Содержание

1. Французские теоремы о среднем

Теорема 1. ***Теорема Ферма***

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$; $x_0 \in (a,b)$, f дифференцируема в точке x_0и $f(x_0)$ — наибольшее (наименьшее) значение функции на $\langle a,b\rangle$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f'(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$.

$$\left.\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0+} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leq 0 \\ f'_-(x_0) &= \lim_{x\to x_0-} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0 \end{aligned}\right\} f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) \Rightarrow f'(x) = 0$$

□

Пример 1. Без дифференцирования неверно: $f(x) = |x|$ на $(-1,1)$.
0 — точка с наименьшим значением, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$.

Замечание. Геометрический смысл: касательная в точке наибольшего/наименьшего значения горизонтальна.

Теорема 2. ***Теорема Ролля***

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$.

Доказательство. f непрерывна на $[a,b]$ $\overset{\text{по th Вейр.}}{\Rightarrow}$ в каких-то точках достигается максимальное/минимальное значение.

1. Если точки — это конца отрезка $\Rightarrow f = const \Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x$.
2. Если одна из точек не конец отрезка $\overset{\text{по th Ферма}}{\Rightarrow}$ f' в этой точке равна 0.

□

Пример 2.

1. $f(x) = x$ — важно, что $f(a) = f(b)$.
2. $f(x) = |x|$ — важна непрерывность во всех точках.

Замечание. Геометрический смысл: найдется точка с горизонтальной касательной.

Теорема 3. ***Теорема Лагранжа***

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b). Тогда $\exists c \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ (формула конечных приращений).

Доказательство. $g(x) = f(x) - kx$ – непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b).
Подберем k так, чтобы $g(a) = g(b) : f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Тогда по теореме Ролля для функции g $\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Замечание. Геометрический смысл: найдется точка, в которой касательная параллельная хорде, соединяющей значения на концах отрезка.

Теорема 4. ***Теорема Коши***

$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Тогда $\exists c \in (a,b) : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Доказательство. $h(x) = f(x) - k \cdot g(x)$ – непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b).
Подберем k так, чтобы $h(a) = h(b) : f(a) - a \cdot g(a) = f(b) - b \cdot g(b) \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Тогда по теореме Ролля для функции h $\exists c \in (a,b) : h'(c) = 0 = f'(c) - g'(c) \cdot k \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ □

Замечание. Геометрический смысл: $(g(t), f(t))$ – координаты точки в момент времени t. В какой-то момент вектор скорости параллелен хорде.

Следствие 1. ***Следствия из теоремы Лагранжа:***

$f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$

1. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b). Если $|f'(x)| \le M$ $\forall x \in (a,b)$, то $\forall x, y \in \langle a,b \rangle$ $|f(x) - f(y)| \le M \cdot |x - y|$.*

   Доказательство. Лагранж на $[x,y] \Rightarrow \exists c \in (x,y) \subset (a,b) : f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \Rightarrow$ $|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \le M \cdot |x - y|$. □

   Определение 1. $f : E \to \mathbb{R}$. **Липшицева с константой** M, если $\forall x,y \in E$ $|f(x)-f(y)| \le M \cdot |x - y|$.

2. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $f'(x) \le 0$ $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ монотонно возрастает.*

   Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть $x < y$. Тогда $\exists c \in (x,y) \subset (a,b) : f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{\ge 0}\underbrace{(y - x)}_{>0} \ge 0 \Rightarrow f(x) \le f(y)$.

   $\Leftarrow$: $f'(x) = f_+(x) = \lim\limits_{y \to x_+} \frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\ge}}{\underbrace{y - x}_{>0}} \ge 0$ □

3. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$. Тогда f строго возрастает.*

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть $x < y$. Тогда $\exists c \in (x,y) \subset (a,b) : f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{>0} \geq 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$. $\square$

Доказательство. $f(x) = x^3$ строго возрастает, хотя $f'(0) = 0$. $\square$

4. *$f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ нестрого убывает.*
5. *$f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ строго убывает.*
6. *f непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на $[a,b]$. Тогда если $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$, то f постоянно.*

Доказательство. Пусть $x < y$. Тогда $\exists c \in (x,y)(a,b) : f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) = 0 \Rightarrow$ все значения равны. $\square$

Теорема 5. ***Теорема Дарбу***
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a,b) во всех точках. Тогда если C лежит между $f'(a)$ и $f'(b)$, то $\exists c \in (a,b) :\ f'(c) = C$.

Доказательство. Случай $C = 0$: Пусть для определенности $f'(a) < f'(b)$.
f непрерывна на $[a,b] \overset{\text{по th В.}}{\Rightarrow} \exists p,q : f(p) \leq f(x) \leq f(q)\ \forall x \in [a,b]$.
Если одна из точек $\in (a,b)$, то она подходит. Поймем, что $p \neq q$ и $p \neq b$.

Пусть $p = a : f'(a) = f_+(a) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0$, но $f'(a) < 0$?!.

Пусть $p = b : f'(b) = f_-(b) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \leq 0$, но $f'(b) > 0$?!.

Тогда $p \neq q$ и $p \neq b \Rightarrow f'(p) = 0\ p \in (a,b)$.
Общий случай: $g(x) = f(x) - c \cdot x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - C \Rightarrow \exists c : 0 = f(c) - C$. TODO $\square$

Следствие 2. *$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема во всех точках и $f'(x) \neq 0\ \forall x\langle a,b\rangle$. Тогда f строго монотонна.*

Доказательство. Проверим, что f' одного знака (если нет, то $\exists c : f'(c) = 0$?!) $\Rightarrow$ строгое возрастание/убывание. $\square$

Теорема 6. ***Правило Лопиталя***
$-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a,b), $g;(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ и $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = \lim\limits_{x\to a_+} g(x) = 0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то и $\lim\limits_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Доказательство. Проверяем по Гейне. Берем $x_n \searrow a$. Надо доказать, что $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$. Воспользуемся теоремой Штольца:

$\lim f(x_) = \lim g(x_n) = 0;$ g строго монотонна $\Rightarrow g(x_n)$ строго монотонна $\Rightarrow$ надо проверить, что $\lim\limits_{x \to a_+} \underbrace{\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}}_{=\frac{f(c_n)}{g(c_n)} \text{по th Коши для некоторого } c_n \in (x_n, x_{n+1})} = l.$

Тогда по Гейне $\lim \frac{f(c_n)}{g(c_n)} = l$, поскольку $c_n \to a$. □

Теорема 7. ***Правило Лопиталя***

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* (a,b), $g;(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ *и* $= \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = +\infty$. *Тогда если* $\lim\limits_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *то и* $\lim\limits_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Доказательство. Другой Штольц. □

Пример 3.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ при $p > 0$.

   $\frac{(\ln x)'}{(x^p)'} = \frac{1}{p \cdot x^{p-1}} \to 0$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ при $a > 1$ и $p \in \mathbb{R}$.

   При $p \leq 0$ очевидно.

   При $p > 0 : \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \frac{p \cdot x^{p-1}}{\ln a \cdot a^x} \to 0$ при $p \leq 1$ ... реккурсивно.

3. $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} e^{x \ln x} = exp(\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln x) = exp(0) = 1$

   $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$

   $\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0$