

Вступительный тест

1. Что больше: 343^{33} или 49^{50} ?
2. Сколько остатков дают точные квадраты при делении на 60?
3. А какие остатки дают точные 6-е степени при делении на 13?
4. Найдите количество слов (*словом считается любая последовательность букв*), которые можно составить из букв В, О, Д, О, Р, О, Д.
5. Найдите количество собрать из стандартной колоды карт (4 масти по 13 номиналов) червовый флеш.
6. Дан граф на 4 вершинах и 5 ребрах. Найдите количество его остовных деревьев.
7. В одной столичной школе дети интересуются математикой, балетом и киберспортом. Директор этой школы заметил, что среди тех, кто любит математику, $\frac{1}{30}$ нравится балет и $\frac{5}{6}$ неравнодушны к компьютерным играм. Те, кто занимается балетом, в 40
8. Дана куча из 2019 камней. Алиса и Боб (начинает Алиса) играют в игру: за ход разрешается взять из кучи любое количество камней, являющееся степенью двойки (то есть $1, 2, 4, \dots$). Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника?
9. Пусть x , y и z - различные корни уравнения $x^3 + 8 = 5x^2$. Найдите $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.
10. Найдите $\frac{1}{\{\frac{1}{3\sqrt{2}-4}\}}$. ($\{x\}$ - дробная часть числа x .)
11. Что больше: $e^{\frac{1}{e}}$ или $\pi^{\frac{1}{\pi}}$?
12. На сторонах CA и CB треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно так, что $CP : PA = 1 : 2$ и $CQ : QB = 2 : 1$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников APQ и BQO .
13. Дан тетраэдр $ABCD$. Пусть Γ - его описанная сфера. Обозначим за A_1 точку на Γ , диаметрально противоположную A , за M_A - точку пересечения медиан треугольника BCD , и за l_A - прямую A_1M_A . Прямые l_B , l_C и l_D определяются аналогично.
 - а) Докажите, что l_A , l_B , l_C , l_D пересекаются в одной точке.
 - б) Пусть O - центр Γ , M - центроид тетраэдра (точка пересечения AM_A , BM_B , CM_C и DM_D). Докажите, что точка из предыдущего пункта лежит на OM .