INF3470 – Ukeoppgaver 4

AV MAGNUS ANDERSEN (MAGNUAND)

Oppgave 2: z-transf. og ROC

(oppgave 4.9 fra læreboka)

Vi betrakter signalet

$$x[n] = \alpha^n u[n] + \beta^n u[-n-1]$$

Om vi antar at konstantene ikke er like og motsatt rettet, vil alltid $x[n] \neq 0$. Dvs.,

$$x[n] = \alpha^n u[n] + \beta^n u[-n-1] = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ \beta^n, & n < 0 \end{cases} = \{\dots, \beta^n, \beta^n, \overset{\Downarrow}{\alpha^n}, \alpha^n, \alpha^n, \dots\}$$

z-transformen blir

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = \cdots + \beta^{-3} z^3 + \beta^{-2} z^2 + \beta^{-1} z^1 + \alpha^0 z^0 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{\beta}{z}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k = \frac{z}{\beta - z} - \frac{z}{\alpha - z} \end{aligned}$$

gitt at $\left|\frac{z}{\beta}\right| < 1$ og $\left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1$. Dette går kun dersom $|\beta| > |z| > |\alpha|$.

Oppgave 3: z-transf. og ROC

(oppgave 4.11 fra læreboka)

a)

$$y[n] = x[n-5]$$

Ekspanderer til

$$y[n] = x[n-5] = \alpha^{n-5}u[n-5] = \{\ldots, \underset{\Downarrow}{0}, 0, 0, 0, 0, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots\}$$

og z-transformen blir

$$\begin{aligned} Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]z^{-k} &= \sum_{k=5}^{\infty} y[k]z^{-k} = \alpha^0 z^{-5} + \alpha^1 z^{-6} + \cdots + \alpha^{k-5}z^{-k} \\ &= \sum_{k=5}^{\infty} \alpha^{k-5}\, z^{-k} = \sum_{k=5}^{\infty} \alpha^{-5}\alpha^k\, z^{-k} = \alpha^{-5} \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k \end{aligned}$$

Konvergens $\Leftrightarrow |r| = \left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1 \Longrightarrow |z| > |\alpha|$ (ROC).

b)

$$p[n] = x[n+5]$$

Dette blir akkurat det samme som i a), bortsett fra at vi i stedet stedet for å forsinke signalet med 5 fremskynder det med 5. Skal ikke mye fantasi til for å skjønne at vi ender opp med samme ROC, men for syns skyld:

$$p[n] = x[n+5] = \alpha^{n+5}u[n+5] = \{\ldots, 0, 0, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \underset{\Downarrow}{\alpha^5}, \alpha^6 \ldots\}$$

og z-transformen blir

$$\begin{aligned} P(z) = \sum_{k=-5}^{\infty} p[k]z^{-k} &= \alpha^0 z^5 + \alpha^1 z^4 + \alpha^2 z^3 + \cdots + \alpha^{k+5} z^{-k} \\ &= \sum_{k=-5}^{\infty} \alpha^{k+5}\, z^{-k} = \alpha^5 \sum_{k=-5}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k \end{aligned}$$

Ser at vi får nøyaktig samme ROC som i a) siden $r = \frac{\alpha}{z}$ i b) også.

c)

$$g[n] = x[-n]$$

Ekspanderer til

$$g[n] = x[-n] = \alpha^{-n}u[-n] = \{\dots, \alpha^3, \alpha^2, \alpha^1, \overset{\Downarrow}{\alpha^0}, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

og z-transformen blir

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} g[k]z^{-k} = \alpha^{-k}z^{k} \dots + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^0 z^{-0}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k$$

Konvergens $\Leftrightarrow |r| = \left|\frac{z}{\alpha}\right| < 1 \Rightarrow |z| < |\alpha|$ (ROC) (vet at fasiten formulerer det annerledes, men begge er like korrekte).

d)

$$h[n] = (-1)^n x[n]$$

Ekspanderer til

$$h[n] = (-1)^n x[n] = (-1)^n \alpha^n u[n] = \{\dots, 0, 0, 0, \overset{\Downarrow}{\alpha^0}, -\alpha^1, \alpha^2, -\alpha^3, \alpha^4, \dots\}$$

og z-transformen blir

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k} = \alpha^0 z^{-0} - \alpha^1 k^{-1} + \alpha^2 z^{-2} - \alpha^3 z^{-3} + \dots + (-1)^k \alpha^k z^{-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\alpha}{z}\right)^k$$

Konvergens $\Leftrightarrow |r| = \left|-\frac{\alpha}{z}\right| = \left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \alpha$ (ROC).

e)

$$p[n] = \alpha^n x[n]$$

Ekspanderer til

$$p[n] = \alpha^n \alpha^n u[n] = \alpha^{2n} u[n] = \{\dots, 0, 0, \overset{\Downarrow}{\alpha^0}, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \alpha^8, \dots\}$$

og z-transformen blir

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p[k] z^{-k} = \alpha^0 z^{-0} + \alpha^2 z^{-1} + \alpha^4 z^{-2} + \alpha^6 z^{-3} + \cdots + \alpha^{2k} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^2}{z}\right)^k \end{aligned}$$

Konvergens $\Leftrightarrow |r| = \left|\frac{\alpha^2}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha^2|$ (ROC).

Oppgave 4: Egenskaper, *z*-transf.

(oppgave 4.18 fra læreboka)

a)

$$F(z) = X(-z)$$

Vi har

$$(-1)^n x[n] \Leftarrow ZT \Rightarrow X(-z)$$

Dermed får vi simpelthen

$$f[n] = (-1)^n x[n] = (-1)^n 2^n u[n] = (-2)^n u[n]$$

b)

$$G(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Vi har

$$x[-n] \Leftarrow ZT \Rightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Får dermed

$$g[n] = x[-n] = 2^{-n} u[-n]$$

c)

$$H(z) = zX'(-z)$$

Vi har

$$nx[n] \Leftarrow ZT \Rightarrow -zX'(z)$$

Bruker vi resultat fra a) får vi

$$-n(-1)^n x[n] \Leftarrow ZT \Rightarrow zX'(-z)$$

Dermed får vi

$$h[n] = -n(-1)^n 2^n u[n] = -n(-2)^n u[n]$$

Oppgave 5: Realiseringer

(oppgave 4.24 fra læreboka)

a)

Differenslikningen er

$$y[n] - 2y[n-1] = 4x[n] + 3x[n-1]$$

Transferferfunksjonen blir

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4 + 3\left(\frac{1}{z}\right)}{1 - 2\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{4z + 3}{z - 2}$$

b)

Differenslikningen blir nesten helt lik som i a), men legger merke til det endrede fortegnet på den ene summeren:

$$y[n] + 2y[n-1] = 4x[n] + 3x[n-1]$$

Transferfunksjonen blir

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4 + 3\left(\frac{1}{z}\right)}{1 + 2\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{4z + 3}{z + 2}$$

Oppgave 6: Tidligere eksamensoppgave

a)

Vi har

$$x[n] \Leftarrow ZT \Rightarrow X(z)$$

Om vi også har

$$y[n] = x[n-k]$$

vil

$$Y(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} y[p]z^{-p} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p-k]y^{-p}$$

Dersom vi bytter variabel, $m = p - k \Rightarrow p = m + k$, kan vi tenke på dette som

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-k}z^{-m}$$
$$= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-k}X(z)$$

Q.E.D.

b)

Har signalet

$$x_1[n] = \alpha^n u[n] = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

z-transformen blir

$$X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k = \frac{z}{z-\alpha}$$

for $|z| > |\alpha|$ (ROC).

Om $x_1[n]$ er et effektsignal eller et energisignal kommer an på verdien til α. Dersom $|\alpha| < 1$ vil det n-te leddet i energisummen avta eksponensielt mot 0, og dermed vil det være et energisignal. Vice versa vil det øke eksponensielt mot ∞ dersom $|\alpha| > 1$. Dersom $|\alpha| = 1$, vil hvert ledd hele tiden være 1, og man får en uendelig sum av 1ere, dvs. at energisummen divergerer. I begge de to sistnevnte tilfellene vil det i så fall være snakk om et effektsignal.

Oppgave 7: Tidligere eksamensoppgave

Har et IIR-filter definert ved

$$y[n] = -\tfrac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

a)

Skriver om til

$$1y[n] + \tfrac{1}{2}y[n-1] = 1x[n]$$

Transferfunksjonen blir

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2z}} = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

Graden til polynomet i telleren er 1; det eneste nullpunktet er dermed $z = 0$. Graden til polynomet i nevneren er også 1; den eneste polen er dermed $z = -\frac{1}{2}$.

b)

Har nå

$$y[n] + \tfrac{1}{2}y[n-1] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Finner $h_0[n]$:

$$h_0[n] + \frac{1}{2}h_0[n-1] = 0, \quad h_0[0] = 1$$

Den karakteristiske ligningen er

$$1 + \frac{1}{2}z^{-1} = 0 \Rightarrow z + \frac{1}{2} = 0$$

Eneste rot er $z = -\frac{1}{2}$, som gir den naturlige responsen $h_0[n] = K\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Fra initialbetingelsen finner vi at $K = 1$. Følgelig er $h_0[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Finner så

$$h[n] = h_0[n] + h_0[n-1] + h_0[n-2] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

Ser at

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}, & n > 1 \end{cases}$$

Vi kan forenkle

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Så vi har

$$h[n] = \begin{cases} 0 & ,n < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 & ,n = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} & ,n = 1 \\ 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n & ,n > 1 \end{cases}$$

Nå er det relativt lett å se at en mulig måte å realisere dette på er

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (3u[n-2] + \delta[n] - \delta[n-1])$$

Oppgave 1: Poler, nullpunkter og ROC

(oppgave 4.8 fra læreboka)

a)

Et LTI-system er stabilt bare hvis magnituden til alle røttene til den karakteristiske ligningen til systemet er < 1, dvs. at de ligger innenfor enhetssirkelen. Dette er ekvivalent med at polene til transferfunksjonen $H(z)$ til et system ligger innenfor enhetssirkelen, dvs. $|z| < 1$. Dette fordi polynomet i nevneren til $H(z)$ tilsvarerer den karakteristiske ligningen til det opprinnelige systemet i tidsdomenet.

b)