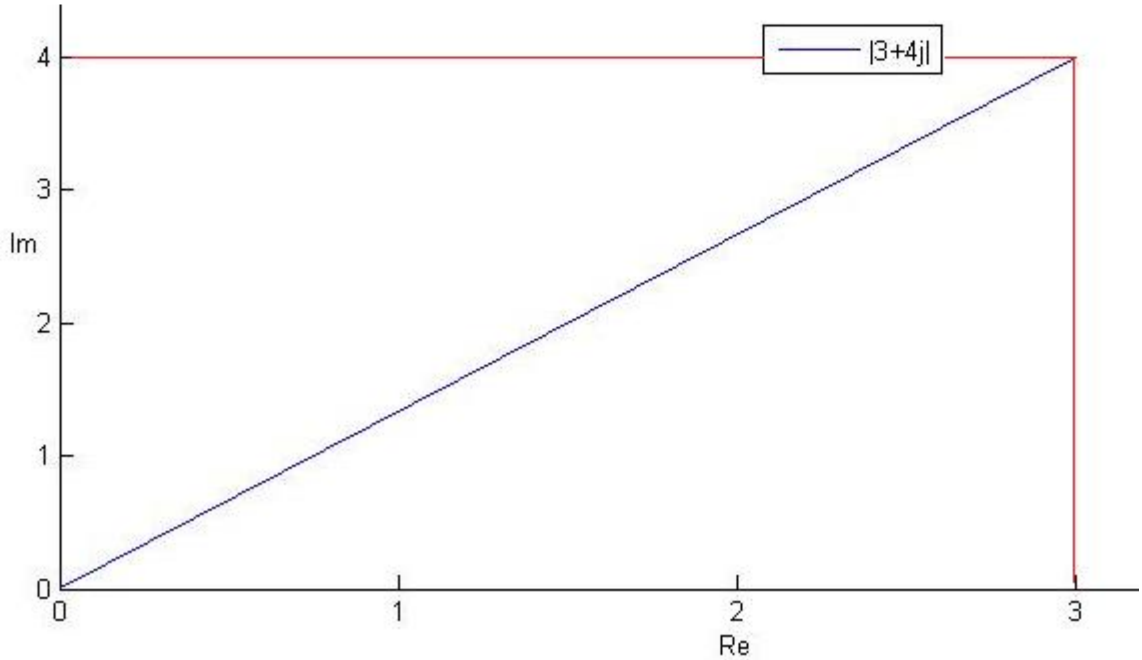
Oppgave 3: Regning med komplekse tall

a)

Skal gjøre følgende følgende utregninger:

1. $|3 + j4|$

Absoluttverdien til et komplekst tall z er distansen fra z til 0 i det komplekse planet $\mathbb{C}$**:**



Figur 6: Visualisering av det komplekse tallet $3 + 4j$ som en vektor i det komplekse planet

Som vi ser i Figur 6, er lengden av denne vektoren

$$|3 + 4j| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

2. $\frac{1}{3+j4}$ til kartesisk form

Multipliserer teller og nevner med den kompleksekonjugerte av nevner:

$$\frac{1}{3+4j} = \frac{1(3-4j)}{(3+4j)(3-4j)} = \frac{3-4j}{9-(16j^2)} = \frac{3-4j}{9-\big(16(-1)\big)} = \frac{3-4j}{9+16} = \frac{3-4j}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}j$$

3. $\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{j}\mathbf{2}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\boldsymbol{\pi}/\mathbf{2}}}$ til kartesisk form

Eulers formel sier at

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Bruker vi denne formelen, får vi

$$\frac{1+2j}{1+e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1+2j}{1+\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1+2j}{1+j}$$

Ganger så teller og nevner med den komplekskonjugerte av nevner:

$$\frac{1+2j}{1+j} = \frac{(1+2j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-j+2j-2j^2}{1-j+j-j^2} = \frac{1+j-2(-1)}{1-(-1)} = \frac{1+j+2}{1+1}$$

$$= \frac{3+j}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

4. $(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\pi n}}$, hvor $\boldsymbol{n}$ er et heltall

Ved bruk av Eulers formel får vi

$$(-1)^n + e^{j\pi n} = (-1)^n + \cos \pi n + j \sin \pi n$$

$\sin \pi n$ vil alltid være 0 siden sinus til et multiplum av π alltid er 0. $\cos \pi n$ vil alternere mellom -1 og 1. Det samme vil $(-1)^n$, og de to sistnevnte vil alltid ha samme fortegn for lik n. Dvs. at for $n = 0, 1, 2, 3$ ... får vi

$$1 + 1 + j \cdot 0 = 2, \qquad n = 0$$

$$-1 + (-1) + j \cdot 0 = -2, \qquad n = 1$$

$$1 + 1 + j \cdot 0$$