E18 Kvantemekanik
Aflevering uge 2 E18

Karsten Lomborg Bosteen
19851608
au143043@post.au.dk

Sommereksamen 2005 opgave 4.1

En partikel bevæger sig på x-aksen i et potential, V (x). Grundtilstandens

bølgefunktion er

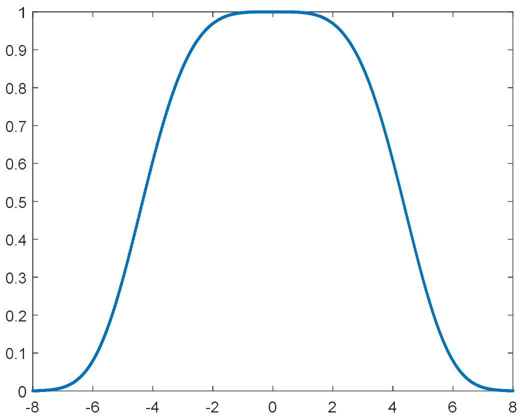
$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4}$$

hvor a er en konstant af dimission længde. Endvidere er V(a) = 0.

Vi skal bestemme V(x) samt grundtilstandsenergien. Grundtilstanden er det laveste energiniveau.

Bestemmelse af grundtilstandsenergien

Her ses $\psi(x)$ for a = 4:



Bølgefunktionen skal opfylde den tidsuafhængige Schrødinger-ligning:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi = E_0\psi$$

Vi udleder først afledede af ψ.

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -\frac{2}{a^4}x^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} \text{ (kæderegel)}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{4}{a^8}x^6 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} - \frac{6}{a^4}x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} \text{ (kæde og produktregel)}$$

Karsten Lomborg Bosteen
19851608
au143043@post.au.dk

For randbetingelse x = a har vi V(x) = 0 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + 0 = E_0\psi \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{a^8}a^6 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a}\right)^4} - \frac{6}{a^4}a^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a}\right)^4}\right] = E_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a}\right)^4} \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{a^8}a^6 e^{-\frac{1}{2}} - \frac{6}{a^4}a^2 e^{-\frac{1}{2}}\right] = E_0 e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{a^2} - \frac{6}{a^2}\right] = E_0 \Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

Dette er grundtilstandsenergien, som gælder for alle x for grundtilstandens bølgefunktion.

Udledning af potentialfunktionen

V(x) kan nu udledes for alle x fra den tidsuafhængige Schrødinger-ligning:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi = E_0\psi \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{ma^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}/\psi \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{ma^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{a^8}x^6 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} - \frac{6}{a^4}x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4}\right]/e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4} \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{ma^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{a^8}x^6 - \frac{6}{a^4}x^2\right] \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{ma^2}\left(\frac{1}{ma^6}(2x^6 - 3x^2a^4) + 1\right)$$

V(x) skitseret – en variant af infinite square well.