Kvantemekanik
Aflevering 4

Marc Breiner Sørensen
201708238 - FYS1

30. september 2018

Vi betragter den harmoniske oscillator i én dimension, med notationen som beskrevet i kapitel **2.3**. En startbølgefunktion er givet ved

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(x) + i\psi_{n+2}(x)] \tag{1}$$

1 Bestem middelværdien og spredningen af partiklens totale energi

Vi bestemmer middelværdien af partiklens totale energi for en harmonisk oscillator som

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n \tag{2}$$

tilsvarende findes den tilhørende energi E_n som

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \tag{3}$$

Vi ser på bølgefunktionen at.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_{n+2} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Da kan vi beregne

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= |c_n|^2 E_n + |c_{n+2}|^2 E_{n+2} \\ &= \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \frac{1}{2}\left(n + 2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega(2n+3) \end{aligned}$$

Da er spredningen givet som

$$\sigma_H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$$

hvor

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle^2 &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega(2n+3)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\hbar^2\omega^2(4n^2+9+12n) \\
&= \hbar^2\omega^2\left(n^2+\frac{9}{4}+3n\right)
\end{aligned}$$

mens

$$\begin{aligned}
\langle H^2 \rangle &= \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\hbar^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(n+\frac{5}{2}\right)^2\hbar^2\omega^2 \\
&= \hbar^2\omega^2\left(n^2+3n+\frac{13}{4}\right)
\end{aligned}$$

således at

$$\begin{aligned}
\sigma_H &= \sqrt{\hbar^2\omega^2\left(n^2+3n+\frac{13}{4}\right) - \hbar^2\omega^2\left(n^2+\frac{9}{4}+3n\right)} \\
&= \hbar\omega
\end{aligned}$$

2 Betragt operatoren $A = xp + px$. Udtryk denne operator vha. hæve- og sænkeoperatorerne a_+ og a_-

A beregnes vha. hhv.

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-) \tag{4}$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_+ - a_-) \tag{5}$$

som benyttes

$$\begin{aligned}
A &= xp + px \\
&= \frac{i\hbar}{2}[(a_+ + a_-)(a_+ - a_-) + (a_+ - a_-)(a_+ + a_-)] \\
&= \frac{i\hbar}{2}(a_+^2 - a_-^2 + a_+^2 - a_-^2) \\
&= \frac{i\hbar}{2}(2a_+^2 - 2a_-^2) \\
&= i\hbar(a_+^2 - a_-^2)
\end{aligned}$$

3 Bestem forventningsværdien $\langle A \rangle$

Til at beregne middelværdien af A benyttes sandwichformlen således at

$$
\begin{aligned}
\langle A \rangle &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(a_+^2 - a_-^2)\Psi dx \\
&= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(a_+^2\Psi - a_-^2\Psi)dx \\
&= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(a_+a_+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(x) + i\psi(x))\right) - a_-a_- \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(x) + i\psi(x))\right) dx \\
&= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(x) - i\psi(x))\right) (a_+a_+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(x) + i\psi(x))\right) - a_-a_- \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(x) + i\psi(x))\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} i\hbar \Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n a_+^2 \psi_n dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n a_+^2 \psi_{n+2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \psi a_-^2 \psi_n dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n a_-^2 \psi_{n+2} dx \\
&- i \int_{\infty}^{\infty} \psi_{n+2} a_+^2 \psi_n dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2} a_+^2 \psi_{n+2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2} a_-^2 \psi_n dx - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2} a_-^2 \psi_{n+2} dx
\end{aligned}
$$

Hvilket kan reduceres betydeligt under benyttelse af at $\int \psi_n \psi_m dx = \delta_{m,n}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\hbar \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n a_-^2 \psi_{n+2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2} a_+^2 \psi_n dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n a_-(\sqrt{n+2}\psi_{n+1}) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2} a_+(\sqrt{n+1}\psi_{n+1}) dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n((\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1})\psi_{n+1}) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2}((\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1})\psi_{n+2}) dx\right) \\
\langle A \rangle &= \hbar(\sqrt{n+2})(\sqrt{n+2})
\end{aligned}
$$