Содержание

1. Векторные пространства

1.1 Определение

Определение 1. K — поле; ***векторное пространство над*** K — это тройка $(V, +, \cdot)$, где V — множество, $+ : V \times V \to V$; $\cdot : K \times V \to V$. Элементы V — векторы, элементы K — скаляры. При этом выполняются *аксиомы*:

1-4) $(V,+)$ — абелева группа.

5) $\forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V: \ (k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$

6) $\forall k_1,k_2 \in K, \forall v \in V: \ k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$

7) $\forall k \in K, \forall v_1,v_2 \in V: \ (k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$

8) $\forall v \in V, 1 \in K: \ 1 \cdot v = v$

Замечание. Очевидные свойства:

1. $0 \cdot v = \overline{0}$
2. $(-1) \cdot v = -v$
3. $a + b = b + a$ следует из 7-ми аксиом.

Доказательство. 2) $1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \overline{0} \Rightarrow (-1) \cdot v$ — противоположный к v.

1, 3 TODO proof □

Пример 1.

1. векторы на плоскости — класс эквивалентности направленных отрезков $\to$ в.п.
2. арифметическое векторное пространство $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix} \middle| \ k_i \in K \right\}$

   Для него выполняются операции:

   $$\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ ... \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

   $$k \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ... \\ ka_n \end{pmatrix}$$

${}^nK = \{(k_1,...,k_n) \| \ k_i \in K\}$

K^n и ${}^nK$ изоморфны: $\exists$ биекция $f : K^n \to {}^nK$, является гомоморфизмом.

Определение 2. u и v — векторные пространства над K; $f : u \to v$ называется ***гомоморфизмом (линейным отображением)***, если:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
2. $f(k \cdot b) = k \cdot f(b)$

Пример 2.

1. $K[x]$ — векторное пространство над K
2. $K[x^n] = \{f \mid deg\ f \leq n\}$ — в.п. над K
3. Пусть R — кольцо, $K_{\text{поле}} \subset R$ — подкольцо; если $r_1 + r_2$ и kr определено $\forall r \in R$, то R — векторное пространство над K
4. $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$
5. $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$
6. M — множествово; $V = \{f : M \to K\}$ — векторное пространство над K (так как можно определить $(f_1 + f_2)(m) := f_1(m) + f_2(m)$ и $(k \cdot f)(m) := k \cdot f(m)$)

Пример 3.

$M = k = \mathbb{R}$;

1. Func($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$)
2. Func$_c$($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) — непрерывные функции, в.п. над $\mathbb{R}$

1.2 Фибоначчиевы последовательности

Определение 3. ***Последовательность фибоначчиева***, если для нее выполняется, что $\forall n\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. При этом $a_n + b_n$ и ka_n тоже фибоначчиевы $\Rightarrow$ фибоначчиевы последовательности векторного пространства.

Пример 4.

1. M — множество; $V = 2^M$; $K = \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$ — в.п.
   $X + Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$
   $\varnothing$ — нейтральный, $0 \cdot x := 0$, $1 \cdot x := x$
   Замкнуто: $(1 + 1) \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = x + x = \varnothing$. Важно, что $1 + 1 = 0$ в K, т.е. $char\ K = 2$

Пример 5.

Как ввести координаты:

1. $K[x]_n = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n\} = (a_0,...,a_n)$

   $K[x]_n \cong K^{n+1}$

2. $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R} : z = a + bi \rightsquigarrow (a,b)$

   $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

3. Пример плохих координат:
   $z \rightsquigarrow (r,\varphi)$ — не согласуется с операциями

4. $\mathrm{Func}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \rightsquigarrow (a_0,...,)$

5. фиб. пос-ти $(a_1,a_2,...,) \rightsquigarrow (a_1,a_2)$

   фиб. пос-ти $\cong \mathbb{R}^2$

6. $N \subset M = \{a_1,...,a_n\}$

   $N \rightsquigarrow (\varepsilon_1,..., \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \begin{cases} 1, a_i \in N \\ 0, a_i \notin N \end{cases}$

2. Базис и размерность

2.1 Линейная комбинация

Определение 4. $v_1,...,v_n \in V$ — векторное пространство над K; $a_1,...,a_n \in K$. $a_1 v_1 + ... + a_n v_n$ – ***линейная комбинация*** $v_1,..,v_n$ с коэффициентами $a_1,...,a_n$.

Определение 5. $v_1,...,v_n \in V$ — множество линейных комбинаций, замкнутых относительно $+,\cdot \Rightarrow$ является векторным пространством. Оно называется ***линейной оболочкой*** $v_1,...,v_n$ – $\langle v_1,...,v_n\rangle$.
$\sum a_i v_i + \sum b_i v_i = \sum (a_i + b_i) v_i$; $k \cdot \sum a_i v_i = \sum (k a_i) \cdot v_i$

Замечание. Все тоже для бесконечных систем $\{v_i\}_{i \in I}$. ***Линейная комбинация*** — это $a_1 v_1 + ... + a_n v_n$ или $\sum a_i v_i$, где почти все $a_i = 0$ (все, кроме конечного числа)

Пример 6. v, u — неколлинеарные векторы.
$\langle v\rangle = \{kv\}$ — прямая, содержащая v.
$\langle v,u\rangle$ — плоскость, натянутая на u и v.

Определение 6. $\{v_i\}$ – ***линейно независимое множество векторов***, если выполнено одно из двух равносильных условий:

1. $\forall i\ v_i \neq \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$

2. $\sum\limits_{j} a_j v_j = 0 \Rightarrow \forall i\ a_i = 0$, то есть никакая линейная комбинация v_i не равна 0.

Пример 7. $\{\overline{0}\}$ — линейно независимое

1. $\overline{0} = \overline{0} = \sum\limits_{\varnothing}$

2. $1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$

Доказательство.

- $2 \Rightarrow 1$
  Пусть $v_1 = \sum\limits_{i \neq 1} a_i v_i \Rightarrow (-1) \cdot v_1 + \sum\limits_{i \neq 1} a_i v_i = 0$, но не все коэффициенты $= 0$.

- $1 \Rightarrow 2$
  $\sum a_i v_i = 0$ и i (НУО $i = 1$): $a_i \neq 0$; тогда $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} - ...$

$\square$

Замечание. Здесь важно, что K — поле $(\frac{a_i}{a_1})$.

Определение 7. R — ассоциативное кольцо; тогда тройка $(V, +, \cdot)$ т.ч. выполнены 8 аксиом, называется ***R-модулем***.

Определение 8. V — векторное пространство над K; $\{v_i\}$ — ***порожденная система***, если $\{v_i\} = V$ (т.е. $\forall v \in V$ — линейная комбинация).

Замечание. Пусть $M \subset V = \{v_i\}$ — система векторов.

1. M — линейно независимое, $N \subset M \Rightarrow N$ — линейно независимое.

2. M — порожденная система, $N \supset M \Rightarrow N$ — порожденная система.

2.2 Базис

Определение 9. V — векторное пространство, $\{v_i\} \in V$; $\{v_i\}_{i \in I}$ — ***базис***, если выполнены 4 равносильных условия:

1. $\{v_i\}$ — лин. нез. и пор.

2. $\{v_i\}$ — макс. лин. нез., т.е. $\forall v \in V\ \{v_i\} \cup \{v\}$ — лин. зав.

3. $\{v_i\}$ — мин. пор., т.е. $\forall i \in I\ \{v_j\}_{j \in I} \setminus \{v_i\}$ — не пор.

4. $\forall v \in V$ представляется единственным образом как линейная комбинация $\{v_i\}$

Доказательство. Докажем равносильность:

- $1 \Rightarrow 2$

  $\{v_i\} \cup \{v\} \quad \{v_i\} = V \Rightarrow v$ — л.к. $\{v_i\} \Rightarrow \{v_i\} \cup \{v\}$ лин.зав.

- $2 \Rightarrow 1$

  $v \in V$ $\{v_i\} \cup \{v\}$ — л.з. по условию: $\exists a_{i_1},...,a_{i_k},a : \; a_{i_1}v_{i_1} + ... + a_{i_k}v_{i_k} + av = 0$ и не все коэффициенты $= 0$.

  I. Пусть $a \neq 0 \Rightarrow v = -\sum \frac{a_{i_l}}{a} v_{i_l}$, т.е. $v \in \langle\{v_i\}\rangle$

  II. $\sum a_{i_l}v_{i_l} = 0$ не все $a_{i_l} = 0$, против. с ЛНЗ $\{v_i\}$

- $1 \Rightarrow 4$

  $v \in V \quad \{v_i\} \Rightarrow v = \sum a_i v_i$, осталось доказать единственность.

  Пусть $v = \sum a_i v_i = \sum b_i v_i \Rightarrow 0 = \sum (a_i - b_i) v_i \Rightarrow^{\text{ЛНЗ}} a_1 = b_i \; \forall i$

- $4 \Rightarrow 1$

  $\{v_i\}$ пор. по усл., осталось доказать ЛНЗ

  $v_1 = \sum\limits_{I \neq 1} a_i v_i = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ...$ разные разложения ???

TODO □

Утверждение 1. $f : V \to {}^nK$ $(v \to (a_1,...,a_n))$ — *изоморфизм*

Доказательство. Корректность и биективность – по определению базиса.
Гомоморфность очев. □

Обозначение 1. Базис — строка, координаты — столбец.

Пример 8. $K[x]_2 \quad 1,\, x,\, x^2 \mid x^2+1,\, x^2-x,\, x^2+x+3 \to$ базисы.
$2x^2 + 3 \rightsquigarrow (2{,}0{,}3) \mid (0{,}1{,}1) \to$ представление в разных базисах.

Определение 10. V называют ***конечномерным***, если в V $\exists$ конечная порождающая система $(V = \langle v_1,...,v_n \rangle)$.

Лемма 1. Из любой конечной порождающей системы можно выбрать базис.

Доказательство. Пусть $v_1,...,v_n$ — порожденная система; если она ЛНЗ, то вот и базис.
Иначе $\exists v_i$ (НУО v_n): $v_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i v_i$
Но тогда $\forall$ линейная комбинация $v_1,...,v_n$ это $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i v_i + b_n(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i v_i) \in \langle v_1,...,v_{n-1} \rangle$
Значит, $v_1,...,v_n$ — порождающая система.
Будем продолжать этот процесс, пока система не станет линейно независимой (что когда-нибудь случится, так как система была конечной). □

Следствие 1. *В любом конечном пространстве есть базис.*

Замечание. **Лемма Цорна**

На самом деле в любом пространстве есть базис.

Пример 9. $K[x] \quad \{1, x, x^2, ...\}$ — базис

$K[[x]] -$ базис существует, но конструктивно его не предъявить

$\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ – базис есть, но...

Определение 11. V — векторное пространство (конечномерное); ***размерность*** V $(dim\ V)$ — это количество векторов в его базисе.

Теорема 1. *В двух любых базисах V поровну элементов.*

Доказательство. Это следует из леммы. □

2.3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций

Лемма 2. о линейной зависимости линейных комбинаций (ЛЗЛК)

Пусть $u_1,...,u_n \in v_1,...,v_m,\ m > n$. Тогда $u_1,...,u_m$ линейно зависима.

Доказательство. Лирическое отсутупление:

В теореме: пусть $v_1,...,v_m$ — базис min размера

$\exists$ базис $u_1,...,u_{n+1}$

Все u_i — л.к. $\{v_i\}$, т.к. $\{v_i\}$ — базис $\Rightarrow \{u_i\}$ — л.з. ???

Само доказательство:

НУО: $n = m + 1 \quad (u_1,...,u_{m+1}$ — л.з. $\Rightarrow u_1,...,u_n$ — л.з.)

Индукция по m:

1. База: $m = 1; \quad u_1 = a_1 v_1,\ u_2 = a_2 v_1$

   Два случая:

   1) a_1 или $a_2 = 0 \Rightarrow \{u_1,u_2\}$ — л.з.

   2) $a_1,a_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \cdot u_1$, т.е. опять л.з.

2. Переход: $m \to m + 1$

   $u_1,...,u_{m+2} \quad v_1,...,v_{m+1}$

   $u_i = \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_{i_j} v_j$ — л.к.. Далее возможны случаи:

   1) Пусть $a_{i_{m+1}} = 0\ \forall i \Rightarrow u_1,...,u_{m+2} \in \langle v_1,...,v_m \rangle \Rightarrow^{\text{и.п.}} u_1,...,u_{m+1}$ — л.з.

2) Пусть $i : a_{i_{m+1}} \neq 0$, НУО $a_{1_{m+1}} \neq 0$
$u_1 = a_{1_1}v_1 + ... + a_{1_{m+1}}v_{m+1}$
$u_2 = a_{2_1}v_1 + ... + a_{2_{m+1}}v_{m+1}$
...
$u_{m+2} = a_{m+1_1}v_1 + ... + a_{m+1_{m+1}}v_{m+1}$
$\forall k = 2...m+2$ из k-ого равенства вычтем 1-ое, умноженное на $\frac{a_{k_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}$.
$\tilde{u}_i = u_i - \frac{a_{k_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}} \cdot u_1 = (a_{i_1} - \frac{a_{1_1} \cdot a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}) \cdot v_1 + ... + (a_{i_m} - \frac{a_{1_m} \cdot a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}) \cdot v_m - (a_{i_{m+1}} - a_{i_{m+1}}) \cdot v_{m+1}$
Получили $\tilde{u}_2,...,\tilde{u}_{m+1} \in \langle v_1, ..., v_m \rangle$. Тогда по и.п. $\tilde{u}_2,...,\tilde{u}_{m+2}$ — л.з.

То есть $\exists b_2,...,b_{m+2}$ не все равные 0:
$0 = \sum\limits_{i=2}^{m+2} b_i\tilde{u}_i = \sum b_i(u_i - ...u_1) = (-\sum \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}) \cdot u_1 + b_2u_2 + ... + b_{m+2}u_{m+2}$ — нетривиальная линейная комбинация.

□

Лемма 3. u — конечномерное векторное пространство; $u_1,...,u_k \in U$ — ЛНЗ система $\Rightarrow \exists u_{k+1},...,u_n-$ базис U
(любую ЛНЗ систему можно дополнить до базиса)

Доказательство. $u_1,...,u_k$ – ЛНЗ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{макс. ЛНЗ} \Rightarrow \text{это базис;} \\ \exists u_{l+1} : u_1,...,u_{l+1} \ \text{– ЛНЗ} \end{array}\right.$
Будем добавлять к $u_1,...,u_k$ по вектору. l не может стать больше $n^* \Rightarrow$ в какой-то момент получим базис.
$^*u_1,...,u_n,u_{n+1}$ – ЛЗ по ЛЗНК (рассмотрим $v_1,...,v_n$ – базис U; $u_1,...,u_{n+1} \in \langle v_1,...v_n \rangle \Rightarrow u_1,...,u_{n+1}$ – ЛЗ) □

Следствие 2. *U,V – конечномерное векторное пространство над K и $U \leq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$ и если $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$*

Доказательство. $u_1,...,u_k$– базис U; по лемме можем дополнить до $u_1,...,u_n$ – базис $V \Rightarrow k \leq n$
Если $k = n$, то дополняем 0 векторов $\Rightarrow$ базис U = базис $V \Rightarrow$ оба пространства — линейные комбинации одних и тех же векторов □

2.4 Алгебраические числа

Определение 12. $\mathbb{Q}$; α – алгебраическое число, если $\exists f \in \mathbb{Q}[x] : f(\alpha) = 0$

Пример 10. $\sqrt[7]{3}$– алг., т.к. $\exists f(x) = x^7 - 3$
π, e–не алг. (не знаем)

Теорема 2. *α – алгебраическое, $P \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow P(\alpha)$–алгебраическое*

Доказательство. Рассмотрим $V_\alpha -$ в.п. над $\mathbb{Q} : \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{Q}[x]\} -$ замкнуто относительно $+$ и $\cdot$ на рациональные числа (т.е. это в.п.)

Утверждение 2. *Это пространство конечномерное.*

Доказательство. $\exists a_0,...,a_{n-1} \in \mathbb{Q} : \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$
$\alpha^n = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i \in \langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle \Rightarrow \langle 1,\alpha,...,\alpha^n\rangle = \langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle$
$\alpha^{n+1} = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^{i+1} \in \langle 1,\alpha,...,\alpha^n\rangle \in \langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle \Rightarrow \langle 1,\alpha,...,\alpha^{n+1}\rangle = \langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle$
Продолжим так делать и получаем, что $\forall N\ \alpha^N \in \langle 1,\alpha,..., \alpha^{n-1}\rangle$, т.е. $\dim V_\alpha \leq n$ □

$\exists P \in \mathbb{Z}[x] : 1,P(\alpha),...,(P(\alpha))^n \in V_\alpha$, их $n+1, \dim V_\alpha \Rightarrow 1,...,(P(\alpha))^n -$ ЛЗ, т.е. $\exists q_0,...,q_n : q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot P(\alpha) + ... + q_n \cdot (P(\alpha))^n = 0$, т.е. $P(\alpha) -$ корень многочлена $q_nx^n + ... + q_1x + q_0$, т.е. $P(\alpha)$ — алг. □

Замечание. Аналогично доказывается, что α, $\beta -$ алгебраические $\Rightarrow \alpha+\beta$, $\alpha\beta -$ алгебраические.

Теорема 3. *V — конечномерное векторное пространство над K; тогда $\exists! n : V \cong K^n$*

Доказательство. Единственность:
ясно; $n = \dim K^n = \dim V$
Существование:
Пусть $u_1,u_2,...,u_n$ — базис V.
Рассмотрим отображение $i : K^n \to V$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \to a_1u_1 + ... + a_nu_n$
Это биекция (т.к. $u_1,...,u_n$, а координаты единственны) и гомоморфизм (по очеву). □

Обозначение 2. $u \in V, \mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = [u]_{\{u_i\}}$ — столбец координат в базисе $\{u_i\}$.
$[u]$ зависит от $\{u_i\}$.

Пример 11. Фибоначчиева последовательность:
$(1,0,1,1,2,3,...) = v_1$
$(0,1,1,2,3,5,...) = v_2$
$(a,b,a+b,2b+a,...) = av_1 + bv_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Классическое: $(1,1,2,3,...) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Пример 12. Пример хорошего базиса:

$(1,\varphi,\varphi^2,...) = u_1$

$(1,-\frac{1}{\varphi},-(\frac{1}{\varphi})^2,...) = u_2$

Найти явную формулу для фибоначчиевой последовательности $\Leftrightarrow$ найти координаты в базисе $\{u_1,u_2\}$:

$(c_1,c_2,...,c_n) = ku_1 + lu_2 \Rightarrow c_n]k\varphi^n + l \cdot (-\frac{1}{\varphi})^n$

3. Системы линейных уравнений

Определение 13. ***Система линейных уравнений*** S : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,m}x_m = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$

Обозначение 3. $A_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ ... \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \in K^n$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

Определение 14. Что значит, что S ***имеет решение*** ? $\rightarrow$ $B \in \langle A_1,A_2,..,A_m \rangle$.

Определение 15. ***Однородная СЛУ***: $B = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$; всегда есть тривиальное решение $x_1 = x_2 = .. = x_m = 0$

Определение 16. У S есть нетривиальное решение $\Leftrightarrow$ $A_1,A_2,..,A_m-$ ЛЗ.

Частный случай: $m > n : A_1,...,A_{n+1} \in K^n \Rightarrow$ ЛЗ $\Rightarrow$ ОСЛУ имеет нетривальное решение.

4. Матрицы

4.1 Определение

Определение 17. A – абелева группа; I,J – множества (конечные); тогда ***матрица над*** A – это отображение $I \times J \rightarrow A, (i,j) \rightarrow a_{i,j} \in A$

Обозначение 4. Часто $I = \{1,2,...,n\}$, $J = \{1,2,...,m\}$. В этом случае множество матриц обозначается как $M_{n,m}(A)$.

Определение 18. Определим ***операцию сложения***: $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i=1..n,\ j=1...m}$. Тогда $M_{n,m}(A)$ – абелева группа.

Определение 19. $A = R-$ кольцо; определим ***операцию умножения***:

1. $M_{1,m}(R) \times M_{m,1}(R) \to R$
   $$(a_1,...,a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m$$

2. $M_{k,m}(R) \times M_{m,1}(R) \to M_{k,1}(R)$
   $$\begin{pmatrix} r_1 \\ - \\ r_2 \\ ... \\ r_k \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} r_1c \\ r_2c \\ ... \\ r_kc \end{pmatrix} \in M_{k,1}(R) = R^k$$
   r_i – строка, C – столбец

3. $M_{k,m}(R) \times M_{m,l}(R) \to M_{k,l}(R)$
   $A \cdot (c_1 \mid c_2 \mid ... \mid c_l) = (Ac_1) \cdot (Ac_2) \cdot ... \cdot (Ac_l)$

Тогда:

$A \in M_{k,m},\ A = (a_{i,j})_{i=1...k,\ j=1...m}$

$B \in M_{m,l},\ B = (b_{i,j})_{i=1...m,\ j=1...l}$

$AB = C \in M_{k,l},\ C = (c_{i,j})_{i=1...k,\ j=1...l}$

$c_{i,j} = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{i,s}b_{s,j}$

Утверждение 3. ***Перефразировка СЛУ через матрицы:***

$S \rightsquigarrow A \cdot X = B$

$$(A_1 \mid A_2 \mid ... \mid A_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

4.2 Свойства матриц

Утверждение 4. ***Свойства матриц:***

1) $A \in M_{m,k}(R);\ B,C \in M_{k,l}(R)$
   $A \cdot (B + C) = AB + BC$
   Аналогично (с точностью до перемены индексов матриц) доказывается, что $(B+C)\cdot A = BA + CA$

2) $A \in M_{k,l}(R);\ B \in M_{l,n}(R);\ C \in M_{m,n}(R)$

$(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$ *в частности, все эти произведения существуют.*

Доказательство. 2. $((AB) \cdot C)_{i,j} = \sum\limits_{s=1}^{m} (AB)_{i,s} \cdot C_{s,j} = \sum\limits_{s=1}^{m} (\sum\limits_{t=1}^{l} A_{i,t} B_{t,s}) \cdot C_{s,j} = \sum\limits_{t=1...l}^{m} A_{i,t} B_{t,s} C_{s,t}$

$(A \cdot (BC))_{i,j} = ... =$ тоже самое (честно) □

Утверждение 5. $M_{n,n}(R)$ *− ассоциативное кольцо с 1,* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Умножение определено: $M_{n,n} \times M_{n,n} \to M_{n,n}$.

Абелева по сложению (знаем). Ассоциативность и дистрибутивность доказали.

Рассмотрим $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. \\ 0 & 1 & .. \\ .. & .. & 1 \end{pmatrix}$ (0 везде кроме главной диагонали, на которой стоят 1).

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} : E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,...) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\ (0,1,...) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\ ... \\ (0,...,0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow EA = A \ \forall A \in M_{m,n}(R), \text{ т.е. } E \text{ нейтрален}$$

по умножению. □

Замечание. Умножение матриц не коммунитативно.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Замечание. $R = K$ − поле

$M_n(K)$ − векторное пространство над K (т.к. $k \cdot (a_{i,j}) = (ka_{i,j})$)

$(M_{n,n}(K) = M_n(K))$

Самый простой базис: $E_{i,j} : (E_{i,j})_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = i, l = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$a_{i,j} = \sum\limits_{i,j=1..n} a_{i,j} E_{i,j}$

Замечание. Умножение на $M_n(K)$ достаточно было бы задать на базисе:

$E_{i,j} \cdot E_{k,l} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ E_{i,l}, & j = k \end{cases}$

5. Матрица перехода

Определение 20. V – n-мерное пространство; $v_1,...,v_n$ – старый базис, $v'_1,...v'_n$ – новый базис

$a_1,...,a_n \in K : (v_1,...,v_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = a_1v_1 + ... + a_nv_n.$

Рассмотрим матрицу $C : ([v_1]_{\{v'_1\}} \mid [v_2]_{\{v'_2\}} \mid ... \mid [v_n]_{\{v'_n\}}) \in M_n(K)$. C называется ***матрицей перехода*** от v_i к v'_i.

Утверждение 6. *$x \in V, \mathcal{X} = [x]_{\{v_i\}}$; тогда $C \cdot \mathcal{X}$– это $[x]_{\{v'_i\}}$.*

Доказательство. Рассмотрим $(u'_1,...,u'_n)(C\mathcal{X}) =$ (по ассоциативности) $= (u'_1,...,u'_n)(C\mathcal{X}) = (u_1,...,u_n)\cdot$ $\mathcal{X} = x \Rightarrow C\mathcal{X}$ – координатыты x в $(u'_1,...,u'_n)$. □

Следствие 3. *C – матрица перехода от $(u_1,...,u_n)$ к $(u'_1,...,u'_n)$.*
C' – матрица перехода от $(u'_1,...,u'_n)$ к $(u''_1,...,u''_n)$.
$C'C$ – матрица перехода от $(u_1,...,u_n)$ к $(u''_1,...,u''_n)$.

Доказательство. $\forall$ столбца $\mathcal{X} \rightsquigarrow x \in V$:
$C\mathcal{X}$ – координаты x в $(u'_1,...,u'_n)$
$C'(C\mathcal{X})$ – координаты x в $(u''_1,...,u''_n)$
$(C'C)\mathcal{X} \Rightarrow C'C$ – часть матрицы перехода от $(u_1,...,u_n)$ к $(u''_1,...,u''_n)$
Частный случай: $u''_1 = ... = u''_n = u_1 = ... = u_n$
$C'C = E$ и $CC' = E$, т.е. $C' = C^{-1}$; в частности матрица перехода обратима. □

6. Линейные отображения

6.1 Определение

Определение 21. U и V – векторное пространство над K; $\mathcal{A} : U \to V$ ***линейно*** (гомоморфизм), если $\mathcal{A}(u + \alpha v) = \mathcal{A}(u) + \alpha\mathcal{A}(v)$ $\forall u,v \in U$, $\forall \alpha \in K$.

Пример 13. $\mathcal{A}(x) = x$ – линейно, $\mathcal{A}(x) = 0$ – линейно.

Пример 14. $\mathcal{A} : K^n \to K,\ \dim_K K = 1,\ (\langle 1 \rangle = K)$

$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + ... + a_nx_n;\ a_1,...,a_n$ – фиксированы.

Более общо: $A \in M_{m,n} : A(x) = \mathcal{A} \cdot x$ – линейное отображение $\mathcal{A} : K^n \to K$.

Замечание. На самом деле, все линейные отображения таковы (т.е. представляют из себя домножение на матрицу).

Теорема 4. *$u_1,...,u_n$ – базис U; $v_1,...,v_n \in V$; тогда $\exists!$ линейное отображение $\mathcal{A} : U \to V$ т.ч. $\mathcal{A}(u_i) = v_i$.*

Доказательство. Единственность:
Пусть $\mathcal{A}(u_i) = v_i = \mathcal{B}(u_i)$.
Пусть $\forall u \in U : u = \sum a_i u_i \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\sum a_i u_i) = \sum a_i \mathcal{A}(u_i) = \sum a_i \mathcal{B}(u_i) = B(\sum a_i u_i) = \mathcal{B}(u)$
Существование:
Для каждого $u = \sum a_i u_i$ положим $\mathcal{A}(u) = \sum a_i v_i$:
$\mathcal{A}$ – линейно: $\mathcal{A}(\alpha \cdot (\sum a_i u_i) + \sum b_i u_i) = \mathcal{A}(\sum(\alpha \cdot a_i + b_i)u_i) = \alpha \cdot \sum a_i v_i + \sum b_i v_i = \alpha \cdot \mathcal{A}(\sum a_i u_i) + (\sum b_i u_i)$ □

6.2 Ядро и образ линейного отображения

Определение 22. $A : U \to V$ – линейное отображение.
$\mathrm{Ker}\ \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\}$ – ***ядро*** $\mathcal{A}$.
$\mathrm{Im}\ \mathcal{A} = \{v \in V \mid \exists u \in U : \mathcal{A}(u) = v\}$ – ***образ*** $\mathcal{A}$.

Лемма 4. $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$ – подпространство в U; $\mathrm{Im}\ \mathcal{A}$– подпространство в V.

Доказательство. Проверка замкнутости:
1) $u,v \in \mathrm{Ker}\ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(u) = 0\ \&\ \mathcal{A}(v) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(u + kv) = \mathcal{A}(u) + k \cdot \mathcal{A}(v) = 0 \Rightarrow u + v,\ ku \in \mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$
2) $u = \mathcal{A}(x)$, $v = \mathcal{A}(y)$
$u + v = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x + y) \Rightarrow x + y \in \mathrm{Im}\ \mathcal{A}$
$ku = k \cdot A(x) = \mathcal{A}(kx) \Rightarrow kx \in \mathrm{Im}\ \mathcal{A}$ □

Пример 15. $V = U = \mathbb{R}^2$

- $\mathcal{A}(x) = 0$

  $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A} = \{0\}$, $\mathrm{Im}\ \mathcal{A} = V$

- $\mathcal{A}(x) = 0$

  $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A} = \{V\}$, $\mathrm{Im}\ \mathcal{A} = 0$

- u – вектор

  $u \rightsquigarrow u_0$– проекция на OX

  $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Im}\ \mathcal{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Теорема 5. *$\mathcal{A} : U \to V$ – линейное отображение; тогда $\dim Ker\ \mathcal{A} + \dim Im\ \mathcal{A} = \dim U$.*

Доказательство. $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = m$; $u_1,..,u_n$ – базис $U; \dim U = n$

Применим $\mathcal{A} : \mathcal{A}(u_1) = ... = \mathcal{A}(u_m) = 0$

Сначала докажем следующее утверждение:

Утверждение 7. *$\mathcal{A}(u_{m+1}),...,\mathcal{A}(u_n)$ – базис Im $\mathcal{A}$.*

Доказательство. 1) Докажем, что $\mathcal{A}(u_{m+1}),...,\mathcal{A}(u_n)$ – ЛНЗ

Пусть $\alpha_{m+1}\mathcal{A}(u_{m+1}) + ... + \alpha_n\mathcal{A}(u_n) = 0$

$\mathcal{A}(\sum \alpha_{m+i}u_{m+i}) = 0 \Rightarrow \sum \alpha_{m+i}u_{m+i} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Rightarrow \sum \alpha_{m+i}u_{m+i} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ (т.к. $u_1,...,u_m$ –базис Ker $\mathcal{A}$) ??

$\sum \alpha_{m+i}u_{m+i} - \sum \alpha_i u_i = 0$; т.к. $\{u_i\}$ – ЛЗ, то все $\alpha_i = 0$. □

TODO □

6.3 Формула Грассмана

Применение: Формула Грассмана. В множествах есть базовые операции $\cup$, $\cap$. В пространствах – $\cap$, $+$.

Определение 23. $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ – ***сумма подпространств*** (сумма Минковского).

Теорема 6. *V – векторное пространство над K; V_1,V_2 – подпространства ($V_1,V_2 \leq V$).*

1. *$V_1 \cap V_2$ – подпространство V (очев).*

2. *$V_1 + V_2$ – тоже подпространство.*

Доказательство. $v_1 \in V_1 + V_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2$ & $v_1' \in V_1 + V_2 \Rightarrow v' = v_1' + v_2' \Rightarrow v + v' = (v_1 + v_1') + (v_2 + v_2') \in V$ $(v_1 + v_1' \in V_1,\ v_2 + v_2' \in V_2$ т.к. $V_1,V_2 \leq V)$

$k \cdot v = k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2 \in V,\ kv_1 \in V_1,\ kv_2 \in V_2$ □

Замечание. $v_1,...,v_n$ – базис V_1, $v_1',...,v_m'$ – базис $V_2 \Rightarrow \{v_1,...,v_n,v_1',...,v_m'\}$ – порождающая система $V_1 + V_2$.

Замечание. Многие формулы про $+$ и $\cap$ аналог формул про $\cap$ и $\cup$. Но $(V_1 + V_2) \cap V_3 \neq (V_1 \cap V_3) + (V_{23})$.

Определение 24. V_1,V_2 – векторное пространство над K, ***внешняя/прямая сумма*** V_1 и V_2 – это $V_1 \oplus V_2 = \{(v_1,v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ с операциями:

1. $(v_1,v_2) + (v_1',v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$

2. $k(v_1,v_2) = (kv_1,kv_2)$

Утверждение 8. $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Доказательство. Это векторное пространство (очев).
$v_1,...,v_k$ – базис V_1, $v'_1,...,v'_m$ – базис V_2; тогда $\{(v_i,0)\} \cup \{(0,v'_i)\}$ – базис $V_1 + V_2$.
И вправду: $\forall (v,v') = (\sum a_i v_i, \sum b_i v'_i) = \sum a_i(v_1,0) + \sum b_i(0,v'_i)$ – доказали порождаемость.
Доказательство линейной независимости: $\sum a_i(v_i,0) + \sum b_i(0,v'_i) = 0 = (\sum a_i v_i, \sum b_i v'_i) = (0,0) \Rightarrow \sum a_i v_i = 0, \sum b_i v'_i \Rightarrow$ т.к. v_i и v'_i – базисы: все $a_i = 0$ и все $b_i = 0 \Rightarrow$ доказали ЛНЗ-ть. □

Теорема 7. ***Формула Грассмана***
$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Доказательство. Зададим $A : V_1 \oplus V_2 \to V$, $(v_1,v_2) \to v_1 + v_2$
$\operatorname{Im} \mathcal{A} = V_1 + V_2$ (по определению $V_1 + V_2$)
$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{(v, -v) \mid v \in V_1,\ -v \in V_2\} = \{(v, -v) \mid v \in V_1 \cap V_2\} \cong V_1 \cap V_2$
Тогда по теореме о ядре и образе: $\dim(V_1 + V_2) = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = \dim(V_1 \oplus V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ □

6.4 Множество линейных отображений

Определение 25. U,V – векторные пространства над K; определим $\text{Lin }(U,V)$ – ***множество отображений*** $\mathcal{A} : U \to V$.
Это векторное пространство:
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(u) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u)$
$(k\mathcal{A})(u) = k \cdot \mathcal{A}(u)$

Определение 26. Пусть $\mathcal{A} \in \text{Lin }(U,V)$, $u_1,...,u_m$ – базис U, $v_1,...,v_n$ – базис V.
$\mathcal{A}(u_1) = a_{11}v_1 + ...a_{n1}v_n$
$\mathcal{A}(u_2) = a_{12}v_1 + ...a_{n2}v_n$
...
$\mathcal{A}(u_m) = a_{1m}v_1 + ...a_{nm}v_n$
Тогда $A = (a_{ij})_{i=1..n,j=1..m}$ – матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисе $\{v_i\}\{u_i\}$.

Обозначение 5. $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\}\{v_i\}}$.

Лемма 5. $\mathcal{A} \in \text{Lin }(U, B)$, $\{u_i\}$,$\{v_i\}$ – базисы.
$A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\}\{v_i\}}$; $\mathcal{A} : U \to V$
$u \in U : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты u в $\{u_i\}$.
Аналогично $v \in V : \mathbf{v}$ – координаты v в $\{v_i\}$.
Тогда $\mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$.

Доказательство. $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\sum x_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ji}) v_j$ – координаты $\mathbf{v}$ в базисе $\{v_i\}$ – это $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{1i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{m} x_i a_{mi} \end{pmatrix} = A \cdot \mathbf{u}$. □

Следствие 4. $U_{\{u_i\}} \xrightarrow{\mathcal{B}} V_{\{v_i\}} \xrightarrow{\mathcal{A}} W_{\{w_i\}}$ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Lin$
$B = [\mathcal{B}]_{\{u_i\}\{v_i\}}$, $A = [\mathcal{A}]_{\{v_i\}\{w_i\}}$
Тогда:

1. $A \circ B \in Lin\ (U, W)$ *(очев)*

2. $[A \circ B]_{\{u_i\}\{w_i\}} = A \cdot B$

Доказательство. $u \in U$, $v \in \mathcal{B}(u)$, $w \in \mathcal{A}(v)$
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ – координаты u,v,w
$w = (A \circ B)(u)$ и $\mathbf{w} = A \cdot \mathbf{u} = A \cdot B \cdot \mathbf{v} \Rightarrow A \cdot B$ – матрица отображение $A \circ B$. □

Утверждение 9. *$AX = BX$ $\forall x \Rightarrow A = B$.*

Резюме:

1. U, V – векторное пространство K $\dim U = m$, $\dim V = m$. Тогда $\exists$ изоморфизм:

   $f : M_{n,m}(K) \cong \mathrm{Lin}\ (U, V)$ как векторные пространства.

2. $n = m$ $M_n(K) \cong \mathrm{Lin}\ (U, U)$ как кольца.

Замечание. $\mathrm{Lin}\ (U, U)$ – кольцо с операциями $+$ и $\circ$:
$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ C + \mathcal{B} \circ \mathcal{C}$ – по определению $+$.
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{A}(\mathcal{C}(x)) + \mathcal{B}(\mathcal{C}(x))$ – по определению $+$.
$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$ – по определению $+$ и линейности $\mathcal{A}$.

Доказательство.

1. Фиксируем базисы $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$ и рассмотрим $f : \mathrm{Lin}\ (U, V) \to M_{n,m}(K)$, $\mathcal{A} \to [A]_{\{u_i\},\{v_i\}}$

   Очев, что это биекция (по теореме о задании линейного отображения на базисе). Очев, что операции сохраняются:

   $[\mathcal{A} + \mathcal{B}] = [\mathcal{A}] + [\mathcal{B}]$; $[k\mathcal{A}] = k[\mathcal{A}]$

2. Фиксируем базис $\{u_i\}$ и сопоставляем $\mathcal{A} \to [A]_{\{u_i\},\{u_i\}}$.

□

6.5 Матрица перехода

Напоминание: $u_1,...,u_n$ – старый базис, $u'_1,...,u'_n$ – новый базис и $u_i = \sum a_{ji}u'_j$; тогда $A = (a_{ij})$ – матрица перехода.

Замечание. $u_1 = u_1,...,u_n = u_n \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = [id]_{\{u_i\},\{v_i\}}$

6.6 Формула замены матрицы отображения при замене базиса

$U \xrightarrow{\mathcal{A}} V$, $\{u_i\},\{v_i\}$ – старые базисы, $\{u'_i\},\{v'_i\}$ – новые базисы.
Знаем: $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}}$
Хотим: $\tilde{A} = [\mathcal{A}]_{\{u'_i\},\{v'_i\}}$
$U_{\{u'_i\}} \xrightarrow{id} U_{\{u_i\}} \xrightarrow{\mathcal{A}} V_{\{v_i\}} \xrightarrow{id} V_{\{v'_i\}}$
По следствию: $[\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}} = [id]_{\{v_i\},\{v'_i\}} \cdot [\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}} \cdot [id]_{\{u_i\},\{u'_i\}} = D \cdot A \cdot C^{-1}$, где D – матрица перехода от v_i к v'_i, а C^{-1} – матрица перехода от u_i к u'_i.
Частный случай: $U = V$, $\{u_i\} = \{v_i\}$, тогда $\tilde{A} = CAC^{-1}$.

Вопрос: $\mathcal{A} \in \text{Lin}\ (U,V)$, $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}}$. Насколько простой можно сделать A за счет замены базиса?
Ответ: в теореме о Im и Ker доказали: $\exists$ базис $u : u_1,...,u_m,...,u_n$; $u_1,...,u_n$ – базис $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(u_{m+1}),...,\mathcal{A}(u_n)$ базис $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.
Обозначим $\mathcal{A}(u_{m+1}) = v_1,...,$ $\mathcal{A}(u_n) = v_{n-m}$; $v_1,...,v_{n-m}$ – базис $\mathcal{A}$. Дополним до базиса V : $v_1,...,v_{n-m},...,v_l$. Тогда:
$\mathcal{A}(u_1) = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_l$
...
$\mathcal{A}(u_m) = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_l$
$\mathcal{A}(u_{m+1}) = 1 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_l$
...
$\mathcal{A}(u_n) = 0 \cdot v_1 + ... + 1 \cdot v_{n-m} + ... + 0 \cdot v_l$

Получим: $\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & | & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица, где первые m столбцов - нулевые, а верхний левый блок размера $(n-m)\times(n-m)$ представляет из себя нулевую матрицу с единицами на диагонали. Поменяем местами блоки $(u_1,...,u_m)$ и $(u_{m+1},...,u_n)$. Получили теорему:

Теорема 8. $\forall \mathcal{A} \in Lin\ (U,V)\ \exists$ *базисы* $\{u_i\},\{v_i\}$: $[A]_{\{u_i\}\{v_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

6.7 Ранг матрицы

Определение 27. Переформулировка: $\forall A \in M_{l,k}(K)\ \exists$ такие обратные матрицы D и C, что $DAC = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.
Число s равно $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Оно называется ***рангом отображения*** или ***рангом матрицы***.

Определение 28. Матричное определение: $A \in M_{l,n}(K)$; столбцы K^l : $A = (C_1 \mid ... \mid C_n)$ $C_i \in K^l$.
$\text{rank } A = \text{rk } A = \text{rg } A = \dim\langle C_1,...,C_n\rangle$

Замечание. Это то же самое, что и ранг отображения, т.к. C_i – столбец координат для $\mathcal{A}(u_i)$, где u_i – iый базовый вектор.

Пример 16. $\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{rk} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Big\rangle = \text{rk} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$

Определение 29. $U = V,\ \dim U = n,\ \text{rk } \mathcal{A} = k;\ n-k$ – ***дефект*** $\mathcal{A}$; $n-k = n = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

6.8 Решение СЛУ

Что такое $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker} A$?
$\{x \in K^n \mid AX = 0\}$ – множество решений однородных СЛУ с матрицей $A \in M_{m,n}$:
$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ $k^n \to K^m$, n неизвестных, m уравнений.
$\dim \operatorname{Ker} A$ – размерность пространства решений; $\dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Im} A \geq n-m$.
Эти рассуждения подвели нас к формулированию теоремы:

Теорема 9. *ОСЛУ с n неизвестными и m уравнениями ($m < n$) имеет пространство решений размерности хотя бы $n-m$; в частности, если K бесконечно, то бесконечно много решений; если же $|K| = q \Rightarrow q^{n-m}$ решений.*

Теперь рассмотрим частный случай:

Теорема 10. *Пусть $n = m$. Тогда:* $\dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Im} A, \dim \operatorname{Ker} A = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} A = n$, *т.е. система $AX = B$ имеет решение $\forall B \Leftrightarrow AX = 0$ имеет только тривиальное решение. На языке линейных отображений: $\mathcal{A} : U \to V$ линейное,* $\dim U, \dim V < \infty$*; тогда $\mathcal{A}$ сюръективно $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ инъективно.*

Доказательство. Сюръективность $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V$
Докажем следующее утверждение:

Утверждение 10. $\mathcal{A}$ *инъективно* $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

Доказательство.

- $\Rightarrow$: $\mathcal{A}(x) = 0 \ \& \ \mathcal{A}(0) = 0; \mathcal{A}$ инъективно $\Rightarrow x = 0$

- $\Leftarrow$: Пусть $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Rightarrow x - y = 0$, т.е. $x = y$

□

Теперь вернемся к доказательству теоремы: инъективность $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow \mathcal{A} = V \Leftrightarrow$ сюръективность. □

6.9 Вид общего решения

Рассмотрим СЛУ $AX = B$ или $\mathcal{A}(x) = b$. Пусть знаем частное решение X_0 (т.е. $AX_0 = B$). Тогда:
$AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
Значит, знаем общий вид решения: $X = X_0 + Y, Y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ (или $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 + \operatorname{Ker} \mathcal{A}$)

6.10 Транспонирование

Определение 30. Пусть $A \in M_{m,n}(K) = (a_{i,j})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$; тогда **транспонирование** A – $A^T \in M_{n,m}(K)$; $A^T = (a'_{i,j})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, где $(a'_{i,j}) = a_{j,i}$ (отражение относительно главной диагонали).

Утверждение 11. ***Свойства:***

- $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = k \cdot A^T$ *– это линейное отображение.*

- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

  Если $\exists A^{-1}$, то $\exists (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Доказательство.

1. Пусть $A \cdot B = C = (c_{i,j})$, $(A \cdot B)^T = (c'_{i,j})$

   $c'_{i,j} = c_{j,i} = \sum\limits_s a_{j,s} \cdot b_{s,i} = \sum\limits_s a'_{s,j} \cdot b_{i,s} = \sum\limits_s b'_{i,s} \cdot a'_{s,j} = (B^T \cdot A^T)_{i,j}$

2. $\begin{cases} A \cdot B = E \\ B \cdot A = E \end{cases}$, $B = A^{-1} \Rightarrow B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = E^T = E$

$\square$

Утверждение 12. ***Свойства ранга:***

1. *rk* $A =$ *rk* A^T *(если строки и столбцы поменять ролями, то поменяем ролями, то rk не изменится)*
2. *rk* $A \cdot B \leq \min($*rk* $A,$ *rk* $B)$
3. *rk* $(A + B) \leq$ *rk* $A +$ *rk* B
4. $A \in M_n(K)$, *rk* $A = n \Leftrightarrow A -$ *обратима.*

Доказательство.

2. $\text{rk } A = \dim \operatorname{Im}(X \to AX)$

   $U \xrightarrow{\mathcal{B}} V \xrightarrow{\mathcal{A}} W$

   a) $\text{rk } AB = \dim \operatorname{Im}\{(AB)X \mid X \in U\} \leq \dim\{AY \mid Y \in V\} = \text{rk } A$ $(\{ABX\} \subset \{AY\})$

   b) $\text{rk } AB = \dim \operatorname{Im}(A \circ B) = \dim(A \circ B(U)) = \dim(A(\underbrace{B(U)}_{=\operatorname{Im} B})) = \dim(\operatorname{Im} A \mid_{\operatorname{Im} B}) \leq \dim \operatorname{Im} B$

1. Знаем, что $\exists C, D: \; CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

   $D^T \cdot A^T \cdot C^T = (CAD)^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ (размеры строки и столбца из нулей поменялись местами)

   $\text{rk } A = r$, $\text{rk } A^T = r$, т.к.:

   1) $\text{rk } (D^T \cdot A^T \cdot C^T) \leq \text{rk } A^T$ по свойству 2.
   2) $\text{rk } A^T = \text{rk } ((D^T)^{-1}(D^T \cdot A^T \cdot C^T)(C^T)^{-1}) \leq \text{rk } (D^T \cdot A^T \cdot C^T)$ по свойству 2.

3. упр.

4. $\Rightarrow$: A обратима $\Rightarrow n = \text{rk } E = \text{rk } (A \cdot A^{-1}) \leq \text{rk } A \Rightarrow \text{rk } A = n$ (т.к. $\text{rk } A \leq n$)

   $\Leftarrow$: $\text{rk } A = n$, $\exists C,D$: $CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, где $r = \text{rk } A \Rightarrow CAD = E \Rightarrow CA = D^{-1} \Rightarrow DCA = E$

   Аналогично $ADC = E \Rightarrow DC = A^{-1}$.

$\square$

Следствие 5. *Ранг по строкам равен рангу по столбцам (по первому свойству).*

Утверждение 13. $A \in M_n(K)$*; следующие условия равносильны:*

1. A *— обратима.*
2. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$
3. $\operatorname{Im} A = K^n$
4. *Строки* A *линейно независимы.*
5. *Столбцы* A *линейного независимы.*

Обозначение 6. $(M_n(K))^* = GL(n,K)$ — полная линейная группа.

Утверждение 14. *Все есть матрица.*

Пример 17. Матричная реализация: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Утверждение 15. *Подмножество* $M_2(\mathbb{R})$*, состоящее из матриц вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *является подкольцом и полем.*

Оно изоморфно $\mathbb{C}$: $P(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Объяснение: $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности 2 $\langle 1,i \rangle$

$a + bi \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $x_1 + x_2 i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Умножение на $z \in \mathbb{C}$ — линейное отображение: $(x_1 + x_2)i = -x_2 + x_1 i$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

7. Элементарные преобразования

Определение 31. $\mathcal{A} : K^n \to K^n$ – линейное отображение ($\mathcal{A}(X) = AX$); $\mathcal{A}$ – **элементарное преобразование**, если $\exists i_0 : \ \mathcal{A}(X)_i = x_i \ \forall i \neq i_0$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\mathcal{A}$ – обратимо (меняется только одна координата).

Пример 18. $\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{2}x_2 + x_3 - x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – элементарно.

Утверждение 16. ***Виды элементарных преобразований:***

1. ***Трансвекция***: $t_{i,j}(a)\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_i + a \cdot x_j \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

   $t_{i,j}(a)$ – *обратимо.*

   $t_{i,j}(a)^{-1} = t_{i,j}(-a)$

   Матрица: $E + a \cdot e_{i,j}$

2. ***Дилатация:*** $m_i(a)$, $a \in K \setminus \{0, 1\}$

   $m_i(a)\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ a \cdot x_i \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

   $m_i(a)$ – *обратимо.*

   $m_i(a)^{-1} = m_i(\frac{1}{a})$

   Матрица: $E + (a - 1) \cdot e_{i,i}$

3. *Часто рассматривается третий тип* – ***транспозиция***: $s_{i,j} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_i \\ ... \\ x_j \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_j \\ ... \\ x_i \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

Не нужна: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$s_{1,2} = m_2(-1) \cdot t_{1,2}(1) \cdot t_{2,1}(-1) \cdot t_{1,2}(1)$ *(то есть транспозиция – это композиция трансвекций и дилатаций)*

Утверждение 17. *A – матрица:*

1. *$t_{i,j}(a) \cdot A$ получается из A прибавлением к i–ой строке j–ой строки, умноженной на a.*
2. *$m_i(a) \cdot A$ получается из A умножением i–ой строки на a.*
3. *$A \cdot t_{i,j}(a)$ получается из A прибавлением к j–ому столбцу i–ого столбца, умноженного на a.*
4. *$A \cdot m_i(a)$ получается из A умножением i–ого столбца на a.*

Теорема 11.

1) *$A \in M_{n,m} \Rightarrow \exists e_1,...,e_k$ – трансвекции/дилатации.*

$$e_1...e_kA = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & .. & ... \end{pmatrix}$$ *(треугольная матрица)*

2) *$m = n$ и A обратима, то $\exists e_1,...,e_k : e_1...e_kA = E$*

2') *$m = n$ и A обратима, то A – произведение трансвекций/дислатаций.*

3) *A – произведение $\Rightarrow \exists e_1,...,e_k$ и $d_1,...,d_l$ – трансвекции/дилатации $e_1...e_kAd_1...d_k = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.*

Доказательство. 1) Индукция по n

Переход $n \to n+1$: рассмотрим первый столбец $\begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

I. Все $a_{i1} = 0$; $A = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\tilde{A}}_{n}$

Применим к $\tilde{A}$ индукционное предположение: $\exists$ элементарные матрицы (порядка m)

$$e_1,...,e_k\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & * \\ ... & a_{22} & ... \\ 0 & ... & ... \end{pmatrix}$$

Тогда $e_1 ... e_k A = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & ... & * \\ 0 & 0 & a_{22} & \\ ... & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

II. $a_{11} \neq 0$: применим $t_{i,1}(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ для каждого $i = 2..m$.

$e_2 ... e_m A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & \\ ... & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)$

Применим индукционное предположение к $\tilde{A}$: $\exists \tilde{e_{m+1}}, ..., \tilde{e_s}$:

$\tilde{e_{m+1}}, ..., \tilde{e_s} \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a_{11}} & .. & * \\ 0 & \tilde{a_{22}} & ... \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Заменим $\tilde{e_k}$ на e_k : $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ ... & \tilde{e_k} \\ 0 & \end{array}\right)$

Тогда $e_{m+1} ... e_s A = \left(\begin{array}{c|cc} a & b & \\ \hline 0 & \tilde{a_{11}} & \\ ... & 0 & \tilde{a_{22}} \\ 0 & & \end{array}\right)$

III. A – квадратная обратимая матрица. По первому пункту: $\exists$ элементарные преобразования: $a_1 ... a_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & * \\ 0 & a_{22} & \\ ... & & \\ 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$

Утверждение: $a_{ii} \neq 0$

Доказательство утверждения: пусть $\exists a_{ii} = 0 \Rightarrow$

первые i столбцов матрицы $\in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1_{(i-1 \text{ позиция})} \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$ они ЛЗ (но у обратных матриц столбцы линейно независимы)

$a_1 ... a_k A$ обратима, так как ранг не меняется при домножении на обратимые матрицы.

Теперь применим $\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_{in}(-\frac{a_{in}}{a_{nn}})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & a_{1n} \\ & & a_{2_n} \\ & & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & * & 0 \\ & & 0 \\ & & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Потом применим $\prod\limits_{i=1}^{n-2} t_{i,n-1}(-\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n-1}})$ и так далее...

В итоге получим: $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & 0 \\ ... & & \\ 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Применим $\prod m_i(\frac{1}{a_{ii}})$; получим $\begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & & \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E$.

2') $\exists e_1,...,e_k;\ e_1...e_kA = E$

$A = e_k^{-1}...e_!^{-1}$ (отметим, что $e_1...e_k = A^{-1}$)

e_i – элементарные преобразования

3) A – произвольная матрица, $\exists$ обратимые матрицы $C,D:\ CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$C = e_1....e_k$ по 2' & $D = d_1....d_l \Rightarrow e_1....e_kAd_1....d_l = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

□

Следствие 6. *Из теоремы следует алгоритм нахождения обратной матрицы:*

$e_k...e_1A = E \Rightarrow e_k...e_1 = A^{-1}$

Создаем блочную матрицу: $(A \mid E)$; применяем одновременно элементарные преобразования к A и к E (приводя A к E)

$e_1...e_k(A \mid E) = (e_1...e_kA \mid e_1...e_kE) \Rightarrow (A \mid E) \xrightarrow{\text{элементарные преобразования}} (E \mid A^{-1})$

8. Разложение матриц

8.1 PDQ-разложение

Теорема 12. *A – прямоугольная матрица, тогда $\exists$ обратные матрицы P и Q такие, что* $A = P\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}Q$

Доказательство. Знаем, что $\exists$ обратимые C,D: $CAD = \begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \Rightarrow A = \underbrace{C^{-1}}_{=P}\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\underbrace{D^{-1}}_{=Q}$ □

Определение 32. $A \in M_n(K)$; A называется **диагональной**, если $a_{ij} = 0$ при $\forall i \neq j$. Обозначается как D_n.

Определение 33. $A \in M_n(K)$; A называется **верхнетреугольной**, если $a_{ij} = 0$ при $\forall i > j$. Обозначается как LT_n.

Определение 34. $A \in M_n(K)$; A называется **нижнетреугольной**, если $a_{ij} = 0$ при $\forall i < j$. Обозначается как UT_n.

Утверждение 18. *D_n,LT_n,UT_n − кольца (подкольца в $M_n(K)$).*
$D_n = LT_n \cap UT_n$ − коммунитативно (максимальное коммунитативное подкольцо в $M_n(K)$).
$D_n^* = K^* \times K^* \times ... \times K^*$.

Утверждение 19. *$A \in D_n(LT_n,UT_n)$; тогда A − обратимая $\Leftrightarrow$ все диагональные элемента не равны 0 ($a_{ii} \neq 0$ $\forall i$).*

Доказательство. Пусть $a_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} \text{A} \in UT_n \Leftrightarrow \forall i \ \mathcal{A}(\langle e_1, e_2, ... e_i \rangle) \subseteq \langle e_1, e_2, ... e_i \rangle \\ \text{A} \in LT_n \Leftrightarrow \forall i \ \mathcal{A}(\langle e_i, e_{i+1}, ... e_n \rangle) \subseteq \langle e_1, e_2, ... e_i \rangle \end{cases}$ $\Rightarrow LT_n$ и UT_n − подкольца.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & ... & ... \\ 0 & & a_{nn} & \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(e_1) = a_{11}e)1 \\ \mathcal{A}(e_2) = a_{12}e)1 + a_{22}e)2 \\ ... \end{cases}$ (в образе $\mathcal{A}(\langle e_1, e_2, ... e_i \rangle)$ не возникает e−шек с большим номером)

Легко видеть: $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$

В частности: $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$ $\text{e}_i \overset{\mathcal{B}}{\rightsquigarrow} b_i e_i \overset{\mathcal{A}}{\rightsquigarrow} b_i(a_i e_i) = b_i a_i e_i$

Очевидно, что коммунитативно и что $D_n = K \times K \times ... \times K$ и $D_n^* = K \times K^* \times ... \times K^*$. □

Критерий обратимости:

1. для $A \in UT_n$: это было в доказательстве пункта 2 предыдущей теореме.

2. $A \in LT_n$: следует из обратимости для UT_n (A обратима $\Leftrightarrow A^T$ обратима).

8.2 LU-разложение

Было: A – обратима; $A \overset{\text{э.п., Гаусс}}{\to} \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ (см. пред. теорему)

Пусть в ходе Гаусса не было исключений (перестановок строк) $\Rightarrow$ применяем только $t_{i,j}(a)$, где $i > j$.

Заметим, что $t_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & \ddots & ... & 0 \\ 0 & a & \ddots & ... \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \in LT_n \Rightarrow U = \underbrace{e_1..e_k}_{\in LT_n A} \in UT_n \Rightarrow A = \underbrace{e_1^{-1}...e_k^{-1}}_{=L} U = LU$

Итого: $A = LU$, $L \in LT_n^*$, $U \in UT_n^*$ $\to$ $LU-$разложение

Утверждение 20. *$LU-$разложение существует $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{c|c} A_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$, A_k – обратимая квадратная матрица размера $k \times k$.*

Доказательство. $\Leftarrow$: есть проблемы $\Leftrightarrow$ в какой-то момент получили

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}^{=\tilde{A}_k} & * \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & ... & * \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & * \end{pmatrix} & * \end{array}\right)$$

$\tilde{A}_k$ необратимая $\Leftrightarrow$ A_k необратимая

$\Rightarrow$: упражнение - перемножить L на U. □

8.3 LPU-разложение

В общем случае: сделаем в начале перестановку строк так, чтобы выполнилось условие теоремы: TODO

rk $C_{k+1} = k+1$ (матрица обратима) $\Rightarrow$ rk C_{k+1} по строке $= k+1$

Первые k строк ЛНЗ (знаем) $\Rightarrow \exists$ строка $r_i \in \langle r_1, r_2, ..., r_n \rangle$. Переставим r_i на $(k+1)$-ое место.

Итого: $A \rightsquigarrow s_1...s_n A$ – удовлетворяет условию теоремы (s_i – транспозиции) $\Rightarrow s_1...s_n A = LU \Rightarrow A = s_n....s_1 LU = PLU$, P – матрица перестановки.

$P : \exists$ перестановка $\pi \in S_n$ $P_{i,\pi(i)} = 1$ и $P_{i,j} = 0$ иначе.

9. Определитель

9.1 Определитель

Определение 35. Определитель – функция det: $M_n(K) \to K$.

Пример 19. Площадь/объем.

(картиночка)

Оказывается, что $S = |ad - bc|$. Как к этому прийти?

Свойства площади:

1) (еще картиночка)

   $S(\vec{u}, k\vec{v}) = kS(\vec{u}, \vec{v})$

2) (еще картиночка)

   $S(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + S(\vec{u}, \vec{w})$

2') $S(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u}) = S(\vec{u}, \vec{v}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + kS(\vec{u}, \vec{u})$ (1 и 2 свойства)

3) $S(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

Теперь можно: (опяяяять картинки)

Воспользуемся еще одной аксиомой, что S(квадрат 1 на 1) $= 1 : (ad - bc)S\begin{pmatrix}1 & 0 0 & 1\end{pmatrix} = ad - bc$.

9.2 Полилинейная функция

Определение 36. K^n (или V) – векторное пространство над K.

Функция $f : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{m} \to K$ называется *полилинейной*, если:

$\forall i \ v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m \in K^n \ f(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m) : V \to K$ линейная, то есть:

$f(v_1, ..., v_{i-1}, v_i + b_i v_i', ..., v_m) = f(v_1, ..., v_i, ..., v_m) + bf(v_1, ..., v_i', ..., v_m)$.

Пример 20. $m = 1$: полилинейное = линейное.

$m = 2$: пример: скалярное произведение векторов.

Определение 37. Полилинейная функция f называется кососимметричной, если верно, что $v_i = v_j \Rightarrow f(v_1, ..., v_m) = 0$.

Замечание. (покажем на случае функции от двух параметров, общий случай выводится аналогично)

$f(x, y)$ – полилинейная.

1. f кососимметричная.

2. $f(x,y) = -f(y,x)\ \forall x, y.$

Тогда $1 \Rightarrow 2$ и $1 \Leftrightarrow 2$, если $\mathrm{char} K \neq 2$.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1: \ f(x,x) = -f(x,x) \Rightarrow 2f(x,x) = 0 \overset{\text{если } \mathrm{char}K\neq 2}{\Rightarrow} f(x,x) = 0.$
$1 \Rightarrow 2 : 0 = f(x+y, x+y) = \underbrace{f(x,x)}_{=0} + f(x,y) + f(y,x) + \underbrace{f(y,y)}_{=0} \Rightarrow f(x,y) = -f(y,x).$ □

Утверждение 21. *Кососимметричная полилинейна функция однозначно задается значениями $f(e_{i_1},...,e_{i_m})$, где $i_1 < ... < i_n$.*

Доказательство. Достаточно вычислить $f_1(e_{i_1},...,e_{i_m})$ (по предыдущему утверждению).
$\exists k,l : \ i_l = i_k \Rightarrow f(...) = 0$ (по определнию)
Пусть $i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_m$; i_k – min; $f(e_{i_1},...,e_{i_k}...,e_{i_m}) = -f(e_{i_k}, e_{i_1},...,e_{i_m})$. Продолжая это, получим $f(e_{i_1},...,e_{i_m}) = \pm f(e_{j_1},...,e_{j_m})$, где $j_1 < ... < j_m$. □

Определение 38. Пусть $n = m$; тогда билинейная кососимметричная функция f называется *определителем порядка n* ($f \neq 0$).

Теорема 13. *f_1 и f_2 – определители $\Rightarrow \exists c \in K^* : f_1 = c \cdot f_2$.*

Доказательство. Пусть $f_1(e_1,...,e_n) = c \cdot f_2(e_1,...,e_n)$.
Тогда: $\forall e_{i_1},...,e_{i_n}\ f_1(e_{i_1},...,e_{i_n}) = c \cdot f_2(e_{i_1},...,e_{i_n})$.
Тогда по утверждению 1 f_1

Определение 39. $V = K^n$; определителем будем называть такой определитель, что:
$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ..0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ..0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ..1 \end{pmatrix} \right) = 1.$ Она обозначается det.

9.3 Четность перестановки

Определение 40. Перестановка $s \in S_n$, $s_i : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ биекция.

Утверждение 22. *s – композиция трансвеций.*

Доказательство. Индукция по n.
Переход: $n \to n+1 : \pi \in S_{n+1}$, $\pi(n+1) = x$
Рассмотрим $s_{n+1,x} \circ \pi = \overline{\pi}$; $\overline{\pi}(n+1) = \pi(x) = n+1 \overset{\text{забываем про } n}{\Rightarrow} \overline{\pi} \mid_{\{1,...,n\}}$ по и.п. это $s_{i_1,j_1} \circ ... \circ s_{i_k,j_k} \Rightarrow$ $\pi = s_{n+1,x} \circ s_{i_1,j_1} \circ ... \circ s_{i_k,j_k}$ □

Определение 41. Четность перестановки
Если $\pi = s_1 \circ ... \circ s_{2k}$, где s_i – транспозиции, то π – *четная* перестановка.
Если $\pi = s_1 \circ ... \circ s_{2k+1}$, где s_i – транспозиции, то π – *нечетная* перестановка.

Теорема 14. ***Явная формула для определителя*** $A = (a_{i,j})_{i,j=1..n}$. *Тогда функция* $\det A = \sum\limits_{\pi \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)}$, *где* $\varepsilon(\pi)$ – *четность перестановки* π *полилинейная, кососимметричная и нормальная (т.е.* $\det$ *в прежнем смысле).*

Замечание. Эта формула – сумма ладейных произведеинй, взятых со знаком.

Пример 21. $n = 2 : + : \begin{vmatrix} * & \\ & * \end{vmatrix}, - : \begin{vmatrix} & * \\ * & \end{vmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ (в общем случае будет $n!$ слагаемых)

Определение 42. Четность через инверсии: $\tilde{\varepsilon}(\pi) = \Big| \{(i,j) \mid i < j \ \ \& \ \ \pi(i) < \pi(j)\} \Big|$.

Пример 22. $\pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to 5$ инверсий $\Rightarrow 5$ нечетно.

Теорема 15. *Два определения четности совпадают.*

Доказательство. Это следует из леммы.

Лемма 6. Если s – транспозиция, то $\tilde{\varepsilon}(s\pi)$ и $\tilde{\varepsilon}(\pi)$ различны.

Доказательство. По индукции: $\tilde{\varepsilon}(s_1,...,s_{2k}) = 0, \tilde{\varepsilon}(s_1,...,s_{2k+1}) = 0$
База: $\tilde{\varepsilon}(id) = 0$ □

□