Содержание

1. Теория меры

1.1 Система множеств

$A \sqcup B := A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$ – дизъюнктные множества.
$\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$

Определение 1.1.1. $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – разбиение множества E, если $E = \bigsqcup\limits_{\alpha \in I} E$

Напоминание:
$X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$ и $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$

Определение 1.1.2. $\mathcal{A}$ – система подножеств X:

- δ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.
- δ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- σ_0. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$.
- σ. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.3. Система множества *симметрична*, если $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.4. Система множества $\mathcal{A}$ – *алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \notin \mathcal{A}$, есть свойства δ_0 и σ_0.

Определение 1.1.5. Система множества $\mathcal{A}$ – σ*-алгебра*, если она симметрична, $\varnothing \in \mathcal{A}$, есть свойства δ и σ.

Утверждение 1.1.1. Если $\mathcal{A}$ симметричная система, то $\sigma_0 \Leftrightarrow \delta_0$ и $\sigma \Leftrightarrow \delta$.

Доказательство. $X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cup (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cap B)} = A \cap B$

$X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cap (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cup B)} = A \cup B$ □

Замечание. Если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра, то $\mathcal{A}$ – алгебра.

Свойства алгебры множеств:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.
2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
3. Если $A_1, A_2, ..., A_3 \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$.

Пример.

1. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \{$все огранич. мн-ва и и дополнения$\}$

   $\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра.

2. 2^X – σ-алгебра

3. $Y \subset X$, $\mathcal{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X. тогда

   $\mathcal{B} := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ – алгебра (σ-алгебра). Называется *индуцированная алгебра.*

   Доказательство. $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (X \setminus A)$ □

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры). Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).

   Доказательство. Если $A, B \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, то $A, B \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ □

5. $A, B \subset X$ из чего состоит наименьшая алебра, содержащая A и B:

   $\varnothing, X, A, B, A \cap B, A \cup B, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B), A \setminus B, B \setminus B,$

   $A \triangle B, X \setminus (A \triangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathcal{E}$ – система подножеств X. Тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{E}$.*

Доказательство. 2^X – σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.
Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры, содержащие $\mathcal{E}$.
$\mathcal{B} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – σ-алгебра, $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E}\ \forall \alpha$. □

Определение 1.1.6. Такая σ-алгебра – *барелевская оболочка $\mathcal{E}$.* $\mathcal{B}(\mathcal{E})$

Определение 1.1.7. $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{E}$ – всевозможные открытые множества. *Барелевская σ-алгебра* $\mathcal{B}^m := \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Замечание. $\mathcal{B}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$ ($\mathcal{B}^m$ – континуум, $2^{\mathbb{R}^m}$ – больше континуума)

Определение 1.1.8. $\mathcal{R}$ – *кольцо подмножеств* X, если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

Замечание. Если $\mathcal{R}$ – кольца и $X \in \mathcal{R}$, то $\mathcal{R}$ – алгебра.

Определение 1.1.9. $\mathcal{P}$ – *получкольцо подмножеств* X, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$

2. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$

3. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow$ существуют $Q_1, Q_2, ..., Q_n \in \mathcal{P}$ т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо

Лемма 1.1.1. $\bigcup A_k = \bigsqcup (A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j))$

Доказательство. $B_k := A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j \subset A_k \Rightarrow \bigcup A_k \supset \bigcup B_k$

$B_n \subset A_n \setminus \underbrace{A_k}_{\supset B_k}$ при $n > k \Rightarrow B_n \cup B_k = \varnothing$

Проверяем включение $\subset$.

Берем $x \in \bigcup A_k$, $n := \min\{j \mid x \in A_j\} \Rightarrow x \in B_n = \underset{x \in}{A_n} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j \Rightarrow x \in \bigcup B_k$. ☐

Теорема 1.1.2. ***Свойства полукольца:***

$P, P_1, P_2, ... \in \mathcal{P}$ – полукольцо. Тогда:

1. *$P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ для некоторых $Q_j \in \mathcal{P}$.*

2. *$\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ для некоторых $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, т.ч. $Q_{kj} \subset P_k$.*

3. *Во 2 пункте можно вместо n написать ∞.*

Доказательство.

1. Индукция по n. Переход $n - 1 \to n$

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k = (\underbrace{P \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k}_{\text{инд.пр.}= \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j}) \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j \setminus P_n = \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$

2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (P_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j) \overset{\text{по 1}}{=} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} \Rightarrow Q_{kj} \subset P_k$

☐

Теорема 1.1.3. ***Декартово произведение полуколец***

Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножества X, $\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножества Y.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – полукольцо подмножеств $X \times Y$.

Доказательство. Пусть $P_1 \times Q_1$ и $P_2 \times Q_2 \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2) = (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1 \cap Q_2})$

$(P_1 \times Q_1) \setminus (P_2 \times Q_2) = (\underset{\text{диз. об. эл-в в } \mathcal{P}}{P_1 \setminus P_2}) \times \underset{\in \mathcal{Q}}{Q_1} \sqcup (\underset{\in \mathcal{P}}{P_1 \cap P_2}) \times (\underset{\text{диз. об. эл-в в } \mathcal{Q}}{Q_1 \setminus Q_2})$ ☐

Определение 1.1.10. *Открытый параллелепипед* (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^m$
$(a, b) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_m, b_m)$

Определение 1.1.11. *Замкнутый параллелепипед* $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^m$
$[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_m, b_m]$

Определение 1.1.12. *Ячейка* $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^m$
$(a, b] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_m, b_m]$

Замечание. $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$

Утверждение 1.1.2. Непустая ячейка – пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающих последовательностей замкнутых параллелепипедов.

Доказательство. $(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_m, b_m]$
$P_n := (a_1, b_1, +\frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \times ... \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$
$P_{n+1} \subset P_n$, $P_n \supset (a, b]$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$
$A_n := (a_1 - \frac{1}{n}, b_1) \times (a_2 - \frac{1}{n}, b_2) \times .. \times (a_m - \frac{1}{n}, b_m)$
$A_{n+1} \supset A_n \subset (a, b]$, $\bigcup A_n = (a, b]$ □

Обозначение:

1. $\mathcal{P}^m$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$ (в т.ч. и пустое множество).

2. $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – семейство ячеек в $\mathbb{R}^m$, у которых все координаты вершин рациональны.

Теорема 1.1.4. *Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ представляется в виде дизъюнктного объединения счетного числа ячеек, замыкания которых $\subset G$. Более того, можно считать, что координаты всех вершин всех ячеек рационально.*

Доказательство. $x \in G \Rightarrow x \in \overline{\mathrm{B}}_r(x) \subset G$
Найдется ячейка R_x, т.ч. $x \in R_x$, координаты R_x рациональны и $\mathrm{Cl}\, R_x \subset G$. Выкинем все повторы и получим счетное число ячеек, объединение которых равно G. По свойству полукольца можно это объединение сделать дизъюнктным. □

Замечание. Явный алгоритм.

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \overset{1)\subset}{=} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \overset{2)\subset}{=} \mathcal{B}^{m 3)\subset}$

Доказательство. 1) $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$
2) $\mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m$
Ячейка – счетное пересение открытых парарллелепипедов, т.е. открытых множеств. Они лежат в $\mathcal{B}^m$, но $\mathcal{B}^m$ – σ-алгебра $\Rightarrow$ там есть счетное пересение.

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{B}^m$

3) G – открытое множество $\Rightarrow G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$ т.к. по теореме G – счетное объединение элементов из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$ $\square$

1.2 Объем и мера

Определение 1.2.1. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.

μ – *объем*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$

Определение 1.2.2. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$.

μ – *мера*, если:

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Замечание. Если μ – мера, то μ – объем.

Упражнение. Если мера $\mu \neq +\infty$, то $\mu\varnothing = 0$ из п. 2ю

Пример. Объемы:

1. Длина ячейки в $\mathbb{R}$.
2. Пусть g неубывающая функция : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$, $(a, b] \subset \mathbb{R}$
3. Классический объем ячейки в $\mathbb{R}^m$ (докажем позже)

   $\lambda_m(a, b] = (b_m - a_m)...(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$
4. $x_0 \in X$, $a > 0$, $\mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
5. $\mathcal{A}$ – огранич. подмн-ва $\mathbb{R}$ и их дополнения.

   Если $A \in \mathcal{A}$, то $\mu A = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ – огр. мн-во} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

   Это объем, но не мера.

Теорема 1.2.1. *Пусть μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда:*

1. *Если $P' \subset P$ $(P, P' \in \mathcal{P})$, то $\mu P' \leq \mu P$. (монотонность объема)*

2. *Если* $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \le \mu P$. *(усиленная монотонность)*

2'. *Если* $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \underset{\in\mathcal{P}}{P_k} \subset \underset{\in\mathcal{P}}{P}$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \le \mu P$.

Если $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, *то* $\mu P \le \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$ *(полуаддитивность)*

Доказательство.

2. $P \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \Rightarrow \mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu Q_j \ge \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

2'. $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \subset \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \Rightarrow \mu P \ge \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

3'. $P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k \Rightarrow P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, $Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$

$\bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \subset P_k \overset{2)}{\Rightarrow} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \le \mu P_k$

$\mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

□

Замечание.

1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subset B$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

   $B = \underset{\in\mathcal{P}}{A} \sqcup (B \underset{\in\mathcal{P}}{\setminus} A)$

2. Объем с полукольца можно продолжить на кольцо, состоящее из всевозможных дизъюнктных объединений.

Теорема 1.2.2. *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, μ – объем на $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножеств Y, ν – объем на $\mathcal{Q}$.*
$\lambda : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \to [0, +\infty]$.
$\lambda(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) = \mu\mathcal{P} \cdot \nu\mathcal{Q}$ *(считаем, что* $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$*).*
Тогда λ – объем.

Доказательство. Если $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ и $Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, то $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_k \times Q_j$

$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \nu Q_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{\mu P_k \nu O_j}_{=\lambda(P_k \times Q_j)}$

Противный случай: $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \times Q_k$ □

Следствие. *λ_m – объем.*

Доказательство. λ_1 – объем, λ_m – декартово произведение λ_1. □