INF3470 – Ukeoppgaver 7

AV MAGNUS ANDERSEN (MAGNUAND)

Oppgave 1: Frekvensrespons

(oppgave 6.2 fra læreboka)

Betrakter 3-punkts averaging-filteret

$$h[n] = \frac{1}{3}\{1, \overset{\Downarrow}{1}, 1\}$$

a)

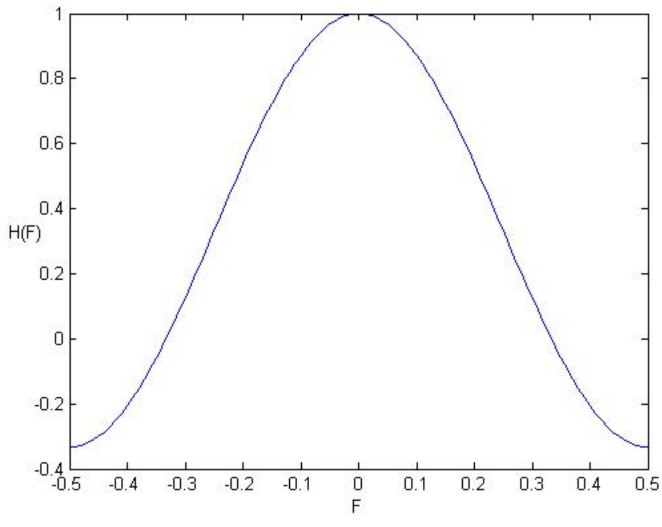
Frekvensresponsen er

$$H(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j2\pi kF} = \sum_{k=-1}^{1} h[k] e^{-j2\pi kF} = \frac{1}{3}\left(e^{j2\pi F} + 1 + e^{-j2\pi F}\right) = A(F) e^{-j2\pi\alpha F}$$

Siden impulsresponsen $h[n]$ er symmetrisk om sitt midpunkt ved indeks $n = \alpha = 0$, får vi altså

$$H(F) = A(F) e^{-j2\pi 0F} = A(F) = \frac{1}{3}\left(e^{j2\pi F} + 1 + e^{-j2\pi F}\right) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos(2\pi F))$$

Plott for $|F| \leq 0.5$:



b)

Fasen er gitt ved

$$\phi(F) = \tan^{-1}\left(\frac{Im\big(H(F)\big)}{Re\big(H(z)\big)}\right) = 0$$

Siden fasen er null blir følgelig også både faseforsinkelsen og gruppeforsinkelsen 0.

Dette er et linear-phase filter: impulsresponsen er symmetrisk om sitt midtpunkt ($h[n] = h[-n]$).

c)

Frekvensen til $x[n]$ blir $F = \frac{1}{6}$ siden $\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{6}\right)n\right)$

Frekvensresponsen blir

$$H\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

e)

Bruker $(-1)^n = \cos(n\pi)$, dvs. $F = \frac{1}{2}$, og får

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos(\pi)) = -\frac{1}{3}$$

Oppgave 2: Poler og nullpunkter

(oppgave 6.9 fra læreboka)

Filter 1:

Ett nullpunkt i $z = 0$ og én pol i $z = 0.7$. En korresponderende transferfunksjon er

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.7}$$

DC gain blir

$$|H(1)| = \left|\frac{1}{1 - 0.7}\right| = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} \approx 3.3333 \ldots$$

og high frequency gain blir

$$|H(-1)| = -\left|\frac{-1}{-1 - 0.7}\right| = \left|-\frac{1}{-1.7}\right| = \frac{1}{1.7} = \frac{10}{17} \approx 0.5882$$

Siden $|H(1)| \gg |H(-1)|$, er dette et lavpassfilter.

Filter 2:

Ett nullpunkt i $z = 0$ og én pol i $z = -0.6$. En korresponderende transferfunksjon er

$$H(z) = \frac{z}{z + 0.6}$$

DC gain blir

$$|H(1)| = \left|\frac{1}{1 + 0.6}\right| = \frac{1}{1.6} = \frac{5}{8} = 0.625$$

og high frequency gain blir

$$|H(-1)| = \left|-\frac{1}{-1 + 0.6}\right| = \left|\frac{-1}{-0.4}\right| = \frac{1}{0.4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Siden $|H(1)| \ll |H(-1)|$, er dette et høypassfilter.

Filter 3:

Ett nullpunkt i $z = 1$, og én pol i $z = 0.4$. En korresponderende transferfunksjon er

$$H(z) = \frac{z-1}{z-0.4}$$

DC gain blir

$$|H(1)| = \left|\frac{1-1}{1-0.4}\right| = 0$$

og high frequency gain blir

$$|H(-1)| = \left|\frac{-1-1}{-1-0.4}\right| = \left|-\frac{2}{-1.4}\right| = \frac{10}{7} \approx 1.42857$$

Siden $|H(1)| \ll |H(-1)|$, er dette et høypassfilter.

Filter 4:

Forstod ikke nøyaktig hvor polene og nullpunktene ligger ut i fra plottet, men sånn ca.: To nullpunkter i $z \approx 0.64 \pm 0.8j$ og to poler i $z \approx 0.5 \pm 0.7j$. En korresponderende transferfunksjon er

$$H(z) \approx \frac{\big(z-(0.64+0.8j)\big)\big(z-(0.64-0.8j)\big)}{\big(z-(0.5+0.7j)\big)\big(z-(0.5-0.7j)\big)} = \frac{(z-0.64-0.8j)(z-0.64+0.8j)}{(z-0.5-0.7j)(z-0.5+0.7j)}$$
$$= \frac{(X-0.8j)(X+0.8j)}{(Y-0.7j)(Y+0.7j)} = \frac{X^2+0.64}{Y^2+0.49} = \frac{(z-0.64)^2+0.64}{(z-0.5)^2+0.49} = \frac{z^2-1.28z+1.0496}{z^2-z+0.74}$$

DC gain blir

$$|H(1)| = \left|\frac{1^2-1.28+1.0496}{1^2-1+0.74}\right| = \frac{0.7696}{0.74} = 1.04$$

og high frequency gain blir

$$|H(-1)| = |\frac{(-1)^2+1.28+1.0496}{(-1)^2+1+0.74} = \frac{3.3296}{2.74} = 1.2158$$

Kan kanskje være snakk om et båndpassfilter? $F = 0.25$ gir $z = i$, og $|H(i)| \approx 0.28$.. litt usikker.

Oppgave 3: Minimum fase

(oppgave 6.11 fra læreboka)

a)

$$H(z) = \frac{z^2 + 0.16}{z^2 - 0.25}$$

Dette systemet har nullpunkter $z = \pm 0.4j$ og poler $z = \pm 0.5$. Alle nullpunktene og polene ligger innenfor enhetssirkelen, så systemet er minimum-fase.

Systemet er stabilt siden magnituden til alle polene er mindre enn 1, dvs. $|z| = |\pm 0.5| = 0.5 < 1$.

b)

$$H(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 + 9}$$

Dette systemet har nullpunkter $z = \pm 2$ og poler $z = \pm 3j$. Begge nullpunktene ligger utenfor enhetssirkelen, så systemet er maksimum-fase.

Systemet er ustabilt siden $|z| = |\pm 3j| = 3 > 1$.

c)

$$h[n] = n(2)^n u[n]$$

Transferfunksjonen er

$$H(z) = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

Systemet har ett nullpunkt i $z = 0$, og én pol i $z = 2$ (mulitplisitet 2). Får ikke dette til å passe inn med noen av de tre alternativene man kan klassifisere systemenene som.

Systemet er ustabilt siden $|z| = |2| = 2 > 1$

d)

$$y[n] + y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Finner transferfunksjonen:

$$Y(z)(1 + z^{-1} + 0.25z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1})$$
$$\Downarrow$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.25z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - z + 0.25} = \frac{z(z-2)}{(z-0.5)^2}$$

Dette systemet har nullpunkter i $z = 0$ og $z = 2$, og én pol i $z = 0.5$ (med multiplisitet 2). Siden nullpunktene både ligger innenfor og utenfor enhetssirkelen er systemet mixed-fase.

Systemet er stabilt siden $|z| = |0.5| = 0.5 < 1$.

Oppgave 4: Systemkarakterisering

(oppgave 6.13 fra læreboka)

Betrakter systemet

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] - \beta x[n-1]$$

Transferfunksjonen blir

$$Y(z)(1 - \alpha z^{-1}) = X(z)(1 - \beta z^{-1}) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \beta z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z - \beta}{z - \alpha}$$

a)

For stabilitet må alle polmagnituder være strengt mindre enn 1, dvs. $|z| < 1$. I dette tilfellet er det én pol, $z = \alpha$, og stabilitet krever altså at $|z| = |\alpha| < 1$. β er arbitrær.

b)

For minimum-fase må alle nullpunkter og poler ligge innenfor enhetssirkelen, dvs. at $|z| = |\beta| < 1$ og $|z| = |\alpha| < 1$.

c)

For at det skal være et allpassfilter må vi ha $|H(F)| = 1$. Dette skjer dersom $\beta = \alpha$.

d)

For at det skal være et linear phase-filter, må bl.a. alle poler være i $z = 0$. Dette medfører at $\alpha = 0$. For nullpunkter i $z = \pm 1$, må $\beta = \pm 1$ (én av de).

Oppgave 5: Frekvensrespons

(oppgave 6.14 fra læreboka)

Betrakter det rekursive filteret

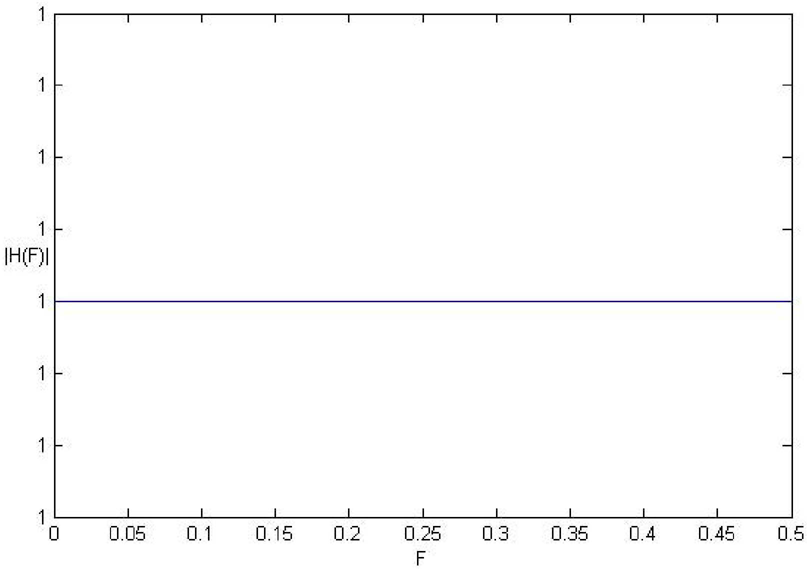
$$y[n] + 0.5y[n-1] = 0.5x[n] + x[n-1]$$

a)

Finner transferfunksjonen:

$$Y(z)(1 + 0.5z^{-1}) = X(z)(0.5 + z^{-1}) \Rightarrow H(z) = \frac{0.5z + 1}{z + 0.5}$$

Plott av forsterkningen $|H(F)|$ for $F \in [0, 0.5]$:



Ser at dette åpenbart er et allpassfilter.

b)

Dette er ikke et linear phase-filter, siden polen til transferfunksjonen ligger på $z = -0.5$ og ikke $z = 0$.

c)

Har inputen

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Her er $F = \frac{1}{4}$ siden $\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{4}\right)n\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Responsen med denne frekvensen blir

$$H\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{0.5e^{\frac{j2\pi}{4}} + 1}{e^{\frac{j2\pi}{4}} + 0.5} = \frac{1 + 0.5j}{j + 0.5} = 0.8 - 0.6j$$

d)

Har inputen

$$x[n] = \delta[n]$$

Nå har vi altså

$$h[n] + 0.5h[n-1] = 0.5\delta[n] + \delta[n-1]$$

Regner og får

$$\begin{aligned}
&h[0] = 0.5\delta[0] + \cancel{\delta[-1] - 0.5h[-1]} = 0.5\\
&h[1] = \cancel{0.5\delta[1]} + \delta[0] - 0.5h[0] = 1 - 0.25 = 1 - (0.5)^2\\
&h[2] = \cancel{0.5\delta[2] + \delta[1]} - 0.5h[1] = -(1-(0.5)^2)0.5 = -0.5 + 0.5^3\\
&h[3] = \cancel{0.5\delta[3] + \delta[2]} - 0.5h[2] = -(-0.5 + 0.5^3)0.5 = 0.5^2 - 0.5^4\\
&h[4] = \cancel{0.5\delta[4] + \delta[3]} - 0.5h[3] = -(0.5^2 - 0.5^4)0.5 = -0.5^3 + 0.5^5\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ser at generell form på impulsresponsen $h[n]$ er

$$\begin{aligned}
h[n] &= (-0.5)^{n-1} + (-1)^n(0.5)^{n+1}u[n]\\
&= (-2(-0.5)^n + (-1)^n(0.5)(0.5)^n)u[n]\\
&= (-2(-0.5)^n + 0.5(-0.5)^n)u[n]\\
&= -1.5(-0.5)^n u[n]
\end{aligned}$$

e)

Har inputen

$$x[n] = (-1)^n$$

Bruker at

$$x[n] = (-1)^n = \cos(n\pi)$$

Her er $F = \frac{1}{2}$ siden $\cos\left(n2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \cos(n\pi)$

Frekvensresponsen blir

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{0.5e^{j\pi} + 1}{e^{e^{j\pi}} + 0.5} = -1$$

Oppgave 6: Filterdesign med pol- og nullpunktsplassering

(oppgave 6.19 fra læreboka)

a)

Finner

$$F_0 = \frac{1}{\frac{800}{200}} = \frac{1}{4}\,, \qquad \Delta F = \frac{1}{\frac{800}{20}} = \frac{1}{40}\,, \qquad F_s = \left[\frac{0}{800}, \frac{400}{800}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Polradiusen er

$$R = 1 - \pi\Delta\mathrm{F} = 1 - \frac{\pi}{40}$$

Plasserer polene ved

$$z = Re^{\pm j2\pi F_0} = \left(1 - \frac{\pi}{40}\right)e^{\pm\frac{j\pi}{2}} = \pm\left(1 - \frac{\pi}{40}\right)j \approx \pm 0.9215j$$

Plasserer nullpunktene ved

$$z = e^{j2\pi 0} = 1 \text{ og } z = e^{\frac{j2\pi}{2}} = -1$$

Transferfunksjonen blir dermed

$$H(z) = \frac{(z+1)(z-1)}{(z+0.9215j)(z-0.9215j)} = \frac{z^2-1}{z^2+0.8492}$$

b)

Finner

$$F_0 = \frac{1000}{8000} = \frac{1}{8}\,, \qquad \Delta F = \frac{10}{8000} = \frac{1}{800}$$

Polradiusen blir

$$R = 1 - \pi\Delta F = 1 - \frac{\pi}{800} = 0.9961$$

Plasserer nullpunktene ved

$$z = e^{\pm j2\pi F_0} = e^{\pm \frac{j\pi}{2}} = \pm j$$

og polene langs retningen til nullpunktene ved

$$z = R(\pm j) = \pm 0.9961j$$

Får dermed transferfunksjonen

$$H(z) = \frac{(z+j)(z-j)}{(z+0.9961j)(z-0.9961j)} = \frac{z^2+1}{z^2+0.9922}$$