Содержание

9. Теория меры

9.1 Система множеств

Обозначение:

Дизъюнктные множества:

1. $A \sqcup B := A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$
2. $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$

Определение 9.1.1. $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – *разбиение множества* E, если $E = \bigsqcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$

Напоминание:

$X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$ и $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$

Определение 9.1.2. $\mathcal{A}$ – система подмножеств X:

δ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.

σ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$.

δ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

σ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Замечание. Из δ следует δ_0 и из σ следует σ_0 (так как δ и σ подразумевают более сильные ограничения на структуру).

Определение 9.1.3. Система множества *симметрична*, если $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Определение 9.1.4. Система множества $\mathcal{A}$ – *алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \in \mathcal{A}$, есть свойства δ_0 и σ_0.

Определение 9.1.5. Система множества $\mathcal{A}$ – σ*-алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \in \mathcal{A}$, есть свойства δ и σ.

Утверждение 9.1.1. Если $\mathcal{A}$ симметричная система, то $\sigma_0 \Leftrightarrow \delta_0$ и $\sigma \Leftrightarrow \delta$.

Доказательство. $X \setminus (\underbrace{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)}_{X \setminus (A \cap B)}) = A \cap B$ и $X \setminus (\underbrace{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)}_{X \setminus (A \cup B)}) = A \cup B$ ☐

Замечание. Если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра, то $\mathcal{A}$ – алгебра.

Свойства алгебры множеств:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.
2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $\underbrace{A \setminus B}_{A\cap(X\setminus B)} \in \mathcal{A}$.
3. Если $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ (по индукции).

Пример.

1. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \{$все огранич. мн-ва и их дополнения$\}$

   (пустое есть, для любого множества есть дополнение, пересечение двух ограниченных ограниченно, пересечение ограниченного с каким-то ограничено и пересечение дополнений – это дополнение объединений, а объединение ограниченных ограничено)

   $\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра.

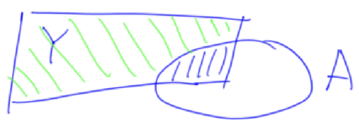
2. 2^X – σ-алгебра

3. $Y \subset X$, $\mathcal{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X, тогда:

   $\mathcal{B} := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ – алгебра (σ-алгебра) – *индуцированная алгебра*

   Доказательство. $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (X \setminus A)$

   Проверили, что взяли какую-то алгберу и пересекли с конкретным множеством, то структура сохранится.

   □

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры). Тогда $\bigcap\limits_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).

   Доказательство. Пустое лежало везде, поэтому оно осталось в пересечении. Само пересечение, очевидно, тоже есть.

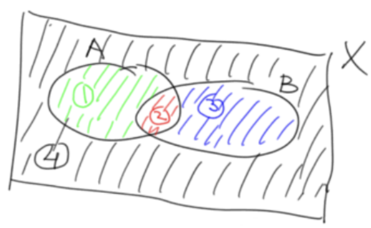
   Если $A, B \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$, то $A, B \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall\alpha \in I \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall\alpha \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$ □

5. Пусть есть $A, B \subset X$.

   Вопрос: из чего состоит наименьшая алебра, содержащая A и B?

   Ответ: $\varnothing, X, A, B, A \cap B, A \cup B, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B), A \setminus B, B \setminus B,$

   $A \triangle B, X \setminus (A \triangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$



Теорема 9.1.1. *Пусть $\mathcal{E}$ – система подмножеств X. Тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{E}$.*

Доказательство. 2^X – σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.
Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры, содержащие $\mathcal{E}$.
$\mathcal{B} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – σ-алгебра, $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E}\ \forall \alpha$.
Доказали сущестование. □

Определение 9.1.6. Такая σ-алгебра – *борелевская оболочка* $\mathcal{E}$. Обозначается как $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Определение 9.1.7. Пусть $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{E}$ – всевозможные открытые множества. *Борелевская σ-алгебра* $\mathcal{B}^m := \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Замечание. $\mathcal{B}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$ (имеют разные мощности: $\mathcal{B}^m$ – континуум, $2^{\mathbb{R}^m}$ – больше континуума)

Определение 9.1.8. $\mathcal{R}$ – *кольцо подмножеств* X, если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

Замечание. Если $\mathcal{R}$ – кольцо и $X \in \mathcal{R}$, то $\mathcal{R}$ – алгебра.

Определение 9.1.9. $\mathcal{P}$ – *полукольцо подмножеств* X, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow$ существуют $Q_1, Q_2, ..., Q_n \in \mathcal{P}$ т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо

Лемма 9.1.1. $\bigcup A_k = \bigsqcup (A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

Доказательство. Проверяем «$\supset$»: $B_k := A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j \subset A_k \Rightarrow \bigcup A_k \supset \bigcup B_k$
Проверяем, что B_k дизъюнктны: $B_n \subset A_n \setminus \underbrace{A_k}_{\supset B_k}$ при $n > k \Rightarrow B_n \cup B_k = \varnothing$

Проверяем «$\subset$»: берем $x \in \bigcup A_k$, $n := \min\{j \mid x \in A_j\} \Rightarrow x \in B_n = \underbrace{A_n}_{x \in} \setminus \underbrace{\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j}_{x \notin} \Rightarrow x \in \bigcup B_k$. □

Теорема 9.1.2. ***Свойства полукольца:***

Пусть $P, P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – полукольцо. Тогда:

1. $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ *для некоторых* $Q_j \in \mathcal{P}$.
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ *для некоторых* $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, *т.ч.* $Q_{kj} \subset P_k$.
3. *Во 2 пункте можно вместо n написать ∞.*

Доказательство.

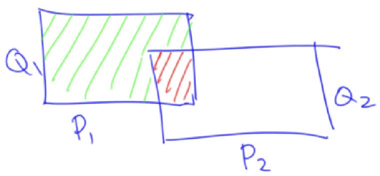
1. Индукция по n. База – определение. Переход $n-1 \to n$
$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k = (\underbrace{P \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k}_{\text{инд.пр.}= \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j}) \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (P_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j) \overset{\text{по } 1}{=} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \Rightarrow Q_{kj} \subset P_k$

$\square$

Теорема 9.1.3. ***Декартово произведение полуколец***

Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств мн-ва X, $\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножеств мн-ва Y. Тогда конструкция $\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – полукольцо подмножеств $X \times Y$.

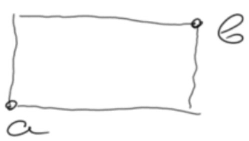
Доказательство. Пусть $P_1 \times Q_1$ и $P_2 \times Q_2 \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2) = (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1 \cap Q_2})$
$(P_1 \times Q_1) \setminus (P_2 \times Q_2) = (\underset{\text{диз. об. эл-в } \mathcal{P}}{P_1 \setminus P_2}) \times \underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1} \sqcup (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\text{диз. об. эл-в } \mathcal{Q}}{Q_1 \setminus Q_2})$



$\square$

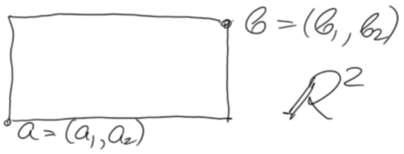
Замечание. Полукольцо – это структура, которая сохраняется при взятии декартового произведения (в отличие от алгебры и σ-алгебры).

Определение 9.1.10. *Открытый параллелепипед* (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^m$
$(a, b) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_m, b_m)$



Определение 9.1.11. *Замкнутый параллелепипед* $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^m$
$[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_m, b_m]$

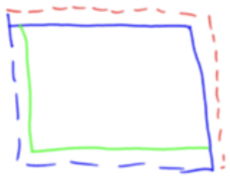
Определение 9.1.12. *Ячейка* $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^m$
$(a, b] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_m, b_m]$



Замечание. $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$

Утверждение 9.1.2. Непустая ячейка – пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающих последовательностей замкнутых параллелепипедов.

Доказательство. $(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_m, b_m]$
Рассмотрим открытые параллелепипеды $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \times ... \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$
$P_{n+1} \subset P_n$, $P_n \supset (a, b]$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$
Рассмотрим закрытые параллелепипеды $A_n := [a_1 - \frac{1}{n}, b_1] \times [a_2 - \frac{1}{n}, b_2] \times .. \times [a_m - \frac{1}{n}, b_m]$
$A_{n+1} \supset A_n \subset (a, b]$, $\bigcup A_n = (a, b]$



□

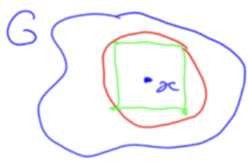
Обозначение:

1. $\mathcal{P}^m$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$ (в т.ч. и пустое множество).

2. $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$, у которых все координаты вершин рациональны.

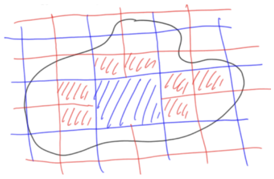
Теорема 9.1.4. *Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ представляется в виде дизъюнктного объединения счетного числа ячеек, замыкания которых $\subset G$. Более того, можно считать, что координаты всех вершин всех ячеек рациональны.*

Доказательство. $x \in G \overset{G \text{ откр.}}{\Rightarrow} x \in \overline{\mathrm{B}}_r(x) \subset G$
Найдется ячейка R_x, т.ч. $x \in R_x$, координаты R_x рациональны и $\mathrm{Cl}\, R_x \subset G$ (Cl содержится в $\overline{\mathrm{B}}_r(x)$, которое содержится в G).
Выкинем все повторы и получим счетное число ячеек, объединение которых (не дизъюнктное) равно G. По свойству полукольца можно это объединение сделать дизъюнктным.



$\square$

Замечание. Явный алгоритм.



Нарезаем на сетку. Те ячейки, которые попали – берем, иначе – половинем и снова смотрим, какие из ячеек попали, а какие нет.

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \overset{1)\subset}{=} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \overset{2)\subset}{=} \mathcal{B}^m \overset{3)\subset}{=}$

Доказательство.

1) $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \overset{\sigma\text{-алгебра}}{\Rightarrow} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

2) $\mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

   Ячейка – счетное пересечение открытых параллелепипедов, т.е. открытых множеств. Они лежат в $\mathcal{B}^m$, но $\mathcal{B}^m$ – σ-алгебра $\Rightarrow$ там есть и счетное пересечение.

3) G – открытое множество $\Rightarrow G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$, т.к. по теореме G – счетное объединение элементов из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

$\square$

9.2 Объем и мера

Определение 9.2.1. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.
Тогда μ – *объем*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$

Определение 9.2.2. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.
μ – *мера*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Замечание. Если μ – мера, то μ – объем.

Упражнение. Если мера $\mu \neq +\infty$, то $\mu\varnothing = 0$ из п. 2.

Пример. Объемы:

1. Длина ячейки в $\mathbb{R}$.

2. Пусть g неубывающая функция : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$, $(a, b] \subset \mathbb{R}$

3. Классический объем ячейки в $\mathbb{R}^m$ (докажем позже)

   $\lambda_m(a, b] = (b_m - a_m)...(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$

4. $x_0 \in X$, $a > 0$, $\mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

5. $\mathcal{A}$ – огранич. подмн-ва $\mathbb{R}$ и их дополнения.

   Если $A \in \mathcal{A}$, то $\mu A = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ – огр. мн-во} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

   Это объем, но не мера.

Теорема 9.2.1. *Пусть μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда:*

1. *Если $P' \subset P$ $(P, P' \in \mathcal{P})$, то $\mu P' \leq \mu P$. (монотонность объема)*

2. *Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leq \mu P$. (усиленная монотонность)*

2'. *Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$.*

3. *Если $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то $\mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$ (полуаддитивность)*

Доказательство.

2. $P \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \Rightarrow \mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu Q_j \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

2'. $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \subset \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \Rightarrow \mu P \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

3. $P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, $Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$

   $\bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \subset P_k \overset{2)}{\Rightarrow} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \mu P_k$

   $\mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

□

Замечание.

1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subset B$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

   $B = \underset{\in\mathcal{P}}{A} \sqcup (B \underset{\in\mathcal{P}}{\setminus} A)$

2. Объем с полукольца можно продолжить на кольцо, состоящее из всевозможных дизъюнктных объединений.

Теорема 9.2.2. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, μ – объем на $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножеств Y, ν – объем на $\mathcal{Q}$.*
$\lambda : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \to [0, +\infty]$.
$\lambda(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) = \mu\mathcal{P} \cdot \nu\mathcal{Q}$ *(считаем, что $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$).*
Тогда λ – объем.

Доказательство. Если $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ и $Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, то $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_k \times Q_j$
$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \nu Q_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{\mu P_k \nu O_j}_{=\lambda(P_k \times Q_j)}$
Противный случай: $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \times Q_k$ □

Следствие. λ_m *– объем.*

Доказательство. λ_1 – объем, λ_m – декартово произведение λ_1. □

Пример. Меры.

1. Классический объём λ_m (потом докажем)

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неубывающая, непрерывная справа во всех точках

   $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$

   Упражнение. Доказать, что непрерывность справа – необходимое условие для того, чтобы ν_g была мерой.

3. $x_0 \in X$, $a > 0$, $\mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

4. Считающая мера $\mu A =$ количество элементов в множестве A.

5. $T = \{t_1, t_2, ...\} \subset X$, $\{w_1, w_2, ...\}$ – неотрицательные числа, $\mu A := \sum\limits_{i: t_i \in A} w_i$

Доказательство. Нужно проверить, что если $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu A = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j$.

$\mu A_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}$, $\mu A = \sum a_{jk}$ в каком-то порядке $\stackrel{?}{=} \sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}$

$\geq$: $\underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}}_{\stackrel{n\to\infty}{\to} \sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} \leq \mu A$

$\leq$: Рассмотрим частичную сумму для $\overset{\to \mu A}{\sum a_{jk}}$. $Y := \max j$, $K := \max k$.

$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum\limits_{j=1}^{Y}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum\limits_{j=1}^{Y}\sum\limits_{k=1}^{K} a_{jk}$

□

Теорема 9.2.3. *Пусть $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ – объем на полукольце.*
Тогда μ – мера $\Leftrightarrow$ (счетная полуаддитивность) Если $P, P_n \in \mathcal{P}, P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, то $\mu P \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$.

Доказательство.

$\Leftarrow$. Если $P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$

(a) счетная полуаддитивность $\Rightarrow \mu P \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

(b) усиленная монотонность $\Rightarrow \mu P \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

$\Rightarrow$. $P'_n := P \cap P_n \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P'_n \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \in \mathcal{P}$, $Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$

$\mu P = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

$\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P_n \stackrel{\text{усил. монот.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \mu P_n$

□

Следствие. *Если μ – мера, заданная на σ-алгебре, то счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры.*

Доказательство. $\mu_n = 0$, $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\text{счет. полуад.}}{\Rightarrow} \mu A_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0 \Rightarrow \mu A = 0$ □

Теорема 9.2.4. *Пусть μ – объем, заданный на σ-алгебре $\mathcal{A}$.*
Тогда μ – мера $\Leftrightarrow$ (непрерывность снизу) Если $A_1 \subset A_2 \subset ....$, $A_n \in \mathcal{A}$, то $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu A_n$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ (считаем, что $A_0 = \varnothing$)

$A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \underset{\supset}{=} \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ $(B_n \subset A_n)$

$\subset$: если $x \in A$, то возьмем m – наименьший индекс, для которого $x \in A_m \Rightarrow x \in B_m$.

(счет. ад.) $\mu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu A_n - \mu A_{n-1})$

Если все μA_n конечны, то $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu B_k}_{\to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \mu A} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\mu A_k - \mu A_{k-1}) = \mu A_n \Rightarrow \mu A_n \to \mu A$

Если $\mu A_n = +\infty$ при больших n, то $\mu A = +\infty$ и все очевидно.

$\Leftarrow$. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $A_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$

$\overset{\text{непр. снизу}}{\Rightarrow} \underbrace{\mu A_n}_{=\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu C_k} \to \mu A \Rightarrow \mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k$

$\square$

Теорема 9.2.5. *Пусть μ – объем, заданный на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mu X < +\infty$, тогда следующие условия равносильны:*

1. *μ – мера.*
2. *μ непрерывно сверху, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n =: A$, то $\mu A_n \to \mu A$.*
3. *μ непрерывна сверху на пустом множестве, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\mu A_n \to 0$.*

Доказательство.

2. $\Rightarrow$ 3. Очевидно.

1. $\Rightarrow$ 2. $B_n := A_1 \setminus A_n$, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A \Rightarrow \underbrace{\mu B_n}_{=\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu A_1 - \mu A_n} \to \mu(A_1 \setminus A) = \mu A_1 - \mu A$

3. $\Rightarrow$ 1. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $A_n := \bigsqcup\limits_{k=n+1}^{\infty} C_k$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, $A = A_n \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k \overset{\mu\text{ – объем}}{\Rightarrow} \mu A = \underbrace{\mu A_n}_{\to 0} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu C_k}_{\to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k} \Rightarrow \mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k$

$\square$

Следствие. *Если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\mu A_n < +\infty$ для некоторого n, то $\mu A_k \to \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$.*

Замечание. Конечность меры существенна.

$A_n = [n, +\infty)$, $\mu A_n = +\infty$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

9.3 Продолжение меры

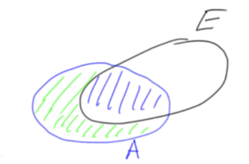
Определение 9.3.1. $\nu : 2^X \to [0, +\infty)$ – *субмера*, если:

1. $\nu\varnothing = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \nu A \le \nu B$ (монотонность)
3. $\nu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu A_n$ (счетная полуаддитивность)

Определение 9.3.2. $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ – *полная мера*, если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0$, то $A \in \mathcal{A}$.

Замечание. Если μ – полная мера, $A \subset B$ и $\mu B = 0$, то $\mu A = 0$.

Определение 9.3.3. Пусть ν – субмера. Множество E назовем *измеримым относительно* ν, если $\forall A \subset X$, $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$.



Замечание.

1. Достаточно писать «$\le$», т.к. счетная полуаддитивность $\Rightarrow$

   $\nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \ge \nu(\underbrace{(A \cap E) \cup (A \setminus E)}_{=A})$.

2. Если $E_1, E_2, ..., E_n$ – ν-измеримые, то $\nu\,\underbrace{(A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k)}_{\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(A\cap E_k) =: B} = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k)$

   $\nu B = \nu(\underbrace{B \cap E_1}_{=A\cap E_1}) + \nu(\underbrace{B \setminus E_1}_{=\bigsqcup\limits_{k=2}^{n}(A\cap E_k)})$

Теорема 9.3.1. ***Теорема Каратеодори***
Пусть ν – субмера. Тогда ν-измеримые множества образуют σ-алгебру и сужение ν на эту σ-алгебру – полная мера.

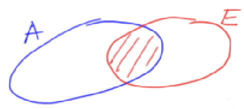
Доказательство. $\mathcal{A}$ – семейство ν-измеримых множеств E

1. Если $\nu E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.

   $\nu A \overset{\text{полуад.}}{\le} \nu(\overset{\subset A}{A \cap E}) + \nu(\overset{\subset E}{A \setminus E}) \overset{\text{монот.}}{\le} \nu E + \nu A = \nu A$

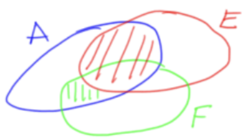
2. $\mathcal{A}$ – симметрично.

   Пусть $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu A = \nu(\underset{=A\setminus(X\setminus E)}{A\cap E}) + \nu(\underset{=A\cap(X\setminus E)}{A\setminus E}) = \nu(A\setminus(X\setminus E)) + \nu(A\cap(X\setminus E)) \Rightarrow X\setminus E \in \mathcal{A}$

3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E\cap F \in \mathcal{A}$

   $\nu A = \nu(A\cap E) + \nu(A\setminus E) = \nu(A\cap E) + \nu((A\setminus E)\cap F) + \nu(\overset{=A\setminus(E\cup F)}{(A\setminus E)\setminus F}) \overset{\text{счет. полуад.}}{\geq} \nu(A\cap(E\cup F)) + \nu(A\setminus(E\cup F))$

4. $\mathcal{A}$ – алгебра.

5. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\overset{=:E}{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \in \mathcal{A}$.

   $\nu A = \nu(A\cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A\setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A\cap E_k) + \nu(A\setminus E_k) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A\cap E_k) + \nu(A\setminus E) \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A\cap E_k) + \nu(A\setminus E) \overset{\text{счет. полуад.}}{\geq} \nu(A\cap E) + \nu(A\setminus E)$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

   Переделаем в дизъюнктное объединение.

7. $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.

   Из 4 и 5.

8. ν – объем.

   $\nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (A\cap E_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A\cap E_k)$

   Если A – любое и $E_k \in \mathcal{A}$, берем $A = X$ и получаем определение объема.

9. Объем + счетная полуаддитивность $\Rightarrow$ мера.

$\square$

Определение 9.3.4. Пусть μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$. *Внешней мерой*, порожденной μ, назовем $\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\}$.
Если такого покрытия не существует, то $\mu^* A = +\infty$.

Замечание.

1. Можем рассматривать только дизъюнктные множества:
$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} B_k$, $B_k \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} B_k \subset A_k \overset{\text{усил. монот.}}{\Rightarrow} \mu A_k \geq \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu B_k$

2. Если μ задана на σ-алгебре $\mathcal{A}$, то:

   $\mu^* A := \inf\{\mu B \mid A \subset B \text{ и } B \in \mathcal{A}\}$

Теорема 9.3.2. *μ^* – субмера, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$.*

Доказательство.

1. Пусть $A \in \mathcal{P}$. Тогда можно взять такие покрытия: $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = ... = \varnothing \Rightarrow \mu^* A \leq \mu A$

   Счетная полуаддитивность $\Rightarrow$ если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n \Rightarrow \mu A \leq \mu^* A$

   т.е. $\mu^* = \mu$ на $\mathcal{P}$

2. μ^* – субмера

   Монотонность:

   Если есть $A \subset B$ и покрытие $B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, то $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \underset{\inf\text{ от большего мн-ва}}{\mu^* A} \leq \mu^* B$

   Счетная полуаддитивность μ^*:

   μ^*: $\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n$

   Если справа есть $+\infty$, то очевидно, считаем, что там все конечно:

   $\mu^* B = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \mid P_k \in \mathcal{P} \text{ и } B_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

   Выберем такие множества C_{nk}, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk} \supset B_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

   $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk} \Rightarrow \mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n + \varepsilon$ и устремим ε к нулю.

□

Определение 9.3.5. *Стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$.*
Берем μ_0^* – ее внешняя мера и μ – сужение μ_0^* на μ_0^*-измеримые множества. Получается полная мера, заданная на σ-алгебре.

Теорема 9.3.3. *Это действительно продолжение, то есть множества из $\mathcal{P}$ будут μ-измеримыми.*

Доказательство. Надо доказать, что если $E \in \mathcal{P}$, то $\forall A \subset X$ $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

1. Если $A \in \mathcal{P}$, то $A \setminus E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P}$. Тогда т.к. $A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$:

   $\mu_0^* A = \mu_0 A \overset{\text{адд.}}{=} \mu_0(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0 Q_k = \mu_0^*(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0^* Q_k \overset{\text{полуадд.}}{\geq} \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k) = \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

2. Если $A \notin \mathcal{P}$. Когда $\mu_0^* A = +\infty$ все очевидно, поэтому будем считать, что $\mu_0^* A < +\infty$.

   $\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \mid P_k \in \mathcal{P}_n \text{ и } A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

   Берем конкретное покрытие $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, для которого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \varepsilon$

   $\mu_0 P_k = \mu_0^* P_k \geq (P_k \cap E) + \mu_0^*(P_k \setminus E)$

   $\varepsilon + \mu_0^* A \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(A \cap E)} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

   $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E) \supset A \cap E$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E) \supset A \setminus E$

$\square$

Замечание.

1. Дальше и старая мера, и новая обозначается μ.

   $\mu A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P} \text{ и } A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\}$.

2. Применение стандартного продолжения к стандартному продолжению не дает ничего нового.

   Упражнение. Доказать это. *Указание:* μ_0 – стандартная мера, μ – стандартное продолжение μ_0^*. Доказать, что μ_0 и μ_0^* совпадают.

3. Можно ли продолжить на более широкую σ-алгебру, чем дает стандартное продолжение?

   Часто да, но возникает неоднозначность.

   Определение 9.3.6. *σ – конечная мера*, если $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, где $P_n \in \mathcal{P}$ и $\mu P_n < +\infty$ (можно считать, что P_n дизъюнктны).

4. Можно ли по-другому продолжить на σ-алгебру μ-измеримых множеств?

   Если μ – σ-конечная мера, то нельзя.

5. Пусть ν – полная мера на σ-алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ и на $\mathcal{P}$ $\mu = \nu$. Верно ли, что $\mathcal{A}$ содержит все μ-измеримые множества?

   Если σ – конечная мера, то да.

Теорема 9.3.4. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное с $\mathcal{P}$, μ^* – соответствующая внешняя мера. Если $\mu^*A < +\infty$, то существует $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч. $C_n := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A$ и $\mu C = \mu^* A$.*

Доказательство. $\mu^*A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \mid P_k \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$.

Берем такое покрытие $\overbrace{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}}^{=C_n} \supset A$, $B_{nk} \in \mathcal{P}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^*A + \frac{1}{n}$

$\mu C_n \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^*A + \frac{1}{n}$, $C \subset C_n \Rightarrow \mu C \leq \mu C_n < \mu^*A + \frac{1}{n} \Rightarrow \mu C \leq \mu^*A$ и $C \supset A \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{\mu^*C}_{=\mu C} \geq \mu^*A$ ☐

Следствие. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение с $\mathcal{P}$. Если A – μ-измеримо и $\mu A < +\infty$, то $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.*

Доказательство. Берем C из теоремы, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, $\mu C = \mu A$ и $C \supset A$.
$C \setminus A =: e_1$, $\mu e_1 = 0$. Берем множество из теоремы для e_1, назовем его e_2.
$e_2 \supset e_1$, $e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e_1 = \mu e_2 = 0 \Rightarrow B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$
$e = A \setminus B \subset C \setminus B \subset e_2$, $\mu e_2 = 0 \Rightarrow \mu e = 0$ ☐

Теорема 9.3.5. *Единственность продолжения*
Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение на σ-алгебру, ν – другая мера на $\mathcal{A}$, т.ч. $\mu E = \nu E$ при $E \in \mathcal{P}$. Если μ – σ-конечная мера, то $\mu A = \nu A$ при $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, где $P_k \in \mathcal{P}$
$\nu A \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu P_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$. Напишем inf в правой части: $\nu A \leq \mu A$.
Если $P \in \mathcal{P}$, то $\mu P = \nu P = \nu(\overbrace{\underbrace{P \cap A}_{\text{если } A\in\mathcal{A}}}^{\leq \mu(P\cap A)}) + \nu(\overbrace{P \setminus A}^{\leq \mu(P\setminus A)}) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$
Когда $\mu P < +\infty$ неравенства обращаются в равенство $\Rightarrow \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$
μ – σ-конечная $\Rightarrow X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, $\mu P_n < +\infty \Rightarrow \mu(P_n \cap A) = \nu(P_n \cap A) \Rightarrow \nu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(P_n \cap A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(P_n \cap A) = \mu A$
$A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap P_n)$ ☐

9.4 Мера Лебега

Теорема 9.4.1. *Классический объем λ_m на полукольце ячеек $\mathcal{P}^m$ – σ-конечная мера.*

Доказательство. Надо доказать счетную полуаддитивность λ_m, т.е. если $(a, b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$, $a, b, a_n, b_n \in \mathbb{R}^m$, то $\lambda_m(a, b] \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m(a_n, b_n]$
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $[a', b'] \subset (a, b]$ и $\lambda_m(a', b'] > \lambda_m(a, b] - \varepsilon$.

Возьмем $[a', b'] \subset (a, b]$ и $\lambda_m(a', b'] > \lambda_m(a, b] - \varepsilon$. TODO
Тогда $[a', b] \subset (a, b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b'_n)$ □

Определение 9.4.1. Мера Лебега – стандартное продолжение классического объема с полукольца $\mathcal{P}^m$. σ-алгебра, на которую продолжили, – лебеговская σ-алгебра и обозначается $\mathcal{L}^m$.

Замечание. $\lambda_m A = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n \mid P_n \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\}$.
Можно брать и ячейки из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$.

Свойства меры Лебега:

1. Открытые множества измеримы, мера непустого отрытого множества > 0.

   Доказательство. $\mathcal{L}^m \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) = \mathcal{B}^m$ содержит все открыте множества.

   Если G – открытое и $\neq \varnothing$, то возьмем $a \in G \Rightarrow \exists \underset{\text{ячейка} \subset_r}{\overline{\mathrm{B}}}(a) \subset G$

   $\lambda G \geq \lambda(\text{ячейка}) > 0$ □

2. Замкнутые множества измеримы, мера одноточечного множества $= 0$.

   Доказательство. $\lambda(\text{точка}) \leq \lambda(\text{ячейка}) = \varepsilon^m$ □

3. Мера ограниченного измеримого множества конечна.

   Доказательство. ограниченное множество $\subset$ шар $\subset$ ячейка □

4. Всякое измеримое множество – не более чем счетное объединение множеств конечной меры.

   (a) $\mathbb{R}^m = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, где $\lambda P_n = 1 \Rightarrow E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(E \cap P_n)$ и $\lambda(E \cap P_n) \leq \lambda P_n = 1$

5. Если $E \subset P_n$, т.ч. $\forall \varepsilon > 0$ найдутся измеримые множества A_ε и B_ε, т.ч. $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\lambda(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, то E – измеримо.

   Доказательство. $A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ и $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \Rightarrow A \subset E \subset B$ и $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$

   $\lambda(B \setminus A) \leq \lambda(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda(B \setminus A) = 0$

   $E \setminus A \subset B \setminus A \Rightarrow \lambda(E \setminus A) = 0$ и $E \setminus A$ измеримо $\Rightarrow E = A \cup E \setminus A$ – измеримо □

   Замечание. Свойство 5 верно для любой полной меры.

6. Если $E \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\forall \varepsilon > 0$ найдется измеримое $B_\varepsilon \supset E$, т.ч. $\lambda B_\varepsilon < \varepsilon$, то E измеримо и $\lambda E = 0$.

Доказательство. $A_\varepsilon \neq \varnothing \Rightarrow E$ – измеримо и $\lambda E \leq \lambda B_\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow \lambda E = 0$ □

7. Счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0.

8. Счетное множество имеет меру 0. В частности $\lambda(\mathbb{Q}^m) = 0$.

9. Множество нулевой меры имеет пустую внутренность.

Доказательство. Если $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, то $A \supset B_r(a) \Rightarrow \lambda A \geq \lambda B_r(a) > 0$ □

10. Если $\lambda e = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие кубические ячейки Q_j, т.ч. $e \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \varepsilon$.

Доказательство. TODO □

11. Пусть $m \geq 2$. Гиперплоскость $H_j := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_j = c\}$ имеет нулевую меру.

Доказательство. $A_n := (-n, n] \cap H_j(c)$, $H_j(c) \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Достаточно проверить, что $\lambda A_n = 0$: $A_n \subset (-n, n] \times ... \times (-n, n] \times (c - \varepsilon, c) \times (-n, n] \times ... \times (-n, n] \Rightarrow \lambda A_n \leq (2n)^{m-1} \cdot \varepsilon$ □

12. Любое множество, содержащееся в не более чем счетном объединении таких гиперплоскостей, имеет меру 0.

13. $\lambda(a, b) = \lambda(a, b] = \lambda[a, b]$

Доказательство. $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$, $[a, b] \setminus (a, b) \subset$ конечное объединение таких гиперплоскостей. □

Замечание. 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если $m \geq 2$, то подойдет $H_j(c)$.

Если $m = 1$, то подойдет канторово множество.

то, что осталось, называется канторово множество.

TODO

Троичная запись чисел из $[0, 1)$.

Средний отрезок – первая цифра после запятой 1.

Оба средних отрезка – вторая цифра после запятой 1.

И так далее.

Остались в точности те числа, у которых в троичной записи 0 и 2.

2. Существуют неизмеримые множества. Более того, любое множество положительной меры содержит неизмеримое подмножемтво.

Теорема 9.4.2. ***Регулярность меры Лебега***

Если $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримое множество, то найдется G – открытое, т.ч. $G \supset E$ и $\lambda(G \setminus E) < \varepsilon$.

Доказательство. 1. $\lambda E < +\infty$, $\lambda E = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda P_n \mid E \subset \cup P_n, P_n \in \mathcal{P}^m\}$

Выберем такое покрытие ячейками, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda P_n < \lambda E + \varepsilon$.

$P_n = (a_n, b_n] \subset (a_n, b'_n)$, т.ч. $\lambda(a_n, b'_n) < \lambda P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b'_n) \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n \subset E$

$\lambda(G \setminus E) = \lambda G - \lambda E \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(a_n, b'_n) - \lambda E \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) - \lambda E = \varepsilon + \underbrace{\sum \lambda P_n - \lambda E}_{\leq \varepsilon}$

2. $\lambda E = +\infty$

Разобьем E в объединение E_n, т.ч. $\lambda E_n < +\infty$.

Возьмем G_n – открытое, т.ч. $E_n \subset G_n$ и $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$G := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \supset E$

$G \setminus E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \Rightarrow \lambda(G \setminus E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

□

Следствие. *1. Если $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, то найдется F – замкнутое, т.ч. $F \subset E$ и $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$.*

Доказательство. G для $X \setminus E$, $\lambda(G \setminus (X \setminus E)) < \varepsilon$

TODO □

2. E – измеримое, тогда

$\lambda E = \inf\{\lambda G \mid G$ – открытое и $G \supset E\}$

$\lambda E = \sup\{\lambda F \mid F$ – замкнутое и $F \supset E\}$

$\lambda E = \sup\{\lambda K \mid K$ – компакт и $K \supset E\}$

Доказательство. $\lambda \underset{\text{замк.}}{F} = \lim\limits_{n \to \infty} \lambda([-n, n]^m \cap F)$ непрер. меры снизу □

3. Если E – измеримо, то существует K_n – компакты, т.ч. $R_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и e – нулевой меры, т.ч. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$.

Доказательство. Берем компакты $\tilde{K_n}$, т.ч. $\lambda\tilde{K_n} \to \lambda E$.

Если $\lambda E < +\infty$, то $\lambda(E \setminus \tilde{K_n}) \to 0 \Rightarrow \lambda(E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{K_n}) = 0 \Rightarrow e := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{K_n}$ □

Теорема 9.4.3. *При сдвиге измеримого множества его измеримость и мера сохраняются.*

Доказательство. Сдвиг на вектор v, $\lambda\mu E := \lambda(v + E)$ на ячейках λ и μ совпадают $\Rightarrow$ по единственности продолжения они совпадают. □

Теорема 9.4.4. *Пусть μ мера на $\mathcal{L}^m$, т.ч.*

1. *Инвариантна относатльно сдвигов.*
2. *Мера μ для каждой ячейки конечна = мера любого ограниченного измеримого множемтва конечна.*

TODO

Пример неизмеримого множества

$x, y \in (0,1]$, $x\tilde{y}$, если $x - y \in \mathbb{Q}$

A – берем из каждого класса эквивалентности по одному представителю

A – неизмеримо

Доказательство. От противого. Пусть A измеримо.

1. $\lambda A = 0$. Тогда $(0,1] \subset \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Q}} \overbrace{(A + x)}^{\text{множества нулевой меры}} \Rightarrow \lambda(0,1] = 0$, противоречие.
2. $\lambda A \supset 0$. Тогда $\bigsqcup\limits_{x \in \mathbb{Q}} (A + x) \subset (0,2] \Rightarrow 2 \geq \sum\limits_{x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1} \lambda \overbrace{(A + x)}^{\text{все меры одинак.}}$, противоречие.

□

10. Измеримые функции

Определение 10.0.1. Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$.

$E\{f < a\} := \{x \in E \mid f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$

$E\{f \leq a\} := \{x \in E \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}((-\infty, a])$

$E\{f \leq a\}$ и $E\{f \leq a\}$

Все это – *лебеговые множества функции f.*

Теорема 10.0.1. *Пусть E – измеримое, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Следующие условия равносильны:*

1. *$E\{f < a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$.*
2. *$E\{f \leq a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$.*

3. $E\{f > a\}$ *измеримо* $\forall a \in \mathbb{R}$.

4. $E\{f \geq a\}$ *измеримо* $\forall a \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

- $E\{f < a\} = E \setminus E\{f \geq a\} \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 4$
- $E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leq a\} \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$
- $2 \Rightarrow 1$: $E\{f < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f \leq a - \frac{1}{n}\}$
- $4 \Rightarrow 3$: $E\{f > a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$

$\square$

Определение 10.0.2. $f : E \Rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – *измерима*, если все ее лебеговы множества при всех $a \in \mathbb{R}$ измеримы.

Пример.

1. Константа (на измеримом множестве)
2. $E \supset A$ – измеримы
3. $E \in \mathcal{L}^m$, $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна $\Rightarrow f$ – измерима относительно $\mathcal{L}^m$.

   Доказательство. Достаточно измеримости множеств $E\{f < a\} = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{открытое}})$ – открытые множества $\Rightarrow$ они из $\mathcal{L}^m$. $\square$

Свойства:

1. Если $f : E \Rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима, то E – измеримое множество.

   Доказательство. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f < n\}$ $\square$