Содержание

Часть I

Интегральное исчисление функций одной переменной

1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$, функция $F : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функции f, если $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Теорема 1. *Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.*

Доказательство. Позже. □

Замечание. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ не имеет первообразной.
Пусть F — первообразная $\operatorname{sign} x$.
$F'(-1) = \operatorname{sign}(-1) = -1$, $F'(1) = \operatorname{sign}(1) = 1$; по теореме Дарбу на $(-1,1)$ F' принимает все значения между -1 и 1. Это не так.

Теорема 2. $f,F : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ *и* F — *первообразная* f, *тогда:*

1. $F + C$ — *первообразная* f.
2. *Если* $\Phi : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ *первообразная* f, *то* $\Phi = F + C$.

Доказательство.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \Phi - F = const$.

□

Определение 2. Множество всех первообразных функции f — неопределенный интеграл.
$\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}, F \text{ — первообразная } f\} = \{F : F \text{ — первообразная } f\}$

Обозначение 1. $\int f(x)dx = F(x) + C$

Замечание. Для справедливости равенства достаточно показать, что $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1. ***Таблица интегралов:***

1. $\int 0 \ dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ *при* $p \neq 1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ *при* $a > 0$ *и* $a \neq 1$
5. $\int \sin x \ dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \ dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin x + C$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arctg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = -\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$
12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln|\frac{1+x}{1-x}| + C$

Доказательство.

3. Если $x > 0 : \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

   Если $x < 0 : \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$

11. $(\ln|x + \sqrt{x^2+1}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (x + \sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

12. $(\frac{1}{2} \ln|\frac{1+x}{1-x}|)' = (\frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{2} \ln|1-x|)' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$

□

Теорема 3. ***Теорема об арифметических действиях с неопределенными интегралами***

$f,g : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную, тогда:

1. *$f + g$ имеет первообразную и $\int(f+g) = \int f + \int g$.*
2. *$\alpha \cdot f$ имеет первообразную и $\int(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int f$, если $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.*
3. *Линейность интеграла: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, тогда $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \int f + \beta \cdot \int g$.*

Доказательство.

1. Пусть F и G – первообразные f и g, тогда $(F+G)' = F' + G' = f + g \Rightarrow F + G$ – первообразная для f и g.

2. $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f \Rightarrow \alpha F$ – первообразная для αf.

□

Теорема 4. ***Теорема о замене перменной в неопределенном интеграле***
$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$; φ дифференцируема, f имеет первообразную F, тогда: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. $F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ □

Следствие 1. $\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C$

Пример 1. $\int \frac{t}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan(t^2) + C$
$\varphi(t) = t^2$, $\varphi'(t) = 2t$

Теорема 5. ***Формула интегрирования по частям***
$f,g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$; f,g диффиренцируемы, $f'g$ имеет первообразную, тогда fg' имеет первообразную и $\int f'g = fg - \int fg'$.

Доказательство. H – первообразная $f'g$; (!) $\int fg' = fg - H + C$
$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = f'g + fg' - fg' = f'g$ □

Пример 2. $\int \ln x\, dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x\cdot\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\, dx = x\cdot\ln x - x + C$
$f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

2. Определенный интеграл

Определение 3. $\mathcal{F}$ – ограниченные множества на $\mathbb{R}^2$; $\sigma : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – площадь, если:

1. $\sigma(\mathcal{F}) \geq 0$.

2. $\sigma([a,b]\times[c,d]) = (b-a)(d-c)$.

3. Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\sigma(F_1 \cup F_2) = \sigma(F_1) + \sigma(F_2)$.

Утверждение 2. ***Свойство площади:***
Если $\tilde{F} \subset F$, то $\sigma(\tilde{F}) \geq \sigma(F)$.
$\sigma(\tilde{F}) = \sigma(F) + \underbrace{\sigma(\tilde{F} \setminus F))}_{\geq 0} \geq \sigma(F)$

Определение 4. $\sigma : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – квазиплощадь, если:

1. $\sigma(\mathcal{F}) \geq 0$.

2. $\sigma([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$.

3. Если $\tilde{F} \subset F$, то $\sigma(\tilde{F}) \geq \sigma(F)$.

4. Пусть l – горизонтальная или вертикальная прямая; F_- левее, F_+ правее и $F_- \cup F_+ = F$; тогда $\sigma(F) = \sigma(F_-) + \sigma(F_+)$.

Утверждение 3. ***Свойства квазиплощади:***

1. *Если F – подмножество вертикального или горизонтального отрезка, то $\sigma(F) = 0$.*

   Следует из 2 и 3 пунктов, $\sigma(F) \leq \sigma($отрезка$) = 0$.

2. *В 4 не важно, где лежат точки с l:*

   Пусть Δ – множество отрезка, тогда $\sigma(F_- \setminus \Delta) = \sigma(F \cup \Delta)$, $\sigma(F_- \setminus \Delta) = \sigma(F_- \setminus \Delta) + \sigma(\Delta)$.

Обозначение 2. P – прямоугольник $[a,b] \times [c,d]$; $|P| = (d-c)(b-a)$.

Пример 3. Примеры квазиплощадей:

1. $\sigma_1(F) := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| : P_k$ – прямоугольник, $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k\}$

2. $\sigma_2(F) := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |P_k| : P_k$ – прямоугольник, $F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\}$

Замечание. $\sigma_1(F) \geq \sigma_2(F)$ (множество $\{...k\} \supset \{...\infty\}$)

Теорема 6.

1. *σ_1 – квазиплощадь.*

2. *σ_1 инвариантна относительно сдвига.*

Доказательство. 2. Докажем, что $\sigma_1(F) = \sigma_1(F+a)$, где a – произвольный вектор.

Действительно: $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k \Leftrightarrow F + a \subset \bigcup_{k=1}^{n} (P_k + a)$

1. Проверим определение:

   1) $\sigma_1(F) \geq 0$ – очевидно (инфимум множества неотрицательных чисел).

   3) $\tilde{F} \supset F \Rightarrow \sigma(\tilde{F}) \geq \sigma(F)$

   $F \subset \tilde{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k \Rightarrow F \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k \Rightarrow$ у F больше множество сумм $\Rightarrow \inf$ меньше.

   2) $\sigma([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$, необходимо доказать $\leq$ и $\geq$

   $\leq$: поскольку прямоугольник покрывает сам себя

   $\geq$: продлим каждую сторону каждого прямоугольника и получим разбиение на маленькие прямоугольники. Поскольку при подсчете $\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|$ площадь маленьких прямоугольников считается несколько раз, то $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k \geq (d-c)(b-a) \Rightarrow \inf \geq (d-c)(b-a)$

4) $\sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+) = \sigma_1(F)$, необходимо доказать $\leq$ и $\geq$

$\geq$: $F_- \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ и $F_+ \bigcup_{j=1}^m Q_j$; $F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ и $\bigcup_{j=1}^m Q_j$

$\sigma_1(F) \leq \sum\limits_{k=1}^n |P_k| + \sum\limits_{j=1}^m |Q_j|$

Зафиксируем Q_j. Если заменить $\sum\limits_{k=1}^n P_k$ на $\inf$: $\sigma_1(F) \leq \sigma_{F_-} + \sum\limits_{j=1}^m |Q_j| \overset{\text{тоже самое верно для inf}}{\rightarrow}$

$\sigma_1(F) \leq \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+)$

$\geq$: берем $F \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$

Проведем вертикальную прямую l и обозначим $P_k^- + P_k^+$: $P_k = P_k^- + P_k^+$, $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$

$F_- \subset \bigcup_{k=1}^n P_k^- \Rightarrow \sigma_1(F_-) \leq \sum\limits_{k=1}^n |P_k^-|$ $F_+ \subset \bigcup_{k=1}^n P_k^+ \Rightarrow \sigma_1(F_-) \leq \sum\limits_{k=1}^n |P_k^+|$

$\Rightarrow \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+) \leq \sum\limits_{k=1}^n |P_k^-| + \sum\limits_{k=1}^n |P_k^+| = \sum\limits_{k=1}^n |P_k| \Rightarrow \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+) \leq \sigma_1(F)$

$\square$

Определение 5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; тогда:
$f_+(x) = \max\{f(x),0\}$ $f_-(x) = \max\{-f(x),0\}$

Утверждение 4. ***Свойства:***

1. *$f_+(x), f_-(x) \geq 0$.*
2. *$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.*
3. *$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.*
4. *$f_+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}$, $f_-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$*
5. *$f \in C[a,b]$, то $f_\pm \in C[a,b]$*

Определение 6. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ неоттрицательная; подграфик $\mathcal{P}_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ o \leq y \leq f(x)\}$

Замечание. $\mathcal{P}_f$, $f \in C[a,b]$ – ограниченное множество.

Доказательство. $f \in C[a,b] \overset{\text{Б.-В.}}{\Rightarrow} f$ – ограниченная $\Rightarrow \mathcal{P}_f \subset [a,b] \times [m,M]$ (m – min; M – max) $\square$

Определение 7. Зафиксируем σ – квазиплощадь и положим $\int\limits_a^b f := \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-})$ – определенный интеграл.

Утверждение 5. ***Свойства определенного интеграла:***
f – непрерывная функция.

1. $\int\limits_a^a f = 0$.

2. $\int\limits_a^b 0 = 0$.

3. *Если* $f \leq 0$, *то* $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_f)$.

   Комментарий: $f_- \equiv 0 \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) = 0$

4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$.

   Комментарий: $(-f)_+ = f_- \Rightarrow \mathcal{P}_{f_+} = \mathcal{P}_{(-f)_-}$

   $(-f)_- = f_+ \Rightarrow \mathcal{P}_{f_-} = \mathcal{P}_{(-f)_+}$

5. $\int\limits_a^b c = c \cdot (b - a)$

   Комментарий: если $c > 0$, *то* $\mathcal{P} = [a,b] \times [0,c]$.

6. *Пусть* $f \geq 0$ *и* $\int\limits_a^b f = 0$, *тогда* $f \equiv 0$.

   Доказательство. От противного.

   Пусть $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \mathcal{P}_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{P}_f) \geq |...| = \delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$?? □

3. Свойства интеграла

Теорема 7. ***Аддитивность интеграла***
$f \int C[a,b]$ и $c \in [a,b]$; тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

Обозначение 3. $\mathcal{P}_f(E) = \mathcal{P}_{f|_E}$

Доказательство. $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,b]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,b]) =$

$$= \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,b]) = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,c]) + \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[c,b])\Big) - \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,b]) = \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,c]) + \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[c,b])\Big) =$$

$$= \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,c]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,c])\Big) + \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[c,b]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[c,b])\Big) = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$$ □

Следствие 2. *$f \in C[a,b]$, $a \leq c_1 \leq ... \leq c_n \leq b$; тогда* $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{c_1} f + ... + \int\limits_{c_n}^b f$.

Доказательство. Индукция. □

Теорема 8. ***Монотонность интеграла***

$f,g \int C[a,b]$, если $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$.

Доказательство. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \leq \max\{g(x), 0\} = g_+(x) \Rightarrow \mathcal{P}_{f_+} \subset \mathcal{P}_{g_+} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) \leq \sigma(\mathcal{P}_{g_+})$

$f_+(x) \geq g_+(x) \Rightarrow \mathcal{P}_{f_-} \supset \mathcal{P}_{g_-} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \geq \sigma(\mathcal{P}_{g_-})$

Следовательно $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \leq \sigma(\mathcal{P}_{g_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{g_-}) = \int\limits_a^b g$ □

Следствие 3.

1. $f \in C[a,b] \Rightarrow \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq (b-a) \cdot \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

2. $\left| \int\limits_a^b f \right| \leq \int\limits_a^b |f|$

Доказательство.

1. $m := \min f$, $M := \max f \Rightarrow m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow (b-a) \cdot m = \int\limits_a^b m \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b M = (b-a) \cdot M$

2. $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int\limits_a^b |f| = \int\limits_a^b (-|f(x)|) \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f|$

□

Теорема 9. ***Интегральная теорема о среднем***

$f \in C[a,b]$; тогда $\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(b-a) \cdot f(c)$.

Доказательство. $m := \min f$, $M := \max f \Rightarrow m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq M \cdot (b-a) \Rightarrow \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f \in [m,M]$

Любое значение между m и M достигается $\Rightarrow \exists c \in [a,b] : \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f = f(c)$ □

Определение 8. Среднее значение функции на $[a,b]$ $I_f := \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f$.

Определение 9. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывная; $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется интегралом с переменным верхним пределом, если $\Phi(x) := \int\limits_a^x f$.

Определение 10. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывная; $\Psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется интегралом с переменным нижним пределом, если $\Psi(x) := \int\limits_x^b f$.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$

Теорема 10. ***Теорема Барроу***
Если $f \in C[a,b]$ *и* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$, *то* Φ *– первообразная* f.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = f(x)$.
Проверим для предела справа $y > x$; $R(y) := \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x} \cdot \left(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f \right) = \frac{1}{y-x} \cdot \int\limits_x^y f \overset{\text{по th о среднем}}{=} f(c)$, где $x < c < y$ (c зависит от y)
Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x} R(y) = f(x)$. Берем последовательность $y_n \to$, $y_n > x$
$R(y_n) = f(c_n)$, где $x < c_n < y \Rightarrow c_n \to x$ и f непрерывна в точке $x \Rightarrow R(y_n) = f(c_n) \to f(c) \Rightarrow \lim\limits_{y\to x} R(y) = f(x)$ □

Следствие 4.

1. $\Psi'(x) = -f(x)$
2. *Если* $f \in C(\langle a,b\rangle)$, *то у* f *есть первообразная.*

Доказательство.

1. $\Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) = const - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$
2. Возьмем $c \in (a,b)$ и определим $F(x) := \begin{cases} \int\limits_c^x f, & \text{если } x > c \\ -\int\limits_x^c f, & \text{если } x < c \end{cases}$

□

Теорема 11. ***Теорема Ньютона-Лейбница***
Если $f \in C[a,b]$, F *– первообразная* f, *то* $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) := \int\limits_a^x f$ – первообразная f и все первообразные отличаются друг на друга на const $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \int\limits_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C$, $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow \int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$ □

Обозначение 4. $\int\limits_a^b f = f|_a^b := F(b) - F(a)$.

Теорема 12. ***Линейность интеграла***
$f,g \in C[a,b]$; $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; *тогда* $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Доказательство. Знаем, что если F и G – первообразные f и g, то $\alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g \Rightarrow \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$ □

Теорема 13. ***Формула интегрирования по частям***
$u,v \in C^1[a,b]$; тогда $\int\limits_a^b uv' = uv\big|_a^b - \int\limits_a^b u'v$.

Доказательство. Знаем, что если H – первообразная uv', то $uv - H$ – первообразная для uv'.
$\int\limits_a^b uv' = (uv - H)\big|_a^b = uv\big|_a^b - H\big|_a^b = uv\big|_a^b - \int\limits_a^b u'v$ □

Теорема 14. ***Теорема о замене переменной***
$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a,b\rangle)$; $\phi : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$, $\phi \in C^{-1}(\langle a,b\rangle)$; $p,q \in \langle c,d\rangle$; тогда $\int\limits_p^q f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int\limits_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x)dx$.

<u>Соглашение:</u> если $a > b$, то $\int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$.

Доказательство. Пусть F – первообразная для f; тогда $F \circ \phi$ – первообразная для $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$.
$\int\limits_p^q f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F \circ \phi\big|_q^p = F(\phi(q))F(\phi(q)) - F(\phi(p)) = F\big|_{\phi(p)}^{\phi}(q) = \int\limits_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x)dx$ □

Пример 4. $\int\limits_1^3 \frac{x}{1+x^4}dx = \left[t = x^2;\ dt = 2xdx\right] = \frac{1}{2}\int\limits_1^9 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t\big|_1^9 = \frac{1}{2}(\arctan 9 - \arctan 1)$

4. Приложения формулы интегрирования по частям

Пример 5. $W_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$

Доказательство. $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - t$, $\phi'(t) = -1$
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\phi(t))\phi'(t)\ dt = -\int\limits_{\phi(0)}^{\phi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x\ dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n x\ dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx$ □

Утверждение 6. $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = -\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
$W_0 \geq W_1 \geq ... \geq W_n$

Доказательство. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx = \left[u = \sin^{n-1} x \to u' = (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \;\middle|\; v' = \sin x \to v = -\cos x\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} uv' = uv\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\ dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)dx = (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\ dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx\right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$
$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow W_n = \frac{n-1}{n} \cdot W_{n-2}$ □

Следствие 5. $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2} \cdot W_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot ... \cdot \frac{2}{3} \cdot W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

Теорема 15. ***Формула Валлиса***
$\lim \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство. $W_{2n+2} \le W_{2n+1} \le W_{2n}$

$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \Bigg| : \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$\frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}) \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ □

Следствие 6. $C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство. $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(2n)!!)^2} \cdot 4^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n$

$(2n)!! = 2^n \cdot n!$ $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \sim \frac{2}{\pi} \Rightarrow frac(2n-1)!!(2n)!! \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ □

Теорема 16. ***Формула Тейлора с остатком в интегральной формуле***

$f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle)$; тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$.

Доказательство. Индукция по n; база $n = 0:$ $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt$

Переход: $n \to n+1$

$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

$n! \cdot R_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \left[v' = (x-t)^n \to v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \,\Bigg|\, u = f^{(n+1)}(t) \to u' = f^{(n+2)}(t)\right] =$

$uv|_{x_0}^{x} = \int\limits_{x_0}^{x} u'v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x}(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(x_0) + \frac{1}{n+1}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt}_{R_{n+1}(x)}$$ □

Пример 6. $H_j := \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos dx$

Утверждение 7. ***Свойства:***

1. *$0 < H_j \le \frac{1}{j!} \cdot \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2})^{2j} \cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$*

2. *Если $c > 0$, то $c^j H_j \to 0$, $0 < c^j H_j < \frac{((\frac{\pi}{2})^2 c)^j}{j!} \to 0$*

3. *$H_0 = 1$, $H_1 = 2$*

4. *$H_j = (4j-2) \cdot H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$*

$$j!H_j = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2\right)^j (\sin x)'dx = \underbrace{\left((\frac{\pi}{2})^2 - x^2\right)^j \sin x}_{=0}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + 2j\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\left((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2\right)^{j-1} \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} dx =$$

$$= 2j\left(\underbrace{\left((\frac{\pi}{2})^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot x(-\cos x)}_{=0}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot \cos x \; dx -$$

$$-2(j-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((\tfrac{\pi}{2})^2-x^2\right)^{j-2}\underbrace{x^2}_{(\frac{\pi}{2})^2-((\frac{\pi}{2})^2-x^2)}\cos x\;dx =$$

$$= 2j((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1)(\tfrac{\pi}{2})^2(j-2)!H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)!H_{j-1}) =$$

$$= 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4j!(j-1)H_{j-1} = j!((4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2})$$

5. *Существует многочлен P_j степени $\leq j$ с целыми коэффициентами, для которых $H_j := P_j(\pi^2)$.*

   Доказательство. $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv 2$, $P_j(x) = (4j-2)\cdot P_{j-1}(x) - x\cdot P_{j-2}(x)$ – подходит □

Теорема 17. ***Теорема Ламберта***

π и π^2 иррациональны.

Доказательство. (Эрмит)
От противного. Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое}}{n^j}$
$n^j H_j \geq 1$ (это положительное целое)
но $n^j H_j \to 0$ (по свойству 2) ?? □

5. Интегральные суммы

Определение 11. $f : E \to \mathbb{R}$; f равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x,y \in E :$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание. $f : E \to \mathbb{R}$; f непрерывна во всех точках, если $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x,\varepsilon) > 0 : \forall y \in E :$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Утверждение 8. *$f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\Rightarrow f$ непрерывна на E.*

Пример 7.

0. $f(x) = x$

1. $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$: $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$, $\delta = \varepsilon$ подходит

2. $f : E \to \mathbb{R}$ липшицева с константой L, если $\forall x,y \in E\ |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|$

   f равномерно непрерывна на E : $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ подходит

3. $f(x) = x^2$ <u>не</u> равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$

   Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

   $y = x + \frac{\delta}{2}$, $|x-y| < \delta$; $f(x) - f(y) = y^2 - x^2 = (x+\frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta > 1$ при $x > \frac{1}{\delta}$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$ не равномерно непрерывна

   Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

   $y = \frac{\delta}{2}$ и $x = \delta$, $|x - y| < \delta$; $f(y) - f(x) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$ при $\delta < 1$ не подходит.

   Если $\delta \geq 1$, то $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$, то $f(y) - f(x) = 1$.

Теорема 18. ***Теорема Кантора***

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна во всех точках; тогда* f *равномерно непрерывна на* $[a,b]$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит. В частности, $\delta = 1$ не подходит $\Rightarrow \exists x_1,y_1 \in [a,b] : |x_1 - y_1| < \delta$ и $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_2,y_2 \in [a,b] : |x_2 - y_2| < \delta$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_n,y_n \in [a,b] : |x_n - y_n| < \delta$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

x_n – ограниченная последовательность $\overset{\text{Б.-В.}}{\Rightarrow}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$

$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow c \in [a,b]$; f непрерывна в $c \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(c)$

$c \leftarrow x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \to c \Rightarrow y_{n_k} \to c \Rightarrow f(y_{n_k}) \to f(c)$

Следовательно $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to f(c) - f(c) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, получили противоречие.

□

Определение 12. $f : E \to \mathbb{R}$; $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x,y \in E$ и $|x - y| < \delta\}$ для $\delta \geq 0$.
$\omega_f(\delta)$ – модуль непрерывности.

Утверждение 9. ***Свойства:***

1. $\omega_f(0) = 0$.

2. $\omega_f \geq 0$.

3. ω_f *нестрого возрастает.*

4. $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$.

5. *Если* f *липшицева с константой* L, *то* $\omega_f(\delta) \leq L\delta$.

   ($|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L\delta$, *если* $|x - y| \leq \delta$; *то есть все числа (и* $\sup$ *в том числе) не превышают* $L\delta$*)*

6. f *равномерно непрерывна на* $E \Leftrightarrow \omega_f$ *непрерывна в нуле (то есть* $\lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$*).*

Доказательство. $\Rightarrow$: f равномерно непрерывна; возьмем $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \forall x,y \in E$ и $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \Rightarrow$ если $|x-y| \le \frac{\delta}{2}$, то $|f(x)-f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) \le \varepsilon \Rightarrow w_f(\alpha) \le \varepsilon \forall\alpha < \frac{}{\delta}2 \Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$

$\Leftarrow$: возьмем $\varepsilon > 0$ и такую $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ если $|x-y| < \delta$, то $|f(x)-f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ $\square$

7. $f \in C[a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$

   ($\Rightarrow$: *th Кантора;* $\Leftarrow$: *6 свойство*)

Определение 13. $[a,b]: \ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b;\ \tau = \{x_0,...,x_n\}$
τ – дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a,b]$.

Определение 14. Ранг дробления $|\tau| := \max\{x_1 - x_0,...,x_n - x_{n-1}\}$ (самый длинный отрезок дробления).

Определение 15. Оснащение дробления $\xi = \{\xi_1,...,\xi_n\}$, $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]\ \forall k$.

Определение 16. Интегральная сумма (сумма Римана): $S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема 19. ***Теорема об интегральных суммах***
$f \in C[a,b]$; тогда $\left|\int\limits_a^b f - S(f,\tau,\xi)\right| \le (b-a)\cdot\omega_f(|\tau|)$

Доказательство. $\Delta := \int\limits_a^b f - S(f,\tau,\xi) = \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\Big(f(t) - f(\xi_k)\Big)\,dt$

$|\Delta| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{\Big|f(t) - f(\xi_k)\Big|}_{\le\omega_f(x_k - x_{k-1}) \le \omega_f(|\tau|)} dt \le \sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\omega_f(|\tau|) = \omega_f(|\tau|)\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b-a)$ $\square$

Следствие 7.

1. *$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall$ дробления ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения:* $\left|\int\limits_a^b f - S(f,\tau,\xi)\right| < \varepsilon$.

2. *τ_n – последовательность дроблений, т.ч. если $|\tau_n| \to 0$, то $S(f,\tau,\xi) \to \int\limits_a^b f$.*

Пример 8. $S_p(n) := 1^p + 2^p + ... + n^p$, $p \ge 0$
Хотим посчитать $\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.
Возьмем непрерывную $f(x) = x^p$ и воспользуемся теоремой для нее:
$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = S(f,\tau,\xi) \to \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$
$x_k = \frac{k}{n}$, $[a,b] = [0,1]$, $x_k - x_{k+1} = \frac{1}{n}$. $\xi_k = x_k$

Определение 17. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f – интегрируема по Риману и I – ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ дробления ранга $< \delta$ и $\forall$ оснащения $\Big|S(f,\tau,\xi) - I\Big| < \varepsilon$.

Замечание. Любая непрерывная функция – такая.

Замечание. Берем дробления на равные отрезки $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$: $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ и $\xi_k = x_k$.
$S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \to \int\limits_a^b$
Теперь рассмотрим $\xi'_k = x_{k-1} : S(f,\tau,\xi') = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) \to \int\limits_a^b$
Сумма площадей трапеций: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}+x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}+x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \Bigg(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{x_n}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Bigg)$

Лемма 1. $f \in C^2[\alpha,\beta]$; тогда $\int\limits_\alpha^\beta f - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)dt$

Доказательство. $\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$; $\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt = \underbrace{f(t)(t-\gamma)\Big|_\alpha^\beta}_{f(\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} - f(\alpha)\cdot(-\frac{\beta-\alpha}{2}) = \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt$
Рассмотрим $\Bigg((t-\alpha)(\beta-t)\Bigg)' = \Bigg(-t^2 + (\beta+\alpha)t - \alpha\beta\Bigg)' = -2t + (\beta+\alpha) = -2(t-\gamma)$
$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)\Bigg((t-\alpha)(\beta-t)\Bigg)'dt = \underbrace{\frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Bigg|_\alpha^\beta}_{0} - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)dt$ □

Теорема 20. ***Оценка погрешности в формуле трапеций***
$f \in C^2[a,b]$; *тогда* $\Bigg|\int\limits_\alpha^\beta f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\Bigg| \le \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int\limits_\alpha^\beta |f''|$

Доказательство. $\Delta = \int\limits_\alpha^\beta - \sum\limits_{k=1}^{n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\Bigg(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}\cdot(x_k - x_{k-1})\Bigg) = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k-t)dt$
$|\Delta| \le \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f''(t)|(t-x_{k-1})(x_k-t)dt \le \frac{|\tau|^2}{8}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f''(t)|dt = \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b|f''(t)|dt$
$(t-x_{k-1})(x_k-t) \le (\frac{x_k-x_{k-1}}{2})^2 = \frac{1}{4}(x_k-x_{k-1})^2 \le \frac{|\tau|^2}{4}$ □

Теорема 21. ***Формула Эйлера-Маклорена для второй производной***
$f \in C^2[m,n]$; *тогда* $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt$

Доказательство. $\int\limits_{k-1}^{k} f(t)dt - \frac{f(k-1)+f(k)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_{k-1}^{k} f''(t)\underbrace{(t-(k-1))}_{\{t\}}\underbrace{(k-t)}_{1-\{t\}}dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{k-1}^{k} f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt$

Суммирование по k от $m+1$ до n: $\underbrace{\sum_{k=m+1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k} f(t)dt}_{\int\limits_m^n f(t)dt} - \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n}\frac{f(k-1)+f(k)}{2}}_{\sum\limits_{k=m}^{n} f(k)-\frac{f(m)+f(n)}{2}} =$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=m+1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k} f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt}_{\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt} \qquad \square$$

Пример 9.

1. $S_p(n) := 1^p + 2^p + ... + n^p$, $f(t) = t^p$, $p > -1$, $m = 1$, $n = n$, $f''(t) = p(p-1)\cdot t^{p-2}$

   $S_p(n) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int\limits_1^n f(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_1^n f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt = \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \underbrace{\int\limits_1^n t^p dt}_{=\frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2})\{t\}(1-\{t\})dt$

   - Случай $p \in (-1{,}1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$

     $0 < \int\limits_1^n t^{p-2}\underbrace{\{t\}(1-\{t\})}_{\le\frac{1}{4}}dt \le \frac{1}{4}\underbrace{\int\limits_1^n t^{p-2}dt}_{=\frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} < \frac{1}{1-p}}$, то есть интеграл оценивается константой

   - Случай $p > (-1{,}1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + o(n^{p-1})$

     $0 < \int\limits_1^n t^{p-2}\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt \le \frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \frac{n^{p-1}-1}{p-1}$

2. Гармонические числа $H_n := 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

   $f(t) = \frac{1}{t}$, $m = 1$, $n = n$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

   $H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int\limits_1^n \frac{dt}{t}}_{\ln t|_1^n = \ln n} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2\{t\}(1-\{t\})}{t^3}dt}_{:=a_n}$

   $H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n$

   a_n – возрастающая последовательность; $a_n \le \int\limits_1^n \frac{1}{4}\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2t^2})\Big|_1^n = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}) \le \frac{1}{8}$

   a_n возрастающая и ограниченная $\Rightarrow \exists \lim a_n = a \le \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$

   $H_n = \ln n + \underbrace{(a + \frac{1}{2})}_{=:\gamma} + o(1)$

   γ – постоянная Эйлера, $\gamma \approx 0{,}5772156649...$

3. Формула Стирлинга: $n! \sim n^n \cdot e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

   $\ln n! = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k,\ f(t) = \ln t,\ f''(t) = -\frac{1}{t^2},\ m = 1,\ n = n$

   $$\ln n! = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2}\ln n} + \underbrace{\int\limits_1^n \ln t\ dt}_{=n\cdot\ln n - n*} = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt}_{=:b_n} \Rightarrow$$

   $*\int\limits_1^n \ln t\ dt = t \cdot \ln t\ |_1^n - \int\limits_1^n t\frac{1}{t}dt = n \cdot \ln n - n$

   $\Rightarrow \ln n! = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2}\ln n - b_n$

   b_n – возрастающая последовательность: $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}\int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt > 0$

   b_n – ограниченная последовательность: $b_n \le \frac{1}{8}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8}(-\frac{1}{t})\ |_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8}$

   Тогда существует $\lim b_n = b$ и $b_n = b + o(1)$.

   $$\ln n! = n \cdot \ln n - b + \frac{1}{2}\ln n - b + o(1) \Rightarrow n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-b} \cdot \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1)\sim 1} \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot C$$

   Найдем C. Рассмотрим $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot\sqrt{2n}\cdot C}{(n^n\cdot e^{-n}\sqrt{n}\cdot C)^2} = \frac{2^{2n}\cdot\sqrt{2n}\cdot C}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot C^2} = \frac{4^n\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{n}\cdot C}$

   Тогда $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{n}\cdot C} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{2}}{C} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$

4. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c\to b_-} \int_c^b f = 0$.

Доказательство. $\int\limits_a^b f = \underbrace{\int\limits_a^c f}_{\to\int\limits_a^b f} + \int\limits_c^b f \Rightarrow \int\limits_c^b \to 0$ ☐

6. Несобственные интегралы

Определение 18. $-\infty < a < b \le +\infty,\ f \in C[a,b)$. Тогда **несобственный интеграл**:
$\int\limits_a^{\to b} f := \lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_a^B f$, если предел существует.

Определение 19. $-\infty \le a < b < +\infty,\ f \in C(a,b]$. Тогда **несобственный интеграл**:
$\int\limits_{\to a}^{b} f := \lim\limits_{A\to a_+} \int\limits_A^b f$, если предел существует.

Определение 20. Если предел существует и конечен, то соответствующий интеграл назовем **сходящимся**. В остальных случаях назовем интеграл **расходящимся**.

Замечание.

1. Если $b \neq -\infty$ и $f \in C[a,b]$, то $\int\limits_a^{\to b} f = \int\limits_a^b f$.

   Комментарий: $\int\limits_a^{\to b} f = \lim\limits_{B \to b_-} \int\limits_a^b f$, $\left| \int\limits_a^b f - \int\limits_a^B \right| = \left| \int\limits_B^b \right| \leq (b-B)M$, где $M\ -\max|f|$.

2. Если f имеет первообразную F в $[a,b)$, то $\int\limits_a^{\to b} = \lim\limits_{B \to b_-} F(b) - F(a)$.

   Комментарий: $\int\limits_b^B = F(b) - F(a)$ и написать пределы.

Теорема 22. ***Критерий Коши для несобственных интегралов***
$-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C[a,b)$; *тогда* $\int\limits_a^{\to b} f$ *сходится* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists C \in (a,b)$:
$\forall A,B \in (c,b) \left| \int\limits_A^B f \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ – первообразная f. Тогда $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim\limits_{B \to b_-} F(b)$.

Если $b \neq +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A,B \in (\underbrace{b-\delta}_{=c}; b)\ \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{=\int\limits_A^B} < \varepsilon$

Если $b = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists E\ \forall A,B \supset \underbrace{E}_{=c}\ \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{=\int\limits_A^B} < \varepsilon$ □

Замечание. Если $\exists A_n$, $B_n \in [a,b)$, т.ч. A_n, $B_n \to b$ и $\underbrace{\int\limits_{B_n}^{A_n}}_{:=C_n} \not\to 0$, то $\int\limits_a^{\to b} f$ расходится.

Найдется подпоследовательность C_{n_k}, т.ч. $|C_{n_k}| > \varepsilon \Rightarrow \left| \int\limits_{B_n}^{A_n} f \right| \geq \varepsilon$?! (противоречие с критерием Коши).

Пример 10.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) - F(1)$, где $F(x)$ – первообразная $\frac{1}{x^p}$.

   Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

   Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1) \cdot x^{p-1}}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл расходится} \end{cases}$

   Итог: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p > 1$ и в этом случае $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = F(1) - \lim\limits_{x\to 0_+} F(x)$, где $F(x)$ — первообразная $\frac{1}{x^p}$.

Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1)\cdot x^{p-1}}$ и $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x^{p-1}} = \lim\limits_{x\to 0_+} x^{1-p} = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл расходит} \end{cases}$

<u>Итог:</u> $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p < 1$ и в этом случае $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

Определение 21. f непрерывно на $[a,b]$ за исключением точек $c_1,...,c_n$.
Рассмотрим $\int\limits_a^{d_1} f,\ \int\limits_{d_1}^{c_1} f,\ \int\limits_{c_1}^{d_2} f, ..., \int\limits_{d_{n+1}}^{b} f$.
Если все интегралы сходятся, то $\int\limits_a^b f$ сходится и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{d_1} f + \int\limits_{d_1}^{c_1} f + \int\limits_{c_1}^{d_2} f + ... + \int\limits_{d_{n+1}}^{b} f$.
В противном случае интеграл расходится.

Утверждение 10. ***Свойства несобственных интегралов:***

1. ***Аддитивность***

   $c \in (a,b)$; если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_c^b f$ сходится и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

   Доказательство. F — первообразная f; $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b_-} F(b) - F(a)$

   Сходимость $\int\limits_a^b f \Leftrightarrow \lim\limits_{B\to b_-} F(b)$ существует и конечен.

   $\int\limits_b^c f = \lim\limits_{B\to b_-} F(b) - F(c) = \int\limits_a^b f - \underbrace{(F(c) - F(a))}_{\int\limits_a^c f}$ □

2. ***Линейность***

   Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f \beta \int\limits_a^b g$.

   Доказательство. F и G — первообразные для f и g; по условию $\lim\limits_{B\to b_-} F(B)$ и $\lim\limits_{B\to b_-} G(B)$ существуют и конечные $\Rightarrow \alpha F + \beta G$ — первообразные для $\alpha f + \beta g$ и $\lim\limits_{B\to b_-} (\alpha \cdot F(B) + \beta \cdot G(B)) = \alpha \lim\limits_{B\to b_-} F(B) + \beta \lim\limits_{B\to b_-} G(B) \Rightarrow \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится

   и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim\limits_{B\to b_-} F(B) + \beta \lim\limits_{B\to b_-} G(B) - \alpha \cdot F(A) - \beta \cdot G(A) = \alpha \cdot \int\limits_a^b f + \beta \cdot \int\limits_a^b g$ □

   Замечание. Если $\int\limits_a^b f$ сходится и $\int\limits_a^b g$ расходится, то $\int\limits_a^b (f+g)$ расходится.

Комментарий: $g = (f+g) - f$

3. ***Монотонность*** *Если* $\int\limits_a^b f$ *и* $\int\limits_a^b g$ *существуют в* $\overline{\mathbb{R}}$ *и* $f \le g$ *во всех точках от* a *до* b, *то* $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$.

Доказательство. $\int\limits_a^B f \le \int\limits_a^B g$ и перейти к пределу. □

4. ***Формула интегрирования по частям***

Если $f, g \in C^1[a{,}b)$, *то* $\int\limits_a^b fg' = fg\,|_a^{b \leftarrow \text{тут предел}} - \int\limits_a^b f'g$.

Если существует два конечных предела, то существует и третий и есть равенство.

Доказательство. $\int\limits_a^B fg' = fg\,|_a^B - \int\limits_a^B f'g$ и перейти к пределу. □

5. ***Замена переменной***

$\varphi : [\alpha,\beta) \to [a,b)$, $\varphi \in C^{-1}[\alpha,\beta)$, $\exists \lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta_-)$, $f \in C[a{,}b)$, *тогда:*

$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x)dx$ *(если существует один* $\int$, *то существует и другой и они равны).*

Доказательство. $F(y) := \int\limits_{\varphi(x)}^{y} f(x)dx$, $\Phi(\gamma) := \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, $Phi(\gamma) = F(\varphi(y))$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Далее рассмотрим следующие случаи:

I. Если $\exists \lim\limits_{y \to \varphi(\beta_-)} F(y)$.

Возьмем $\gamma_n \uparrow \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_n) \to \varphi(\beta_-) \Rightarrow \int\limits_\alpha^{\gamma_n} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\gamma_n) = F\varphi(\varphi(\gamma_n)) = \lim\limits_{y \to \varphi(\beta_-)} F(y) \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x)dx$

II. Если $\exists \lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma)$.

Проверим, что $\exists \lim\limits_{y \to \varphi(\beta_-)} F(y)$.

При $\varphi(\beta_-) < b$ очевидно, поскольку $F \in C[a{,}b)$. Пусть $\varphi(\beta_-) = b$. Возьмем $b_n \uparrow b$. Считаем, что $b_n \in [\varphi(\alpha){,}b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha,\beta)$ т.ч. $\varphi(\gamma_n) = b)n$.

Докажем, что $\gamma_n \to \beta$.

От противного. Найдется $\gamma_{n_k} \to \tilde\beta < \beta \Rightarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_n) \to \varphi(\tilde\beta) < b$ (φ непрерывна в $\tilde\beta$). Противоречие с тем, что $b_n \to b$. Следовательно $\gamma_n \to \beta$.

$F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n)$ имеет предел $\overset{\text{по Гейне}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{y \to b_-} F(y)$

$\square$

Замечание. $\int\limits_a^b f$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ сводится к $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt$.

Теорема 23. *Пусть $f \in C[a,b]$ и $f \geq 0$. Тогда сходимость $\int\limits_a^b f$ равносильна ограниченности сверху функции $F(y) := \int\limits_a^y$.*

Доказательство. Если $f \geq 0$, то F — возрастающая функция: $F(y) - F(x) = \int\limits_x^y f \geq 0$

$\int\limits_a^b f$ — сходится $\Leftrightarrow \lim\limits_{y \to b_-} F(y)$ существует и конечен, а так как F возрастает, то это равносильно ограниченности F сверху. $\square$

Следствие 8. ***Признак сравнения*** *$f, g \in C[a,b]$, $f,g \geq 0$ и $f \leq g$, тогда:*

1. *Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.*
2. *Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.*

Доказательство. F и G первообразные. Знаем, что $F(x) \leq G(x)$: $F(x) = \int\limits_a^x f \leq \int\limits_a^x g = G(x)$.

Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то G ограничена сверху $\Rightarrow F$ ограничена сверху $\overset{\text{по th}}{\Rightarrow} \int\limits_a^b f$ сходится.
Второй пункт = отрицание первого. $\square$

Замечание.

1. Неравенство $f \leq g$ может выполняться лишь при аргументах, близких к b.
2. Неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = o(g)$.
3. Если $f \in C[a, +\infty)$, $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходящийся.

Следствие 9. *Пусть $f,g \in C[a,b)$, $f,g \geq 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b_-$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).*

Доказательство. $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x) \to 1 \Rightarrow$ при x близких к b; $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x) \leq 2g(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int\limits_a^b g \text{ сходящийся, то и } \int\limits_a^b f \text{ сходящийся} \\ g(x) \leq 2f(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int\limits_a^b f \text{ сходящийся, то и } \int\limits_a^b g \text{ сходящийся} \end{cases}$$

$\square$

Замечание. Если $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходящийся и $f \geq 0$, то необязательно, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$