INF3470 - Ukeoppgaver 8

AV MAGNUS ANDERSEN (MAGNUAND)

Oppgave 1: Første-ordens filtre

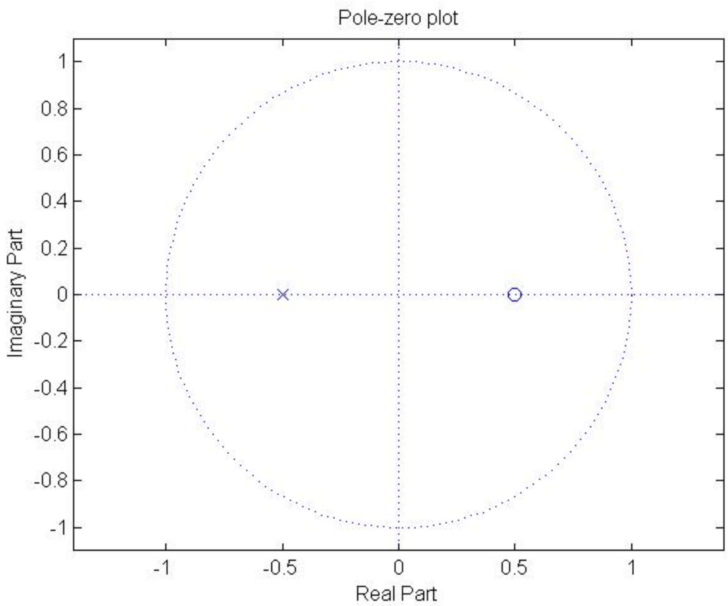
(oppgave 6.16 fra læreboka)

Skal for hvert filter sketsje pol-nullpunkts-plott, frekvensresponsen (for å finne filtertype) og evaluere faseforsinkelsen ved lave frekvenser. Vi antar at $\alpha = 0.5$*.*

a)

$$H(z) = \frac{z - \alpha}{z + \alpha} = \frac{z - 0.5}{z + 0.5}$$

Ser at filteret har ett nullpunkt i $z = 0.5$ og én pol i $z = -0.5$. Pol-nullpunkts-plott ved bruk av MATLAB-funksjonen *zplane* gir følgende plott:

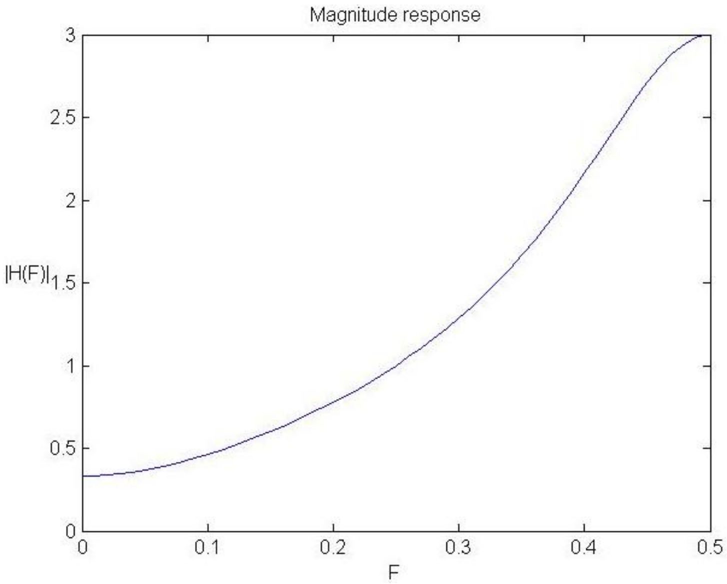


Figur 1: Pol-nullpunkts-plott for filter 1a

Frekvensresponsen uttrykt ved F blir

$$
\begin{aligned}
H(F) &= \frac{e^{j2\pi F} - \alpha}{e^{j2\pi F} + \alpha} = \frac{\cos 2\pi F + j \sin 2\pi F - \alpha}{\cos 2\pi F + j \sin 2\pi F + \alpha} \\
&= \frac{(\cos 2\pi F - \alpha + j \sin 2\pi F)(\cos 2\pi F + \alpha - j \sin 2\pi F)}{(\cos 2\pi F + \alpha + j \sin 2\pi F)(\cos 2\pi F + \alpha - j \sin 2\pi F)} \\
&= \frac{1 - \alpha^2 + j2\alpha \sin 2\pi F}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi F} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi F} + j \frac{2\alpha \sin 2\pi F}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi F}
\end{aligned}
$$

Antar at det i oppgaveteksten menes at man skal plotte magnituderesponsen. Vi ser av magnituderesponsen i Figur 2 at dette er et høypassfilter:



Figur 2: Magnituderespons til filter 1a

Faseresponsen er

$$
\begin{aligned}
\angle H(F) &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} H(F)}{\operatorname{Re} H(F)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{2\alpha \sin 2\pi F}{\cancel{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi F}}}{\frac{1 - \alpha^2}{\cancel{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi F}}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{2\alpha \sin 2\pi F}{1 - \alpha^2}\right)
\end{aligned}
$$

Synes avrundinga i fasit, dvs. $\sin 2\pi F \approx 2\pi F$, var drøy, vel å merke om dette er ment å gjelde generelt. For *lave* frekvenser går dette imidlertid bedre, og vi får altså

$$
\begin{aligned}
\lim_{F \to 0} \angle H(F) &= \lim_{F \to 0} \arctan\left(\frac{2\alpha \sin 2\pi F}{1 - \alpha^2}\right) \approx \arctan\left(\frac{2\alpha 2\pi F}{1 - \alpha^2}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{4\alpha\pi F}{1 - \alpha^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\pi F}{0.75}\right) = \arctan\left(\frac{8\pi F}{3}\right)
\end{aligned}
$$

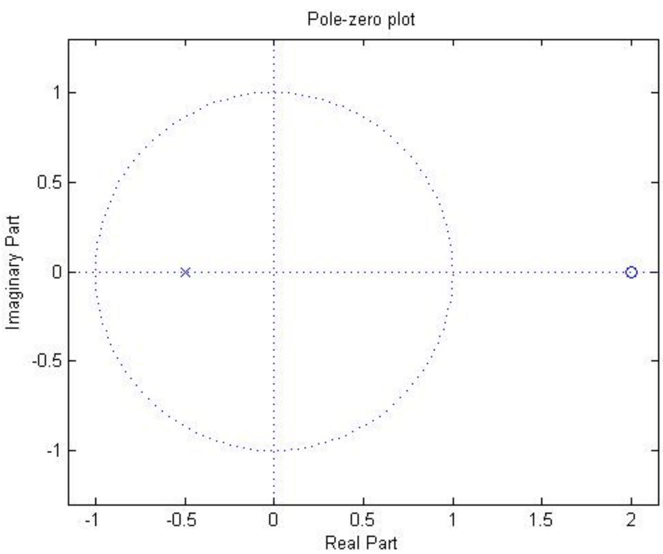
Faseforsinkelsen blir

$$t_P = -\frac{1}{2\pi}\frac{\lim_{F\to 0}\angle H(F)}{F} = -\frac{\arctan\left(\frac{8\pi F}{3}\right)}{2\pi F} \approx -\frac{4}{3} \quad \text{(for } lave \text{ frekvenser)}$$

b)

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{\alpha}}{z + \alpha} = \frac{z-2}{z+0.5}$$

Ser at vi har ett nullpunkt i $z = 2$ og én pol i $z = -0.5$

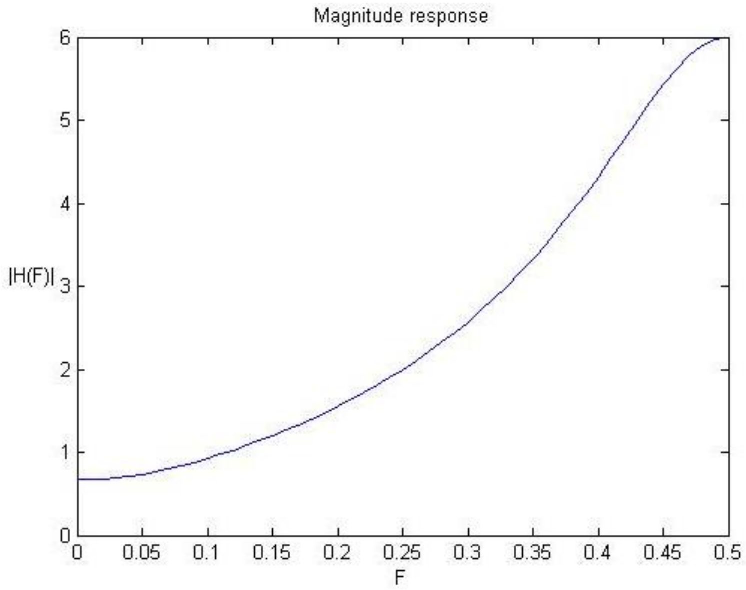


Figur 3: Pol-nullpunkts-plott for filter 1b

Frekvensresponsen blir

$$H(F) = \frac{e^{j2\pi F} - 2}{e^{j2\pi F} + 0.5} = \frac{\cos 2\pi F - 2 + j\sin 2\pi F}{\cos 2\pi F + 0.5 + j\sin 2\pi F}$$

Ser av magnituderesponsen i Figur 4 at dette er et høypassfilter:



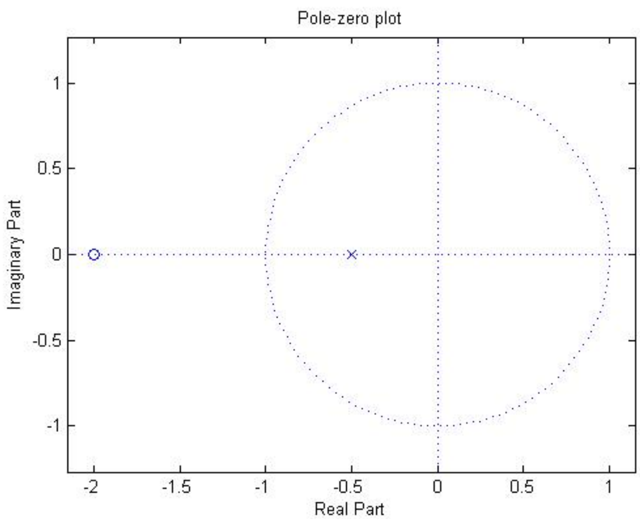
Figur 4: Magnituderespons til filter 1b

Dropper faseresponsevaluering siden fasit sier at dette ikke er obligatorisk.

c)

$$H(z) = \frac{z + \frac{1}{\alpha}}{z + \alpha} = \frac{z + 2}{z + 0.5}$$

Ser at vi har ett nullpunkt i $z = -2$ og én pol i $z = -0.5$.

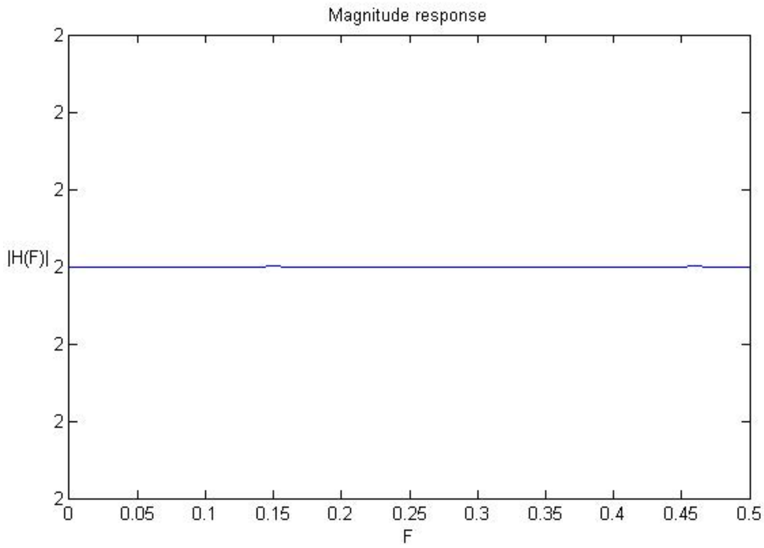


Figur 5: Pol-nullpunkts-plott for filter 1c

Frekvensresponsen blir

$$H(F) = \frac{e^{j2\pi F} + 2}{e^{j2\pi F} + 0.5} = \frac{\cos 2\pi F + 2 + j \sin 2\pi F}{\cos 2\pi F + 0.5 + j \sin 2\pi F}$$

Ser av magnituderesponsen i Figur 6 at dette er et allpassfilter:



Figur 6: Magnituderespons til filter 1c

Dropper faseresponsevaluering siden fasit sier at dette ikke er obligatorisk.

Oppgave 2: Rekursive og IIR-filtre

(oppgave 6.20 fra læreboka)

Skal for hvert av følgende rekursive filtre finne transfer-funksjonen $H(z)$ og impulsresponsen $h(n)$, og avgjøre hvilke filtre som beskriver IIR-filtre og hvilke som er lineær fase.

a)

$$y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-2]$$

Finner transfer-funksjonen:

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - z^{-2}) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - z}$$

Med $x[n] = \delta[n]$ blir impulsresponsen

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

Initialbetingelsen $h[-1] = 0$ gir rekursivt

$$\begin{aligned}
&h[0] = h[-1] + \delta[0] - \delta[-2] = 1 \\
&h[1] = h[0] + \delta[1] - \delta[-1] = 1 \\
&h[2] = h[1] + \delta[2] - \delta[0] = 0 \\
&h[3] = 0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Impulsresponsen er altså

$$h[n] = \{\overset{\Downarrow}{1}, 1\}$$

Dette er et FIR-filter, siden impulsresponsen er endelig. Videre ser vi at impulsresponsen er symmetrisk om sitt midpunkt ved halvindeksen $n = 0.5$, så filteret er lineær fase.

b)

$$y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-1] - 2x[n-2] + 2x[n-3]$$

Finner transferfunksjonen:

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-3})$$
$$\Downarrow$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-3}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^3 - z^2 - 2z + 2}{z^3 - z^2}$$

Med $x[n] = \delta[n]$ blir impulsresponsen

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$

Initialbetingelsen $h[-1] = 0$ gir rekursivt

$$\begin{aligned}
&h[0] = h[-1] + \delta[0] - \delta[-1] - 2\delta[-2] + 2\delta[-3] = 1 \\
&h[1] = h[0] + \delta[1] - \delta[0] - 2\delta[-1] + 2\delta[-2] = 1 - 1 = 0 \\
&h[2] = h[1] + \delta[2] - \delta[1] - 2\delta[0] + 2\delta[-1] = -2 \\
&h[3] = h[2] + \delta[3] - \delta[2] - 2\delta[1] + 2\delta[0] = -2 + 2 = 0 \\
&h[4] = h[3] + \delta[4] - \delta[3] - 2\delta[2] + 2\delta[1] = 0 \\
&h[5] = 0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Impulsresponsen er altså

$$\begin{gathered}\Downarrow \\ h[n] = \{1, 0, -2\}\end{gathered}$$

Dette er et FIR-filter, siden impulsresponsen er endelig. Filteret er *ikke* lineær fase, siden impulsresponsen ikke er symmetrisk om sitt midpunkt.

Oppgave 3: Kausalitet, stabilitet og minimum fase

(oppgave 6.33 fra læreboka)

Betrakter to digitale filtre som begge er kausale, stabile og minimum fase hvis transfer-funksjoner er gitt ved

$$F(z) = \frac{z}{z - 0.5} \qquad G(z) = \frac{z - 0.5}{z + 0.5}$$

Skal argumentere for at følgende filtre også er kausale, stabile og minimum fase:

a)

Det inverse filteret

$$M(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{z}{z-0.5}} = \frac{z - 0.5}{z}$$

Samme grad i teller og nevner, så filteret er kausalt. Ett nullpunkt i $z = 0.5$ og én pol i $z = 0$ (begge innenfor enhetssirkelen), så filteret er stabilt og minimum fase.

b)

Det inverse filteret

$$P(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{z + 0.5}{z - 0.5}$$

Samme grad i teller og nevner, derfor kausalt. Ett nullpunkt i $z = -0.5$ og én pol i $z = 0.5$ (begge innenfor enhetssirkelen), så systemet er stabilt og minimum fase.

c)

Kaskaden

$$H(z) = F(z)G(z) = \frac{z}{z - 0.5}\frac{z - 0.5}{z + 0.5} = \frac{z(z - 0.5)}{z^2 - 0.25}$$

Samme grad i teller og nevner, derfor kausalt. To nullpunkter $z = 0$ og $z = 0.5$, to poler i $z = \pm 0.5$ (alle innenfor enhetssirkelen), derfor stabilt og minimum fase.

d)

Den inverse kaskaden

$$R(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z^2 - 0.25}{z(z - 0.5)}$$

Samme som i c), men nå har nullpunktene og polene byttet plass. Igjen: samme grad i teller og nevner, alt innenfor enhetssirkelen, derfor kausalt, stabilt og minimum fase.

e)

Samme resonnement som i de øvrige oppgavene.

Oppgave 4: Allpassfiltre

(oppgave 6.34 fra læreboka)

Betrakter filteret $H(z) = \frac{z+2}{z+0.5}$. *Inputen til filteret er* $x[n] = \cos(2n\pi F_0)$

a)

Skal undersøke om $H(z)$ *er et allpassfilter, og i så fall finne forsterkningen*.

Dersom det er et allpassfilter, må $|H(z)| = C$ for alle F, der C er en konstant. Regner og får

$$
\begin{aligned}
|H(z)| &= \left|\frac{e^{j2\pi F} + 2}{e^{j2\pi F} + 0.5}\right| = \left|\frac{\cos 2\pi F + 2 + j\sin 2\pi F}{\cos 2\pi F + 0.5 + j\sin 2\pi F}\right| = \frac{\sqrt{(\cos 2\pi F + 2)^2 + \sin^2 2\pi F}}{\sqrt{(\cos 2\pi F + 0.5)^2 + \sin^2 2\pi F}} \\
&= \frac{\sqrt{\cos^2 2\pi F + 4\cos 2\pi F + 4 + \sin^2 2\pi F}}{\sqrt{\cos^2 2\pi F + \cos 2\pi F + 0.25 + \sin^2 2\pi F}} = \frac{\sqrt{4\cos 2\pi F + 5}}{\sqrt{\cos 2\pi F + 1.25}} \\
&= \sqrt{\frac{4\cos 2\pi F + 5}{\cos 2\pi F + 1.25}} = \sqrt{\frac{4(\cos 2\pi F + 1.25)}{\cos 2\pi \mathrm{F} + 1.25}} = \sqrt{4} = 2
\end{aligned}
$$

Som vi ser har vi konstant forsterkningen på 2 uavhengig av frekvens, så $H(z)$ er et allpassfilter.

b)

Skal finne responsen $y[n]$ *og faseforsinkelsen dersom* $F_0 = 0$.

Med $F_0 = 0$ får vi $x[n] = 1$ for alle n. Videre ser vi at systemets differenslikning

$$y[n] + 0.5y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$$

Med $x[n] = \delta[n]$ blir impulsresponsen

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 0.5h[n-1]$$

Initialbetingelsen $h[-1] = 0$ gir rekursivt

$$
\begin{aligned}
h[0] &= \delta[0] + 2\delta[-1] - 0.5h[-1] = 1 = 3 \\
h[1] &= \delta[1] + 2\delta[0] - 0.5h[0] = \frac{3}{2} = \\
h[2] &= \delta[2] + 2\delta[1] - 0.5h[1] = -\frac{3}{4} \\
h[3] &= \delta[3] + 2\delta[2] - 0.5h[2] = \frac{3}{8} \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ser at generell form på $h[n]$ er $h[n] = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n, n > 0$.

Systemresponsen er gitt ved

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] = \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Med $x[n] = 1$ for alle n får vi

$$y[n] + 0.5y[n-1] = 3$$

hvilket gir transferfunksjonen

$$H(z) = \frac{z+2}{z+0.5} = \frac{3z}{z+0.5}$$

som fører til at $z = 1$, som betyr at der ikke er noen faseforsinkelse ($t_p = 0$) siden imaginærdelen av $H(F)$ blir 0.

c)

Skal finne responsen $y[n]$ og faseforsinkelsen dersom $F_0 = 0.25$.

Med $F_0 = 0.25 = \frac{1}{4}$ får vi $z = e^{j2\pi F_0} = e^{\frac{j2\pi}{4}} = j$.

Dvs. at

$$H(F_0) = \frac{j+2}{j+5} = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1.6 - 1.2j$$

Fasen blir da

$$\angle H(F_0) = \arctan\left(\frac{-1.2}{1.6}\right) = -0.6435$$

Som gir

Oppgave 6: Samplingsteoremet

(oppgave 7.4 fra læreboka)

Skal finne Nyquist-samplingsrate for følgende signaler:

a)

$$x(t) = 5\sin\left(300\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Signalet er en sinus på formen $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$. I dette tilfellet har vi altså

$$300\cancel{\pi t} = 2f_0\cancel{\pi t} \Rightarrow f_0 = \frac{300}{2} = 150\ Hz$$

Nyquist-samplinsraten blir dermed

$$S_N = 2f_0 = 2 \cdot 150\ Hz = 300\ Hz$$

b)

$$x(t) = \cos(300\pi\, t) - \sin(300\pi t + 51°)$$

Akkurat samme f_0 som i a) i begge disse sinusene, dvs. $f_0 = 150Hz$, så samplingsraten blir igjen

$$S_N = 2f_0 = 300\ Hz$$

c)

$$x(t) = 3\cos(300\pi t) + 5\sin(500\pi t)$$

Cosinusen har $f_0 = 150\ Hz$. Sinusen har $f_1 = 250\ Hz$. Høyeste frekvens er $f_1 = 250\ Hz$, så samplingsraten blir

$$S_N = 2f_1 = 2 \cdot 250\ Hz = 500\ Hz$$

d)

$$x(t) = 3\cos(300\pi t)\sin(500\pi t)$$

Her har vi et produkt av sinuser, så høyeste frekvens blir $f_{maks} = f_0 + f_1 = (150 + 250)\ Hz = 400\ Hz$. Samplingsraten blir dermed

$$S_N = 2f_{maks} = 2 \cdot 400\ Hz = 800\ Hz$$

e)

$$x(t) = 4\cos^2(100\pi t)$$

Her har vi igjen et produkt av sinuser, begge med frekvens $f = \frac{100}{2} Hz = 50\ Hz$. Høyeste frekvens blir dermed $f_{maks} = f + f = 2f = 100\ Hz$, og samplingsraten blir dermed

$$S_N = 2f_{maks} = 2 \cdot 100\ Hz = 200\ Hz$$

f)

$$x(t) = 6\text{sinc}(100t)$$

Dette kan skrives som

$$x(t) = 6\text{sinc}(100t) = 6\text{sinc}(wt)$$

Har altså $w = 100$, og samplingsraten blir dermed

$$S_N = w = 100\ Hz$$

g)

$$x(t) = 10\text{sinc}^2(100t)$$

Her har vi et product av sinc-er, får dermed konvolusjon og samplingsraten blir

$$S_N = w + w = (100 + 100)Hz = 200Hz$$

h)

$$x(t) = 6\text{sinc}(100t)\cos(200\,\pi t)$$

Sinc-en har $w = 100\ Hz$. Cosinusen har $f_0 = \frac{200}{2} Hz = 100\ Hz$.

Samplingsraten blir dermed

$$S_N = w + 2f_0 = 100\ Hz + 2 \cdot 100\ Hz = 300\ Hz$$