Kvantemekanik, afl. 4

Gorm Balle Feldstedt

Betragt den harmoniske oscillator. En startbølgefunktion er givet ved $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n(x) + i\psi_{n+2}(x))$.

1) Bestem middelværdien og spredningen af partiklens totale energi.
Først bemærkes, at energien i den harmoniske oscillator er givet ved $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Dernæst bemærkes, at $|c_n|^2 = |c_{n+2}|^2 = \frac{1}{2}$, så sandsynligheden for at måle hver af energierne er $0,5$. Vi benytter derfor

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle &= \sum |c_k|^2 E_k \\
&= |c_n|^2 E_n + |c_{n+2}|^2 E_{n+2} \\
&= \frac{1}{2}(n + 1/2 + n + 2 + 1/2)\hbar\omega \\
&= (n + 3/2)\hbar\omega
\end{aligned}$$

For at finde spredningen skal vi bruge $\langle H^2 \rangle$. Vi bruger samme fremgangsmåde:

$$\begin{aligned}
\langle H^2 \rangle &= |c_n|^2 E_n^2 + |c_{n+2}|^2 E_{n+2}^2 \\
&= \frac{\hbar^2\omega^2}{2}\big((n + \frac{1}{2})^2 + (n + \frac{5}{2})^2\big) \\
&= \frac{\hbar^2\omega^2}{2}(n^2 + \frac{1}{4} + n + n^2 + \frac{25}{4} + 5n) \\
&= \hbar^2\omega^2(n^2 + \frac{13}{4} + 3n)
\end{aligned}$$

Vi har da

$$\begin{aligned}
\sigma_H^2 &= \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \\
&= \hbar^2\omega^2(n^2 + \frac{13}{4} + 3n) - \hbar^2\omega^2(n^2 + \frac{9}{4} + 3n) \\
&= \hbar^2\omega^2 \\
&\Updownarrow \\
\sigma_H &= \hbar\omega
\end{aligned}$$

2) Betragt operatoren $A = x\hat{p} + \hat{p}x$. Udtryk denne operator vha. hæve- og sænkeoperatorerne, a_+ og a_-.

Vi benytter, at

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-)$$
$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_+ - a_-)$$

Det giver os

$$x\hat{p} = i\frac{\hbar}{2}(a_+^2 - a_-^2)$$
$$\hat{p}x = i\frac{\hbar}{2}(a_+^2 - a_-^2)$$
$$A = x\hat{p} + \hat{p}x = i\hbar(a_+^2 - a_-^2)$$

3) Bestem forventningsværdien $\langle A \rangle$
Vi smører en hurtig sandwich:

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* A \Psi dx \\
&= \frac{i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* - i\psi_{n+2}^*)(a_+^2 - a_-^2)(\psi_n + i\psi_{n+2})dx \\
&= \frac{i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* - i\psi_{n+2}^*)(a_+^2\psi_n + ia_+^2\psi_{n+2} - ia_-^2\psi_{n+2} - a_-^2\psi_n)
\end{aligned}$$

Ortogonaliteten af de forskellige ψ_n'er gør, at integralet af et produkt af to forskellige n'er er 0. Disse led forsvinder derfor, og vi efterlades med:

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \frac{i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* - \psi_{n+2}^*)(\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\psi_{n+2} + i\sqrt{n}\sqrt{n-1}\psi_n)dx \\
&= \frac{i\hbar}{2}\left(\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+3n+2}\right)
\end{aligned}$$