Kvantemekanik
Aflevering 2

Marc Breiner Sørensen
201708238 - FYS1

6. september 2018

En partikel bevæger sig på x-aksen i et potential, *V(x)*. Grundtilstandens bølgefunktion er givet ved

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} \tag{1}$$

hvor a er en konstant. Endvidere vides det, at $V(a) = 0$.

1 Bestem V(x) og grundtilstandsenergien

Den tidsuafhængige bølgefunktion $\psi(x)$ er en løsning til den tidsuafhængige *Schrödingerligning* givet ved

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi = E\psi \tag{2}$$

Denne udnytter vi til at finde V(x). Først bestemmes differentialkvotienten $\frac{d^2}{dx^2}\psi$.

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = \frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} \tag{3}$$

Her benyttes kædereglen, da vi har at gøre med en sammensat funktion.

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2x^3}{a^4}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}}\right) = \frac{4x^6}{a^8}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}} - \frac{6x^2}{a^4}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}} = \frac{2x^2}{a^8}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}}\left(2x^4 - 3a^4\right) \tag{4}$$

Dette resultat kan nu indsættes i Schrödingerligningen, hvorefter vi kan isolere et udtryk for V(x). Efter indsættelse elimineres eksponentialfunktionen i alle led.

$$\begin{aligned}
E\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi \\
Ee^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2x^2}{a^8}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^4}{a^4}}\left(2x^4 - 3a^4\right) + V(x)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} \\
E &= -\frac{\hbar^2}{m}\frac{x^2}{a^8}\left(2x^4 - 3a^4\right) + V(x) \\
V(x) &= E + \frac{\hbar^2}{m}\frac{x^2}{a^8}\left(2x^4 - 3a^4\right)
\end{aligned}$$

Nu da vi har fundet et udtryk for V(x), kan vi bestemme energien i grundtilstanden, E. Hver stationære tilstand har sin egen energi. Vi kan da bruge at vi ved potentialet opfylder $V(a) = 0$, til at bestemme denne E. Da opnås

$$
\begin{aligned}
V(a) = 0 &= E + \frac{\hbar^2}{m}\frac{a^2}{a^8}\left(2a^4 - 3a^4\right) \\
&= E - \frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{a^2}
\end{aligned}
$$

Og ved isolering af E opnås

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{ma^2}$$