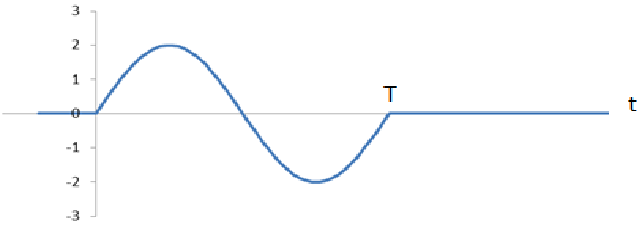
FYS3220 Eksamen H2013, oppgave1, løsningsforslag

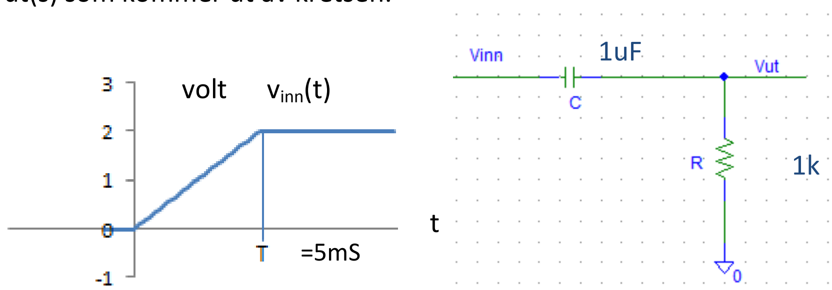
Oppgave 1 Laplacetransformasjon, transientanalyse og Z-transformasjon

a) Figur 1 viser en sinusformet puls. Finn ett utrykk for tidsfunksjonen v(t) og finn deretter den Laplacetransformerte V(s) til denne pulsen. Amplituden A=2volt og varigheten av pulsen er den samme som periodetiden T. Se Vedlegg 6 Utvalgte Laplace transformasjoner.



Figur 1. Sinuspuls med amplitude A=2 volt, vinkelfrekvens $\omega_0=2\pi/T$ og varighet T.

b) Figur 2 viser et inngangssignal $v_{inn}(t)$ og en krets med tilhørende Laplacemodeller. Finn signalet Vut(s) som kommer ut av kretsen.



$$Vinn(s) = \frac{2}{s^2}\left(1 - e^{-sT}\right) \qquad H(s) = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

Figur 2. Inngangssignal og kretsskjema med tilhørende Laplacefunksjoner.

c) Bruk endeverditeoremet til å finne spenningen vut(t) når t --> ∞.

d) Gjør en transientanalyse og finn $v_{ut}(t)$ fra $V_{ut}(s)$. Skisser spenning/tid forløpet i Vedlegg 1. for tiden t $\in$ [0 ..10mS]. Sett også enhet og tallverdier på y aksen i dette vedlegget. Beregn og oppgi den maksimale spenningen vi får under forløpet. Hint: Bruk tidskonstanter som i Lab A når dere skal skissere $v_{ut}(t)$. Beregn spenninger for noen fornuftig valgte tider som støtte for skissen.

e) Det kan vises at det er en sammenheng mellom s-planet og z-planet gitt ved $s \leftrightarrow \left(1 - z^{-1}\right)/\Delta t$ hvor Δt er samplingsintervallet. Bruk denne relasjonen til å finne H(z) fra filteret H(s) gitt i Figur 2. Finn så en rekursiv algoritme r(k) for dette filteret når det påtrykkes en generell eksitasjon e(k).

Løsningsforslag

a)Figur 1 viser en sinusformet puls. Finn ett utrykk for tidsfunksjonen v(t) og finn deretter den Laplacetransformerte V(s) til denne pulsen. Amplituden A=2volt og varigheten av pulsen er den samme som periodetiden T.

Vi bruker enhetstrinnfunksjonen u(t) til å finne tidsfunksjonen. Siden varigheten av pulsen og frekvensen til sinus signalet er like vil vi kunne stanse sinussvingningen etter en periode ved å starte å trekke fra en maken sinus med start i tidspunktet T.

$$v_{ut}(t) = u(t) \cdot \sin(\omega_0 t) \quad - \quad u(t-T)\sin(\omega_0 (t-T))$$

$$V_{ut}(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad - \quad \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-sT}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\left(1 - e^{-sT}\right)}}$$

b)Figur 2 viser et inngangssignal v_{inn}(t) og en krets med tilhørende Laplacemodeller. Finn signalet Vut(s) som kommer ut av kretsen.

Vi finner Vut(s ved å multipliserer Vinn(s) med H(s) Jeg setter RC=τ for å lette den videre skrivingen og for å se tidskonstantene når jeg kommer til transientanalysen senere.	$\underline{\underline{Vut(s)}} = V_{inn}(s) \cdot H(s)$ $= \frac{2}{s^2}\left(1 - e^{-sT}\right)\frac{RCs}{RCs + 1}$ $= \underline{\underline{\frac{2\tau}{s(\tau s + 1)}\left(1 - e^{-sT}\right)}}$

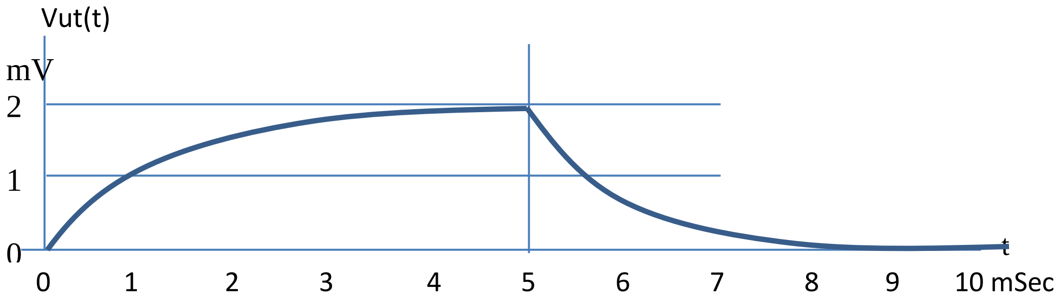
c)Bruk endeverditeoremet til å finne spenningen vut(t) når t --> ∞.

Vi setter Vut(s) inn i endeverditeoremet og finner at vut(t) blir 0 volt . Teoremet er gyldig fordi vi ikke har poler i høyre plan. Dvs. grensen eksisterer.	$\lim(sF(s)\,\Big\|_{s\to 0} = \lim(f(t)\,\Big\|_{t\to\infty}$ $\lim(sVut(s)\,\Big\|_{s\to 0} = \frac{2\tau}{(\tau s+1)}\left(1-e^{-0T}\right) = \frac{2\tau}{(1)}(1-1) = \underline{\underline{0\,volt}}$

d) Gjør en transientanalyse og finn $v_{ut}(t)$ fra $V_{ut}(s)$. Skisser spenning/tid forløpet i Vedlegg 1. for tiden t $\in$ [0 ..10mS]. Sett også enhet og tallverdier på y aksen i dette vedlegget. Beregn og oppgi den maksimale spenningen vi får under forløpet. Hint: Bruk tidskonstanter som i Lab A når dere skal skissere $v_{ut}(t)$

Jeg starter med å omskrive utrykket slik at jeg får det på en form som kan slåes opp i Laplacebiblioteket. Jeg trenger ikke se på faseleddet $\left(1-e^{-sT}\right)$ når jeg gjør dette	$Vut(s) = \frac{2\tau}{s(\tau s+1)}\left(1-e^{-sT}\right)$ $\frac{2\tau}{s(\tau s+1)} \cdot \frac{1/\tau}{1/\tau}$ $= \frac{2\frac{\tau}{\tau}}{s(s+1/\tau)}$ $= 2\tau\frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)}$
Dette leddet finner jeg i biblioteket (biblioteket bruker a istedenfor 1/τ)	$2\tau\frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)} \leftrightarrow 2\tau\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$
Endelig transformasjon blir	$Vut(s) = 2\tau\frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)}\left(1-e^{-sT}\right)$ $= 2\tau\frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)} - 2\tau\frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)}e^{-sT}$ $vut(t) = 2\tau\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)u(t) - 2\tau\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}(t-T)}\right)u(t-T)$
Når vi skal skissere spenningen kan det være fornuftig å sette inn verdien til tau, og så se på uttrykket ved ulike tidskonstanter.	$\tau = RC = 1k\Omega \cdot 1uF = 10^{-3}\sec = 1mSec$

	$vut(t) =$ $2\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)-2\tau\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}(t-5\tau)}\right)u(t-5\tau)$
Vi ser at siste ledd er det samme som første ledd forsinket og med motsatt fortegn. Vi kan derfor skissere 1 ledd separat og så gjenbruke dette etterpå for å få hele forløpet. Vi ser også at siden τ=1ms og forsinkelsen til neste ledd er T=5mS så har første ledd tid til å stige 5 tidskonstanter. Før neste ledd begynner å virke.	$2\tau\left(1-e^{-\frac{t}{10^{-3}}}\right)$ $vut\left(k=\frac{t}{\tau}\right)=2\cdot 10^{-3}\left(1-e^{-k}\right)$ $k=1 \quad 2\cdot 10^{-3}\left(1-e^{-1}\right)=1.26mV$ $k=2 \quad 2\cdot 10^{-3}\left(1-e^{-2}\right)=1.73mV$ $k=3 \quad 2\cdot 10^{-3}\left(1-e^{-3}\right)=1.9mV$ $k=4 \quad 2\cdot 10^{-3}\left(1-e^{-4}\right)=1.96mV$ $k=5 \quad 2\cdot 10^{-3}\left(1-e^{-5}\right)=1.99mV$



Vedlegg 1: Graf for tidsfunksjonen vut(t). Ved 1ms har den steget til 63% av maksverdi og etter 5 tidskonstanter har den nådd tilnærmet 2mV

e)Det kan vises at det er en sammenheng mellom s-planet og z-planet gitt ved $s \leftrightarrow \left(1-z^{-1}\right)/\Delta t$ hvor Δt er samplingsintervallet. Bruk denne relasjonen til å finne H(z) fra filteret H(s) gitt i Figur 2. Finn så en rekursiv algoritme r(k) for dette filteret når det påtrykkes en generell eksitasjon e(k).

Jeg erstetter s med z-utrykket og finner H(z)	$H(s)=\frac{RCs}{RCs+1}=\frac{\tau s}{\tau s+1}$ $H(z)=\frac{\frac{\tau}{\Delta t}\left(1-z^{-1}\right)}{\frac{1}{\Delta t}\left(1-z^{-1}\right)\tau+1}=\frac{\tau-\tau z^{-1}}{-\tau z^{-1}+\Delta t+\tau}$

Så setter jeg inn R/E for H og løser mhp R(z)	$H(z) = \frac{R(z)}{E(z)} = \frac{\tau - \tau z^{-1}}{-\tau z^{-1} + \Delta t + \tau}$ $R(z) = \frac{\tau - \tau z^{-1}}{-\tau z^{-1} + \Delta t + \tau} E(z)$ $R(z)\left(-\tau z^{-1} + \Delta t + \tau\right) = E(z)\left(\tau - \tau z^{-1}\right)$ $-\tau z^{-1} R(z) + \Delta t R(z) + \tau R(z) = \tau E(z) - \tau z^{-1} E(z)$
Tilslutt invers z-transformerer jeg ledd for ledd og løser ut r_k som er en algoritme for høypassfilteret H(z)	$-\tau r_{k-1} + \Delta t r_k + \tau r_k = \tau e_k - \tau e_{k-1}$ $\Delta t r_k + \tau r_k = \tau e_k - \tau e_{k-1} + \tau r_{k-1}$ $r_k \left(\Delta t_k + \tau\right) = \tau e_k - \tau e_{k-1} + \tau r_{k-1}$ $r_k = \frac{\tau}{\left(\Delta t + \tau\right)}\left(e_k - e_{k-1} + r_{k-1}\right)$