I sidste uge afsluttede vi kapitel 2 og startede på kapitel 3. Her nåede vi frem til afsnit 3.3.1.

Undervisning i uge 5 (24/9 - 28/9)

Forelæsninger:
Vi fortsætter med kapitel 3, og starter herefter afsnit 4.1 og 4.2. Som et supplement til bogens kapitel 4 findes der en ”Note om sfæriske koordinater” på Blackboard under ”Diverse noter” i menuen til venstre.

Teoretiske øvelser:

Standardopgaver:

- G2.21* (G2.22 i 2. udgave), G2.27, G2.30, G2.31, G2.41 (G2.42 i 2. udgave).
  (*) De er en matematik-tung opgave, så man kan evt. Matlab-koden `wavepacket.m` som støtte.

- Diskutér spørgsmålene og opgaverne under ”Uge 4” og ”Det genereliserede usikkerhedsprincip” på Blackboard. Instruktoren medbringer en labtop og Matlab-koden `wavepacket.m` til illustration til anden øvelsesgang.

- *Composer-opgave*: C3 (findes under uge 5).

- **Afleveringsopgave 5**: Se sidste side.

Lette opgaver: L10 og L11 på næste side.

Ekstraopgaver: Opgave 7 på næste side.

Forventet program i uge 6

Forelæsninger: Afsnit 4.3. Afsnit 4.4 (kun delafsnit 4.4.1) via video.

Regneøvelser: *Standardopgaver*: G2.32, G3.3, G3.4, G3.5, G3.14 (G3.13 i 2. udgave), G3.37 (G3.31 i 2. udgave) samt opgave 8 på næste side. *Let opgave*: L12 på sidste side. Afleveringsopgave 6: Se sidste side.

Mvh Brian Julsgaard.

Opgave 7 (ekstraopgave)

(A) Vis først Plancherel's sætning, opgave G2.19 (G2.20).

(B) Regn herefter opgave G2.26 og find også et tilsvarende udtryk for $\delta(k)$.

(C) Beregn middelværdien af impulsen p for den fri partikel beskrevet ved bølgefunktionen fra ligning [2.101 (2.100)]. Indsæt først denne bølgefunktion i ligning [1.35] (der er to k-integraler, så kald det ene for k'). Betragt så x-integrationen og benyt resultatet fra (B) til at frembringe delta-funktionen $\delta(k-k')$. Giver dit slutresultat anledning til en fysisk fortolkning af $|\phi(k)|^2$?

(D) Hvis tiden tillader det, regn også opgave G2.23 (G2.24).

Lette opgaver til uge 5

Opgave L10:

(1) Opskriv løsningen $\psi_4(x)$ til den stationære Schrödingerligning for den harmoniske oscillator. Benyt ligning [2.86 (2.85)].

(2) Betragt det infinitesimale interval $I = [0; \Delta x]$ og bestem sandsynligheden for at en måling af partiklens position giver et resultat i dette interval.

(3) Hvad er spredningen af den totale energi?

Opgave L11:

Vi betragter til tiden $t = 0$ en fri partikel, beskrevet ved bølgefunktionen $\Psi(x,0)$ på formen [2.102 (2.101)]. Vi lader $\phi(k)$ være givet ved udtrykket $\phi(k) = \left\{\begin{matrix} A & \text{for } 0 \le k \le 2k_0 \\ 0 & \text{ellers} \end{matrix}\right\}$.

(1) Bestem konstanten A således at $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(k)|^2 dk = 1$. Skitser funktionen $|\phi(k)|^2$, og angiv en typisk bredde af denne funktion.

(2) Benyt nu ligning [2.102 (2.101)] til at vise, at $\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{k_0}{\pi}} \cdot e^{ik_0 x} \cdot \frac{\sin(k_0 x)}{k_0 x}$.

(3) Skitser sandsynlighedsfordelingen $|\Psi(x,0)|^2$, og angiv en typisk bredde af denne funktion.

(4) Beregn produktet af de typiske bredder fra spørgsmål (1) og (3) og kommenter på resultatet.

(5) Sammenlign denne opgave med Griffiths' eksempel 2.6. Hvilke ligheder og forskelle er der?

Afleveringsopgave 5

En partikel med massen m bevæger sig langs x-aksen i potentialet $V(x) = \left\{\begin{matrix} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{matrix}\right\}$, hvor $V_0 > 0$ er konstant.

Det oplyses, at løsninger til den stationære Schrödingerligning med energi $E > V_0$ kan skrives på formen:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0, \\ Fe^{iqx} & x > 0. \end{cases}$$

(1) Bestem, hvordan konstanterne k og q afhænger af V_0 og E, og at $\frac{q}{k} = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}$.

(2) Vis, at $B = \frac{1-q/k}{1+q/k}$ og $F = \frac{2}{1+q/k}$.

(3) Betragt nu tilfældet $E < V_0$ med løsninger $\psi_k(x) = \left\{\begin{matrix} e^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Fe^{-\kappa x} & x > 0 \end{matrix}\right\}$.

Bestem k, κ, B og F [resultaterne minder meget om dem fra spørgsmål (1) og (2)].

(4) Størrelsen $R = |B|^2$ kan fortolkes som en refleksionskoefficient. Hvilke værdier kan R antage i tilfældene $E > V_0$ henholdsvis $E < V_0$? Argumenter for den fysiske fornuft af disse resultater.

Bemærk, $|F|^2$ kan *ikke* fortolkes som en transmissionskoefficient, da hastigheden af en partikel (bølgepakke) er forskellig på de to sider af $x = 0$. Dette ønskes ikke diskuteret her.

Opgave 8 (diskuteres til øvelserne i uge 6)

(A) For en reel $n \times n$ matrix A, repeter hvad der gælder om egenvektorer og egenværdier hvis (i) $A = A^{\mathrm{T}}$ er symmetrisk og (ii) mere generelt hvis A ikke er symmetrisk. Hvad er rangen af en matrix?

(B) Repeter de tre vigtige sætninger om (i) reelle egenværdier, (ii) ortogonalitet og (iii) komplethed, der gælder for egenfunktioner Ψ og egenværdier q for en hermitisk operator Q.

(C) Hvad ville der ske med den generaliserede statistiske fortolkning af kvantemekanikken (de første par sider af §3.4), hvis observable Q ikke behøvede at være hermitiske? Med andre ord, hvad er den fysiske vigtighed af hver af de tre sætninger fra spørgsmål (B)?

En lettere opgaver til uge 6

Opgave L12:

Betragt den "halve endelige brønd": $V(x) = \begin{Bmatrix} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{Bmatrix}$. Vi søger løsninger til den stationære Schrödingerligning med $E < 0$, dvs. vi vil gerne finde bundne tilstande.

(1) Vis, at løsningen til den stationære Schrödingerligning i store træk svarer til bogens ligninger [2.152 (2.149)] og [2.153 (2.150)]. Hvad skal der gælde om konstanterne C og D fra ligning [2.152 (2.149)]?

(2) Opskriv kontinuitetsbetingelserne for $\psi(x)$ og $\psi'(x)$ i analogi med bogens ligninger [2.155 (2.152)] og [2.156 (2.153)]. Du vil så kunne finde en formel, som minder meget om [2.157 (2.154)].

(3) Brug resultatet fra (2) til at opskrive en relation, som minder meget om bogens ligning [2.159 (2.156)], og tegn en graf svarende til figur 2.17 (2.18). Vil der altid eksistere mindst én bunden tilstand?

Afleveringsopgave 6

En partikel bevæger sig langs en x-akse i potentialet $V(x) = kx^n$, hvor k er en positiv konstant og n er et positivt og lige heltal.

(1) Antag, at partiklen befinder sig i en stationær tilstand, dvs. beskrevet ved bølgefunktion, $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, hvor ψ opfylder den stationære Schrödingerligning, $H\psi = E\psi$, med tilhørende energi E. Vis, at forventnings-værdierne for den kinetiske og potentielle energi kan skrives, henholdsvis, $\langle T \rangle = \frac{n}{n+2}E$ og $\langle V \rangle = \frac{2}{n+2}E$. Hint: *Virialsætningen* [3.113 (3.97)].

(2) Vi betragter nu en arbitrær tidsafhængig bølgefunktion $\Psi(x,t)$, altså ikke nødvendigvis en stationær tilstand. Vis, at $\frac{d\langle x^l \rangle}{dt} = \frac{l}{2m}\langle px^{l-1} + x^{l-1}p \rangle$ for alle l, og at $\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -kn\langle x^{n-1} \rangle$. Hint: *Ehrenfest's sætning* [3.73 (3.71)] samt resul-taterne fra opgave G3.14 (G3.13).

(3) Benyt resultaterne fra spørgsmål (2) til at udlede: $\frac{d^2\langle p \rangle}{dt^2} = -\frac{kn(n-1)}{2m}\langle px^{n-2} + x^{n-2}p \rangle$. Indsæt herefter $n = 2$ og $k = \frac{1}{2}m\omega^2$, svarende til den harmoniske oscillator, og argumenter for, at det fundne resultat giver god fysisk mening.