INF3470 - Ukeoppgaver 12

AV MAGNUS ANDERSEN (MAGNUAND)

Oppgave 1

a)

For at impulsresponsen skal være av endelig lengde, og dermed representere et FIR-filter, må enten alle poler være i $z = 0$, eller at der ikke er noen poler i det hele tatt. Sistnevnte er tilfelle ifølge figuren i oppgaveteksten, så da betyr dette at pol-nullpunkts-plottet representerer et FIR-filter.

b)

Filteret er FIR, jmf. a). Videre ser vi at vi har nullpunkter i $z = 1$, $z = -\frac{3}{4}$, $z = \frac{3}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{3}j$, $z = -\frac{4}{3}$ og $z = \frac{2}{3} \pm \frac{2}{\sqrt{3}}j$ (ikke at det er nødvendig å regne ut disse):

- Ett nullpunkt i $z = 1$. Dette opptrer alene, og er ok.
- To nullpunkter på den reelle aksen: $-\frac{3}{4}$ og $-\frac{4}{3}$. Disse er er multiplikative inverser av hverandre, og dette er et krav for nullpunkter på den reelle aksen (par av multiplikative inverser).
- To nullpunkter (utenom de ovenfor) på enhetssirkelen: $z = \frac{3}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{3}j$. Disse er altså komplekse konjugater av hverandre, og dette er et krav for nullpunkter på enhetssirkelen (utenom nullpunkter på den reelle aksen og når $|z| = 1$).
- To nullpunkter (utenom de ovenfor) utenfor enhetssirkelen: $z = \frac{2}{3} \pm \frac{2}{\sqrt{3}}j$. Eksempelvis er den multiplikative inversen av

$$z = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}j$$

lik

$$\frac{1}{z} = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}j\right)}{\frac{16}{9}} = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\sqrt{3}j$$

Dette gjelder nødvendigvis andre veien også, slik at vi ser at $\frac{3}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{3}j$ er konjugate multiplikative inverser av $z = \frac{2}{3} \pm \frac{2}{\sqrt{3}}j$ og vice versa (to nullpunkter utenfor enhetssirkelen og de utgjør halvparten av et kvadruppel av konjugate multiplikative inverser).

Dermed er alle krav for for lineær fase oppfylt, og *trommevirvel* systemet har dermed lineær fase.

Oppgave 2 (tidl. eks. oppg.)

a)

For at filteret (fullstendig) skal stoppe frekvensen $w = \pi/2$ må magnituderesponsen ved denne frekvensen være 0. Når det gjelder $w = \pi/4$ står det at filteret skal slippe gjennom denne frekvensen uten demping, men det er ikke nevnt noen evt. forsterkning (≥ 1).

Kravene er altså

$$|H(\pi/2)| = 0 \quad og \quad H(|\pi/4|) = A$$

der $A \geq 1$.

b)

Aner ikke hvordan man finner transferfunksjonen basert på informasjonen man har.

c)

Bruker svaret i fasiten til b) som frekvensrespons, altså

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 + z^{-2}}{1}\right)$$

Ser at impulsresponsen blir

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta[n] + \delta[n-2])$$

som gir

$$\begin{aligned}
&h[n > 0] = 0 \\
&h[0] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta[0] + \delta[-2]) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&h[1] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta[1] + \delta[-1]) = 0
\end{aligned}$$

$$h[2] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta[2] + \delta[0]) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$h[n > 2] = 0$$

Impulsresponen er altså

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\overset{\Downarrow}{1}, 0, 1\}$$

Oppgave 3: Filter-design

a)

Et kausalt filter av lengde $N = 4$ kan f.eks. være

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] = x[n-(N-1)]$$

Med $x[n] = \delta[n]$ får vi impulsrespons

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-(N-1)]$$

Generelt kan vi si at kausale filtre av lengde N f.eks. kan være

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-(N-1)]$$

med impulsrespons

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-(N-1)]$$

Dvs. at impulsresponsen gir verdier $\neq 0$ for $n \in [0, N-1]$.

b)

Vi må bruke enten type II eller type IV filtre siden lengden N er et partall. Ser også at $|H(\pi)| = 0$ (fra oppgaveteksten), hvilket må bety at vi må bruke et type II-filter.

For lineære fasefiltre er gruppeforsinkelsen konstant over hele frekvensbåndet, og gruppeforsinkelsen er den samme som symmetrisenteret:

$$t_g(F) = \frac{N-1}{2}$$

Oppgave 4

(oppgave 10.8 fra læreboka)

a)

Vi har gitt

$$\{\boldsymbol{x_0}, 3, -4, 0, 2\} \Leftrightarrow \{5, \boldsymbol{X_1}, -1.28 - j4.39, \boldsymbol{X_3}, 8.78 - j1.4\}$$

Her er altså $N = 5$.

Ved konjugat symmetri blir

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{DFT}[1] = X_{DFT}^*[5-1] = X_{DFT}^*[4] = 8.78 + j1.4 \\ X_3 &= X_{DFT}[3] = X_{DFT}^*[5-3] = X_{DFT}^*[2] = -1.28 + j4.39 \end{aligned}$$

Videre får vi

$$\begin{aligned} x_0 = x[0] &= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} X_{DFT}[k]e^{\frac{j2\pi nk}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} X_{DFT}[k] \\ &= \frac{1}{5}(5 + 8.78 \cancel{+ j1.4} - 1.28 \cancel{- j4.39} - 1.28 \cancel{+ j4.39} + 8.78 \cancel{- j1.4}) \\ &= \frac{1}{5}(5 + 8.78 - 1.28 - 1.28 + 8.78) \\ &= 4 \end{aligned}$$

b)

Vi har gitt

$$\{\boldsymbol{x_0}, 3, -4, 2, 0, 1\} \Leftrightarrow \{4, \boldsymbol{X_1}, 4 - j5.2, \boldsymbol{X_3}, \boldsymbol{X_4}, 4 - j1.73\}$$

Her er altså $N = 6$.

Vet at

$$X_{DFT}[0] = \sum_{n=0}^{5} x[n] = x_0 + 3 - 4 + 2 + 0 + 1 = x_0 + 2 = 4$$

Som gir

$$x_0 = X_{DFT}[0] - 2 = 4 - 2 = 2$$

Videre blir

$$X_1 = X_{DFT}[1] = X^*_{DFT}[6-1] = X^*_{DFT}[5] = 4 + j1.73$$
$$X_4 = X_{DFT}[4] = X^*_{DFT}[6-4] = X^*_{DFT}[2] = 4 + j5.2$$

Og til slutt

$$\begin{aligned} X_3 = X_{DFT}[3] &= \sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-j\pi n} \\ &= 2e^0 + 3e^{-j\pi} - 4e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi} + 0 + 1e^{-j5\pi} \\ &= 2(1) + 3(-1) - 4(1) + 2(-1) + 1(-1) \\ &= 2 - 3 - 4 - 2 - 1 \\ &= -8 \end{aligned}$$

(what's up med fasiten? Ser ut som den er feilplassert)

Oppgave 8

(Oppgave ”Fourier-transformasjon” fra eksamen 2k8)

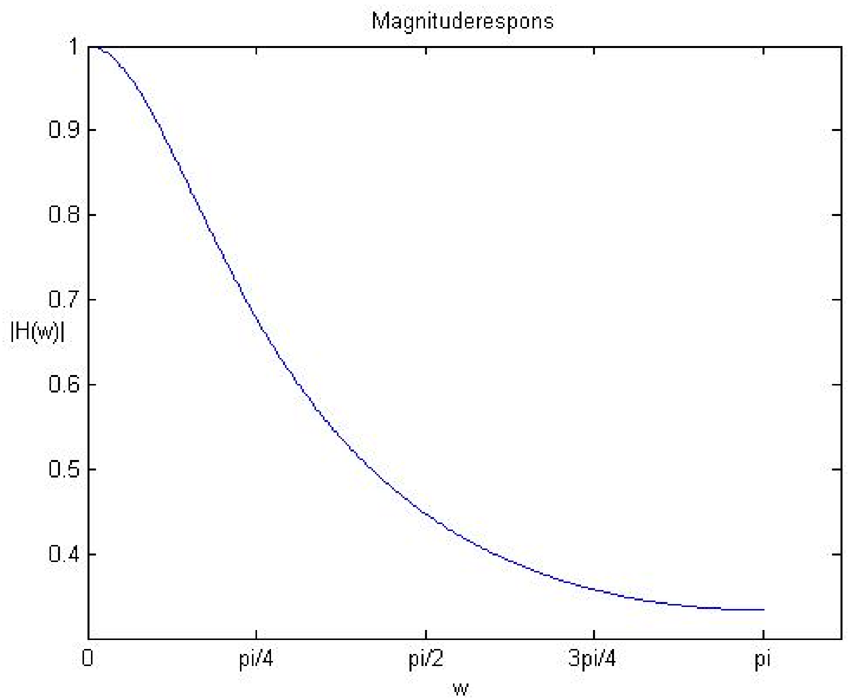
Fourier-transformasjonen til et signal $x[n]$ er gitt som

$$X(\Omega) = \frac{1}{2 - e^{-j\Omega}}$$

Magnituden til ovennevnte fourier-transformasjon blir

$$|X(\Omega)| = \left|\frac{1}{2 - e^{-j\Omega}}\right| = \frac{1}{|2 - e^{-j\Omega}|} = \frac{1}{|2 - (\cos\Omega - j\sin\Omega)|} = \frac{1}{|(2 - \cos\Omega) - j\sin\Omega|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2 - \cos\Omega)^2 + \sin^2\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 4\cos\Omega + \cos^2\Omega + \sin^2\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 4\cos\Omega + 1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos\Omega}}$$

Brukte bare MATLAB til å beregne hele responsen. Resultat:



For å finne faseresponsen må vi skille ut den reelle og imaginære delen av fourier-transformen innledningsvis i oppgaveteksten. Dette gjøres lett ved å gange med komplekskonjugert av nevner oppe og nede:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2 - e^{-j\Omega}} = \frac{1}{2 - e^{-j\Omega}} \cdot \frac{2 - e^{j\Omega}}{2 - e^{j\Omega}} = \frac{2 - e^{j\Omega}}{(2 - e^{-j\Omega})(2 - e^{j\Omega})}$$
$$= \frac{2 - \cos\Omega - j\sin\Omega}{5 - 4\cos\Omega}$$

Ser da at

$$\operatorname{Re}\big(X(\Omega)\big) = \frac{2 - \cos\Omega}{5 - 4\cos\Omega}$$

og

$$\operatorname{Im}\big(X(\Omega)\big) = \frac{\sin\Omega}{5 - 4\cos\Omega}$$

Faseresponsen blir dermed

$$\Theta(\Omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}\big(X(\Omega)\big)}{\operatorname{Re}\big(X(\Omega)\big)}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{\frac{-\sin\Omega}{\cancel{5 - 4\cos\Omega}}}{\frac{2 - \cos\Omega}{\cancel{5 - 4\cos\Omega}}}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{-\sin\Omega}{2 - \cos\Omega}\right)$$

Oppgave 10

(Oppgave "IIR-filtre" fra eksamen 2k8)

a)

Har gitt et kausalt IIR-filter med én, reell pol, z_p. Dette systemet har impulsrespons

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

Bruker Z-transform og finner systemfunksjonen

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k = 1\frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

Konvergenskravet/ROC-en er at $|r| = \left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1$, som kun skjer dersom $|\alpha| < |z|$ (tall delt på større tall blir mindre enn 1). Vi har en pol når $1 - \frac{\alpha}{z} = 0$. Dette skjer åpenbart kun i $z = \alpha$.

b)

Har gitt impulsresponsen

$$h'[n] = h[n]\cos(\pi n) = \alpha^n \cos(\pi n) u[n]$$

Bruker igjen Z-transform og finner systemfunksjonen:

$$\begin{aligned} H'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h'[k]\, z^{-k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cos(\pi k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha^k z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\alpha}{z}\right)^k \\ &= 1\frac{1}{1+\frac{\alpha}{z}} = \frac{1}{1+\alpha z^{-1}} \end{aligned}$$

Konvergenskravet/ROC-en er at $|r| = \left|-\frac{\alpha}{z}\right| = \left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1$, som som i a) kun skjer når $|\alpha| < |z|$. Har en pol når $1 + \frac{\alpha}{z} = 0$, dvs. i $z = -\alpha$.

c)

Frekvensresponsen til filteret i a) er

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

Frekvensresponsen til filteret i b) er

$$H'(\Omega) = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j(\Omega+\pi)}} = H(\Omega + \pi)$$