Kvantemekanik – ugeseddel 6

I sidste uge afsluttede vi kapitel 3 og startede på kapitel 4 om Schrödingerligningen i tre dimensioner. Vi nåede frem til og med kapitel 4.1.2.

Undervisning i uge 6 (1/10 - 5/10)

Forelæsninger:
Vi fortsætter med kapitel 4, og når sikkert at dække ca. frem til og med afsnit 4.3 om impulsmomenter. Afsnit 4.4 (til og med afsnit 4.4.1) gennemgås via video, men vent med at se den til vi er kommet i gennem afsnit 4.3. Der er god tid til at se den i uge 7, selvom den ligger under uge 6 på Blackboard.

Teoretiske øvelser:
Standardopgaver:

- G2.32, G3.3, G3.4, G3.5, G3.14 (G3.13 i 2. udgave), G3.37 (G3.31 i 2. udgave). Diskuter desuden opgave 8 i plenum, se næste side.

En lettere opgave: Opgave L12 på næste side. Bemærk, kun én let opgave i denne uge. Hvis du ikke kan nå alle standardopgaverne, så fokusér på G3.14 (G3.13 i 2. udgave) og G3.37 (G3.31 i 2. udgave), som indeholder vigtige resultater.

Composer-opgave: C4 (findes under uge 6).

Ekstraopgaver: G3.13 (G3.12 i 2. udgave) og G3.42 (G3.35 i 2. udgave). I G3.42(e), beregn også $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$ som funktion af tiden. De kohærente tilstande er "de mest klassiske" tilstande for den harmoniske oscillator.

- **Afleveringsopgave 6**: Se næste side.

Forventet program i uge 7

Forelæsninger: Vi afslutter de, som vi ikke har nået i kapitel 4 og gennemgår nogle eksamensrelevante tips og tricks.

Regneøvelser: *Standardopgaver*: G4.1, G4.2, G4.15 (G4.13 i 2. udgave), G4.21 (G4.18 i 2. udgave), de to små opgaver i læringsstien om "Spin" under "Uge 6" på Blackboard, samt opgave 9 på sidste side. *Lette opgaver*: L13-L15 på sidste side. *Afleveringsopgave 7*: Augusteksamen 2006, opgave 3.

Mvh Brian Julsgaard.

Opgave 8 (diskussionsopgave i plenum)

(A) For en reel $n \times n$ matrix A, repeter hvad der gælder om egenvektorer og egenværdier hvis (i) $A = A^{\mathrm{T}}$ er symmetrisk og (ii) mere generelt hvis A ikke er symmetrisk. Hvad betyder rangen af en matrix?

(B) Repeter de tre vigtige sætninger om reelle egenværdier, ortogonalitet og komplethed, der gælder for egenfunktioner Ψ og egenværdier q for en hermitisk operator Q.

(C) Hvad ville der ske med den generaliserede statistiske fortolkning af kvantemekanikken (de første par sider af §3.4), hvis observable Q ikke behøvede at være hermitiske? Med andre ord, hvad er den fysiske vigtighed af hver af de tre sætninger fra spørgsmål (B)?

En lettere opgaver til uge 6

Opgave L12:

Betragt den ”halve endelige brønd”: $V(x) = \left\{ \begin{matrix} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{matrix} \right\}$. Vi søger løsninger til den stationære Schrödingerligning med $E < 0$, dvs. vi vil gerne finde bundne tilstande.

(1) Vis, at løsningen til den stationære Schrödingerligning i store træk svarer til bogens ligninger [2.152 (2.149)] og [2.153 (2.150)]. Hvad skal der gælde om konstanterne C og D fra ligning [2.152 (2.149)]?

(2) Opskriv kontinuitetsbetingelserne for $\psi(x)$ og $\psi'(x)$ i analogi med bogens ligninger [2.155 (2.152)] og [2.156 (2.153)]. Du vil så kunne finde en formel, som minder meget om [2.157 (2.154)].

(3) Brug resultatet fra (2) til at opskrive en relation, som minder meget om bogens ligning [2.159 (2.156)], og tegn en graf svarende til figur 2.17 (2.18). Vil der altid eksistere mindst én bunden tilstand?

Afleveringsopgave 6

En partikel bevæger sig langs en x-akse i potentialet $V(x) = kx^n$, hvor k er en positiv konstant og n er et positivt og lige heltal.

(1) Antag, at partiklen befinder sig i en stationær tilstand, dvs. beskrevet ved bølgefunktion, $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, hvor ψ opfylder den stationære Schrödingerligning, $H\psi = E\psi$, med tilhørende energi E. Vis, at forventnings-værdierne for den kinetiske og potentielle energi kan skrives, henholdsvis, $\langle T \rangle = \frac{n}{n+2}E$ og $\langle V \rangle = \frac{2}{n+2}E$. Hint: *Virialsætningen* [3.113 (3.97)].

(2) Vi betragter nu en arbitrær tidsafhængig bølgefunktion $\Psi(x,t)$, altså ikke nødvendigvis en stationær tilstand. Vis, at $\frac{d\langle x^l \rangle}{dt} = \frac{l}{2m}\langle px^{l-1} + x^{l-1}p \rangle$ for alle l, og at $\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -kn\langle x^{n-1} \rangle$. Hint: *Ehrenfest's sætning* [3.73 (3.71)] samt resul-taterne fra opgave G3.14 (G3.13).

(3) Benyt resultaterne fra spørgsmål (2) til at udlede: $\frac{d^2\langle p \rangle}{dt^2} = -\frac{kn(n-1)}{2m}\langle px^{n-2} + x^{n-2}p \rangle$. Indsæt herefter $n = 2$ og $k = \frac{1}{2}m\omega^2$, svarende til den harmoniske oscillator, og argumenter for, at det fundne resultat giver god fysisk mening.

Opgave 9 (diskussionsopgave i plenum til uge 7)

(i) Repetér den matematiske konsekvens af, at operatorerne H, $\mathbf{L}^2$ og L_z kommuterer.
(ii) Repetér den fysiske konsekvens af ovenstående.

I det følgende betragter vi linearkombinationer af de sædvanlige brintbølgefunktioner ψ_{nlm}. For hvert tilfælde, angiv de mulige resultater af en måling af L_z samt sandsynligheden for hvert af disse resultater.

(a) $\Psi = a\psi_{100} + b\psi_{211}$.
(b) $\Psi = a\psi_{100} + b\psi_{210} + c\psi_{311}$.
(c) $\Psi = a\psi_{100} + b\psi_{21-1} + c\psi_{321}$.

Gør nu det samme for operatoren $\mathbf{L}^2$: Hvilke udfald er mulige for målinger af denne observabel, og hvad er sandsynligheden for hvert af disse udfald?

Antag for tilfælde (b) ovenfor, at en måling af L_z giver nul. Angiv den *normerede* bølgefunktion umiddelbart efter denne måling. Hvad er sandsynligheden for, at en *efterfølgende* måling af $\mathbf{L}^2$ giver $2\hbar^2$? Udnyt så de forskellige resultater til at beregne den *samlede* sandsynlighed for at en måling af L_z giver nul og at en efterfølgende måling af $\mathbf{L}^2$ giver $2\hbar^2$, hvis start-bølgefunktionen er som i (b). *Hint: Svaret findes som et produkt af to sandsynligheder*.

Vi vender nu rækkefølgen om. Hvis start-bølgefunktionen er som i (b), beregn på lignende vis den *samlede* sandsynlighed for at en måling af $\mathbf{L}^2$ giver $2\hbar^2$ og at en efterfølgende måling af L_z giver nul. Fik du det samme i de to tilfælde? Hvis ja, hvorfor? Hvis nej, hvorfor ikke?

Lette opgaver til uge 7

Opgave L13:
Lad ψ_{nlm} betegne de sædvanlige løsninger til den stationære Schrödingerligning for brintatomet. Angiv de eksplicitte (r, θ, ϕ)-afhængige bølgefunktioner: (i) ψ_{211}, (ii) ψ_{300}, (iii) ψ_{32-2}.

Opgave L14:
Vi betragter brint til tiden $t = 0$ beskrevet ved den normerede bølgefunktion $\Psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{5}[3\psi_{100}(\mathbf{r}) + 4\psi_{311}(\mathbf{r})]$.
(i) Angiv bølgefunktionen $\Psi(\mathbf{r}, t)$ til alle tider.
(ii) Angiv de mulige resultater for en måling af elektronens totale energi og sandsynligheden for hver af disse.
(iii) Angiv de mulige resultater for en måling af $\mathbf{L}^2$ samt middelværdien $\langle \mathbf{L}^2 \rangle$.

Opgave L15:
Vi betragter i denne opgave *matrix-elementer* $\langle \psi_{nlm} | Q\psi_{n'l'm'} \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \psi^*_{nlm}(\mathbf{r}) Q \psi_{n'l'm'}(\mathbf{r})$, hvor ψ_{nlm} er de sædvanlige brintbølgefunktioner og Q er en operator. Opskriv for hvert af de tre følgende tilfælde dette integral og forklar, hvorfor de alle giver nul: (i) $\langle \psi_{100} | z\psi_{211} \rangle$, (ii) $\langle \psi_{210} | r^2\psi_{200} \rangle$, (iii) $\langle \psi_{100} | L_z\psi_{200} \rangle$.