Afleveringopgave uge 4

16. september 2018 18:41

Afleveringsopgave 4

Vi betragter den harmoniske oscillator i en dimension med notationen som beskrevet i kapitel 2.3. En startbølgefunktion er givet ved $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n(x) + i\psi_{n+2}(x))$.

(1) Bestem middelværdien og spredningen af partiklens totale energi.

(2) Betragt operatoren $A = xp + px$. Udtryk denne operator vha. hæve- og sænkeoperatorerne, a_+ og a_-.

(3) Bestem forventningsværdien $\langle A \rangle$.

1) Vi skal bestemme $\langle H \rangle$ og $\sigma_H = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$ for bølgefunktion givet ved

$$\Psi_n(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n(x) + i\psi_{n+2}(x))$$

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}E_n + \frac{1}{2}E_{n+2} \qquad E_n = \hbar\omega(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega(n+1) + \frac{1}{2}\hbar\omega(n+3)$$

$$= \underline{\underline{\hbar\omega n + 2\hbar\omega}}$$

$$H = \hbar\omega(a_+a_- + \tfrac{1}{2})$$

$$\Downarrow$$

$$\langle H^2 \rangle = \langle \hbar^2\omega^2(a_+a_-a_+a_- + \tfrac{1}{4} + a_+a_-) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0)^* \langle H^2 \rangle \Psi(x,0)\, dx \quad \text{, vi anvender nu operatorerne}$$

$$= \hbar^2\omega^2\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* - i\psi_{n+2}^*) \cdot (n^2\psi_n + i(n+2)^2\psi_{n+2} + \tfrac{1}{4}\psi_n + \tfrac{1}{4}\psi_{n+2} + n\psi_n + i(n+2)\psi_{n+2})\right)$$

orthogonale led går ud.

$$= \hbar^2\omega^2\frac{1}{2}\left((n^2 + \cancel{\tfrac{1}{4}} + n)|\psi_n|^2 + ((n+2)^2 + \cancel{\tfrac{1}{4}} + (n+2))|\psi_{n+2}|^2 \right), \quad |\psi_n|^2 = 1$$

$$= \hbar^2\omega^2\frac{1}{2}(n^2 + n + n^2 + 4 + 4n + n + 2)$$

$$= \underline{\underline{\hbar^2\omega^2(n^2 + 3n + 3)}}$$

$$\sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$$

$$= \hbar^2\omega^2(n^2 + 3n + 3) - (\hbar\omega n - 2\omega\hbar)^2$$

$$= \cancel{\hbar^2\omega^2 n^2} + \hbar^2\omega^2 3n + 3\hbar^2\omega^2 - \cancel{\hbar^2\omega^2 n^2} - 4\omega^2\hbar^2 + 4\hbar^2\omega^2 n$$

$$= \underline{\underline{7n\hbar^2\omega^2 - \hbar^2\omega^2}}$$

2) operatoren A er gjort ved

$$A = xp + px$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a_+ + a_-)\cdot i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a_+ - a_-)$$

$$+ i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a_+ - a_-)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a_+ + a_-)$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\left(a_+^2 - a_-^2 + a_+^2 - a_-^2 \right)$$

$$= \underline{\underline{i\hbar\,(a_+^2 - a_-^2)}}$$

3) Vi skal bestemme $\langle A \rangle$

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \langle A \rangle \Psi \, dx$$

$$= \frac{1}{2} i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* - i\psi_{n+2}^*)(a_+^2 - a_-^2)(\psi_n + i\psi_{n+2})\, dx$$ anvender operatoren

$$= \frac{1}{2} i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* - i\psi_{n+2}^*)\Big(\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\psi_{n+2} + i\sqrt{n+3}\sqrt{n+4}\,\psi_{n+4} - \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\psi_{n-2} - i\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+1}\,\psi_n \Big]$$ ortogonale indre prod går ud

$$= \frac{1}{2} i\hbar \left(-i\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}\,|\psi_n|^2 - i\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,|\psi_2|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\hbar \left(\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\hbar\,(n^2 + 3n + 2)^{\frac{1}{2}}}}$$