Kvantemekanik – ugeseddel 1

Velkommen til kurset i Kvantemekanik, som kører i efterårssemesteret 2018. De sidste 3-4 uger af kurset vil blive afsat til et projektforløb – mere om det senere. Kurset har en elektronisk læringsplatform under Blackboard.

Lærebog: D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Den findes i forskellige udgaver og oplag, som alle kan bruges.

Forelæsningerne afholdes i Fysisk Auditorium tirsdage 10-12 og torsdage 10-12. Medbring papir og blyant – I vil komme til at løse småopgaver under forelæsningerne samt diskutere lidt med hinanden. En del af pensum vil desuden blive gennemgået som videoforelæsning via Blackboard.

De teoretiske øvelser afholdes to gange om ugen, to timer per gang. Jeg vil stærkt anbefale jer at møde velforberedte og deltage aktivt – det kræver indgående arbejde og rutine at mestre kvantemekanikken.

Undervisning i uge 1 (27/8 -31/8)

Ved forelæsningerne gennemgås Griffith, §1.1, §1.2, §1.4, §2.1 og start på §2.2. Derudover præsenteres §1.3, §1.5 og §1.6 som videoforelæsning med tilhørende opgaver/diskussion – se på Blackboard under ”uge 1” i menuen til venstre og vælg ”Sandsynligheder, forventningsværdier og målinger”.

BEMÆRK: Første øvelsesgang afholdes ikke.

Til øvelserne regnes de fire opgaver på næste side. Aftal også proceduren for afleveringsopgaverne med jeres instruktor.

Afleveringsopgave 1: Se tredje side på denne ugeseddel. Afleveringsopgaverne er frivillige, men I opfordres kraftigt til at aflevere og få brugbar feedback fra instruktoren.

Forventet program i uge 2 (3/9 -7/9)

Forelæsninger:

§2.3 om den harmoniske oscillator. Kig selv på §2.4 via video (klik på ”Den fri partikel” under uge 2).

Teoretiske øvelser:

Standardopgaver:

- G1.3, G1.4, G1.7, G1.8, G1.9, G1.15 (G1.16 i 2. udgave), G2.1.
  Her står G1.3 for Griffiths, kapitel 1, opgave 3. Opgavenumrene passer til 3. udgave, og hvis opgavenummeret er anderledes i 2. udgave, anføres dette.

- Diskutér spørgsmålene ”Overvejelser om forventningsværdier og stationære tilstande” fra uge 1 (findes på Blackboard). Diskutér også målinger og statistik i bredere forstand – har I forstået pointerne?

Lette opgaver: L1, L2, L3, L4, *s*e sidste side på ugesedlen.

Mvh Brian Julsgaard.

Kvantemekanik – ugeseddel 1

Opgave 1 – om integration

I spørgsmål 1-4 må der ikke benyttes integraltabel, men gør det gerne i spørgsmål 5.

1. Beregn $\int x^n dx,\ \int \cos(x)dx,\ \text{og}\ \int \exp(ax)dx.$

2. Beregn $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ ved substitutionen $x = \tan(u)$.

3. Beregn $\int x\exp(-x)dx$ ved partiel integration.

4. Beregn $\int \frac{x^2+1}{x+2}dx$. Hint: Polynomiel division.

5. Beregn $\int_0^\infty x^3e^{-bx}dx,\ \int_0^\infty x^2e^{-(bx)^2}dx,\ \text{og}\ \int_0^\infty x^3e^{-(bx)^2}dx.$

Opgave 2 – om komplekse tal

Den komplekse eksponentialfunktion er defineret ved $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Udnyt regnereglen $\exp(i\theta + i\phi) = \exp(i\theta)\exp(i\phi)$ til at udlede trigonometriens additionsformler, f.eks.:

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi),$$

og den tilsvarende formel for $\sin(\theta+\phi)$.

Opgave 3 – om integration af lige og ulige funktioner

En funktion $f(x)$ er lige, hvis $f(-x) = f(x)$, og ulige hvis $f(-x) = -f(x)$. Udnyt substitutionen $y = -x$ til at vise:

1. Hvis f er ulige gælder: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

2. Hvis f er lige gælder: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Illustrer resultaterne i 1 og 2 grafisk.

3. Hvilke løsninger findes der til egenværdiligningen $f(-x) = \lambda f(x)$ for et eller andet reelt tal λ?

Opgave 4 – om vektorrum og skalarprodukt

Betragt mængden af kontinuerte (reelle) funktioner på intervallet $[0,\ a]$.

1. Hvis du har haft lineær algebra: Overvej at denne mængde er et vektorrum, se f.eks. definition 5.1 i Jesper Funch Thomsens noter (JFT). Ellers, overvej at denne mængde har samme egenskaber som vektorerne i boks 4.2 i "Lineær algebra via eksempler" (LAVE).

2. Vis at integralet $\langle f, g\rangle = \int_0^a f(x)g(x)dx$ er et indre produkt (også kaldet et skalarprodukt) på dette rum, dvs. det opfylder definition 9.1 i JFT eller boks 5.2 i LAVE.

3. Lad $f(x) = \sin(\pi x/a)$ og $g(x) = \cos(\pi x/a)$, og beregn $||f||,\ ||g||,\ \text{og}\ \langle f, g\rangle$.

4. Er der overensstemmelse med Cauchy-Schwarz' ulighed (proposition 9.12 i JFT eller boks 5.5 i LAVE)?

Afleveringsopgave 1

Denne uges afleveringsopgave er udelukkende af matematisk karakter, og baseret på kurserne i calculus skulle I gerne kunne regne dem rutinemæssigt. Regn dem *uden* brug af hjælpemidler.

Opgave 1, om komplekse tal: Beregn $(4+2i)^2$, $|4+2i|^2$, $\frac{(3i-3)^2}{i}$, og $\frac{(i-1)}{i}(1+i)$.

Opgave 2a, om løsning af ligninger: Løs med hensyn x til ligningen $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$ (med andre ord, skriv x som funktion af $a, b, \text{ og } c$).

Opgave 2b: Løs med hensyn x til ligningen $\frac{a}{x}+\frac{b}{c}=1$.

Opgave 3, om differentiation: Betragt funktionen $f(x)=\sin(\alpha x)\sin(kx)$. Beregn den første afledede, $f'(x)$.

Opgave 4, om simple funktioner: Skitser følgende funktioner i et koordinatsystem: $f(x)=\frac{1}{2}e^{-x/2}$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}$ og $h(x)=e^{-x^2}$.

Opgave 5, om integration: Beregn integralerne $\int_0^\infty e^{-x/10}dx$ og $\int_0^\pi \sin(x)dx$.

Opgave 6, om differentialligninger: Vis at $f(x)=A\sin(kx)+B\cos(kx)$ er en løsning til differentialligningen $\frac{d^2f(x)}{dx^2}=-k^2f(x)$, hvor $A \text{ og } B$ er konstanter.

Lette opgaver til øvelserne i uge 2:

Opgave L1:

Normer hver af de tre følgende bølgefunktioner:

(i) $\Psi(x,0) = Ne^{-|x|/a}$,

(ii) $\Psi(x,0) = Ne^{-bx^2}$,

(iii) $\Psi(x,0) = N\cos(\pi x/a)$ for $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ og $\Psi(x,0) = 0$ ellers.

Opgave L2:

Bemærk, regn opgave L1 først!

(1) For alle tre bølgefunktioner ovenfor, bestem sandsynligheden for at en måling af partiklens position giver et resultat større end nul.

(2) For ovenstående bølgefunktion (i), bestem sandsynligheden for at en måling af partiklens position giver et resultat i intervallet $0 \leq x \leq a$.

(3) For ovenstående bølgefunktion (ii), bestem sandsynligheden for at en måling af partiklens position giver et resultat i intervallet $0 \leq x \leq \Delta x$, hvor $\Delta x > 0$ kan antages at være infinitesimal.

(4) For ovenstående bølgefunktion (iii), bestem sandsynligheden for at en måling af partiklens position giver et resultat i intervallet $-a \leq x \leq a$.

Opgave L3:

Er der en fysisk forskel på følgende tre bølgefunktioner? Hvis ja, hvilken? Hvis nej, hvorfor ikke?

(i) $\Psi(x,0) = 5e^{-ax^2}$,

(ii) $\Psi(x,0) = \frac{1+i}{\sqrt{3}}e^{-ax^2}$,

(iii) $\Psi(x,0) = e^{i\pi/7}e^{-ax^2}$.

Opgave L4:

Om en partikel, beskrevet ved bølgefunktion $\Psi(x,0)$ oplyses, at partiklens position er bestemt inden for en usikkerhed σ_x på 1 nanometer. Beregn en minimal værdi for usikkerheden σ_p af partiklens impuls.