Содержание

1. Теория меры

1.1 Система множеств

$A \sqcup B := A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$ – *дизъюнктные множества.*
$\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$

Определение 1.1.1. $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – разбиение множества E, если $E = \bigsqcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$

Напоминание:
$X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$ и $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$

Определение 1.1.2. $\mathcal{A}$ – система подмножеств X:

δ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.

δ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

σ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$.

σ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.3. Система множества *симметрична*, если $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.4. Система множества $\mathcal{A}$ – *алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \in \mathcal{A}$, есть свойства δ_0 и σ_0.

Определение 1.1.5. Система множества $\mathcal{A}$ – *σ-алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \in \mathcal{A}$, есть свойства δ и σ.

Утверждение 1.1.1. Если $\mathcal{A}$ симметричная система, то $\sigma_0 \Leftrightarrow \delta_0$ и $\sigma \Leftrightarrow \delta$.

Доказательство. $X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cup (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cap B)} = A \cap B$

$X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cap (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cup B)} = A \cup B$ □

Замечание. Если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра, то $\mathcal{A}$ – алгебра.

Свойства алгебры множеств:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.

2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

3. Если $A_1, A_2, ..., A_3 \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$.

Пример.

1. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \{$все огранич. мн-ва и их дополнения$\}$

   $\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра.

2. 2^X – σ-алгебра

3. $Y \subset X$, $\mathcal{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X, тогда

   $\mathcal{B} := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ – алгебра (σ-алгебра). Называется *индуцированная алгебра.*

   Доказательство. $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (X \setminus A)$ □

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры). Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).

   Доказательство. Если $A, B \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, то $A, B \in \mathcal{A}_\alpha$ $\forall \alpha \in I \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha$ $\forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ □

5. $A, B \subset X$ из чего состоит наименьшая алебра, содержащая A и B:

   $\varnothing, X, A, B, A \cap B, A \cup B, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B), A \setminus B, B \setminus B,$

   $A \triangle B, X \setminus (A \triangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathcal{E}$ – система подножеств X. Тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{E}$.*

Доказательство. 2^X – σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.
Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры, содержащие $\mathcal{E}$.
$\mathcal{B} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – σ-алгебра, $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E}$ $\forall \alpha$. □

Определение 1.1.6. Такая σ-алгебра – *барелевская оболочка $\mathcal{E}$.* $\mathcal{B}(\mathcal{E})$

Определение 1.1.7. $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{E}$ – всевозможные открытые множества. *Барелевская σ-алгебра* $\mathcal{B}^m := \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Замечание. $\mathcal{B}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$ ($\mathcal{B}^m$ – континуум, $2^{\mathbb{R}^m}$ – больше континуума)

Определение 1.1.8. $\mathcal{R}$ – *кольцо подмножеств* X, если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

Замечание. Если $\mathcal{R}$ – кольцо и $X \in \mathcal{R}$, то $\mathcal{R}$ – алгебра.

Определение 1.1.9. $\mathcal{P}$ – *полукольцо подмножеств* X, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$

2. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$

3. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow$ существуют $Q_1, Q_2, ..., Q_n \in \mathcal{P}$ т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо

Лемма 1.1.1. $\bigcup A_k = \bigsqcup (A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j))$

Доказательство. $B_k := A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j \subset A_k \Rightarrow \bigcup A_k \supset \bigcup B_k$

$B_n \subset A_n \setminus \underbrace{A_k}_{\supset B_k}$ при $n > k \Rightarrow B_n \cup B_k = \varnothing$

Проверяем включение $\subset$.

Берем $x \in \bigcup A_k$, $n := \min\{j \mid x \in A_j\} \Rightarrow x \in B_n = \underset{x\in}{A_n} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j \Rightarrow x \in \bigcup B_k$. ☐

Теорема 1.1.2. ***Свойства полукольца:***

$P, P_1, P_2, ... \in \mathcal{P}$ – полукольцо. Тогда:

1. *$P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ для некоторых $Q_j \in \mathcal{P}$.*

2. *$\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ для некоторых $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, т.ч. $Q_{kj} \subset P_k$.*

3. *Во 2 пункте можно вместо n написать ∞.*

Доказательство.

1. Индукция по n. Переход $n - 1 \to n$

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k = (\underbrace{P \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k}_{\text{инд.пр.}= \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j}) \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j \setminus P_n = \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$

2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (P_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j) \overset{\text{по } 1}{=} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} \Rightarrow Q_{kj} \subset P_k$

☐

Теорема 1.1.3. ***Декартово произведение полуколец***

Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножества X, $\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножества Y.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – полукольцо подмножеств $X \times Y$.

Доказательство. Пусть $P_1 \times Q_1$ и $P_2 \times Q_2 \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2) = (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1 \cap Q_2})$

$(P_1 \times Q_1) \setminus (P_2 \times Q_2) = (\underset{\text{диз. об. эл-в в } \mathcal{P}}{P_1 \setminus P_2}) \times \underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1} \sqcup (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\text{диз. об. эл-в в } \mathcal{Q}}{Q_1 \setminus Q_2})$ ☐

Определение 1.1.10. *Открытый параллелепипед* (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^m$
$(a,b) := (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times ... \times (a_m,b_m)$

Определение 1.1.11. *Замкнутый параллелепипед* $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}^m$
$[a,b] := [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times ... \times [a_m,b_m]$

Определение 1.1.12. *Ячейка* $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}^m$
$(a,b] := (a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times ... \times (a_m,b_m]$

Замечание. $(a,b) \subset (a,b] \subset [a,b]$

Утверждение 1.1.2. Непустая ячейка – пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающих последовательностей замкнутых параллелепипедов.

Доказательство. $(a,b] = (a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times ... \times (a_m,b_m]$
$P_n := (a_1, b_1, +\frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \times ... \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$
$P_{n+1} \subset P_n$, $P_n \supset (a,b]$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n = (a,b]$
$A_n := (a_1 - \frac{1}{n}, b_1) \times (a_2 - \frac{1}{n}, b_2) \times .. \times (a_m - \frac{1}{n}, b_m)$
$A_{n+1} \supset A_n \subset (a,b]$, $\bigcup A_n = (a,b]$ □

Обозначение:

1. $\mathcal{P}^m$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$ (в т.ч. и пустое множество).

2. $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$, у которых все координаты вершин рациональны.

Теорема 1.1.4. *Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ представляется в виде дизъюнктного объединения счетного числа ячеек, замыкания которых $\subset G$. Более того, можно считать, что координаты всех вершин всех ячеек рациональны.*

Доказательство. $x \in G \Rightarrow x \in \overline{\mathrm{B}}_r(x) \subset G$
Найдется ячейка R_x, т.ч. $x \in R_x$, координаты R_x рациональны и $\mathrm{Cl}\, R_x \subset G$. Выкинем все повторы и получим счетное число ячеек, объединение которых равно G. По свойству полукольца можно это объединение сделать дизъюнктным. □

Замечание. Явный алгоритм.

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \overset{1)\subset}{=} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \overset{2)\subset}{=} \mathcal{B}^m \overset{3)\subset}{=}$

Доказательство.

1) $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

2) $\mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m$

Ячейка – счетное пересение открытых парарллелепипедов, т.е. открытых множеств. Они лежат в $\mathcal{B}^m$, но $\mathcal{B}^m$ – σ-алгебра $\Rightarrow$ там есть счетное пересение.

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{B}^m$

3) G – открытое множество $\Rightarrow G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$ т.к. по теореме G – счетное объединение элементов из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

$\square$

1.2 Объем и мера

Определение 1.2.1. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.
μ – *объем*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$

Определение 1.2.2. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.
μ – *мера*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Замечание. Если μ – мера, то μ – объем.

Упражнение. Если мера $\mu \neq +\infty$, то $\mu\varnothing = 0$ из п. 2.

Пример. Объемы:

1. Длина ячейки в $\mathbb{R}$.
2. Пусть g неубывающая функция : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$, $(a, b] \subset \mathbb{R}$
3. Классический объем ячейки в $\mathbb{R}^m$ (докажем позже)

   $\lambda_m(a, b] = (b_m - a_m)...(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$
4. $x_0 \in X$, $a > 0$, $\mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
5. $\mathcal{A}$ – огранич. подмн-ва $\mathbb{R}$ и их дополнения.

   Если $A \in \mathcal{A}$, то $\mu A = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ – огр. мн-во} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

   Это объем, но не мера.

Теорема 1.2.1. *Пусть μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда:*

1. *Если $P' \subset P$ $(P, P' \in \mathcal{P})$, то $\mu P' \leq \mu P$. (монотонность объема)*

2. *Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leq \mu P$. (усиленная монотонность)*

2'. *Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$.*

   Если $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то $\mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$ (полуаддитивность)

Доказательство.

2. $P \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \Rightarrow \mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu Q_j \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

2'. $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \subset \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \Rightarrow \mu P \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

3'. $P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, $Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$

   $\bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \subset P_k \overset{2)}{\Rightarrow} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \mu P_k$

   $\mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

$\square$

Замечание.

1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subset B$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

   $B = \underset{\in\mathcal{P}}{A} \sqcup (B \underset{\in\mathcal{P}}{\setminus} A)$

2. Объем с полукольца можно продолжить на кольцо, состоящее из всевозможных дизъюнктных объединений.

Теорема 1.2.2. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, μ – объем на $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножеств Y, ν – объем на $\mathcal{Q}$.*
$\lambda : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \to [0, +\infty]$.
$\lambda(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) = \mu\mathcal{P} \cdot \nu\mathcal{Q}$ *(считаем, что $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$).*
Тогда λ – объем.

Доказательство. Если $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ и $Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, то $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_k \times Q_j$

$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \nu Q_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{\mu P_k \nu O_j}_{=\lambda(P_k \times Q_j)}$

Противный случай: $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \times Q_k$ $\square$

Следствие. λ_m – *объем.*

Доказательство. λ_1 – объем, λ_m – декартово произведение λ_1. □

Пример. Меры.

1. Классический объём λ_m (потом докажем)

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неубывающая, непрерывная справа во всех точках

   $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$

   Упражнение. Доказать, что непрерывность справа – необходимое условие для того, чтобы ν_g была мерой.

3. $x_0 \in X$, $a > 0$, $\begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

4. Считающая мера $\mu A =$ количество элементов в множестве A.

5. $T = \{t_1, t_2, ...\} \subset X$, $\{w_1, w_2, ...\}$ – неотрицательные числа

   $\mu A := \sum\limits_{i: t_i \in A} w_i$

   Доказательство. Если $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu A = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j$, $\mu A_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}$

   $\mu A = \sum a_{jk}$ в каком-то порядке $\overset{?}{\underset{\geq}{=}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}$

   $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} \leq \mu A$

   $\to \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}$

   Рассмотрим частичную сумму для $\overset{\to \mu A}{\sum a_{jk}}$. $Y := \max j$, $K := \max k$.

   $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum\limits_{j=1}^{Y} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum\limits_{j=1}^{Y} \sum\limits_{k=1}^{K} a_{jk}$

   □

Теорема 1.2.3. *Пусть* $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ *объем на полукольце.*
Тогда μ *– мера* $\Leftrightarrow$ *(счетная полуаддитивность) Если* $P, P_n \in \mathcal{P}, P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$*, то* $\mu P \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$.

Доказательство.

$\Leftarrow$. Если $P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P$

(a) счетная полуаддитивность $\Rightarrow \mu P \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

(b) усиленная монотонность $\Rightarrow \mu P \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

$\Rightarrow$. $P'_n := P \cap P_n \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P'_n \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \in \mathcal{P}$, $Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$

$\mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

$\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P_n \overset{\text{усил. монот.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \mu P_n$

□

Следствие. *Если μ – мера, заданная на σ-алгебре, то счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры.*

Доказательство. $\mu_n = 0$, $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{счет. полуад.}}{\Rightarrow} \mu A_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0 \Rightarrow \mu A = 0$ □

Теорема 1.2.4. *Пусть μ – объем, заданный на σ-алгебре $\mathcal{A}$.*
Тогда μ – мера $\Leftrightarrow$ (непрерывность снизу) Если $A_1 \subset A_2 \subset .... \subset A_n \in \mathcal{A}$, то $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu A_n$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ (считаем, что $A_0 = \varnothing$)

$A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \underset{\supset}{=} \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ $(B_n \subset A_n)$

$\subset$: если $x \in A$, то возьмем m – наименьший индекс, для которого $x \in A_m \Rightarrow x \in B_m$.

$\mu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu A_n - \mu A_{n-1})$

Если все μA_n конечны, то $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu B_k}_{\to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \mu A} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\mu A_k - \mu A_{k-1}) = \mu A_n \Rightarrow \mu A_n \to \mu A$

Если $\mu A_n = +\infty$ при больших n, то $\mu A = +\infty$ и все очевидно.

$\Leftarrow$. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $A_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$, $A_1 \subset A_2 \subset ...$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$

$\overset{\text{напр. снизу}}{\Rightarrow} \underbrace{\mu A_n}_{= \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu C_k} \to \mu A \Rightarrow \mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k$

□

Теорема 1.2.5. *Пусть μ – объем, заданный на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mu X < +\infty$, тогда следующие условия равносильны:*

1. *μ – мера.*
2. *μ непрерывно сверху, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset ...$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n =: A$, то $\mu A_n \to \mu A$.*

3. *μ непрерывна сверху на пустом множестве, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\mu A_n \to 0$.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ 2. $B_n := A_1 \setminus A_n$, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A \Rightarrow \mu \underbrace{B_n}_{=\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu A_1 - \mu A_n} \to \mu(A_1 \setminus A) = \mu A_1 = \mu A$$

3. $\Rightarrow$ 1. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $A_n = \bigsqcup\limits_{k=n+1}^{\infty} C_k$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing,\ A = A_n \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k \overset{\mu\text{ – объем}}{\Rightarrow} \mu A = \underbrace{\mu A_n}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu C_k}_{\to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k} \Rightarrow \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k$$

$\square$

Следствие. *Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\mu A_n < +\infty$ для некоторого n, то $\mu A_k \to \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$.*

Замечание. Конечность меры существенна.
$A_n = [n, +\infty)$, $\lambda_1 A_n = +\infty$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

1.3 Продолжение меры

Определение 1.3.1. $\nu : 2^X \to [0, +\infty)$ – *субмера*, если:

1. $\nu\varnothing = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \nu A \le \nu B$ (монотонность)
3. $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu A_n$ (счетная полуаддитивность)

Определение 1.3.2. $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ – *полная мера*, если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0$, то $A \in \mathcal{A}$.

Замечание. Если μ – полная мера, $A \subset B$ и $\mu B = 0$, то $\mu A = 0$.

Определение 1.3.3. Пусть ν – субмера. Множество E назовем *измеримым относительно* ν, если $\forall A \subset X$, $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$.

Замечание.

1. Достаточно писать «$\le$», т.к. счетная полуаддитивность $\Rightarrow$

   $\nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \le \nu(\underbrace{(A \cap E) \cup (A \setminus E)}_{=A})$.

2. Если $E_1, E_2, ..., E_n$ – ν-измеримые, то
$\nu(A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k)$
$\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(A \cap E_k) = B$
$\nu B = \nu(\underbrace{B \cap E_1}_{=A \cap E_1}) + \nu(\underbrace{B \setminus E_1}_{=\bigsqcup\limits_{k=2}^{n}(A \cap E_k)})$

Теорема 1.3.1. ***Теорема Каратеодори***

Пусть ν – субмера. Тогда ν=измеримые множества образуют σ-алгебру и сужению ν на эту σ-алгебру – полная мера.

Доказательство. $\mathcal{A}$ – семейство ν-измеримых множеств E

1. Если $\nu E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.

   $\nu A \le \nu(A \overset{\subset A}{\cap} E) + \nu(A \overset{\subset A}{\setminus} E) \le \nu E + \nu A = \nu A$

2. $\mathcal{A}$ – симметрично

   Пусть $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu A = \nu(\underbrace{A \cap E}_{=A \setminus (X \setminus E)}) + \nu(\underbrace{A \setminus E}_{=A \cap (X \setminus E)}) = \nu(A \setminus (X \setminus E)) + \nu(A \cap (X \setminus E)) \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{A}$

3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cap F \in \mathcal{A}$

   $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F) + \nu(\overbrace{(A \setminus E) \setminus F}^{A \setminus (E \cup F)}) \ge \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$

4. $\mathcal{A}$ – алгебра

5. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\overbrace{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n}^{:=E} \in \mathcal{A}$

   $\nu A = \nu(A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E_k) \ge \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \overset{\text{счут. полуад.}}{\ge} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

   Переделаем в дизъюнктное объединение.

7. $\mathcal{A}$ – σ-алгебра

8. ν – объем

   $\nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(A \cap E_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k)$
   Если A – любое и $E_k \in \mathcal{A}$, берем $A = X$ и поулчаем определение объема.

9. Объем + счетная полуаддитивность $\Rightarrow$ мера

TODO $\square$

Определение 1.3.4. Пусть μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$. Внешней мерой, порожденной μ, назовем $\mu^*A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\}$.
Если такого покрытия не существует, то $\mu^*A = +\infty$.

Замечание.

1. Можем рассматривать только дизъюнктные множества:
$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} B_k$, $B_k \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} B_k \subset A_k \Rightarrow \mu A_k \geq \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu B_k$
2. Если μ задана на σ-алгебре $\mathcal{A}$, то:

   $\mu^*A := \inf\{\mu B \mid A \subset B$ и $B \in \mathcal{A}\}$

Теорема 1.3.2. *μ^* – субмера, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$.*

Доказательство. 1. Пусть $A \in \mathcal{P}$, $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = ... = \varnothing \Rightarrow \mu^*A \leq \mu A$

   Счетная полуаддитивность $\Rightarrow$ если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$, то $\mu A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n \Rightarrow \mu A \leq \mu^* A$

   т.е. $\mu^* = \mu$ на $\mathcal{P}$

2. μ^* – субмера

   Монотонность $A \subset B$ и $B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, то $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \mu^*A \leq \mu^*B$ (inf от большего множества)

   Счетная полуаддитивность μ^*: $\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n$

   Если справа есть $+\infty$, то очевидно, считаем, что там все конечно:

   $\mu^*B = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid P_k \in \mathcal{P}$ и $B_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

   Выберем такие множества C_{nk}, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk} \supset B_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

   $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk} \Rightarrow \mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n + \varepsilon$ и устремим ε к нулю.

$\square$

Определение 1.3.5. *Стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$.*
Берем μ_0^* – ее внешняя мера и μ – сужение μ_0^* yf μ_0^*-измеримые множества. ПОлучается полная мера, заданная на σ-алгебре.

Теорема 1.3.3. *Это действительно продолжение, то есть множества из $\mathcal{P}$ будут измеримыми.*

Доказательство. Надо доказать, что если $E \in \mathcal{P}$, то $\forall A \subset X$, $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

1. Если $A \in \mathcal{P}$, то $A \setminus E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P}$. Тогда т.к. $A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$:

   $\mu_0^* AA = \mu_0 A = \mu_0(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0 Q_k = \mu_0^*(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0^* Q_k \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k) = \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

2. Если $A \notin \mathcal{P}$. Когда $\mu_0^* A = +\infty$ все очевидно, будем считать, что $\mu_0^* A < +\infty$.

   $\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \mid P_k \in \mathcal{P}_n \text{ и } A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

   Берем покрытие $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, для которого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \varepsilon$

   $\varepsilon + \mu_0^* A \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(A \cap E)} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

   $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E) \supset A \cap E$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E) \supset A \setminus E$

□

Замечание.

1. Дальше и старая мера, и новая обозначается μ.

   $\mu A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P} \text{ и } A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\}$.

2. Применение стандартного продолжения к стандартноме продолжению не дает ничего нового.

   Упражнение. Доказать это. *Указание:* μ_0 – стандартная мера, μ – стандартное продолжение μ_0^*. Доказать, что μ_0 и μ_0^* совпадают.

3. Можно ли продолжить на более широкую σ-алгебру, чем дает стандартное продолжение?

   Определение 1.3.6. σ *– конечная мера*, если $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, где $P_n \in \mathcal{P}$ и $\mu P_n < +\infty$ (можно считать, что P_n дизъюнктны).

4. Можно ли по-другому продолжить на σ-алгебру μ-измеримых множеств? Если σ – конечная мера, то нельзя.

5. Пусть ν – полная мера на σ-алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ и на $\mathcal{P}$ $\mu = \nu$. Верно ли, что $\mathcal{A}$ содержит все μ-измеримые множества? Если σ – конечная мера, то да.

Теорема 1.3.4. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное с $\mathcal{P}$, μ^* – соответствующая внешняя мера. Если $\mu^* A < +\infty$, то существует $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч. $C_n := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A$ и $\mu C = \mu^* A$.*

Доказательство. $\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \mid P_k \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\}$.

Берем такое покрытие $\overbrace{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}}^{=C_n} \supset A$, $B_{nk} \in \mathcal{P}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$

$\mu C_n \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$, $C \subset C_n \Rightarrow \mu C \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n} \Rightarrow \mu C \leq \mu^* A$ и $C \supset A \Rightarrow \underbrace{(\quad \mu^* C)}_{=\mu C} \geq \mu^* A$ □

Следствие. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение с $\mathcal{P}$. Если A – измеримо и $\mu A < +\infty$, то $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.*

Доказательство. Берем C из теоремы, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, $\mu C = \mu A$ и $C \supset A$.

$C \setminus A =: e_1$, $\mu e_1 = 0$. Берем множество из теоремы для e_1, назовем его e_2.

$e_2 \supset e_1$, $e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e_1 = \mu e_2 = 0 \Rightarrow B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$

$e = A \setminus B \subset C \setminus B \subset e_2$, $\mu e_2 = 0 \Rightarrow \mu e = 0$ □

Теорема 1.3.5. ***Единственность продолжения***

Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартно епродолжение на σ-алгебру, ν – другая мера на $\mathcal{A}$, т.ч. $\mu E = \nu E$ при $E \in \mathcal{P}$. Если μ – σ-конечная мера, то $\mu A = \nu A$ при $A \in \mathcal{A}$

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, где $P_k \in \mathcal{P}$

$\nu A \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu P_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$. Напишем inf в правой части $\nu A \leq \mu A$.

Если $P \in \mathcal{P}$, то $\mu P = \nu P = \nu(\underbrace{\overbrace{P \cap A}^{\leq \mu(P \cap A)}}_{\text{если } A \in \mathcal{A}}) + \nu(\overbrace{P \setminus A}^{\leq \mu(P \setminus A)}) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Когда $\mu P < +\infty$ неравенства обращаются в равенство $\Rightarrow \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$

μ – σ-конечная $\Rightarrow X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, $\mu P_n < +\infty \Rightarrow \mu(P_n \cap A) = \nu(P_n \cap A) \Rightarrow \nu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(P_n \cap A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(P_n \cap A) = \mu A$

$A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap P_n)$ □