

FYS3220 Oppgaver om Laplace transformasjon

1) *Kontrollspørsmål*

Forklar forskjellen mellom Laplace- og Fourier Transformasjon? Sett opp en tabell med en kolonne for hver. Skriv opp definisjonene og kommenter likheter og ulikheter. Sett inn i tabellen hvilke signalformer de virker på og hva analysene kan brukes til.

Forklar med ord og vis ved regning hvorfor vi ikke kan bruke Fourierintegralet til å analysere et rampesignal som $f(t) = u(t) * at$

Vis hvordan man finner den Laplace transformerte til $t * f(t)$

Når vi utfører en Fourieranalyse finner vi et frekvensspekter. Hva er det Fourieranalysen ikke gir, men som vi kan finne ved hjelp av en Laplaceanalyse? Forklar med ord og tegninger.

Hvordan er s-planet definert?

Når vi modellerer en LR-krets med Laplace får vi et system av førsteorden. Hva betyr det at et system er av førsteorden?

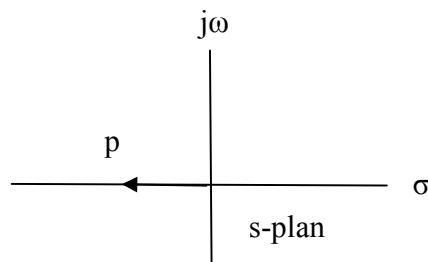
Lag et spørsmål som du gjerne vil bli stilt under en muntlig eksamen.

Laplace spørsmål om pol LR og LRC

- Forklar hva en pol er?
- Hva kan en polene til et system fortelle oss om stabilitet og oscillasjon?
- Forklar hvorfor vi bare har en løsning for en LR krets mens vi har tre løsninger for en LRC krets? Begrunn svaret! Skriv opp formelverket som viser hvor de tre løsningene kommer fra, og forklar med ord hvorfor formelen gir tre løsninger.

Send delta puls inn i $H(s)$

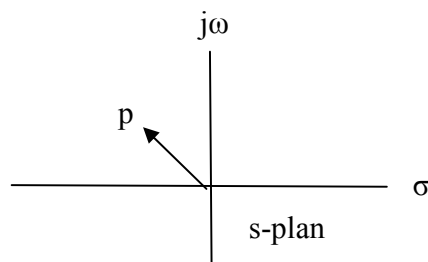
Anta en krets $H(s)$ og at du sender inn en delta puls $V_{in}(s)$



- Skriv opp et generelt uttrykk for responsen i tid.
- Plot formen til denne responsen (uten tallsatte akser).
- Forklar hvorfor den blir slik du har tegnet.

H(s) eksitert med $V_{in}(s)$

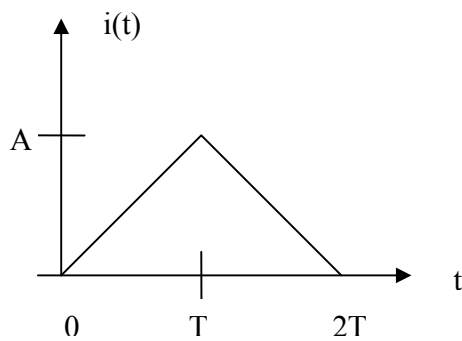
Anta en krets $H(s)$ som eksiteres med en delta puls og at responsen avslører at vi har en pol som vist under



- Hva er det som mangler i denne figuren
- Forklar hvorfor det er noe som mangler og hvorfor ikke noe system vil kunne ha en pol som her
- Rett figuren og finn tidsfunksjonen for responsen $v_{ut}(t)$. Bruk generell notasjon for konstantledd da ingen verdier er gitt.
- Plot responsen $v_{ut}(t)$

2) Trekant laget av enhetstrinn

Laplace og fourier



Studer trekantpulsene $i(t)$ i figuren over.

- a) Vis at den Laplace-transformerte strømpulsen er gitt ved:

$$I(s) = \frac{A}{Ts^2} (1 - e^{-Ts})^2$$

- b) Finn den fouriertransformerte pulsen og skisser og diskuter amplitudespekteret.

3) Firkant laget av $u(t-d)$ eksiterer en LR krets

Signal bygget av trinnfunksjoner eksiterer en LR krets – vi studerer hvordan man bygger en trinnfunksjon, hvordan vi bruker kjente transformasjonsoverganger til å finne et sammensatt signal. Vi ser også på overgang til Fourier frekvensspekter.

La $u(t)$ være en enhetstrinnfunksjon og la $v(t)$ se ut som i figuren under

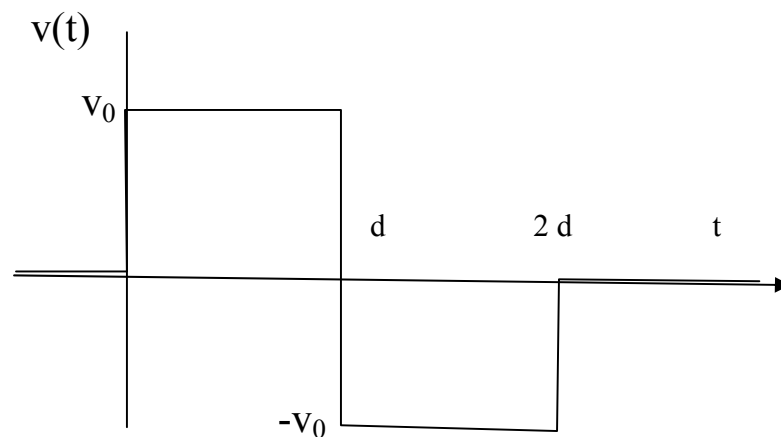


Figure 1 signalet $v(t)$

- Vis Laplace transformen for en forsinket enhetstrinnfunksjon $u(t-d)$
- Finn tidssignalet $v(t)$ uttrykt ved enhetstrinnfunksjoner
- Finn Laplace transformasjonen for $v(t)$
- Vis at Laplace transformasjonen for $v(t)$ kan uttrykkes som

$$V(s) = \frac{v_0}{s} (1 - e^{-ds})^2$$

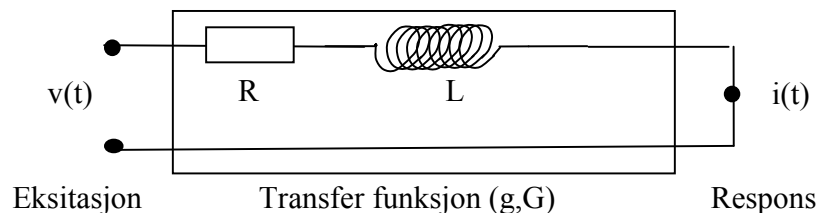


Figure 2 Krets med motstang og spole

- Finn kretsens overføringsfunksjon også kalt systemfunksjon $G(s)$
- Lag en figur som viser strømmen $i(t)$ når $v(t)$ sendes inn i kretsen.
- Fra Laplace signalet $V(s)$, finn det fouriertransformerte signalet $V(j\omega)$ and skisser amplitude spekteret.
- Finn et uttrykk for den Fourier transformerte strømmen $I(s) \rightarrow I(j\omega)$.

4) Faktorisering og delebrøkkopp spalting

(forelesers [løsningsforslag](#))

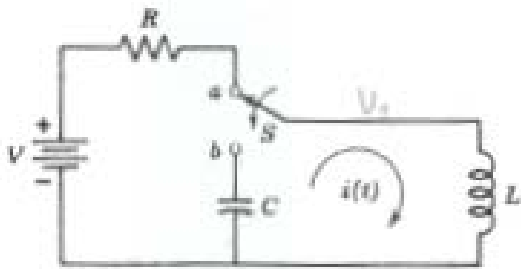
Gitt følgende overføringsfunksjon for en elektrisk krets

$$F(s) = \frac{2}{(s^3 - 3s^2 + 2s)}$$

- Bruk endeverditeoremet for å se om systemet vil ha en endelig sluttverdi i tid
- Split nevner til F opp i enkle faktorer
- Utvid F til en sum av delbrøker (delbrøkkopp spalting)

- d) Finn tidsfunksjonen $f(t)$
 e) Finn grenseverdien $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, og diskuter hvordan dette samsvarer med svaret fra endeverditeoremet

5) LC krets med bryter



Anta at bryteren s har vært koblet til a så lenge at vi ikke lenger har noen endring i strøm og spennings forhold og at batteriet fortsatt har ladning nok til å holde spenningen ved like. Anta 0 volt over C

a) Finn strømmen $i(t)$.

I tiden $t=0$ kobles bryteren over til b. (Dette går uendelig fort.)

b) Finn et uttrykk for $I(s)$

c) Finn og plot strømmen $i(t)$ for $t > 0$

6) Laplace og LRC krets. Gitt skriftligeksamen 1982-2bc

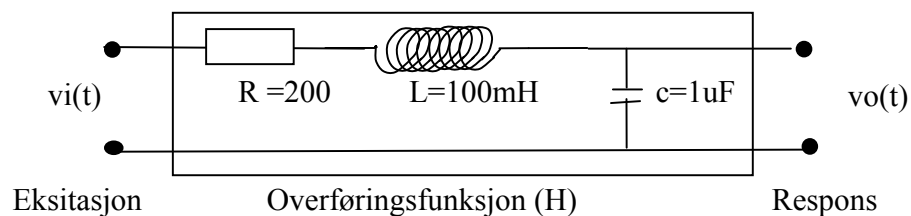


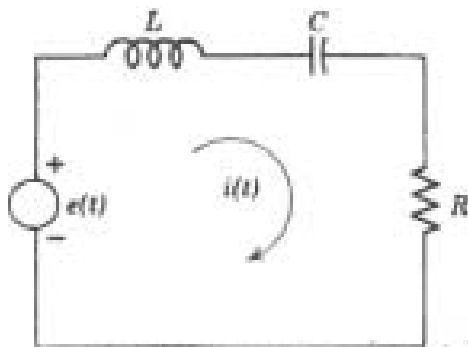
Figure 3 Overføringsfunksjon H for en krets bestående av en motstand spole og kondensator.

- a) La Vinn være en kort firkantpuls med varighet $\tau = 10^{-9}$ sec og amplitude lik 0.1 volt.
 Finn kretsens utgangsspenning.

- b) Finn og skisser tidssignalet $v_o(t)$

7) LCR seriekrets med batteri

Gitt i boka som eksempel oppgave. Kan kjøres på regneøvelse.

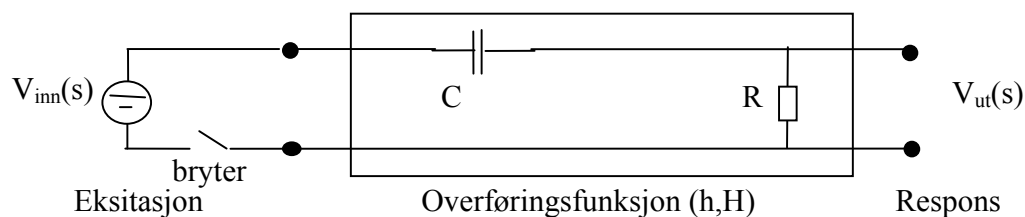


Let all initial conditions be zero at time $t=0^-$

- Find the current $i(t)$ in the network shown when the voltage source is a unit impulse.
- Discuss the three different kinds of impulse response waveforms possible depending upon the relative values of R , L and C .

8) Overføringsfunksjon Laplace med løsningsforslag

Spenning til spennings overførings funksjon.



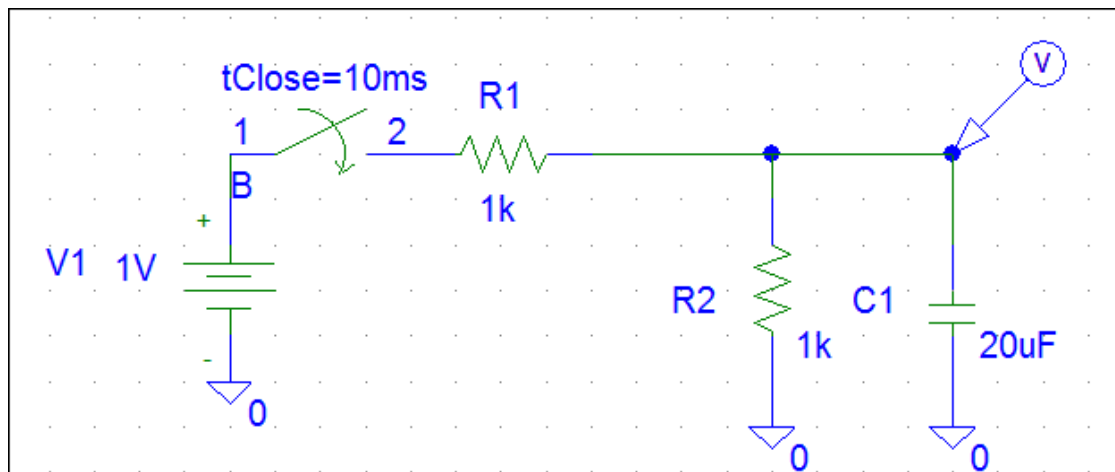
Figur1 - Spenning til spennings overføringsfunksjon

- Sette inn Laplace modellene for komponentene i H og finn derved overføringsfunksjonen $H(s)$.
- Sett inn et batteri med bryter som eksitasjon og finn $V_{ut}(s)$.
- Utfør delebrøkkoppdeling og deretter en invers transformasjon for å finne $v_{ut}(t)$.
- Plot $v_{ut}(t)$ og resoner ved å se på kretsens komponenter om svaret er rimelig.

Ta nå bort eksitasjonen og studer $H(s)$ alene

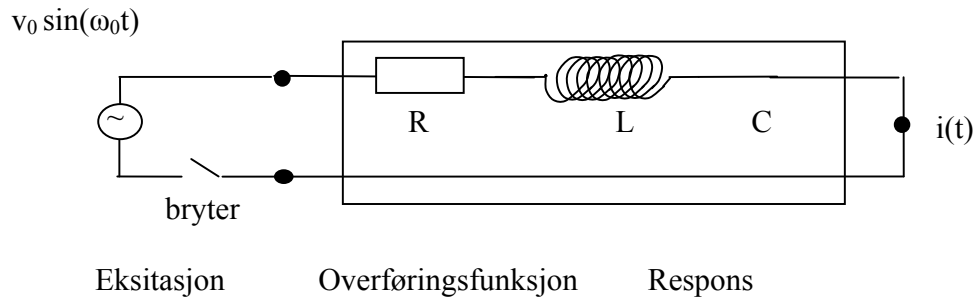
- La $s \rightarrow j\omega$ i $H(s)$ og finn $H(j\omega)$.
- Finn lengden og vinkelen til $H(j\omega)$. (Bruk det som står om lengde og vinkler for komplekse funksjoner i kapittelet om Fourier.
- Hvilken orden har H og hvorfor har den denne ordenen?
- Hvor mange poler har H ? Begrunn svaret.
- Kan H bli ustabil? Begrunn svaret.
- Kan H oscillere på egenhånd? Begrunn svaret.
- Plot lengden til H som funksjon av ω . Hva gjør kretsen med lave og høye frekvenser?
- Kommenter hva slags filter dette er.

9) 10 Laplace modell for $R + R \parallel RC$



- Sette inn Laplace modellene for komponentene i H og finn derved overføringsfunksjonen $H(s)$.
- Sett inn et batteri med bryter som eksitasjon og finn $V_{ut}(s)$.
- Utfør delebrøkkoppstilling og deretter en invers transformasjon for å finne $v_{ut}(t)$.
- Plot $v_{ut}(t)$ og resoner ved å se på kretsens komponenter om svaret er rimelig.
- Hvilken orden har H og hvorfor har den denne ordenen?
- Hvor mange poler har H ? Begrunn svaret.
- Kan H bli ustabil? Begrunn svaret.
- Kan H oscillere på egenhånd? Begrunn svaret.

10) Strøm i en LR krets eksitert med sinus signal.



- Vi sender inn en spenning og får ut en strøm. Hva kaller vi en overføringsfunksjonen som overfører fra spenning til strøm og hvorfor opererer vi med ulike overføringsfunksjoner.
- Skriv ned Laplacemodellene for de ulike komponentene i kretsen.
- Finn overføringsfunksjonen i Laplace notasjon
- Finn strømmen $I(s)$ når kretsen eksiteres med det angitte signalet.
- Bruk endeverditeoremet på $I(s)$ for å finne en sluttverdi for strømmen i tid. Hva forteller endevertiteoremet om denne kretsen. Kan endevertiteoremet brukes her og til hva?
- Finn $i(t)$

NB det kan her fort bli mange konstanter og det er lurt å samle dem og gi samlingene enkle fornuftige navn slik at man ikke kaster bort unødige tid på å skrive en masse bokstaver.

For eksempel

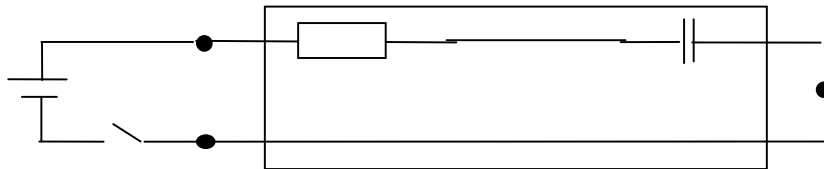
$$a = \omega_0, \quad b = R/L, \quad k = \frac{v_0 \omega_0}{L}, \quad I = kI_1$$

11) **Finn strømmen $i(t)$ i en RC krets!**

Oppgave fra boka uten løsning.

- Start med å skissere hva du tror kommer til å skje med strømmen ut fra kjennskap til komponentene.
- Sette inn Laplacemodellene for komponentene og lag en overføringsfunksjon i s-planet.
- Sett så på modellen for eksitasjonen og finn totaluttrykket for responsen.
- Bruk endevertiteoremet og vis hva sluttstrømmen blir når t går mot uendelig.
- Utfør en inverstransformasjon og plot resultatet.

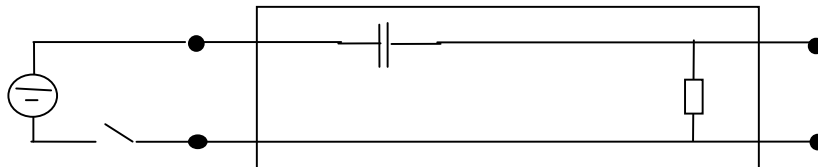
6. Sammenlikn dette med hva du forventet innledningsvis.
7. Hvilken orden har systemet og hvorfor har det denne ordenen?
8. Hvor mange poler har systemet? Begrunn svaret.
9. Kan dette systemet bli ustabilt? Begrunn svaret.
10. Kan dette systemet oscillere? Begrunn svaret.



Figur 1. Finn strømmen i en seriekobling som består av batteri med bryter, motstand og kondensator. Vi antar at det ikke ligger noen restspenning over spolen når bryteren lukkes ved tiden $t=0$.

12) Oppgave om spenning til spenning overføringsfunksjon RC

(Eksempeloppgave fra boka uten eget løsningsforslag)



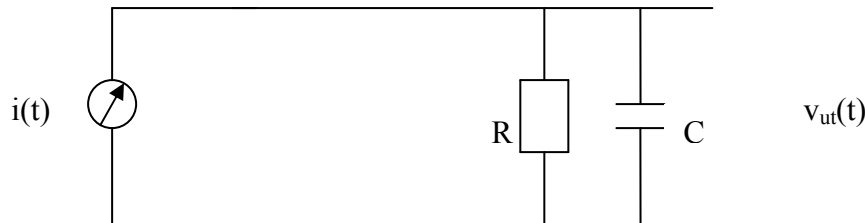
Figur 2. Spenning til spenningsoverføringsfunksjon

1. Sett inn Laplacemodellene for komponentene i H og finn derved overføringsfunksjonen $H(s)$.
2. Sett inn et batteri med bryter som eksitasjon og finn $V_{ut}(s)$.
3. Utfør delbrøkoppspalting og deretter en inverstransformasjon for å finne $v_{ut}(t)$.
4. Plot $v_{ut}(t)$ og resoner ved å se på kretsens komponenter om svaret er rimelig.

Ta nå bort eksitasjonen og studer $H(s)$ alene

5. La $s \rightarrow j\omega$ i $H(s)$ og finn $H(j\omega)$.
6. Finn lengden og vinkelen til $H(j\omega)$. (Bruk det som står om lengde og vinkler for komplekse funksjoner i kapittelet om Fourier.)
7. Hvilken orden har H og hvorfor har den denne ordenen?
8. Hvor mange poler har H ? Begrunn svaret.
9. Kan H bli ustabil? Begrunn svaret.
10. Kan H oscillere på egenhånd? Begrunn svaret.
11. Plot lengden til H som funksjon av ω . Hva gjør kretsen med lave og høye frekvenser?
12. Kommenter hva slags filter dette er.

**13) *Parallell RC krets eksitert med et strømsignal. Strøm til
spenningsoverføringsfunksjon***



Figur 3. Kretsskjema.

- Sette inn Laplace modellene for komponentene og finn derved overføringsfunksjonen $Z(s)$.
- Sett inn en bryter som eksitasjon og finn $V_{ut}(s)$.
- Utfør delebrøkkoppstilling og deretter en invers transformasjon for å finne $v_{ut}(t)$.
- Plot $v_{ut}(t)$ og resoner ved å se på kretsens komponenter om svaret er rimelig.
- Hvilken orden har Z og hvorfor har den denne ordenen?
- Hvor mange poler har Z ? Begrunn svaret.
- Kan Z bli ustabil? Begrunn svaret.
- Kan Z oscillere på egenhånd? Begrunn svaret.
- Plot lengden til Z som funksjon av ω . Kommenter.