Kvantemekanik – ugeseddel 4

I sidste uge gennemgik vi §2.5 om delta-funktionspotentialet via video, og det meste af §2.6 om den endelige brønd.

Undervisning i uge 4 (17/9 - 21/9)

Forelæsninger:
Vi færdiggør §2.6 om den endelige vedr. tunneleffekten og bruger resten af tirsdagsforelæsningen på nogle eksempler på eksamensopgaver. Til torsdagsforelæsningen starter vi på kapitel 3 om den matematiske formalisme bag kvantemekanikken. Afsnit 3.5 foregår via video (varighed i alt ca. 52 min). Klik på ”Det genereliserede usikkerhedsprincip” under uge 4.

Teoretiske øvelser:

Standardopgaver:

- G2.6, G2.7*, G2.10, G2.12, G2.13, G2.20† (G2.21 i 2. udgave).
  (*) Tjek evt. dit resultat med Matlab-koden `Infinite_square_well.m` (findes på Blackboard).
  (†) Kan ligeledes tjekkes med `wavepacket.m.`

- Diskutér emnerne fra ”Diskussion om deltascatter.m”, som findes nederst i læringsstien om ”Delta-funktions-potentialet” under ”Uge 3” på Blackboard (instruktoren medbringer labtop til anden øvelsesgang).

Composer-opgave: C2 (findes under uge 4).

Lette opgaver: L8 og L9 på næste side samt G2.17 (G2.18 i 2. udgave).

Ekstraopgave: En matematisk opgave til dem, der har lyst: Opgave 6 på sidste side.

Afleveringsopgave 4: Se næste side.

Forventet program i uge 5

Forelæsninger: Vi starter på kapitel 4. Ingen video i denne uge.

Regneøvelser: *Standardopgaver*: G2.21 (G2.22 i 2. udgave), G2.27, G2.30, G2.31, G2.41 (G2.42 i 2. udgave) samt diskussionerne fra ”Det genereliserede usikkerhedsprincip” fra Uge 4 på Blackboard. *Lette opgaver*: L10 og L11 på næstsidste side. *Afleveringsopgave 5*: Se næstsidste side.

Mvh Brian Julsgaard.

Afleveringsopgave 4

Vi betragter den harmoniske oscillator i en dimension med notationen som beskrevet i kapitel 2.3. En startbølgefunktion er givet ved $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n(x) + i\psi_{n+2}(x))$.

(1) Bestem middelværdien og spredningen af partiklens totale energi.

(2) Betragt operatoren $A = xp + px$. Udtryk denne operator vha. hæve- og sænkeoperatorerne, a_+ og a_-.

(3) Bestem forventningsværdien $\langle A \rangle$.

Lette opgaver til uge 4:

Opgave L8:
Betragt operatoren $A = xp - px$.
(1) Brug [2.70] ([2.69] i 2. udgave) til udtrykke A som funktion af a_+ og a_-.
(2) Reducer dette udtryk så meget du kan for at opnå et simpelt og kendt resultat.

Opgave L9:
En partikel med massen m bevæger sig som en harmonisk oscillator, og er til tiden $t = 0$ beskrevet ved bølgefunktionen $\Psi(x,0) = N[3\psi_3(x) + 4\Psi_4(x)]$. Her er $\psi_n(x)$ de sædvanlige løsninger til den stationære Schrödingerligning fra kapitel 2.3.
(1) Bestem Nså bølgefunktionen bliver normeret.
(2) Angiv de mulige resultater af en måling af partiklens totale energi. Bestem også sandsynligheden for hvert af disse resultater.
(3) Bestem middelværdien og spredningen af partiklens totale energi. Angiv svaret i enheder af $\hbar\omega$.
(4) Brug [2.70 (2.69)] og [2.67 (2.66)] til at beregne middelværdien $\langle x \rangle$. Du skal kunne "se" hvad alle integraler giver.
(5) Brug [2.70 (2.69)] til at udtrykke operatoren $A = xp + px$ vha. a_+ og a_-. Reducer udtrykket så meget du kan, og argumenter (uden at regne) for, at middelværdien $\langle A \rangle$ er nul.
(6) Angiv $\Psi(x,t)$ til alle tider t.

Lette opgaver til uge 5

Opgave L10:

(1) Opskriv løsningen $\psi_4(x)$ til den stationære Schrödingerligning for den harmoniske oscillator. Benyt ligning [2.86 (2.85)].

(2) Betragt det infinitesimale interval $I = [0; \Delta x]$ og bestem sandsynligheden for at en måling af partiklens position giver et resultat i dette interval.

(3) Hvad er spredningen af den totale energi?

Opgave L11:

Vi betragter til tiden $t = 0$ en fri partikel, beskrevet ved bølgefunktionen $\Psi(x, 0)$ på formen [2.102 (2.101)]. Vi lader $\phi(k)$ være givet ved udtrykket $\phi(k) = \begin{Bmatrix} A & \text{for } 0 \leq k \leq 2k_0 \\ 0 & \text{ellers} \end{Bmatrix}$.

(1) Bestem konstanten A således at $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(k)|^2 dk = 1$. Skitser funktionen $|\phi(k)|^2$, og angiv en typisk bredde af denne funktion.

(2) Benyt nu ligning [2.102 (2.101)] til at vise, at $\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{k_0}{\pi}} \cdot e^{ik_0 x} \cdot \frac{\sin(k_0 x)}{k_0 x}$.

(3) Skitser sandsynlighedsfordelingen $|\Psi(x, 0)|^2$, og angiv en typisk bredde af denne funktion.

(4) Beregn produktet af de typiske bredder fra spørgsmål (1) og (3) og kommenter på resultatet.

(5) Sammenlign denne opgave med Griffiths' eksempel 2.6. Hvilke ligheder og forskelle er der?

Afleveringsopgave 5

En partikel med massen m bevæger sig langs x-aksen i potentialet $V(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{Bmatrix}$, hvor $V_0 > 0$ er konstant.

Det oplyses, at løsninger til den stationære Schrödingerligning med energi $E > V_0$ kan skrives på formen:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0, \\ Fe^{iqx} & x > 0. \end{cases}$$

(1) Bestem, hvordan konstanterne k og q afhænger af V_0 og E, og at $\frac{q}{k} = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}$.

(2) Vis, at $B = \frac{1-q/k}{1+q/k}$ og $F = \frac{2}{1+q/k}$.

(3) Betragt nu tilfældet $E < V_0$ med løsninger $\psi_k(x) = \begin{Bmatrix} e^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Fe^{-\kappa x} & x > 0 \end{Bmatrix}$.

Bestem k, κ, B og F [resultaterne minder meget om dem fra spørgsmål (1) og (2)].

(4) Størrelsen $R = |B|^2$ kan fortolkes som en refleksionskoefficient. Hvilke værdier kan R antage i tilfældene $E > V_0$ henholdsvis $E < V_0$? Argumenter for den fysiske fornuft af disse resultater.

Bemærk, $|F|^2$ kan *ikke* fortolkes som en transmissionskoefficient, da hastigheden af en partikel (bølgepakke) er forskellig på de to sider af $x = 0$. Dette ønskes ikke diskuteret her.

Opgave 6

Knudesætningen: *Lad ψ_1 og ψ_2 være to løsninger til den stationære Schrödingerligning:*

$$\hat{H}\psi_1 = E_1\psi_1; \qquad \hat{H}\psi_2 = E_2\psi_2,$$

med $E_1 < E_2$. Der gælder da, at ψ_2 har mindst et nulpunkt mere end ψ_1.

Bevis: Lad a og b være to på hinanden følgende nulpunkter for ψ_1 ($a < b$; evt. kan gælde $a = -\infty$, og/eller $b = +\infty$).

Vi vil vise, at ψ_2 nødvendigvis må have et nulpunkt i $]a, b[$. Det gøres ved et modstridsargument: antag $\psi_2(x) > 0$ for alle $x \in]a, b[$. Antag endvidere, at $\psi_1(x) > 0$ for $x \in]a, b[$, hvorfor $\psi_1'(a) \geq 0$ og $\psi_1'(b) \leq 0$.

1. Lav en skitse, der viser disse fortegnsantagelser...
2. Betragt *Wronskideterminanten*:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_1'(x) \\ \psi_2(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix}$$

   Vis, at

$$\frac{d}{dx}W(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E_2 - E_1)\psi_1(x)\psi_2(x).$$

3. W er altså monotont aftagende, men hvad er $W(b) - W(a)$?
4. Overvej nu, at modstriden er etableret, og knudesætningen dermed vist.
5. Overvej dog lige, at de ovennævnte fortegnsantagelser ikke udgør nogen form for indskrænkning (vi kunne lige så godt have argumenteret med $\psi_1(x) > 0$ og $\psi_2(x) < 0$, f. eks.).
6. Overvej, at der ikke i energispektret (dvs. de fundne egenenergier) for den uendelige potentialbrønd samt den harmoniske oscillator er plads til flere egenværdier, end dem vi fandt i G[2.27] og G[2.61].