INF3470 – Ukeoppgaver 5

AV MAGNUS ANDERSEN (MAGNUAND)

Oppgave 2: Inverse systemer

(oppgave 4.26 fra læreboka)

Skal finne transferfunksjonen til det inverse systemet til hvert av følgende systemer, og avgjøre om hvert inverse system er kausalt og stabilt:

a)

$$H(z) = \frac{z^2 + 0.1}{z^2 - 0.2}$$

Transferfunksjonen til det inverse systemet er

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z^2 - 0.2}{z^2 + 0.1}$$

Ser at graden til polynomet i teller er like stor som graden til polynomet i nevner ($2 = 2$), så systemet er *kausalt* (krav for kausalitet: like stort eller mindre antall zeros enn poler). Videre har den karakteristiske ligningen

$$z^2 + 0.1 = 0$$

røttene

$$z = \pm 0.316228j$$

og

$$|z| = |\pm 0.316228j| = |0.316228j| = \sqrt{0.316228^2} = 0.316228 < 1$$

så systemet er *stabilt* (siden magnituden til alle røttene, i dette tilfellet bare én, er mindre enn 1).

b)

$$H(z) = \frac{z+2}{z^2+0.25}$$

Transferfunksjonen til det inverse systemet er

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z^2+0.5}{z+2}$$

Observerer at graden til teller er større enn graden til nevner ($2 > 1$), og følgelig er systemet *ikke-kausalt*. Den karakteristiske ligningen

$$z+2=0$$

har roten

$$z=-2$$

og

$$|z| = |-2| = 2 > 1$$

så systemet er *ustabilt*.

c)

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$$

Transferfunksjonen til dette systemet er

$$H(z) = \frac{1+\frac{2}{z}}{1-\frac{0.5}{z}} = \frac{z+2}{z-0.5}$$

Transferfunksjone til det inverse systemet er

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z-0.5}{z+2}$$

Ser at graden til teller er like stor som graden til nevner ($1 = 1$), så systemet er *kausalt*. Det er samme karakteristiske ligning som i b) med rotmagnitude $|z| = 2 > 1$, så systemet er *ustabilt*.

c)

$$h[n] = n(2)^n u[n]$$

Transferfunksjonen $H(z)$ er z-transformen av impulsresponsen $h[n]$. Dvs.,

$$H(z) = \mathrm{Z}\{h[n]\} = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

Transferfunksjonen til det inverse systemet er

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{(z-2)^2}{2z}$$

Ser at graden til teller er større enn graden til nevner ($2 > 1$), så det inverse systemet er *ikke-kausalt*. Ser også at den karakteristiske ligningen

$$2z = 0$$

har roten

$$z = 0$$

og

$$|z| = 0 < 1$$

så systemet er *stabilt*.

Oppgave 3: Invers transform

(oppgave 4.35 fra læreboka)

Skal for hver av de følgende $X(z)$ finne signalet $x[n]$ for hver gyldige ROC:

a)

$$X(z) = \frac{z}{(z+0.4)(z-0.6)}$$

Ved PFE finner vi at

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{z}{(z+0.4)(z-0.6)}}{\frac{z}{1}} = \frac{1}{(z+0.4)(z-0.6)} = \frac{1}{z-0.6} - \frac{1}{z+0.4}$$

Multipliserer så med z igjen og får

$$X(z) = \left(\frac{1}{z-0.6} - \frac{1}{z+0.4}\right) z = \frac{z}{z-0.6} - \frac{z}{z+0.4}$$

Har tre mulige ROC-tilfeller:

1. Hvis ROC er $|z| > 0.6$ er $x[n]$ kausal og stabil (ROC inkluderer enhetssirkelen $|z| = 1$) og
$$\begin{aligned} x[n] &= (0.6)^n u[n] - (-0.4)^n u[n] \\ &= ((0.6)^n - (-0.4)^n) u[n] \end{aligned}$$

2. Hvis ROC er $|z| < 0.4$, er $x[n]$ anti-kausal og ustabil (ROC inkluderer ikke enhetssirkelen), og
$$\begin{aligned} x[n] &= -((0.6)^n - (-0.4)^n) u[-n-1] \\ &= ((-0.4)^n - (0.6)^n) u[-n-1] \end{aligned}$$

3. Hvis ROC er $0.4 < |z| < 0.6$ er $x[n]$ tosidig og ustabil. Denne ROC-en er gyldig kun dersom $\frac{1}{z+0.4}$ beskriver en kausal følge ($|z| > 0.4$) og $\frac{1}{z-0.6}$ beskriver en ikke-kausal følge ($|z| < 0.6$), og vi får da
$$x[n] = \underbrace{-(0.6)^n u[-n-1]}_{\text{ROC: } |z| < 0.6} \qquad - \underbrace{(-0.4)^n u[n]}_{\text{ROC: } |z| > 0.25}$$

b)

$$X(z) = \frac{3z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

Ved PFE finner vi at

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{3z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}}{\frac{z}{1}} = \frac{3z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{6}{z-1} - \frac{3}{z-0.5}$$

Multipliserer så med z igjen og får

$$X(z) = \frac{6z}{z-1} - \frac{3z}{z-0.5}$$

Har tre mulige ROC-tilfeller:

1. Hvis ROC er $|z| > 1$ er $x[n]$ kausal og ustabil (ROC inkluderer ikke enhetssirkelen), og vi får
$$\begin{aligned} x[n] &= 6(1)^n u[n] - 3(0.5)^n u[n] \\ &= (6 - 3(0.5)^n)u[n] \end{aligned}$$

2. Hvis ROC er $|z| < 0.5$ er $x[n]$ ikke-kausal og ustabil, og vi får
$$\begin{aligned} x[n] &= -(6 - 6(0.5)^n)u[-n-1] \\ &= (6(0.5)^n - 6)u[-n-1] \end{aligned}$$

3. Hvis ROC er $0.5 < |z| < 1$ er $x[n]$ tosidig og ustabil. ROC-en er kun gyldig dersom $\frac{6}{z-1}$ beskriver en ikke-kausal følge ($|z| < 1$) og $\frac{3}{z-0.5}$ beskriver en kausal følge ($|z| > 0.5$), dvs
$$x[n] = \underbrace{-6u[-n-1]}_{\text{ROC: } |z| < 1} \quad \underbrace{-3(0.5)^n u[n]}_{\text{ROC: } |z| > 0.5}$$

Oppgave 4: Invers transform

(oppgave 4.40 fra læreboka)

Vi har

$$H(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+2)}$$

Det er tre mulige ROC-er: $|z| > 2$, $|z| < 0.5$ og $0.5 < |z| < 2$.

a)

Dersom ROC-en er $|z| > 2$, er systemet kausalt. Ved PFE finner vi at

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{(z-0.5)(z+2)} = \frac{0.4}{z-0.5} - \frac{0.4}{z+2} \Rightarrow H(z) = \frac{0.4z}{z-0.5} - \frac{0.4z}{z+2}$$

I dette tilfellet blir den kausale impulsresponsen

$$\begin{aligned} h[n] &= 0.4(0.5)^n u[n] - 0.4(-2)^n u[n] \\ &= 0.4((0.5)^n - (-2)^n)u[n] \end{aligned}$$

Siden ROC-en ikke inneholder enhetssirkelen er systemet ustabilt, men man kan også bekrefte dette ved å sjekke om impulsresponsen er absolutt summerbar, dvs.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |0.4((0.5)^n - (-2)^n)| < \infty$$

og vi ser kjapt at dette ikke konvergerer siden $|r| = |-2| = 2 > 1$, ergo er det ustabilt.

b)

Dersom ROC-en er $|z| < 0.5$ er systemet ikke-kausalt. I dette tilfellet blir impulsresponsen

$$h[n] = -0.4((0.5)^n - (-2)^n)u[-n-1]$$

Systemet er ikke stabilt siden $|z| < 0.5$ (inneholder ikke enhetssirkelen).

c)

Dersom ROC-en er $0.5 < |z| < 2$ er systemet tosidig og stabilt. Det er stabilt fordi ROC-en nå inneholder $|z| = 1$. ROC-en er bare gyldig dersom $\frac{0.4z}{z-0.5}$ beskriver en kausal følge ($|z| > 0.5$) og $\frac{0.4z}{z+2}$ beskriver en ikke-kausal følge ($|z| < 2$). Impulsresponsen blir da

$$h[n] = \underbrace{0.4(0.5)^n u[n]}_{\text{ROC: } |z| > 0.5} - \underbrace{-0.4(-2)^n u[-n-1]}_{\text{ROC: } |z| < 2}$$

Oppgave 5: Tidligere eksamensoppgave

Vi har et LTI-filter beskrevet av differenslikningen

$$y[n] = -0.8y[n-1] + 0.8x[n] + x[n-1]$$

a)

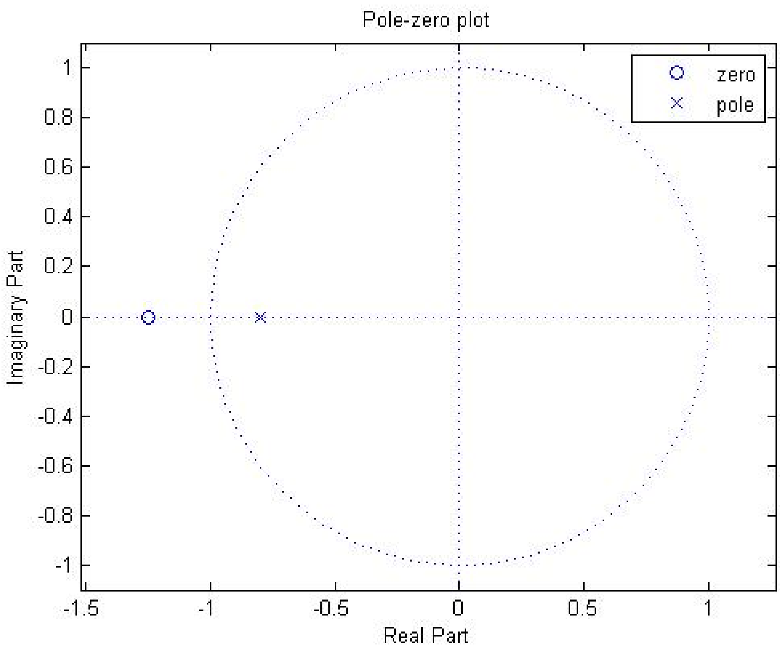
Vi skal bestemme systemfunksjonen, $H(z)$ og lage et pole-zero-plott. Skriver om differenslikningen til

$$y[n] + 0.8y[n-1] = 0.8x[n] + x[n-1]$$

og ser nå ganske umiddelbart at

$$H(z) = \frac{0.8z + 1}{z + 0.8}$$

Et MATLAB-plot ved bruk av *zplane*-funksjonen gir



b)

Skal nå finne systemets frekvensrespons, $H(w)$, og vise at for dette systemet er $|H(w)|^2 = 1$ for alle valg av w:

Substituerer $z = e^{jw}$ inn i $H(z)$ og får frekvensresponsen

$$H(w) = \frac{0.8e^{jw} + 1}{e^{jw} + 0.8} = \frac{0.8\cos w + 0.8j\sin w + 1}{\cos w + j\sin w + 0.8}$$

$$\begin{aligned}
|H(w)|^2 &= \frac{\sqrt{(0.8\cos w + 1)^2 + (0.8\sin w)^2}}{\sqrt{(\cos w + 0.8)^2 + (\sin w)^2}} = \frac{(0.8\cos w + 1)^2 + (0.8\sin w)^2}{(\cos w + 0.8)^2 + (\sin w)^2} \\
&= \frac{0.64\cos^2 w + 1.6\cos w + 1 + 0.64\sin^2 w}{\cos^2 w + 1.6\cos w + 0.64 + \sin^2 w} = \frac{0.64(\cos^2 w + \sin^2 w) + 1.6\cos \mathrm{w} + 1)}{(\cos^2 w + \sin^2 w) + 1.6\cos w + 0.64} \\
&= \frac{\cancel{0.64 + 1.6\cos w + 1}}{\cancel{1 + 1.6\cos w + 0.64}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Oppgave 6: Tidligere eksamensoppgave

For at et system skal være stabilt og kausalt må ROC-en hhv. inkludere enhetssirkelen og ”inkludere” ∞ (dvs. at $|z| > r$). Jeg kan ikke se at ROC-en er oppgitt, så påstand 1. og påstand 2. er det *ikke mulig å bedømme gyldigheten til ut i fra den gitte informasjonen*.

Påstand 3. er *gal*; det kommer an på hva kryssene og sirklene representerer. I avsnittet ovenfor ramset jeg opp kriteriene for stabilitet og kausalitet. Dersom sirklene symboliserer nullpunkter og kryssene symboliserer poler, har vi 3 nullpunkter og 4 poler. Dersom systemet er kausalt er ROC-en $|z| > r > |p|_{\max} > 1$ (dette ser vi greit ut i fra figuren). Denne ROC-en inneholder ikke enhetssirkelen, så systemet er følgelig ikke stabilt dersom det er kausalt.

Dersom det hadde vært omvendt symbolrepresentasjon, slik at vi hadde hatt 4 nullpunkter og 3 poler, ville polynomgraden til teller i transferfunksjonen vært større enn polynomgraden til nevner, og man ville hatt et brudd med ett av kravene for kausalitet (selv om ROC-kravet ville vært oppfylt).

Påstand 4. er *korrekt*: Dersom systemet er stabilt, kan ikke systemet være kausalt (jmf. forrige avsnitt). Dvs. at kun $|z| > 1$ er umulig. På figuren ser vi derimot at vi har 2 poler innenfor enhetssirkelen og 2 poler utenfor enhetssirkelen, så da er det mulig med $|p|_{min} < |z| < |p|_{maks}$ og systemet vil være stabilt. En ROC på et slikt intervall er synonymt med at systemet er tosidig.

Oppgave 7: Tidligere eksamensoppgave

Vi har gitt impulsresponsen til et system som

$$h[n] = \{\underset{\Downarrow}{2}, -4, 2\}$$

a) og b)

Vi får

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{2} h[k]z^{-k} = 2z^0 - 4z^{-1} + 2z^{-2}$$
$$= 2 - 4z^{-1} + 2z^{-2}$$

ROC-en er $|z| \in \mathbb{C} \wedge |z| \neq 0$.

Når vi skal finne $H(w)$, er det bare å substituere inn $z = e^{jw}$ i uttrykket for $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(w) = 2 - 4\left(e^{jw}\right)^{-1} + 2\left(e^{jw}\right)^{-2} &= 2 - 4e^{-jw} + 2e^{-2jw} \\ &= 2 - 4e^{-jw} + 2e^{-jw}e^{-jw} \\ &= 4e^{-jw}\left(\frac{1}{2}e^{jw} + \frac{1}{2}e^{-jw} - 1\right) \\ &= 4e^{-jw}(\cos w - 1) \end{aligned}$$

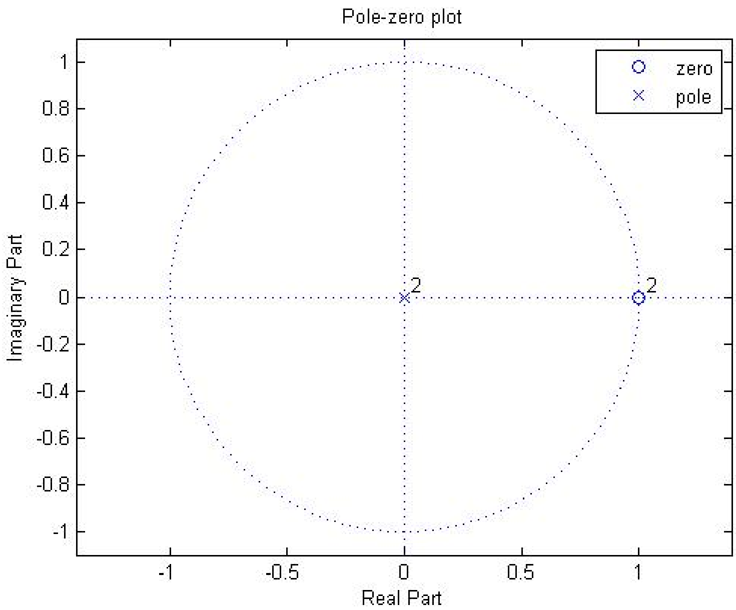
c)

Skal finne polene og nullpunktene til $H(z)$. Vi har

$$H(z) = 2 - \frac{4}{z} + \frac{2}{z^2} = \frac{2z^2}{z^2} - \frac{4z}{z^2} + \frac{2}{z^2} = \frac{2z^2 - 4z + 2}{z^2} = \frac{2(z^2 - 2z + 1)}{z^2} = \frac{2(z-1)^2}{z^2}$$

Ser av telleren at vi har nullpunktet/roten $z = 1$ med multiplisitet 2, og fra nevneren ser vi at vi har polen $z = 0$ også med multiplisitet 2.

Et MATLAB-plot ved bruk av *zplane*-funksjonen gir



d)

Kretsens differenslikningen finner vi direkte ved å se på transferfunksjonen

$$y[n] = 2(x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]) = 2x[n] - 4x[n-1] + 2x[n-2]$$

e)

Skal bestemme

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_k h[k]x[n-k]$$

for inngangssignalet $x[n] = 3\delta[n] + 4\delta[n-2] + \delta[n-3]$. Regner og får

$$y[n] = \sum_{k=0}^{2} h[k]x[n-k] = \{2, -4, 2\} * \{3, 0, 4, 1\} = \{6,$$