

Содержание

1. Векторные пространства	2
1.1 Определение	2
1.2 Фибоначчиевы последовательности	3
2. Базис и размерность	4
2.1 Линейная комбинация	4
2.2 Базис	5
2.3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций	7
2.4 Алгебраические числа	8
3. Системы линейных уравнений	10
4. Матрицы	10
4.1 Определение	10
4.2 Свойства матриц	11
5. Матрица перехода	13
6. Линейные отображения	13
6.1 Определение	13
6.2 Ядро и образ линейного отображения	14
6.3 Формула Грассмана	15
6.4 Множество линейных отображений	16
6.5 Матрица перехода	18
6.6 Формула замены матрицы отображения при замене базиса	18
6.7 Ранг матрицы	19
6.8 Решение СЛУ	19
6.9 Вид общего решения	20
6.10 Транспонирование	20
7. Элементарные преобразования	23

1. Векторные пространства

1.1 Определение

Определение 1. K — поле; **векторное пространство над K** — это тройка $(V, +, \cdot)$, где V — множество, $+: V \times V \rightarrow V$; $\cdot: K \times V \rightarrow V$. Элементы V — векторы, элементы K — скаляры. При этом выполняются *аксиомы*:

1-4) $(V, +)$ — абелева группа.

$$5) \forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V: (k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$$

$$6) \forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V: k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$$

$$7) \forall k \in K, \forall v_1, v_2 \in V: (k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$$

$$8) \forall v \in V, 1 \in K: 1 \cdot v = v$$

Замечание. Очевидные свойства:

$$1. 0 \cdot v = \bar{0}$$

$$2. (-1) \cdot v = -v$$

3. $a + b = b + a$ следует из 7-ми аксиом.

Доказательство. 2) $1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \bar{0} \Rightarrow (-1) \cdot v$ — противоположный к v .

1, 3 TODO proof

□

Пример 1.

1. векторы на плоскости — класс эквивалентности направленных отрезков \rightarrow в.п.

$$2. \text{ арифметическое векторное пространство } K^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} \mid k_i \in K \right\}$$

Для него выполняются операции:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ \dots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

$${}^n K = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_i \in K\}$$

K^n и ${}^n K$ изоморфны: \exists биекция $f : K^n \rightarrow {}^n K$, является гомоморфизмом.

Определение 2. u и v — векторные пространства над K ; $f : u \rightarrow v$ называется **гомоморфизмом (линейным отображением)**, если:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
2. $f(k \cdot b) = k \cdot f(b)$

Пример 2.

1. $K[x]$ — векторное пространство над K
2. $K[x^n] = \{f \mid \deg f \leq n\}$ — в.п. над K
3. Пусть R — кольцо, $K_{\text{поле}} \subset R$ — подкольцо; если $r_1 + r_2$ и kr определено $\forall r \in R$, то R — векторное пространство над K
4. \mathbb{C} — векторное пространство над \mathbb{R}
5. \mathbb{C} — векторное пространство над \mathbb{Q}
6. M — множество; $V = \{f : M \rightarrow K\}$ — векторное пространство над K (так как можно определить $(f_1 + f_2)(m) := f_1(m) + f_2(m)$ и $(k \cdot f)(m) := k \cdot f(m)$)

Пример 3.

$$M = K = \mathbb{R};$$

1. $\text{Func}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $\text{Func}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — непрерывные функции, в.п. над \mathbb{R}

1.2 Фибоначчиевы последовательности

Определение 3. *Последовательность фибоначчиева*, если для нее выполняется, что $\forall n \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. При этом $a_n + b_n$ и ka_n тоже фибоначчиевы \Rightarrow фибоначчиевы последовательности векторного пространства.

Пример 4.

1. M — множество; $V = 2^M$; $K = \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$ — в.п.
 $X + Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$
 \emptyset — нейтральный, $0 \cdot x := \emptyset$, $1 \cdot x := x$
Замкнуто: $(1 + 1) \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = x + x = \emptyset$. Важно, что $1 + 1 = 0$ в K , т.е. $\text{char } K = 2$

Пример 5.

Как ввести координаты:

$$1. K[x]_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\} = (a_0, \dots, a_n)$$

$$K[x]_n \cong K^{n+1}$$

$$2. \mathbb{C} \text{ над } \mathbb{R} := a + bi \rightsquigarrow (a, b)$$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

3. Пример плохих координат:

$$z \rightsquigarrow (r, \varphi) \text{ — не согласуется с операциями}$$

$$4. \text{Func}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightsquigarrow (a_0, \dots)$$

$$5. \text{фиб. пос-ти } (a_1, a_2, \dots) \rightsquigarrow (a_1, a_2)$$

$$\text{фиб. пос-ти} \cong \mathbb{R}^2$$

$$6. N \subset M = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$N \rightsquigarrow (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = \begin{cases} 1, a_i \in N \\ 0, a_i \notin N \end{cases}$$

2. Базис и размерность

2.1 Линейная комбинация

Определение 4. $v_1, \dots, v_n \in V$ — векторное пространство над K ; $a_1, \dots, a_n \in K$. $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ — **линейная комбинация** v_1, \dots, v_n с коэффициентами a_1, \dots, a_n .

Определение 5. $v_1, \dots, v_n \in V$ — множество линейных комбинаций, замкнутых относительно $+$, $\cdot \Rightarrow$ является векторным пространством. Оно называется **линейной оболочкой** v_1, \dots, v_n — $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

$$\sum a_i v_i + \sum b_i v_i = \sum (a_i + b_i) v_i; \quad k \cdot \sum a_i v_i = \sum (ka_i) \cdot v_i$$

Замечание. Все тоже для бесконечных систем $\{v_i\}_{i \in I}$. **Линейная комбинация** — это $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ или $\sum a_i v_i$, где почти все $a_i = 0$ (все, кроме конечного числа)

Пример 6. v, u — неколлинеарные векторы.

$$\langle v \rangle = \{kv\} \text{ — прямая, содержащая } v.$$

$$\langle v, u \rangle \text{ — плоскость, натянутая на } u \text{ и } v.$$

Определение 6. $\{v_i\}$ — **линейно независимое множество векторов**, если выполнено одно из двух равносильных условий:

1. $\forall i \ v_i \neq \sum_{j \neq i} a_j v_j$
2. $\sum_j a_j v_j = 0 \Rightarrow \forall i \ a_i = 0$, то есть никакая линейная комбинация v_i не равна 0.

Пример 7. $\{\bar{0}\}$ — линейно независимое

1. $\bar{0} = \bar{0} = \sum_{\emptyset}$
2. $1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$

Доказательство.

- $2 \Rightarrow 1$

Пусть $v_1 = \sum_{i \neq 1} a_i v_i \Rightarrow (-1) \cdot v_1 + \sum_{i \neq 1} a_i v_i = 0$, но не все коэффициенты = 0.

- $1 \Rightarrow 2$

$\sum a_i v_i = 0$ и i (НУО $i = 1$): $a_i \neq 0$; тогда $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} - \dots$

□

Замечание. Здесь важно, что K — поле $(\frac{a_i}{a_1})$.

Определение 7. R — ассоциативное кольцо; тогда тройка $(V, +, \cdot)$ т.ч. выполнены 8 аксиом, называется **R -модулем**.

Определение 8. V — векторное пространство над K ; $\{v_i\}$ — **порожденная система**, если $\{v_i\} = V$ (т.е. $\forall v \in V$ — линейная комбинация).

Замечание. Пусть $M \subset V = \{v_i\}$ — система векторов.

1. M — линейно независимое, $N \subset M \Rightarrow N$ — линейно независимое.
2. M — порожденная система, $N \supset M \Rightarrow N$ — порожденная система.

2.2 Базис

Определение 9. V — векторное пространство, $\{v_i\} \in V$; $\{v_i\}_{i \in I}$ — **базис**, если выполнены 4 равносильных условия:

1. $\{v_i\}$ — лин. нез. и пор.
2. $\{v_i\}$ — макс. лин. нез., т.е. $\forall v \in V \ \{v_i\} \cup \{v\}$ — лин. зав.
3. $\{v_i\}$ — мин. пор., т.е. $\forall i \in I \ \{v_j\}_{j \in I} \setminus \{v_i\}$ — не пор.
4. $\forall v \in V$ представляется единственным образом как линейная комбинация $\{v_i\}$

Доказательство. Докажем равносильность:

○ $1 \Rightarrow 2$

$\{v_i\} \cup \{v\} \quad \{v_i\} = V \Rightarrow v$ — л.к. $\{v_i\} \Rightarrow \{v_i\} \cup \{v\}$ лин.зав.

○ $2 \Rightarrow 1$

$v \in V \quad \{v_i\} \cup \{v\}$ — л.з. по условию: $\exists a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a : a_{i_1}v_{i_1} + \dots + a_{i_k}v_{i_k} + av = 0$ и не все коэффициенты $= 0$.

I. Пусть $a \neq 0 \Rightarrow v = -\sum \frac{a_{i_l}}{a} v_{i_l}$, т.е. $v \in \langle \{v_i\} \rangle$

II. $\sum a_{i_l} v_{i_l} = 0$ не все $a_{i_l} = 0$, против. с ЛНЗ $\{v_i\}$

○ $1 \Rightarrow 4$

$v \in V \quad \{v_i\} \Rightarrow v = \sum a_i v_i$, осталось доказать единственность.

Пусть $v = \sum a_i v_i = \sum b_i v_i \Rightarrow 0 = \sum (a_i - b_i) v_i \xRightarrow{\text{ЛНЗ}} a_i = b_i \quad \forall i$

○ $4 \Rightarrow 1$

$\{v_i\}$ пор. по усл., осталось доказать ЛНЗ

$v_1 = \sum_{i \neq 1} a_i v_i = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots$ разные разложения ???

TODO

□

Утверждение 1. $f : V \rightarrow {}^n K \quad (v \rightarrow (a_1, \dots, a_n))$ — изоморфизм

Доказательство. Корректность и биективность — по определению базиса.

Гомоморфность очев.

□

Обозначение 1. Базис — строка, координаты — столбец.

Пример 8. $K[x]_2 \quad 1, x, x^2 \mid x^2 + 1, x^2 - x, x^2 + x + 3 \rightarrow$ базисы.

$2x^2 + 3 \rightsquigarrow (2, 0, 3) \mid (0, 1, 1) \rightarrow$ представление в разных базисах.

Определение 10. V называют **конечномерным**, если в $V \exists$ конечная порождающая система ($V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$).

Лемма 1. Из любой конечной порождающей системы можно выбрать базис.

Доказательство. Пусть v_1, \dots, v_n — порожденная система; если она ЛНЗ, то вот и базис.

Иначе $\exists v_i$ (НУО v_n): $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i$

Но тогда \forall линейная комбинация v_1, \dots, v_n это $\sum_{i=1}^n b_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i + b_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i \right) \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$

Значит, v_1, \dots, v_n — порождающая система.

Будем продолжать этот процесс, пока система не станет линейно независимой (что когда-нибудь случится, так как система была конечной).

□

Следствие 1. В любом конечном пространстве есть базис.

Замечание. Лемма Цорна

На самом деле в любом пространстве есть базис.

Пример 9. $K[x] = \{1, x, x^2, \dots\}$ — базис

$K[[x]]$ — базис существует, но конструктивно его не предъявить

\mathbb{R} над \mathbb{Q} — базис есть, но...

Определение 11. V — векторное пространство (конечномерное); **размерность** V ($\dim V$) — это количество векторов в его базисе.

Теорема 1. В двух любых базисах V поровну элементов.

Доказательство. Это следует из леммы. □

2.3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций

Лемма 2. о линейной зависимости линейных комбинаций (ЛЗЛК)

Пусть $u_1, \dots, u_n \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $m > n$. Тогда u_1, \dots, u_n линейно зависима.

Доказательство. Лирическое отступление:

В теореме: пусть v_1, \dots, v_m — базис min размера

\exists базис u_1, \dots, u_{n+1}

Все u_i — л.к. $\{v_i\}$, т.к. $\{v_i\}$ — базис $\Rightarrow \{u_i\}$ — л.з. ???

Само доказательство:

НУО: $n = m + 1$ (u_1, \dots, u_{m+1} — л.з. $\Rightarrow u_1, \dots, u_n$ — л.з.)

Индукция по m :

1. База: $m = 1$; $u_1 = a_1 v_1$, $u_2 = a_2 v_1$

Два случая:

1) a_1 или $a_2 = 0 \Rightarrow \{u_1, u_2\}$ — л.з.

2) $a_1, a_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \cdot u_1$, т.е. опять л.з.

2. Переход: $m \rightarrow m + 1$

$u_1, \dots, u_{m+2} \in \langle v_1, \dots, v_{m+1} \rangle$

$u_i = \sum_{j=1}^{m+1} a_{ij} v_j$ — л.к.. Далее возможны случаи:

1) Пусть $a_{i_{m+1}} = 0 \forall i \Rightarrow u_1, \dots, u_{m+2} \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow^{н.п.} u_1, \dots, u_{m+1}$ — л.з.

2) Пусть $i : a_{i_{m+1}} \neq 0$, НУО $a_{1_{m+1}} \neq 0$

$$u_1 = a_{1_1} v_1 + \dots + a_{1_{m+1}} v_{m+1}$$

$$u_2 = a_{2_1} v_1 + \dots + a_{2_{m+1}} v_{m+1}$$

...

$$u_{m+2} = a_{m+1_1} v_1 + \dots + a_{m+1_{m+1}} v_{m+1}$$

$\forall k = 2 \dots m+2$ из k -ого равенства вычтем 1-ое, умноженное на $\frac{a_{k_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}$.

$$\tilde{u}_i = u_i - \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}} \cdot u_1 = \left(a_{i_1} - \frac{a_{1_1} \cdot a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}\right) \cdot v_1 + \dots + \left(a_{i_m} - \frac{a_{1_m} \cdot a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}\right) \cdot v_m - \left(a_{i_{m+1}} - a_{1_{m+1}}\right) \cdot v_{m+1}$$

Получили $\tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{m+1} \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Тогда по и.п. $\tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{m+2}$ — л.з.

То есть $\exists b_2, \dots, b_{m+2}$ не все равные 0:

$$0 = \sum_{i=2}^{m+2} b_i \tilde{u}_i = \sum b_i (u_i - \dots u_1) = \left(-\sum \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}\right) \cdot u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_{m+2} u_{m+2} - \text{нетривиальная линейная комбинация.}$$

□

Лемма 3. u — конечномерное векторное пространство; $u_1, \dots, u_k \in U$ — ЛНЗ система $\Rightarrow \exists u_{k+1}, \dots, u_n$ — базис U

(любую ЛНЗ систему можно дополнить до базиса)

Доказательство. u_1, \dots, u_k — ЛНЗ $\Rightarrow \begin{cases} \text{макс. ЛНЗ} \Rightarrow \text{это базис;} \\ \exists u_{l+1} : u_1, \dots, u_{l+1} \text{ — ЛНЗ} \end{cases}$

Будем добавлять к u_1, \dots, u_k по вектору. l не может стать больше n^* \Rightarrow в какой-то момент получим базис.

$*u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ — ЛЗ по ЛЗНК (рассмотрим v_1, \dots, v_n — базис U ; $u_1, \dots, u_{n+1} \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow u_1, \dots, u_{n+1}$ — ЛЗ)

□

Следствие 2. U, V — конечномерное векторное пространство над K и $U \leq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$ и если $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

Доказательство. u_1, \dots, u_k — базис U ; по лемме можем дополнить до u_1, \dots, u_n — базис $V \Rightarrow k \leq n$. Если $k = n$, то дополняем 0 векторов \Rightarrow базис $U =$ базис $V \Rightarrow$ оба пространства — линейные комбинации одних и тех же векторов

□

2.4 Алгебраические числа

Определение 12. \mathbb{Q} ; α — алгебраическое число, если $\exists f \in \mathbb{Q}[x] : f(\alpha) = 0$

Пример 10. $\sqrt[7]{3}$ — алг., т.к. $\exists f(x) = x^7 - 3$

π, e — не алг. (не знаем)

Теорема 2. α — алгебраическое, $P \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow P(\alpha)$ — алгебраическое

Доказательство. Рассмотрим V_α — в.п. над $\mathbb{Q} : \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{Q}[x]\}$ — замкнуто относительно $+$ и \cdot на рациональные числа (т.е. это в.п.)

Утверждение 2. *Это пространство конечномерное.*

Доказательство. $\exists a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q} : \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0$

$$\alpha^n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i \in \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1} \rangle \Rightarrow \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^n \rangle = \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1} \rangle$$

$$\alpha^{n+1} = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^{i+1} \in \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^n \rangle \in \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1} \rangle \Rightarrow \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^{n+1} \rangle = \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1} \rangle$$

Продолжим так делать и получаем, что $\forall N \alpha^N \in \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1} \rangle$, т.е. $\dim V_\alpha \leq n$ \square

$\exists P \in \mathbb{Z}[x] : 1, P(\alpha), \dots, (P(\alpha))^n \in V_\alpha$, их $n+1$, $\dim V_\alpha \Rightarrow 1, \dots, (P(\alpha))^n$ — ЛЗ, т.е. $\exists q_0, \dots, q_n : q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot P(\alpha) + \dots + q_n \cdot (P(\alpha))^n = 0$, т.е. $P(\alpha)$ — корень многочлена $q_n x^n + \dots + q_1 x + q_0$, т.е. $P(\alpha)$ — алг. \square

Замечание. Аналогично доказывается, что α, β — алгебраические $\Rightarrow \alpha + \beta, \alpha\beta$ — алгебраические.

Теорема 3. V — конечномерное векторное пространство над K ; тогда $\exists! n : V \cong K^n$

Доказательство. Единственность:

ясно; $n = \dim K^n = \dim V$

Существование:

Пусть u_1, u_2, \dots, u_n — базис V .

Рассмотрим отображение $i : K^n \rightarrow V : \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

Это биекция (т.к. u_1, \dots, u_n , а координаты единственны) и гомоморфизм (по очеву). \square

Обозначение 2. $u \in V, \mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = [u]_{\{u_i\}}$ — столбец координат в базисе $\{u_i\}$.

$[u]$ зависит от $\{u_i\}$.

Пример 11. Фибоначчиева последовательность:

$$(1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots) = v_1$$

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots) = v_2$$

$$(a, b, a+b, 2b+a, \dots) = av_1 + bv_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{Классическое: } (1, 1, 2, 3, \dots) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 12. Пример хорошего базиса:

$$(1, \varphi, \varphi^2, \dots) = u_1$$

$$(1, -\frac{1}{\varphi}, -(\frac{1}{\varphi})^2, \dots) = u_2$$

Найти явную формулу для фибоначчиевой последовательности \Leftrightarrow найти координаты в базисе $\{u_1, u_2\}$:

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) = ku_1 + lu_2 \Rightarrow c_n = k\varphi^n + l \cdot (-\frac{1}{\varphi})^n$$

3. Системы линейных уравнений

Определение 13. Система линейных уравнений S :
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Обозначение 3. $A_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \dots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \in K^n, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Определение 14. Что значит, что S имеет решение? $\rightarrow B \in \langle A_1, A_2, \dots, A_m \rangle$.

Определение 15. Однородная СЛУ: $B = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$; всегда есть тривиальное решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$$

Определение 16. У S есть нетривиальное решение $\Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_m$ — ЛЗ.

Частный случай: $m > n : A_1, \dots, A_{n+1} \in K^n \Rightarrow$ ЛЗ \Rightarrow ОСЛУ имеет нетривиальное решение.

4. Матрицы

4.1 Определение

Определение 17. A — абелева группа; I, J — множества (конечные); тогда **матрица над** A — это отображение $I \times J \rightarrow A, (i, j) \rightarrow a_{i,j} \in A$

Обозначение 4. Часто $I = \{1, 2, \dots, n\}, J = \{1, 2, \dots, m\}$. В этом случае множество матриц обозначается как $M_{n,m}(A)$.

Определение 18. Определим *операцию сложения*: $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i=1..n, j=1..m}$. Тогда $M_{n,m}(A)$ – абелева группа.

Определение 19. $A = R$ – кольцо; определим *операцию умножения*:

$$1. M_{1,m}(R) \times M_{m,1}(R) \rightarrow R$$

$$(a_1, \dots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$$

$$2. M_{k,m}(R) \times M_{m,1}(R) \rightarrow M_{k,1}(R)$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ - \\ r_2 \\ \dots \\ r_k \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} r_1 c \\ r_2 c \\ \dots \\ r_k c \end{pmatrix} \in M_{k,1}(R) = R^k$$

r_i – строка, C – столбец

$$3. M_{k,m}(R) \times M_{m,l}(R) \rightarrow M_{k,l}(R)$$

$$A \cdot (c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_l) = (Ac_1) \cdot (Ac_2) \cdot \dots \cdot (Ac_l)$$

Тогда:

$$A \in M_{k,m}, A = (a_{i,j})_{i=1..k, j=1..m}$$

$$B \in M_{m,l}, B = (b_{i,j})_{i=1..m, j=1..l}$$

$$AB = C \in M_{k,l}, C = (c_{i,j})_{i=1..k, j=1..l}$$

$$c_{i,j} = \sum_{s=1}^m a_{i,s} b_{s,j}$$

Утверждение 3. *Перефразировка СЛУ через матрицы:*

$$S \rightsquigarrow A \cdot X = B$$

$$(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

4.2 Свойства матриц

Утверждение 4. *Свойства матриц:*

$$1) A \in M_{m,k}(R); B, C \in M_{k,l}(R)$$

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

Аналогично (с точностью до перемены индексов матриц) доказывается, что $(B+C) \cdot A =$

$$BA + CA$$

2) $A \in M_{k,l}(R)$; $B \in M_{l,n}(R)$; $C \in M_{m,n}(R)$

$(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$ в частности, все эти произведения существуют.

Доказательство. 2. $((AB) \cdot C)_{i,j} = \sum_{s=1}^m (AB)_{i,s} \cdot C_{s,j} = \sum_{s=1}^m (\sum_{t=1}^l A_{i,t} B_{t,s}) \cdot C_{s,j} = \sum_{t=1 \dots l}^m A_{i,t} B_{t,s} C_{s,j}$
 $(A \cdot (BC))_{i,j} = \dots =$ тоже самое (честно) □

Утверждение 5. $M_{n,n}(R)$ – ассоциативное кольцо с 1, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Умножение определено: $M_{n,n} \times M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$.

Абелева по сложению (знаем). Ассоциативность и дистрибутивность доказали.

Рассмотрим $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (0 везде кроме главной диагонали, на которой стоят 1).

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} : E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,\dots) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \\ (0,1,\dots) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \dots \\ (0,\dots,0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow EA = A \forall A \in M_{m,n}(R), \text{ т.е. } E \text{ нейтрален}$$

по умножению. □

Замечание. Умножение матриц не коммутативно.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Замечание. $R = K$ – поле

$M_n(K)$ – векторное пространство над K (т.к. $k \cdot (a_{i,j}) = (ka_{i,j})$)

$(M_{n,n}(K) = M_n(K))$

Самый простой базис: $E_{i,j} : (E_{i,j})_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = i, l = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$a_{i,j} = \sum_{i,j=1 \dots n} a_{i,j} E_{i,j}$$

Замечание. Умножение на $M_n(K)$ достаточно было бы задать на базисе:

$$E_{i,j} \cdot E_{k,l} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ E_{i,l}, & j = k \end{cases}$$

5. Матрица перехода

Определение 20. V — n -мерное пространство; v_1, \dots, v_n — старый базис, v'_1, \dots, v'_n — новый базис

$$a_1, \dots, a_n \in K : (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Рассмотрим матрицу $C : ([v_1]_{\{v'_1\}} \mid [v_2]_{\{v'_2\}} \mid \dots \mid [v_n]_{\{v'_n\}}) \in M_n(K)$. C называется **матрицей перехода** от v_i к v'_i .

Утверждение 6. $x \in V, \mathcal{X} = [x]_{\{v_i\}}$; тогда $C \cdot \mathcal{X}$ — это $[x]_{\{v'_i\}}$.

Доказательство. Рассмотрим $(u'_1, \dots, u'_n)(C\mathcal{X}) = (\text{по ассоциативности}) = (u'_1, \dots, u'_n)(C\mathcal{X}) = (u_1, \dots, u_n) \cdot \mathcal{X} = x \Rightarrow C\mathcal{X}$ — координаты x в (u'_1, \dots, u'_n) . \square

Следствие 3. C — матрица перехода от (u_1, \dots, u_n) к (u'_1, \dots, u'_n) .

C' — матрица перехода от (u'_1, \dots, u'_n) к (u''_1, \dots, u''_n) .

$C'C$ — матрица перехода от (u_1, \dots, u_n) к (u''_1, \dots, u''_n) .

Доказательство. \forall столбца $\mathcal{X} \rightsquigarrow x \in V$:

$C\mathcal{X}$ — координаты x в (u'_1, \dots, u'_n)

$C'(C\mathcal{X})$ — координаты x в (u''_1, \dots, u''_n)

$(C'C)\mathcal{X} \Rightarrow C'C$ — часть матрицы перехода от (u_1, \dots, u_n) к (u''_1, \dots, u''_n)

Частный случай: $u''_1 = \dots = u''_n = u_1 = \dots = u_n$

$C'C = E$ и $CC' = E$, т.е. $C' = C^{-1}$; в частности матрица перехода обратима. \square

6. Линейные отображения

6.1 Определение

Определение 21. U и V — векторное пространство над K ; $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ **линейно** (гомоморфизм), если $\mathcal{A}(u + \alpha v) = \mathcal{A}(u) + \alpha \mathcal{A}(v) \forall u, v \in U, \forall \alpha \in K$.

Пример 13. $\mathcal{A}(x) = x$ — линейно, $\mathcal{A}(x) = 0$ — линейно.

Пример 14. $\mathcal{A} : K^n \rightarrow K, \dim_K K = 1, (\langle 1 \rangle = K)$

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n; \quad a_1, \dots, a_n — \text{фиксированы.}$$

Более общо: $A \in M_{m,n} : A(x) = \mathcal{A} \cdot x$ — линейное отображение $\mathcal{A} : K^n \rightarrow K$.

Замечание. На самом деле, все линейные отображения таковы (т.е. представляют из себя до-множение на матрицу).

Теорема 4. u_1, \dots, u_n – базис U ; $v_1, \dots, v_n \in V$; тогда $\exists!$ линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ т.ч. $\mathcal{A}(u_i) = v_i$.

Доказательство. Единственность:

Пусть $\mathcal{A}(u_i) = v_i = \mathcal{B}(u_i)$.

Пусть $\forall u \in U : u = \sum a_i u_i \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\sum a_i u_i) = \sum a_i \mathcal{A}(u_i) = \sum a_i \mathcal{B}(u_i) = \mathcal{B}(\sum a_i u_i) = \mathcal{B}(u)$

Существование:

Для каждого $u = \sum a_i u_i$ положим $\mathcal{A}(u) = \sum a_i v_i$:

\mathcal{A} – линейно: $\mathcal{A}(\alpha \cdot (\sum a_i u_i) + \sum b_i u_i) = \mathcal{A}(\sum (\alpha \cdot a_i + b_i) u_i) = \alpha \cdot \sum a_i v_i + \sum b_i v_i = \alpha \cdot \mathcal{A}(\sum a_i u_i) + \mathcal{A}(\sum b_i u_i)$ \square

6.2 Ядро и образ линейного отображения

Определение 22. $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение.

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\}$ – **ядро** \mathcal{A} .

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v \in V \mid \exists u \in U : \mathcal{A}(u) = v\}$ – **образ** \mathcal{A} .

Лемма 4. $\text{Ker } \mathcal{A}$ – подпространство в U ; $\text{Im } \mathcal{A}$ – подпространство в V .

Доказательство. Проверка замкнутости:

1) $u, v \in \text{Ker } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(u) = 0 \ \& \ \mathcal{A}(v) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(u + kv) = \mathcal{A}(u) + k \cdot \mathcal{A}(v) = 0 \Rightarrow u + v, ku \in \text{Ker } \mathcal{A}$

2) $u = \mathcal{A}(x), v = \mathcal{A}(y)$

$u + v = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x + y) \Rightarrow x + y \in \text{Im } \mathcal{A}$

$ku = k \cdot \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(kx) \Rightarrow kx \in \text{Im } \mathcal{A}$ \square

Пример 15. $V = U = \mathbb{R}^2$

○ $\mathcal{A}(x) = 0$

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}, \text{Im } \mathcal{A} = V$

○ $\mathcal{A}(x) = 0$

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{V\}, \text{Im } \mathcal{A} = 0$

○ u – вектор

$u \rightsquigarrow u_0$ – проекция на ОХ

$\text{Ker } \mathcal{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{Im } \mathcal{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Теорема 5. $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение; тогда $\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim U$.

Доказательство. $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = m$; u_1, \dots, u_m – базис U ; $\dim U = m$

Применим \mathcal{A} : $\mathcal{A}(u_1) = \dots = \mathcal{A}(u_m) = 0$

Сначала докажем следующее утверждение:

Утверждение 7. $\mathcal{A}(u_{m+1}), \dots, \mathcal{A}(u_n)$ – базис $\text{Im } \mathcal{A}$.

Доказательство. 1) Докажем, что $\mathcal{A}(u_{m+1}), \dots, \mathcal{A}(u_n)$ – ЛНЗ

Пусть $\alpha_{m+1}\mathcal{A}(u_{m+1}) + \dots + \alpha_n\mathcal{A}(u_n) = 0$

$\mathcal{A}(\sum \alpha_{m+i}u_{m+i}) = 0 \Rightarrow \sum \alpha_{m+i}u_{m+i} \in \text{Ker } \mathcal{A} \Rightarrow \sum \alpha_{m+i}u_{m+i} = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$ (т.к. u_1, \dots, u_m – базис $\text{Ker } \mathcal{A}$) ??

$\sum \alpha_{m+i}u_{m+i} - \sum \alpha_i u_i = 0$; т.к. $\{u_i\}$ – ЛЗ, то все $\alpha_i = 0$. □

TODO □

6.3 Формула Грассмана

Применение: Формула Грассмана. В множествах есть базовые операции \cup, \cap . В пространствах – $\cap, +$.

Определение 23. $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ – *сумма подпространств* (сумма Минковского).

Теорема 6. V – векторное пространство над K ; V_1, V_2 – подпространства ($V_1, V_2 \leq V$).

1. $V_1 \cap V_2$ – подпространство V (очев).

2. $V_1 + V_2$ – тоже подпространство.

Доказательство. $v_1 \in V_1 + V_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2$ & $v'_1 \in V_1 + V_2 \Rightarrow v' = v'_1 + v'_2 \Rightarrow v + v' = (v_1 + v'_1) + (v_2 + v'_2) \in V$ ($v_1 + v'_1 \in V_1, v_2 + v'_2 \in V_2$ т.к. $V_1, V_2 \leq V$)

$k \cdot v = k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2 \in V, kv_1 \in V_1, kv_2 \in V_2$ □

Замечание. v_1, \dots, v_n – базис V_1, v'_1, \dots, v'_m – базис $V_2 \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_m\}$ – порождающая система $V_1 + V_2$.

Замечание. Многие формулы про $+$ и \cap аналог формул про \cap и \cup . Но $(V_1 + V_2) \cap V_3 \neq (V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3)$.

Определение 24. V_1, V_2 – векторное пространство над K , *внешняя/прямая сумма* V_1 и V_2 – это $V_1 \oplus V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ с операциями:

1. $(v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) = (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2)$

2. $k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2)$

Утверждение 8. $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Доказательство. Это векторное пространство (очев.).

v_1, \dots, v_k – базис V_1 , v'_1, \dots, v'_m – базис V_2 ; тогда $\{(v_i, 0)\} \cup \{(0, v'_i)\}$ – базис $V_1 + V_2$.

И вправду: $\forall (v, v') = (\sum a_i v_i, \sum b_i v'_i) = \sum a_i (v_i, 0) + \sum b_i (0, v'_i)$ – доказали порождимость.

Доказательство линейной независимости: $\sum a_i (v_i, 0) + \sum b_i (0, v'_i) = 0 = (\sum a_i v_i, \sum b_i v'_i) = (0, 0) \Rightarrow \sum a_i v_i = 0, \sum b_i v'_i = 0 \Rightarrow$ т.к. v_i и v'_i – базисы: все $a_i = 0$ и все $b_i = 0 \Rightarrow$ доказали ЛНЗ-ть. \square

Теорема 7. Формула Грассмана

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Доказательство. Зададим $A : V_1 \oplus V_2 \rightarrow V$, $(v_1, v_2) \rightarrow v_1 + v_2$

$\text{Im } A = V_1 + V_2$ (по определению $V_1 + V_2$)

$$\text{Ker } A = \{(v, -v) \mid v \in V_1, -v \in V_2\} = \{(v, -v) \mid v \in V_1 \cap V_2\} \cong V_1 \cap V_2$$

Тогда по теореме о ядре и образе: $\dim(V_1 + V_2) = \dim(\text{Im } A) = \dim(V_1 \oplus V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ \square

6.4 Множество линейных отображений

Определение 25. U, V – векторные пространства над K ; определим $\text{Lin } (U, V)$ – *множество отображений* $A : U \rightarrow V$.

Это векторное пространство:

$$(A + B)(u) = A(u) + B(u)$$

$$(kA)(u) = k \cdot A(u)$$

Определение 26. Пусть $A \in \text{Lin } (U, V)$, u_1, \dots, u_m – базис U , v_1, \dots, v_n – базис V .

$$A(u_1) = a_{11}v_1 + \dots a_{n1}v_n$$

$$A(u_2) = a_{12}v_1 + \dots a_{n2}v_n$$

...

$$A(u_m) = a_{1m}v_1 + \dots a_{nm}v_n$$

Тогда $A = (a_{ij})_{i=1..n, j=1..m}$ – матрица отображения A в базисе $\{v_i\}\{u_i\}$.

Обозначение 5. $A = [A]_{\{u_i\}\{v_i\}}$.

Лемма 5. $A \in \text{Lin } (U, V)$, $\{u_i\}, \{v_i\}$ – базисы.

$$A = [A]_{\{u_i\}\{v_i\}}; A : U \rightarrow V$$

$$u \in U : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – координаты } u \text{ в } \{u_i\}.$$

Аналогично $v \in V : \mathbf{v}$ – координаты v в $\{v_i\}$.

Тогда $\mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$.

Доказательство. $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\sum x_i u_i) = \sum_{i=1}^m x_i (\sum_{j=1}^n a_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m x_i a_{ji}) v_j$ — координаты \mathbf{v} в базисе $\{v_i\}$ — это
$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i a_{1i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m x_i a_{mi} \end{pmatrix} = A \cdot \mathbf{u}.$$
 □

Следствие 4. $U_{\{u_i\}} \xrightarrow{\mathcal{B}} V_{\{v_i\}} \xrightarrow{\mathcal{A}} W_{\{w_i\}} \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Lin}$

$$B = [\mathcal{B}]_{\{u_i\}\{v_i\}}, A = [\mathcal{A}]_{\{v_i\}\{w_i\}}$$

Тогда:

$$1. A \circ B \in \text{Lin}(U, W) \text{ (очев.)}$$

$$2. [A \circ B]_{\{u_i\}\{w_i\}} = A \cdot B$$

Доказательство. $u \in U, v \in \mathcal{B}(u), w \in \mathcal{A}(v)$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ — координаты u, v, w

$w = (A \circ B)(u)$ и $\mathbf{w} = A \cdot \mathbf{u} = A \cdot B \cdot \mathbf{v} \Rightarrow A \cdot B$ — матрица отображения $A \circ B$. □

Утверждение 9. $AX = BX \forall x \Rightarrow A = B$.

Резюме:

1. U, V — векторное пространство K $\dim U = m, \dim V = n$. Тогда \exists изоморфизм:

$$f : M_{n,m}(K) \cong \text{Lin}(U, V) \text{ как векторные пространства.}$$

2. $n = m$ $M_n(K) \cong \text{Lin}(U, U)$ как кольца.

Замечание. $\text{Lin}(U, U)$ — кольцо с операциями $+$ и \circ :

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{C} + \mathcal{B} \circ \mathcal{C} \text{ — по определению } +.$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{A}(\mathcal{C}(x)) + \mathcal{B}(\mathcal{C}(x)) \text{ — по определению } +.$$

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C} \text{ — по определению } + \text{ и линейности } \mathcal{A}.$$

Доказательство.

1. Фиксируем базисы $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$ и рассмотрим $f : \text{Lin}(U, V) \rightarrow M_{n,m}(K), \mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$

Очев, что это биекция (по теореме о задании линейного отображения на базисе). Очев, что операции сохраняются:

$$[\mathcal{A} + \mathcal{B}] = [\mathcal{A}] + [\mathcal{B}]; [k\mathcal{A}] = k[\mathcal{A}]$$

2. Фиксируем базис $\{u_i\}$ и сопоставляем $\mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}]_{\{u_i\}, \{u_i\}}$. □

6.5 Матрица перехода

Напоминание: u_1, \dots, u_n — старый базис, u'_1, \dots, u'_n — новый базис и $u_i = \sum a_{ji} u'_j$; тогда $A = (a_{ij})$ — матрица перехода.

Замечание. $u_1 = u_1, \dots, u_n = u_n \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = [id]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$

6.6 Формула замены матрицы отображения при замене базиса

$U \xrightarrow{A} V, \{u_i\}, \{v_i\}$ — старые базисы, $\{u'_i\}, \{v'_i\}$ — новые базисы.

Знаем: $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$

Хотим: $\tilde{A} = [\mathcal{A}]_{\{u'_i\}, \{v'_i\}}$

$$U_{\{u'_i\}} \xrightarrow{id} U_{\{u_i\}} \xrightarrow{A} V_{\{v_i\}} \xrightarrow{id} V_{\{v'_i\}}$$

По следствию: $[\mathcal{A}]_{\{u_i\}, \{v_i\}} = [id]_{\{v_i\}, \{v'_i\}} \cdot [\mathcal{A}]_{\{u_i\}, \{v_i\}} \cdot [id]_{\{u_i\}, \{u'_i\}} = D \cdot A \cdot C^{-1}$, где D — матрица перехода от v_i к v'_i , а C^{-1} — матрица перехода от u_i к u'_i .

Частный случай: $U = V, \{u_i\} = \{v_i\}$, тогда $\tilde{A} = CAC^{-1}$.

Вопрос: $\mathcal{A} \in \text{Lin}(U, V)$, $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$. Насколько простой можно сделать A за счет замены базиса?

Ответ: в теореме о Im и Ker доказали: \exists базис $u : u_1, \dots, u_m, \dots, u_n$; u_1, \dots, u_n — базис $\text{Ker } \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(u_{m+1}), \dots, \mathcal{A}(u_n)$ — базис $\text{Im } \mathcal{A}$.

Обозначим $\mathcal{A}(u_{m+1}) = v_1, \dots, \mathcal{A}(u_n) = v_{n-m}$; v_1, \dots, v_{n-m} — базис \mathcal{A} . Дополним до базиса V : $v_1, \dots, v_{n-m}, \dots, v_l$. Тогда:

$$\mathcal{A}(u_1) = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_l$$

...

$$\mathcal{A}(u_m) = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_l$$

$$\mathcal{A}(u_{m+1}) = 1 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_l$$

...

$$\mathcal{A}(u_n) = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_{n-m} + \dots + 0 \cdot v_l$$

Получим: $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & | & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица, где первые m столбцов — нулевые, а верхний

левый блок размера $(n - m) \times (n - m)$ представляет из себя нулевую матрицу с единицами на диагонали. Поменяем местами блоки (u_1, \dots, u_m) и (u_{m+1}, \dots, u_n) . Получили теорему:

Теорема 8. $\forall \mathcal{A} \in \text{Lin}(U, V) \exists \text{ базисы } \{u_i\}, \{v_i\} : [A]_{\{u_i\}\{v_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

6.7 Ранг матрицы

Определение 27. Переформулировка: $\forall A \in M_{l,k}(K) \exists$ такие обратные матрицы D и C , что $DAC = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$.

Число s равно $\dim \text{Im } \mathcal{A}$. Оно называется **рангом отображения** или **рангом матрицы**.

Определение 28. Матричное определение: $A \in M_{l,n}(K)$; столбцы $K^l : A = (C_1 \mid \dots \mid C_n) \ C_i \in K^l$.

$$\text{rank } A = \text{rk } A = \text{rg } A = \dim \langle C_1, \dots, C_n \rangle$$

Замечание. Это то же самое, что и ранг отображения, т.к. C_i — столбец координат для $\mathcal{A}(u_i)$, где u_i — i -ый базовый вектор.

Пример 16. $\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{rk} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{rk} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{rk} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$

Определение 29. $U = V$, $\dim U = n$, $\text{rk } \mathcal{A} = k$; $n - k$ — **дефект** \mathcal{A} ; $n - k = n = \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$.

6.8 Решение СЛУ

Что такое $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } A$?

$\{x \in K^n \mid AX = 0\}$ — множество решений однородных СЛУ с матрицей $A \in M_{m,n}$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad K^n \rightarrow K^m, \ n \text{ неизвестных, } m \text{ уравнений.}$$

$\dim \text{Ker } A$ — размерность пространства решений; $\dim \text{Ker } A = n - \dim \text{Im } A \geq n - m$.

Эти рассуждения подвели нас к формулированию теоремы:

Теорема 9. *ОСЛУ с n неизвестными и m уравнениями ($m < n$) имеет пространство решений размерности хотя бы $n - m$; в частности, если K бесконечно, то бесконечно много решений; если же $|K| = q \Rightarrow q^{n-m}$ решений.*

Теперь рассмотрим частный случай:

Теорема 10. Пусть $n = m$. Тогда: $\dim \text{Ker } A = n - \dim \text{Im } A$, $\dim \text{Ker } A = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Im } A = n$, т.е. система $AX = B$ имеет решение $\forall B \Leftrightarrow AX = 0$ имеет только тривиальное решение. На языке линейных отображений: $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ линейное, $\dim U, \dim V < \infty$; тогда \mathcal{A} сюръективно $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ инъективно.

Доказательство. Сюръективность $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Im } \mathcal{A} = V$

Докажем следующее утверждение:

Утверждение 10. \mathcal{A} инъективно $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$

Доказательство.

- \Rightarrow : $\mathcal{A}(x) = 0$ & $\mathcal{A}(0) = 0$; \mathcal{A} инъективно $\Rightarrow x = 0$
- \Leftarrow : Пусть $\text{Ker } \mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{Ker } \mathcal{A} \Rightarrow x - y = 0$, т.е. $x = y$

□

Теперь вернемся к доказательству теоремы: инъективность $\Leftrightarrow \dim \text{Ker } \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow \mathcal{A} = V \Leftrightarrow$ сюръективность. □

6.9 Вид общего решения

Рассмотрим СЛУ $AX = B$ или $\mathcal{A}(x) = b$. Пусть знаем частное решение X_0 (т.е. $AX_0 = B$). Тогда:

$$AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

Значит, знаем общий вид решения: $X = X_0 + Y, Y \in \text{Ker } \mathcal{A}$ (или $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 + \text{Ker } \mathcal{A}$)

6.10 Транспонирование

Определение 30. Пусть $A \in M_{m,n}(K) = (a_{i,j})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$; тогда **транспонирование** $A \rightarrow A^T \in M_{n,m}(K)$; $A^T = (a'_{i,j})_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}}$, где $(a'_{i,j}) = a_{j,i}$ (отражение относительно главной диагонали).

Утверждение 11. Свойства:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = k \cdot A^T$ — это линейное отображение.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Если $\exists A^{-1}$, то $\exists (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Доказательство.

1. Пусть $A \cdot B = C = (c_{i,j})$, $(A \cdot B)^T = (c'_{i,j})$

$$c'_{i,j} = c_{j,i} = \sum_s a_{j,s} \cdot b_{s,i} = \sum_s a'_{s,j} \cdot b_{i,s} = \sum_s b'_{i,s} \cdot a'_{s,j} = (B^T \cdot A^T)_{i,j}$$

$$2. \begin{cases} A \cdot B = E \\ B \cdot A = E \end{cases}, B = A^{-1} \Rightarrow B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = E^T = E$$

□

Утверждение 12. Свойства ранга:

1. $rk A = rk A^T$ (если строки и столбцы поменять ролями, то поменяем ролями, то rk не изменится)
2. $rk A \cdot B \leq \min(rk A, rk B)$
3. $rk (A + B) \leq rk A + rk B$
4. $A \in M_n(K)$, $rk A = n \Leftrightarrow A$ — обратима.

Доказательство.

2. $rk A = \dim \text{Im}(X \rightarrow AX)$

$$U \xrightarrow{B} V \xrightarrow{A} W$$

$$a) rk AB = \dim \text{Im}\{(AB)X \mid X \in U\} \leq \dim\{AY \mid Y \in V\} = rk A \quad (\{ABX\} \subset \{AY\})$$

$$b) rk AB = \dim \text{Im}(A \circ B) = \dim(A \circ B(U)) = \dim(A(\underbrace{B(U)}_{=\text{Im } B})) = \dim(\text{Im } A \mid_{\text{Im } B}) \leq \dim \text{Im } B$$

$$1. \text{ Знаем, что } \exists C, D : CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$D^T \cdot A^T \cdot C^T = (CAD)^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{ (размеры строки и столбца из нулей поменялись местами)}$$

$$rk A = r, rk A^T = r, \text{ т.к.:}$$

$$1) rk (D^T \cdot A^T \cdot C^T) \leq rk A^T \text{ по свойству 2.}$$

$$2) rk A^T = rk ((D^T)^{-1}(D^T \cdot A^T \cdot C^T)(C^T)^{-1}) \leq rk (D^T \cdot A^T \cdot C^T) \text{ по свойству 2.}$$

3. упр.

4. \Rightarrow : A обратима $\Rightarrow n = \text{rk } E = \text{rk } (A \cdot A^{-1}) \leq \text{rk } A \Rightarrow \text{rk } A = n$ (т.к. $\text{rk } A \leq n$)

\Leftarrow : $\text{rk } A = n$, $\exists C, D : CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$, где $r = \text{rk } A \Rightarrow CAD = E \Rightarrow CA = D^{-1} \Rightarrow DCA = E$

Аналогично $ADC = E \Rightarrow DC = A^{-1}$.

□

Следствие 5. Ранг по строкам равен рангу по столбцам (по первому свойству).

Утверждение 13. $A \in M_n(K)$; следующие условия равносильны:

1. A — обратима.
2. $\text{Ker } A = \{0\}$
3. $\text{Im } A = K^n$
4. Строки A линейно независимы.
5. Столбцы A линейно независимы.

Обозначение 6. $(M_n(K))^* = GL(n, K)$ — полная линейная группа.

Утверждение 14. Все есть матрица.

Пример 17. Матричная реализация: \mathbb{R}, \mathbb{C}

Утверждение 15. Подмножество $M_2(\mathbb{R})$, состоящее из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ является подкольцом и полем.

Оно изоморфно \mathbb{C} : $P(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Объяснение: \mathbb{C} — векторное пространство над \mathbb{R} размерности 2 $\langle 1, i \rangle$

$a + bi \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $x_1 + x_2 i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Умножение на $z \in \mathbb{C}$ — линейное отображение: $(x_1 + x_2)i = -x_2 + x_1 i$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

7. Элементарные преобразования

Определение 31. $\mathcal{A} : K^n \rightarrow K^n$ — линейное отображение ($\mathcal{A}(X) = AX$); \mathcal{A} — **элементарное преобразование**, если $\exists i_0 : \mathcal{A}(X)_i = x_i \ \forall i \neq i_0, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и \mathcal{A} — обратимо (меняется только одна координата).

Пример 18. $\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{2}x_2 + x_3 - x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ — элементарно.

Утверждение 16. *Виды элементарных преобразований:*

$$1. \text{ Трансвекция: } t_{i,j}(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i + a \cdot x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$t_{i,j}(a)$ — обратимо.

$$t_{i,j}(a)^{-1} = t_{i,j}(-a)$$

Матрица: $E + a \cdot e_{i,j}$

2. **Дилатация:** $m_i(a), K \setminus \{0, 1\}$

$$m_i(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ a \cdot x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$m_i(a)$ — обратимо.

$$m_i(a)^{-1} = m_i\left(\frac{1}{a}\right)$$

Матрица: $E + (a - 1) \cdot e_{i,i}$

$$3. \text{ Часто рассматривается третий тип — транспозиция: } s_{i,j} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Не нужна: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$s_{1,2} = m_2(-1) \cdot t_{1,2}(1) \cdot t_{2,1}(-1) \cdot t_{1,2}(1)$ (то есть транспозиция — это композиция трансвекций и дилатаций)

Утверждение 17. A — матрица:

1. $t_{i,j}(a) \cdot A$ получается из A прибавлением к i -ой строке j -ой строки, умноженной на a .
2. $m_i(a) \cdot A$ получается из A умножением i -ой строки на a .
3. $A \cdot t_{i,j}(a)$ получается из A прибавлением к j -ому столбцу i -ого столбца, умноженного на a .
4. $A \cdot m_i(a)$ получается из A умножением i -ого столбца на a .

Теорема 11.

- 1) $A \in M_{n,m} \Rightarrow \exists e_1, \dots, e_k$ — трансвекции/дилатации.

$$e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ (треугольная матрица)}$$

- 2) $m = n$ и A обратима, то $\exists e_1, \dots, e_k : e_1 \dots e_k A = E$

- 2') $m = n$ и A обратима, то A — произведение трансвекций/дилатаций.

- 3) A — произведение $\Rightarrow \exists e_1, \dots, e_k$ и d_1, \dots, d_l — трансвекции/дилатации $e_1 \dots e_k A d_1 \dots d_l = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$.

Доказательство. 1) Индукция по n

Переход $n \rightarrow n+1$: рассмотрим первый столбец $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

I. Все $a_{i1} = 0$; $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\tilde{A}}_n$

Применим к \tilde{A} индукционное предположение: \exists элементарные матрицы (порядка m)

$$e_1, \dots, e_k \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * \\ \dots & a_{22} & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{22} & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

II. $a_{11} \neq 0$: применим $t_{i,1}(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ для каждого $i = 2..m$.

$$e_2 \dots e_m A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & \\ \dots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array} \right)$$

Применим индукционное предположение к \tilde{A} : $\exists e_{m+1}, \dots, \tilde{e}_s$:

$$e_{m+1}, \dots, \tilde{e}_s \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\text{Заменим } \tilde{e}_k \text{ на } e_k : \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \dots & \tilde{e}_k \\ 0 & \end{array} \right)$$

$$\text{Тогда } e_{m+1} \dots e_s A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & a_{11} \\ \dots & 0 & a_{22} \\ 0 & \end{array} \right)$$

III. A — квадратная обратимая матрица. По первому пункту: \exists элементарные преобразования:

$$a_1 \dots a_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \\ \dots & & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Утверждение: $a_{ii} \neq 0$

Доказательство утверждения: пусть $\exists a_{ii} = 0 \Rightarrow$

$$\text{первые } i \text{ столбцов матрицы} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1_{(i-1 \text{ позиция})} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \text{они ЛЗ (но у обратных}$$

матриц столбцы линейно независимы)

$a_1 \dots a_k A$ обратима, так как ранг не меняется при домножении на обратимые матрицы.

Теперь применим $\prod_{i=1}^{n-1} t_{in}(-\frac{a_{in}}{a_{nn}})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & a_{1n} \\ & & a_{2n} \\ & & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & * & 0 \\ & & 0 \\ & & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Потом применим $\prod_{i=1}^{n-2} t_{i,n-1}(-\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n-1}})$ и так далее...

В итоге получим:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Применим $\prod m_i(\frac{1}{a_{ii}})$; получим
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2') $\exists e_1, \dots, e_k; e_1 \dots e_k A = E$

$A = e_k^{-1} \dots e_1^{-1}$ (отметим, что $e_1 \dots e_k = A^{-1}$)

e_i — элементарные преобразования

3) A — произвольная матрица, \exists обратимые матрицы $C, D: CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

$C = e_1 \dots e_k$ по 2' & $D = d_1 \dots d_l \Rightarrow e_1 \dots e_k A d_1 \dots d_l = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

□

Следствие 6. Из теоремы следует алгоритм нахождения обратной матрицы:

$e_k \dots e_1 A = E \Rightarrow e_k \dots e_1 = A^{-1}$

Создаем блочную матрицу: $(A | E)$; применяем одновременно элементарные преобразования к A и к E (приводя A к E)

$e_1 \dots e_k (A | E) = (e_1 \dots e_k A | e_1 \dots e_k E) \Rightarrow (A | E) \xrightarrow{\text{элементарные преобразования}} (E | A^{-1})$