

Содержание

I	Интегральное исчисление функций одной переменной	2
1.	Первообразная и неопределенный интеграл	2
2.	Определенный интеграл	4
3.	Свойства интеграла	7
4.	Приложения формулы интегрирования по частям	10
5.	Интегральные суммы	12
6.	Несобственные интегралы	17
II	Метрические пространства	24
7.	Метрические и нормированные пространства	24

Часть I

Интегральное исчисление функций одной переменной

1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная функции f , если $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$.

Теорема 1. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. Позже. □

Замечание. $\text{sign } x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ не имеет первообразной.

Пусть F — первообразная $\text{sign } x$.

$F'(-1) = \text{sign}(-1) = -1$, $F'(1) = \text{sign}(1) = 1$; по теореме Дарбу на $(-1, 1)$ F' принимает все значения между -1 и 1 . Это не так.

Теорема 2. $f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и F — первообразная f , тогда:

1. $F + C$ — первообразная f .
2. Если $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ первообразная f , то $\Phi = F + C$.

Доказательство.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const.}$

□

Определение 2. Множество всех первообразных функции f — неопределенный интеграл.
 $\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}, F \text{ — первообразная } f\} = \{F : F \text{ — первообразная } f\}$

Обозначение 1. $\int f(x)dx = F(x) + C$

Замечание. Для справедливости равенства достаточно показать, что $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1. Таблица интегралов:

1. $\int 0 \, dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ при $p \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ при $a > 0$ и $a \neq 1$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin x + C$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arctg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = -\ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C$
12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

Доказательство.

3. Если $x > 0$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
 Если $x < 0$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$
11. $(\ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
12. $(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|)' = (\frac{1}{2} \ln |1+x| - \frac{1}{2} \ln |1-x|)' = \frac{1}{2} (\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$

□

Теорема 3. Теорема об арифметических действиях с неопределенными интегралами

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразную, тогда:

1. $f + g$ имеет первообразную и $\int (f + g) = \int f + \int g$.
2. $\alpha \cdot f$ имеет первообразную и $\int (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int f$, если $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
3. Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, тогда $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \int f + \beta \cdot \int g$.

Доказательство.

1. Пусть F и G — первообразные f и g , тогда $(F + G)' = F' + G' = f + g \Rightarrow F + G$ — первообразная для $f + g$.
2. $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f \Rightarrow \alpha F$ — первообразная для αf .

□

Теорема 4. Теорема о замене перменной в неопределенном интеграле

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$; φ дифференцируема, f имеет первообразную F , тогда:
 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. $F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

□

Следствие 1. $\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C$

Пример 1. $\int \frac{t}{1+t^4}dt = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2}dt = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan(t^2) + C$
 $\varphi(t) = t^2, \varphi'(t) = 2t$

Теорема 5. Формула интегрирования по частям

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$; f, g дифференцируемы, $f'g$ имеет первообразную, тогда fg' имеет первообразную и $\int f'g = fg - \int fg'$.

Доказательство. H — первообразная $f'g$; (!) $\int f'g = fg - H + C$

$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

Пример 2. $\int \ln x dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln x - x + C$
 $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{x}$

2. Определенный интеграл

Определение 3. \mathcal{F} — ограниченные множества на \mathbb{R}^2 ; $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ — площадь, если:

1. $\sigma(\mathcal{F}) \geq 0$.
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.
3. Если $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, то $\sigma(F_1 \cup F_2) = \sigma(F_1) + \sigma(F_2)$.

Утверждение 2. Свойство площади:

Если $\tilde{F} \subset F$, то $\sigma(\tilde{F}) \geq \sigma(F)$.

$\sigma(\tilde{F}) = \sigma(F) + \underbrace{\sigma(\tilde{F} \setminus F)}_{\geq 0} \geq \sigma(F)$

Определение 4. $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ — квазиплощадь, если:

1. $\sigma(\mathcal{F}) \geq 0$.

2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.
3. Если $\tilde{F} \subset F$, то $\sigma(\tilde{F}) \leq \sigma(F)$.
4. Пусть l — горизонтальная или вертикальная прямая; F_- левее, F_+ правее и $F_- \cup F_+ = F$; тогда $\sigma(F) = \sigma(F_-) + \sigma(F_+)$.

Утверждение 3. Свойства квазиплощади:

1. Если F — подмножество вертикального или горизонтального отрезка, то $\sigma(F) = 0$.
Следует из 2 и 3 пунктов, $\sigma(F) \leq \sigma(\text{отрезка}) = 0$.
2. В 4 не важно, где лежат точки с l :
Пусть Δ — множество отрезка, тогда $\sigma(F_- \setminus \Delta) = \sigma(F \cup \Delta)$, $\sigma(F_- \setminus \Delta) = \sigma(F_- \setminus \Delta) + \sigma(\Delta)$.

Обозначение 2. P — прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$; $|P| = (d - c)(b - a)$.

Пример 3. Примеры квазиплощадей:

1. $\sigma_1(F) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \right\}$
2. $\sigma_2(F) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$

Замечание. $\sigma_1(F) \geq \sigma_2(F)$ (множество $\{\dots k\} \supset \{\dots \infty\}$)

Теорема 6.

1. σ_1 — квазиплощадь.
2. σ_1 инвариантна относительно сдвига.

Доказательство. 2. Докажем, что $\sigma_1(F) = \sigma_1(F + a)$, где a — произвольный вектор.

Действительно: $F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \Leftrightarrow F + a \subset \bigcup_{k=1}^n (P_k + a)$

1. Проверим определение:

- 1) $\sigma_1(F) \geq 0$ — очевидно (инфимум множества неотрицательных чисел).
- 3) $\tilde{F} \supset F \Rightarrow \sigma(\tilde{F}) \geq \sigma(F)$
 $F \subset \tilde{F} \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \Rightarrow F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \Rightarrow$ у F больше множество сумм $\Rightarrow \inf$ меньше.
- 2) $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$, необходимо доказать \leq и \geq
 \leq : поскольку прямоугольник покрывает сам себя
 \geq : продлим каждую сторону каждого прямоугольника и получим разбиение на маленькие прямоугольники. Поскольку при подсчете $\sum_{k=1}^n |P_k|$ площадь маленьких прямоугольников считается несколько раз, то $F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \geq (d - c)(b - a) \Rightarrow \inf \geq (d - c)(b - a)$

4) $\sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+) = \sigma_1(F)$, необходимо доказать \leq и \geq

\geq : $F_- \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ и $F_+ \subset \bigcup_{j=1}^m Q_j$; $F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ и $\bigcup_{j=1}^m Q_j$

$$\sigma_1(F) \leq \sum_{k=1}^n |P_k| + \sum_{j=1}^m |Q_j|$$

Зафиксируем Q_j . Если заменить $\sum_{k=1}^n P_k$ на \inf : $\sigma_1(F) \leq \sigma_{F_-} + \sum_{j=1}^m |Q_j|$ тоже самое верно для \inf

$$\sigma_1(F) \leq \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+)$$

\geq : берем $F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$

Проведем вертикальную прямую l и обозначим $P_k^- + P_k^+ : P_k = P_k^- + P_k^+, |P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$

$$F_- \subset \bigcup_{k=1}^n P_k^- \Rightarrow \sigma_1(F_-) \leq \sum_{k=1}^n |P_k^-| \quad F_+ \subset \bigcup_{k=1}^n P_k^+ \Rightarrow \sigma_1(F_+) \leq \sum_{k=1}^n |P_k^+|$$

$$\Rightarrow \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+) \leq \sum_{k=1}^n |P_k^-| + \sum_{k=1}^n |P_k^+| = \sum_{k=1}^n |P_k| \Rightarrow \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+) \leq \sigma_1(F)$$

□

Определение 5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; тогда:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Утверждение 4. Свойства:

$$1. \quad f_+(x), f_-(x) \geq 0.$$

$$2. \quad f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

$$3. \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

$$4. \quad f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

$$5. \quad f \in C[a, b], \text{ то } f_{\pm} \in C[a, b]$$

Определение 6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательная; подграфик $\mathcal{P}_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Замечание. $\mathcal{P}_f, f \in C[a, b]$ – ограниченное множество.

Доказательство. $f \in C[a, b] \xrightarrow{\text{Б.Б.}} f$ – ограниченная $\Rightarrow \mathcal{P}_f \subset [a, b] \times [m, M]$ (m – \min ; M – \max) □

Определение 7. Зафиксируем σ – квазиплощадь и положим $\int_a^b f := \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-})$ – определенный интеграл.

Утверждение 5. Свойства определенного интеграла:

f – непрерывная функция.

$$1. \int_a^a f = 0.$$

$$2. \int_a^b 0 = 0.$$

$$3. \text{ Если } f \leq 0, \text{ то } \int_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_f).$$

Комментарий: $f_- \equiv 0 \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) = 0$

$$4. \int_a^b (-f) = - \int_a^b f.$$

Комментарий: $(-f)_+ = f_- \Rightarrow \mathcal{P}_{f_+} = \mathcal{P}_{(-f)_-}$

$$(-f)_- = f_+ \Rightarrow \mathcal{P}_{f_-} = \mathcal{P}_{(-f)_+}$$

$$5. \int_a^b c = c \cdot (b - a)$$

Комментарий: если $c > 0$, то $\mathcal{P} = [a, b] \times [0, c]$.

$$6. \text{ Пусть } f \geq 0 \text{ и } \int_a^b f = 0, \text{ тогда } f \equiv 0.$$

Доказательство. От противного.

Пусть $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \mathcal{P}_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_f) \geq |\dots| = \delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0 ??$ \square

3. Свойства интеграла

Теорема 7. Аддитивность интеграла

$f \in C[a, b]$ и $c \in [a, b]$; тогда $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Обозначение 3. $\mathcal{P}_f(E) = \mathcal{P}_{f|_E}$

Доказательство. $\int_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a, b]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a, b]) =$

$$= \left(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a, b]) = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a, c]) + \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[c, b]) \right) - \left(\sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a, b]) = \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a, c]) + \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[c, b]) \right) =$$

$$= \left(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a, c]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a, c]) \right) + \left(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[c, b]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[c, b]) \right) = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \square$$

Следствие 2. $f \in C[a, b]$, $a \leq c_1 \leq \dots \leq c_n \leq b$; тогда $\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \dots + \int_{c_n}^b f$.

Доказательство. Индукция. \square

Теорема 8. Монотонность интеграла

$f, g \in C[a, b]$, если $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Доказательство. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \leq \max\{g(x), 0\} = g_+(x) \Rightarrow \mathcal{P}_{f_+} \subset \mathcal{P}_{g_+} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) \leq \sigma(\mathcal{P}_{g_+})$

$f_+(x) \geq g_+(x) \Rightarrow \mathcal{P}_{f_-} \supset \mathcal{P}_{g_-} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \geq \sigma(\mathcal{P}_{g_-})$

Следовательно $\int_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \leq \sigma(\mathcal{P}_{g_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{g_-}) = \int_a^b g$ □

Следствие 3.

$$1. f \in C[a, b] \Rightarrow \min_{x \in [a, b]} f(x) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \cdot \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$2. \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство.

$$1. m := \min f, M := \max f \Rightarrow m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \Rightarrow (b - a) \cdot m = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = (b - a) \cdot M$$

$$2. -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f(x)|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

□

Теорема 9. Интегральная теорема о среднем

$f \in C[a, b]$; тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = (b - a) \cdot f(c)$.

Доказательство. $m := \min f, M := \max f \Rightarrow m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq M \cdot (b - a) \Rightarrow \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f \in [m, M]$

Любое значение между m и M достигается $\Rightarrow \exists c \in [a, b] : \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f = f(c)$ □

Определение 8. Среднее значение функции на $[a, b]$ $I_f := \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f$.

Определение 9. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная; $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется интегралом с переменным верхним пределом, если $\Phi(x) := \int_a^x f$.

Определение 10. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная; $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется интегралом с переменным нижним пределом, если $\Psi(x) := \int_x^b f$.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f$

Теорема 10. Теорема Барроу

Если $f \in C[a, b]$ и $\Phi(x) = \int_a^x f$, то Φ — первообразная f .

Доказательство. Надо доказать, что $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = f(x)$.

Проверим для предела справа $y > x$; $R(y) := \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \cdot \left(\int_a^y f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y f$ по th о среднем $f(c)$, где $x < c < y$ (c зависит от y)

Надо доказать, что $\lim_{y \rightarrow x} R(y) = f(x)$. Берем последовательность $y_n \rightarrow x$, $y_n > x$

$R(y_n) = f(c_n)$, где $x < c_n < y_n \Rightarrow c_n \rightarrow x$ и f непрерывна в точке $x \Rightarrow R(y_n) = f(c_n) \rightarrow f(x) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x} R(y) = f(x)$ \square

Следствие 4.

1. $\Psi'(x) = -f(x)$
2. Если $f \in C(\langle a, b \rangle)$, то у f есть первообразная.

Доказательство.

$$1. \Psi(x) = \int_a^b f - \Phi(x) = \text{const} - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$$

$$2. \text{ Возьмем } c \in (a, b) \text{ и определим } F(x) := \begin{cases} \int_c^x f, & \text{если } x > c \\ -\int_x^c f, & \text{если } x < c \end{cases}$$

 \square **Теорема 11. Теорема Ньютона-Лейбница**

Если $f \in C[a, b]$, F — первообразная f , то $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) := \int_a^x f$ — первообразная f и все первообразные отличаются друг на друга на $\text{const} \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C$, $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$ \square

Обозначение 4. $\int_a^b f = f|_a^b := F(b) - F(a)$.

Теорема 12. Линейность интеграла

$$f, g \in C[a, b]; \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \text{ тогда } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Доказательство. Знаем, что если F и G — первообразные f и g , то $\alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ \square

Теорема 13. Формула интегрирования по частям

$u, v \in C^1[a, b]$; тогда $\int_a^b uv' = uv|_a^b - \int_a^b u'v$.

Доказательство. Знаем, что если H — первообразная uv' , то $uv - H$ — первообразная для uv' .

$$\int_a^b uv' = (uv - H)|_a^b = uv|_a^b - H|_a^b = uv|_a^b - \int_a^b u'v \quad \square$$

Теорема 14. Теорема о замене переменной

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b \rangle)$; $\phi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, $\phi \in C^{-1}(\langle a, b \rangle)$; $p, q \in \langle c, d \rangle$; тогда $\int_p^q f(\phi(t)) \cdot$

$$\phi'(t)dt = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x)dx.$$

Соглашение: если $a > b$, то $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Доказательство. Пусть F — первообразная для f ; тогда $F \circ \phi$ — первообразная для $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$.

$$\int_p^q f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F \circ \phi|_q^p = F(\phi(q)) - F(\phi(p)) = F|_{\phi(p)}^{\phi(q)}(q) = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x)dx \quad \square$$

Пример 4. $\int_1^3 \frac{x}{1+x^4} dx = \left[t = x^2; dt = 2x dx \right] = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctan t|_1^9 = \frac{1}{2}(\arctan 9 - \arctan 1)$

4. Приложения формулы интегрирования по частям

Пример 5. $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Доказательство. $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - t$, $\phi'(t) = -1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\phi(t)) \phi'(t) dt = - \int_{\phi(0)}^{\phi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad \square$$

Утверждение 6. $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$W_0 \geq W_1 \geq \dots \geq W_n$$

Доказательство. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[u = \sin^{n-1} x \rightarrow u' = (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \mid v' = \sin x \rightarrow v = -\cos x \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv' = uv|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$

$$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow W_n = \frac{n-1}{n} \cdot W_{n-2} \quad \square$$

Следствие 5. $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot W_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

Теорема 15. Формула Валлиса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство. $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \left| : \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right.$$

$$\frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

□

Следствие 6. $C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство. $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(2n)!!^2} \cdot 4^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n$

$$(2n)!! = 2^n \cdot n! \quad \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \sim \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!(2n)!!}{(2n)!!^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

□

Теорема 16. Формула Тейлора с остатком в интегральной формуле

$f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$; тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Доказательство. Индукция по n ; база $n=0$: $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$

Переход: $n \rightarrow n+1$

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$$n! \cdot R_n(x) = \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \left[v' = (x-t)^n \rightarrow v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \quad \left| \begin{array}{l} u = f^{(n+1)}(t) \rightarrow u' = f^{(n+2)}(t) \end{array} \right. \right] =$$

$$uv|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x u'v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) \cdot f^{(n+2)}(t) dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(x_0) + \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt}_{R_{n+1}(x)}$$

□

Пример 6. $H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$

Утверждение 7. Свойства:

$$1. \quad 0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$$

$$2. \quad \text{Если } c > 0, \text{ то } c^j H_j \rightarrow 0, \quad 0 < c^j H_j < \frac{((\frac{\pi}{2})^2 c)^j}{j!} \rightarrow 0$$

$$3. \quad H_0 = 1, \quad H_1 = 2$$

$$4. \quad H_j = (4j-2) \cdot H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

$$\begin{aligned} j! H_j &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j (\sin x)' dx = \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x}_{=0} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} dx = \\ &= 2j \underbrace{\left(\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cdot x(-\cos x) \right)}_{=0} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cdot \cos x dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \underbrace{x^2}_{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)} \cos x \, dx = \\
& = 2j((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(j-2)!H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)!H_{j-1}) = \\
& = 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4j!(j-1)H_{j-1} = j!((4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2})
\end{aligned}$$

5. Существует многочлен P_j степени $\leq j$ с целыми коэффициентами, для которых $H_j := P_j(\pi^2)$.

Доказательство. $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv 2$, $P_j(x) = (4j-2) \cdot P_{j-1}(x) - x \cdot P_{j-2}(x)$ — подходит \square

Теорема 17. Теорема Ламберта

π и π^2 иррациональны.

Доказательство. (Эрмит)

От противного. Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\text{целое}}{n^j}$

$n^j H_j \geq 1$ (это положительное целое)

но $n^j H_j \rightarrow 0$ (по свойству 2) ?? \square

5. Интегральные суммы

Определение 11. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; f равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; f непрерывна во всех точках, если $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x, \varepsilon) > 0 : \forall y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Утверждение 8. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\Rightarrow f$ непрерывна на E .

Пример 7.

0. $f(x) = x$

1. $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R} : |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $\delta = \varepsilon$ подходит

2. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева с константой L , если $\forall x, y \in E |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$

f равномерно непрерывна на $E : \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ подходит

3. $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывна на \mathbb{R}

Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

$$y = x + \frac{\delta}{2}, |x - y| < \delta; f(x) - f(y) = y^2 - x^2 = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta > 1 \text{ при } x > \frac{1}{\delta}$$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$ не равномерно непрерывна

Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

$y = \frac{\delta}{2}$ и $x = \delta$, $|x - y| < \delta$; $f(y) - f(x) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$ при $\delta < 1$ не подходит.

Если $\delta \geq 1$, то $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$, то $f(y) - f(x) = 1$.

Теорема 18. Теорема Кантора

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках; тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит. В частности, $\delta = 1$ не подходит $\Rightarrow \exists x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < \delta$ и $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_2, y_2 \in [a, b] : |x_2 - y_2| < \delta$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \delta$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

x_n — ограниченная последовательность $\xRightarrow{\text{Б.-В.}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow c$

$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow c \in [a, b]$; f непрерывна в $c \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$

$c \leftarrow x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \rightarrow c \Rightarrow y_{n_k} \rightarrow c \Rightarrow f(y_{n_k}) \rightarrow f(c)$

Следовательно $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \rightarrow f(c) - f(c) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, получили противоречие. □

Определение 12. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \text{ и } |x - y| < \delta\}$ для $\delta \geq 0$.

$\omega_f(\delta)$ — модуль непрерывности.

Утверждение 9. Свойства:

1. $\omega_f(0) = 0$.

2. $\omega_f \geq 0$.

3. ω_f нестрого возрастает.

4. $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$.

5. Если f липшицева с константой L , то $\omega_f(\delta) \leq L\delta$.

($|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L\delta$, если $|x - y| \leq \delta$; то есть все числа (и \sup в том числе) не превышают $L\delta$)

6. f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \omega_f$ непрерывна в нуле (то есть $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$).

Доказательство. \Rightarrow : f равномерно непрерывна; возьмем $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x, y \in E$ и $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow$ если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2}$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) \leq \varepsilon \Rightarrow \omega_f(\alpha) \leq \varepsilon \forall \alpha < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$

\Leftarrow : возьмем $\varepsilon > 0$ и такую $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ если $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ □

$$7. f \in C[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$$

(\Rightarrow : *th Кантора*; \Leftarrow : *б свойство*)

Определение 13. $[a, b] : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \tau = \{x_0, \dots, x_n\}$

τ – дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a, b]$.

Определение 14. Ранг дробления $|\tau| := \max\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ (самый длинный отрезок дробления).

Определение 15. Оснащение дробления $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \forall k$.

Определение 16. Интегральная сумма (сумма Римана): $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема 19. Теорема об интегральных суммах

$f \in C[a, b];$ тогда $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a) \cdot \omega_f(|\tau|)$

Доказательство. $\Delta := \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
 $= \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt$
 $|\Delta| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{|f(t) - f(\xi_k)|}_{\leq \omega_f(x_k - x_{k-1}) \leq \omega_f(|\tau|)} dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) = \omega_f(|\tau|) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b - a)$ □

Следствие 7.

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $< \delta$ и \forall его оснащения: $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$.

2. τ_n – последовательность дроблений, т.ч. если $|\tau_n| \rightarrow 0$, то $S(f, \tau, \xi) \rightarrow \int_a^b f$.

Пример 8. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p, p \geq 0$

Хотим посчитать $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

Возьмем непрерывную $f(x) = x^p$ и воспользуемся теоремой для нее:

$$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = S(f, \tau, \xi) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

$$x_k = \frac{k}{n}, [a, b] = [0, 1], x_k - x_{k+1} = \frac{1}{n}, \xi_k = x_k$$

Определение 17. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — интегрируема по Риману и I — ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ дробления ранга $< \delta$ и \forall оснащения $\left| S(f, \tau, \xi) - I \right| < \varepsilon$.

Замечание. Любая непрерывная функция — такая.

Замечание. Берем дробления на равные отрезки $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} : x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ и $\xi_k = x_k$.

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) \rightarrow \int_a^b$$

$$\text{Теперь рассмотрим } \xi'_k = x_{k-1} : S(f, \tau, \xi') = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \rightarrow \int_a^b$$

$$\text{Сумма площадей трапеций: } \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}+x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}+x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{x_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

$$\textbf{Лемма 1.} \quad f \in C^2[\alpha, \beta]; \text{ тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t)dt$$

$$\text{Доказательство. } \gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}; \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma)dt = \underbrace{f(t)(t - \gamma)|_{\alpha}^{\beta}}_{f(\beta) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2} - f(\alpha) \cdot (-\frac{\beta-\alpha}{2}) = \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma)dt$$

$$\text{Рассмотрим } \left((t - \alpha)(\beta - t) \right)' = \left(-t^2 + (\beta + \alpha)t - \alpha\beta \right)' = -2t + (\beta + \alpha) = -2(t - \gamma)$$

$$\Delta = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma)dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \left((t - \alpha)(\beta - t) \right)' dt = \underbrace{\frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta}}_0 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t)dt$$

□

Теорема 20. *Оценка погрешности в формуле трапеций*

$$f \in C^2[a, b]; \text{ тогда } \left| \int_{\alpha}^{\beta} f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |f''|$$

$$\text{Доказательство. } \Delta = \int_{\alpha}^{\beta} f - \sum_{k=1}^n = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)dt$$

$$|\Delta| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|(t - x_{k-1})(x_k - t)dt \leq \frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''(t)|dt$$

$$(t - x_{k-1})(x_k - t) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (x_k - x_{k-1})^2 \leq \frac{|\tau|^2}{4}$$

□

Теорема 21. *Формула Эйлера-Маклорена для второй производной*

$$f \in C^2[m, n]; \text{ тогда } \sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt$$

$$\text{Доказательство. } \int_{k-1}^k f(t)dt - \frac{f(k-1)+f(k)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{k-1}^k f''(t) \underbrace{(t - (k-1))}_{\{t\}} \underbrace{(k - t)}_{1-\{t\}} dt = -\frac{1}{2} \int_{k-1}^k f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt$$

Суммирование по k от $m+1$ до n :

$$\underbrace{\sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt}_{\int_m^n f(t) dt} - \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \frac{f(k-1) + f(k)}{2}}_{\sum_{k=m}^n f(k) - \frac{f(m) + f(n)}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\}) dt}_{\int_m^n f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\}) dt}$$

□

Пример 9.

1. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p$, $f(t) = t^p$, $p > -1$, $m = 1$, $n = n$, $f''(t) = p(p-1) \cdot t^{p-2}$

$$S_p(n) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_1^n f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\}) dt = \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \underbrace{\int_1^n t^p dt}_{= \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}} + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1) t^{p-2} \{t\} (1 - \{t\}) dt$$

○ Случай $p \in (-1, 1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$

$$0 < \int_1^n \underbrace{t^{p-2} \{t\} (1 - \{t\})}_{\leq \frac{1}{4}} dt \leq \frac{1}{4} \underbrace{\int_1^n t^{p-2} dt}_{= \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} < \frac{1}{1-p}}$$

стантой

○ Случай $p > (-1, 1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + o(n^{p-1})$

$$0 < \int_1^n t^{p-2} \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\}) dt \leq \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{n^{p-1}-1}{p-1}$$

2. Гармонические числа $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$$f(t) = \frac{1}{t}, m = 1, n = n, f''(t) = \frac{2}{t^3}$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int_1^n \frac{dt}{t}}_{\ln t \Big|_1^n = \ln n} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^n \frac{2\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt}_{:= a_n}$$

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n$$

$$a_n - \text{возрастающая последовательность; } a_n \leq \int_1^n \frac{1}{4t^3} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) \leq \frac{1}{8}$$

$$a_n \text{ возрастающая и ограниченная} \Rightarrow \exists \lim a_n = a \leq \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$$

$$H_n = \ln n + \underbrace{\left(a + \frac{1}{2} \right)}_{=:\gamma} + o(1)$$

γ — постоянная Эйлера, $\gamma \approx 0,5772156649\dots$

3. Формула Стирлинга: $n! \sim n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k, f(t) = \ln t, f''(t) = -\frac{1}{t^2}, m = 1, n = n$$

$$\ln n! = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2} \ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t \, dt}_{=n \cdot \ln n - n*} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt}_{=:b_n} \Rightarrow$$

$$* \int_1^n \ln t \, dt = t \cdot \ln t \Big|_1^n - \int_1^n t \frac{1}{t^2} dt = n \cdot \ln n - n$$

$$\Rightarrow \ln n! = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n - b_n$$

$$b_n - \text{возрастающая последовательность: } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} \int_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt > 0$$

$$b_n - \text{ограниченная последовательность: } b_n \leq \frac{1}{8} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8}$$

Тогда существует $\lim b_n = b$ и $b_n = b + o(1)$.

$$\ln n! = n \cdot \ln n - b + \frac{1}{2} \ln n - b + o(1) \Rightarrow n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-b} \cdot \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1) \sim 1} \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot C$$

$$\text{Найдем } C. \text{ Рассмотрим } \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot C}{(n^n \cdot e^{-n} \sqrt{n} \cdot C)^2} = \frac{2^{2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot C}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot C^2} = \frac{4^n \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot C}$$

$$\text{Тогда } \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot C} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{2}}{C} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

4. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = 0$.

$$\text{Доказательство. } \int_a^b f = \underbrace{\int_a^c f + \int_c^b f}_{\xrightarrow{c \rightarrow b-} \int_a^b f} \Rightarrow \int_c^b f \rightarrow 0$$

□

6. Несобственные интегралы

Определение 18. $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in C[a, b)$. Тогда **несобственный интеграл**:

$$\int_a^b f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f, \text{ если предел существует.}$$

Определение 19. $-\infty \leq a < b < +\infty, f \in C(a, b]$. Тогда **несобственный интеграл**:

$$\int_a^b f := \lim_{A \rightarrow a+} \int_A^b f, \text{ если предел существует.}$$

Определение 20. Если предел существует и конечен, то соответствующий интеграл назовем **сходящимся**. В остальных случаях назовем интеграл **расходящимся**.

Замечание.

1. Если $b \neq -\infty$ и $f \in C[a, b]$, то $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$.

Комментарий: $\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$, $\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| = \left| \int_B^b f \right| \leq (b - B)M$, где $M = \max |f|$.

2. Если f имеет первообразную F в $[a, b)$, то $\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{B \rightarrow b-} F(b) - F(a)$.

Комментарий: $\int_b^B f = F(b) - F(a)$ и написать пределы.

Теорема 22. Критерий Коши для несобственных интегралов

$-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C[a, b)$; тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists C \in (a, b)$:

$$\forall A, B \in (c, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная f . Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{B \rightarrow b-} F(b)$.

Если $b \neq +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in \underbrace{(b - \delta; b)}_{=c} \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{=\int_A^B f} < \varepsilon$

Если $b = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists E \forall A, B \supset \underbrace{E}_{=c} \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{=\int_A^B f} < \varepsilon$ □

Замечание. Если $\exists A_n, B_n \in [a, b)$, т.ч. $A_n, B_n \rightarrow b$ и $\underbrace{\int_{A_n}^{B_n} f}_{:=C_n} \nrightarrow 0$, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ расходится.

Найдется подпоследовательность C_{n_k} , т.ч. $|C_{n_k}| > \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{B_n}^{A_n} f \right| \geq \varepsilon$?! (противоречие с критерием Коши).

Пример 10.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(1)$, где $F(x)$ — первообразная $\frac{1}{x^p}$.

Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1) \cdot x^{p-1}}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл расходится} \end{cases}$

Итог: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p > 1$ и в этом случае $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = F(1) - \lim_{x \rightarrow 0+} F(x)$, где $F(x)$ — первообразная $\frac{1}{x^p}$.

Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1) \cdot x^{p-1}}$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-p} = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл расходится} \end{cases}$

Итог: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p < 1$ и в этом случае $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

Определение 21. f непрерывно на $[a, b]$ за исключением точек c_1, \dots, c_n .

Рассмотрим $\int_a^{d_1} f, \int_{d_1}^{c_1} f, \int_{c_1}^{d_2} f, \dots, \int_{d_{n+1}}^b f$.

Если все интегралы сходятся, то $\int_a^b f$ сходится и $\int_a^b f = \int_a^{d_1} f + \int_{d_1}^{c_1} f + \int_{c_1}^{d_2} f + \dots + \int_{d_{n+1}}^b f$.

В противном случае интеграл расходится.

Утверждение 10. Свойства несобственных интегралов:

1. Аддитивность

$c \in (a, b)$; если $\int_a^b f$ сходится, то $\int_c^b f$ сходится и $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Доказательство. F — первообразная f ; $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$

Сходимость $\int_a^b f \Leftrightarrow \lim_{B \rightarrow b-} F(B)$ существует и конечен.

$$\int_b^c f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c) = \int_a^b f - \underbrace{(F(c) - F(a))}_{\int_a^c f}$$

□

2. Линейность

Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Доказательство. F и G — первообразные для f и g ; по условию $\lim_{B \rightarrow b-} F(B)$ и $\lim_{B \rightarrow b-} G(B)$ существуют и конечные $\Rightarrow \alpha F + \beta G$ — первообразные для $\alpha f + \beta g$ и $\lim_{B \rightarrow b-} (\alpha \cdot F(B) + \beta \cdot$

$$G(B)) = \alpha \lim_{B \rightarrow b-} F(B) + \beta \lim_{B \rightarrow b-} G(B) \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) \text{ сходится}$$

$$\text{и } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_{B \rightarrow b-} F(B) + \beta \lim_{B \rightarrow b-} G(B) - \alpha \cdot F(a) - \beta \cdot G(a) = \alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g$$

□

Замечание. Если $\int_a^b f$ сходится и $\int_a^b g$ расходится, то $\int_a^b (f + g)$ расходится.

Комментарий: $g = (f + g) - f$

3. **Монотонность** Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и $f \leq g$ во всех точках от a до b , то $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Доказательство. $\int_a^B f \leq \int_a^B g$ и перейти к пределу. \square

4. Формула интегрирования по частям

Если $f, g \in C^1[a, b)$, то $\int_a^b f g' = f g \big|_a^{b \leftarrow \text{тут предел}} - \int_a^b f' g$.

Если существует два конечных предела, то существует и третий и есть равенство.

Доказательство. $\int_a^B f g' = f g \big|_a^B - \int_a^B f' g$ и перейти к пределу. \square

5. Замена переменной

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$, $\varphi \in C^{-1}[\alpha, \beta)$, $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta_-)$, $f \in C[a, b)$, тогда:

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x) dx$ (если существует один \int , то существует и другой и они равны).

Доказательство. $F(y) := \int_{\varphi(x)}^y f(x) dx$, $\Phi(\gamma) := \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Далее рассмотрим следующие случаи:

I. Если $\exists \lim_{y \rightarrow \varphi(\beta_-)} F(y)$.

Возьмем $\gamma_n \uparrow \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_n) \rightarrow \varphi(\beta_-) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\gamma_n} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \lim_{y \rightarrow \varphi(\beta_-)} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x) dx$

II. Если $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma)$.

Проверим, что $\exists \lim_{y \rightarrow \varphi(\beta_-)} F(y)$.

При $\varphi(\beta_-) < b$ очевидно, поскольку $F \in C[a, b)$. Пусть $\varphi(\beta_-) = b$. Возьмем $b_n \uparrow b$.

Считаем, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta)$ т.ч. $\varphi(\gamma_n) = b_n$.

Докажем, что $\gamma_n \rightarrow \beta$.

От противного. Найдется $\gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta \Rightarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) < b$ (φ непрерывна в $\tilde{\beta}$). Противоречие с тем, что $b_n \rightarrow b$. Следовательно $\gamma_n \rightarrow \beta$.

$F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n)$ имеет предел по Гейне $\Rightarrow \exists \lim_{y \rightarrow b_-} F(y)$

□

Замечание. $\int_a^b f$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ сводится к $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{1}{t^2} dt$.

Теорема 23. Пусть $f \in C[a, b]$ и $f \geq 0$. Тогда сходимость $\int_a^b f$ равносильна ограниченности сверху функции $F(y) := \int_a^y$.

Доказательство. Если $f \geq 0$, то F — возрастающая функция: $F(y) - F(x) = \int_x^y f \geq 0$

$\int_a^b f$ — сходится $\Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow b-} F(y)$ существует и конечен, а так как F возрастает, то это равносильно ограниченности F сверху. □

Следствие 8. Признак сравнения $f, g \in C[a, b]$, $f, g \geq 0$ и $f \leq g$, тогда:

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. F и G первообразные. Знаем, что $F(x) \leq G(x)$: $F(x) = \int_a^x f \leq \int_a^x g = G(x)$.

Если $\int_a^b g$ сходится, то G ограничена сверху $\Rightarrow F$ ограничена сверху $\Rightarrow \int_a^b f$ сходится.

Второй пункт = отрицание первого. □

Замечание.

1. Неравенство $f \leq g$ может выполняться лишь при аргументах, близких к b .
2. Неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = o(g)$.
3. Если $f \in C[a, +\infty)$, $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int_a^{+\infty} f$ сходящийся.

Следствие 9. Пусть $f, g \in C[a, b)$, $f, g \geq 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b-$. Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x) \rightarrow 1 \Rightarrow$ при x близких к b ; $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x) \leq 2g(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int_a^b g \text{ сходящийся, то и } \int_a^b f \text{ сходящийся} \\ g(x) \leq 2f(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int_a^b f \text{ сходящийся, то и } \int_a^b g \text{ сходящийся} \end{cases}$$

□

Замечание. Если $\int_a^{+\infty} f$ сходящийся и $f \geq 0$, то необязательно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Определение 22. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. $\int_a^b f$ называется *абсолютно сходящимся*, если $\int_a^b |f| < +\infty$.

Теорема 24. Если $\int_a^b f$ абсолютно сходящийся, то он сходится.

Доказательство. $|f| = f_+ + f_-$, $f_{\pm} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f_{\pm} \leq |f| \Rightarrow \int_a^b f_{\pm}$ — сходящийся $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f_+ + \int_a^b f_-$ — сходящийся. \square

Теорема 25. Признак Дирихле

$$f, g \in C[a, +\infty) \begin{cases} 1) f \text{ имеет первообразную.} \\ 2) g \text{ монотонна.} \\ 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство. Только для $g \in C^1[a, +\infty)$.

$F(y) := \int_a^y f(x)g(x)dx$ — ограниченная функция.

$$\int_a^y f(x)g(x)dx = \int_a^y F'(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)dx$$

$F(y)g(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ (ограниченная на бесконечно малую) \Rightarrow надо доказать, что $\int_a^{+\infty} F'(x)g(x)dx$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходящийся.

$$\int_a^{+\infty} |F'(x)||g(x)|dx \leq M \int_a^{+\infty} |g(x)|dx = M \left| \int_a^{+\infty} g(x)dx \right| = M |g(a)|^{+\infty} = M |g(a)| < +\infty \quad \square$$

Теорема 26. Признак Абеля

$$f, g \in C[a, +\infty) \begin{cases} 1) \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \\ 2) g \text{ монотонна.} \\ 2) g \text{ ограничена.} \end{cases} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство. Пусть $b := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \in \mathbb{R}$; $\tilde{g}(x) := g(x) - b$ — монотонна и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$.

$F(y) := \int_a^y f(x)dx$ и $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \int_a^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R} \Rightarrow F(y)$ ограничена при больших $y \Rightarrow F$ — ограниченная функция.

Тогда f и \tilde{g} удовлетворяют признаку Дирихле $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx}_{\text{доказали, что сходится}} + b \cdot \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)dx}_{\text{сходится по условию}} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.} \quad \square$$

Следствие 10. $f, g \in C[a, +\infty)$, f периодична с периодом T , g монотонна, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — сходится $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = 0$.

Доказательство. \Leftarrow : $F(y) := \int_a^y f(x)dx$ — периодична с периодом T . $F(y+T) = F(y) + \int_y^{y+T} f(x)dx \Rightarrow$ все значения F принимает на $[a, a+T]$, а там она ограничена по th В. \Rightarrow можно применить принцип Дирихле.

\Rightarrow : от противного.

Пусть $b := \int_a^{a+T} f(x)dx \neq 0$. Рассмотрим $\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{b}{T} \Rightarrow \int_a^{a+T} \tilde{f}(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \tilde{f}(x)g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} \tilde{f}(x)g(x)dx}_{\text{сходится}} = \frac{b}{T} \int_a^{+\infty} g(x)dx$ — сходится. Противоречие. \square

Пример 11. $\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

1. Если $p > 1$: $|\frac{\sin x}{x^p}| \leq \frac{1}{x^p}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ сходится при $p > 1 \Rightarrow$ абсолютно сходящийся.

2. Если $0 < p \leq 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ — расходится $\frac{1}{x^p} \searrow$ при $x \rightarrow +\infty$

$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ по следствию $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится.

$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx > 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ расходится.

Т.е. сходится, но не абсолютно.

3. Если $p \leq 0$: $a_n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $b_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$ при $x \in [a_n, b_n]$

$\int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^p} dx \geq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ т.е. сколь угодно далеко есть отрезок с $\int = \frac{\pi}{3}$.

Противоречие с критерием Коши: $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \underbrace{\varepsilon}_{=\frac{\pi}{3}} > 0 \exists B \forall \underbrace{a}_{=a_n}, \underbrace{b}_{=b_n} >$

$B \mid \int_a^b f(x)dx < \varepsilon$

Часть II

Метрические пространства

7. Метрические и нормированные пространства

Определение 23.

$\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ — метрика (расстояние), если:

1. $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in X$.
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Определение 24. Пара (X, ρ) — это метрическое пространство.

Пример 12.

1. Дискретная метрика: $\rho(x, x) = 0, \rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$
2. $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$
3. $X = \mathbb{R}^2$ расстояние на плоскости
4. Манхэттенская метрика: $X = \mathbb{R}^2, \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
5. $\mathbb{R}^d = (x_1, \dots, x_d)$
 $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}$ (на самом деле, даже p -ая степень и корень p -ой степени подойдет)

*Неравенство треугольника в этом случае — это неравенство Минковского.

6. $X = C[a, b], \rho(f, g) = \int_a^b |f - g|$.
7. Французская железнодорожная метрика: $\rho(A, B) = AB$, если A и B на одной прямой и $\rho(AB) = AP + PB$ иначе.
(картинка)

Определение 25. (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X, r > 0$.

Открытый шар $B_r(a) := \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$.

Замкнутый шар $\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$.

a — центр шара, r — радиус шара.

Утверждение 11. Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.
2. Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 : \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \emptyset$.

Доказательство. $r := \frac{\rho(a,b)}{3} > 0$. Предположим, что $x \in \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) \Rightarrow \rho(x,a) \leq r \ \& \ \rho(x,b) \leq r \Rightarrow \rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) \leq r + r = \frac{2}{3}\rho(a,b)$, противоречие. \square

Определение 26. $A \subset X$; A – **открытое множество**, если $\forall a \in A$ найдется $B_r(a) \subset A$.

Теорема 27. О свойствах открытых множеств

1. \emptyset и X – открытые множества.
2. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество.
4. $B_r(a)$ – открытое множество.

Замечание. В третьем конечность существенна: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1, \frac{1}{n}) = (-1, 0]$.

Доказательство.

2. A_α – открытые множества, $\alpha \in I$. Проверим, что $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ – открытое.

Возьмем $a \in U \Rightarrow$ найдется $\alpha_0 : a \in A_{\alpha_0}$ – открытое \Rightarrow найдется $r > 0 : B_r(a) \subset A_{\alpha_0} \subset U$.

3. A_1, \dots, A_n – открытые множества. Проверим, что $U := \bigcap_{k=1}^n A_k$ – открытое.

Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in A_k \ k = 1, \dots, n$ – открытое \Rightarrow найдется такое $r_k : B_{r_k}(a) \subset A_k$.

$r := \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0 \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \ \forall k = 1, \dots, n \Rightarrow B_r(a) \subset U$.

4. $B_R(a)$ – открытое множество; $r := R - \rho(a, x)$ и покажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$.

(картинка)

Возьмем $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(x, y) < r \Rightarrow \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R$.

\square

Определение 27. $A \subset X$, $a \in A$; a – **внутренняя точка** A , если найдется $r > 0 : B_r(a) \subset A$.

Замечание. A – открытое множество \Leftrightarrow всего его точки внутренние.

Определение 28. $\text{Int } A$ – **внутренность множества** A – множество всех внутренних точек.

Замечание. Если A – открытое множество, то $\text{Int } A = A$.

Утверждение 12. Свойства внутренности:

1. $\text{Int } A$ — объединение всех открытых множеств, содержащихся в A .
2. $\text{Int } A$ — открытое множество.
3. A — открыто $\Leftrightarrow \text{Int } A = A$.
4. Если $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$.
5. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$.
6. $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$.

Доказательство.

1. $G := \bigcup_{U \in A, U - \text{откр.}}$. Надо доказать, что $G = \text{Int } A$.
 \supset : Берем $a \in \text{Int } A \Rightarrow \underset{\text{открытое}}{B_r(a)} \subset A \Rightarrow a \in B_r(a) \subset G$.
 \subset : Берем $a \in G \Rightarrow a \in U$ для некоторого открытого $U \subset A \Rightarrow B_r(a) \subset U \subset A \Rightarrow a$ — внутренняя точка $A \Rightarrow a \in \text{Int } A$.
2. Объединение открытых множеств — открытое.
3. $\text{Int } A$ — открытое \Rightarrow , \Leftarrow есть.
4. Если a — внутренняя точка A , то $B_r(a) \subset A \subset B \Rightarrow a \in \text{Int } B$.
5. $\begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \\ A \cap B \subset B \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B \end{cases} \Rightarrow \subset \text{ есть.}$
 \supset : Пусть $a \in \text{Int } A \cap \text{Int } B \Rightarrow \begin{cases} B_{r_1}(a) \subset A \\ B_{r_2}(a) \subset B \end{cases} \Rightarrow B_{\min(r_1, r_2)}(a) \in A \cap B \Rightarrow a \in (\text{Int } A \cap \text{Int } B)$.
6. $2 + 3$

□

Определение 29. A — замкнутое множество, если $X \setminus A$ — открытое множество.

Теорема 28. О свойствах замкнутых множеств:

1. \emptyset и X — замкнутые множества.
2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнутое множество.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.

4. \overline{B}_r — замкнутое множество.

Доказательство.

1. Пусть A_α — замкнутое, $\alpha \in I$, $F := \cap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Проверим, что $x \setminus F$ — открытое: $x \setminus F = x \setminus \cap_{\alpha \in I} A_\alpha = \cup_{\alpha \in I} (x \setminus A_\alpha)$ — открытое.
откр.

2. Пусть A_1, \dots, A_n — замкнутые, $F := \cup_{k=1}^n A_k$.

Проверим, что $x \setminus F$ — открытое: $x \setminus F = x \setminus \cup_{k=1}^n A_k = \cap_{k=1}^n (x \setminus A_k)$ — открытое.
откр.

3. Проверим, что $X \setminus \overline{B}_R(a)$ — открытое множество. Возьмем $x \notin \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(a, x) > R$.

(picture)

$r := \rho(x, a) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$, т.е. что $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) = \emptyset$.

Пусть $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(y, x) < r$ & $\rho(y, a) \leq R \Rightarrow \rho(a, y) + \rho(y, x) \leq R + r = \rho(a, x)$.

□

Замечание. В третьем существенна конечность: $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, \frac{1}{n})$.

Определение 30. $\text{Cl } A$ — замыкание множества A — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

Теорема 29. $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$.

$X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\text{Int}(X \setminus A) = \cup \{U \text{ — открытое: } U \subset X \setminus A\}$

$X \setminus \text{Int } A = X \setminus \cup \{...\} = \cap \{X \setminus U : U \text{ — открытое: } U \subset X \setminus A\} = \cap \{F : F \text{ — замкнутое и } X \setminus F \subset X \setminus A\}$
 $\Leftrightarrow F \supset A$

□

Утверждение 13. Свойства замыканий:

1. $\text{Cl } A$ — замкнутое множество.

2. $A \text{ замкнуто} \Leftrightarrow \text{Cl } A = A$.

3. $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$.

Комментарий: $X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B)$.

4. $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$.

Комментарий: $X \setminus \text{Cl}(A \cup B) = \text{Int}(X \setminus (A \cup B)) = \text{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$.

5. $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$.