Содержание

1. Векторные пространства

1.1 Определение

Определение 1. K — поле; ***векторное пространство над*** K — это тройка $(V, +, \cdot)$, где V — множество, $+ : V \times V \to V; \cdot : K \times V \to V$. Элементы V — векторы, элементы K — скаляры. При этом выполняются *аксиомы*:

1-4) $(V,+)$ — абелева группа.

5) $\forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V : \ (k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$

6) $\forall k_1,k_2 \in K, \forall v \in V : \ k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$

7) $\forall k \in K, \forall v_1,v_2 \in V : \ (k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$

8) $\forall v \in V, 1 \in K : \ 1 \cdot v = v$

Замечание. Очевидные свойства:

1. $0 \cdot v = \overline{0}$
2. $(-1) \cdot v = -v$
3. $a + b = b + a$ следует из 7-ми аксиом.

Доказательство. 2) $1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \overline{0} \Rightarrow (-1) \cdot v$ — противоположный к v.

1, 3 TODO proof □

Пример 1.

1. векторы на плоскости — класс эквивалентности направленных отрезков $\to$ в.п.
2. арифметическое векторное пространство $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix} \middle| \, k_i \in K \right\}$

   Для него выполняются операции:

   $$\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ ... \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

   $$k \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ... \\ ka_n \end{pmatrix}$$

${}^nK = \{(k_1,...,k_n) \| \; k_i \in K\}$

K^n и ${}^nK$ изоморфны: $\exists$ биекция $f : K^n \to \; {}^nK$, является гомоморфизмом.

Определение 2. u и v — векторные пространства над K; $f : u \to v$ называется ***гомоморфизмом (линейным отображением)***, если:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
2. $f(k \cdot b) = k \cdot f(b)$

Пример 2.

1. $K[x]$ — векторное пространство над K
2. $K[x^n] = \{f \mid deg \; f \leq n\}$ — в.п. над K
3. Пусть R — кольцо, $K_{\text{поле}} \subset R$ — подкольцо; если $r_1 + r_2$ и kr определено $\forall r \in R$, то R — векторное пространство над K
4. $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$
5. $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$
6. M — множествово; $V = \{f : M \to K\}$ — векторное пространство над K (так как можно определить $(f_1 + f_2)(m) := f_1(m) + f_2(m)$ и $(k \cdot f)(m) := k \cdot f(m)$)

Пример 3.

$M = k = \mathbb{R}$;

1. Func($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$)
2. Func$_c$($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) — непрерывные функции, в.п. над $\mathbb{R}$

1.2 Фибоначчиевы последовательности

Определение 3. ***Последовательность фибоначчиева***, если для нее выполняется, что $\forall n \; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. При этом $a_n + b_n$ и ka_n тоже фибоначчиевы $\Rightarrow$ фибоначчиевы последовательности векторного пространства.

Пример 4.

1. M — множество; $V = 2^M$; $K = \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$ — в.п.
   $X + Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$
   $\varnothing$ — нейтральный, $0 \cdot x := 0$, $1 \cdot x := x$
   Замкнуто: $(1 + 1) \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = x + x = \varnothing$. Важно, что $1 + 1 = 0$ в K, т.е. $char \; K = 2$

Пример 5.

Как ввести координаты:

1. $K[x]_n = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n\} = (a_0,...,a_n)$

   $K[x]_n \cong K^{n+1}$

2. $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R} : z = a + bi \rightsquigarrow (a,b)$

   $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

3. Пример плохих координат:
   $z \rightsquigarrow (r,\varphi)$ — не согласуется с операциями

4. $\mathrm{Func}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \rightsquigarrow (a_0,...,)$

5. фиб. пос-ти $(a_1,a_2,...,) \rightsquigarrow (a_1,a_2)$

   фиб. пос-ти $\cong \mathbb{R}^2$

6. $N \subset M = \{a_1,...,a_n\}$

   $N \rightsquigarrow (\varepsilon_1,..., \varepsilon_n),\ \varepsilon_i = \begin{cases} 1,a_i \in N \\ 0,a_i \notin N \end{cases}$

2. Базис и размерность

2.1 Линейная комбинация

Определение 4. $v_1,...,v_n \in V$ — векторное пространство над K; $a_1,...,a_n \in K$. $a_1v_1 + ... + a_nv_n$ – ***линейная комбинация*** $v_1,..,v_n$ с коэффициентами $a_1,...,a_n$.

Определение 5. $v_1,...,v_n \in V$ — множество линейных комбинаций, замкнутых относительно $+,\cdot \Rightarrow$ является векторным пространством. Оно называется ***линейной оболочкой*** $v_1,...,v_n$ – $\langle v_1,...,v_n\rangle$.
$\sum a_iv_i + \sum b_iv_i = \sum(a_i + b_i)v_i;\ k \cdot \sum a_iv_i = \sum(ka_i) \cdot v_i$

Замечание. Все тоже для бесконечных систем $\{v_i\}_{i\in I}$. ***Линейная комбинация*** — это $a_1v_1 + ... + a_nv_n$ или $\sum a_iv_i$, где почти все $a_i = 0$ (все, кроме конечного числа)

Пример 6. v, u — неколлинеарные векторы.
$\langle v\rangle = \{kv\}$ — прямая, содержащая v.
$\langle v,u\rangle$ — плоскость, натянутая на u и v.

Определение 6. $\{v_i\}$ – ***линейно независимое множество векторов***, если выполнено одно из двух равносильных условий:

1. $\forall i\ v_i \neq \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$

2. $\sum\limits_{j} a_j v_j = 0 \Rightarrow \forall i\ a_i = 0$, то есть никакая линейная комбинация v_i не равна 0.

Пример 7. $\{\overline{0}\}$ — линейно независимое

1. $\overline{0} = \overline{0} = \sum\limits_{\varnothing}$

2. $1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$

Доказательство.

- $2 \Rightarrow 1$
  Пусть $v_1 = \sum\limits_{i \neq 1} a_i v_i \Rightarrow (-1) \cdot v_1 + \sum\limits_{i \neq 1} a_i v_i = 0$, но не все коэффициенты $= 0$.

- $1 \Rightarrow 2$
  $\sum a_i v_i = 0$ и i (НУО $i = 1$): $a_i \neq 0$; тогда $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} - \ldots$

$\square$

Замечание. Здесь важно, что K — поле $(\frac{a_i}{a_1})$.

Определение 7. R — ассоциативное кольцо; тогда тройка $(V, +, \cdot)$ т.ч. выполнены 8 аксиом, называется ***R-модулем***.

Определение 8. V — векторное пространство над K; $\{v_i\}$ — ***порожденная система***, если $\{v_i\} = V$ (т.е. $\forall v \in V$ — линейная комбинация).

Замечание. Пусть $M \subset V = \{v_i\}$ — система векторов.

1. M — линейно независимое, $N \subset M \Rightarrow N$ — линейно независимое.

2. M — порожденная система, $N \supset M \Rightarrow N$ — порожденная система.

2.2 Базис

Определение 9. V — векторное пространство, $\{v_i\} \in V$; $\{v_i\}_{i \in I}$ — ***базис***, если выполнены 4 равносильных условия:

1. $\{v_i\}$ — лин. нез. и пор.

2. $\{v_i\}$ — макс. лин. нез., т.е. $\forall v \in V\ \{v_i\} \cup \{v\}$ — лин. зав.

3. $\{v_i\}$ — мин. пор., т.е. $\forall i \in I\ \{v_j\}_{j \in I} \setminus \{v_i\}$ — не пор.

4. $\forall v \in V$ представляется единственным образом как линейная комбинация $\{v_i\}$

Доказательство. Докажем равносильность:

- $1 \Rightarrow 2$

  $\{v_i\} \cup \{v\} \quad \{v_i\} = V \Rightarrow v$ — л.к. $\{v_i\} \Rightarrow \{v_i\} \cup \{v\}$ лин.зав.

- $2 \Rightarrow 1$

  $v \in V\ \ \{v_i\} \cup \{v\}$ — л.з. по условию: $\exists a_{i_1},...,a_{i_k},a :\ \ a_{i_1}v_{i_1} + ... + a_{i_k}v_{i_k} + av = 0$ и не все коэффициенты $= 0$.

  I. Пусть $a \neq 0 \Rightarrow v = -\sum \frac{a_{i_l}}{a} v_{i_l}$, т.е. $v \in \langle\{v_i\}\rangle$

  II. $\sum a_{i_l}v_{i_l} = 0$ не все $a_{i_l} = 0$, против. с ЛНЗ $\{v_i\}$

- $1 \Rightarrow 4$

  $v \in V \quad \{v_i\} \Rightarrow v = \sum a_i v_i$, осталось доказать единственность.

  Пусть $v = \sum a_i v_i = \sum b_i v_i \Rightarrow 0 = \sum (a_i - b_i) v_i \Rightarrow^{\text{ЛНЗ}} a_1 = b_i\ \forall i$

- $4 \Rightarrow 1$

  $\{v_i\}$ пор. по усл., осталось доказать ЛНЗ

  $v_1 = \sum\limits_{I \neq 1} a_i v_i = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ...$ разные разложения ???

TODO □

Утверждение 1. $f : V \to {}^nK$ $(v \to (a_1,...,a_n))$ — *изоморфизм*

Доказательство. Корректность и биективность — по определению базиса.
Гомоморфность очев. □

Обозначение 1. Базис — строка, координаты — столбец.

Пример 8. $K[x]_2 \quad 1,\ x,\ x^2 \mid x^2+1,\ x^2-x,\ x^2+x+3 \to$ базисы.
$2x^2+3 \rightsquigarrow (2,0,3) \mid (0,1,1) \to$ представление в разных базисах.

Определение 10. V называют ***конечномерным***, если в V $\exists$ конечная порождающая система ($V = \langle v_1,...,v_n \rangle$).

Лемма 1. Из любой конечной порождающей системы можно выбрать базис.

Доказательство. Пусть $v_1,...,v_n$ — порожденная система; если она ЛНЗ, то вот и базис.
Иначе $\exists v_i$ (НУО v_n): $\ v_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i v_i$
Но тогда $\forall$ линейная комбинация $v_1,...,v_n$ это $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i v_i + b_n(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i v_i) \in \langle v_1,...,v_{n-1} \rangle$
Значит, $v_1,...,v_n$ — порождающая система.
Будем продолжать этот процесс, пока система не станет линейно независимой (что когда-нибудь случится, так как система была конечной). □

Следствие 1. *В любом конечном пространстве есть базис.*

Замечание. **Лемма Цорна**

На самом деле в любом пространстве есть базис.

Пример 9. $K[x] \quad \{1, x, x^2, ...\}$ — базис

$K[[x]] -$ базис существует, но конструктивно его не предъявить

$\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ – базис есть, но...

Определение 11. V — векторное пространство (конечномерное); ***размерность*** V $(dim\ V)$ — это количество векторов в его базисе.

Теорема 1. *В двух любых базисах V поровну элементов.*

Доказательство. Это следует из леммы. □

2.3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций

Лемма 2. о линейной зависимости линейных комбинаций (ЛЗЛК)

Пусть $u_1, ..., u_n \in v_1, ..., v_m,\ m > n$. Тогда $u_1, ..., u_m$ линейно зависима.

Доказательство. Лирическое отсутупление:

В теореме: пусть $v_1, ..., v_m$ — базис min размера

$\exists$ базис $u_1, ..., u_{n+1}$

Все u_i — л.к. $\{v_i\}$, т.к. $\{v_i\}$ — базис $\Rightarrow \{u_i\}$ — л.з. ???

Само доказательство:

НУО: $n = m + 1 \quad (u_1, ..., u_{m+1}$ — л.з. $\Rightarrow u_1, ..., u_n$ — л.з.)

Индукция по m:

1. База: $m = 1; \quad u_1 = a_1 v_1,\ u_2 = a_2 v_1$

   Два случая:

   1) a_1 или $a_2 = 0 \Rightarrow \{u_1, u_2\}$ — л.з.

   2) $a_1, a_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \cdot u_1$, т.е. опять л.з.

2. Переход: $m \to m + 1$

   $u_1, ..., u_{m+2} \quad v_1, ..., v_{m+1}$

   $u_i = \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_{i_j} v_j$ — л.к.. Далее возможны случаи:

   1) Пусть $a_{i_{m+1}} = 0\ \forall i \Rightarrow u_1, ..., u_{m+2} \in \langle v_1, ..., v_m \rangle \Rightarrow^{\text{и.п.}} u_1, ..., u_{m+1}$ — л.з.

2) Пусть $i : a_{i_{m+1}} \neq 0$, НУО $a_{1_{m+1}} \neq 0$

$u_1 = a_{1_1} v_1 + ... + a_{1_{m+1}} v_{m+1}$

$u_2 = a_{2_1} v_1 + ... + a_{2_{m+1}} v_{m+1}$

$\dots$

$u_{m+2} = a_{m+1_1} v_1 + ... + a_{m+1_{m+1}} v_{m+1}$

$\forall k = 2...m+2$ из k-ого равенства вычтем 1-ое, умноженное на $\frac{a_{k_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}$.

$\tilde{u}_i = u_i - \frac{a_{k_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}} \cdot u_1 = (a_{i_1} - \frac{a_{1_1} \cdot a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}) \cdot v_1 + ... + (a_{i_m} - \frac{a_{1_m} \cdot a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}) \cdot v_m - (a_{i_{m+1}} - a_{i_{m+1}}) \cdot v_{m+1}$

Получили $\tilde{u}_2,...,\tilde{u}_{m+1} \in \langle v_1, ..., v_m \rangle$. Тогда по и.п. $\tilde{u}_2,...,\tilde{u}_{m+2}$ — л.з.

То есть $\exists b_2,...,b_{m+2}$ не все равные 0:

$0 = \sum\limits_{i=2}^{m+2} b_i \tilde{u}_i = \sum b_i (u_i - ... u_1) = (-\sum \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}) \cdot u_1 + b_2 u_2 + ... + b_{m+2} u_{m+2}$ — нетривиальная линейная комбинация.

□

Лемма 3. u — конечномерное векторное пространство; $u_1,...,u_k \in U$ — ЛНЗ система $\Rightarrow \exists u_{k+1},...,u_n-$ базис U

(любую ЛНЗ систему можно дополнить до базиса)

Доказательство. $u_1,...,u_k$ – ЛНЗ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{макс. ЛНЗ} \Rightarrow \text{это базис;} \\ \exists u_{l+1} : u_1,...,u_{l+1} \ \text{– ЛНЗ} \end{array}\right.$

Будем добавлять к $u_1,...,u_k$ по вектору. l не может стать больше $n^* \Rightarrow$ в какой-то момент получим базис.

$^*u_1,...,u_n,u_{n+1}$ – ЛЗ по ЛЗНК (рассмотрим $v_1,...,v_n$ – базис U; $u_1,...,u_{n+1} \in \langle v_1,...v_n \rangle \Rightarrow u_1,...,u_{n+1}$ – ЛЗ) □

Следствие 2. *$U,V-$ конечномерное векторное пространство над K и $U \leq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$ и если $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$*

Доказательство. $u_1,...,u_k-$ базис U; по лемме можем дополнить до $u_1,...,u_n$ – базис $V \Rightarrow k \leq n$

Если $k = n$, то дополняем 0 векторов $\Rightarrow$ базис U = базис $V \Rightarrow$ оба пространства — линейные комбинации одних и тех же векторов □

2.4 Алгебраические числа

Определение 12. $\mathbb{Q}$; α – алгебраическое число, если $\exists f \in \mathbb{Q}[x] : f(\alpha) = 0$

Пример 10. $\sqrt[7]{3}-$ алг., т.к. $\exists f(x) = x^7 - 3$

$\pi, e-$не алг. (не знаем)

Теорема 2. *α – алгебраическое, $P \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow P(\alpha)-$алгебраическое*

Доказательство. Рассмотрим $V_\alpha-$ в.п. над $\mathbb{Q}:\{P(\alpha)\mid P\in\mathbb{Q}[x]\}-$ замкнуто относительно $+$ и $\cdot$ на рациональные числа (т.е. это в.п.)

Утверждение 2. *Это пространство конечномерное.*

Доказательство. $\exists a_0,...,a_{n-1}\in\mathbb{Q}:\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0=0$
$\alpha^n=-\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i\in\langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle\Rightarrow\langle 1,\alpha,...,\alpha^n\rangle=\langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle$
$\alpha^{n+1}=-\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^{i+1}\in\langle 1,\alpha,...,\alpha^n\rangle\in\langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle\Rightarrow\langle 1,\alpha,...,\alpha^{n+1}\rangle=\langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle$
Продолжим так делать и получаем, что $\forall N\ \alpha^N\in\langle 1,\alpha,...,\alpha^{n-1}\rangle$, т.е. $\dim V_\alpha\le n$ ☐

$\exists P\in\mathbb{Z}[x]:1,P(\alpha),...,(P(\alpha))^n\in V_\alpha$, их $n+1,\dim V_\alpha\Rightarrow 1,...,(P(\alpha))^n-$ ЛЗ, т.е. $\exists q_0,...,q_n:q_0\cdot 1+q_1\cdot P(\alpha)+...+q_n\cdot(P(\alpha))^n=0$, т.е. $P(\alpha)-$ корень многочлена $q_nx^n+...+q_1x+q_0$, т.е. $P(\alpha)$ — алг. ☐

Замечание. Аналогично доказывается, что α, $\beta-$ алгебраические $\Rightarrow\alpha+\beta$, $\alpha\beta-$ алгебраические.

Теорема 3. V *– конечномерное векторное пространство над* K*; тогда* $\exists!n:V\cong K^n$

Доказательство. Единственность:
ясно; $n=\dim K^n=\dim V$
Существование:
Пусть $u_1,u_2,...,u_n$ – базис V.
Рассмотрим отображение $i:K^n\to V$: $\begin{pmatrix}a_1\\...\\a_n\end{pmatrix}\to a_1u_1+...+a_nu_n$
Это биекция (т.к. $u_1,...,u_n$, а координаты единственны) и гомоморфизм (по очеву). ☐

Обозначение 2. $u\in V,\mathcal{U}=\begin{pmatrix}a_1\\...\\a_n\end{pmatrix}=[u]_{\{u_i\}}$ — столбец координат в базисе $\{u_i\}$.
$[u]$ зависит от $\{u_i\}$.

Пример 11. Фибоначчиева последовательность:
$(1,0,1,1,2,3,...)=v_1$
$(0,1,1,2,3,5,...)=v_2$
$(a,b,a+b,2b+a,...)=av_1+bv_2\rightsquigarrow\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
Классическое: $(1,1,2,3,...)\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Пример 12. Пример хорошего базиса:
$(1,\varphi,\varphi^2,...) = u_1$
$(1,-\frac{1}{\varphi},-(\frac{1}{\varphi})^2,...) = u_2$
Найти явную формулу для фибоначчиевой последовательности $\Leftrightarrow$ найти координаты в базисе $\{u_1,u_2\}$:
$(c_1,c_2,...,c_n) = ku_1 + lu_2 \Rightarrow c_n]k\varphi^n + l \cdot (-\frac{1}{\varphi})^n$

3. Системы линейных уравнений

Определение 13. ***Система линейных уравнений*** S : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,m}x_m = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$

Обозначение 3. $A_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ ... \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \in K^n$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

Определение 14. Что значит, что S ***имеет решение*** ? $\rightarrow$ $B \in \langle A_1,A_2,..,A_m \rangle$.

Определение 15. ***Однородная СЛУ***: $B = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$; всегда есть тривиальное решение $x_1 = x_2 = .. = x_m = 0$

Определение 16. У S есть нетривиальное решение $\Leftrightarrow A_1,A_2,..,A_m-$ ЛЗ.
Частный случай: $m > n : A_1,...,A_{n+1} \in K^n \Rightarrow$ ЛЗ $\Rightarrow$ ОСЛУ имеет нетривальное решение.

4. Матрицы

4.1 Определение

Определение 17. A – абелева группа; I,J – множества (конечные); тогда ***матрица над*** A – это отображение $I \times J \rightarrow A, (i,j) \rightarrow a_{i,j} \in A$

Обозначение 4. Часто $I = \{1,2,...,n\}$, $J = \{1,2,...,m\}$. В этом случае множество матриц обозначается как $M_{n,m}(A)$.

Определение 18. Определим ***операцию сложения***: $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i=1..n,\ j=1...m}$. Тогда $M_{n,m}(A)$ – абелева группа.

Определение 19. $A = R-$ кольцо; определим ***операцию умножения***:

1. $M_{1,m}(R) \times M_{m,1}(R) \to R$

   $$(a_1,...,a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m$$

2. $M_{k,m}(R) \times M_{m,1}(R) \to M_{k,1}(R)$

   $$\begin{pmatrix} r_1 \\ - \\ r_2 \\ ... \\ r_k \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} r_1c \\ r_2c \\ ... \\ r_kc \end{pmatrix} \in M_{k,1}(R) = R^k$$

   r_i – строка, C – столбец

3. $M_{k,m}(R) \times M_{m,l}(R) \to M_{k,l}(R)$

   $A \cdot (c_1 \mid c_2 \mid ... \mid c_l) = (Ac_1) \cdot (Ac_2) \cdot ... \cdot (Ac_l)$

Тогда:

$A \in M_{k,m},\ A = (a_{i,j})_{i=1...k,\ j=1...m}$

$B \in M_{m,l},\ B = (b_{i,j})_{i=1...m,\ j=1...l}$

$AB = C \in M_{k,l},\ C = (c_{i,j})_{i=1...k,\ j=1...l}$

$c_{i,j} = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{i,s}b_{s,j}$

Утверждение 3. ***Перефразировка СЛУ через матрицы:***

$S \rightsquigarrow A \cdot X = B$

$$(A_1 \mid A_2 \mid ... \mid A_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

4.2 Свойства матриц

Утверждение 4. ***Свойства матриц:***

1) $A \in M_{m,k}(R);\ B,C \in M_{k,l}(R)$

   $A \cdot (B + C) = AB + BC$

   Аналогично (с точностью до перемены индексов матриц) доказывается, что $(B+C)\cdot A = BA + CA$

2) $A \in M_{k,l}(R);\ B \in M_{l,n}(R);\ C \in M_{m,n}(R)$

$(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$ *в частности, все эти произведения существуют.*

Доказательство. 2. $((AB)\cdot C)_{i,j} = \sum\limits_{s=1}^{m} (AB)_{i,s} \cdot C_{s,j} = \sum\limits_{s=1}^{m} (\sum\limits_{t=1}^{l} A_{i,t}B_{t,s}) \cdot C_{s,j} = \sum\limits_{t=1...l}^{m} A_{i,t}B_{t,s}C_{s,t}$

$(A \cdot (BC))_{i,j} = ... =$ тоже самое (честно) □

Утверждение 5. *$M_{n,n}(R)$ − ассоциативное кольцо с 1, $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Умножение определено: $M_{n,n} \times M_{n,n} \to M_{n,n}$.

Абелева по сложению (знаем). Ассоциативность и дистрибутивность доказали.

Рассмотрим $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. \\ 0 & 1 & .. \\ .. & .. & 1 \end{pmatrix}$ (0 везде кроме главной диагонали, на которой стоят 1).

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} : E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,...) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\ (0,1,...) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\ ... \\ (0,...,0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow EA = A \ \forall A \in M_{m,n}(R), \text{ т.е. } E \text{ нейтрален}$$

по умножению. □

Замечание. Умножение матриц не коммунитативно.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Замечание. $R = K$ − поле

$M_n(K)$ − векторное пространство над K (т.к. $k \cdot (a_{i,j}) = (ka_{i,j})$)

$(M_{n,n}(K) = M_n(K))$

Самый простой базис: $E_{i,j} : (E_{i,j})_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = i, l = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$a_{i,j} = \sum\limits_{i,j=1..n} a_{i,j}E_{i,j}$

Замечание. Умножение на $M_n(K)$ достаточно было бы задать на базисе:

$E_{i,j} \cdot E_{k,l} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ E_{i,l}, & j = k \end{cases}$

5. Матрица перехода

Определение 20. V – n-мерное пространство; $v_1,...,v_n$ – старый базис, $v'_1,...v'_n$ – новый базис $a_1,...,a_n \in K : (v_1,...,v_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = a_1v_1 + ... + a_nv_n$.

Рассмотрим матрицу $C : ([v_1]_{\{v'_1\}} \mid [v_2]_{\{v'_2\}} \mid ... \mid [v_n]_{\{v'_n\}}) \in M_n(K)$. C называется ***матрицей перехода*** от v_i к v'_i.

Утверждение 6. *$x \in V, \mathcal{X} = [x]_{\{v_i\}}$; тогда $C \cdot \mathcal{X}$– это $[x]_{\{v'_i\}}$.*

Доказательство. Рассмотрим $(u'_1,...,u'_n)(C\mathcal{X})$ = (по ассоциативности) $= (u'_1,...,u'_n)(C\mathcal{X}) = (u_1,...,u_n)\cdot$ $\mathcal{X} = x \Rightarrow C\mathcal{X}$ – координатыты x в $(u'_1,...,u'_n)$. □

Следствие 3. *C – матрица перехода от $(u_1,...,u_n)$ к $(u'_1,...,u'_n)$.*
C' – матрица перехода от $(u'_1,...,u'_n)$ к $(u''_1,...,u''_n)$.
$C'C$ – матрица перехода от $(u_1,...,u_n)$ к $(u''_1,...,u''_n)$.

Доказательство. $\forall$ столбца $\mathcal{X} \rightsquigarrow x \in V$:
$C\mathcal{X}$ – координаты x в $(u'_1,...,u'_n)$
$C'(C\mathcal{X})$ – координаты x в $(u''_1,...,u''_n)$
$(C'C)\mathcal{X} \Rightarrow C'C$ – часть матрицы перехода от $(u_1,...,u_n)$ к $(u''_1,...,u''_n)$
Частный случай: $u''_1 = ... = u''_n = u_1 = ... = u_n$
$C'C = E$ и $CC' = E$, т.е. $C' = C^{-1}$; в частности матрица перехода обратима. □

6. Линейные отображения

6.1 Определение

Определение 21. U и V – векторное пространство над K; $\mathcal{A} : U \to V$ ***линейно*** (гомоморфизм), если $\mathcal{A}(u + \alpha v) = \mathcal{A}(u) + \alpha\mathcal{A}(v)\ \forall u,v \in U$, $\forall \alpha \in K$.

Пример 13. $\mathcal{A}(x) = x$ – линейно, $\mathcal{A}(x) = 0$ – линейно.

Пример 14. $\mathcal{A} : K^n \to K,\ \dim_K K = 1,\ (\langle 1\rangle = K)$
$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + ... + a_nx_n;\ a_1,...,a_n$ – фиксированы.
Более общо: $A \in M_{m,n} : A(x) = \mathcal{A} \cdot x$ – линейное отображение $\mathcal{A} : K^n \to K$.

Замечание. На самом деле, все линейные отображения таковы (т.е. представляют из себя домножение на матрицу).

Теорема 4. *$u_1,...,u_n$ – базис U; $v_1,...,v_n \in V$; тогда $\exists!$ линейное отображение $\mathcal{A}: U \to V$ т.ч. $\mathcal{A}(u_i) = v_i$.*

Доказательство. Единственность:
Пусть $\mathcal{A}(u_i) = v_i = \mathcal{B}(u_i)$.
Пусть $\forall u \in U : u = \sum a_i u_i \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\sum a_i u_i) = \sum a_i \mathcal{A}(u_i) = \sum a_i \mathcal{B}(u_i) = B(\sum a_i u_i) = \mathcal{B}(u)$
Существование:
Для каждого $u = \sum a_i u_i$ положим $\mathcal{A}(u) = \sum a_i v_i$:
$\mathcal{A}$ – линейно: $\mathcal{A}(\alpha \cdot (\sum a_i u_i) + \sum b_i u_i) = \mathcal{A}(\sum(\alpha \cdot a_i + b_i)u_i) = \alpha \cdot \sum a_i v_i + \sum b_i v_i = \alpha \cdot \mathcal{A}(\sum a_i u_i) + (\sum b_i u_i)$ □

6.2 Ядро и образ линейного отображения

Определение 22. $A : U \to V$ – линейное отображение.
Ker $\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\}$ – ***ядро*** $\mathcal{A}$.
Im $\mathcal{A} = \{v \in V \mid \exists u \in U : \mathcal{A}(u) = v\}$ – ***образ*** $\mathcal{A}$.

Лемма 4. Ker $\mathcal{A}$ – подпространство в U; Im $\mathcal{A}$– подпространство в V.

Доказательство. Проверка замкнутости:
1) $u,v \in$ Ker $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(u) = 0$ & $\mathcal{A}(v) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(u + kv) = \mathcal{A}(u) + k \cdot \mathcal{A}(v) = 0 \Rightarrow u + v$, $ku \in$ Ker $\mathcal{A}$
2) $u = \mathcal{A}(x)$, $v = \mathcal{A}(y)$
$u + v = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x + y) \Rightarrow x + y \in$ Im $\mathcal{A}$
$ku = k \cdot A(x) = \mathcal{A}(kx) \Rightarrow kx \in$ Im $\mathcal{A}$ □

Пример 15. $V = U = \mathbb{R}^2$

- $\mathcal{A}(x) = 0$

  Ker $\mathcal{A} = \{0\}$, Im $\mathcal{A} = V$

- $\mathcal{A}(x) = 0$

  Ker $\mathcal{A} = \{V\}$, Im $\mathcal{A} = 0$

- u – вектор

  $u \rightsquigarrow u_0$– проекция на OX

  Ker $\mathcal{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, Im $\mathcal{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Теорема 5. *$\mathcal{A} : U \to V$ – линейное отображение; тогда* $\dim$ *Ker* $\mathcal{A} + \dim$ *Im* $\mathcal{A} = \dim U$.

Доказательство. $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = m$; $u_1,..,u_n$ – базис $U; \dim U = n$
Применим $\mathcal{A} : \mathcal{A}(u_1) = ... = \mathcal{A}(u_m) = 0$
Сначала докажем следующее утверждение:

Утверждение 7. *$\mathcal{A}(u_{m+1}),...,\mathcal{A}(u_n)$ – базис Im $\mathcal{A}$.*

Доказательство. 1) Докажем, что $\mathcal{A}(u_{m+1}),...,\mathcal{A}(u_n)$ – ЛНЗ
Пусть $\alpha_{m+1}\mathcal{A}(u_{m+1}) + ... + \alpha_n\mathcal{A}(u_n) = 0$
$\mathcal{A}(\sum \alpha_{m+i}u_{m+i}) = 0 \Rightarrow \sum \alpha_{m+i}u_{m+i} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Rightarrow \sum \alpha_{m+i}u_{m+i} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ (т.к. $u_1,...,u_m$ –базис Ker $\mathcal{A}$) ??
$\sum \alpha_{m+i}u_{m+i} - \sum \alpha_i u_i = 0$; т.к. $\{u_i\}$ – ЛЗ, то все $\alpha_i = 0$. □

TODO □

6.3 Формула Грассмана

Применение: Формула Грассмана. В множествах есть базовые операции $\cup$, $\cap$. В пространствах – $\cap$, $+$.

Определение 23. $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ – ***сумма подпространств*** (сумма Минковского).

Теорема 6. *V – векторное пространство над K; V_1,V_2 – подпространства ($V_1,V_2 \leq V$).*

1. *$V_1 \cap V_2$ – подпространство V (очев).*
2. *$V_1 + V_2$ – тоже подпространство.*

Доказательство. $v_1 \in V_1 + V_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2$ & $v_1' \in V_1 + V_2 \Rightarrow v' = v_1' + v_2' \Rightarrow v + v' = (v_1 + v_1') + (v_2 + v_2') \in V$ $(v_1 + v_1' \in V_1,\ v_2 + v_2' \in V_2$ т.к. $V_1,V_2 \leq V)$
$k \cdot v = k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2 \in V,\ kv_1 \in V_1,\ kv_2 \in V_2$ □

Замечание. $v_1,...,v_n$ – базис V_1, $v_1',...,v_m'$ – базис $V_2 \Rightarrow \{v_1,...,v_n,v_1',...,v_m'\}$ – порождающая система $V_1 + V_2$.

Замечание. Многие формулы про $+$ и $\cap$ аналог формул про $\cap$ и $\cup$. Но $(V_1 + V_2) \cap V_3 \neq (V_1 \cap V_3) + (V_{23})$.

Определение 24. V_1,V_2 – векторное пространство над K, ***внешняя/прямая сумма*** V_1 и V_2 – это $V_1 \oplus V_2 = \{(v_1,v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ с операциями:

1. $(v_1,v_2) + (v_1',v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$
2. $k(v_1,v_2) = (kv_1,kv_2)$

Утверждение 8. $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Доказательство. Это векторное пространство (очев).
$v_1,...,v_k$ – базис V_1, $v'_1,...,v'_m$ – базис V_2; тогда $\{(v_i,0)\} \cup \{(0,v'_i)\}$ – базис V_1+V_2.
И вправду: $\forall (v,v') = (\sum a_i v_i, \sum b_i v'_i) = \sum a_i(v_1,0) + \sum b_i(0,v'_i)$ – доказали порождаемость.
Доказательство линейной независимости: $\sum a_i(v_i,0) + \sum b_i(0,v'_i) = 0 = (\sum a_i v_i, \sum b_i v'_i) = (0,0) \Rightarrow$ $\sum a_i v_i = 0, \sum b_i v'_i \Rightarrow$ т.к. v_i и v'_i – базисы: все $a_i = 0$ и все $b_i = 0 \Rightarrow$ доказали ЛНЗ-ть. □

Теорема 7. ***Формула Грассмана***
$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Доказательство. Зададим $A : V_1 \oplus V_2 \to V$, $(v_1,v_2) \to v_1 + v_2$
$\operatorname{Im} \mathcal{A} = V_1 + V_2$ (по определению V_1+V_2)
$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{(v,-v) \mid v \in V_1,\ -v \in V_2\} = \{(v,-v) \mid v \in V_1 \cap V_2\} \cong V_1 \cap V_2$
Тогда по теореме о ядре и образе: $\dim(V_1+V_2) = \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \dim(V_1 \oplus V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) =$ $\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ □

6.4 Множество линейных отображений

Определение 25. U,V – векторные пространства над K; определим Lin (U,V) – ***множество отображений*** $\mathcal{A} : U \to V$.
Это векторное пространство:
$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(u) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u)$
$(k\mathcal{A})(u) = k \cdot \mathcal{A}(u)$

Определение 26. Пусть $\mathcal{A} \in$ Lin (U,V), $u_1,...,u_m$ – базис U, $v_1,...,v_n$ – базис V.
$\mathcal{A}(u_1) = a_{11}v_1 + ...a_{n1}v_n$
$\mathcal{A}(u_2) = a_{12}v_1 + ...a_{n2}v_n$
...
$\mathcal{A}(u_m) = a_{1m}v_1 + ...a_{nm}v_n$
Тогда $A = (a_{ij})_{i=1..n,j=1..m}$ – матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисе $\{v_i\}\{u_i\}$.

Обозначение 5. $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\}\{v_i\}}$.

Лемма 5. $\mathcal{A} \in$ Lin (U,B), $\{u_i\}$,$\{v_i\}$ – базисы.
$A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\}\{v_i\}}$; $\mathcal{A} : U \to V$
$u \in U : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты u в $\{u_i\}$.
Аналогично $v \in V : \mathbf{v}$ – координаты v в $\{v_i\}$.
Тогда $\mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$.

Доказательство. $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\sum x_i u_i) = \sum_{i=1}^m x_i(\sum_{j=1}^n a_{ji}v_j) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m x_i a_{ji})v_j$ − координаты $\mathbf{v}$ в базисе $\{v_i\}$ − это $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i a_{1i} \\ ... \\ \sum_{i=1}^m x_i a_{mi} \end{pmatrix} = A \cdot \mathbf{u}$. □

Следствие 4. $U_{\{u_i\}} \xrightarrow{\mathcal{B}} V_{\{v_i\}} \xrightarrow{\mathcal{A}} W_{\{w_i\}}$ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Lin$
$B = [\mathcal{B}]_{\{u_i\}\{v_i\}}$, $A = [\mathcal{A}]_{\{v_i\}\{w_i\}}$
Тогда:

1. $A \circ B \in Lin\ (U, W)$ *(очев)*

2. $[A \circ B]_{\{u_i\}\{w_i\}} = A \cdot B$

Доказательство. $u \in U$, $v \in \mathcal{B}(u)$, $w \in \mathcal{A}(v)$
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ − координаты u,v,w
$w = (A \circ B)(u)$ и $\mathbf{w} = A \cdot \mathbf{u} = A \cdot B \cdot \mathbf{v} \Rightarrow A \cdot B$ − матрица отображение $A \circ B$. □

Утверждение 9. $AX = BX\ \forall x \Rightarrow A = B$.

Резюме:

1. U, V − векторное пространство K $\dim U = m,\ \dim V = m$. Тогда $\exists$ изоморфизм:

   $f : M_{n,m}(K) \cong \mathrm{Lin}\ (U, V)$ как векторные пространства.

2. $n = m$ $M_n(K) \cong \mathrm{Lin}\ (U, U)$ как кольца.

Замечание. $\mathrm{Lin}\ (U, U)$ − кольцо с операциями $+$ и $\circ$:
$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ C + \mathcal{B} \circ \mathcal{C}$ − по определению $+$.
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{A}(\mathcal{C}(x)) + \mathcal{B}(\mathcal{C}(x))$ − по определению $+$.
$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$ − по определению $+$ и линейности $\mathcal{A}$.

Доказательство.

1. Фиксируем базисы $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$ и рассмотрим $f : \mathrm{Lin}\ (U, V) \to M_{n,m}(K)$, $\mathcal{A} \to [A]_{\{u_i\},\{v_i\}}$

   Очев, что это биекция (по теореме о задании линейного отображения на базисе). Очев, что операции сохраняются:

   $[\mathcal{A} + \mathcal{B}] = [\mathcal{A}] + [\mathcal{B}];\ [k\mathcal{A}] = k[\mathcal{A}]$

2. Фиксируем базис $\{u_i\}$ и сопоставляем $\mathcal{A} \to [A]_{\{u_i\},\{u_i\}}$.

□

6.5 Матрица перехода

Напоминание: $u_1,...,u_n$ — старый базис, $u'_1,...,u'_n$ — новый базис и $u_i = \sum a_{ji} u'_j$; тогда $A = (a_{ij})$ — матрица перехода.

Замечание. $u_1 = u_1,...,u_n = u_n \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = [id]_{\{u_i\},\{v_i\}}$

6.6 Формула замены матрицы отображения при замене базиса

$U \xrightarrow{\mathcal{A}} V$, $\{u_i\},\{v_i\}$ — старые базисы, $\{u'_i\},\{v'_i\}$ — новые базисы.
Знаем: $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}}$
Хотим: $\tilde{A} = [\mathcal{A}]_{\{u'_i\},\{v'_i\}}$
$U_{\{u'_i\}} \xrightarrow{id} U_{\{u_i\}} \xrightarrow{\mathcal{A}} V_{\{v_i\}} \xrightarrow{id} V_{\{v'_i\}}$
По следствию: $[\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}} = [id]_{\{v_i\},\{v'_i\}} \cdot [\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}} \cdot [id]_{\{u_i\},\{u'_i\}} = D \cdot A \cdot C^{-1}$, где D — матрица перехода от v_i к v'_i, а C^{-1} — матрица перехода от u_i к u'_i.
Частный случай: $U = V$, $\{u_i\} = \{v_i\}$, тогда $\tilde{A} = CAC^{-1}$.

Вопрос: $\mathcal{A} \in \text{Lin}\,(U,V)$, $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}}$. Насколько простой можно сделать A за счет замены базиса?
Ответ: в теореме о Im и Ker доказали: $\exists$ базис $u : u_1,...,u_m,...,u_n$; $u_1,...,u_n$ — базис $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(u_{m+1}),...,\mathcal{A}(u_n)$ базис $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.
Обозначим $\mathcal{A}(u_{m+1}) = v_1,...,$ $\mathcal{A}(u_n) = v_{n-m}$; $v_1,...,v_{n-m}$ — базис $\mathcal{A}$. Дополним до базиса V : $v_1,...,v_{n-m},...,v_l$. Тогда:
$\mathcal{A}(u_1) = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_l$
...
$\mathcal{A}(u_m) = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_l$
$\mathcal{A}(u_{m+1}) = 1 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_l$
...
$\mathcal{A}(u_n) = 0 \cdot v_1 + ... + 1 \cdot v_{n-m} + ... + 0 \cdot v_l$

Получим: $\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & | & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ & & & & & & & & \\ 0 & ... & 0 & | & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица, где первые m столбцов - нулевые, а верхний левый блок размера $(n-m)\times(n-m)$ представляет из себя нулевую матрицу с единицами на диагонали. Поменяем местами блоки $(u_1,...,u_m)$ и $(u_{m+1},...,u_n)$. Получили теорему:

Теорема 8. *$\forall\mathcal{A}\in Lin\ (U,V)\ \exists$ базисы $\{u_i\},\{v_i\}$: $[A]_{\{u_i\}\{v_i\}}=\left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$*

6.7 Ранг матрицы

Определение 27. Переформулировка: $\forall A\in M_{l,k}(K)\ \exists$ такие обратные матрицы D и C, что $DAC=\left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$.
Число s равно $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Оно называется ***рангом отображения*** или ***рангом матрицы***.

Определение 28. Матричное определение: $A\in M_{l,n}(K)$; столбцы $K^l : A=(C_1\mid ...\mid C_n)\ C_i\in K^l$.
$\operatorname{rank} A=\operatorname{rk} A=\operatorname{rg} A=\dim\langle C_1,...,C_n\rangle$

Замечание. Это то же самое, что и ранг отображения, т.к. C_i – столбец координат для $\mathcal{A}(u_i)$, где u_i – iый базовый вектор.

Пример 16. $\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\operatorname{rk}\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\rangle=\operatorname{rk}\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Big\rangle=\operatorname{rk}\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle=1$

Определение 29. $U=V,\ \dim U=n,\ \operatorname{rk}\mathcal{A}=k;\ n-k$ – ***дефект*** $\mathcal{A}$; $n-k=n=\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}=\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

6.8 Решение СЛУ

Что такое $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\dim\operatorname{Ker}A$?
$\{x\in K^n\mid AX=0\}$ – множество решений однородных СЛУ с матрицей $A\in M_{m,n}$:
$A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ ...\\ 0\end{pmatrix}$ $k^n\to K^m$, n неизвестных, m уравнений.
$\dim\operatorname{Ker}A$ – размерность пространства решений; $\dim\operatorname{Ker}A=n-\dim\operatorname{Im}A\geq n-m$.
Эти рассуждения подвели нас к формулированию теоремы:

Теорема 9. *ОСЛУ с n неизвестными и m уравнениями $(m<n)$ имеет пространство решений размерности хотя бы $n-m$; в частности, если K бесконечно, то бесконечно много решений; если же $|K|=q\Rightarrow q^{n-m}$ решений.*

Теперь рассмотрим частный случай:

Теорема 10. *Пусть* $n = m$. *Тогда:* $\dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Im} A, \dim \operatorname{Ker} A = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} A = n$, *т.е. система* $AX = B$ *имеет решение* $\forall B \Leftrightarrow AX = 0$ *имеет только тривиальное решение.*
На языке линейных отображений: $\mathcal{A} : U \to V$ *линейное,* $\dim U, \dim V < \infty$*; тогда* $\mathcal{A}$ *сюръективно* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ *инъективно.*

Доказательство. Сюръективность $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V$
Докажем следующее утверждение:

Утверждение 10. $\mathcal{A}$ *инъективно* $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

Доказательство.

- $\Rightarrow$: $\mathcal{A}(x) = 0 \ \ \& \ \ \mathcal{A}(0) = 0; \mathcal{A}$ инъективно $\Rightarrow x = 0$
- $\Leftarrow$: Пусть $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Rightarrow x - y = 0$, т.е. $x = y$

□

Теперь вернемся к доказательству теоремы: инъективность $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow \mathcal{A} = V \Leftrightarrow$ сюръективность. □

6.9 Вид общего решения

Рассмотрим СЛУ $AX = B$ или $\mathcal{A}(x) = b$. Пусть знаем частное решение X_0 (т.е. $AX_0 = B$). Тогда:
$AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
Значит, знаем общий вид решения: $X = X_0 + Y, Y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ (или $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 + \operatorname{Ker} \mathcal{A}$)

6.10 Транспонирование

Определение 30. Пусть $A \in M_{m,n}(K) = (a_{i,j})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$; тогда **транспонирование** A – $A^T \in M_{n,m}(K)$; $A^T = (a'_{i,j})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, где $(a'_{i,j}) = a_{j,i}$ (отражение относительно главной диагонали).

Утверждение 11. ***Свойства:***

- $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = k \cdot A^T$ *– это линейное отображение.*
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

  Если $\exists A^{-1}$, *то* $\exists (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Доказательство.

1. Пусть $A \cdot B = C = (c_{i,j})$, $(A \cdot B)^T = (c'_{i,j})$

   $c'_{i,j} = c_{j,i} = \sum\limits_s a_{j,s} \cdot b_{s,i} = \sum\limits_s a'_{s,j} \cdot b_{i,s} = \sum\limits_s b'_{i,s} \cdot a'_{s,j} = (B^T \cdot A^T)_{i,j}$

2. $\begin{cases} A \cdot B = E \\ B \cdot A = E \end{cases}$, $B = A^{-1} \Rightarrow B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = E^T = E$

$\square$

Утверждение 12. ***Свойства ранга:***

1. *rk* $A =$ *rk* A^T *(если строки и столбцы поменять ролями, то поменяем ролями, то rk не изменится)*

2. *rk* $A \cdot B \le \min($*rk* $A,$ *rk* $B)$

3. *rk* $(A + B) \le$ *rk* $A +$ *rk* B

4. $A \in M_n(K)$, *rk* $A = n \Leftrightarrow A -$ *обратима.*

Доказательство.

2. $\text{rk } A = \dim \operatorname{Im}(X \to AX)$

   $U \xrightarrow{\mathcal{B}} V \xrightarrow{\mathcal{A}} W$

   a) $\text{rk } AB = \dim \operatorname{Im}\{(AB)X \mid X \in U\} \le \dim\{AY \mid Y \in V\} = \text{rk } A$ $(\{ABX\} \subset \{AY\})$

   b) $\text{rk } AB = \dim \operatorname{Im}(A \circ B) = \dim(A \circ B(U)) = \dim(A(\underbrace{B(U)}_{= \operatorname{Im} B})) = \dim(\operatorname{Im} A\,|_{\operatorname{Im} B}) \le \dim \operatorname{Im} B$

1. Знаем, что $\exists C, D: \; CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

   $D^T \cdot A^T \cdot C^T = (CAD)^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ (размеры строки и столбца из нулей поменялись местами)

   $\text{rk } A = r$, $\text{rk } A^T = r$, т.к.:

   1) $\text{rk } (D^T \cdot A^T \cdot C^T) \le \text{rk } A^T$ по свойству 2.

   2) $\text{rk } A^T = \text{rk } ((D^T)^{-1}(D^T \cdot A^T \cdot C^T)(C^T)^{-1}) \le \text{rk } (D^T \cdot A^T \cdot C^T)$ по свойству 2.

3. упр.

4. $\Rightarrow$: A обратима $\Rightarrow n = \text{rk } E = \text{rk } (A \cdot A^{-1}) \leq \text{rk } A \Rightarrow \text{rk } A = n$ (т.к. $\text{rk } A \leq n$)

   $\Leftarrow$: $\text{rk } A = n$, $\exists C,D :\ CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, где $r = \text{rk } A \Rightarrow CAD = E \Rightarrow CA = D^{-1} \Rightarrow DCA = E$

   Аналогично $ADC = E \Rightarrow DC = A^{-1}$.

□

Следствие 5. *Ранг по строкам равен рангу по столбцам (по первому свойству).*

Утверждение 13. $A \in M_n(K)$*; следующие условия равносильны:*

1. A *— обратима.*
2. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$
3. $\operatorname{Im} A = K^n$
4. *Строки* A *линейно независимы.*
5. *Столбцы* A *линейного независимы.*

Обозначение 6. $(M_n(K))^* = GL(n,K)$ — полная линейная группа.

Утверждение 14. *Все есть матрица.*

Пример 17. Матричная реализация: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Утверждение 15. *Подмножество* $M_2(\mathbb{R})$*, состоящее из матриц вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *является подкольцом и полем.*

Оно изоморфно $\mathbb{C}$: $P(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Объяснение: $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности 2 $\langle 1,i \rangle$

$a + bi \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $x_1 + x_2 i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Умножение на $z \in \mathbb{C}$ — линейное отображение: $(x_1 + x_2)i = -x_2 + x_1 i$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

7. Элементарные преобразования

Определение 31. $\mathcal{A}: K^n \to K^n$ – линейное отображение ($\mathcal{A}(X) = AX$); $\mathcal{A}$ – **элементарное преобразование**, если $\exists i_0: \ \mathcal{A}(X)_i = x_i \ \forall i \neq i_0$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\mathcal{A}$ – обратимо (меняется только одна координата).

Пример 18. $\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{2}x_2 + x_3 - x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – элементарно.

Утверждение 16. ***Виды элементарных преобразований:***

1. ***Трансвекция:*** $t_{i,j}(a)\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_i + a \cdot x_j \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

   $t_{i,j}(a)$ – *обратимо.*

   $t_{i,j}(a)^{-1} = t_{i,j}(-a)$

   Матрица: $E + a \cdot e_{i,j}$

2. ***Дилатация:*** $m_i(a)$, $a \in K \setminus \{0, 1\}$

   $m_i(a)\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ a \cdot x_i \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

   $m_i(a)$ – *обратимо.*

   $m_i(a)^{-1} = m_i(\frac{1}{a})$

   Матрица: $E + (a-1) \cdot e_{i,i}$

3. *Часто рассматривается третий тип –* ***транспозиция:*** $s_{i,j} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_i \\ ... \\ x_j \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_j \\ ... \\ x_i \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

Не нужна: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$s_{1,2} = m_2(-1) \cdot t_{1,2}(1) \cdot t_{2,1}(-1) \cdot t_{1,2}(1)$ *(то есть транспозиция – это композиция трансвекций и дилатаций)*

Утверждение 17. *A – матрица:*

1. *$t_{i,j}(a) \cdot A$ получается из A прибавлением к i–ой строке j–ой строки, умноженной на a.*
2. *$m_i(a) \cdot A$ получается из A умножением i–ой строки на a.*
3. *$A \cdot t_{i,j}(a)$ получается из A прибавлением к j–ому столбцу i–ого столбца, умноженного на a.*
4. *$A \cdot m_i(a)$ получается из A умножением i–ого столбца на a.*

Теорема 11.

1) $A \in M_{n,m} \Rightarrow \exists e_1,...,e_k$ – трансвекции/дилатации.

$$e_1...e_kA = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & .. & ... \end{pmatrix} \text{ (треугольная матрица)}$$

2) $m = n$ и A обратима, то $\exists e_1,...,e_k : e_1...e_kA = E$

2') $m = n$ и A обратима, то A – произведение трансвекций/дислатаций.

3) A – произведение $\Rightarrow \exists e_1,...,e_k$ и $d_1,...,d_l$ – трансвекции/дилатации $e_1...e_kAd_1...d_k = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Доказательство. 1) Индукция по n

Переход $n \to n+1$: рассмотрим первый столбец $\begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

I. Все $a_{i1} = 0$; $A = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\tilde{A}}_{n}$

Применим к $\tilde{A}$ индукционное предположение: $\exists$ элементарные матрицы (порядка m)

$$e_1,...,e_k\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & * \\ ... & a_{22} & ... \\ 0 & ... & ... \end{pmatrix}$$

Тогда $e_1...e_kA = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & ... & * \\ 0 & 0 & a_{22} & \\ ... & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

II. $a_{11} \neq 0$: применим $t_{i,1}(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ для каждого $i = 2..m$.

$e_2...e_mA = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & \\ ... & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)$

Применим индукционное предположение к $\tilde{A}$: $\exists \tilde{e_{m+1}},...,\tilde{e_s}$:

$\tilde{e_{m+1}},...,\tilde{e_s}\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a_{11}} & .. & * \\ 0 & \tilde{a_{22}} & ... \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Заменим $\tilde{e_k}$ на e_k : $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ ... & \tilde{e_k} \\ 0 & \end{array}\right)$

Тогда $e_{m+1}...e_sA = \left(\begin{array}{c|cc} a & b & \\ \hline 0 & \tilde{a_{11}} & \\ ... & 0 & \tilde{a_{22}} \\ 0 & & \end{array}\right)$

III. A – квадратная обратимая матрица. По первому пункту: $\exists$ элементарные преобразования: $a_1...a_kA = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & * \\ 0 & a_{22} & \\ ... & & \\ 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$

<u>Утверждение:</u> $a_{ii} \neq 0$

<u>Доказательство утверждения:</u> пусть $\exists a_{ii} = 0 \Rightarrow$

первые i столбцов матрицы $\in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1_{(i-1 \text{ позиция})} \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$ они ЛЗ (но у обратных матриц столбцы линейно независимы)

$a_1...a_kA$ обратима, так как ранг не меняется при домножении на обратимые матрицы.

Теперь применим $\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_{in}(-\frac{a_{in}}{a_{nn}})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & a_{1n} \\ & & a_{2_n} \\ & & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & * & 0 \\ & & 0 \\ & & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Потом применим $\prod\limits_{i=1}^{n-2} t_{i,n-1}(-\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n-1}})$ и так далее...

В итоге получим: $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & 0 \\ ... & & \\ 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Применим $\prod m_i(\frac{1}{a_{ii}})$; получим $\begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & & \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E$.

2') $\exists e_1,...,e_k;\ e_1...e_k A = E$

$A = e_k^{-1}...e_!^{-1}$ (отметим, что $e_1...e_k = A^{-1}$)

e_i – элементарные преобразования

3) A – произвольная матрица, $\exists$ обратимые матрицы $C,D:\ CAD = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$C = e_1....e_k$ по 2' & $D = d_1....d_l \Rightarrow e_1....e_k A d_1....d_l = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

□

Следствие 6. *Из теоремы следует алгоритм нахождения обратной матрицы:*

$e_k...e_1 A = E \Rightarrow e_k...e_1 = A^{-1}$

Создаем блочную матрицу: $(A \mid E)$; применяем одновременно элементарные преобразования к A и к E (приводя A к E)

$e_1...e_k(A \mid E) = (e_1...e_k A \mid e_1...e_k E) \Rightarrow (A \mid E) \xrightarrow{\text{элементарные преобразования}} (E \mid A^{-1})$

8. Разложение матриц

8.1 PDQ-разложение

Теорема 12. *A – прямоугольная матрица, тогда $\exists$ обратные матрицы P и Q такие, что* $A = P\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}Q$

Доказательство. Знаем, что $\exists$ обратимые C,D: $CAD = \begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \Rightarrow A = \underbrace{C^{-1}}_{=P}\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\underbrace{D^{-1}}_{=Q}$ □

Определение 32. $A \in M_n(K)$; A называется **диагональной**, если $a_{ij} = 0$ при $\forall i \neq j$. Обозначается как D_n.

Определение 33. $A \in M_n(K)$; A называется **верхнетреугольной**, если $a_{ij} = 0$ при $\forall i > j$. Обозначается как LT_n.

Определение 34. $A \in M_n(K)$; A называется **нижнетреугольной**, если $a_{ij} = 0$ при $\forall i < j$. Обозначается как UT_n.

Утверждение 18. *D_n,LT_n,UT_n − кольца (подкольца в $M_n(K)$).*
$D_n = LT_n \cap UT_n$ − коммунитативно (максимальное коммунитативное подкольцо в $M_n(K)$).
$D_n^* = K^* \times K^* \times ... \times K^*$.

Утверждение 19. *$A \in D_n(LT_n,UT_n)$; тогда A − обратимая $\Leftrightarrow$ все диагональные элемента не равны 0 ($a_{ii} \neq 0$ $\forall i$).*

Доказательство. Пусть $a_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} \text{A} \in UT_n \Leftrightarrow \forall i \ \mathcal{A}(\langle e_1, e_2, ... e_i \rangle) \subseteq \langle e_1, e_2, ... e_i \rangle \\ \text{A} \in LT_n \Leftrightarrow \forall i \ \mathcal{A}(\langle e_i, e_{i+1}, ... e_n \rangle) \subseteq \langle e_1, e_2, ... e_i \rangle \end{cases}$ $\Rightarrow LT_n$ и UT_n − подкольца.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & ... & ... \\ 0 & & a_{nn} & \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(e_1) = a_{11}e)1 \\ \mathcal{A}(e_2) = a_{12}e)1 + a_{22}e)2 \\ ... \end{cases}$ (в образе $\mathcal{A}(\langle e_1, e_2, ... e_i \rangle)$ не возникает e−шек с большим номером)

Легко видеть: $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$

В частности: $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$ $\text{e}_i \overset{\mathcal{B}}{\rightsquigarrow} b_i e_i \overset{\mathcal{A}}{\rightsquigarrow} b_i(a_i e_i) = b_i a_i e_i$

Очевидно, что коммунитативно и что $D_n = K \times K \times ... \times K$ и $D_n^* = K \times K^* \times ... \times K^*$. □

Критерий обратимости:

1. для $A \in UT_n$: это было в доказательстве пункта 2 предыдущей теореме.

2. $A \in LT_n$: следует из обратимости для UT_n (A обратима $\Leftrightarrow A^T$ обратима).

8.2 LU-разложение

Было: A – обратима; $A \overset{\text{э.п., Гаусс}}{\to} \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ (см. пред. теорему)

Пусть в ходе Гаусса не было исключений (перестановок строк) $\Rightarrow$ применяем только $t_{i,j}(a)$, где $i > j$.

Заметим, что $t_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & \ddots & ... & 0 \\ 0 & a & \ddots & ... \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \in LT_n \Rightarrow U = \underbrace{e_1..e_k}_{\in LT_n A} \in UT_n \Rightarrow A = \underbrace{e_1^{-1}...e_k^{-1}}_{=L} U = LU$

Итого: $A = LU$, $L \in LT_n^*$, $U \in UT_n^*$ $\to$ $LU-$разложение

Утверждение 20. *$LU-$разложение существует* $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{c|c} A_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$, *$A_k$ – обратимая квадратная матрица размера $k \times k$.*

Доказательство. $\Leftarrow$: есть проблемы $\Leftrightarrow$ в какой-то момент получили

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}^{=\tilde{A}_k} & * \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & ... & * \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & * \end{pmatrix} & * \end{array}\right)$$

$\tilde{A}_k$ необратимая $\Leftrightarrow$ A_k необратимая

$\Rightarrow$: упражнение - перемножить L на U. □

8.3 LPU-разложение

В общем случае: сделаем в начале перестановку строк так, чтобы выполнилось условие теоремы: TODO

rk $C_{k+1} = k + 1$ (матрица обратима) $\Rightarrow$ rk C_{k+1} по строке $= k + 1$

Первые k строк ЛНЗ (знаем) $\Rightarrow \exists$ строка $r_i \in \langle r_1, r_2, ..., r_n \rangle$. Переставим r_i на $(k+1)$-ое место.

Итого: $A \rightsquigarrow s_1...s_n A$ – удовлетворяет условию теоремы (s_i – транспозиции) $\Rightarrow s_1...s_n A = LU \Rightarrow A = s_n....s_1 LU = PLU$, P – матрица перестановки.

$P : \exists$ перестановка $\pi \in S_n$ $P_{i,\pi(i)} = 1$ и $P_{i,j} = 0$ иначе.

9. Определитель

9.1 Определитель

Определение 35. Определитель – функция det: $M_n(K) \to K$.

Пример 19. Площадь/объем.

(картиночка)

Оказывается, что $S = |ad - bc|$. Как к этому прийти?

Свойства площади:

1) (еще картиночка)

   $S(\vec{u}, k\vec{v}) = kS(\vec{u}, \vec{v})$

2) (еще картиночка)

   $S(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + S(\vec{u}, \vec{w})$

2') $S(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u}) = S(\vec{u}, \vec{v}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + kS(\vec{u}, \vec{u})$ (1 и 2 свойства)

3) $S(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

Теперь можно: (опяяяять картинки)

Воспользуемся еще одной аксиомой, что S(квадрат 1 на 1) $= 1 : (ad-bc)S\begin{pmatrix}1 & 0 0 & 1\end{pmatrix} = ad-bc$.

9.2 Полилинейная функция

Определение 36. K^n (или V) – векторное пространство над K.

Функция $f : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{m} \to K$ называется *полилинейной*, если:

$\forall i\ v_1,...,v_{i-1}, v_{i+1},...,v_m \in K^n\ f(v_1,...,v_{i-1}, v_{i+1},...,v_m) : V \to K$ линейная, то есть:

$f(v_1,...,v_{i-1}, v_i + b_i v_i',...,v_m) = f(v_1,...,v_i,...,v_m) + bf(v_1,...,v_i',...,v_m)$.

Пример 20. $m = 1$: полилинейное = линейное.

$m = 2$: пример: скалярное произведение векторов.

Определение 37. Полилинейная функция f называется кососимметричной, если верно, что $v_i = v_j \Rightarrow f(v_1,..., v_m) = 0$.

Замечание. (покажем на случае функции от двух параметров, общий случай выводится аналогично)

$f(x, y)$ – полилинейная.

1. f кососимметричная.

2. $f(x,y) = -f(y,x)\ \forall x, y.$

Тогда $1 \Rightarrow 2$ и $1 \Leftrightarrow 2$, если $\mathrm{char} K \neq 2$.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1: \ f(x,x) = -f(x,x) \Rightarrow 2f(x,x) = 0 \overset{\text{если } \mathrm{char}K\neq 2}{\Rightarrow} f(x,x) = 0.$
$1 \Rightarrow 2 : 0 = f(x+y, x+y) = \underbrace{f(x,x)}_{=0} + f(x,y) + f(y,x) + \underbrace{f(y,y)}_{=0} \Rightarrow f(x,y) = -f(y,x).$ □

Утверждение 21. *Кососимметричная полилинейна функция однозначно задается значениями $f(e_{i_1},...,e_{i_m})$, где $i_1 < ... < i_n$.*

Доказательство. Достаточно вычислить $f_1(e_{i_1},...,e_{i_m})$ (по предыдущему утверждению).
$\exists k,l: \ i_l = i_k \Rightarrow f(...) = 0$ (по определнию)
Пусть $i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_m$; i_k – min; $f(e_{i_1},...,e_{i_k}...,e_{i_m}) = -f(e_{i_k}, e_{i_1},...,e_{i_m})$. Продолжая это, получим $f(e_{i_1},...,e_{i_m}) = \pm f(e_{j_1},...,e_{j_m})$, где $j_1 < ... < j_m$. □

Определение 38. Пусть $n = m$; тогда билинейная кососимметричная функция f называется *определителем порядка* n $(f \neq 0)$.

Теорема 13. *f_1 и f_2 – определители $\Rightarrow \exists c \in K^* : f_1 = c \cdot f_2$.*

Доказательство. Пусть $f_1(e_1,...,e_n) = c \cdot f_2(e_1,...,e_n)$.
Тогда: $\forall e_{i_1},...,e_{i_n}\ f_1(e_{i_1},...,e_{i_n}) = c \cdot f_2(e_{i_1},...,e_{i_n})$.
Тогда по утверждению 1 $f_1 \cdot f_2$ всегда. □

Определение 39. $V = K^n$; определителем будем называть такой определитель, что:
$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ..0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ..0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ..1 \end{pmatrix}\right) = 1$. Она обозначается det.

9.3 Четность перестановки

Определение 40. Перестановка $s \in S_n$, $s_i : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ биекция.

Утверждение 22. *s – композиция трансвеций.*

Доказательство. Индукция по n.
Переход: $n \to n+1 : \pi \in S_{n+1},\ ,\pi(n+1) = x$
Рассмотрим $s_{n+1,x} \circ \pi = \overline{\pi}$; $\overline{\pi}(n+1) = ,\pi(x) = n+1 \overset{\text{забываем про } n}{\Rightarrow} \overline{\pi}\ |_{\{1,...,n\}}$ по и.п. это $s_{i_1,j_1} \circ ... \circ s_{i_k,j_k} \Rightarrow \pi = s_{n+1,x} \circ s_{i_1,j_1} \circ ... \circ s_{i_k,j_k}$ □

Определение 41. Четность перестановки
Если $\pi = s_1 \circ ... \circ s_{2k}$, где s_i – транспозиции, то π – *четная* перестановка.
Если $\pi = s_1 \circ ... \circ s_{2k+1}$, где s_i – транспозиции, то π – *нечетная* перестановка.

Теорема 14. ***Явная формула для определителя*** $A = (a_{i,j})_{i,j=1..n}$. *Тогда функция* $\det A = \sum\limits_{\pi \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\pi)} a_{1,,\pi(1)} \cdot a_{2,,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,,\pi(n)}$, *где* $\varepsilon(\pi)$ *– четность перестановки* π *полилинейная, кососимметричная и нормальная (т.е.* $\det$ *в прежнем смысле).*

Замечание. Эта формула – сумма ладейных произведеинй, взятых со знаком.

Пример 21. $n = 2 : + : \begin{vmatrix} * & \\ & * \end{vmatrix}, - : \begin{vmatrix} & * \\ * & \end{vmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ (в общем случае будет $n!$ слагаемых)

Определение 42. Четность через инверсии: $\tilde{\varepsilon}(\pi) = \Big|\{(i,j) \mid i < j \ \& \ ,\pi(i) < ,\pi(j)\}\Big|$.

Пример 22. $\pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow 5$ инверсий $\Rightarrow 5$ нечетно.

Теорема 15. *Два определения четности совпадают.*

Доказательство. Это следует из леммы.

Лемма 6. Если t – транспозиция, то у $\tilde{\varepsilon}(t\pi)$ и $\tilde{\varepsilon}(\pi)$ число инверсий по модулю 2 различно.

Доказательство. По индукции: $\tilde{\varepsilon}(s_1,...,s_{2k}) = 0, \tilde{\varepsilon}(s_1,...,s_{2k+1}) = 0$
База: $\tilde{\varepsilon}(id) = 0$
Переход: $\pi : ,\pi(1)...,\pi(k) = i...,\pi(l) = j...,\pi(n)$
$\tilde{\pi} = t_{i,j} \circ \pi : \tilde{\pi}(1)...\tilde{\pi}(k) = j...\tilde{\pi}(l) = i...\tilde{\pi}(n)$
Какие пары поменяли статус: их $l-k+1$ с участием k, $l-k+1$ с участием l и пара (k,l). Итого: $2(l-k+1)+1-$ нечеттное число смен статуса $\Rightarrow$ четность поменялась. □

□

Теорема 16. $\det$ – *полилинейная кососиметричная функция,* $\det(E) = 1$ *(то есть* $\det$ *в аксиоматическом смысле существует).*

Доказательство.

1. $\underline{\det(E)} = \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn} \cdot (-1)^{\varepsilon(id)} = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

   Одна ненулевая ладейная расстановка.

2. <u>Полилинейность:</u> $A = (C_1 \mid C_2 \mid \ldots \mid C_i' + a \cdot C_i'' \mid \ldots \mid C_n)$, $A = (a_{ij})$, $a_{ki} = a_{ki}' + a \cdot a_{ki}''$

   Тогда $\forall \pi \in S_n : \ (-1)^{\varepsilon(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot (a'_{\pi^{-1}(i)i} + a \cdot a''_{\pi^{-1}(i)i}) \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)} = (-1)^{\varepsilon(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a'_{\pi^{-1}(i)i} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)} + a \cdot (-1)^{\varepsilon(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a''_{\pi^{-1}(i)i} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)}$

   Теперь сложим равенства для всех π и получим линейность (по i-ому аргументу)

3. <u>Кососимметричность:</u> (!) $A = (C_1 \mid C_2 \mid \ldots \mid \overset{i}{C_i} \mid \ldots \mid \overset{j}{C_j} \mid \ldots \mid C_n) \Rightarrow \det A = 0$, $a_{ki} = a_{kj}\ \forall k$

   Разобьем слагаемые в $\det A$ на пары $(\pi, t_{i,j}\circ\pi)$

   $(-1)^{\varepsilon(\pi)}\cdot a_{1,\pi(1)}\cdot\ldots\cdot a_{\pi^{-1}(i),i}\cdot\ldots\cdot a_{\pi^{-1}(j),j}\cdot\ldots\cdot a_{n,\pi(n)} + (-1)^{\varepsilon(t_{i,j}\circ\pi)}\cdot a_{1,\pi(1)}\cdot\ldots\cdot \overset{=a_{\pi^{-1}(i),i}}{a_{\pi^{-1}(i),j}}\cdot\ldots\cdot \overset{=a_{\pi^{-1}(j),j}}{a_{\pi^{-1}(j),i}}\cdot$ $\ldots\cdot a_{n,\pi(n)} = \prod\limits_{k=1}^{n} a_{k,\pi(k)} \underbrace{\left((-1)^{\varepsilon(\pi)} + (-1)^{\varepsilon(t_{i,j}\circ\pi)}\right)}_{=0 \text{ по лемме}} \Rightarrow$ весь $\det = 0$.

$\square$

Теорема 17. ***Определитель и элементарные преобразования***

1. $\det(A\circ t_{i,j}(a)) = \det A$.
2. $\det(A\circ m_i(a)) = a\cdot\det A$.
3. $\det(A\circ s_{i,j}) = -\det A$.

Доказательство. 3. Это вторая формулировка кососимметричности: $f(x,y) = -f(y,x)$.

2. Это линейность по i-ому столбцу.

1. $A = (C_1 \mid C_2 \mid \ldots \mid C_n)$

   $\det(A\circ t_{j,i}(a)) = \det(C_1 \mid \ldots \mid C_i \mid \ldots \mid C_j + a\cdot C_i \mid \ldots \mid C_n) \overset{\text{лин-ть по } j}{=} \underbrace{\det(C_1 \mid \ldots \mid C_i \mid \ldots \mid C_j \mid \ldots \mid C_n)}_{=a\cdot\det A} +$

$\square$

Следствие 7. $\det$ *можно посчитать так:* $A \overset{t_{i,j}}{\to} \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$

Доказательство. По th: $\det A = \det\tilde{A}$; $\det\tilde{A} = \tilde{a_{11}}\cdot\ldots\cdot\tilde{a_{nn}}$ ($\tilde{a_{11}},\ldots,\tilde{a_{nn}}$ – единственная возмож-ножно ненулевая ладейная расстановка) $\square$

Следствие 8. *A обратима* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Доказательство. A обратима $\Leftrightarrow \tilde{A}$ обратима $\Leftrightarrow$ все $\tilde{a_{ii}}$ не равны $0 \Leftrightarrow \det\tilde{A} = \tilde{a_{11}}\cdot\ldots\cdot\tilde{a_{nn}} \neq 0$. $\square$

Теорема 18. $\det A = \det A^T$

То есть любые свойства $\det$*, верные для столбцов, верны и для строк и наоборот.*

Доказательство. $A = (a_{ij})$, $A^T = (a'_{ij})$, $a'_{ij} = a_{ji}$

$(-1)^{\varepsilon(\pi)}a_{1,\pi(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\pi(n)} = (-1)^{\varepsilon(\pi)}a_{\pi^{-1}(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\pi^{-1}(n),n} = (-1)^{\varepsilon(\pi)}a'_{1,\pi(1)}\cdot\ldots\cdot a'_{n,\pi(n)} \overset{(*)}{=} (-1)^{\varepsilon(\pi^{-1})}a_{1,\pi(1)}\cdot$ $\ldots\cdot a_{n,\pi(n)}$

Сложим по всем π и получим $\det A = \det A^T$.

$(*) : \varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi^{-1})$, т.к. $\pi = t_1\ldots t_k$; $\pi^{-1} = (t_1\ldots t_k)^{-1} = t^{-1}\ldots t_1^{-1} = t_k\ldots t_1$ тоже k. $\square$

Теорема 19. ***Разложение по строке/столбцу***

$A = (a_{ij})$, $A_{i,j}$ – det *матрицыб полученной из* A *удалением* i*-ой строки и* j*-ого столюца (минор).*

Тогда $\forall i = 1...n$:

1. $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot A_{i,j}$ – *по строке.*

2. $\forall i = 1...n: \ \det A = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} \cdot a_{j,i} \cdot A_{j,i}$ – *по столбцу.*

Выразим $\det A$ *через* n *определителей* $(n-1)$*-ого порядка.*

Доказательство. (для строки)

i-ая строка: $(a_{i,1},...,a_{i,n}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(0,...,0,\overset{j}{1},0,...,0)$

Тогда по линейности $\det A = \sum a_{i,j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \overset{j}{\therefore} & a_{1,n} \\ 0 & ..\ 1\ .. & 0 \end{pmatrix}$ i = (переставим $a_{i,j}$ на позицию (1,1) $i-1$ транспозиции строк и $j-1$ транспозиции столюцов) $= \sum a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & ... & 0 \\ \hline & & \tilde{A}_{i,j} & \end{array}\right) =$ $\sum a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(\tilde{A}_{i,j}) = \sum a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot A_{i,j}$ □

Пример 23. $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$

Следствие 9. *Пусть* $i \neq i'$. *Тогда* $\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{i,j} \cdot A_{i,j} = 0$ $(*)$.

Доказательство. По предыдущей th $*$ – определитель A' – матрица, у которой i-ая строка заменена на i'-ую строку; $\det A' = 0$, т.к. есть совпадающие строки. □

Определение 43. $A^{adj} = ((-1)^{i+j}A_{j,i})_{i=1...n,\ j=1...n}$ – *присоединенная матрица* к A.

Утверждение 23. $A \cdot A^{adj} = A^{adj} \cdot A = (\det A) \cdot E$

Доказательство. Это предыдущая теорема и ее следствия:

th: у $A \cdot A^{adj}$ на диагонали стоит $\det A$.

cons: у $A \cdot A^{adj}$ вне диагонали стоят 0.

$\sum\limits_{j}(-1)^{i+j} \cdot a'_{i,j} \cdot A_{i,j} = \sum\limits_{j}(A_{i,j})(A^{adj})_{j,i}$ □

Следствие 10. $\det A \neq 0$. *Тогда* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{adj}$.

Теорема 20. ***Формула Крамера***

$AX = B$ – СЛУ, $A \in M_n(K)$, $\det A \neq 0$ ($\Leftrightarrow$решение существует и единственно $\forall B$). Тогда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ...x_n \end{pmatrix}$, где $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, $\Delta_i = \det$ матрицы, полученной из A заменой i-ого столбца на столбец B.

Доказательство. $\begin{pmatrix} x_1 \\ ...x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{i,k} \cdot b_k = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{k=1}^{n} A^{adj}_{i,k} \cdot b_k = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot A_{k,i} \cdot b_k \overset{\text{разложение по } i\text{-ому столбцу}}{=} \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{1,1}} & & i & & \phantom{a_{1,n}} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & b_1 & ... & a_{1,n} \\ & & & & \\ a_{n,1} & ... & b_k & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ □

Определение 44. $A_{k,i}$ называется *алгебраическим дополнением. $a_{k,i}$ – миноры* $(n-1)$-ого порядка.

Теорема 21. ***Явная формула для ранга: минорный ранг***

Ранг матрицы равен порядку максимального ненулевого минора, т.е. размеру max подматрицы с ненулевым определителем.

Доказательство.

1. Столбцовый ранг $\geq$ минорного.

   $\exists$ ненулевой минор $k \times k$. НУО это первые k строк и k столбцов: $\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \\ \hline & \end{array}\right)$

   $\det \tilde{A} \neq 0 \Rightarrow \tilde{A}$ обратима $\Rightarrow$ столбцы $\tilde{A}$ – ЛНЗ $\Rightarrow k$ столбцов A ЛНЗ $\Rightarrow \operatorname{rk} A \geq k$.

2. Столбцовый ранг $\leq$ минорного.

   Пусть $\operatorname{rk} A = k$. НУО первые k столбцов ЛНЗ: $\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \end{array}\right)$

   $\operatorname{rk} \tilde{A} = k \Rightarrow$ в $\tilde{A}$ есть k ЛНЗ строк, т.е. подматрица $\tilde{\tilde{A}}$ $k \times k$ с ЛНЗ строками $\Rightarrow \tilde{\tilde{A}}$ обратима $\Rightarrow \det \tilde{\tilde{A}} \neq 0$

   Нашли ненулевой минор k-ого порядка $\Rightarrow$ минорный ранг $\geq \operatorname{rk} A$.

□

10. Групповые свойства определителя

Теорема 22. $\det$ – *гомоморфизм, то есть:*

1. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

2. $\det E = 1$.

3. $\exists A^{-1} \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Доказательство. 2 знаем, 3 следует из 1. Докажем 1.
$B = (C_1 \mid ... \mid C_n)$
$A \cdot B = (A \cdot C_1 \mid ... \mid A \cdot C_n)$
Зафиксируем A. B, то есть C_1,...,C_n – переменные. Тогда $\det(A \cdot B)$ – линейная кососимметричная функция от C_1,...,C_n.
Линейность:
$\det(A(C_1' + C_1'' \mid C_2 \mid ... \mid C_n)) = \det(A(C_1' + C_1'') \mid A \cdot C_2 \mid ... \mid A \cdot C_n)) = \det(A \cdot C_1' + A \cdot C_1'' \mid A \cdot C_2 \mid ... \mid A \cdot C_n) \overset{\text{полилин-ть det}}{=} \det(...) + \det(...)$
Кососимметричность:
В B одинаковые столбцы $\Rightarrow B$ необратима $\Rightarrow A \cdot B$ необратима $\det AB = 0$.
Знаем: полилинейность, кососимметричность, единственность с точностью умножения на константу.
$\begin{cases} f(B) = \det(AB) \\ g(B) = \det(AB) \end{cases}$ полилинейные кососимметричные $\Rightarrow \exists c \in K\ \forall B\ \det(AB) = c \cdot \det B$
Подставим $B = E$ и получим: $\det A = c \cdot \det E \Rightarrow c = \det A$. То есть $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. □

Теорема 23. *$n = m + l$, $A \in M_n(K)$, $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & l \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ l \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \end{array}$. Тогда* $\det A = \det B \cdot \det C$.

Доказательство. Шаг 1: $B = C = E$. $\det \left(\begin{array}{c|c} E & * \\ \hline 0 & E \end{array}\right) \overset{\text{эл. преобр.}}{=} \det E = 1$

Шаг 2: $E, *$ фиксированы. $\det \left(\begin{array}{c|c} E & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ – полилинейная функция от последних l строк, т.е. от строк $B \Rightarrow \det \left(\begin{array}{c|c} E & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det B \cdot C$
$B = E \Rightarrow C = 1 = \det E$
Шаг 3: $B, *$ фиксированы. $\det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ – полилинейная функция относительно столбцов $A \Rightarrow \det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \cdot C$

$A = E \Rightarrow \det B \overset{\text{по шагу 2}}{=} 1 \cdot C \Rightarrow C = \det B \Rightarrow \det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$ □

10.1 Кольца частных

R – коммунитативное кольцо. Вопрос: существует ли такое K, что $R \subset K$ – подкольцо и K – поле?

$R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i]$ – yes.

$R = \mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ – no: $2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow 2{,}3$ не обратимы.

То есть делители нуля – препятствие.

Теорема 24. *Пусть R – область целостности. Тогда $\exists K : R$ – подкольцо в K и K – поле.*

Доказательство. Рассмотрим $K = \{(a{,}b) \mid a{,}b \in R,\ b \neq 0\}$

Заведем отношение: $(a{,}b) \sim (c{,}d)$, если $ad = bc$.

Утверждение: это отношение эквивалентности.

Рефлексивность и симметричность очевидны.

Транзитивность: $(a{,}b) \sim (c{,}d) \sim (e{,}f)$

$ad = bc \ \&\ cf = ed \Rightarrow adef = bced \ \&\ c{,}d \neq 0 \Rightarrow af = bc$, т.е. $(a{,}b) \sim (e{,}f)$.

$K/_\sim = K = K(R)$

Определим $+$ и $\cdot$:

$\overline{(a{,}b)} \cdot \overline{(c{,}d)} = \overline{(ac{,}bd)}$

$\overline{(a{,}b)} + \overline{(c{,}d)} = \overline{(ad + bc{,}bd)}$

Корректность: $(a{,}b) \sim (a'{,}b') \Rightarrow (ad + bc{,}bd) \sim (a'd + b'c{,}b'd)$

$(ad + bc)b'd = (a'd + b'c)bd \Leftrightarrow ab'dd + bb'cd = a'bdd + bb'cd \Rightarrow ab' = a'b$

Аналогично доказывается корректность умножения.

Обозначение 7. $\frac{a}{b} = \overline{(a{,}b)}$

$\square$