

# Kvantemekanik – ugeseddel 7

---

I sidste uge gennemgik vi kapitel 4.2 om brint og gennemgik en del om impulsmomenter.

## Undervisning i uge 7 (8/10 - 12/10)

### Forelæsninger:

Vi gør afsnittet om impulsmomenter færdigt. Kapitel 4.4, til og med afsnit 4.4.1, om spin gennemgås via videoforelæsning (kig under uge 6). Vi vil også kigge på nogle eksamensopgaver, samt snakke lidt om videnskabelige og teknologiske anvendelser af kvantemekanikken.

### Teoretiske øvelser:

#### *Standardopgaver:*

- G4.1, G4.2, G4.15 (G4.13 i 2. udgave), G4.21 (G4.18 i 2. udgave), de to små opgaver i læringsstien om "Spin" under "Uge 6" på Blackboard, samt opgave 9 på næste side.

*Lette opgaver:* L13-L15 på næste side.

*Composer-opgave:* C5 (findes under uge 7).

*Ekstraopgave:* G4.17.

- **Afleveringsopgave 7:** Augusteksamen 2006, opgave 3.

## Forventet program i uge 8

Forelæsninger: Tidsuafhængig perturbationsregning, §6.1 og §6.2. Teoretiske øvelser: *Standardopgaver:* Opgave 10 på sidste side, eksempel 3.1 + G3.6, G3.7, G3.15 (G3.14 i 2. udgave), G3.46 (G3.38 i 2. udgave), G4.16 (G4.14 i 2. udgave), Augusteksamen 2008 opgave 3. *Lette opgaver:* L16 og L17 på sidste side. *Ekstraopgaver:* G3.36 (G3.30 i 2. udgave) og opgave 11 på sidste side. *Afleveringsopgave 8:* Augusteksamen 2005, opgave 1.

Mvh Brian Julsgaard.

## Opgave 9 (diskussionsopgave i plenum)

- (i) Repetér den matematiske konsekvens af, at operatorerne  $H$ ,  $L^2$  og  $L_z$  kommuterer.  
 (ii) Repetér den fysiske konsekvens af ovenstående.

I det følgende betragter vi linearkombinationer af de sædvanlige brintbølgefunktioner  $\psi_{nlm}$ . For hvert tilfælde, angiv de mulige resultater af en måling af  $L_z$  samt sandsynligheden for hvert af disse resultater.

- (a)  $\Psi = a\psi_{100} + b\psi_{211}$ .  
 (b)  $\Psi = a\psi_{100} + b\psi_{210} + c\psi_{311}$ .  
 (c)  $\Psi = a\psi_{100} + b\psi_{21-1} + c\psi_{321}$ .

Gør nu det samme for operatoren  $L^2$ : Hvilke udfald er mulige for målinger af denne observabel, og hvad er sandsynligheden for hvert af disse udfald?

Antag for tilfælde (b) ovenfor, at en måling af  $L_z$  giver nul. Angiv den *normerede* bølgefunktion umiddelbart efter denne måling. Hvad er sandsynligheden for, at en *efterfølgende* måling af  $L^2$  giver  $2\hbar^2$ ? Udnyt så de forskellige resultater til at beregne den *samlede* sandsynlighed for at en måling af  $L_z$  giver nul og at en efterfølgende måling af  $L^2$  giver  $2\hbar^2$ , hvis start-bølgefunktionen er som i (b). *Hint: Svaret findes som et produkt af to sandsynligheder.*

Vi vender nu rækkefølgen om. Hvis start-bølgefunktionen er som i (b), beregn på lignende vis den *samlede* sandsynlighed for at en måling af  $L^2$  giver  $2\hbar^2$  og at en efterfølgende måling af  $L_z$  giver nul. Fik du det samme i de to tilfælde? Hvis ja, hvorfor? Hvis nej, hvorfor ikke?

## Lette opgaver til uge 7

### Opgave L13:

Lad  $\psi_{nlm}$  betegne de sædvanlige løsninger til den stationære Schrödingerligning for brintatomet. Angiv de eksplicitte  $(r, \theta, \phi)$ -afhængige bølgefunktioner: (i)  $\psi_{211}$ , (ii)  $\psi_{300}$ , (iii)  $\psi_{32-2}$ .

### Opgave L14:

Vi betragter brint til tiden  $t = 0$  beskrevet ved den normerede bølgefunktion  $\Psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{5}[3\psi_{100}(\mathbf{r}) + 4\psi_{311}(\mathbf{r})]$ .

- (i) Angiv bølgefunktionen  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  til alle tider.  
 (ii) Angiv de mulige resultater for en måling af elektronens totale energi og sandsynligheden for hver af disse.  
 (iii) Angiv de mulige resultater for en måling af  $L^2$  samt middelværdien  $\langle L^2 \rangle$ .

### Opgave L15:

Vi betragter i denne opgave *matrix-elementer*  $\langle \psi_{nlm} | Q \psi_{n'l'm'} \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \psi_{nlm}^*(\mathbf{r}) Q \psi_{n'l'm'}(\mathbf{r})$ , hvor  $\psi_{nlm}$  er de sædvanlige brintbølgefunktioner og  $Q$  er en operator. Forklar, hvorfor alle de følgende eksempler giver nul: (i)  $\langle \psi_{100} | z \psi_{211} \rangle$ , (ii)  $\langle \psi_{210} | r^2 \psi_{200} \rangle$ , (iii)  $\langle \psi_{100} | L_z \psi_{200} \rangle$ .

## Opgave 10

En repetitionsopgave om den harmoniske oscillator og øvelse i integration!

- 1) Opskriv de stationære løsninger,  $\psi_0(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ , og  $\psi_3(x)$ , til den harmoniske oscillator.
- 2) Regn opgave G2.11.
- 3) Sammenlign resultatet med opgave G2.12 og mind dig selv om at det er vigtigt at kunne regne med hæve/sænke-operatorerne,  $a_+$  og  $a_-$ !

## Opgave 11 (ekstraopgave)

I kapitel 3.3 diskuterede vi at egenfunktionerne for en hermitisk operator udgør en komplet basis for Hilbertrummet. Hvis man nu har to hermitiske operatorer,  $A$  og  $B$ , så vil de *fælles* egenfunktioner også udgøre en komplet basis. Vi brugte dette i kapitel 4.3 som argumentation for at produktbølgefunktionerne  $\psi_{nlm}$  for brint udgør en komplet basis – se evt. ligning [4.133]. Et bevis for ovenstående kan uddrages fra noten `Fælles_egenfunktioner.pdf` under ”diverse noter” på Blackboard. Gennemgå dette bevis for hinanden, og genopfrisk også pointen omkring ligning [4.133].

## Lette opgaver til uge 8

### Opgave L16:

Beregn følgende kommutatorer (i nævnte rækkefølge):  $[x, p^2]$ ,  $[x^2, p^2]$  og  $[x^3, p^2]$ .

### Opgave L17:

Betragt hæve-/sænkeoperatorerne,  $a_+$  og  $a_-$ , for den harmoniske oscillator. Benyt kommutator-relationen,  $[a_-, a_+] = 1$ , til at beregne nedenstående kommutatorer. Reducer så meget du kan.

- (i)  $[a_+a_-, a_+ + a_-]$ ,
- (ii)  $[a_+a_-, i(a_+ - a_-)]$ ,
- (iii)  $[a_+a_-, a_-a_+]$ .