UNIVERSITETET I OSLO

Ukeoppgaver 2

INF3470 – Digital signalbehandling

Magnus Andersen

8/31/2012

trigonometriske funksjoner, amplitude, faseskift, frekvens, fasorer, komplekse tall, geometriske rekker

Innhold

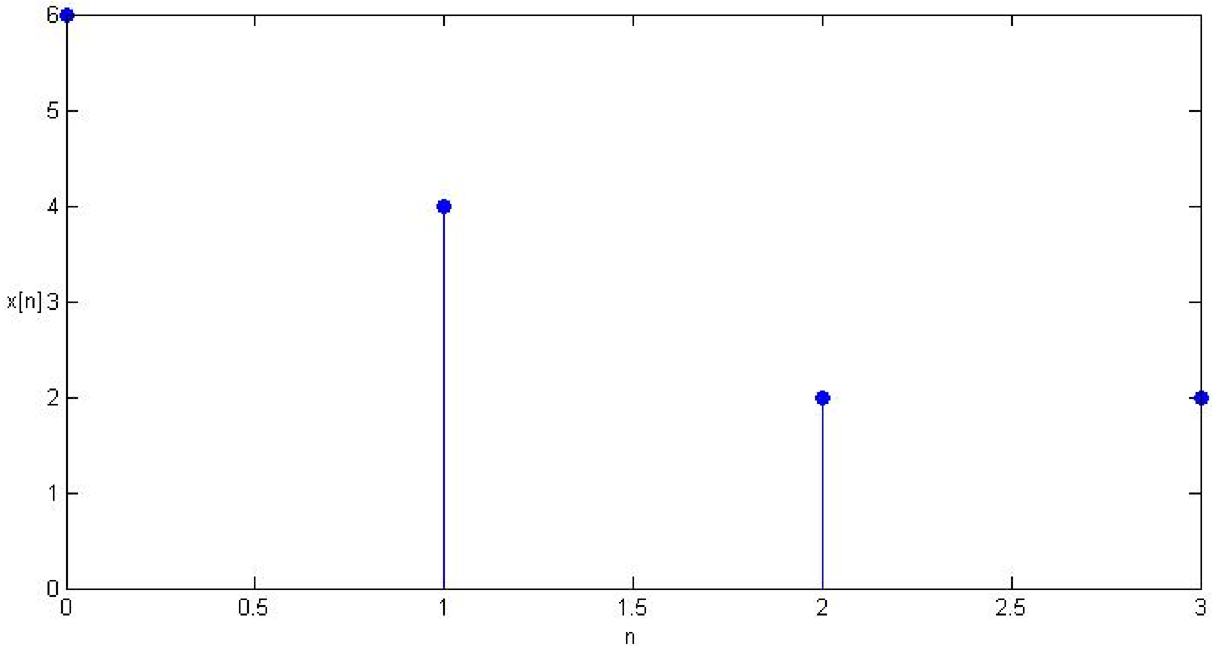
Oppgave 2.1: Diskrete signaler 3
Oppgave 2.4: Operasjoner 6
Oppgave 2.6: Energi og effekt 11
Oppgave 2.7: Desimering og interpolasjon .... **Error! Bookmark not defined.**
Oppgave 2.9: Ikke heltalling forsinkelse .... **Error! Bookmark not defined.**
Oppgave 2.10: Symmetrier .... **Error! Bookmark not defined.**
Oppgave 2.19: Diskrete sinuser .... **Error! Bookmark not defined.**
Oppgave 2.22: Endring av frekvenser (pitch) .... **Error! Bookmark not defined.**
Oppgave 10 .... **Error! Bookmark not defined.**

Oppgave 1: Diskrete signaler
(oppgave 2.1 fra læreboka)

Skal sketsje hvert signal og finn dets energi dersom signalet er endelig, eller dets effekt dersom det er periodisk/uendelig:

a)

$$\overset{\Downarrow}{x[n]} = \{6, 4, 2, 2\}$$

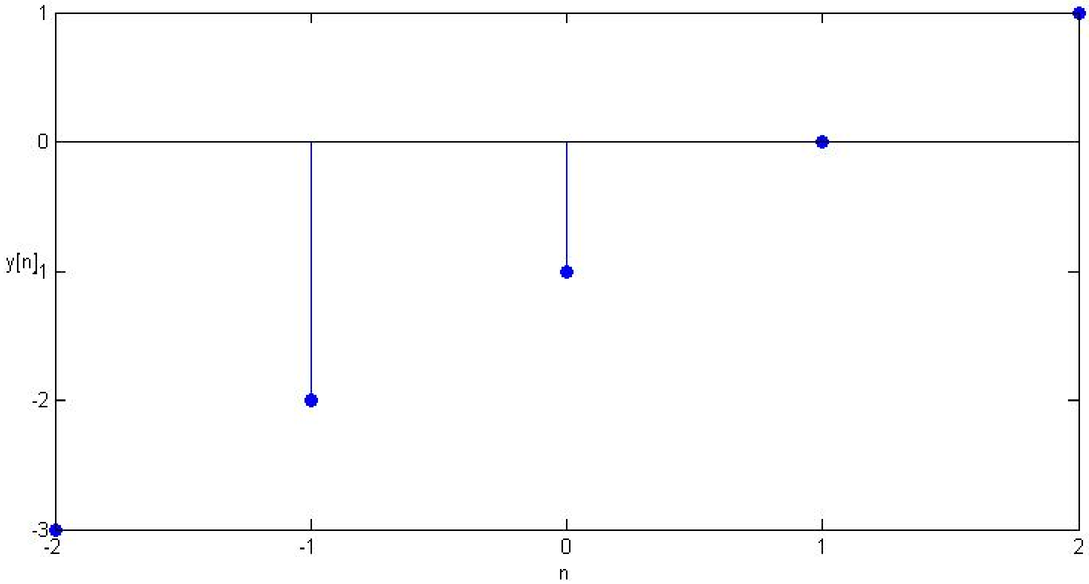


Signalenergien blir

$$E_s = \sum_{n=0}^{3} |x[n]|^2 = 6^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 = 60$$

b)

$$y[n] = \{-3, -2, \overset{\Downarrow}{-1}, 0, 1\}$$

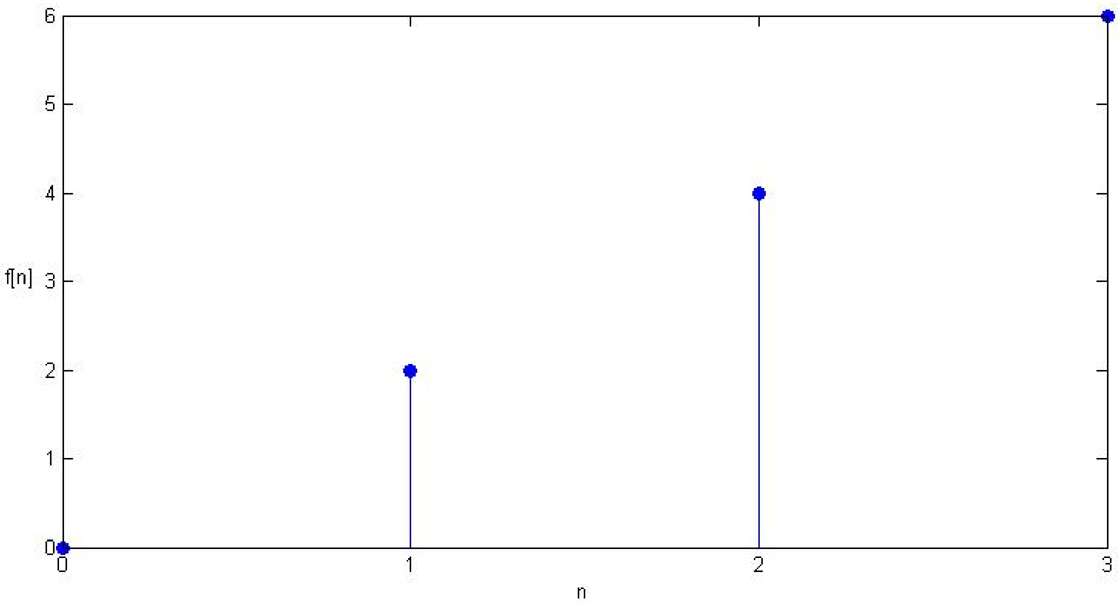


Signalenergien blir

$$E_s = \sum_{n=-2}^{2} |y[n]|^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 15$$

c)

$$f[n] = \{\overset{\Downarrow}{0}, 2, 4, 6\}$$



Signalenergien blir

$$E_s = \sum_{n=0}^{3} |f[n]|^2 = 0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$$

d)

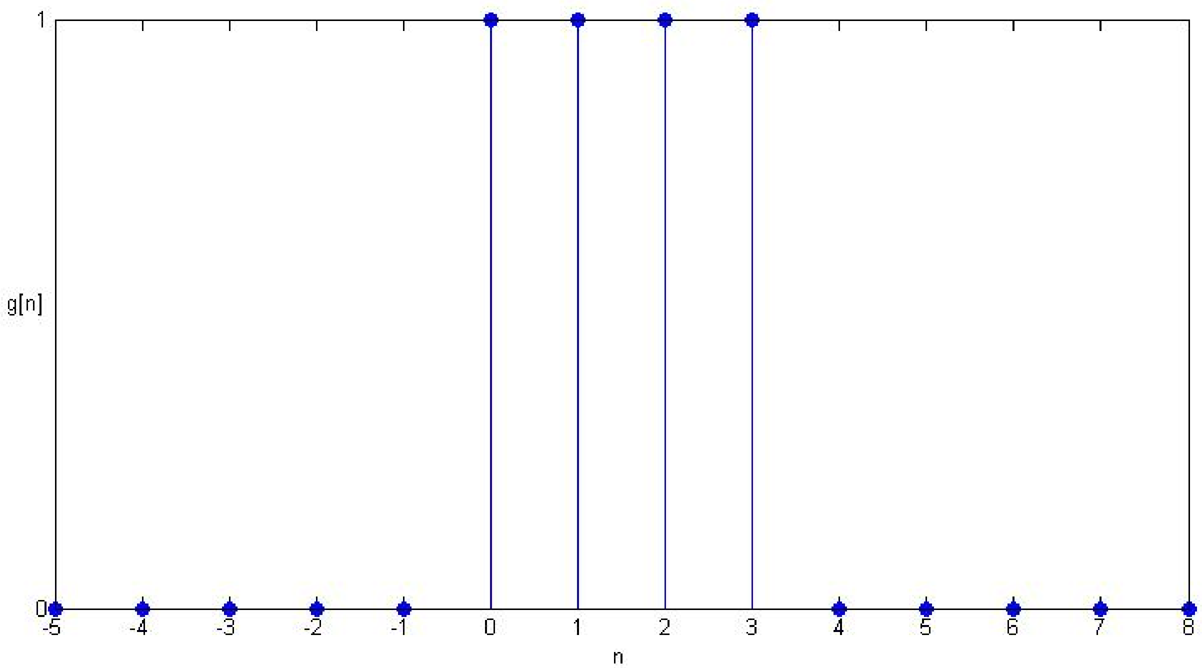
$$g[n] = u[n] - u[n-4]$$

$u[n]$ produserer signal $\neq 0$, altså 1, kun for $n \geq 0$. Likeledes produserer $u[n-4]$ signal $\neq 0$ kun for $n \geq 4$. Summen $u[n] - u[n-4]$ vil altså kun produsere signal $\neq 0$ for $0 \leq n < 4$, siden leddene vil kansellere hverandre ellers. Eksempel:

$$g[-1] = u[-1] - u[-5] = 0 - 0 = 0$$

$$g[0] = u[0] - u[-4] = 1 - 0 = 1$$

$$g[4] = u[4] - u[0] = 1 - 1 = 0$$



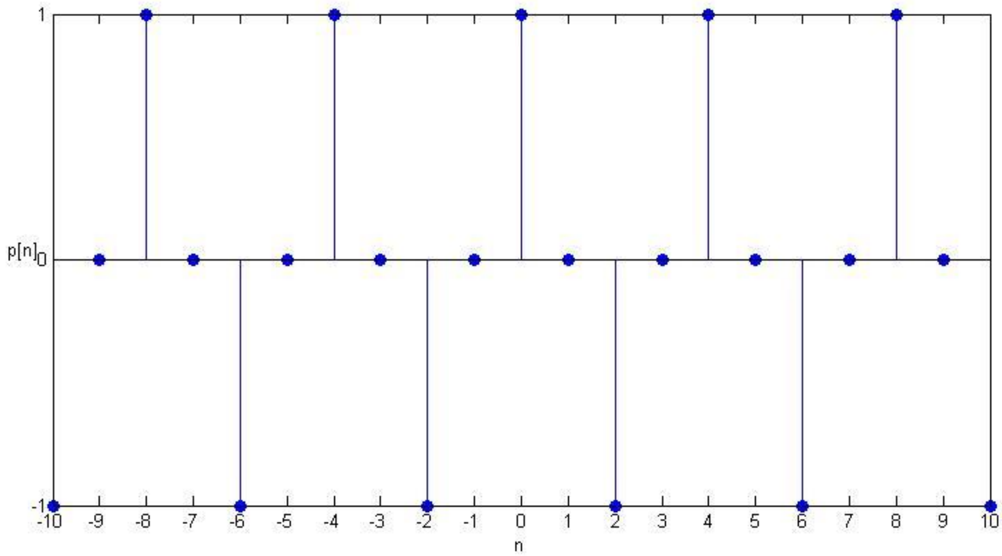
Selv om $-\infty < n < \infty$, ser vi av resonnementet ovenfor samt plottet at $g[n]$ produserer signal $\neq 0$ kun fire ganger, dvs. et endelig antall ganger. Signalenergien blir følgelig

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2 = \cdots + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + \cdots = 4$$

e)

$$p[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$p[n]$ produserer et signal $\neq 0$ kun når argumentet til cosinus-funksjonen er et heltall antall π. Siden det er snakk om et diskret signal, dvs. bare heltallige n, vil $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ bare anta verdiene 1, 0 og -1. $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ gir $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 1, 0, -1, 0, 1, 0$. Dette vil fortsette i det uendelige (her for $n \in [-10, 10]$):



Siden signalet fortsetter slik i det uendelige både for positive og negative n, er det her interessant å finne *effekten* til signalet til signalet (signalenergien er uendelig). Perioden til signalet finner vi ved å tenke på signalet som $A\cos(\omega n + \phi)$, med $\omega = \frac{\pi}{2}$ (og $A = 1$ og $\phi = 0$):

$$\omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N = 4$$

Signaleffekten blir da:

$$P_s = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|p[n]|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right|^2 = \frac{1}{4}(1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2) = \frac{1}{4}(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

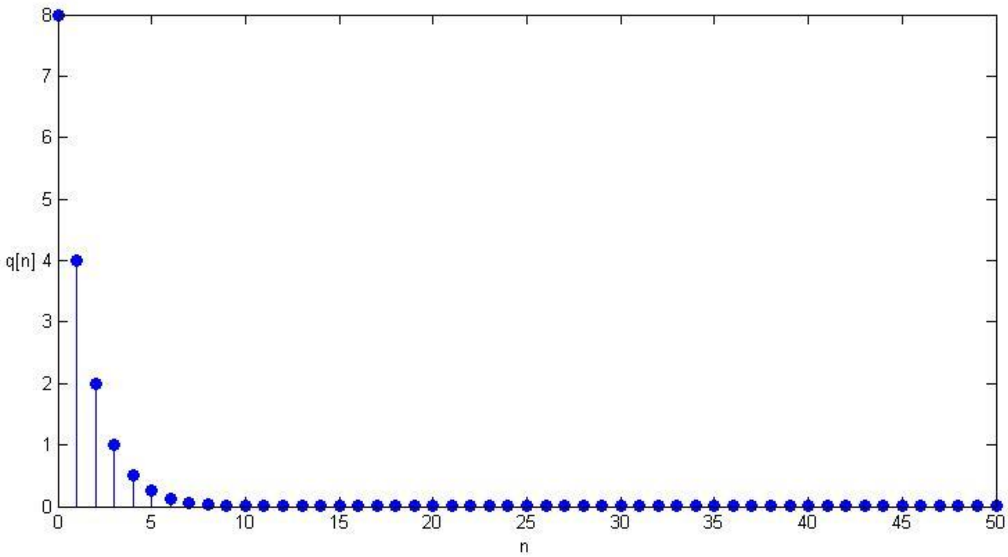
f)

$$q[n] = 8(0.5)^n u[n]$$

Siden

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

vil $q[n]$ produsere signal $\neq 0$ kun for $n \geq 0$. Men etter hvert som n blir veldig stor, vil $(0.5)^n = \frac{1}{2^n}$ bli veldig liten, og signalet vil gå mot null:



Signalenergien blir

$$E_s = \sum_{n=0}^{\infty} |q[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| 8\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 64\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 64\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 64\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Her kan vi bruke sum av geometrisk rekke, med $a_0 = 64$ og $r = \left(\frac{1}{4}\right) < 1$ (og følgelig konvergent):

$$E_s = \sum_{n=0}^{\infty} 64\left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 64 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 64 \frac{1-0}{\frac{3}{4}} = 64\frac{4}{3} = \frac{256}{3}$$

Oppgave 2: Operasjoner

(oppgave 2.4 fra læreboka)

Lar

$$x[n] = 8(0.5)^n(u[n+1] - u[n-3])$$

Skal sketjse de følgende signalene og finne signalenergien deres:

a)

$$y[n] = x[n-3]$$

Her er altså

$$y[n] = x[n-3] = 8(0.5)^{n-3}(u[n+1-3] - u[n-3-3])$$

$$= 8(0.5)^{n-3}(u[n-2] - u[n-6])$$

I den siste parantesten får vi

$$u[n-2] = \begin{cases} 0, & n < 2 \\ 1, & n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad u[n-6] = \begin{cases} 0, & n < 6 \\ 1, & n \geq 6 \end{cases}$$

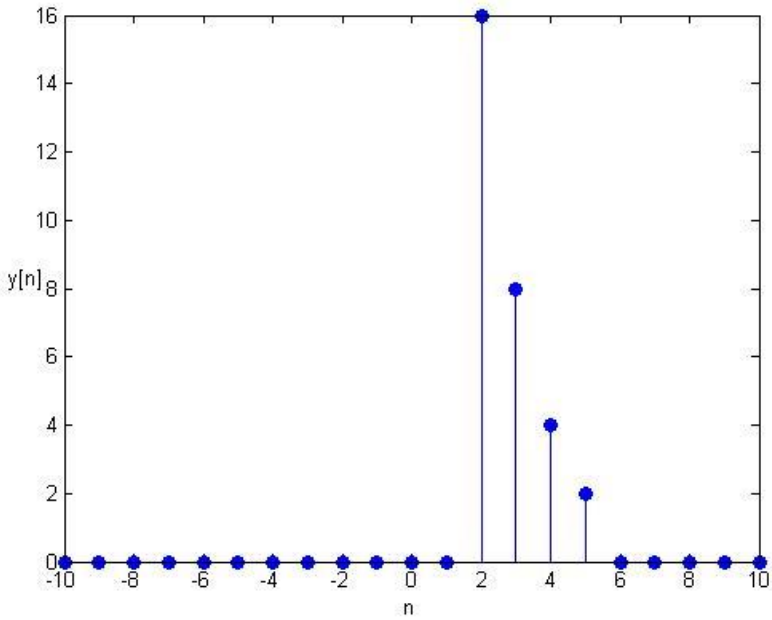
Siden alle $n \geq 6 \geq 2$ gir $u[n-2] = u[n-6] = 1$, vil dermed alle $n \geq 6$ gi $u[n-2] - u[n-6] = 0$. Dersom $n < 2 < 6$, vil begge termene gi 0 og dermed blir hele parantesen 0. Om derimot $2 \leq n < 6$, vil første term bli 1, mens andre term blir 0, og totalen blir 1.

Oppsummert kan vi altså si at

$$u[n-2] - u[n-6] = \begin{cases} 1, & n \in [2,\ 6) \\ 0, & n \notin [2,\ 6) \end{cases}$$

n må altså ligge på intervallet $[2,\ 6)$ for at $y[n]$ i det hele tatt skal produsere et signal $\neq 0$.

På neste side følger et plot av signalet for $n \in [-10, 10]$, og som vi ser stemmer det bra med resonnementet over:



b)

$$f[n] = x[n+1]$$

Dette blir

$$f[n] = x[n+1] = 8(0.5)^{n+1}(u[n+2] - u[n-2])$$

Videre har vi

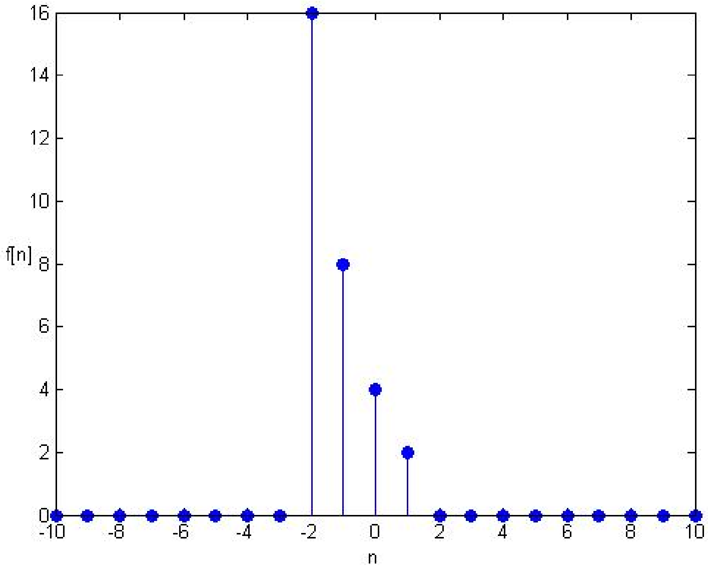
$$u[n+2] = \begin{cases} 1, & x \geq -2 \\ 0, & x < -2 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad u[n-2] = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Dersom $n \geq 2 \geq -2$, vil begge termene bli 1 og hele parantesen dermed 0. Og vice versa for $n < -2 < 2$; begge termenene blir 0 og følgelig også hele parantesen. De eneste n som produserer et signal $\neq 0$ må dermed ligge på intervallet $[-2, 2)$.

Dvs. at

$$(u[n+2] - u[n-2]) = \begin{cases} 1, & n \in [-2,\ 1] \\ 0, & n \notin [-2,\ 1] \end{cases}$$

Plott:



c)

$$g[n] = x[-n+4]$$

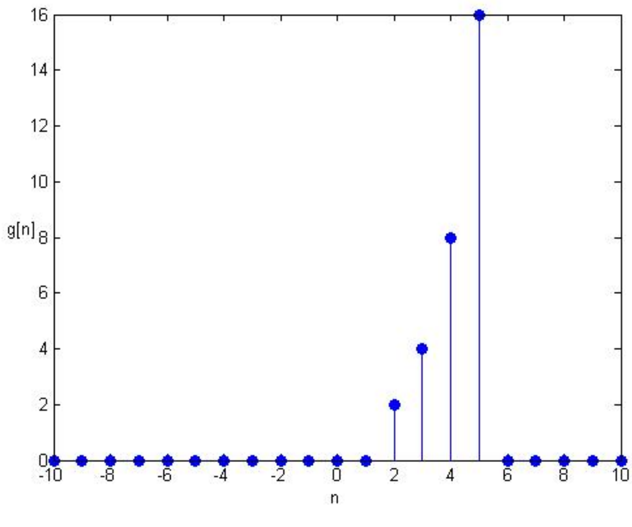
Dette blir

$$g[n] = x[-n+4] = 8(0.5)^{-n+4}(u[-n+5] - u[-n+1])$$

Samme type resonnement som i de foregående oppgavene gir

$$u[-n+5] - u[-n+1] = \begin{cases} 1, & n \in [2,5] \\ 0, & n \notin [2,5] \end{cases}$$

Plott:



d)

$$h[n] = x[-n-2]$$

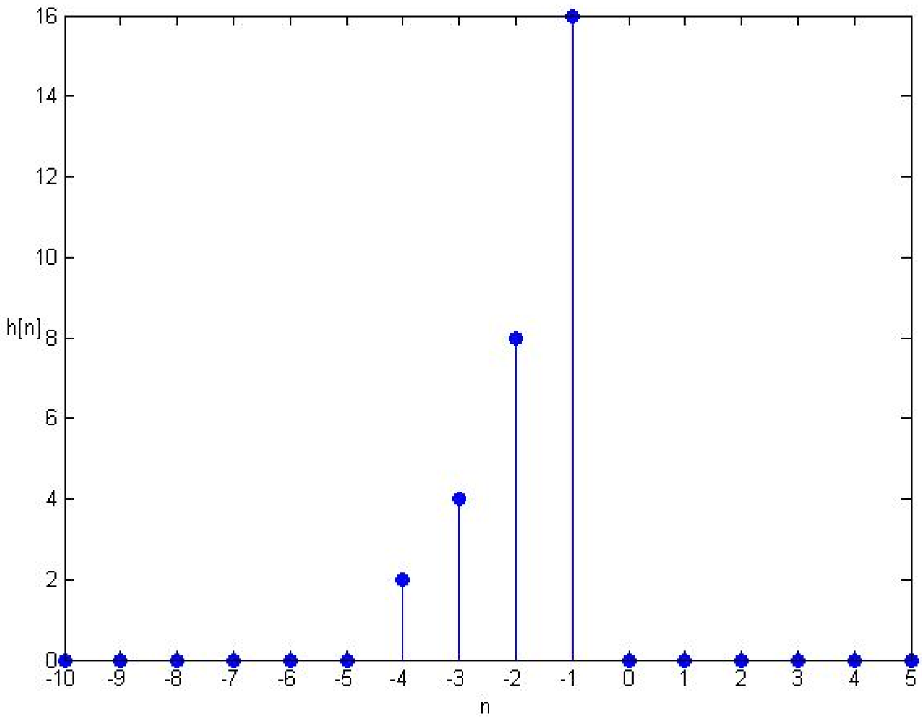
Dette er det samme som

$$h[n] = x[-n-2] = 8(0.5)^{-n-2}(u[-n-1] - u[-n-5])$$

Samme type resonnement som før gir

$$u[-n-1] - u[-n-5] = \begin{cases} 1, & n \in [-4,-1] \\ 0, & n \notin [-4,-1] \end{cases}$$

Plott:



Oppgave 3: Energi og effekt

(oppgave 2.6 fra læreboka)

sdawd