Aflevering u6

4. oktober 2018 18:22

Karsten Bosteen
19851608

Afleveringsopgave 6

En partikel bevæger sig langs en x-akse i potentialet $V(x) = kx^n$, hvor k er en positiv konstant og n er et positivt og lige heltal.

(1) Antag, at partiklen befinder sig i en stationær tilstand, dvs. beskrevet ved bølgefunktion, $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, hvor ψ opfylder den stationære Schrödingerligning, $H\psi = E\psi$, med tilhørende energi E. Vis, at forventningsværdierne for den kinetiske og potentielle energi kan skrives, henholdsvis, $\langle T\rangle = \frac{n}{n+2}E$ og $\langle V\rangle = \frac{2}{n+2}E$. Hint: *Virialsætningen* [3.113 (3.97)].

(2) Vi betragter nu en arbitrær tidsafhængig bølgefunktion $\Psi(x,t)$, altså ikke nødvendigvis en stationær tilstand. Vis, at $\frac{d\langle x^l\rangle}{dt} = \frac{l}{2m}\langle px^{l-1} + x^{l-1}p\rangle$ for alle l, og at $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -kn\langle x^{n-1}\rangle$. Hint: *Ehrenfest's sætning* [3.73 (3.71)] samt resultaterne fra opgave G3.14 (G3.13).

(3) Benyt resultaterne fra spørgsmål (2) til at udlede: $\frac{d^2\langle p\rangle}{dt^2} = -\frac{kn(n-1)}{2m}\langle px^{n-2} + x^{n-2}p\rangle$. Indsæt herefter $n = 2$ og $k = \frac{1}{2}m\omega^2$, svarende til den harmoniske oscillator, og argumenter for, at det fundne resultat giver god fysisk mening.

1) Vi skal vise at $\langle T\rangle = \frac{n}{n+2}E$ og $\langle V\rangle = \frac{2}{n+2}E$.

Da ψ er en stationær tilstand kan vi bruge viralsætningen:

$$2\langle T\rangle = \left\langle x\frac{dV}{dx}\right\rangle, \quad \frac{dV}{dx} = kn\,x^{n-1}$$

$$= \langle x\,kn\,x^{n-1}\rangle$$

$$= n\langle kx^n\rangle$$

$$= n\langle V\rangle$$

$$E = \langle T\rangle + \langle V\rangle$$

$$= \frac{n}{2}\langle V\rangle + \langle V\rangle$$

$$= \frac{n+2}{2}\langle V\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle V\rangle = \frac{2}{n+2}E$$

$$\Downarrow \quad \langle T\rangle = \frac{n}{n+2}E$$

2) Vi skal vise at $\frac{d\langle x^l\rangle}{dt} = \frac{l}{2m}\langle px^{l-1} + x^{l-1}p\rangle$ for alle l.

Ehrenfest giver os

$$\frac{d\langle x^l\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, x^l]\rangle + \cancel{\left\langle\frac{\partial x^l}{\partial t}\right\rangle} = 0 \text{ er ikke tidsafhængig}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle[P^2/2m, x^l]\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar 2m}\langle[pp, x^l]\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar 2m}\langle p[p,x^l] + [p,x^l]p\rangle \qquad ([x^n,p] = i\hbar n x^{n-1}) \quad ([p,x^n] = -i\hbar n x^{n-1})$$

$$= \frac{i}{\hbar 2m}\langle -p\,i\hbar\,l\,x^{l-1} - i\hbar l x^{l-1}p\rangle$$

$$= \frac{l}{2m}\langle px^{l-1} + x^{l-1}p\rangle \qquad \text{q.e.d.}$$

Vi skal også vise: $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -kn\langle x^{n-1}\rangle$ vi bruger igen Ehrenfest:

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, p]\rangle + \frac{\partial P}{\partial t} \text{ ikke tidsafh} \Rightarrow = 0$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left\langle i\hbar \frac{dV}{dx}\right\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left\langle i\hbar\, knx^{n-1}\right\rangle$$

$$= \left\langle -knx^{n-1}\right\rangle$$

q.e.d.

3) $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \langle -knx^{n-1}\rangle$

$$\frac{d^2\langle p\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\langle -knx^{n-1}\rangle$$

$$= -kn \frac{d}{dt}\langle x^{n-1}\rangle$$

$$= -kn \frac{n-1}{2m}\langle px^{n-2} + x^{n-2}p\rangle$$

Vi indsetter $n = 2$ og $k = \frac{1}{2}m\omega^2$ $\sim$ den harmoniske oscilator.

$$\frac{d^2\langle p\rangle}{dt} = -\frac{1}{2}m\omega^2 \frac{2}{2m}\langle p + p\rangle = -\omega^2\langle p\rangle$$

God fysisk mening? $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = \left\langle -\frac{\partial \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}{\partial x}\right\rangle$ $\sim$ klassisk kraft, $\dot{p} = F$

$$= \langle -m\omega^2 x\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle -m\omega^2 x\rangle = -\omega^2\langle p\rangle \quad \sim \quad \dot{F} = \text{Effekt.}$$