Kvantemekanik, afl. 4

Gorm Balle Feldstedt

Betragt den harmoniske oscillator. En startbølgefunktion er givet ved $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n(x) + i\psi_{n+2}(x))$.

1) Bestem middelværdien og spredningen af partiklens totale energi. Først bemærkes, at energien i den harmoniske oscillator er givet ved $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Dernæst bemærkes, at $|c_n|^2 = |c_{n+2}|^2 = \frac{1}{2}$, så sandsynligheden for at måle hver af energierne er 0,5. Vi benytter derfor

$$\langle H \rangle = \sum |c_k|^2 E_k$$
= $|c_n|^2 E_n + |c_{n+2}|^2 E_{n+2}$
= $\frac{1}{2} (n + 1/2 + n + 2 + 1/2) \hbar \omega$
= $(n + 3/2) \hbar \omega$

For at finde spredningen skal vi bruge $\langle H^2 \rangle$. Vi bruger samme fremgangsmåde:

$$\langle H^2 \rangle = |c_n|^2 E_n^2 + |c_{n+2}|^2 E_{n+2}^2$$

$$= \frac{\hbar^2 \omega^2}{2} \left((n + \frac{1}{2})^2 + (n + \frac{5}{2})^2 \right)$$

$$= \frac{\hbar^2 \omega^2}{2} (n^2 + \frac{1}{4} + n + n^2 + \frac{25}{4} + 5n)$$

$$= \hbar^2 \omega^2 (n^2 + \frac{13}{4} + 3n)$$

Vi har da

$$\sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$$

$$= \hbar^2 \omega^2 (n^2 + \frac{13}{4} + 3n) - \hbar^2 \omega^2 (n^2 + \frac{9}{4} + 3n)$$

$$= \hbar^2 \omega^2$$

$$\updownarrow$$

$$\sigma_H = \hbar \omega$$

2) Betragt operatoren $A = x\hat{p} + \hat{p}x$. Udtryk denne operator vha. hæve- og sænkeoperatorerne, a_+ og a_- .

Vi benytter, at

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_{+} + a_{-})$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_{+} - a_{-})$$

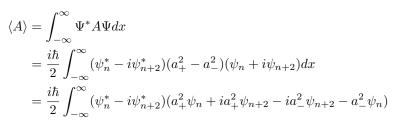
Det giver os

$$x\hat{p} = i\frac{\hbar}{2}(a_{+}^{2} - a_{-}^{2})$$

$$\hat{p}x = i\frac{\hbar}{2}(a_{+}^{2} - a_{-}^{2})$$

$$A = x\hat{p} + \hat{p}x = i\hbar(a_{+}^{2} - a_{-}^{2})$$

3) Bestem forventningsværdien $\langle A \rangle$ Vi smører en hurtig sandwich:



Ortogonaliteten af de forskellige ψ_n 'er gør, at integralet af et produkt af to forskellige n'er er 0. Disse led forsvinder derfor, og vi efterlades med:

$$\langle A \rangle = \frac{i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* - \psi_{n+2}^*) (\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\psi_{n+2} + i\sqrt{n}\sqrt{n-1}\psi_n) dx$$

= $\frac{i\hbar}{2} (\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 + 3n + 2})$