



Проект по „Небесна механика“

2020-2021г.

Кристина Попова | Компютърни науки | 3 курс | фак. номер 81933

Съдържание:

1. Първа задача	3
1.1. Условие	3
1.2. Решение	3
1.3. Код.....	6
2. Втора задача	8
2.1. Условие	8
2.2. Решение	8
2.3. Код.....	15

1. Първа задача

1.1. Условие

Да се пресметнат координатите и скоростите на планетите в деня, в който сте родени.

1.2. Решение

В задачата на Кеплер орбитата на всяка планета зависи от шест елемента:

- a – дължина на голямата полу-ос
- e – ексцентрицитет на орбитата
- i – наклонеността на плоскостта на орбитата
- l – средна аномалия
- $g + \theta$ – дължина на перихелия
- θ – дължина на възела

Пет от тези елементи са константи, единствено средната аномалия l е линейна функция на времето t .

Допълнителен елемент, който ни е необходим, е ексцентричната аномалия u . За този параметър е в сила уравнението на Кеплер:

$$l = u - e \cdot \sin u$$

Ексцентритетът e характеризира сплеснатостта на елипсата:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0, 1),$$

където b е дължината на малката полуос.

Връзката на елиптичните елементи с декартовите координати в \mathbf{R}^3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обръщаме $\theta, g + \theta$ в радиани - $^{\circ}\pi/180$. Обръщаме i в градуси - $^{\circ}\pi/180$.

Стойностите на μ за планетите са:

Планета	μ
Меркурий	$1/6023600$
Венера	$1/408523$
Земя	$1/328900,5$
Марс	$1/3098708$
Юпитер	$1/1047,34$
Сатурн	$1/3497,8$
Уран	$1/22902,9$
Нептун	$1/19042$
Плутон	$1/135000000$

$$\gamma = 1 + \mu$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Величината n наричаме средно движение. Средното движение е моментът на преминаване през перихелия на планета, тоест начало на епоха. Връзката между средната и ексцентричната аномалии

$$l = u - e \cdot \sin u$$

наричаме уравнение на Кеплер.

Въвеждаме времето на рожденната дата до 2000г. в години.

Рожденна дата : 5.09.1999г.

Пресмятаме броят дни между 05.09.1999 и 01.01.2000 => 118 дни

Пресмятаме $t = \frac{118}{365.25} = 0.32306639$.

От решението на задачата на Кеплер в декартови координати:

$$l = \sqrt{\gamma} * a^{-\frac{3}{2}}(t - T_0)$$

$$l = n(t(2\pi) - T_0) = u - e * \sin u$$

$$u = l + e * \sin (l + e * \sin (l + e * \sin l))$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q * a(\cos u - e; \sin u; \sqrt{(1 - e^2; 0)})$$

$$v = q * \frac{-\sin u; \cos u * \sqrt{(1 - e^2; 0)} * a * n}{1 - e * \cos u}$$

Където Q е от Основната формула на сферичната тригонометрия.

Теорема: Всяка матрица $Q \in SO(3, R)$ може да се представи аналитично във вида:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta * \cos g - \sin \theta * \sin g * \cos i & -\cos \theta * \sin g - \sin \theta * \cos g * \cos i & \sin \theta * \sin i \\ \sin \theta * \cos g + \cos \theta * \sin i * \cos i & -\sin \theta * \sin g + \cos \theta * \cos g * \cos i & -\cos \theta * \sin i \\ \sin g * \sin i & \cos g * \sin i & \cos i \end{pmatrix},$$

където $\theta, g \in [0, 2\pi)$ и $i \in [0, \pi]$.

Описаните процедури се повтарят за всяка планета по отделно и получаваме следната таблица:

	r			v			 r 	 v
Меркурий	0.046837	0.303515	0.020493	-1.9433	0.3098	0.2036	1.97837	0.30779
Венера	-0.542657	-0.477036	0.024798	0.768857	-0.888252	-0.056508	1.17615	0.722949
Земя	-0.7460	-0.6773	0	0.6567	-0.7440	0	0.992396	1.00763
Марс	-8.0988e-01	-1.3007e-00	-7.4858e-03	0.722723	-0.358375	-0.02261	0.807093	1.52905
Юпитер	-4.9716	2.0933	0.1026	-1.7567e-01	-3.8437e-01	5.5225e-03	0.422644	5.39532
Сатурн	9.3133	-2.5732	-0.3254	6.8897e-02	3.1181e-01	-8.1696e-03	0.319434	9.66769
Уран	-12.6375	13.4550	0.2136	-1.6826e-01	-1.6708e-01	1.5596e-03	0.237125	18.4605
Нептун	1.7836e+01	-2.4251+01	8.8361e-02	1.4583e-01	1.0902e-01	-5.6051e-03	0.182162	30.1032
Плутон	-10.3752	-27.7432	5.9698	0.175111	-0.092402	-0.040762	0.202147	30.2154

1.3. Код

```
function solvePlanet(a, e, i, L, w, Omega, miu, t)
    tita = Omega * pi/180;
    g = (w - Omega) * pi/180;
    i = i * pi/180;
    Tita = [cos(tita), -sin(tita), 0;
            sin(tita), cos(tita), 0;
            0, 0, 1];

    I = [1, 0, 0;
         0, cos(i), -sin(i);
         0, sin(i), cos(i)];

    G = [cos(g), -sin(g), 0;
         sin(g), cos(g), 0;
         0, 0, 1];
```

```

Q = Tita*I*G;
gama = 1 + miu;
n = sqrt(gama / a^3);
to = ((w - L) / n) * pi/180;
l = n * (-t * 2*pi - to);
u = l + e * sin(l + e * sin(l + e * sin(l)));
r = Q * a * [cos(u) - e; sin(u) * sqrt(1 - e^2); 0]
v = Q * [-sin(u); cos(u) * sqrt(1 - e^2); 0] * a * n / (1 - e*cos(u))

fprintf('|V|= %d\n',norm(v))
fprintf('|R|= %d\n',norm(r))

end

dataFromNasa=[0.387  0.205 7.004  252.250 77.457  48.330  1/6023600;

              0.723  0.006 3.394  181.979 131.602 76.679  1/408523;

              1      0.016 0      100.464 102.937 0      1/328900.5;

              1.523  0.093 1.849  -4.553  -23.943 49.559  1/3098708;

              5.202  0.048 1.304  34.396  14.728  100.473 1/1047.34;

              9.536  0.053 2.485  49.954  92.598  113.662 1/3497.8;

              19.189 0.047 0.772  313.238 170.954 74.016  1/22902.9;

              30.069 0.008 1.770  -55.120 44.964  131.784 1/19402;

              39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303 1/135000000];

time=daysact('5-sep-1999', '1-jan-2000')/365.25

planets = {'Mercury', 'Venus', 'Earth', 'Mars', 'Jupiter', 'Saturn', 'Uranus', 'Neptune',
'Pluto'};

for i=1:length(planets)

    fprintf('%d. %s:\n',i,char(planets(i)))

    solvePlanet(dataFromNasa(i, 1), dataFromNasa(i, 2), dataFromNasa(i, 3),

                dataFromNasa(i, 4), dataFromNasa(i, 5), dataFromNasa(i, 6),

                dataFromNasa(i, 7), time)

end

```

2. Втора задача

2.1. Условие

Да се пресметнат елементите на Делоне и Поанкре от I-ви и II-ри вид в деня, в който сте родени.

2.2. Решение

Елементите на Делоне – L , G , Θ , l , g , θ , където (l, L) , (G, g) и (Θ, θ) са спрегнати канонично променливи, се изразяват чрез орбиталните елементи:

- a – дължина на голямата полуос
- e – ексцентрицитет
- i – наклонение на плоскостта на орбитата
- l – средна аномалия
- $g + \theta$ – дължина на перихелия
- θ – дължина на възела

както следва:

$$L = \mu\sqrt{\gamma}\sqrt{a}$$

$$G = \mu\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\sqrt{1 - \varepsilon^2} = L * \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$\Theta = \mu\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos i = G * \cos i$$

Като при това l , g и θ съвпадат и в двата случая.

Елементите на Делоне – L , G , Θ , l , g , θ са константи с хамилтониан:

$$\hat{H} = \frac{\mu^3 \gamma^2}{2L^3}$$

Обръщаме θ в радиани и i в градуси.

$$l = \sqrt{\gamma} a^{-\frac{3}{2}} (t - T_0)$$

$$u = l + e * \sin(l + e * \sin(l + e * \sin l))$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Въвеждаме времето от рожденната дата до 01.01.2000г. Рождена дата: 05.09.1999г. и получаваме $t=0.32306639$

$$l = n(t(2\pi) - T_0)$$

Чрез $\lambda = l + g + \theta$ (дължина на епоха) можем да изразим елементите от двете системи на Поанкре.

Първата систем от шест елемента, характеризираща орбитите на планетите:

$$\begin{pmatrix} L & L - G & G - \Theta \\ l + g + \theta & -g - \theta & -\theta \end{pmatrix}$$

И втората:

$$\begin{pmatrix} L & \zeta := \sqrt{2(L - G)}\cos(g + \theta) & p := \sqrt{2(G - \Theta)}\cos\theta \\ \lambda & \eta := -\sqrt{2(L - G)}\sin(g + \theta) & q := -\sqrt{2(G - \Theta)}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Описаните процедури се повтарят за всяка планета по отделно и така следните таблици:

Меркурий

L	1.0328e-07		
G	1.0108e-07		
Θ	1.0033e-07		
l	11.482		
g	0.5084		
θ	0.8435		
H	-2.1449e-07		

I	1.0328e-07	2.1934e-09	7.5431e-10
	12.834	-1.3519	-0.8435

II	1.0328e-07	1.4384e-05	2.5823e-05
	12.834	-6.4652e-05	-2.9014e-05

Венера

L	2.0814e-06		
G	2.0814e-06		
Θ	2.0777e-06		
l	4.1811		
g	0.9586		
θ	1.3383		
H	-1.6928e-06		
I	2.0814e-06	3.7465e-11	3.6506e-09
	6.4780	-2.2969	-1.3383
II	2.0814e-06	-57473e-06	1.9688e-05
	6.4780	-6.4729e-06	-8.3148e-05

Земя

L	3.0404e-06		
G	3.0400e-06		
Θ	3.0400e-06		
l	1.9867		
g	1.7966		
θ	0		
H	-1.5202e-06		
I	3.0404e-06	3.8920e-10	0
	3.7833	-1.7966	0
II	3.0404e-06	-6.2462e-06	0
	3.7833	-2.7192e-05	0

Марс

L	3.9826e-07		
G	3.9654e-07		
Θ	3.9633e-07		
l	1.4184		
g	-1.2829		
θ	0.8650		
H	-1.0595e-07		
I	3.9826e-07	1.7260e-09	2.0646e-09
	1.0005	0.4179	-0.8650
II	3.9826e-07	5.3698e-05	1.3181e-05
	1.0005	2.3844e-05	-1.5466e-05

Юпитер

L	2.1787e-03		
G	2.1762e-03		
Θ	2.1757e-03		
l	0.5144		
g	-1.4965		
θ	1.7536		
H	-9.1860e-05		
I	2.1787e-03	2.5114e-06	5.6359e-07
	0.7714	-0.2571	-1.7536
II	2.1787e-03	2.1675e-03	-1.9299e-04
	0.7714	-5.6977e-04	-1.0440e-03

Сатурн

L	8.8298e-04		
G	8.8174e-04		
Θ	8.8091e-04		
l	-0.6753		
g	-0.3676		
θ	1.9838		
H	-1.4995e-05		
I	8.8298e-04	1.2410e-06	8.2918e-07
	0.9408	-1.6161	-1.9838
II	8.8298e-04	-7.1412e-05	-5.1684e-04
	0.9408	-1.5739e-03	-1.1795e-03

Уран

L	1.9127e-04		
G	1.9106e-04		
Θ	1.9104e-04		
l	2.5075		
g	1.6919		
θ	1.2918		
H	-1.1377e-06		
I	1.9127e-04	2.1137e-07	1.7343e-08
	5.4912	-2.9837	-1.2918
II	1.9127e-04	-6.4210e-05	5.1285e-05
	5.4912	-1.0223e-04	-1.7904e-04

Нептун

L	2.8263e-04		
G	2.8262e-04		
Θ	2.8249e-04		
l	-1.7345		
g	-1.5153		
θ	2.3001		
H	-8.5709e-07		
I	2.8263e-04	9.0444e-09	1.3485e-07
	-0.9497	-0.7848	-2.3001
II	2.8263e-04	9.5162e-05	-3.4604e-04
	-0.9497	-9.5042e-05	-3.8724e-04

Плутон

L	4.6544e-08		
G	4.5090e-08		
Θ	4.3088e-08		
l	0.2676		
g	1.9859		
θ	1.9252		
H	-9.3807e-11		
I	4.6544e-08	1.4540e-09	2.0026e-09
	4.1783	-3.9107	-1.9252
II	4.6544e-08	-3.8747e-05	-2.1959e-05
	4.1783	3.7507e-05	-5.9354e-05

2.3. Код

```
function findElements(a, e, i, L, w, Omega, miu, t)

    i = i * pi/180;

    n = sqrt(1 / a^3);

    to = ((w - L) / n) * pi/180;

    gamma = 1 + miu;

    L = miu * sqrt(gamma*a)

    G = L * sqrt(1 - e^2)

    capTheta = G*cos(i)

    l = n * (t*2*pi - to)

    g = (w - Omega) * pi/180

    theta = Omega * pi/180

    H = -miu*gamma / (2*a)

    FirstPoincare11 = L

    FirstPoincare12 = L - G

    FirstPoincare13 = G - capTheta

    FirstPoincare21 = l + g + theta

    FirstPoincare22 = -g - theta

    FirstPoincare23 = -theta

    SecondPoincare11 = FirstPoincare11

    SecondPoincare12 = sqrt(2 * (L - G)) * cos(g + theta)

    SecondPoincare13 = sqrt(2 * (G - capTheta)) * cos(theta)

    SecondPoincare21 = FirstPoincare21

    SecondPoincare22 = -sqrt(2 * (L - G)) * sin(g + theta)

    SecondPoincare23 = -sqrt(2 * (G - capTheta)) * sin(theta)

end

dataFromNasa=[0.387  0.205 7.004  252.250 77.457  48.330  1/6023600;
```

```

0.723  0.006 3.394 181.979 131.602 76.679 1/408523;

1      0.016 0      100.464 102.937 0      1/328900.5;

1.523  0.093 1.849 -4.553 -23.943 49.559 1/3098708;

5.202  0.048 1.304 34.396 14.728 100.473 1/1047.34;

9.536  0.053 2.485 49.954 92.598 113.662 1/3497.8;

19.189 0.047 0.772 313.238 170.954 74.016 1/22902.9;

30.069 0.008 1.770 -55.120 44.964 131.784 1/19402;

39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303 1/135000000];

```

```

time=daysact('5-sep-1999', '1-jan-2000')/365.25

```

```

planets = {'Mercury', 'Venus', 'Earth', 'Mars', 'Jupiter', 'Saturn', 'Uranus', 'Neptune',
'Pluto'};

```

```

for i=1:length(planets)

```

```

    fprintf('%d. %s:\n',i,char(planets(i)))

```

```

    findElements(dataFromNasa(i, 1), dataFromNasa(i, 2), dataFromNasa(i, 3),

```

```

        dataFromNasa(i, 4), dataFromNasa(i, 5), dataFromNasa(i, 6),

```

```

        dataFromNasa(i, 7), time)

```

```

end

```