Определение 0.0.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$. Тогда f *дифференцируема в точке* a, если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, т.ч.
$f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$ при $h \to 0$.

Замечание. Дифференцируемость в точке a влечет непрерывность в точке a.
$f(a+h) = \underset{\to f(a)}{f(a)} + \underset{\to T0=0}{Th} + \underset{\to 0}{o(\|h\|)}$ при $h \to 0$

Теорема 0.0.1. *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, *где* $f_1, ..., f_m : E \to \mathbb{R}$ *(координатные функции). Тогда* f *дифференцирема в точке* $a \Leftrightarrow f_j$ *дифференцируема в точка* a $\forall j = 1, ..., m$.

Следствие. *Матрица Якоби* f *– матрица, составленная из градиентов координатных функций:* $f'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$.

Утверждение 0.0.1. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \nabla f(a), e_k \rangle$, то есть $\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.

Теорема 0.0.2. *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$. *Если все частные производные функции* f *непрерывны в точке* a, *то* f *дифференцируема в точке* a.

Определение 0.0.2. f *непрерывно дифференцируема в точке* a, если f дифференцируема в окрестности точки a и $\|d_x f - d_a f\| \underset{x \to a}{\to} 0$.

Теорема 0.0.3. *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, f *дифференцируема в окрестности точки* a. *Тогда* f *непрерывно дифференцируема в точке* $a \Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *непрерывна в точке* a $\forall i, j$.

Теорема 0.0.4. ***Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.***
Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ *открытое,* $f \in C^r(D)$, $a \in D$. *Тогда при* $x \to a$:
$f(x) = \sum\limits_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(\|x-a\|^r)$

Теорема 0.0.5. ***Необходимое условие экстремума.***
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, a *– точка экстремума функции* f. *Тогда если существует* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, *то* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$. *В частности, если* f *дифференцируема в точке* a, *то* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$, *то есть* $\nabla f(a) = 0$.

Теорема 0.0.6. ***Достаточные условия экстремума.***
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, a *– стационарная точка,* f *дважды дифференцируема,* $Q(h) := \sum\limits_{i=1,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$. *Тогда:*

1. *Если* Q *строго положительно определена, то* a *точка строгого локального минимума.*
2. *Если* Q *строго отрицательного определена, то* a *точка строгого локального максимума*
3. *Если* a *точка нестрогого локального минимума, то* Q *нестрого положительно определена.*
4. *Если* a *точка нестрогого локального максимума, то* Q *нестрого отрицательно определена.*

Теорема 0.0.7. ***Метод неопределенных множителей Лагранжа***
Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируема,* $\Phi : D \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно дифференцируема,* $a \in D$, $\Phi(a) = 0$, D *открытое.*
Если a *точка условного экстремума (при условии* $\Phi(x) = 0$*), то* $\nabla f_{(a)}$, $\nabla \Phi_1^{(a)}$, ..., $\nabla \Phi_m^{(a)}$ *линейно зависимы.*