Kvantemekanik Aflevering 2

Marc Breiner Sørensen

201708238 - FYS1

6. september 2018

En partikel bevæger sig på x-aksen i et potential, V(x). Grundtilstandens bølgefunktion er givet ved

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} \tag{1}$$

hvor a er en konstant. Endvidere vides det, at V(a) = 0.

1 Bestem V(x) og grundtilstandsenergien

Den tidsuafhængige bølgefunktion $\psi(x)$ er en løsning til den tidsuafhængige Schrödingerligning givet ved

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi = E\psi \tag{2}$$

Denne udnytter vi til at finde V(x). Først bestemmes differentialkvotienten $\frac{d^2}{dx^2}\psi.$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = \frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{a})^4} \tag{3}$$

Her benyttes kædereglen, da vi har at gøre med en sammensat funktion.

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{a})^4} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2x^3}{a^4}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}}\right) = \frac{4x^6}{a^8}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}} - \frac{6x^2}{a^4}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}} = \frac{2x^2}{a^8}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}}\left(2x^4 - 3a^4\right) \ (4)$$

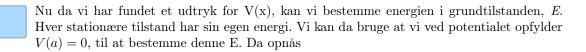
Dette resultat kan nu indsættes i Schrödingerligningen, hvorefter vi kan isolere et udtryk for V(x). Efter indsættelse elimineres eksponentialfunktionen i alle led.

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi$$

$$Ee^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^4} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{2x^2}{a^8} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^4}{a^4}} \left(2x^4 - 3a^4\right) + V(x)e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^4}$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{x^2}{a^8} \left(2x^4 - 3a^4\right) + V(x)$$

$$V(x) = E + \frac{\hbar^2}{m} \frac{x^2}{a^8} \left(2x^4 - 3a^4\right)$$



$$V(a) = 0 = E + \frac{\hbar^2}{m} \frac{a^2}{a^8} (2a^4 - 3a^4)$$
$$= E - \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{a^2}$$

Og ved isolering af E opnås

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{ma^2}$$