Содержание

9. Теория меры

9.1 Система множеств

Обозначение:

Дизъюнктные множества:

1. $A \sqcup B := A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$
2. $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$

Определение 9.1.1. $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – *разбиение множества* E, если $E = \bigsqcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$

Напоминание:

$X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$ и $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$

Определение 9.1.2. $\mathcal{A}$ – система подмножеств X:

δ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.

σ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$.

δ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

σ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Замечание. Из δ следует δ_0 и из σ следует σ_0 (так как δ и σ подразумевают более сильные ограничения на структуру).

Определение 9.1.3. Система множества *симметрична*, если $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Определение 9.1.4. Система множества $\mathcal{A}$ – *алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \in \mathcal{A}$, есть свойства δ_0 и σ_0.

Определение 9.1.5. Система множества $\mathcal{A}$ – *σ-алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \in \mathcal{A}$, есть свойства δ и σ.

Утверждение 9.1.1. Если $\mathcal{A}$ симметричная система, то $\sigma_0 \Leftrightarrow \delta_0$ и $\sigma \Leftrightarrow \delta$.

Доказательство. $X \setminus (\underbrace{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)}_{X \setminus (A \cap B)}) = A \cap B$ и $X \setminus (\underbrace{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)}_{X \setminus (A \cup B)}) = A \cup B$ □

Замечание. Если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра, то $\mathcal{A}$ – алгебра.

Свойства алгебры множеств:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.
2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $\underbrace{A \setminus B}_{A\cap(X\setminus B)} \in \mathcal{A}$.
3. Если $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ (по индукции).

Пример.

1. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \{$все огранич. мн-ва и их дополнения$\}$

   (пустое есть, для любого множества есть дополнение, пересечение двух ограниченных ограничено, пересечение ограниченного с каким-то ограничено и пересечение дополнений – это дополнение объединений, а объединение ограниченных ограничено)

   $\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра.

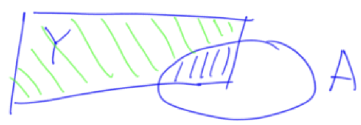
2. 2^X – σ-алгебра

3. $Y \subset X$, $\mathcal{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X, тогда:

   $\mathcal{B} := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ – алгебра (σ-алгебра) – *индуцированная алгебра*

   Доказательство. $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (X \setminus A)$

   Проверили, что взяли какую-то алгберу и пересекли с конкретным множеством, то структура сохранится.

   □

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры). Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).

   Доказательство. Пустое лежало везде, поэтому оно осталось в пересечении. Само пересечение, очевидно, тоже есть.

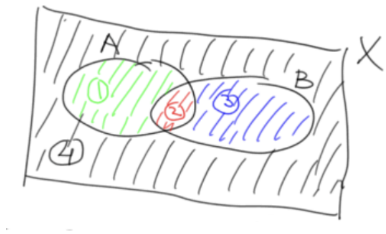
   Если $A, B \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$, то $A, B \in \mathcal{A}_\alpha \ \forall \alpha \in I \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha \ \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ □

5. Пусть есть $A, B \subset X$.

   Вопрос: из чего состоит наименьшая алебра, содержащая A и B?

   Ответ: $\varnothing, X, A, B, A \cap B, A \cup B, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B), A \setminus B, B \setminus B,$

   $A \triangle B, X \setminus (A \triangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$



Теорема 9.1.1. *Пусть $\mathcal{E}$ – система подмножеств X. Тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{E}$.*

Доказательство. 2^X – σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.
Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры, содержащие $\mathcal{E}$.
$\mathcal{B} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – σ-алгебра, $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E}$ $\forall \alpha$.
Доказали сущестование. $\square$

Определение 9.1.6. Такая σ-алгебра – *борелевская оболочка* $\mathcal{E}$. Обозначается как $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Определение 9.1.7. Пусть $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{E}$ – всевозможные открытые множества. *Борелевская σ-алгебра* $\mathcal{B}^m := \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Замечание. $\mathcal{B}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$ (имеют разные мощности: $\mathcal{B}^m$ – континуум, $2^{\mathbb{R}^m}$ – больше континуума)

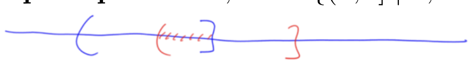
Определение 9.1.8. $\mathcal{R}$ – *кольцо подмножеств* X, если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

Замечание. Если $\mathcal{R}$ – кольцо и $X \in \mathcal{R}$, то $\mathcal{R}$ – алгебра.

Определение 9.1.9. $\mathcal{P}$ – *полукольцо подмножеств* X, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow$ существуют $Q_1, Q_2, ..., Q_n \in \mathcal{P}$ т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо



Лемма 9.1.1. $\bigcup A_k = \bigsqcup (A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

Доказательство. Проверяем «$\supset$»: $B_k := A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j \subset A_k \Rightarrow \bigcup A_k \supset \bigcup B_k$
Проверяем, что B_k дизъюнктны: $B_n \subset A_n \setminus \underbrace{A_k}_{\supset B_k}$ при $n > k \Rightarrow B_n \cup B_k = \varnothing$

Проверяем «$\subset$»: берем $x \in \bigcup A_k$, $n := \min\{j \mid x \in A_j\} \Rightarrow x \in B_n = \underbrace{A_n}_{x \in} \setminus \underbrace{\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j}_{x \notin} \Rightarrow x \in \bigcup B_k$. $\square$

Теорема 9.1.2. ***Свойства полукольца:***

Пусть $P, P_1, P_2, ... \in \mathcal{P}$*, где* $\mathcal{P}$ *– полукольцо. Тогда:*

1. $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ *для некоторых* $Q_j \in \mathcal{P}$*.*

2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ *для некоторых* $Q_{kj} \in \mathcal{P}$*, т.ч.* $Q_{kj} \subset P_k$*.*

3. *Во 2 пункте можно вместо* n *написать* ∞*.*

Доказательство.

1. Индукция по n. База – определение. Переход $n-1 \to n$

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k = (\underbrace{P \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k}_{\text{инд.пр.}= \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j}) \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$

2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (P_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j) \overset{\text{по } 1}{=} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \Rightarrow Q_{kj} \subset P_k$

$\square$

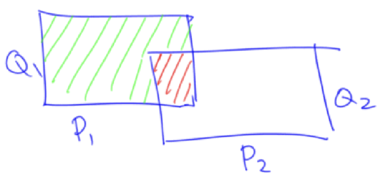
Теорема 9.1.3. ***Декартово произведение полуколец***

Пусть $\mathcal{P}$ *– полукольцо подмножеств мн-ва* X*,* $\mathcal{Q}$ *– полукольцо подмножеств мн-ва* Y*.*

Тогда конструкция $\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ *– полукольцо подмножеств* $X \times Y$*.*

Доказательство. Пусть $P_1 \times Q_1$ и $P_2 \times Q_2 \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2) = (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1 \cap Q_2})$

$(P_1 \times Q_1) \setminus (P_2 \times Q_2) = (\underset{\text{диз. об. эл-в } \mathcal{P}}{P_1 \setminus P_2}) \times \underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1} \sqcup (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\text{диз. об. эл-в } \mathcal{Q}}{Q_1 \setminus Q_2})$

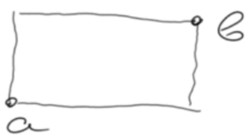


$\square$

Замечание. Полукольцо – это структура, которая сохраняется при взятии декартового произведения (в отличие от алгебры и σ-алгебры).

Определение 9.1.10. *Открытый параллелепипед* (a, b)*,* $a, b \in \mathbb{R}^m$

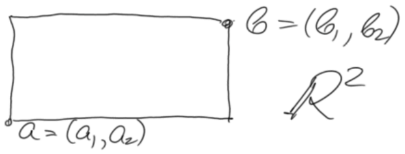
$(a, b) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_m, b_m)$



Определение 9.1.11. *Замкнутый параллелепипед* $[a, b]$*,* $a, b \in \mathbb{R}^m$

$[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_m, b_m]$

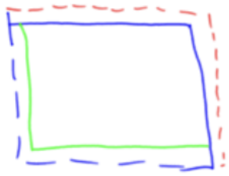
Определение 9.1.12. *Ячейка* $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}^m$
$(a,b] := (a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times \ldots \times (a_m,b_m]$



Замечание. $(a,b) \subset (a,b] \subset [a,b]$

Утверждение 9.1.2. Непустая ячейка – пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающих последовательностей замкнутых параллелепипедов.

Доказательство. $(a,b] = (a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times \ldots \times (a_m,b_m]$
Рассмотрим открытые параллелепипеды $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \times \ldots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$
$P_{n+1} \subset P_n$, $P_n \supset (a,b]$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n = (a,b]$
Рассмотрим закрытые параллелепипеды $A_n := [a_1 - \frac{1}{n}, b_1] \times [a_2 - \frac{1}{n}, b_2] \times .. \times [a_m - \frac{1}{n}, b_m]$
$A_{n+1} \supset A_n \subset (a,b]$, $\bigcup A_n = (a,b]$



□

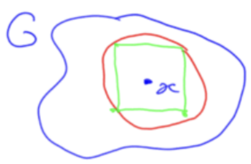
Обозначение:

1. $\mathcal{P}^m$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$ (в т.ч. и пустое множество).

2. $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$, у которых все координаты вершин рациональны.

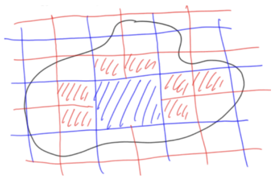
Теорема 9.1.4. *Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ представляется в виде дизъюнктного объединения счетного числа ячеек, замыкания которых $\subset G$. Более того, можно считать, что координаты всех вершин всех ячеек рациональны.*

Доказательство. $x \in G \overset{G \text{ откр.}}{\Rightarrow} x \in \overline{\mathrm{B}}_r(x) \subset G$
Найдется ячейка R_x, т.ч. $x \in R_x$, координаты R_x рациональны и $\operatorname{Cl} R_x \subset G$ (Cl содержится в $\overline{\mathrm{B}}_r(x)$, которое содержится в G).
Выкинем все повторы и получим счетное число ячеек, объединение которых (не дизъюнктное) равно G. По свойству полукольца можно это объединение сделать дизъюнктным.



□

Замечание. Явный алгоритм.



Нарезаем на сетку. Те ячейки, которые попали – берем, иначе – половинем и снова смотрим, какие из ячеек попали, а какие нет.

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \overset{1)\subset}{=} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \overset{2)\subset}{=} \mathcal{B}^m \overset{3)\subset}{=}$

Доказательство.

1) $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \overset{\sigma\text{-алгебра}}{\Rightarrow} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

2) $\mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

   Ячейка – счетное пересечение открытых параллелепипедов, т.е. открытых множеств. Они лежат в $\mathcal{B}^m$, но $\mathcal{B}^m$ – σ-алгебра $\Rightarrow$ там есть и счетное пересечение.

3) G – открытое множество $\Rightarrow G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$, т.к. по теореме G – счетное объединение элементов из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

$\square$

9.2 Объем и мера

Определение 9.2.1. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.
Тогда μ – *объем*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$

Определение 9.2.2. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.
μ – *мера*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Замечание. Если μ – мера, то μ – объем.

Упражнение. Если мера $\mu \neq +\infty$, то $\mu\varnothing = 0$ из п. 2.

Пример. Объемы:

1. Длина ячейки в $\mathbb{R}$.
2. Пусть g неубывающая функция : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$, $(a, b] \subset \mathbb{R}$

3. Классический объем ячейки в $\mathbb{R}^m$ (докажем позже)

   $\lambda_m(a,b] = (b_m - a_m)...(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$

4. $x_0 \in X$, $a > 0$, $\mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

5. $\mathcal{A}$ – огранич. подмн-ва $\mathbb{R}$ и их дополнения.

   Если $A \in \mathcal{A}$, то $\mu A = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ – огр. мн-во} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

   Это объем, но не мера.

Теорема 9.2.1. *Пусть μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда:*

1. *Если $P' \subset P$ $(P, P' \in \mathcal{P})$, то $\mu P' \leq \mu P$. (монотонность объема)*

2. *Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leq \mu P$. (усиленная монотонность)*

2'. *Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$.*

3. *Если $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то $\mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$ (полуаддитивность)*

Доказательство.

2. $P \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \Rightarrow \mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu Q_j \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

2'. $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \subset \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \Rightarrow \mu P \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

3. $P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, $Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$

   $\bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \subset P_k \overset{2)}{\Rightarrow} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \mu P_k$

   $\mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

$\square$

Замечание.

1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subset B$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

   $B = \underset{\in\mathcal{P}}{A} \sqcup \underset{\in\mathcal{P}}{(B \setminus A)}$

2. Объем с полукольца можно продолжить на кольцо, состоящее из всевозможных дизъюнктных объединений.

Теорема 9.2.2. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, μ – объем на $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножеств Y, ν – объем на $\mathcal{Q}$.*
$\lambda : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \to [0, +\infty]$.
$\lambda(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) = \mu\mathcal{P} \cdot \nu\mathcal{Q}$ *(считаем, что $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$).*
Тогда λ – объем.

Доказательство. Если $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ и $Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, то $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_k \times Q_j$
$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \nu Q_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{\mu P_k \nu O_j}_{=\lambda(P_k \times Q_j)}$
Противный случай: $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \times Q_k$ ◻

Следствие. *λ_m – объем.*

Доказательство. λ_1 – объем, λ_m – декартово произведение λ_1. ◻

Пример. Меры.

1. Классический объём λ_m (потом докажем)
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неубывающая, непрерывная справа во всех точках

   $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$

   Упражнение. Доказать, что непрерывность справа – необходимое условие для того, чтобы ν_g была мерой.
3. $x_0 \in X$, $a > 0$, $\mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
4. Считающая мера $\mu A =$ количество элементов в множестве A.
5. $T = \{t_1, t_2, ...\} \subset X$, $\{w_1, w_2, ...\}$ – неотрицательные числа, $\mu A := \sum\limits_{i:t_i \in A} w_i$

   Доказательство. Нужно проверить, что если $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu A = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j$.

   $\mu A_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}$, $\mu A = \sum a_{jk}$ в каком-то порядке $\stackrel{?}{=} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}$

   $\geq$: $\underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}}_{\stackrel{n\to\infty}{\to} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} \leq \mu A$

   $\leq$: Рассмотрим частичную сумму для $\overset{\to \mu A}{\sum} a_{jk}$. $Y := \max j$, $K := \max k$.
   $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum\limits_{j=1}^{Y} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum\limits_{j=1}^{Y} \sum\limits_{k=1}^{K} a_{jk}$

   ◻

Теорема 9.2.3. *Пусть* $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ *– объем на полукольце.*
Тогда μ *– мера* $\Leftrightarrow$ *(счетная полуаддитивность) Если* $P, P_n \in \mathcal{P}, P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$*, то* $\mu P \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$.

Доказательство.

$\Leftarrow$. Если $P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$

(a) счетная полуаддитивность $\Rightarrow \mu P \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

(b) усиленная монотонность $\Rightarrow \mu P \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

$\Rightarrow$. $P'_n := P \cap P_n \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P'_n \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \in \mathcal{P}$, $Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$

$\mu P = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

$\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P_n \overset{\text{усил. монот.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \le \mu P_n$

□

Следствие. *Если* μ *– мера, заданная на* σ*-алгебре, то счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры.*

Доказательство. $\mu_n = 0$, $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{счет. полуад.}}{\Rightarrow} \mu A_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0 \Rightarrow \mu A = 0$ □

Теорема 9.2.4. *Пусть* μ *– объем, заданный на* σ*-алгебре* $\mathcal{A}$.
Тогда μ *– мера* $\Leftrightarrow$ *(непрерывность снизу) Если* $A_1 \subset A_2 \subset ....$, $A_n \in \mathcal{A}$*, то* $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu A_n$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ (считаем, что $A_0 = \varnothing$)

$A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \underset{\supset}{=} \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ $(B_n \subset A_n)$

$\subset$: если $x \in A$, то возьмем m – наименьший индекс, для которого $x \in A_m \Rightarrow x \in B_m$.

(счет. ад.) $\mu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu A_n - \mu A_{n-1})$

Если все μA_n конечны, то $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu B_k}_{\to \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \mu A} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\mu A_k - \mu A_{k-1}) = \mu A_n \Rightarrow \mu A_n \to \mu A$

Если $\mu A_n = +\infty$ при больших n, то $\mu A = +\infty$ и все очевидно.

$\Leftarrow$. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $A_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$, $A_1 \subset A_2 \subset ...$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$

$\overset{\text{непр. снизу}}{\Rightarrow} \underbrace{\mu A_n}_{=\mu(\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu C_k} \to \mu A \Rightarrow \mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k$

□

Теорема 9.2.5. *Пусть μ – объем, заданный на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mu X < +\infty$, тогда следующие условия равносильны:*

1. *μ – мера.*
2. *μ непрерывно сверху, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n =: A$, то $\mu A_n \to \mu A$.*
3. *μ непрерывна сверху на пустом множестве, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\mu A_n \to 0$.*

Доказательство.

2. $\Rightarrow$ 3. Очевидно.

1. $\Rightarrow$ 2. $B_n := A_1 \setminus A_n$, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A \Rightarrow \underbrace{\mu B_n}_{=\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu A_1 - \mu A_n} \to \mu(A_1 \setminus A) = \mu A_1 - \mu A$$

3. $\Rightarrow$ 1. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $A_n := \bigsqcup\limits_{k=n+1}^{\infty} C_k$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing,\ A = A_n \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k \overset{\mu\text{ – объем}}{\Rightarrow} \mu A = \underbrace{\mu A_n}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu C_k}_{\to \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k} \Rightarrow \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k$$

□

Следствие. *Если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\mu A_n < +\infty$ для некоторого n, то $\mu A_k \to \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$.*

Замечание. Конечность меры существенна.
$A_n = [n, +\infty)$, $\mu A_n = +\infty$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

9.3 Продолжение меры

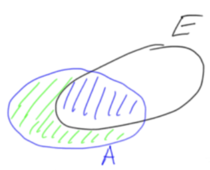
Определение 9.3.1. $\nu : 2^X \to [0, +\infty)$ – *субмера*, если:

1. $\nu\varnothing = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \nu A \leq \nu B$ (монотонность)
3. $\nu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu A_n$ (счетная полуаддитивность)

Определение 9.3.2. $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ – *полная мера*, если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0$, то $A \in \mathcal{A}$.

Замечание. Если μ – полная мера, $A \subset B$ и $\mu B = 0$, то $\mu A = 0$.

Определение 9.3.3. Пусть ν – субмера. Множество E назовем *измеримым относительно* ν, если $\forall A \subset X$, $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$.



Замечание.

1. Достаточно писать «$\leq$», т.к. счетная полуаддитивность $\Rightarrow$

   $\nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \geq \nu(\underbrace{(A \cap E) \cup (A \setminus E)}_{=A})$.

2. Если $E_1, E_2, ..., E_n$ – ν-измеримые, то $\nu\,\underbrace{(A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k)}_{\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(A\cap E_k)=:B} = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k)$

   $\nu B = \nu(\underbrace{B \cap E_1}_{=A\cap E_1}) + \nu(\underbrace{B \setminus E_1}_{=\bigsqcup\limits_{k=2}^{n}(A\cap E_k)})$

Теорема 9.3.1. ***Теорема Каратеодори***

Пусть ν – субмера. Тогда ν-измеримые множества образуют σ-алгебру и сужение ν на эту σ-алгебру – полная мера.

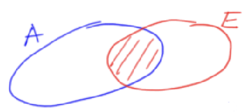
Доказательство. $\mathcal{A}$ – семейство ν-измеримых множеств E

1. Если $\nu E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.

   $\nu A \overset{\text{полуад.}}{\leq} \nu(\overset{\subset A}{A \cap E}) + \nu(\overset{\subset E}{A \setminus E}) \overset{\text{монот.}}{\leq} \nu E + \nu A = \nu A$

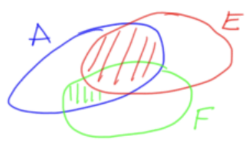
2. $\mathcal{A}$ – симметрично.

   Пусть $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu A = \nu(\underbrace{A \cap E}_{=A\setminus(X\setminus E)}) + \nu(\underbrace{A \setminus E}_{=A\cap(X\setminus E)}) = \nu(A \setminus (X \setminus E)) + \nu(A \cap (X \setminus E)) \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{A}$

3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cap F \in \mathcal{A}$

   $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F) + \nu(\overset{=A\setminus(E\cup F)}{(A \setminus E) \setminus F}) \overset{\text{счет. полуад.}}{\geq} \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$

4. $\mathcal{A}$ – алгебра.

5. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\overset{=:E}{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \in \mathcal{A}$.

   $\nu A = \nu(A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E_k) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \overset{\text{счет. полуад.}}{\geq} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

   Переделаем в дизъюнктное объединение.

7. $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.

   Из 4 и 5.

8. ν – объем.

   $\nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(A \cap E_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k)$

   Если A – любое и $E_k \in \mathcal{A}$, берем $A = X$ и получаем определение объема.

9. Объем + счетная полуаддитивность $\Rightarrow$ мера.

$\square$

Определение 9.3.4. Пусть μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$. *Внешней мерой*, порожденной μ, назовем $\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\}$.
Если такого покрытия не существует, то $\mu^* A = +\infty$.

Замечание.

1. Можем рассматривать только дизъюнктные множества:

   $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} B_k$, $B_k \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_k} B_k \subset A_k \overset{\text{усил. монот.}}{\Rightarrow} \mu A_k \geq \sum\limits_{k=1}^{m_k} \mu B_k$

2. Если μ задана на σ-алгебре $\mathcal{A}$, то:

   $\mu^* A := \inf\{\mu B \mid A \subset B$ и $B \in \mathcal{A}\}$

Теорема 9.3.2. *μ^* – субмера, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$.*

Доказательство.

1. Пусть $A \in \mathcal{P}$. Тогда можно взять такие покрытия: $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = ... = \varnothing \Rightarrow \mu^* A \leq \mu A$

   Счетная полуаддитивность $\Rightarrow$ если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n \Rightarrow \mu A \leq \mu^* A$

   т.е. $\mu^* = \mu$ на $\mathcal{P}$

2. μ^* – субмера

   Монотонность:

   Если есть $A \subset B$ и покрытие $B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, то $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \underset{\inf \text{ от большего мн-ва}}{\mu^* A} \leq \mu^* B$

   Счетная полуаддитивность μ^*:

   μ^*: $\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n$

   Если справа есть $+\infty$, то очевидно, считаем, что там все конечно:

   $\mu^* B = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \mid P_k \in \mathcal{P}$ и $B_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

Выберем такие множества C_{nk}, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk} \supset B_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk} \Rightarrow \mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n + \varepsilon$ и устремим ε к нулю.

□

Определение 9.3.5. *Стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$.*

Берем μ_0^* – ее внешняя мера и μ – сужение μ_0^* на μ_0^*-измеримые множества. Получается полная мера, заданная на σ-алгебре.

Теорема 9.3.3. *Это действительно продолжение, то есть множества из $\mathcal{P}$ будут μ-измеримыми.*

Доказательство. Надо доказать, что если $E \in \mathcal{P}$, то $\forall A \subset X$ $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

1. Если $A \in \mathcal{P}$, то $A \setminus E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P}$. Тогда т.к. $A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$:

   $\mu_0^* A = \mu_0 A \overset{\text{адд.}}{=} \mu_0(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0 Q_k = \mu_0^*(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0^* Q_k \overset{\text{полуадд.}}{\geq} \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k) = \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

2. Если $A \notin \mathcal{P}$. Когда $\mu_0^* A = +\infty$ все очевидно, поэтому будем считать, что $\mu_0^* A < +\infty$.

   $\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \mid P_k \in \mathcal{P}_n$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

   Берем конкретное покрытие $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, для которого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \varepsilon$

   $\mu_0 P_k = \mu_0^* P_k \geq (P_k \cap E) + \mu_0^*(P_k \setminus E)$

   $\varepsilon + \mu_0^* A \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(A \cap E)} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

   $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E) \supset A \cap E$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E) \supset A \setminus E$

□

Замечание.

1. Дальше и старая мера, и новая обозначается μ.

   $\mu A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\}$.

2. Применение стандартного продолжения к стандартному продолжению не дает ничего нового.

   Упражнение. Доказать это. *Указание:* μ_0 – стандартная мера, μ – стандартное продолжение μ_0^*. Доказать, что μ_0 и μ_0^* совпадают.

3. Можно ли продолжить на более широкую σ-алгебру, чем дает стандартное продолжение?

   Часто да, но возникает неоднозначность.

Определение 9.3.6. *σ – конечная мера*, если $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, где $P_n \in \mathcal{P}$ и $\mu P_n < +\infty$ (можно считать, что P_n дизъюнктны).

4. Можно ли по-другому продолжить на σ-алгебру μ-измеримых множеств?

   Если μ – σ-конечная мера, то нельзя.

5. Пусть ν – полная мера на σ-алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ и на $\mathcal{P}$ $\mu = \nu$. Верно ли, что $\mathcal{A}$ содержит все μ-измеримые множества?

   Если σ – конечная мера, то да.

Теорема 9.3.4. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение с $\mathcal{P}$, μ^* – соответствующая внешняя мера. Если $\mu^* A < +\infty$, то существует $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч. $C_n := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A$ и $\mu C = \mu^* A$.*

Доказательство. $\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \mid P_k \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$.

Берем такое покрытие $\overbrace{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}}^{=C_n} \supset A$, $B_{nk} \in \mathcal{P}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$

$\mu C_n \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$, $C \subset C_n \Rightarrow \mu C \le \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n} \Rightarrow \mu C \le \mu^* A$ и $C \supset A \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\mu^* C}_{=\mu C} \ge \mu^* A$ □

Следствие. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение с $\mathcal{P}$. Если A – μ-измеримо и $\mu A < +\infty$, то $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.*

Доказательство. Берем C из теоремы, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, $\mu C = \mu A$ и $C \supset A$.

$C \setminus A =: e_1$, $\mu e_1 = 0$. Берем множество из теоремы для e_1, назовем его e_2.

$e_2 \supset e_1$, $e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e_1 = \mu e_2 = 0 \Rightarrow B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$

$e = A \setminus B \subset C \setminus B \subset e_2$, $\mu e_2 = 0 \Rightarrow \mu e = 0$ □

Теорема 9.3.5. ***Единственность продолжения***

Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение на σ-алгебру, ν – другая мера на $\mathcal{A}$, т.ч. $\mu E = \nu E$ при $E \in \mathcal{P}$. Если μ – σ-конечная мера, то $\mu A = \nu A$ при $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, где $P_k \in \mathcal{P}$

$\nu A \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu P_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$. Напишем inf в правой части: $\nu A \le \mu A$.

Если $P \in \mathcal{P}$, то $\mu P = \nu P = \nu(\underbrace{\overbrace{P \cap A}^{\le \mu(P \cap A)}}_{\text{если } A \in \mathcal{A}}) + \nu(\overbrace{P \setminus A}^{\le \mu(P \setminus A)}) \le \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Когда $\mu P < +\infty$ неравенства обращаются в равенство $\Rightarrow \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$

μ – σ-конечная $\Rightarrow X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, $\mu P_n < +\infty \Rightarrow \mu(P_n \cap A) = \nu(P_n \cap A) \Rightarrow \nu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(P_n \cap A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(P_n \cap A) = \mu A$

$A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap P_n)$ □

9.4 Мера Лебега

Теорема 9.4.1. *Классический объем λ_m на полукольце ячеек $\mathcal{P}^m$ – σ-конечная мера.*

Доказательство. То, что мера σ-конечная, очевидно – все пространство можно разрезать на счетное количество единичиных ячеек – получили счетное объединение ячеек меры 1.
Надо доказать счетную полуаддитивность λ_m, т.е. если $(a,b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]$, $a,b,a_n,b_n \in \mathbb{R}^m$, то $\lambda_m(a,b] \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_m(a_n,b_n]$
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $[a',b'] \subset (a,b]$ и $\lambda_m(a',b'] > \lambda_m(a,b] - \varepsilon$.
Возьмем $[a',b'] \subset (a,b]$ и $\lambda_m(a',b'] > \lambda_m(a,b] - \varepsilon$. TODO
Тогда $[a',b] \subset (a,b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n')$ ☐

Определение 9.4.1. Мера Лебега – стандартное продолжение классического объема с полукольца $\mathcal{P}^m$. σ-алгебра, на которую продолжили, – *лебеговская σ-алгебра* и обозначается $\mathcal{L}^m$.

Замечание. $\lambda_m A = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_m P_n \mid P_n \in \mathcal{P}^m$ и $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n\}$.
Можно брать и ячейки из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ (продолжения совпадут).

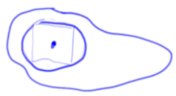
Свойства меры Лебега:

1. Открытые множества измеримы, мера непустого открытого множества > 0.

   Доказательство. $\mathcal{L}^m \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) = \mathcal{B}^m$ содержит все открытые множества.

   Если G – открытое и $\neq \varnothing$, то возьмем $a \in G \Rightarrow \exists \underset{\text{ячейка}\subset_r}{\overline{\mathrm{B}}}(a) \subset G$

   $\lambda G \geq \lambda(\text{ячейка}) > 0$

   ☐

2. Замкнутые множества измеримы, мера одноточечного множества $= 0$.

   Доказательство. Накроем точку ячейкой со стороной ε.

   $\lambda(\text{точка}) \leq \lambda(\text{ячейка}) = \varepsilon^m$ ☐

3. Мера ограниченного измеримого множества конечна.

   Доказательство. ограниченное множество $\subset$ шар $\subset$ ячейка ☐

4. Всякое измеримое множество – не более чем счетное дизъюнктное объединение множеств конечной меры.

   Доказательство. $\mathbb{R}^m = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n$, где $\lambda P_n = 1 \Rightarrow E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(E \cap P_n)$ и $\lambda(E \cap P_n) \leq \lambda P_n = 1$ ☐

5. Если $E \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\forall \varepsilon > 0$ найдутся измеримые множества A_ε и B_ε, т.ч. $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\lambda(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, то E – измеримо.

   Доказательство. $A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ и $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \Rightarrow A \subset E \subset B$ и $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$

   $\lambda(B \setminus A) \leq \lambda(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda(B \setminus A) = 0$

   $E \setminus A \subset B \setminus A \overset{\text{полнота}}{\Rightarrow} \lambda(E \setminus A) = 0$ и $E \setminus A$ измеримо $\Rightarrow E = A \cup E \setminus A$ – измеримо ☐

   Замечание. Свойство 5 верно для любой полной меры.

6. Если $E \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\forall \varepsilon > 0$ найдется измеримое $B_\varepsilon \supset E$, т.ч. $\lambda B_\varepsilon < \varepsilon$, то E измеримо и $\lambda E = 0$.

   Доказательство. $A_\varepsilon = \varnothing \overset{\text{п. 5}}{\Rightarrow} E$ – измеримо и $\lambda E \leq \lambda B_\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow \lambda E = 0$ ☐

7. Счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0.

   (верно для любой меры, заданной на σ-алгебре)

8. Счетное множество имеет меру 0. В частности $\lambda(\mathbb{Q}^m) = 0$.

   (так как одноточечные множества имеют меру 0)

9. Множество нулевой меры имеет пустую внутренность.

   Доказательство. Если $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, то $A \supset B_r(a) \Rightarrow \lambda A \geq \lambda B_r(a) > 0$ ☐

10. Если $\lambda e = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ такие кубические ячейки Q_j, т.ч. $e \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \varepsilon$.

    Доказательство. $0 = \lambda e = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n \mid e \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ и $P_j \in \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}\} \Rightarrow$

    $\Rightarrow$ можно выбрать $P_j \in \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$, Т.ч. $e \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ и $\sum \lambda P_j < \varepsilon$

    Рассмотрим ячейку P_1, пусть $n =$НОК знаменателей длин ее сторон. Тогда P_1 можно разбить на кубические ячейки со стороной $\frac{1}{n}$. ☐

11. Пусть $m \geq 2$. Гиперплоскость $H_j := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_j = c\}$ имеет нулевую меру.

    Доказательство. $A_n := (-n, n]^m \cap H_j(c)$, $H_j(c) \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

    Достаточно проверить, что $\lambda A_n = 0$: $A_n \subset (-n, n] \times ... \times (-n, n] \times (c - \varepsilon, c] \times (-n, n] \times ... \times (-n, n] \Rightarrow$
    $\lambda A_n \leq (2n)^{m-1} \cdot \varepsilon$ ☐

12. Любое множество, содержащееся в не более чем счетном объединении таких гиперплоскостей, имеет меру 0.

    (счетное объединение множеств нулевой меры имеет нулевую меру)

13. $\lambda(a,b) = \lambda(a,b] = \lambda[a,b]$

Доказательство. $(a,b) \subset (a,b] \subset [a,b]$, $[a,b] \setminus (a,b) \subset$ конечное объединение таких гиперплоскостей. $\square$

Замечание.

1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

   Если $m \geq 2$, то подойдет $H_j(c)$.

   Если $m = 1$, то подойдет *канторово множество* $\mathbf{K}$.

   – то, что осталось, называется канторово множество.

   $\lambda\mathbf{K} + \sum \lambda(\text{выкинутые полуинтервалы}) = \lambda[0,1) = 1$

   $\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + ... + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow$ оставшееся множество имеет нулевую меру.

   Другая интерпретация этого примера:

   Троичная запись чисел из $[0,1)$.

   Средний отрезок – первая цифра после запятой 1.

   Два средних отрезка – вторая цифра после запятой 1.

   Продолжая так делать, получим, что останутся в точности те числа, у которых в троичной записи 0 и 2.

   Полученное множество несчетно (так как есть биекция между полученными числами и числами в двоичной записи, просто заменяем 2 на 1).

2. Существуют неизмеримые множества. Более того, любое множество положительной меры содержит неизмеримое подмножество.

   (пример неизмеримого множества будет позже)

Теорема 9.4.2. ***Регулярность меры Лебега.***
Если $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримое множество, то найдется G – открытое, т.ч. $G \supset E$ и $\lambda(G \setminus E) < \varepsilon$.

Доказательство.

1. $\lambda E < +\infty$, $\lambda E = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda P_n \mid E \subset \cup P_n$ и $P_n \in \mathcal{P}^m\}$

   Выберем такое покрытие ячейками, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda P_n < \lambda E + \varepsilon$.

   $P_n = (a_n, b_n] \subset (a_n, b_n')$, т.ч. $\lambda(a_n, b_n') < \lambda P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

   $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n') \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n \subset E$

   $\lambda(G \setminus E) = \lambda G - \lambda E \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(a_n, b_n') - \lambda E \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) - \lambda E = \varepsilon + \sum \lambda P_n - \lambda E < 2\varepsilon$

2. $\lambda E = +\infty$. Разобьем E в объединение E_n, т.ч. $\lambda E_n < +\infty$.

   Возьмем G_n – открытое, т.ч. $E_n \subset G_n$ и $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

   $G := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \supset E$

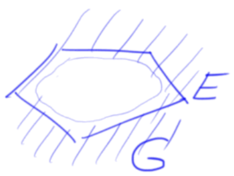
   $G \setminus E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \overset{\text{полуад.}}{\Rightarrow} \lambda(G \setminus E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n \setminus E_n) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

□

Следствие.

1. *Если $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, то найдется F – замкнутое, т.ч. $F \subset E$ и $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$.*

   Доказательство. G для $X \setminus E$, $\lambda\underbrace{(G \setminus (X \setminus E))}_{=E \setminus (X \setminus G)} < \varepsilon$

   $F := X \setminus G$ – замкнутое □

2. *E – измеримое, тогда*

   $\lambda E = \inf\{\lambda G \mid G$ *– открытое и* $G \supset E\}$

   $\lambda E = \sup\{\lambda F \mid F$ *– замкнутое и* $F \supset E\}$

   $\lambda E = \sup\{\lambda K \mid K$ *– компакт и* $K \supset E\}$

   Доказательство. $\lambda \underset{\text{замк.}}{F} = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\underset{\text{компакты}}{[-n,n]^m \cap F})$ – непрер. меры снизу □

3. *Если E – измеримо, то существует K_n – компакты, т.ч. $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и e – нулевой меры, т.ч. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$.*

   Доказательство. Берем компакты $\tilde{K_n}$, т.ч. $\lambda\tilde{K_n} \to \lambda E$.

   Если $\lambda E < +\infty$, то $\lambda(E \setminus \tilde{K_n}) \to 0 \Rightarrow \lambda(E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{K_n}) = 0 \Rightarrow e := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{K_n}$ и $K_n = \tilde{K_1} \cup \tilde{K_2} \cup \ldots \cup \tilde{K_n}$ подходят.

   Если $\lambda E \to +\infty$, то $E = \sqcup E_n$, т.ч. $\lambda E_n < +\infty$.

   $E_n = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_n \cup e_n$, $\lambda e_n = 0$, K_{nj} – компакты. □

Теорема 9.4.3. *При сдвиге измеримого множества его измеримость и мера сохраняются.*

Доказательство. Сдвиг на вектор v: $\lambda\mu E := \lambda(v+E)$ на ячейках λ и μ совпадают $\Rightarrow$ по единственности продолжения они совпадают. □

Теорема 9.4.4. *Пусть μ мера на $\mathcal{L}^m$, т.ч.*

1. *Инвариантна относительно сдвигов.*
2. *Мера μ для каждой ячейки конечна = мера любого ограниченного измеримого множества конечна.*

Тогда найдется $k \in [0, +\infty)$, т.ч. $\mu = k \cdot \lambda$ (т.е. $\mu E = k\lambda E$).

Доказательство. $Q := (0, 1]^m, k := \mu Q$

1. Случай $k = 1$

   Надо доказать, что $\mu = \nu$. Для этого достаточно совпадения на $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$. Любая такая ячейка складывается из кубиков со стороной вида $\frac{1}{n}$, т.е. достаточно совпадения на кубике $(0, \frac{1}{n}]^m$.

   $\lambda(0, \frac{1}{n}]^m = (\frac{1}{n})^m$

   $\mu(0, \frac{1}{n}]^m \stackrel{?}{=} (\frac{1}{n})^m$

   Возьмем n^m сдвигов такого кубика и сложим Q:

   $\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{\mu Q}{n^m} = (\frac{1}{n})^m$

2. Случай $k \neq 0$

   $\tilde{\mu} := \frac{1}{k}\mu$. Тогда $\tilde{\mu}Q = 1$, $\tilde{\mu}$ инваривантна относительно сдвигов $\Rightarrow \tilde{\mu} = \lambda$

3. Случай $k = 0$

   $\mathbb{R}^m$ – счетное объединение сдвигов $Q \Rightarrow \mu(\mathbb{R}^m) = 0$

□

Теорема 9.4.5. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ открытое, $\Phi : G \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо. Тогда:*

1. *Если $e \subset G$, т.ч. $\lambda e = 0$, то $Phi(e)$ измеримо и $\lambda(\Phi(e)) = 0$.*
2. *Если $E \subset G$, т.ч. E – измеримо, то $\Phi(E)$ измеримо.*

Доказательство.

1. **Шаг 1.** Пусть $e \subset P \subset \operatorname{Cl} p \subset G$, где P – ячейка.

   $\|\Phi'(x)\|$ – непрерывна на компакте $\operatorname{Cl} P \Rightarrow \|\Phi'(x)\|$ ограниченна на $\operatorname{Cl} P$.

   Пусть $\|\Phi'(x)\| \leq M$. Тогда $\|\Phi'(x) - \Phi'(y)\| \leq M\|x - y\| \ \forall x, y \in \operatorname{Cl} P$.

   Накроем e кубическими ячейками Q_j так, что $\sum \lambda Q_j < \varepsilon$.

   Пусть h_j – ребро Q_j. Тогда если $x, y \in Q_j$, то $\|x - y\| \leq \sqrt{m}h_j \Rightarrow \|Phi'(x) - \Phi'(y)\| \leq M\sqrt{m}h_j \Rightarrow \Phi(Q_j)$ содержится в шаре радиуса $M\sqrt{m}h_j \Rightarrow \Phi(Q_j)$ содержится в кубе со стороной $2M\sqrt{m}h_j$

   $\Phi(e) \subset \cup\Phi(Q_j), \sum \lambda(\Phi(Q_j)) \leq \sum(2M\sqrt{m}h_j)^m = (2M\sqrt{m})^m \sum \underbrace{h_j^m}_{=\lambda Q_j} = (2M\sqrt{m})^m \sum \lambda Q_j < (2M\sqrt{m})^m \cdot \varepsilon$

Шаг 2. e произвольное, $G = \bigsqcup P_k$, где P_k – ячейки, т.ч. $\operatorname{Cl} P_k \subset G$

$e_k := e \cap P_k \Rightarrow$ по шагу 1 $\lambda e_k = 0 \Rightarrow \lambda e = 0$

2. $E = e \cup \bigcup K_n$, где $\lambda e = 0$ и K_n – компакт $\Rightarrow \Phi(E) = \underbrace{\Phi(e)}_{\text{нулев. мера}} \cup \underbrace{\Phi(K_n)}_{\text{компакты}}$ все множества измеримы

□

Теорема 9.4.6. *Мера Лебега инвариантна относительно движения.*

Доказательство. Надо доказать, что мера Лебега не меняется при вращении.
Пусть U – поворот. $\mu E := \lambda(UE)$ – мера на $\mathcal{L}^m$.
μ конечна на ограниченных множествах.
μ инвариантна относительно сдвигов.
$\mu(E + v) = \lambda(U(E + v)) = \lambda(UE + Uv) = \lambda(UE) = \mu E$
Тогда $\mu = k\lambda$ для $k \in [0, +\infty)$. Но единичный шар переходит в себя при вращении $\Rightarrow k = 1$ □

Теорема 9.4.7. ***Теорема об изменении меры лебега при линейном отображении.***
Пусть $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейное, E – измеримое. Тогда $\lambda(T(E)) = |\det T| \cdot \lambda E$.

Доказательство. $\mu E := \lambda(T(E))$ инвариантно относительно сдвигов и конечна на ограниченных множествах $\Rightarrow \mu = k\lambda$ для $k = \lambda(T((0, 1]^m))$. Это $|\det T|$ (из алгебры). □

Пример неизмеримого множества

$x, y \in (0, 1]$, $x\tilde{y}$, если $x - y \in \mathbb{Q}$
A – берем из каждого класса эквивалентности по одному представителю
A – неизмеримо

Доказательство. От противного. Пусть A измеримо.

1. $\lambda A = 0$. Тогда $(0, 1] \subset \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Q}} \overbrace{(A + x)}^{\text{множества нулевой меры}} \Rightarrow \lambda(0, 1] = 0$, противоречие.

2. $\lambda A \supset 0$. Тогда $\bigsqcup\limits_{x \in \mathbb{Q}} (A + x) \subset (0, 2] \Rightarrow 2 \geq \sum\limits_{x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1} \lambda \overbrace{(A + x)}^{\text{все меры одинак.}}$, противоречие.

□

9.5 Измеримые функции

Определение 9.5.1. Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$.
$E\{f < a\} := \{x \in E \mid f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$
$E\{f \leq a\} := \{x \in E \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}((-\infty, a])$
$E\{f \leq a\}$ и $E\{f \leq a\}$
Все это – *лебеговые множества функции f.*

Теорема 9.5.1. *Пусть E – измеримое, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Следующие условия равносильны:*

1. *$E\{f < a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$.*

2. *$E\{f \le a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$.*

3. *$E\{f > a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$.*

4. *$E\{f \ge a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство.

- $E\{f < a\} = E \setminus E\{f \ge a\} \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 4$
- $E\{f > a\} = E \setminus E\{f \le a\} \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$
- $2 \Rightarrow 1$: $E\{f < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f \le a - \frac{1}{n}\}$
- $4 \Rightarrow 3$: $E\{f > a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f \ge a + \frac{1}{n}\}$

$\square$

Определение 9.5.2. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – *измерима*, если все ее лебеговы множества при всех $a \in \mathbb{R}$ измеримы.

Пример.

1. Константа (на измеримом множестве)

2. $E \supset A$ – измеримы

   $\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \in E \setminus A \end{cases}$, $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$

3. $E \in \mathcal{L}^m$, $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна $\Rightarrow f$ – измерима относительно $\mathcal{L}^m$.

   Доказательство. Достаточно измеримости множеств $E\{f < a\} = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{открытое}})$ – открытые множества $\Rightarrow$ они из $\mathcal{L}^m$. $\square$

Свойства измеримых функций:

1. Если $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, то E – измеримое множество.

   Доказательство. $E = \underbrace{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f < n\}}_{=E\{f<+\infty\}} \cup \underbrace{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f > n\}}_{=E\{f=+\infty\}}$ $\square$

2. Если $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, $\underbrace{E_0}_{\text{измеримо}} \subset E \Rightarrow f\,|_{E_0}$ – измеримо.

   Доказательство. $E_0\{f\,|_{E_0} < a\} = E_0 \cap E\{f < a\}$ $\square$

3. Если $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое множество.

Доказательство. $E\{a < f \leq b\} = E\{f \leq b\} \cap E\{a < f\}$ □

4. Если f – измеримая, то прообраз открытого множества измерим.

   Доказательство. G – открытое $\subset \mathbb{R} \Rightarrow G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k] \Rightarrow f^{-1}(G) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f^{-1}(a_k, b_k]$ □

5. Если f и g измеримые, то $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ измеримые. В частности $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ измеримые.

   Доказательство. $E\{\max\{f, g\} \leq a\} = E\{f \leq a\} \cap E\{g \leq a\}$

   Остальное аналогично. □

6. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Если $f\mid_{E_n}$ измерима, то $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима.

   Доказательство. $E\{f \leq a\} = \bigcup E_n\{f \leq a\}$ □

7. Если $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, то найдется $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримая, т.ч. $f = g\mid_E$.

   Доказательство. $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ □

Теорема 9.5.2. *Пусть $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ поселдовательность измеримых функций. Тогда:*

1. $\sup f_n$ *и* $\inf f_n$ *– измеримые функции ($g = \sup f_n$, если $g(x) = \sup f_n(x)$).*
2. $\overline{\lim} f_n$ *и* $\underline{\lim} f_n$ *– измеримые функции.*
3. *Если $\forall x \in E$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то $\lim f_n$ – измеримая функция.*

Доказательство.

1. $E = \{\sup f_n > a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f_n > a\}$

   $E = \{\inf f_n < a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f_n < a\}$

   Объединили измеримые множества, поэтому измеримость осталась.

2. $\overline{\lim} f_n = \inf\limits_{n} \sup\limits_{k\geq n} f_k(x)$

   $\underline{\lim} f_n = \sup\limits_{n} \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$

3. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то $\lim f_n(x) = \overline{\lim} f_n$

□

Теорема 9.5.3. *Пусть $f : E \to H \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $f = (f_1, ..., f_m)$ и $f_1, ..., f_m$ – измеримые; $\varphi \in C(H)$, $\varphi : H \to \mathbb{R}$. Тогда $F = \varphi \circ f$ – измеримая.*

Доказательство. $E\{F < a\} = F^{-1}(-\infty, c) = f^{-1}(\underbrace{\varphi^{-1}(-\infty, c)}_{H\{\varphi<c\}})$

$H\{\varphi < c\}$ – открытое множество в H, т.е. это $H \cap G$, где G открыто в $\mathbb{R}^m$.

G – открытое $\Rightarrow$ G – счетное объединение ячеек.

$f^{-1}(H \cap G) = f^{-1}(G)$

То есть надо понять, что $f^{-1}(a, b]$ – измеримо $a, b \in \mathbb{R}^m$

$f^{-1}(a, b] = \bigcap\limits_{k=1}^{m} f(\underbrace{a_k, b_k}_{\text{измеримые}}]$ $\square$

Следствие. *В условии теоремы можно в качестве φ взять поточечный предел непрерывных функций.*

Определение 9.5.3. *Арифметические операции с ∞:*

1. Если $x > 0$, то $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$. Если $x < 0$, то $x \cdot \pm\infty = \mp\infty$
2. Если $x \in \overline{\mathbb{R}}$, то $0 \cdot x = 0$
3. Если $x \in \overline{\mathbb{R}}$, то $x + (\pm\infty) = \pm\infty$ и $x - (\pm\infty) = \mp\infty$.
4. $(+\infty) + (-\infty) = (+\infty) - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0$

Деление на 0 не определено.

Теорема 9.5.4.

1. *Произведение и сумма измеримых функций – измеримая функция.*
2. *Если f – измеримая, φ – непрерывная, то $\varphi \circ f$ – измеримая.*
3. *Если $f \geq 0$ измеримая, $p > 0$, то f^p – измеримая ($(+\infty)^p = +\infty$).*
4. *Если f – измеримая, то $\frac{1}{f}$ измерима на множестве $E\{f \neq 0\}$.*

Доказательство.

1. f и g – измеримые. $E = \{-\infty < f < +\infty\}$ и $E\{-\infty < g < +\infty\}$

   $\varphi(x, y) = x + y$, $\varphi \circ \binom{f}{g}$

   Рассмотрим такие кусочки: $E\{-\infty < f < 0\}$, $E\{f = 0\}$, $E\{f = -\infty\}$, $E\{f = +\infty\}$, $E\{0 < f < +\infty\}$

2. Частный случай предыдущей теоремы.

3. $E\{f^p \leq a\} = \varnothing$ и $= \{f \leq a^{\frac{1}{p}}\}$, если $a \geq 0$.

4. $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$

   $\tilde{E}\{\frac{1}{f} < a\} = E\{f < 0\} \cup E\{f > \frac{1}{a}\}$ при $a > 0$

   $\tilde{E}\{\frac{1}{f} < a\} = E\{f < \frac{1}{a}\}$ при $a < 0$

$\square$

Следствие.

1. *Произведение конечного числа измеримых функций – измеримая функция.*

2. *Натуральная степень измеримой функции – измеримая функция.*

3. *Линейная комбинация измеримой функции – измеримая функция.*

Теорема 9.5.5. *Пусть мера задана на $\mathcal{B}^n$, $E \in \mathcal{B}^n$, $f \in C(E)$. Тогда f – измеримая.*

Доказательство. $E\{f < a\}$ – открытое в $E \Rightarrow E\{f < a\} = E \cap G$, где G – открыто в $\mathbb{R}^n$.
G – открыто $\Rightarrow G \in \mathcal{B}^n \Rightarrow E \cap G \in \mathcal{B}^n$ $\square$

Определение 9.5.4. Измеримая функция называется *простой*, если они принимает лишь конечное число значений.

Определение 9.5.5. *Допустимое разбиение* – разбиение X на конечное число измеримых множеств, т.ч. на каждом множестве функция постоянна.

Замечание. У простой функции есть допустимое разбиение.
Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $y_1, y_2, ..., y_n$ – ее значения. Тогда $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(y_k)$.

Свойства простых функций

1. Функция, постоянная на элементах конечного разбиения X на измеримые множества – простая функция.

2. Для любых двух простых функций есть общее допустимое разбиение.

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.

   (они постоянны на элементах общего допустимого разбиения)

4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.

5. Максимум (минимум) конечного числа простых функций – простая функция.

Теорема 9.5.6. ***Теорема о приближении измеримых функций простыми.***
Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательная измеримая функция. Тогда существует последовательность простых функций $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$, т.ч. $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ и $f = \lim \varphi_n$. Более того, если f – ограниченная функция, то φ_n можно так выбрать, что $\varphi \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

Доказательство. $\triangle_k := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, $\triangle_{n^2} := [n, +\infty)$
$[0, +\infty] = \triangle_0 \sqcup \triangle_1 \sqcup ... \triangle_{n^2}$, $A_k := f^{-1}(\triangle_k)$
Тогда $X = \bigsqcup\limits_{k=0}^{n^2} A_k$
$\varphi_n(x) = \frac{k}{n}$, если $x \in A_k$, φ_n – простая функция.

$0 \le \varphi_n(x) \le f(x)$

Если $f(x) \ne +\infty$, то при больших n x попадет в прообразы конечных полуинтервалов $\Rightarrow f(x) - \frac{1}{n} < \varphi_n(x) \le f(x) \Rightarrow \lim \varphi_n(x) = f(x)$

Если $f(x) = +\infty$, то x всегда в прообразе луча $\Rightarrow \varphi_n(x) = n \to +\infty = f(x)$

Если f ограниченная, то сходимость будет равномерной.

Берем φ_{2^n}. Тогда $\varphi_{2^n}(x) \le \varphi_{2^{n+1}}(x)$. $f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ □

9.6 Последовательность функций

Напоминание:

Поточечная сходимость: f_n сходится к f поточечно, если $\forall x \in E$ $f_n(x) \to f(x)$.

Равномерная сходимость: $f_n \rightrightarrows f$ на E, если $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$.

Обозначение $\mathcal{L}(E, \mu)$ – класс функций $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримых относительно μ и $\mu\{f = \pm\infty\} = 0$.

Определение 9.6.1. Пусть $f_n, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда f_n *сходится к* f *почти везде относительно* μ (μ п.в.), если $\exists e \subset E$, т.ч. $\mu e = 0$ и $\forall x \in E \setminus e$. $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

Определение 9.6.2. Пусть $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Тогда f_n *сходится* f *по мере* μ, если $\forall \varepsilon > 0$ $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \to 0$.

Замечание. Раавномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная $\Rightarrow$ п.в.

Раавномерная сходимость $\Rightarrow$ сходимость по мере.

Утверждение 9.6.1. Единственность предела.

1. Если $f_n \to f$ и $f_n \to g$ μ-п.в., то $f = g$ п.в. (за исключением множества нулевой меры)
2. Если $f_n \to f$ по мере μ и $f_n \to g$ по мере μ, то $f = g$ п.в.

Доказательство.

1. $f_n \to f$ поточечно на $E \setminus e_1$

   $f_n \to g$ поточечно на $E \setminus e_2$

   $\mu e_1 = \mu e_2 = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ при $x \in E \setminus (e_1 \cup e_2)$
2. $E\{f \ne g\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{|f - g| > \frac{1}{n}\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{|f - f_n| > \frac{1}{2n}\} \cup E\{|g - f_n| > \frac{1}{2n}\}$

□

Теорема 9.6.1. ***Теорема Лебега***

Если $\mu E < +\infty$, $f_n, f : \mathcal{L}(E, \mu)$, f_n сходится к f, μ-п.в. Тогда f_n сходится к f по мере μ.

Доказательство. Возьмем исключающее множество из определения сходимости п.в. и переопределим на нем функции так, что f_n сходится к f поточечно на E и все функции принимают конечные значения.

Случай 1: $f_n \searrow 0$

Надо доказать, что $\mu E\{f_n > \varepsilon\} \to 0$.

$A_n := E\{f_n > \varepsilon\}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $f_{n+1} \le f_n$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing \Rightarrow$ по непрерывности меры сверху $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = 0$

Случай 2: $f_n \to f$ поточечно

$\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow 0 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sup\limits_{k\ge n} |f_k(x) - f(x)|}_{=:g_n(x)} \Rightarrow g_n \searrow 0 \Rightarrow \mu E\{g_n > \varepsilon\} \to 0$,

но $E\{g_n > \varepsilon\} = E\{\sup\limits_{k\ge n} |f_k - f| > \varepsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$ □

Замечание.

1. Условие $\mu E < +\infty$ существенно.

   $E = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda_1$ – мера Лебегаб $f_n = \mathbf{1}_{[n,+\infty)}$ – характеристическая функция множества $[n, +\infty)$.

   Тогда $f_n \to 0$ поточечно

   Но $E\{f_n > \frac{1}{2}\} = \mathbb{R}$ и $\lambda E\{f_n > \frac{1}{2}\} \not\to 0$

2. Обратное утверждение неверно. Более того, из сходимости по мере не следует сходимость хотя бы в одной точке.

   $E = [0, 1)$, $\mu = \lambda_1$

   $\mathbf{1}_{[0,1)}$

   $\mu E\{|\mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})} - 0| > \varepsilon\} = \frac{1}{n} \to 0$ есть сходимость по мере.

   Но ни в какой точке нет сходимости.

Теорема 9.6.2. ***Теорема Рисса.***

Если f_n сходится к f по мере μ, то существует подпоследовательность f_{nk}, т.ч. f_{nk} сходится к f п.в. по мере μ.

Доказательство. $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ из определения сходимости по мере.

Выберем такое $n_k > n_{k-1}$, что $\mu \underbrace{E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\}}_{=:A_k} < \frac{1}{2^k}$

$B_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $\mu B_n \le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mu A_k < \frac{1}{2^n} \to 0$

$B_n \supset B_{n+1}$

$B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset B_n \Rightarrow \mu B = 0$

Проверим, что если $x \notin B$, то $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

Если $x \notin B$, то $x \notin B_m$ для некоторого $m \Rightarrow x \notin A_k \forall k > m \Rightarrow |f_{n_k}(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}\ \forall k > m \Rightarrow \lim f_{n_k}(x) = f(x)$ □

Следствие.

1. *Если f_n сходится к f по мере μ, то сходимость п.в. может быть только к функции f.*

2. *Если f_n сходится к f по мере μ и $f_n \le g$, то $f \le g$ п.в.*

Доказательство. Выберем подпоследовательность f_{n_k} сходится к f п.в. $\Rightarrow f \leq g$ во всех точках, где есть сходимость. $\square$

Теорема 9.6.3. ***Теорема Фреше.***

Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ измеримая относительно меры Лебега. Тогда существует последовательность $f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $f_n \to f$ п.в.

Теорема 9.6.4. ***Теорема Егорова.***

Пусть $f_n, f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ и $\mu E < +\infty$. Если f_n сходится к f п.в., то $\forall \varepsilon > 0$ найдется $e \subset E$, т.ч. $\mu e < \varepsilon$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus e$.

Теорема 9.6.5. ***Теорема Лузина.***

Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, f – измеримая. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует $A \subset E$, т.ч. $\lambda_m(E \setminus A) < \varepsilon$ и $f\,|_A$ непрерывная.

Замечание. То, что множество точек разрыва имеет маленькую меру, – неверно.
$f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, но $f\,|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ – непрерывна.

Фреме + Егоров $\Rightarrow$ Лузин. Продолжим f нулем на все $\mathbb{R}^m \overset{\text{Фреше}}{\Rightarrow} f_n \to f$ п.в. $f \in C(\mathbb{R}^m) \overset{\text{Егоров}}{\Rightarrow} \exists e \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\lambda_m e < \varepsilon$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R} \setminus e$

Но равномерный предел непрерывных функций – непрерывная функция: $f_n\,|_{\mathbb{R}^m\setminus e} \rightrightarrows f\,|_{\mathbb{R}^m\setminus e}$

10. Интеграл Лебега

10.1 Определение интеграла

Лемма 10.1.1. Пусть $f \geq 0$ простая функция $A_1, A_2, ..., A_m$ и $B_1, B_2, ..., B_n$ – допустимые разбиения, $a_1, a_2, ..., a_m$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ – значения f на соответствующих множествах. Тогда для любого измеримого множества E: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\mu(E \cap A_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\mu(E \cap B_j)$

Доказательство. Если $A_i \cap B_j \neq \varnothing$, то $a_i = b_j$.
$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\mu(E \cap A_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(E \cap A_i \cap B_j) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i(E \cap A_i \cap B_j) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(E \cap A_i \cap B_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\mu(E \cap B_j)$ ☐

Определение 10.1.1. *Интеграл от неотрицательной простой функции f.*
$\int\limits_E f d\mu := \sum\limits_{i=1}^{m} a_i\mu(E \cap A_i)$, где $A_1, ..., A_n$ – допустимое разбиение, $a_1, ..., a_n$ – значения на соответствующих множествах.

Свойства:

1. $\int\limits_E c d\mu = c\mu E$
2. Если $0 \leq f \leq g$, f, g – простые, то $\int\limits_E f d\mu \leq \int\limits_E g d\mu$.
3. Если f, g – неотрицательные простые, то $\int\limits_E (f+g) d\mu = \int\limits_E f d\mu + \int\limits_E g d\mu$.

   Доказательство. 2 и 3. Берем общее допустимое разбиение A_i, где a_i – значения f на A_i, b_i – значения g на A_i.

   2. $a_i \leq b_i \Rightarrow \sum a_i\mu(A_i \cap E) \leq \sum b_i\mu(A_i \cap E)$
   3. $a_i + b_i$ – значение $f + g$ на A_i, $\int\limits_E (f+g) d\mu = \int\limits_E (a_i + b_i)\mu(E \cap A_i) = ...$

   ☐

Определение 10.1.2. *Интеграл от неотрицательной измеримой функции f*
$\int\limits_E f d\mu := \sup\{\int\limits_E \varphi d\mu \mid \varphi$ – простая и $0 \leq \varphi \leq f\}$

Определение 10.1.3. *Интеграл от измеримой функции f*
$\int\limits_E f d\mu := \int\limits_E f_+ d\mu - \int\limits_E f_- d\mu$
Если $(+\infty) - (+\infty)$, то $\int$ не определен.

Замечание.

1. Если $f \geq 0$ простая, то новое определение совпадает со старым.

   Комментарий: можно в качестве φ взять f, тогда $f = \varphi \leq f$, то есть берем супремум от множества, в котором есть старый интеграл + все функции не больше него.

2. Новое определение для неотрицательной измеримой (через f_+ и f_-) совпадает со старым.

   Комментарий: $f_- = 0$.

Свойства $\int$ от неотрицательной измеримых функций:

1. Если $f \le g$, то $\int\limits_E f d\mu \le \int\limits_E g d\mu$.
2. Если $\mu E = 0$, то $\int\limits_E f d\mu = 0$.
3. $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X \mathbf{1}_E f d\mu$.
4. Если $A \subset B$, то $\int\limits_A f d\mu \le \int\limits_B f d\mu$.

Доказательство.

1. Простые, подходящие для f, подходят и для g, то есть считаем sup от большего множества.
2. $\mu E = 0 \Rightarrow \int\limits_E \varphi d\mu = 0$, если φ – простая.
3. $\int\limits_E \varphi d\mu = \int\limits_X \mathbf{1}_E d\mu$ – верно для простых функций.
4. $\mathbf{1}_A f \le \mathbf{1}_B f \Rightarrow 1) + 3) = 4)$

$\square$

Теорема 10.1.1. ***Теорема Беппо Леви***

Пусть $f_n \le 0$ – измеримые, $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$. *Если f_n поточечно сходится к f, то* $\lim \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f_n d\mu$.

Доказательство. $f_n \le f_{n+1} \Rightarrow \int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X f_{n+1} d\mu \Rightarrow$ последовательность $\int\limits_X f_n d\mu$ возрастает.
Пусть $L := \lim \int\limits_X f_n d\mu$. Поскольку $f_n \le f$, $\int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X f d\mu \Rightarrow L \le \lim \int\limits_X f_n d\mu$
Надо доказать, что $L \ge \lim \int\limits_X f_n d\mu = \sup\{\int\limits_X \overset{\to}{\varphi} d\mu \mid 0 \le \varphi \le f\}$, где φ – простая.
Достаточно доказать, что $L \ge \lim \int\limits_X f_n d\mu$ $\forall \varphi$ простая $0 \le \varphi \le f$.
Берем $\Theta \in (0, 1)$. $X_n := X\{f_n \ge \Theta\varphi\}$, $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$
Докажем, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = X$. Берем $x \in X$. Если $\varphi(x) = 0$, то $x \in X_n \forall n$. Если $\varphi(x) > 0$, то $f(x) \ge \varphi(x) > 0$ и $\lim f_n(x) = f(x) > \Theta\varphi(x) \Rightarrow$ при больших n $f_n(x) \le \Theta\varphi(x) \Rightarrow x \in X_n$ при больших n.
Пусть A_i – допустимое разбиение для φ. $\mu(A_i \cap X_n) \underset{n\to\infty}{\to} \mu A_i$ непрерывность меры снизу. Тогда $\underbrace{\sum a_i \mu(A_i \cap X_n)}_{=\int\limits_{X_n} \varphi d\mu} \to \underbrace{\sum a_i \mu A_i}_{=\int\limits_X \varphi d\mu}$.
Достаточно доказать, что $L \ge \Theta \int\limits_{X_n} \varphi d\mu$:
$L \ge \int\limits_X f_n d\mu \ge \int\limits_{X_n} f_n d\mu \ge \int\limits_{X_n} \Theta\varphi d\mu = \Theta \int\limits_{X_n} \varphi d\mu$ $\square$

Свойства $\int$ от неотрицательной измеримых функций:

5. **Аддитивность.**

   Если $f, g \ge 0$ измеримые, то $\int\limits_E (f + g) d\mu = \int\limits_E (f + g) = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

6. **Однородность.**

   Если $\alpha \geq 0, f \geq 0$ измеримая, то $\int\limits_E (\alpha f) d\mu = \alpha \int\limits_E f d\mu$.

   Доказательство.

   5. По теореме о приближении f простыми $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq ... \to f$ (поточечно) и $0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq ... \to g$ (поточечно).

      Тогда $\varphi_n + \psi_n \to f = g$, $0 \leq \varphi_1 + \psi_1 \leq \varphi_2 + \psi_2 \leq ...$

      На простых функциях есть аддитивность: $\int\limits_E (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int\limits_E \varphi_n d\mu + \int\limits_E \psi_n d\mu$

      $\overset{\text{по th Леви}}{\to} \int\limits_E (f+g) d\mu = \int\limits_E f d\mu + \int\limits_E g d\mu$

   6. Считаем, что $\alpha > 0$ (иначе, $0 = 0$ и очевидно). Приблизим f простыми: $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq ... \to f$ (поточечно). Тогда:

      $0 \leq \alpha\varphi_1 \leq \alpha\varphi_2 \leq ... \to \alpha f$ (поточечно) и $\int\limits_E (\alpha\varphi) d\mu = \int\limits_E \varphi d\mu$

      $\overset{\text{по th Леви}}{\to} \int\limits_E (\alpha f) d\mu = \int\limits_E f d\mu$

   □

7. **Аддитивность по множеству.**

   $f \geq 0$ измеримая $\Rightarrow \int\limits_{A \sqcup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu$

   Доказательство. $\mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_B f = \mathbf{1}_{A\sqcup} f$ □

8. Если $\mu E > 0$ и $f > 0$ на E, то $\int\limits_E f d\mu > 0$

   Доказательство. Рассмотрим $E_n := E\{f \geq \frac{1}{n}\}$, тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$

   $E_1 \subset E_2 \subset ... \Rightarrow \mu E_n \to \mu E > 0 \Rightarrow \mu E_n > 0$ и $\int\limits_{E_n} f d\mu > \frac{1}{n}\mu E_n$ □

Пример. Пусть $T = \{t_1, t_2, ...\}$ не более чем счетное, $\{w_1, w_2, ...\}$ неотрицательные и $\mu A_i := \sum\limits_{i: t_i \in A} w_i$.
Проверим, что $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{i: t_i \in A} f(t_i) \cdot w_i$.
Если $f = \mathbf{1}_E$: $\int\limits_A \mathbf{1}_E d\mu = \mu(E \cap A) = \sum\limits_{i: t_i \in (A \cap E)} w_i = \sum\limits_{i: t_i \in A} f(t_i) \cdot w_i$
Если $f \geq 0$ простая, то формула работает по линейности.
Если $f \geq 0$ измеримая:

$\geq$. $\varphi_n = f \mid_{\{t_1, ..., t_n\}}$

$\int\limits_A f d\mu \geq \int\limits_A \varphi_n d\mu = \sum\limits_{i \leq n: t_i \in A} f(t_i) w_i \underset{\to}{\to} \sum\limits_{i: t_i \in A} f(t_i) w_i$

$\leq$. Пусть φ – простая, $0 \leq \varphi \leq f$

$\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{i:t_i \in A} \varphi(t_i) w_i \leq \sum\limits_{i:t_i \in A} f(t_i) w_i$ и берем sup от $\int\limits_A \varphi d\mu$

Если f произвольная измеримая, то $f = f_+ - f_-$ и вычитаем равенства для $f_\pm$:

$\int\limits_A f_\pm d\mu = \sum\limits_{i:t_i \in A} f_\pm(t_i) w_i$

Определение 10.1.4. *Свойство $P(x)$ верно почти везде на E или для почти всех точек из E*:
Если существует $e \subset E$, т.ч. $\mu e = 0$ и $P(x)$ верно $\forall x \in E \setminus e$.

Замечание. Если $P_1, P_2, \ldots$ – последовательность свойств, верных почти везде на E, то они все вместе верны почти везде на E.

Теорема 10.1.2. ***Неравенство Чебышева***
Пусть $f \leq 0$ измерима, $p, t > 0$. Тогда $\mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \int\limits_E f^p d\mu$.

Доказательство. Заметим, что $E\{f \geq t\} = E\{f^p \geq t^p\}$
$t^p \mu E\{f \geq t\} = t^p \cdot \mu E\{f^p \geq t^p\} \leq \int E\{f^p \geq t^p\} f^p d\mu \leq \int\limits_E f^p d\mu$ ☐

Свойства интеграла, связанные с почти везде

1. Если $\int\limits_E |f| d\mu < +\infty$, то f почти везде конечна на E.

   Доказательство. $\mu E\{|f| \geq n\} \leq \frac{1}{n} \int\limits_E |f| d\mu \underset{n \to +\infty}{\to}$

   $muE\{|f| \geq \pm\infty\} \leq muE\{|f| \geq n\} \to 0$ ☐

2. Если $\int\limits_E |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ почти везде на E

   Доказательство. Если $\mu E\{|f| > 0\} > 0$, то $\int\limits_{E\{|f|>0\}} |f| d\mu > 0$ ☐

3. Если $A \subset B$ измеримое и $\mu B \setminus A = 0$, то $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_B f d\mu$ (и существуют / не существуют одновременно).

   Доказательство. $\int\limits_B f_\pm d\mu = \int\limits_A f_\pm d\mu + \int\limits_{B \setminus A} f_\pm d\mu = \int\limits_A f_\pm d\mu$ ☐

4. Если f и g измеримы и $f = g$ почти везде на E, то $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E g d\mu$ (и существуют / не существуют одновременно).

   Доказательство. Пусть $f = g$ на $E \setminus e$ и $\mu e = 0$.

   $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_{E \setminus e} f d\mu = \int\limits_{E \setminus e} g d\mu = \int\limits_E g d\mu$ ☐

10.2 Суммируемые функции

Определение 10.2.1. Пусть f – измеримая функция. Если $\int\limits_E f_\pm d\mu$ конечны, то f – *суммируемая на множестве* E.

Свойства:

1. Пусть f – измеримая. Тогда f – суммируемая на $E \Leftrightarrow \int\limits_E |f| d\mu < +\infty$.

   Доказательство. $\Leftarrow$. $0 \le f_\pm \le |f| \Rightarrow \int\limits_E f_\pm d\mu \le \int\limits_E |f| d\mu < +\infty$

   $\Rightarrow$. $|f| = f_+ + f_- \Rightarrow \int\limits_E |f| d\mu = \int\limits_E f_+ d\mu + \int\limits_E f_- d\mu < +\infty$

   □

2. Суммируемая на E функция почти везде конечна на E.

3. Пусть $A \subset B$. Если f суммируемая на B, то f суммируемая на A.

   Доказательство. $\int\limits_A f d\mu \le \int\limits_B f d\mu$ □

4. Ограниченная функция суммируемая на множестве конечной мере.

5. Если f и g суммируемые на множестве E и $f \le g$ почти везде на E, то $\int\limits_E f d\mu \le \int\limits_E g d\mu$.

   Доказательство. $f_+ - f_- \le g_+ - g_-$ почти везде на $E \Rightarrow f_+ + g_- \le g_+ + f_-$ почти везде на E

   $\int\limits_E f_+ + \int\limits_E g_- = \int\limits_E (f_+ + g_-) d\mu \le \int\limits_E (g_+ + f_-) d\mu = \int\limits_E g_+ + \int\limits_E f_-$ □

6. **Аддитивность интеграла.**

   Если f и g суммируемые на множестве E, то $f + g$ суммируемая на множестве E и $\int\limits_E (f+g) d\mu = \int\limits_E f d\mu + \int\limits_E g d\mu$.

   Доказательство. $|f+g| \le |f| + |g| \Rightarrow \int\limits_E |f+g| d\mu \le \int\limits_E |f| d\mu + \int\limits_E |g| d\mu < +\infty \Rightarrow$ суммируемость есть

   Пусть $h = f + g$. $h_+ - h_- = h = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_- \Rightarrow h_+ f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \Rightarrow \int\limits_E (h_+ f_- + g_-) d\mu = \int\limits_E (f_+ + g_+ + h_-) d\mu$ □

7. **Однородность интеграла.**

   Если f – суммируемая на E, $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf суммируемая на E и $\int\limits_E (\alpha f) d\mu = \alpha \int\limits_E f d\mu$.

   Доказательство. $\int\limits_E |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int\limits_E |f| d\mu < +\infty$

   Если $\alpha = 0$, то все очевидно.

Пусть $\alpha > 0$. $(\alpha f)_+ = \alpha f_+$, $(\alpha f)_- = \alpha f_-$, $\int\limits_E \alpha f_\pm d\mu = \alpha \int\limits_E f_\pm d\mu$ и вычтем

Пусть $\alpha = -1$, $(-f)_+ = f_-$, $(-f)_- = f_+$, $\int\limits_E (-f) d\mu = \int\limits_E (-f)_+ d\mu - \int\limits_E (-f)_- d\mu = \int\limits_E f_- d\mu - \int\limits_E f_+ d\mu = -\int\limits_E f d\mu$ □

8. **Линейность интеграла.**

   Если f, g суммируемые на E, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ суммируема на E и $\int\limits_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_E f d\mu + \beta \int\limits_E g d\mu$.

9. **Аддитивность интеграла по множеству.**

   Пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^n E_k$ – измеримые множества, f – измеримая. Тогда f суммируема на $E \Leftrightarrow f$ суммируема на E_k при $k = 1, ..., n$. В этом случае, если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^n E_k$, то $\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{E_k} f d\mu$.

   Доказательство. $|\mathbf{1}_{E_k} f| \le |\mathbf{1}_E f| \le |\mathbf{1}_{E_1} f| + |\mathbf{1}_{E_n} f| \Rightarrow$ равносильность

   Если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^n E_k$, то $\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_{E_1} + ... + \mathbf{1}_{E_n} \Rightarrow \mathbf{1}_E f = \mathbf{1}_{E_1} f + ... + \mathbf{1}_{E_n} f$ и линейность интеграла. □

10. **Интегрирование по сумме мер** Пусть μ_1 и μ_2 – меры, заданные на одной и той же σ-алгебре, $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Если $f \ge 0$ измеримая, то $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E d\mu_1 + \int\limits_E d\mu_2$.

    f суммируемая относительно $\mu \Leftrightarrow f$ суммируемая относительно μ_1 и μ_2.

    Доказательство. Равенство.

    Проверим на простых $\int\limits_E \varphi d\mu = \sum\limits_{k=1}^n a_i \mu(A_i \cap E) = \sum\limits_{k=1}^n a_i \mu_1(A_i \cap E) + \sum\limits_{k=1}^n a_i \mu_2(A_i \cap E) = \int\limits_E \varphi d\mu_1 + \int\limits_E \varphi d\mu_2$

    Берем простые $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le ... \to f$

    $\int\limits_E \varphi_n d\mu = \int\limits_E \varphi_n d\mu_1 + \int\limits_E \varphi_n d\mu_2$

    $\xrightarrow{\text{по th Леви}} \int\limits_E \varphi d\mu = \int\limits_E \varphi d\mu_1 + \int\limits_E \varphi d\mu_2$

    Суммируемость.

    $\int\limits_E |f| d\mu = \int\limits_E |f| d\mu_1 + \int\limits_E |f| d\mu_2$ □

Определение 10.2.2. Пусть $f : E \to \mathbb{C}$. Тогда f *измерима*, если $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ измеримы.
$\int\limits_E f d\mu := \int\limits_E \operatorname{Re} f d\mu + \int\limits_E \operatorname{Im} f d\mu$, если то, что написано справо, конечно.

Замечание. Все свойства, связанные с равенством сохраняются.

Утверждение 10.2.1. Неравенство: $|\int\limits_E f d\mu| \le \int\limits_E |f| d\mu$

Доказательство. Если $\int\limits_E |f| d\mu = +\infty$, то все очевидно.
Пусть $\int\limits_E |f| d\mu < +\infty \Rightarrow \int\limits_E (\operatorname{Re} f)_\pm d\mu, \int\limits_E (\operatorname{Im} f)_\pm d\mu < +\infty$; $(\operatorname{Re} f)_\pm, (\operatorname{Im} f)_\pm \le |f|$

Тогда $\int\limits_E f d\mu$ конечный $\Rightarrow$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{R} |\int\limits_E f d\mu| = e^{i\alpha} \cdot \int\limits_E f d\mu =$
$= \int\limits_E (e^{i\alpha}) d\mu = \int\limits_E \operatorname{Re}(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \int\limits_E \operatorname{Im}(e^{i\alpha} f) d\mu = \int\limits_E \operatorname{Re}(e^{i\alpha} f) d\mu \leq$
$\leq \int\limits_E |\operatorname{Re}(e^{i\alpha} f)| d\mu \leq \int\limits_E |e^{i\alpha} f| d\mu = \int\limits_E |f| d\mu$ □

Теорема 10.2.1. ***Теорема о счетной аддитивности интеграла.***
Пусть $f \geq 0$, *измерима*, $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. *Тогда* $\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu$.

Доказательство. $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{E_k} f$, $S_n \leq S_{n+1}$, $S_n \to f$ поточечно на E.
По теореме Леви: $\int\limits_E S_n d\mu \to \int\limits_E f d\mu$
$\int\limits_E S_n d\mu = \int\limits_E \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{E_k} d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_E \mathbf{1}_{E_k} f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f d\mu$ это части суммы нужного ряда. □

Следствие.

1. *Если* $f \geq 0$ *измерима, то* $\nu E := \int\limits_E f d\mu$ *– мера на той же* σ*-алгебре, что и* μ.

2. *Если* f *– суммируемая и* $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, *то* $\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu$.

   Доказательство. Для f_+ и f_- – теорема. Дальше вычтем. □

3. *Если* $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ *и* $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ *или* $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ *и* $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, f *– суммируемая, то* $\int\limits_{E_n} f d\mu \to \int\limits_E f d\mu$.

   Доказательство. $\nu_\pm A := \int\limits_A f d\mu$ – конечные меры. По непрерывности сверху (снизу) $\nu_\pm E_n \to \nu_\pm E$ и вычтем. □

4. *Если* f *суммируемая на* E, *то* $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subset E$, *т.ч.* $\mu A < +\infty$ *и* $\int\limits_{E \setminus A} |f| d\mu < \varepsilon$.

   Доказательство. $E_n := E\{|f| < \frac{1}{n}\}$, $E_1 \supset E_2 \subset \dots$
   $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\}$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{E_n} |f| d\mu = \int\limits_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0$
   Берем такое n, что $\int\limits_{E_n} |f| d\mu < \varepsilon$ и $A = E \setminus E_n$. Надо доказать, что $\mu A < +\infty$: $\mu A = \mu E = \{|f| > \frac{1}{n}\} \underset{\text{Чебышев}}{\leq} \frac{\int\limits_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}} < +\infty$ □

Теорема 10.2.2. ***Абсолютная непрерывность интеграла.***
Пусть f *суммируемая на* E. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, *т.ч. если* $e \subset E$ *и* $\mu e < \delta$, *то* $\int\limits_e |f| d\mu < \varepsilon$.

Доказательство. $\int\limits_E |f| d\mu = \sup\{\int\limits_E \varphi d\mu \mid 0 \leq \varphi \leq |f|, \varphi$ – простая$\}$.
Берем такую простую φ_ε, что $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq |f|$ и $\int\limits_E \varphi_\varepsilon d\mu\ \int\limits_E |f| d\mu - \varepsilon$.
φ_ε – простая $\Rightarrow$ ограниченная, пусть $\varphi_\varepsilon \leq C$.

Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Пусть $\mu e < \delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

$\int\limits_e \varphi_\varepsilon d\mu \leq C \cdot \mu e < \varepsilon$

$\int\limits_e |f| d\mu = \int\limits_e \varphi_\varepsilon d\mu + \int\limits_e (|f| - \varphi_\varepsilon) d\mu < \varepsilon + \int\limits_e (|f| - \varphi_\varepsilon) d\mu < 2\varepsilon$ $\square$

Следствие. *Если* $\{e_n\}$ *последовательность множеств, т.ч.* $\mu e_n \to 0$, f *суммируемая* $\Rightarrow \int\limits_{e_n} |f| d\mu \to 0$.