Содержание

1. Интегральное исчисление функций одной переменной

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.1.1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – *первообразная функции* f, если $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

Теорема 1.1.1. *Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.*

Доказательство. Позже. □

Замечание. $\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ – не имеет первообразной.

Пусть F – первообразная $\operatorname{sign} x$. Рассмотрим F на $[-1, 1]$:
$F'(-1) = \operatorname{sign}(-1) = -1$, $F'(1) = \operatorname{sign}(1) = 1$. По теореме Дарбу на $(-1, 1)$ функция F' принимает все значения между -1 и 1. Это не так.

Теорема 1.1.2. $f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *и* F *– первообразная* f*. Тогда:*

1. $F + C$ *– первообразная* f.
2. *Если* $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *– первообразная* f*, то* $\Phi = F + C$.

Доказательство.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \Phi - F = const$.

□

Определение 1.1.2. Множество всех первообразных функции f – *неопределенный интеграл.*
$\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R},\ F - \textit{первообразная } f\} = \{F \mid F - \text{первообразная } f\}$
Упрощенная запись: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Замечание. Для справедливости равенства достаточно показать, что $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1.1.1. Таблица интегралов:

1. $\int 0\ dx = C$.
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ при $p \neq 1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ при $a > 0$ и $a \neq 1$.

5. $\int \sin x \; dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x \; dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$.

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln|\frac{1+x}{1-x}| + C$.

Доказательство.

3. Если $x > 0 : \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

   Если $x < 0 : \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$

   $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$

11. $(\ln|x + \sqrt{x^2+1}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (x + \sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

12. $(\frac{1}{2} \ln|\frac{1+x}{1-x}|)' = (\frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{2} \ln|1-x|)' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$

$\square$

Теорема 1.1.3. ***Теорема об арифметических действиях с неопределенными интегралами***

$f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную. Тогда:

1. *$f + g$ имеет первообразную и $\int(f+g) = \int f + \int g$.*

2. *αf имеет первообразную и $\int(\alpha f) = \alpha \int f$, если $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

3. *Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.*

Доказательство.

1. Пусть F и G – первообразные f и g. Тогда $(F+G)' = F' + G' = f + g \Rightarrow F + G$ – первообразная для f и g.

2. $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f \Rightarrow \alpha F$ – первообразная для αf.

$\square$

Теорема 1.1.4. ***Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле***
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, φ дифференцируема, f имеет первообразную F. Тогда: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. $F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ □

Следствие. $\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C$

Пример. $\int \frac{t}{1+t^4}dt = \begin{bmatrix}\varphi(t) = t^2 \\ \varphi'(t) = 2t\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan(t^2) + C$

Теорема 1.1.5. ***Формула интегрирования по частям***
$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$; f, g диффиренцируемы, $f'g$ имеет первообразну. Тогда fg' имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$.

Доказательство. H – первообразная $f'g$. Надо доказать, что $\int fg' = fg - H + C$.
$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = f'g + fg' - fg' = f'g$ □

Пример. $\int \ln x\ dx = \begin{bmatrix}f(x) = \ln x \\ g(x) = \frac{1}{x}\end{bmatrix} = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\ dx = x \cdot \ln x - x + C$

1.2 Определенный интеграл

Определение 1.2.1. $\mathcal{F}$ – ограниченные множества на $\mathbb{R}^2$. $\sigma : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – *площадь*, если:

1. $\sigma(\mathcal{F}) \geq 0$.
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.
3. Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\sigma(F_1 \cup F_2) = \sigma(F_1) + \sigma(F_2)$.

Утверждение 1.2.1. Свойство площади:
Если $\tilde{F} \supset F$, то $\sigma(\tilde{F}) \geq \sigma(F)$.
$\sigma(\tilde{F}) = \sigma(F) + \underbrace{\sigma(\tilde{F} \setminus F))}_{\geq 0} \geq \sigma(F)$

Определение 1.2.2. $\sigma : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – *квазиплощадь*, если:

1. $\sigma(\mathcal{F}) \geq 0$.
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.
3. Если $F \subset \tilde{F}$, то $\sigma(F) \leq \sigma(\tilde{F})$.
4. Пусть l – горизонтальная или вертикальная прямая, F_- левее, F_+ правее и $F_- \cup F_+ = F$. Тогда $\sigma(F) = \sigma(F_-) + \sigma(F_+)$.

Утверждение 1.2.2. Свойства квазиплощади:

1. Если F – подмножество вертикального или горизонтального отрезка, то $\sigma(F) = 0$.

   Комментарий: следует из 2 и 3 пунктов, $\sigma(F) \leq \sigma(\text{отрезка}) = 0$.

2. В 4 не важно, где лежат точки с l.

   Комментарий: пусть Δ – множество отрезка. Тогда:

   $\sigma(F_- \setminus \Delta) = \sigma(F_- \cup \Delta)$

   $\sigma(F_- \cup \Delta) = \sigma(F_- \setminus \Delta) + \sigma(\Delta)$

Обозначение 1. P – прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$; $|P| = (d - c)(b - a)$.

Пример. Примеры квазиплощадей:

1. $\sigma_1(F) := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| \mid P_k$ – прямоугольник, $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k\}$

2. $\sigma_2(F) := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |P_k| \mid P_k$ – прямоугольник, $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

Замечание. $\sigma_1(F) \geq \sigma_2(F)$ (у большего множества инфимум меньше).

Теорема 1.2.1.

1. σ_1 – квазиплощадь.

2. σ_1 инвариантна относительно сдвига.

Доказательство.

2. Докажем, что $\sigma_1(F) = \sigma_1(F + a)$, где a – произвольный вектор.

   Действительно: $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \Leftrightarrow F + a \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (P_k + a)$

1. Проверим определение:

   1) $\sigma_1(F) \geq 0$ – очевидно (инфимум множества неотрицательных чисел).

   3) $\tilde{F} \supset F \Rightarrow \sigma(\tilde{F}) \geq \sigma(F)$
   $F \subset \tilde{F} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \Rightarrow F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \Rightarrow$ у F больше множество сумм $\Rightarrow \inf$ меньше.

   2) $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$, необходимо доказать $\leq$ и $\geq$.

   $\leq$: Поскольку прямоугольник покрывает сам себя.

$\geq$: Продлим каждую сторону каждого прямоугольника и получим разбиение на маленькие прямоугольники. Поскольку при подсчете $\sum\limits_{k=1}^{n}|P_k|$ площадь маленьких прямоугольников считается несколько раз, то $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \geq (d-c)(b-a) \Rightarrow \inf \geq (d-c)(b-a)$.

4) $\sigma_1(F) = \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+)$, необходимо доказать $\leq$ и $\geq$.

$\leq$: $F_- \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ и $F_+ \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$; $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$

$\sigma_1(F) \leq \sum\limits_{k=1}^{n}|P_k| + \sum\limits_{j=1}^{m}|Q_j|$

Зафиксируем Q_j. Если заменить $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k$ на $\inf$: $\sigma_1(F) \leq \sigma_1(F_-) + \sum\limits_{j=1}^{m}|Q_j| \xrightarrow{\text{тоже самое верно для inf}}$ $\sigma_1(F) \leq \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+)$

$\geq$: Берем $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$

Проведем вертикальную прямую l и обозначим $P_k^- + P_k^+ : P_k = P_k^- + P_k^+$, $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$.

$$\left.\begin{array}{l} F_- \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k^- \Rightarrow \sigma_1(F_-) \leq \sum\limits_{k=1}^{n}|P_k^-| \\ F_+ \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k^+ \Rightarrow \sigma_1(F_-) \leq \sum\limits_{k=1}^{n}|P_k^+| \end{array}\right. \Rightarrow \sigma_1(F_-)+\sigma_1(F_+) \leq \sum\limits_{k=1}^{n}|P_k^-|+\sum\limits_{k=1}^{n}|P_k^+| = \sum\limits_{k=1}^{n}|P_k| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma_1(F_-) + \sigma_1(F_+) \leq \sigma_1(F)$

$\square$

Определение 1.2.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда:

1. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$.
2. $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Утверждение 1.2.3. Свойства:

1. $f_+(x)$, $f_-(x) \geq 0$.
2. $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.
3. $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.
4. $f_+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}$, $f_-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$.
5. $f \in C[a,b]$, то $f_\pm \in C[a,b]$.

Определение 1.2.4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ неотрицательная; *подграфик* $\mathcal{P}_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Замечание. $\mathcal{P}_f$, $f \in C[a,b]$ – ограниченное множество.

Доказательство. $f \in C[a,b] \overset{\text{Б.-В.}}{\Rightarrow} f$ – ограниченная $\Rightarrow \mathcal{P}_f \subset [a,b] \times [m, M]$ (m – min; M – max). □

Определение 1.2.5. Зафиксируем σ – квазиплощадь и положим $\int\limits_a^b f := \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-})$ – *определенный интеграл.*

Утверждение 1.2.4. Свойства определенного интеграла:
Пусть f – непрерывная функция. Тогда:

1. $\int\limits_a^a f = 0$.

2. $\int\limits_a^b 0 = 0$.

3. Если $f \geq 0$, то $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_f)$.

   Комментарий: $f_- \equiv 0 \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) = 0$

4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$.

   Комментарий: $(-f)_+ = f_- \Rightarrow \mathcal{P}_{f_+} = \mathcal{P}_{(-f)_-}$

   $(-f)_- = f_+ \Rightarrow \mathcal{P}_{f_-} = \mathcal{P}_{(-f)_+}$

5. $\int\limits_a^b c = c \cdot (b - a)$

   Комментарий: если $c > 0$, то $\mathcal{P} = [a,b] \times [0,c]$.

6. Пусть $f \geq 0$ и $\int\limits_a^b f = 0$. Тогда $f \equiv 0$.

   Доказательство. От противного.

   Пусть $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \mathcal{P}_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_f) \geq |...| = \delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$?? □

1.3 Свойства интеграла

Теорема 1.3.1. ***Аддитивность интеграла***
$f \in C[a,b]$ и $c \in [a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

Обозначение 2. $\mathcal{P}_f(E) = \mathcal{P}_{f|_E}$

Доказательство. $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,b]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,b]) =$

$= \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,b]) = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,c]) + \sigma(\mathcal{P}_{f_+}[c,b])\Big) - \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,b]) = \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,c]) + \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[c,b])\Big) =$

$= \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[a,c]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[a,c])\Big) + \Big(\sigma(\mathcal{P}_{f_+}[c,b]) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}[c,b])\Big) = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$ □

Следствие. $f \in C[a,b]$, $a \le c_1 \le ... \le c_n \le b$. *Тогда* $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{c_1} f + ... + \int\limits_{c_n}^b f$.

Доказательство. Индукция. □

Теорема 1.3.2. ***Монотонность интеграла***

$f, g \in C[a,b]$, *если* $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b]$, *то* $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$.

Доказательство. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \le \max\{g(x), 0\} = g_+(x) \Rightarrow \mathcal{P}_{f_+} \subset \mathcal{P}_{g_+} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) \le \sigma(\mathcal{P}_{g_+})$

$f_-(x) \ge g_-(x) \Rightarrow \mathcal{P}_{f_-} \supset \mathcal{P}_{g_-} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \ge \sigma(\mathcal{P}_{g_-})$

Следовательно $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \le \sigma(\mathcal{P}_{g_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{g_-}) = \int\limits_a^b g$ □

Следствие.

1. $f \in C[a,b] \Rightarrow \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f \le (b-a) \cdot \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

2. $\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$.

Доказательство.

1. $m := \min f$, $M := \max f \Rightarrow m \le f(x) \le M\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow (b-a)\cdot m = \int\limits_a^b m \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b M = (b-a)\cdot M$

2. $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \Rightarrow -\int\limits_a^b |f| = \int\limits_a^b (-|f(x)|) \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

□

Теорема 1.3.3. ***Интегральная теорема о среднем***

$f \in C[a,b]$. *Тогда* $\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f = (b-a)\cdot f(c)$.

Доказательство. $m := \min f$, $M := \max f \Rightarrow m\cdot(b-a) \le \int\limits_a^b f \le M\cdot(b-a) \Rightarrow \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f \in [m, M]$

По теорема Больцано-Коши любое значение между m и M достигается $\Rightarrow \exists c \in [a,b] : \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f = f(c)$ □

Определение 1.3.1. *Среднее значение функции* на $[a,b]$ $I_f := \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f$.

Определение 1.3.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывная; $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) := \int\limits_a^x f$ называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Определение 1.3.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывная; $\Psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Psi(x) := \int\limits_x^b f$ называется *интегралом с переменным нижним пределом.*

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$

Теорема 1.3.4. ***Теорема Барроу***
Если $f \in C[a,b]$ и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$, то Φ − первообразная f.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = f(x)$.
Проверим для предела справа $y > x$.
$R(y) := \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x} \cdot \left(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f \right) = \frac{1}{y-x} \cdot \int\limits_x^y f \overset{\text{по th о среднем}}{=} f(c)$, где $x < c < y$ (c зависит от y).
Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x} R(y) = f(x)$. Берем последовательность $y_n \underset{y_n > x}{\to} x$.
$R(y_n) = f(c_n)$, где $x < c_n < y_n$, но $c_n \to x$ и f непрерывна в точке $x \Rightarrow R(y_n) = f(c_n) \to f(c) \Rightarrow \lim\limits_{y\to x} R(y) = f(x)$. □

Следствие.

1. $\Psi'(x) = -f(x)$.

   Доказательство. $\Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) = const - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$. □

2. *Если $f \in C(\langle a,b\rangle)$, то у f есть первообразная.*

   Доказательство. Возьмем $c \in (a,b)$ и определим $F(x) := \begin{cases} \int\limits_c^x f, & \text{если } x \geq c \\ -\int\limits_x^c f, & \text{если } x \leq c \end{cases}$. □

Теорема 1.3.5. ***Формула Ньютона-Лейбница***
Если $f \in C[a,b]$, F – первообразная f, то $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) := \int\limits_a^x f$ − первообразная f и все первообразные отличаются друг на друга на контанту $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \begin{matrix} \int\limits_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C \\ 0 = \Phi(a) = F(a) + C \end{matrix} \Rightarrow \int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$. □

Обозначение 3. $\int\limits_a^b f = F\big|_a^b := F(b) - F(a)$.

Теорема 1.3.6. ***Линейность интеграла***

$f, g \in C[a,b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Доказательство. Знаем, что если F и G – первообразные f и g, то $\alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g \Rightarrow \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)\big|_a^b = \alpha F\big|_a^b + \beta G\big|_a^b = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$ □

Теорема 1.3.7. ***Формула интегрирования по частям***

$u, v \in C^1[a,b]$. *Тогда:* $\int\limits_a^b uv' = uv\big|_a^b - \int\limits_a^b u'v$.

Доказательство. Знаем, что если H – первообразная $u'v$, то $uv - H$ – первообразная для uv'.

$\int\limits_a^b uv' = (uv - H)\big|_a^b = uv\big|_a^b - H\big|_a^b = uv\big|_a^b - \int\limits_a^b u'v$ □

Теорема 1.3.8. ***Теорема о замене переменной в определенном интеграле***

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a,b\rangle)$; $\varphi : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$, $\varphi \in C^1(\langle a,b\rangle)$; $p, q \in \langle c,d\rangle$. *Тогда* $\int\limits_p^q f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$.

Соглашение: *если* $a > b$, *то* $\int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$.

Доказательство. Пусть F – первообразная для f. Тогда $F \circ \varphi$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F \circ \varphi\big|_q^p = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F\big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$. □

Пример. $\int\limits_1^3 \frac{x}{1+x^4}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_1^9 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t\Big|_1^9 = \frac{1}{2}(\arctan 9 - \arctan 1)$

1.4 Приложения формулы интегрирования по частям

Пример. $W_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$

Доказательство. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$, $\varphi(t) := \frac{\pi}{2} - t$, $\varphi'(t) = -1$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = -\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x\ dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n x\ dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx$ □

Утверждение 1.4.1. $W_0 \geq W_1 \geq ... \geq W_n$

Доказательство. Индукция.

База: $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = -\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Переход: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx = \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x & u' = (n-1)\cdot\sin^{n-2} x \cdot \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} uv' = uv\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\ dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)dx = (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\ dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx\right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$

$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow W_n = \frac{n-1}{n} \cdot W_{n-2}$ □

Следствие. $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot W_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

Теорема 1.4.1. ***Формула Валлиса***

$\lim \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство. $W_{2n+2} \le W_{2n+1} \le W_{2n}$

$W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ и $W_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \ \Big| : \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$\frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ □

Следствие. $C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство. $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(n!)^2} = [(2n)!! = 2^n \cdot n!] = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2} \cdot 4^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n$

$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \underbrace{\sqrt{2n+1}}_{<\sqrt{2n}} \sim \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ □

Теорема 1.4.2. ***Формула Тейлора с остатком в интегральной формуле***

$f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle)$. *Тогда* $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{:=T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}_{:=R_n(x)}$, $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$.

Доказательство. Индукция по n.

База $n = 0$: $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt$

Переход $n \to n+1$: $f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

$n! \cdot R_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \begin{bmatrix} u = f^{(n+1)}(t) & u' = f^{(n+2)}(t) \\ v' = (x-t)^n & v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix} = uv\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} u'v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} (-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{n+1}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt}_{R_{n+1}(x)}$ □

Пример. $H_j := \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos dx$

Утверждение 1.4.2. Свойства:

1. $0 < H_j \le \frac{1}{j!} \cdot \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2})^{2j} \cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$.

2. Если $c > 0$, то $c^j H_j \to 0$

   Комментарий: $0 < c^j H_j < \frac{((\frac{\pi}{2})^2 c)^j}{j!} \to 0$.

3. $H_0 = 1$, $H_1 = 2$.

4. $H_j = (4j-2) \cdot H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.

   $$j!H_j = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^j (\sin x)' dx = \underbrace{((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} dx =$$

   $$= 2j \cdot \underbrace{(((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \cdot x(-\cos x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \cdot \cos x \; dx -$$

   $$-2(j-1) \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} \underbrace{x^2}_{(\frac{\pi}{2})^2 - ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)} \cos x \; dx =$$

   $$= 2j((j-1)! \cdot H_{j-1} - 2(j-1)(\tfrac{\pi}{2})^2 (j-2)! \cdot H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)! \cdot H_{j-1}) =$$

   $$= 2j! \cdot H_{j-1} - \pi^2 j! \cdot H_{j-2} + 4j!(j-1) \cdot H_{j-1} = j!((4j-2) \cdot H_{j-1} - \pi^2 \cdot H_{j-2})$$

5. Существует многочлен P_j степени $\leq j$ с целыми коэффициентами, для которого $H_j := P_j(\pi^2)$.

   Доказательство. $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv 2$, $P_j(x) = (4j-2) \cdot P_{j-1}(x) - x \cdot P_{j-2}(x)$ – подходит. □

Теорема 1.4.3. ***Теорема Ламберта***
π и π^2 иррациональны.

Доказательство. (Эрмит)
От противного. Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое}}{n^j}$
$n^j H_j \geq 1$ (это положительное целое). Но $n^j H_j \to 0$ (по свойству 2) ?? □

д

1.5 Интегральные суммы

Определение 1.5.1. $f : E \to \mathbb{R}$; f *равномерно непрерывна*, если:
$\forall \varepsilon > 0 \underset{=\delta(\varepsilon)}{\exists \delta} > 0 : \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Замечание. $f : E \to \mathbb{R}$; f *непрерывна во всех точках*, если:
$\forall x \in E \; \forall \varepsilon > 0 \underset{=\delta(x,\varepsilon)}{\exists \delta} > 0 : \forall y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Утверждение 1.5.1. $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\Rightarrow$ f непрерывна на E.

Пример.

0. $f(x) = x$.

1. $f(x) = \sin x$ – равномерно непрерывна на $\mathbb{R}: |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $\delta = \varepsilon$ подходит.

2. $f: E \to \mathbb{R}$ *липшицева с константой* L, если $\forall x, y \in E: |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$.

   f равномерно непрерывна на $E:\ \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ подходит.

3. $f(x) = x^2$ – <u>не</u> равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

   Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

   $y = x + \frac{\delta}{2}$, $|x - y| < \delta$; $f(x) - f(y) = y^2 - x^2 = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta > 1$ при $x > \frac{1}{\delta}$.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$ – <u>не</u> равномерно непрерывна.

   Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

   $y = \frac{\delta}{2}$ и $x = \delta$, $|x - y| < \delta$; $f(y) - f(x) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$ при $\delta < 1$ не подходит.

   Если $\delta \geq 1$, то $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$, то $f(y) - f(x) = 1$.

Теорема 1.5.1. ***Теорема Кантора***
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна во всех точках. Тогда* f *равномерно непрерывна на* $[a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит.
В частности, $\delta = 1$ не подходит $\Rightarrow \exists x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < \delta$ и $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$
$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_2, y_2 \in [a, b] : |x_2 - y_2| < \delta$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$
...
$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \delta$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
x_n – ограниченная последовательность $\overset{\text{th Б.-В.}}{\Rightarrow}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$
$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow c \in [a, b]$ f непрерывна в $c \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(c)$
$c \leftarrow x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \to c \Rightarrow y_{n_k} \to c \Rightarrow f(y_{n_k}) \to f(c)$
Тогда $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to f(c) - f(c) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, получили противоречие. □

Определение 1.5.2. $f: E \to \mathbb{R}$; $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in E \text{ и } |x - y| < \delta\}$ для $\delta \geq 0$.
$\omega_f(\delta)$ – *модуль непрерывности.*

Утверждение 1.5.2. Свойства:

1. $\omega_f(0) = 0$.

2. $\omega_f \geq 0$.

3. ω_f нестрого возрастает.

4. $|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x-y|)$.

5. Если f липшицева с константой L, то $\omega_f(\delta) \le L\delta$.

   Комментарий: ($|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \le L\delta$, если $|x-y| \le \delta$; то есть все числа (и sup в том числе) не превышают $L\delta$)

6. f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \omega_f$ непрерывна в нуле (то есть $\lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$).

   Доказательство. $\Rightarrow$: f равномерно непрерывна. Возьмем $\varepsilon > 0$, для него:

   $\exists \delta > 0\ \forall x, y \in E : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

   Тогда если $|x-y| \le \frac{\delta}{2}$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) \le \varepsilon \Rightarrow w_f(\alpha) \le \varepsilon\ \forall \alpha < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$.

   $\Leftarrow$: Возьмем $\varepsilon > 0$ и такую $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ если $|x-y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

7. $f \in C[a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$.

   Комментарий: $\Rightarrow$: th Кантора; $\Leftarrow$: 6 свойство.

Определение 1.5.3. $[a,b]:\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b;\ \tau = \{x_0, ..., x_n\}$
τ – *дробление (разбиение, пунктир)* отрезка $[a,b]$.

Определение 1.5.4. *Ранг дробления* $|\tau| := \max\{x_1 - x_0, ..., x_n - x_{n-1}\}$ (самый длинный отрезок дробления).

Определение 1.5.5. *Оснащение дробления* $\xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\ \forall k$.

Определение 1.5.6. *Интегральная сумма (сумма Римана)*: $S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Теорема 1.5.2. ***Теорема об интегральных суммах***
$f \in C[a,b]$. Тогда $\left| \int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \le (b-a) \cdot \omega_f(|\tau|)$.

Доказательство. $\Delta := \int\limits_a^b f - S(f,\tau,\xi) = \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f(t) - f(\xi_k) \Big)\, dt$

$|\Delta| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{\Big| f(t) - f(\xi_k) \Big|}_{\le \omega_f(x_k - x_{k-1}) \le \omega_f(|\tau|)} dt \le \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) = \omega_f(|\tau|) \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b-a)$. □

Следствие.

1. *$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ дробления ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения:* $\left| \int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$.

2. τ_n – последовательность дроблений, т.ч. если $|\tau_n| \to 0$, то $S(f,\tau,\xi) \to \int\limits_a^b f$.

Пример. $S_p(n) := 1^p + 2^p + ... + n^p$, $p \geq 0$
Хотим посчитать $\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.
Возьмем непрерывную $f(x) = x^p$ и воспользуемся теоремой для нее:
$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^p} = [x_k = \frac{k}{n},\ [a,b] = [0,1],\ x_k - x_{k+1} = \frac{1}{n},\ \xi_k = x_k] = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = S(f,\tau,\xi) \to \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$

Определение 1.5.7. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f – *интегрируема по Риману* и I – ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ $\forall$ дробления ранга $< \delta$ и $\forall$ оснащения $\Big|S(f,\tau,\xi) - I\Big| < \varepsilon$.

Замечание. Любая непрерывная функция – такая.

Замечание. Берем дробления на равные отрезки $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n}$ и $\xi_k = x_k$:
$S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \to \int\limits_a^b$
Теперь рассмотрим $\xi'_k = x_{k-1}$:
$S(f,\tau,\xi') = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) \to \int\limits_a^b$
Сумма площадей трапеций:
$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k))}{2} = \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_n)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$

Лемма 1.5.1. $f \in C^2[\alpha,\beta]$. Тогда $\Delta := \int\limits_\alpha^\beta f - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)dt$.

Доказательство. $\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$
$\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'dt = \underbrace{f(t)(t-\gamma)|_\alpha^\beta}_{f(\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} - f(\alpha)\cdot(-\frac{\beta-\alpha}{2}) = \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt$
Рассмотрим $((t-\alpha)(\beta-t))' = (-t^2 + (\beta+\alpha)t - \alpha\beta)' = -2t + (\beta+\alpha) = -2(t-\gamma)$
$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'dt = \underbrace{\frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta}_{0} - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)dt$ □

Теорема 1.5.3. ***Оценка погрешности в формуле трапеций***
$f \in C^2[a,b]$. Тогда $\left|\int\limits_\alpha^\beta f - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leq \frac{|\tau|^2}{8}\cdot\int\limits_\alpha^\beta |f''|$.

Доказательство. $\Delta = \int\limits_\alpha^\beta - \sum\limits_{k=1}^{n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}\cdot(x_k - x_{k-1})\right) = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)dt$
$|\Delta| \leq \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f''(t)|(t-x_{k-1})(x_k-t)dt \overset{(*)}{\leq} \frac{|\tau|^2}{8}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f''(t)|dt = \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b|f''(t)|dt$
$(*)$ $(t-x_{k-1})(x_k-t) \leq (\frac{x_k-x_{k-1}}{2})^2 = \frac{1}{4}(x_k-x_{k-1})^2 \leq \frac{|\tau|^2}{4}$ □

Теорема 1.5.4. ***Формула Эйлера-Маклорена для второй производной***
$f \in C^2[m,n]$. Тогда $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt.$

Доказательство. $\int\limits_{k-1}^{k} f(t)dt - \frac{f(k-1)+f(k)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_{k-1}^{k} f''(t)\underbrace{(t-(k-1))}_{\{t\}}\underbrace{(k-t)}_{1-\{t\}}dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{k-1}^{k} f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt$

Суммирование по k от $m+1$ до n: $\underbrace{\sum\limits_{k=m+1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k} f(t)dt}_{\int\limits_m^n f(t)dt} - \underbrace{\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{f(k-1)+f(k)}{2}}_{\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \frac{f(m)+f(n)}{2}} =$

$= -\frac{1}{2}\underbrace{\sum\limits_{k=m+1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k} f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt}_{\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt}$ □

Пример.

1. $S_p(n) := 1^p + 2^p + ... + n^p$, $f(t) = t^p$, $p > -1$, $m = 1$, $n = n$, $f''(t) = p(p-1)\cdot t^{p-2}$

   $S_p(n) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int\limits_1^n f(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_1^n f''(t)\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt = \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \underbrace{\int\limits_1^n t^p dt}_{=\frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2})\{t\}(1-\{t\})dt$

   - Случай $p \in (-1,1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$

     $0 < \int\limits_1^n t^{p-2}\underbrace{\{t\}(1-\{t\})}_{\le\frac{1}{4}}dt \le \frac{1}{4}\underbrace{\int\limits_1^n t^{p-2}dt}_{=\frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} < \frac{1}{1-p}}$, то есть интеграл оценивается константой

   - Случай $p > (-1,1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + o(n^{p-1})$

     $0 < \int\limits_1^n t^{p-2}\cdot\{t\}\cdot(1-\{t\})dt \le \frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \frac{n^{p-1}-1}{p-1}$

2. *Гармонические числа* $H_n := 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

   $f(t) = \frac{1}{t}$, $m = 1$, $n = n$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

   $$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int\limits_1^n \frac{dt}{t}}_{\ln t|_1^n = \ln n} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2\{t\}(1-\{t\})}{t^3}dt}_{:=a_n}$$

   $H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n$

a_n – возрастающая последовательность; $a_n \leq \int\limits_1^n \frac{1}{4}\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2t^2})\Big|_1^n = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}) \leq \frac{1}{8}$

a_n возрастающая и ограниченная $\Rightarrow \exists \lim a_n = a \leq \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$

$H_n = \ln n + \underbrace{(a + \frac{1}{2})}_{=:\gamma} + o(1)$

γ – *постоянная Эйлера*, $\gamma \approx 0,5772156649...$

3. Формула Стирлинга: $n! \sim n^n \cdot e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

   $\ln n! = \sum\limits_{k=1}^n \ln k,\ f(t) = \ln t,\ f''(t) = -\frac{1}{t^2},\ m = 1,\ n = n$

   $$\ln n! = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2}\ln n} + \underbrace{\int\limits_1^n \ln t\ dt}_{=n\cdot\ln n - n + 1(*)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt}_{=:b_n} \Rightarrow$$

   $(*) \int\limits_1^n \ln t\ dt = t \cdot \ln t\ |_1^n - \int\limits_1^n t\frac{1}{t}dt = n \cdot \ln n - n + 1$

   $\Rightarrow \ln n! = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - b_n$

   b_n – возрастающая последовательность: $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}\int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt > 0$

   b_n – ограниченная последовательность: $b_n \leq \frac{1}{8}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8}(-\frac{1}{t})\ |_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8}$

   Тогда существует $\lim b_n = b$ и $b_n = b + o(1)$.

   $\ln n! = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - b + o(1) \Rightarrow n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot e^{1-b} \cdot \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1)\sim 1} \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot C$

   Найдем C. Рассмотрим $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot C}{(n^n \cdot e^{-n}\sqrt{n} \cdot C)^2} = \frac{2^{2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot C}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot C^2} = \frac{4^n \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot C}$

   Тогда $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot C} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{2}}{C} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$

1.6 Несобственные интегралы

Определение 1.6.1. $-\infty < a < b \leq +\infty,\ f \in C[a, b)$. Тогда *несобственный интеграл*:
$\int\limits_a^{\to b} f := \lim\limits_{B \to b_-} \int\limits_a^B f$, если предел существует.

Определение 1.6.2. $-\infty \leq a < b < +\infty,\ f \in C(a, b]$. Тогда *несобственный интеграл*:
$\int\limits_{\to a}^b f := \lim\limits_{A \to a_+} \int\limits_A^b f$, если предел существует.

Определение 1.6.3. Если предел существует и конечен, то соответствующий интеграл назовем *сходящимся*. В остальных случаях назовем интеграл *расходящимся*.

Замечание.

1. Если $b \neq +\infty$ и $f \in C[a,b]$, то $\int\limits_a^{\to b} f = \int\limits_a^b f$.

   Комментарий: $\int\limits_a^{\to b} f = \lim\limits_{B \to b_-} \int\limits_a^b f$, $\left| \int\limits_a^b - \int\limits_a^B \right| = \left| \int\limits_B^b \right| \leq (b-B) \cdot M$, где $M\ - \max |f|$.

2. Если f имеет первообразную F в $[a,b)$, то $\int\limits_a^{\to b} = \lim\limits_{B \to b_-} F(b) - F(a)$.

   Комментарий: $\int\limits_a^B = F(B) - F(a)$ и написать пределы.

Теорема 1.6.1. ***Критерий Коши для несобственных интегралов***
$-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C[a,b)$. *Тогда* $\int\limits_a^{\to b} f$ *сходится* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists c \in (a,b)$:
$\forall A, B \in (c,b)\ \left| \int\limits_A^B f \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ – первообразная f. Тогда $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim\limits_{B \to b_-} F(b)$.
Если $b \neq +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A, B \in (\underbrace{b-\delta}_{=c}, b)\ \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{=\int\limits_A^B} < \varepsilon$

Если $b = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists E\ \forall A, B \supset \underbrace{E}_{=c}\ \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{=\int\limits_A^B} < \varepsilon$ □

Замечание. Если $\exists A_n,\ B_n \in [a,b)$, т.ч. $A_n,\ B_n \to b$ и $\underbrace{\int\limits_{A_n}^{B_n} f}_{:=C_n} \not\to 0$, то $\int\limits_a^{\to b} f$ расходится.

Комментарий: Найдется подпоследовательность C_{n_k}, т.ч. $|C_{n_k}| > \varepsilon \Rightarrow \left| \int\limits_{B_n}^{A_n} f \right| \geq \varepsilon$?! (противоречие с критерием Коши).

Пример.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) - F(1)$, где $F(x)$ – первообразная $\frac{1}{x^p}$.

   Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

   Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1) \cdot x^{p-1}}$ и тогда:

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty, & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл расходится} \end{cases}$$

   Итог: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p > 1$ и в этом случае $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = F(1) - \lim\limits_{x\to 0_+} F(x)$, где $F(x)$ — первообразная $\frac{1}{x^p}$.

   Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

   Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1)\cdot x^{p-1}}$ и тогда:

   $$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^{p-1}} = \lim_{x\to 0_+} x^{1-p} = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty, & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл расходится} \end{cases}$$

   Итог: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p < 1$ и в этом случае $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

Определение 1.6.4. *f непрерывно на* $[a, b]$ за исключением точек $c_1, ..., c_n$.
Рассмотрим $\int\limits_a^{d_1} f,\ \int\limits_{d_1}^{c_1} f,\ \int\limits_{c_1}^{d_2} f, ..., \int\limits_{d_{n+1}}^{b} f$.

Если все интегралы сходятся, то и несобственный $\int\limits_a^b f$ сходится и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{d_1} f + \int\limits_{d_1}^{c_1} f + \int\limits_{c_1}^{d_2} f + ... + \int\limits_{d_{n+1}}^{b} f$.

В противном случае интеграл расходится.

Утверждение 1.6.1. Свойства несобственных интегралов:

1. **Аддитивность**

   $c \in (a, b)$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_c^b f$ сходится и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

   Доказательство. F — первообразная f; $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b_-} F(b) - F(a)$

   Сходимость $\int\limits_a^b f \Leftrightarrow \lim\limits_{B\to b_-} F(b)$ существует и конечен.

   $$\int\limits_c^b f = \lim_{B\to b_-} F(b) - F(c) = \int\limits_a^b f - \underbrace{(F(c) - F(a))}_{\int\limits_a^c f}$$ ☐

2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c\to b_-} \int_c^b f = 0$.

   Доказательство. $$\int\limits_a^b f = \underbrace{\int\limits_a^c f}_{\to \int\limits_a^b f} + \int\limits_c^b f \Rightarrow \int\limits_c^b \to 0$$ ☐

3. **Линейность**

   Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Доказательство. F и G – первообразные для f и g; по условию $\lim\limits_{B\to b_-} F(B)$ и $\lim\limits_{B\to b_-} G(B)$ существуют и конечные $\Rightarrow \alpha F+\beta G$ – первообразные для $\alpha f+\beta g$ и $\lim\limits_{B\to b_-}(\alpha\cdot F(B)+\beta\cdot G(B)) = \alpha\lim\limits_{B\to b_-} F(B)+\beta\lim\limits_{B\to b_-} G(B) \Rightarrow \int\limits_a^b(\alpha f+\beta g)$ сходится

и $\int\limits_a^b(\alpha f+\beta g) = \alpha\lim\limits_{B\to b_-} F(B)+\beta\lim\limits_{B\to b_-} G(B)-\alpha\cdot F(A)-\beta\cdot G(A) = \alpha\cdot\int\limits_a^b f+\beta\cdot\int\limits_a^b g$ □

Замечание. Если $\int\limits_a^b f$ сходится и $\int\limits_a^b g$ расходится, то $\int\limits_a^b(f+g)$ расходится.

Комментарий: $g=(f+g)-f$

4. **Монотонность**

   Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и $f\le g$ во всех точках от a до b, то $\int\limits_a^b f\le\int\limits_a^b g$.

   Доказательство. $\int\limits_a^B f\le\int\limits_a^B g$ и перейти к пределу. □

5. **Формула интегрирования по частям**

   Если $f,g\in C^1[a,b)$, то $\int\limits_a^b fg' = fg\,\Big|_a^{b\leftarrow\text{тут предел}} - \int\limits_a^b f'g$.

   Если существует два конечных предела, то существует и третий и есть равенство.

   Доказательство. $\int\limits_a^B fg' = fg\,\Big|_a^B - \int\limits_a^B f'g$ и перейти к пределу. □

6. **Замена переменной**

   $\varphi:[\alpha,\beta)\to[a,b)$ $\varphi\in C^{-1}[\alpha,\beta)$, $\exists\lim\limits_{\gamma\to\beta_-}\varphi(\gamma)=:\varphi(\beta_-)$, $f\in C[a,b)$, тогда:

   $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x)dx$

   (если существует один $\int$, то существует и другой и они равны).

   Доказательство. $F(y) := \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{y} f(x)dx$, $\Phi(\gamma) := \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, $\Phi(\gamma)=F(\varphi(\gamma))$ при $\alpha<\gamma<\beta$.

   Далее рассмотрим следующие случаи:

   I. Если $\exists\lim\limits_{y\to\varphi(\beta_-)} F(y)$.

      Возьмем $\gamma_n\nearrow\beta\Rightarrow\varphi(\gamma_n)\to\varphi(\beta_-)\Rightarrow\int\limits_\alpha^{\gamma_n} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\Phi(\gamma_n)=F(\varphi(\gamma_n)) = \lim\limits_{y\to\varphi(\beta_-)} F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x)dx$

II. Если $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta_-} \Phi(\gamma)$.

Проверим, что $\exists \lim\limits_{y\to\varphi(\beta_-)} F(y)$.

При $\varphi(\beta_-) < b$ очевидно, поскольку $F \in C[a, b)$. Пусть $\varphi(\beta_-) = b$. Возьмем $b_n \nearrow b$. Считаем, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta)$ т.ч. $\varphi(\gamma_n) = b_n$.

Докажем, что $\gamma_n \to \beta$.

От противного. Найдется $\gamma_{n_k} \to \tilde{\beta} < \beta \Rightarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\tilde{\beta}) < b$ (φ непрерывна в $\tilde{\beta}$). Противоречие с тем, что $b_n \to b$. Следовательно, $\gamma_n \to \beta$.

$F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n)$ имеет предел $\overset{\text{по Гейне}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{y\to b_-} F(y)$

$\square$

Замечание. $\int\limits_a^b f$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ сводится к $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt$.

Теорема 1.6.2. *Пусть $f \in C[a, b]$ и $f \geq 0$. Тогда сходимость $\int\limits_a^b f$ равносильна ограниченности сверху функции $F(y) := \int\limits_a^y f$.*

Доказательство. Если $f \geq 0$, то F – возрастающая функция: $F(y) - F(x) = \int\limits_x^y f \geq 0$

$\int\limits_a^b f$ – сходится $\Leftrightarrow \lim\limits_{y\to b_-} F(y)$ существует и конечен, а так как F возрастает, то это равносильно ограниченности F сверху. $\square$

Следствие. *Признак сравнения*

$f, g \in C[a, b)$, $f, g \geq 0$ и $f \leq g$, тогда:

1. *Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.*

2. *Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.*

Доказательство. F и G первообразные. Знаем, что $F(x) \leq G(x)$: $F(x) = \int\limits_a^x f \leq \int\limits_a^x g = G(x)$.

Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то G ограничена сверху $\Rightarrow F$ ограничена сверху $\overset{\text{по th}}{\Rightarrow} \int\limits_a^b f$ сходится.
Второй пункт = отрицание первого. $\square$

Замечание.

1. Неравенство $f \leq g$ может выполняться лишь при аргументах, близких к b.

2. Неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

3. Если $f \in C[a, +\infty)$, $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходящийся.

Следствие. *Пусть $f, g \in C[a, b)$ $f, g \geq 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b_-$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).*

Доказательство. $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x) \to 1 \Rightarrow$ при x близких к b; $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x) \leq 2g(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int\limits_a^b g \text{ сходящийся, то и } \int\limits_a^b f \text{ сходящийся} \\ g(x) \leq 2f(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int\limits_a^b f \text{ сходящийся, то и } \int\limits_a^b g \text{ сходящийся} \end{cases}$$ □

Замечание. Если $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходящийся и $f \geq 0$, то необязательно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$

Определение 1.6.5. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна. $\int\limits_a^b f$ называется *абсолютно сходящимся*, если $\int\limits_a^b |f| < +\infty$.

Теорема 1.6.3. *Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходящийся, то он сходится.*

Доказательство. $|f| = f_+ + f_-$, $f_\pm \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f_\pm \leq |f| \Rightarrow \int\limits_a^b f_\pm$ – сходящийся $\Rightarrow \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ + \int\limits_a^b f_-$ – сходящийся. □

Теорема 1.6.4. ***Признак Дирихле***

$$f, g \in C[a, +\infty) \begin{cases} 1)\ f \text{ имеет ограниченную первообразную.} \\ 2)\ g \text{ монотонна.} \\ 3)\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0. \end{cases} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство. Только для $g \in C^1[a, +\infty)$.
$F(y) := \int\limits_a^y f(x)g(x)dx$ – ограниченная функция, $|F(y)| \leq M$.
$\int\limits_a^y f(x)g(x)dx = \int\limits_a^y F'(x)g(x)dx = F(x)g(x)|_a^y - \int\limits_a^y F(x)g'(x)dx$
$F(y)g(y) \underset{y\to+\infty}{\to} 0$ (ограниченная на бесконечно малую) $\Rightarrow$ надо доказать, что $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходящийся.
$\int\limits_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|dx \leq M \int\limits_a^{+\infty} |g'(x)|dx = M\left|\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx\right| = M|\ g(x)|_a^{+\infty}\ | = M|g(a)| < +\infty$ □

Теорема 1.6.5. ***Признак Абеля***

$$f,g\in C[a,+\infty)\begin{cases}1)\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится.}\\ 2)\ g \text{ монотонна на } [a,+\infty).\\ 3)\ g \text{ ограничена на } [a,+\infty).\end{cases} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство. Пусть $b := \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\in\mathbb{R}$; $\tilde{g}(x) := g(x)-b$ – монотонна и $\lim\limits_{x\to+\infty}\tilde{g}(x)=0$.
$F(y) := \int\limits_a^y f(x)dx$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\in\mathbb{R} \Rightarrow F(y)$ ограничена при больших $y \Rightarrow F$ – ограниченная функция.

Тогда f и $\tilde{g}$ удовлетворяют признаку Дирихле $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx}_{\text{доказали, что сходится}} + \underbrace{b\cdot\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx}_{\text{сходится по условию}} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}\qquad\square$$

Следствие. *$f,g\in C[a,+\infty)$, f периодична с периодом T, g монотонна, $g(x)\underset{x\to+\infty}{\to} 0$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ – сходится $\Leftrightarrow \int\limits_a^{a+T} f(x)dx = 0$.*

Доказательство. $\Leftarrow$: $F(y) := \int\limits_a^y f(x)dx$ – периодична с периодом T. $F(y+T) = F(y) + \underbrace{\int\limits_y^{y+T} f(x)dx}_{=0} \Rightarrow$ все значения F принимает на $[a,a+T]$, а там она ограничена по th В. $\Rightarrow$ можно применить принцип Дирихле.

$\Rightarrow$: от противного.

Пусть $b := \int\limits_a^{a+T} f(x)dx \neq 0$. Расссмотрим $\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{b}{T} \Rightarrow \int\limits_a^{a+T}\tilde{f}(x)dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty}\tilde{f}(x)g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int\limits_a^{+\infty}\tilde{f}(x)g(x)dx}_{\text{сходится}} = \frac{b}{T}\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится. Противоречие. $\square$

Пример. $\int\limits_p^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$

1. Если $p>1$: $|\frac{\sin x}{x^p}| \le \frac{1}{x^p}$, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ сходится при $p>1 \Rightarrow$ абсолютно сходящийся.

2. Если $0<p\le 1$: $\int\limits_1^{+\infty}$ – расходится $\frac{1}{x_p}\searrow$ при $x\to+\infty$.

   $\int\limits_0^{2\pi}\sin x dx = 0 \overset{\text{по следствию}}{\Rightarrow} \int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}$ сходится.

$\int\limits_0^{2\pi} |\sin x| dx > 0 \Rightarrow \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}$ расходится.

Т.е. сходится, но не абсолютно.

3. Если $p \leq 0$: $a_n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $b_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$ при $x \in [a_n, b_n]$

   $\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^p} dx \geq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = frac12 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ т.е. сколь угодно далеко есть отрезок с $\int = \frac{\pi}{3}$.

   Противоречие с критерием Коши: $\int\limits_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \underbrace{\varepsilon}_{=\frac{\pi}{3}} > 0 \ \exists B \ \forall \underbrace{a}_{=a_n}, \underbrace{b}_{=b_n} > B \ |\int\limits_a^b f(x) dx| < \varepsilon$

2. Метрические пространства

2.1 Метрические и нормированные пространства

Определение 2.1.1.

$\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ − *метрика* (*расстояние*), если:

1. $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall x, y \in X$.

3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \ \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Определение 2.1.2. Пара (X, ρ) – это *метрическое пространство.*

Пример.

1. Дискретная метрика: $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$.

2. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

3. $X = \mathbb{R}^2$, расстояние на плоскости.

4. *Манхэттеновская метрика:* $X = \mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 + y_2|$

5. $\mathbb{R}^d = (x_1, \ ..., \ x_d)$.

   $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_d - y_d)^2} \ ^*$ (на самом деле, даже p-ая степень и корень p-ой степени подойдет)

   *Неравенство треугольника в этом случае − это неравенство Минковского.

6. $X = C[a,b]$ $\rho(f,g) = \int\limits_a^b |f-g|$.

7. *Французская железнодорожная метрика:* $\rho(A,B) = AB$, если A и B на одной прямой и $\rho(AB) = AP + PB$ иначе.

Определение 2.1.3. (X,ρ) – *метрическое пространство*, $a \in X$, $r > 0$.
Открытый шар $B_r(a) := \{x \in X \mid \rho(x,a) < r\}$.
Замкнутый шар $\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid \rho(x,a) \leq r\}$.
a – центр шара, r – радиус шара.

Утверждение 2.1.1. Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$.

2. Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 : \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \varnothing$.

Доказательство. $r := \frac{\rho(a,b)}{3} > 0$. Предположим, что $x \in \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) \Rightarrow \begin{matrix}\rho(x,a) \leq r\\ \rho(x,b) \leq r\end{matrix} \Rightarrow \rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) \leq r + r = \frac{2}{3}\rho(a,b)$, противоречие. □

Определение 2.1.4. $A \subset X$; A – *открытое множество*, если $\forall a \in A$ найдется $B_r(a) \subset A$.

Теорема 2.1.1. ***О свойствах открытых множеств***

1. *$\varnothing$ и X – открытые множества.*

2. *Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество.*

3. *Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество.*

4. *$B_R(a)$ – открытое множество.*

Замечание. В третьем конечность существенна: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-1, \frac{1}{n}) = (-1, 0]$.

Доказательство.

2. A_α – открытые множества, $\alpha \in I$. Проверим, что $U := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A$ – открытое.

   Возьмем $a \in U \Rightarrow$ найдется $\alpha_0 : a \in A_{\alpha_0}$ – открытое $\Rightarrow$ найдется $r > 0 : B_r(a) \subset A_{\alpha_0} \subset U$.

3. $A_1, ..., A_n$ – открытые множества. Проверим, что $U := \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ – открытое.

   Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in A_k$ $k = 1, ..., n$ – открытое $\Rightarrow$ найдется такое $r_k : B_{r_k}(a) \subset A_k$.

   $r := \min\{r_1, ..., r_k\} > 0 \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k$ $\forall k = 1, ..., n \Rightarrow B_r(a) \subset U$.

4. $B_R(a)$ – открытый шар; $r := R - \rho(a,x)$ и покажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$.

   Возьмем $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(x,y) < r \Rightarrow \rho(y,a) \leq \rho(y,x) + \rho(x,a) < r + \rho(x,a) = R$.

$\square$

Определение 2.1.5. $A \subset X$, $a \in A$; a – *внутренняя точка* A, если найдется $r > 0 :\ B_r(a) \subset A$.

Замечание. A – открытое множество $\Leftrightarrow$ всего его точки внутренние.

Определение 2.1.6. $\operatorname{Int} A$ – *внутренность множества* A – множество всех внутренних точек.

Замечание. Если A – открытое множество, то $\operatorname{Int} A = A$.

Утверждение 2.1.2. Свойства внутренности:

1. $\operatorname{Int} A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A.

2. $\operatorname{Int} A$ – открытое множество.

3. A –открыто $\Leftrightarrow \operatorname{Int} A = A$.

4. Если $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.

5. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

6. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Доказательство.

1. $G := \bigcup\limits_{U \in A,\ U\ -\text{ откр.}}$. Надо доказать, что $G = \operatorname{Int} A$.

   $\supset$: Берем $a \in \operatorname{Int} A \Rightarrow \underbrace{B_r(a\ \ )}_{\text{открытое}} \subset A \Rightarrow a \in B_r(a) \subset G$.

   $\subset$: Берем $a \in G \Rightarrow a \in U$ для некоторого открытого $U \subset A \Rightarrow B_r(a) \subset U \subset A \Rightarrow a$ – внутренняя точка $A \Rightarrow a \in \operatorname{Int} A$.

2. Объединение открытых множеств – открытое.

3. $\operatorname{Int} A$ – открытое $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ есть.

4. Если a – внутренняя точка A, то $B_r(a) \subset A \subset B \Rightarrow a \in \operatorname{Int} B$.

5. $\begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \\ A \cap B \subset B \Rightarrow \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B \end{cases} \Rightarrow \subset$ есть.

   $\supset$: Пусть $a \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \Rightarrow \begin{cases} B_{r_1}(a) \subset A \\ B_{r_2}(a) \subset B \end{cases} \Rightarrow B_{\min(r_1,r_2)}(a) \in A \cap B \Rightarrow a \in (\operatorname{Int} A \cap B)$.

6. $2 + 3$

$\square$

Определение 2.1.7. A – *замкнутое множество*, если $X \setminus A$ – открытое множество.

Теорема 2.1.2. ***О свойствах замкнутых множеств:***

1. $\varnothing$ и X – замкнутые множества.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнутое множество.

3. Объединение конечного числа замкнутых множеств – замкнутое множество.

4. $\overline{B}_r$ – замкнутое множество.

Доказательство.

1. Пусть A_α – замкнутое, $\alpha \in I, F := \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

   Проверим, что $x \setminus F$ – открытое: $x \setminus F = x \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \underbrace{(X \setminus A_\alpha)}_{\text{откр.}}$ – открытое.

2. Пусть A_1, ..., A_n – замкнутые, $F := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

   Проверим, что $x \setminus F$ – открытое: $x \setminus F = x \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \underbrace{(X \setminus A_k)}_{\text{откр.}}$ – открытое.

3. Проверим, что $X \setminus \overline{B}_R(a)$ – открытое множество. Возьмем $x \notin \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(a, x) > R$.

   (picture)

   $r := \rho(x, a) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$, т.е. что $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) = \varnothing$.

   Пусть $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(y, x) < r \;\; \& \;\; \rho(y, a) \leq R \Rightarrow \rho(a, y) + \rho(y, x) \leq R + r = \rho(a, x)$.

$\square$

Замечание. В третьем существенна конечность: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, \frac{1}{n})$.

Определение 2.1.8. $\operatorname{Cl} A$ – *замыкание множества* A – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Теорема 2.1.3. $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$.
$X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \cup\{U$ – открытое: $U \subset X \setminus A\}$
$X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) = X \setminus \cup\{...\} = \cap\{X \setminus U : U$ – открытое: $U \subset X \setminus A\} = \cap\{F : F$ – замкнутое и $\underbrace{X \setminus F \subset X \setminus A}_{\Leftrightarrow F \supset A}\} = \operatorname{Cl} A$ $\square$

Утверждение 2.1.3. Свойства замыканий:

1. $\operatorname{Cl} A$ — замкнутое множество.

2. A замкнуто $\Leftrightarrow \operatorname{Cl} A = A$.

3. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$.

   Комментарий: $X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \operatorname{Int}(X \setminus A) \supset \operatorname{Int}(X \setminus B)$.

4. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$.

   Комментарий: $X \setminus \operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Int}(X \setminus (A \cup B)) = \operatorname{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$.

5. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$.

Теорема 2.1.4. *A – множество в метрическом пространстве (X, ρ). Тогда $x \in \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0$ $B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.*

Доказательство. $\neg(P \Leftrightarrow Q) = \neg P \Leftrightarrow \neg Q$. Тогда докажем: $x \notin \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \exists r > 0\ \mathrm{B}_r(x) \cap A = \varnothing$
$x \notin \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow x \in X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \Rightarrow x$ – внутренняя точка $X \setminus A \Rightarrow \exists r > 0 : \underbrace{\mathrm{B}_r(x) \subset X \setminus A}_{\mathrm{B}_r(x) \cap A = \varnothing}$ □

Следствие. *Если U – открытое и $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$.*

Доказательство. От противного. Пусть $U \cap \operatorname{Cl} A \neq \varnothing$. Возьмем $x \in U \cap \operatorname{Cl} A$.
$$\left.\begin{aligned} x \in U \text{ – открытое } &\Rightarrow \exists r > 0 : \mathrm{B}_r(x) \subset U \\ x \in \operatorname{Cl} A &\overset{\text{по th}}{\Rightarrow} \mathrm{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ точка из $\mathrm{B}_r(x) \cap A$ лежит и в U, и в A. Противоречие. □

Определение 2.1.9. U_a – *окрестность точки* a – шар $\mathrm{B}_r(a)$ некоторого радиуса $r > 0$.

Определение 2.1.10. $\overset{\circ}{U}_a$ – *проколотая окрестность точки* a – $\overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(a) = \mathrm{B}_r(a) \setminus \{a\}$ некоторого радиуса $r > 0$.

Определение 2.1.11. a – *предельная точка множества* A, если любая проколотая окрестность точки a пересекается с множеством A.

Обозначение 4. A' – множество всех предельных точек A.

Утверждение 2.1.4.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$

   Доказательство. $a \in \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\ \mathrm{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &\forall r > 0\ \overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(a) \Leftrightarrow a \in A' \end{aligned}\right.$ □

2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

3. A замкнуто $\Rightarrow A' \subset A$.

   Доказательство. A замкнуто $\Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A' \subset A$. □

4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   Доказательство. $A \subset A \cup B \Rightarrow A' \subset (A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B' \subset (A \cup B)'$

   Теперь докажем обратное включение. Возьмем $x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0\ \overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ (1)

   Пусть $x \notin B' \overset{\text{для дост. малых } r}{\Rightarrow} \mathrm{B}_r(x) \cap B = \varnothing$ (2)

   Из (1) и (2) : $\overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(x) \cap A \neq \varnothing$ для достаточно малых $r \Rightarrow \forall r > 0\ \overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(x) \cap A \neq \varnothing$ □

Теорема 2.1.5. $x \in A' \Leftrightarrow \exists r > 0 :$ *шар* $B_r(x)$ *содержит бесконечно много точек из* A.

Доказательство.

$\Leftarrow$: если $\mathrm{B}_r(x) \cap A$ содержит бесконечно много точек, то $\overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(x) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Rightarrow \overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in A'$.

$\Rightarrow$: $x \in A' \Rightarrow \overset{\circ}{\mathrm{B}}_1(x) \cap A \neq \varnothing$. Возьмем точку x_1 из этого пересечения, для нее $0 < \underbrace{\rho(x, x_1)}_{=:r_2} < 1$

$\overset{\circ}{\mathrm{B}}_{r_2}(x) \cap A \neq \varnothing$. Возьмем точку x_2 из этого пересечения, для нее $0 < \underbrace{\rho(x, x_2)}_{=:r_3} < r_2 = \rho(x, x_1)$.

И так далее: $\rho(x, x_1) > \rho(x, x_2) > \ldots \Rightarrow$ все радиусы различны.

□

Замечание. Можно добиться того, что $\rho(x, x_n) \to 0$. Для этого надо брать $r_n = \frac{1}{2}\rho(x, x_{n-1})$.

Следствие. *Конечное множество не имеет предельных точек.*

Определение 2.1.12. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X$. *Подпространством метрического пространства* называется $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ (более кратко: (Y, ρ)).

Теорема 2.1.6. ***Об открытых и замкнутых множествах в подпространстве***
Пусть (X, ρ) *– метрическое пространство* $A \subset Y \subset X$. *Тогда:*

1. A *открыто в* $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G$ *– открытое в* (X, ρ) *:* $A = G \cap Y$.

2. A *замкнутое в* $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists F$ *– замкнутое в* (X, ρ) *:* $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$\Rightarrow$: A открытое в $Y \Rightarrow A = \bigcup\limits_{x\in A} \mathrm{B}^Y_{r_x}(x)$, где $r_x > 0$ такой радиус, что $\mathrm{B}^Y_{r_x} \subset A$.

$\mathrm{B}^Y_{r_x} = \{y \in Y : \rho(x,y) < r_x\} = \underbrace{\{y \in X : \rho(x,y) < r_x\}}_{=\mathrm{B}^X_{r_x}(x)} \cap Y = \mathrm{B}^X_{r_x} \cap Y \Rightarrow A = \bigcup\limits_{x\in A} (\mathrm{B}^X_{r_x}(x) \cap Y) =$

$Y \cap \underbrace{\cup \mathrm{B}^X_{r_x}}_{=:G \text{ откр. в } X}$

$\Leftarrow$: $A = Y \cap G$, G – открытое в $X \Rightarrow G = \bigcup\limits_{x\in G} \mathrm{B}^X_{r_x}(x)$, где $r_x > 0$ такой радиус, что $\mathrm{B}_{r_x} \subset G \Rightarrow A = Y \cap \bigcup\limits_{x\in G} \mathrm{B}^X_{r_x}(x) = \bigcup\limits_{x\in G} (Y \cap \mathrm{B}^X_{r_x}(x)) = \bigcup\limits_{x\in G} \mathrm{B}^Y_{r_x}(x)$ – открытое в Y.

1. A замкнуто в $Y \Leftrightarrow Y \setminus A$ открыто в $Y \overset{1}{\Leftrightarrow} \exists G$ – открытое в $X : Y \setminus A = G \cap Y \Leftrightarrow A = Y \setminus G = Y \cap (\underbrace{X \setminus G}_{\text{замк. } F:=}) \Leftrightarrow \exists F$ – замкнутое в X : $A = Y \cap F$ (и обратно доказывается с конца).

□

Пример. $x = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) := |x-y|$, $Y = [0,3)$

В (Y,ρ) :

$[0,1)$ – открытое множество $[0,1) = (-1,1) \cap Y$.

$[2,3)$ – закрытое множество $[2,3) = [2,4] \cap Y$.

Определение 2.1.13. X – векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ – *норма*, если:

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y, z$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Пример.

1. $|x|$ в $\mathbb{R}$.
2. $\|x\|_p := (|x_1|^p + ... + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ в $\mathbb{R}^d$ при $p \geq 1$.
3. $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_d|\}$ в $\mathbb{R}^d$.
4. $X = C[a,b]$; $\|f\| := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
5. $X = C[a,b]$; $\|f\| := \int\limits_a^b |f(x)| dx$.

Определение 2.1.14. X – векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ *скалярное произведение*, если:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ $\forall x, y, z$.

3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ $\forall x, y \in X$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

4. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ $\forall x, y \in X$.

Пример.

1. $X = \mathbb{R}^d$; $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k y_k$

2. $X = \mathbb{R}^d$, $w_1, ..., w_d > 0$; $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} w_k x_k y_k$

3. $X \in C[a, b]$; $\langle f, g\rangle = \int\limits_b^a f(x)g(x)dx$.

Утверждение 2.1.5.

1. **Неравенство Коши-Буняковского**: $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

   Доказательство. Пусть $y \neq \vec{0}$ (если $y = \vec{0}$, то очевидно).

   $f(t) := \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x, x\rangle + t\langle y, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle y, y\rangle t^2 + 2t\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle$ – квадратный трехчлен.

   $f(t) \geq 0$ $\forall t \in R \Rightarrow$ его дискриминант $\leq 0 \Rightarrow (2\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ □

2. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ – норма.

   Доказательство.

   1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$ - первое свойство скалярного произведения.
   2. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$
   3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

      $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$

      $\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x+y, x+y\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$ и осталось неравенство Коши-Буняковского.

   □

3. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ – метрика.

Доказательство. $\rho(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\|x-y\| = \|x-y\| = \rho(x,y)$

Неравенство треугольника: $\rho(x,y)+\rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

$\|x-y\| + \|y-z\| \geq \|(x-y)+(y-z)\| = \|x-z\|$ □

4. $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

Доказательство. $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ и $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$

$\|x\| = \|y+(x-y)\| \leq \|y\| + \|x-y\|$ □

Определение 2.1.15. (X,ρ) – метрическое пространство, x_n – последовательность в X, $a \in X$. Тогда $\lim x_n = a$:

1. Вне любого шара $\mathrm{B}_r(a)$ содержится лишь конечное число членов последовательности.

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ n \geq N\ \rho(x_n,a) < \varepsilon$.

Утверждение 2.1.6.

1. $\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim \rho(x_n,a) = 0$.

2. Предел единственнен.

Доказательство. Если $\lim x_n = a$ и $\lim x_n = b$, то возьмем такое число $r > 0$, что $\mathrm{B}_r(a) \cap \mathrm{B}_r(b) = \varnothing \Rightarrow$ вне $\mathrm{B}_r(a)$ конечное число членов и вне $\mathrm{B}_r(b)$ конечное число членов $\Rightarrow$ всего конечное число членов. Противоречие. □

3. Если $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = a$, то последовательность, полученная перемешиванием x_n и y_n, также стремится к a.

4. Если $\lim x_n = a$, то последовательность, полученная перестановкой членов последовательности, имеет тот же предел.

5. Если $\lim x_n = a$, то последовательность, в которой x_n взяты с конечной кратностью, имеет тот же предел.

Определение 2.1.16. $A \subset X$; A – *ограниченное множество*, если A содержится в некотором шаре.

6. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. $\exists N:\ \forall n \geq N\ \rho(x_n,a) < 1$

$R := \max\{\rho(x_1,a), ..., \rho(x_{N-1},a)\} + 1 \Rightarrow x_n \in \mathrm{B}_R(a)$. □

7. Если $\lim x_n = a$, то $\lim x_{n_k} = a$.

8. a – предельная точка множества $A \Leftrightarrow$ существует последовательность $\underset{\neq a}{x_n} \in A$: $\lim x_n = a$. Более того, x_n можно выбрать так, что $\rho(x_n, a)$ монотонно убывают.

   Доказательство. $\Rightarrow$: было.

   $\Leftarrow$: берем $\mathrm{B}_r(a) \Rightarrow \exists N: \ \forall n \geq N \ \underset{\neq a}{x_n} \in \mathrm{B}_r(a) \Rightarrow \overset{\circ}{\mathrm{B}}_r(a) \cap A \neq \varnothing$ □

Теорема 2.1.7. ***Об арифметических действиях с пределами***
X – векторное пространство, $\|\cdot\|$ – норма в X, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, $\lim \lambda_n = \nu$; $\lambda_n, \nu \in \mathbb{R}$; $x_n, y_n, a, b \in X$. Тогда:

1. *$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.*

2. *$\lim(\lambda_n x_n) = \nu a$.*

3. *$\lim \|x_n\| = \|a\|$.*

4. *Если в X есть скалярное произведение, то $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle$.*

Доказательство.

1. $\rho(x_n + y_n, a + b) = \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| = \underset{\to 0}{\rho(x_n, a)} + \underset{\to 0}{\rho(y_n, b)} \Rightarrow$ $\rho(x_n + y_n, a + b) \to 0$

2. $\|\lambda_n x_n - \nu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \nu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \nu a\| = \underset{\text{огр.}}{|\lambda_n|}\underset{\to 0}{\|x_n - a\|} + \underset{\to 0}{|\lambda_n - \nu|}\|a\| \to 0$

3. $|\|x_n\| - \|a\|| \leq \|x_n\| - \|a\| \to 0$

4. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

   $\langle x_n, y_n\rangle = \frac{1}{4}(\underset{\to\|a+b\|^2}{\|x_n + y_n\|^2} - \underset{\to\|a-b\|^2}{\|x_n - y_n\|^2}) \to \frac{1}{4}(\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2) = \frac{1}{4}\langle a, b\rangle$

□

Важный случай: $\mathbb{R}^d$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2}$

Определение 2.1.17. *Поокординатная сходимость* $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, ..., x_n^{(d)})$ и $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(d)})$ – x_n сходится к a покоординатно, если $\forall i \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)} = a^{(i)}$.

Теорема 2.1.8. *В $\mathbb{R}^d$ покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.*

Доказательство. По норме $\Rightarrow$ покоординатная:
$\|x_n - a\| \to 0 \Rightarrow |x_n^{(i)} - a^{(i)}| \le \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + ... + (x_n^{(d)} - a^{(d)})} = \|x_n - a\| \to 0$
Покоординатная $\Rightarrow$ по норме:
$\|x_n - a\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + ... + (x_n^{(d)} - a^{(d)})} \le \underbrace{|x_n^{(1)} - a^{(1)}|}_{\to 0} + ... + \underbrace{|x_n^{(d)} - a^{(d)}|}_{\to 0} \to 0$ □

Определение 2.1.18. (X, ρ) – метрическое пространство, x_n – последовательность в X. x_n – *фундаментальная последовательность*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : m, n \ge N\ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Утверждение 2.1.7. Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. Фундаментальная последовательность ограничена.
3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность имеет тот же предел.

Доказательство. Аналогично последовательностям, только вместо модуля используется норма. □

Определение 2.1.19. (X, ρ) – метрическое пространство называется *полным*, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел.

Пример. $\mathbb{R}$ – полное пространство.

Теорема 2.1.9. $\mathbb{R}^d$ *– полное пространство.*

Доказательство. Пусть $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, ..., x_n^{(d)})$ – фундаментальная последовательность.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : m, n \ge N\ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$
$\rho(x_m, x_n) = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + ... + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} \ge |x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| \Rightarrow$ последовательность $x_n^{(i)}$ фундаментальная $\Rightarrow$ найдется $a^{(i)} \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to \infty} x_n^{(i)} = a^{(i)}$.
Рассмотрим $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(d)})$. x_n покоординатно сходится к $a \Rightarrow x_n$ по норме сходится к a. □

3. Компактность

Определение 3.0.1. A_α, $\alpha \in I$. Множества A_α *покрывают* множество B, если $B \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Определение 3.0.2. *Открытое покрытие* = покрытие открытыми множествами.

Определение 3.0.3. K *– компакт (компактное множество)*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 3.0.1. ***О свойствах компактных множеств.***

1. *Пусть $(X,\ \rho)$ – метрическое пространство, $Y \subset X, K \subset Y$. Тогда K компактно в $(X,\ \rho) \Leftrightarrow K$ компактно в $(Y,\ \rho)$.*

2. *K – компакт $\Rightarrow K$ замкнуто и K ограничено.*

3. *Если K компакт, $K \supset \tilde{K}$ – замкнуто, то $\tilde{K}$ – компакт.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$: пусть $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, где U_α открыто в $Y \Rightarrow \forall\alpha\ U_\alpha = G_\alpha \cap Y$, где G_α – открыто в $X \Rightarrow$ $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha \overset{K\text{ – комп.}}{\Rightarrow}$ найдется $\alpha_1, ..., \alpha_n : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \Rightarrow K = K\cap Y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$
   $\Leftarrow$: пусть $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$, где G_α открыто в $Y \Rightarrow K = K\cap Y \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I}(G_\alpha\cap Y) \overset{K\text{ – комп.}}{\Rightarrow}$ найдется $\alpha_1, ..., \alpha_n : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i}\cap Y) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

2. *Компактность $\Rightarrow$ ограниченность:*

   $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n(a)$, если $n > \rho(x,a)$, то $x \in \mathrm{B}_n(a)$

   Выделим конечное подпокрытие $\mathrm{B}_{n_1}(a), ..., \mathrm{B}_{n_k}(a)$. $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathrm{B}_{n_j}(a) = \mathrm{B}_{\max\{n_i\}}(a)$.

   Компактность $\Rightarrow$ замкнутость:

   Докажем, что $X \setminus K$ – открытое множество. Возьмем $a \notin K$. $\forall x \in K\ a \notin \mathrm{B}_{\frac{\rho(a,x)}{2}}(x) := U_x$.

   U_x – открыто, $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} U_x$. Выделим конечное подпокрытие $U_{x_1}, ..., U_{x_k}$, $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} U_{x_j}$.

   $r := \min\{\frac{\rho(a,x_1)}{2}, ..., \frac{\rho(a,x_k)}{2}\} > 0$. $\mathrm{B}_r(a)\cap U_{x_j} = \varnothing \Rightarrow \mathrm{B}_r(a) \cap \bigcup\limits_{j=1}^{k} U_{x_j} = \varnothing \Rightarrow \mathrm{B}_r(a)\cap K = \varnothing \Rightarrow$ $\mathrm{B}_r(a) \subset X\setminus K \Rightarrow a$ – внутренняя точка $X \setminus K$.

3. Рассмотрим открытое покрытие $\tilde{K} \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \Rightarrow K \subset \underbrace{(X\setminus\tilde{K})}_{\text{откр.}} \cup \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ – открытое покрытие $K \Rightarrow$ можем выделить конечное подпокрытие $K \subset (X\setminus\tilde{K}) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \overset{\tilde{K}\subseteq K}{\Rightarrow} \tilde{K} \subset (X\setminus\tilde{K}) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K}$ компакт

□

Теорема 3.0.2. *K_α семейство компактов такое, что пересечение любого их конечного числа непусто. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \varnothing \Rightarrow \exists\alpha_0 : K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} X \setminus K_\alpha = X \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in I} = X \Rightarrow$ можно выделить конечное подпокрытие $\alpha_1, ..., \alpha_n$.
$K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \varnothing$. Противоречие. □

Следствие. *$K_1 \supset K_2 \supset ...$ непустые, тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing$.*

Определение 3.0.4. K – *секвенциальный компакт*, если из любой последовательности точек из K можно выделить подпоследовательность, имеющую предел в K.

Пример. $[a, b] \in \mathbb{R}$ – секвенциальный компакт (th Б.-В.)

Теорема 3.0.3. *Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.*

Доказательство. K – компакт, $K \supset A$ – бесконечное подможество.
От противного. Пусть $A' = \varnothing \Rightarrow A$ – замкнутое $\Rightarrow A$ – компакт.
Возьмем $a \in A, a$ – не предельная точка в $A \Rightarrow$ найдется $\overset{\circ}{\mathrm{B}}_{r_a}(a)$, не пересекающийся с $A \Rightarrow \mathrm{B}_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$.
$A \subset \bigcup\limits_{a\in A} \mathrm{B}_{r_a}(a)$ – открытое покрытие A. Выделим конечное подпокрытие $\mathrm{B}_{r_{a_1}}(a_1), ..., \mathrm{B}_{r_{a_n}}(a_n) \Rightarrow$
$A = \{a_1, ..., a_n\}$ – конечное множество. Противоречие. □

Следствие. *Компактность $\Rightarrow$ секвенциальная компактность.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_n \in K, D = \{x_1, x_2, ...\}$ – подмножество.

1) $\#D < +\infty \Rightarrow$ какой-то член последовательности повторяется бесконечно много раз, возьмем его.

2) $\#D = +\infty \Rightarrow$ у D есть предельная точка $a \Rightarrow \exists n_k : \lim x_{n_k} = a$.

□

Лемма 3.0.1. Лемма Лебега
K – секвенциальный компакт, $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ – открытое покрытие. Тогда $\exists\varepsilon > 0 : \forall x \in K$ шар $B_\varepsilon(x)$ целиком накрывается каким-то элементом покрытия.

Определение 3.0.5. ε из леммы Лебега называется *числом Лебега* для покрытия $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$.

Доказательство. От противного. Тогда $\varepsilon = \frac{1}{n}$ не подходит. Найдется $x_n \in K : \mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x_n)$ целиком не накрывается никаким U_α.
Выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to a \in K \Rightarrow \exists\alpha_0 : a \in U_{\alpha_0}$ – открытое $\Rightarrow \exists r > 0 :\ \mathrm{B}_r(a) \subset U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists N :\ \forall k \geq N\ \rho(x_{n_k}, a) < \frac{r}{2}$.
Кроме того, $\rho(x_{n_k}, a) \to 0 \Rightarrow x_{n_k} \in \mathrm{B}_{\frac{r}{2}}(a)$ при $k \geq N$.
Возьмем такое $k \geq N$, что $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$. Тогда $\mathrm{B}_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset \mathrm{B}_r(a) \subset U_{\alpha_0}$. Противоречие.
Проверим, что $\mathrm{B}_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset \mathrm{B}_r(a)$. Берем $x \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \Rightarrow \rho(x, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}(\ \&\ \ \rho(x_{n_k}, a) < \frac{r}{2}) \Rightarrow$
$\rho(x, a) \leq \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. □

Теорема 3.0.4. *Компактность = секвенциальная компактность.*

Доказательство.

$\Rightarrow$: доказано.

$\Leftarrow$: K – секвеницияльный компакт. Рассмотрим открытое покрытие $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое.

Возьмем ε из леммы Лебега. Тогда $\forall x \in K$ $\mathrm{B}_\varepsilon(x)$ целиком содержится в каком-то элементе покрытия.

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} \mathrm{B}_\varepsilon(x)$ – открытое покрытие.

Если $K \subset \mathrm{B}_\varepsilon(x_1)$, то выделили конечное подпокрытие. Если это не так, то $\exists x_2 \notin \mathrm{B}_\varepsilon(x_1)$.

Если $K \subset \mathrm{B}_\varepsilon(x_1) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x_2)$, то выделили конечное подпокрытие. Иначе $\exists x_3 \notin \mathrm{B}_\varepsilon(x_1) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x_2)$.

...

В итоге построили последовательность $x_n \in K$ – секвенциальный компакт $\Rightarrow$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \Rightarrow x_{n_k}$ фундаментальная.

Но так быть не может: $\rho(x_{n_k}, x_{n_j}) > \varepsilon$ $\forall k \neq j$. Противоречие.

Таким образом, найдется $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(x_j)$. Но $\mathrm{B}_\varepsilon(x_j)$ целиком содержится в $U_{\alpha_j} \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$. Получилось конечное подпокрытие.

$\square$

Определение 3.0.6. (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.
$a_1, a_2, \ldots$ – *ε-сеть множества* A, если $\forall a \in A$ найдется $a_k : \rho(x, a_k) \leq \varepsilon$.
Это означает, что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(a_k)$.

Определение 3.0.7. *Конечная ε-сеть* – конечное множество точек $a_1, \ldots, a_n$ с тем же условием.

Определение 3.0.8. A – *вполне ограничено*, если $\forall \varepsilon > 0$ у A есть конечная ε-сеть.

Утверждение 3.0.1.

1. Вполне ограниченность $\Rightarrow$ ограниченность.
2. В $\mathbb{R}^d$ ограниченность $\Rightarrow$ вполне ограниченность.

Доказательство.

1. Возьмем $\varepsilon = 1$ и конечную 1-сеть $a_1, \ldots, a_n$.

   $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{B}}_1(a_k) \subset \overline{\mathrm{B}}_R(a_1)$, где $R = 1 + \max\{\rho(a_1, a_2), \ldots., \rho(a_1, a_n)\}$.

   $\rho(x, a_1) \leq \rho(x, a_j) + \rho(a_j, a_1) < 1 + R$

2. A – ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$.

   l – длина стороны куба. Возьмем $n : \frac{l}{n} < \varepsilon$ и нарежем на n^d равных кубиков.

   Если есть пересечение кубика с A, то берем точку из этого пересечения. Если нет, то просто выкидываем.

   Выбранные точки образуют $\varepsilon\sqrt{d}$-сеть: $\rho(x, a) \leq \varepsilon\sqrt{d}$.

□

Теорема 3.0.5. *Компактное множество вполне ограничено.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и покроем компакт $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} \mathrm{B}_\varepsilon(x_i)$. Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(x_i)$. Тогда $x_1, ..., x_n$ – ε-сеть множества K. □

Следствие. *Компактное множество замкнуто и вполне ограничено.*

Теорема 3.0.6. ***Теорема Хаудсдорфа***

Если (X, ρ) – полное метрическое пространство, то K – компакт $\Leftrightarrow$ K – замкнуто и вполне ограничено.

Доказательство. $\Leftarrow$: будем проверять секвенциальную компактность.
Рассмотрим последовательность $x_n \in K$ и выделим из нее сходящуюся подпоследовательность.
Возьмем 1-сеть, то есть покроем K конечным числом шаров радиуса 1 $\Rightarrow$ в каком-то из шаров бесконечное число членов последовательности, возьмем их: $x_{11}, x_{12}, ...$. Остальные выкинем.
Возьмем $\frac{1}{2}$-сеть, то есть покроем K конечным числом шаров радиуса $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ в каком-то из шаров бесконечное число членов последовательности, возьмем их: $x_{21}, x_{22}, ...$. Остальные выкинем
Возьмем $\frac{1}{3}$-сеть и так далее...
Получили:
$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} ...$ – лежат в шаре радиусом 1.
$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} ...$ – лежат в шаре радиусом $\frac{1}{2}$.
$x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} ...$ – лежат в шаре радиусом $\frac{1}{3}$.
При этом каждая следующая строка – подпоследовательность из предыдущей. В частности $x_k, ..., x_{k+1,k+1}, ...$ – подпоследовательность k-ой строки, поэтому $x_{k,k}, ..., x_{k+1,k+1}, ...$ лежат в шаре радиусом $\frac{1}{k}$.
$\Rightarrow \forall i, j \geq k \; \rho(x_{ii}, x_{jj}) \leq \frac{2}{k} \Rightarrow x_{11}, x_{22}, x_{33}, ...$ фундаментальная $\Rightarrow$ у нее есть предел $\Rightarrow$ из исходной последовательности выбрали сходящуюся. □

Следствие. ***Характеристика компактов в $\mathbb{R}^d$***

$K \subset \mathbb{R}^d$. Тогда K – компакт $\Leftrightarrow$ K замкнуто и ограничено.

Доказательство.

$\Rightarrow$: верно всегда, было.

$\Leftarrow$: $\left.\begin{array}{l}\text{в } \mathbb{R}^d \text{ ограниченность } \Rightarrow \text{ вполне ограниченность} \\ \mathbb{R}^d \text{ полное}\end{array}\right\} \Rightarrow K$ – компакт

$\square$

Следствие. ***Теорема Больцано-Вейерштрасса в*** $\mathbb{R}^d$
Ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^d$ *имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. x_n – ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists R: \ x_n \in \overline{\mathrm{B}}_R(0)$ – замкнут и ограничен $\Rightarrow \overline{\mathrm{B}}_R(0)$ – компакт $\Rightarrow$ секвенциальный компакт $\Rightarrow$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

3.1 Непрерывные отображения

Определение 3.1.1. (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \to Y$, $a \in E$, a – предельная точка E, $b \in Y$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, если:

- по Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \underset{\neq a}{x} \in E \ \rho(x,a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$.
- в терминах окрестностей: $\forall U_b$ – окрестность точки b $\exists \overset{\circ}{U}_a$ – проколотая окрестность точки a: $f(\overset{\circ}{U}_a \cap E) \subset U_b$.
- по Гейне: $\forall$ последовательности $\underset{\neq a}{x_n} \in E$: $\lim x_n = a \Rightarrow' lim f(x_n) = b$.

Замечание. Определение по Коши и с окрестностями – это одно и то же.

Доказательство. $U_b = \mathrm{B}_\varepsilon(b)$, $\overset{\circ}{U}_a = \overset{\circ}{\mathrm{B}}_\delta(a)$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(\overset{\circ}{\mathrm{B}}_\delta(a) \cap E) \mathrm{B}_\varepsilon(b)$
Если $x \in \overset{\circ}{\mathrm{B}}_\delta(a) \cap E$, то $f(x) \in \mathrm{B}_\varepsilon(b)$.
Если $x_{\neq a} \in E$ и $\rho_X(x,a) < \delta$, то $\rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$. $\square$

Теорема 3.1.1. *Все определения равносильны.*

Доказательство. Как раньше. $\square$

Теорема 3.1.2. ***Критерий Коши***
$f : E \to Y$, $E \subset X$, a – предельная точка E, Y – полное пространство. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \underset{\neq a}{x, y} \in E \ \rho_X(x,a) < \delta \ \& \ \rho_X(y,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Доказательство. $\Rightarrow$: Как раньше.

$\Leftarrow$: Будем проверять определение по Гейне.

Берем последовательность $\underset{\neq a}{x_n} \in E : \lim x_n = a$. Хотим доказать, что $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0 :\ \forall \underset{\neq a}{x, y} \in E\ \rho_X(x,a) < \delta\ \ \&\ \ \rho_X(y,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Из $\lim x_n = a \Rightarrow \exists N : \begin{array}{c} \forall n \geq N\ \rho_X(x_n, a) < \delta \\ \forall m \geq N\ \rho_X(x_m, a) < \delta \end{array} \Rightarrow \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall m, n \geq N\ \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \Rightarrow f(x_n)$ – фундаментальная последовательность $\Rightarrow$ имеет предел.

$\square$

Теорема 3.1.3. ***Теорема об арифметических действиях с пределами***

$f, g : E \to Y$ – нормированное пространство, a – предельная точка E. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то:

1. *$\lim\limits_{a \to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha b + \beta c$.*
2. *Если $\lambda : E \to \mathbb{R} : \lim\limits_{a \to a} \lambda(x) = \nu$, то $\lim\limits_{a \to a} \lambda(x) f(x) = \nu b$.*
3. *$\lim\limits_{x \to a} \|f(x)\| = \|b\|$.*
4. *Если в Y есть скалярное произведение, то $\lim\limits_{x \to a}\langle f(x), g(x)\rangle = \langle b, c\rangle$.*
5. *Если $Y = \mathbb{R}$ и $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.*

Доказательство. Все из определения по Гейне. Берем $\underset{\neq a}{x_n} \in E$: $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = b,\ \lim g(x_n) = c,\ \lim \lambda(x_n) \nu$.

Как раньше. $\square$

Определение 3.1.2. (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \to Y$, $a \in E$. Отображение f *непрерывно в точке* a, если: 1) a – изолированная точка E (то есть не предельная) или 2) a – предельная точка E и $\lim f(x) = f(a)$.

- по Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E\ \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
- в терминах окрестностей: $\forall U_{f(a)}\ \exists U_a$: $f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$.
- по Гейне: $\forall x_n \in E$: $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$.

Теорема 3.1.4. ***Теорема о непрерывности композиции***

(X, ρ_X), (Y, ρ_Y), (Z, ρ_Z) – метрические пространства, $D \subset X, E \subset Y, f : D \to Y, g : E \to Z, a \in D, f(D) \subset E$. Если f непрерывна в точке a и g непрерывна в точке $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Доказательство. $\forall U_{g(b)}\ \exists U_b$: $g(U_b \cap E) \subset U_{g(b)}$ (непрерывность g в точке $b = f(a)$)
$\forall U_{f(a)}\ \exists U_a$: $f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$ (непрерывность f в точке a)
$\overset{\text{т.к. } f(D)\subset E}{\Rightarrow} f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)} \cap E = U_b \cap E \Rightarrow g(f(U_a \cap D)) \subset g(U_b \cap E) \subset U_{g(b)} = U_{g\circ f(a)}$
Это непрерывность композиции. □

Теорема 3.1.5. ***Характеристика непрерывности в терминах открытых множеств*** *(X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства, $f : X \to Y$. Тогда f непрерывна во всех точках $\Leftrightarrow \forall U \subset Y$ – открытого $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ – открытое.*

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть U – открытое. Докажем, что $f^{-1}(U)$ – открытое. Возьмем $a \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(a) \in U$ – открытое $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

f непрерывна в $a \Rightarrow \exists \delta > 0 :\ f(\mathrm{B}_\delta(a)) \subset\ \mathrm{B}_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow \mathrm{B}_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow a$ лежат в $f^{-1}(U)$ – открыто (так как все точки внутренние).

$\Leftarrow$: $U :=\ \mathrm{B}_\varepsilon(f(a))$ – открытое $\Rightarrow f^{-1}(\ \mathrm{B}_\varepsilon(f(a)))$ – открытое

$a \in f^{-1}(\mathrm{B}_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow$ она лежит в этом множестве вместе с некоторым шаром $\mathrm{B}_\delta(a) \subset f^{-1}(\mathrm{B}_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow f(\mathrm{B}_\delta(a) \subset \mathrm{B}_\varepsilon(f(a))$

Это непрерывность функции в точке a.

□

Теорема 3.1.6. *Непрерывный образ компакта – компакт.*

Доказательство. $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, K – компакт $\subset X, f : K \subset Y$ непрерывна.
(K, ρ_X) – метрическое пространство, K – компакт в нем.
Докажем, что $f(K)$ – компакт. Возьмем его открытое покрытие: $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha)$ – открытое $\Rightarrow$ это открытое покрытие компакта $\Rightarrow$ выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(K) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ – это конечное подпокрытие из исходного покрытия $f(K)$. □

Следствие.

1. *Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.*

   Определение 3.1.3. $f : E \to Y$ *ограничена*, если множество ее значений – ограниченное множество.

2. *Если $f : K \to Y, K$ – компакт, f непрерывна во всех точках $\Rightarrow f$ ограниченная функция.*

3. ***Теорема Вейерштрасса***

Теорема 3.1.7. *$f : K \to \mathbb{R}, K$ – компакт, f непрерывна во всех точках. Тогда существуют $a, b \in K : f(a) \leq f(x) \leq f(b)\ \forall x \in K$.*

Доказательство. $f(K)$ – ограниченное множество в $\mathbb{R} \Rightarrow$ у него есть супремум – $B := \sup\{f(x) : x \in K\}$.

$\forall n \in N\ \exists x_n \in K\ B = \frac{1}{n} < f(x_n) \leq B \Rightarrow \lim f(x_n) = B$.

x_n – последовательность из K – секвенциальный компакт $\Rightarrow$ найдется сходящаяся подпоследовательность: $\lim f(x_{n_k}) = b \in K \overset{f \text{ непр. в точке } b}{\Rightarrow} \lim f(x_n) = f(b) = B$.

Аналогично с инфимумом. □

Теорема 3.1.8. *$f : K \to Y$ непрерывна во всех точках и биекция, K – компакт $\Rightarrow$ обратная f^{-1} тоже непрерывна.*

Доказательство. Надо проверить, что для f^{-1} прообраз открытого множества – открытое множество.
Берем U – открытое подмножество K. И надо доказать, что $f(U)$ – открытое.
$K \setminus U$ – замкнутое подмножество $K \Rightarrow K \setminus U$ – компакт $\Rightarrow f(K \setminus U)$ – компакт $\Rightarrow Y \setminus f(K \setminus U)$ – открытое $\Rightarrow Y \setminus f(K \setminus U) = f(U)$ – открытое. □

Определение 3.1.4. (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства, $E \subset X, f : E \to Y$. f *равномерно непрерывна* на E, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E$ и $\rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Замечание. Равномерная непрерывность $\Rightarrow f$ непрерывна во всех точках E.

Теорема 3.1.9. ***Теорема Кантора***
Если $f : K \to Y$ непрерывна во всех точках, K – компакт, то f равномерно непрерывна на K.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $x \in K, f$ непрерывна в точке $x \Rightarrow \exists r_x > 0 : f(\mathrm{B}_{r_x(x)}) \subset \mathrm{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$.
Берем покрытие $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} \mathrm{B}_{r_x(x)}$. Пусть δ – число Лебега для этого покрытия.
Проверим, что оно подходит. Пусть $x, y \in K : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow y \in \mathrm{B}_\delta(x)$. $\mathrm{B}_\delta(x)$ целиком содержиттся в каком-то элементе покрытия $\mathrm{B}_{r_a}(a)$. Тогда $x.y \in \mathrm{B}_{r_a}(a) \Rightarrow f(x), f(y) \in f(\mathrm{B}_{r_a}(a)) \subset \mathrm{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq rho(f(x), f(a)) + \rho(f(a), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Определение 3.1.5. X – векторное пространство, $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ – нормы в X. Если существуют $c_1, c_2 > 0 : c_1\|x\| \leq |||x||| \leq c_2\|x\|$, то $||\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ – *эквивалентные нормы.*

Замечание.

1. Это отношение эквивалентности.

2. Пределы последовательностей по эквивалентным нормам совпадают:

   $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \|x_n - a\| < \varepsilon \Leftrightarrow |||x_n - a||| < c_1\varepsilon.$

3. Предельные точки в смысле $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадают.

4. Непрерывность в смысле $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадает.

5. Замкнутые и открытые множества по $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадают.

Теорема 3.1.10. *В $\mathbb{R}^d$ все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что все нормы экивалентны $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2}$.

Пусть $p(x)$ – другая норма в $\mathbb{R}^d$.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

$$p(x) = p(\sum_{i=1}^{d} x_i e_i) \le \sum_{i=1}^{d} p(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \cdot p(e_i) \le \underbrace{(\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{\frac{1}{2}}}_{=\|x\|} \cdot \quad \underbrace{(\sum_{i=1}^{d} p(e_i)^2)^{\frac{1}{2}}}_{:=c_2 \text{ не зависит от } x}$$

$p(x) \le C_2\|x\|$

Тогда $|px - py| \le p(x-y) \le c_2\|x-y\| \Rightarrow p(x)$ непрерывна во всех точках.

$S := \{x \in \mathbb{R}^d : \sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2 = 1\}$ – единичная сфера – компакт.

p непрерывна на компакте $S \Rightarrow$ в некоторой точке $a \in S$ достигается минимальное значение $\Rightarrow \underbrace{p(a)}_{:=c_1>0} \le p(x)\ \forall x \in S$. Проверим неравенство $c_1\|x\| \le p(x)\ \forall x \in R^d$:

Если $x \ne 0$, то $\frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow c_1 \le p(\frac{x}{\|x\|}) = p(\frac{1}{\|x\|} \cdot x) = \frac{1}{\|x\|} \cdot p(x)$. □

Замечание. В бесконечномерных пространствах бывают не эквивалентные нормы.

$C[a,b], \|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|, |||f(x)||| = \int\limits_a^b |f(x)|dx$ не эквивалентны.

$|||f||| \le (b-a)\|f\|$, а обратного неравенства нет.

3.2 Длина кривой

Определение 3.2.1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Тогда *путь* –это непрерывное отображение $\gamma : [a,b] \to X$.

Начало пути – $\gamma(a)$, конец пути – $\gamma(b)$, носитель пути $\gamma([a,b])$.

Замкнутый путь – $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Простой (несамопересекающийся) путь $\gamma(x) \neq \gamma(y)\ \forall x \neq y \in [a,b]$ (возможно за исключением равенства $\gamma(a) = \gamma(b)$).
Противоположный путь $\tilde{\gamma(t)} := \gamma(a+b-t)$.

Определение 3.2.2. Пусть $A \subset X$. Тогда A – *линейно связно*, если $\forall p, q \in A$ найдется путь, лежащий в A и соединяющий эти точки: $\exists \gamma : [a,b] \to A : \gamma(a) = p,\ \gamma(b) = q$.

Теорема 3.2.1. ***Теорема Больцано-Коши***
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна, E линейно связно, $p, q \in E$. Тогда для любого C, лежащего между $f(p)$ и $f(q)$, найдется $x \in E : f(x) = C$.

Доказательство. Берем $\gamma : [a,b] \to E : \gamma(a) = p,\ \gamma(b) = q$. Тогда $g = f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна.
$f(p) = g(a),\ f(q) = g(b) \Rightarrow C$ лежит между $g(a)$ и $g(b) \Rightarrow \exists t \in [a,b] : g(t) = C = f(\gamma(t))$ □

Определение 3.2.3. Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ и $\tilde{\gamma} : [c,d] \to X$ – пути. Если существует $\tau : [a,b] \to [c,d]$ строго возрастающая биекция ($\tau(a) = c, \tau(b) = d$ и непрерывность) такая, что $\tilde{\gamma} \circ \tau = \gamma$, то такие пути называют *эквивалентными*. Такие τ будем называть *допустимыми заменами параметра*.

Замечание. Это отношение эквивалентности.

Определение 3.2.4. *Кривая* – класс эквивалентных путей. Конкретный представитель класса – *параметризация кривой*.

Определение 3.2.5. Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ – путь. Рассмотрим дробление $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Тогда $\sup\{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \mid t_0, ..., t_n$ – дробление $[a,b]\} := l(\gamma)$ – *длина пути*.
Неформально: длина пути – супремум по всем длинам полученных ломанных.

Утверждение 3.2.1. Свойства:

1. Длины эквивалентных и противоположных путей равны.

2. Длина пути $\geq$ длины отрезка, соединяющего концы.

3. Длина пути $\geq$ длины вписанной в него ломаной.

Определение 3.2.6. *Длина кривой* – длина любого пути из класса эквивалентности.

Теорема 3.2.2. *Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ – путь, $c \in [a,b]$, $\gamma_1|_{[a,c]}$, $\gamma_2|_{[c,b]}$. Тогда $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.*

Доказательство.

$\leq$: Возьмем какое-то дробление $a = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} \leq c < t_k < ... < t_n = b$.

$$\sum_{j=1}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) + \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(c))}_{\leq l(\gamma_1)} + \underbrace{\rho(\gamma(t_c), \gamma(t_k)) + \sum_{j=k+1}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))}_{\leq l(\gamma_2)} \Rightarrow$$

$l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ – верхняя граница для всех длин вписанных ломаных $\Rightarrow \underbrace{\sup}_{=l(\gamma)} \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

$\geq$: Возьмем дробление $a = t_0 < t_1 < ... < t = c = u_0 < u_1 < ... < u_m = b$.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))}_{\text{припишем сюда sup}} + \sum_{j=1}^{m} \rho(\gamma(u_{j-1}), \gamma(u_j)) \ \leq \ l(\gamma) \ \Rightarrow \ l(\gamma_1) + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \rho(\gamma(u_{j-1}), \gamma(u_j))}_{\text{припишем сюда sup}} \ \leq \ l(\gamma) \ \Rightarrow$$

$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$

$\square$

Дальше все пути рассматриваем в $\mathbb{R}^d$.

Определение 3.2.7. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ – *r-гладкий путь*, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ ... \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, где γ_1, ..., $\gamma_d \in C^r[a, b]$.

Если $r = 1$, то γ – гладкий путь.

Определение 3.2.8. Кривая *r-гладкая*, если в классе эквивалентности есть r-гладкий путь.

Лемма 3.2.1. Пусть $\Delta \subset [a, b]$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ – гладкий путь.
$m_\Delta^{(i)} := \min\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|, \quad m_\Delta^2 = \sum\limits_{i=1}^{d} (m_\Delta^{(i)})^2$.
$M_\Delta^{(i)} := \max\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|, \quad M_\Delta^2 = \sum\limits_{i=1}^{d} (M_\Delta^{(i)})^2$.
Тогда $m_\Delta l(\Delta) \leq l(\gamma|_\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$ (где $l(\Delta)$ – длина отрезка Δ).

Доказательство. Пусть $t_0 < ... < t_n$ – дробление Δ, a_k – длина k-ого звена ломанной, построенной по этому дроблению.
$a_k^2 = \sum\limits_{i=1}^{d} (\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}))^2$.
$|\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| = (t_k - t_{k-1}) \cdot |\gamma_i'(\xi_{ki})|$, где $\xi_{ki} \in (t_{k-1}, t_k)$ (теорема Лагранжа)
$(t_k - t_{k-1}) m_\Delta^{(i)} \leq (t_k - t_{k-1}) \cdot |\gamma_i'(\xi_{ki})| \leq (t_k - t_{k-1}) M_\Delta^{(i)}$
Тогда $(t_k - t_{k-1})^2 \cdot m_\Delta^2 \leq a_k^2 \leq (t_k - t_{k-1})^2 \cdot M_\Delta^2 \Rightarrow (t_k - t_{k-1}) \cdot m_\Delta \leq a_k \leq (t_k - t_{k-1}) \cdot M_\Delta$.
Просуммируем по всем звеньям: $\Rightarrow m_\Delta l(\Delta) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \leq M_\Delta l(\Delta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_\Delta l(\Delta) \leq \underbrace{\sup \sum_{k=1}^{n} a_k^2}_{=l(\gamma|_\Delta)} \leq M_\Delta l(\Delta)$$

$\square$

Теорема 3.2.3. ***Теорема о длине гладкого пути***
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ – гладкий путь. Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + ... + \gamma_d'(t)^2} dt$.

Доказательство. Рассмотрим дробление $a = t_0 < ... < t_n = b$. Пусть $m_k := m_{[t_{k-1},t_k]}, M_k := M_{[t_{k-1},t_k]}$.

По лемме: $m_k(t_k - t_{k-1}) \le l(\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}) \le M_k(t_k - t_{k-1})$, $\Delta = [t_{k-1}, t_k]$

А также: $m_k(t_k - t_{k-1}) \le \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \le M_k(t_k - t_{k-1})$

Просуммируем по k:

$\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \le l(\gamma) \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$

$\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \le \int\limits_{a}^{b} \|\gamma'(t)\| dt \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$

Чтобы доказать равенство, достаточно будет доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \to 0$.

$M_k - m_k = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]})^2} - \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d}(m^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]})^2} \overset{\text{н-во Минковского}}{\le} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]} - m^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]})^2} \le \sum\limits_{i=1}^{d} |M^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]} - m^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]}| = \sum\limits_{i=1}^{d}(|\gamma_i'(\xi_{ki})| - |\gamma_i'(\nu_{ki})|) \le \sum\limits_{i=1}^{d} |\gamma_i'(\xi_{ki}) - \gamma_i'(\nu_{ki})| \le \sum\limits_{i=1}^{d} w_{\gamma_i'}(|\tau|) =: f(|\tau|) \underset{\text{мелкость}\to 0}{\to} 0$

где $\xi_{ki}, \nu_{ki} \in [t_{k-1}, t_k]$

Просуммируем:

$\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \le \sum\limits_{k=1}^{n} f(|\tau|)(t_k - t_{k-1}) = f(|\tau|) \cdot (b - a) \underset{\text{мелкость}\to 0}{\to} 0$ ☐

Следствие.

1. *Длина графика функции* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1[a, b]$ *равна* $\int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

   Доказательство. $\gamma(t) = \binom{t}{f(t)} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ – это график функции.

   $\gamma'(t) = \binom{1}{f'(t)}$

   $\int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = l(\gamma)$. ☐

2. *Длина пути в полярных координатах* $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *(непрерывно дифференцируема) равна* $\int\limits_{a}^{b} \sqrt{r^2(t) + r'(t)^2}$.

   $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *непрерывно.*

   Доказательство. $\gamma(t) = \binom{r(t)\cos t}{r(t)\sin t}, \gamma'(t) = \binom{r'(t)\cos t - r(t)\sin t}{r'(t)\sin t + r(t)\cos t}$ и подставляем. ☐

3. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ *гладкий путь. Тогда* $l(\gamma) \le (b - a) \cdot \max\limits_{t \in [a,b]} \|\gamma'(t)\|$.

   Доказательство. $l(\gamma) = \int\limits_{a}^{b} \|\gamma'(t)\| dt \le (b - a) \max\limits_{t \in [a,b]} \|\gamma'(t)\|$ ☐

3.3 Линейные операторы

Определение 3.3.1. Пусть X, Y – векторные пространства. Тогда $A : X \to Y$ – *линейный оператор*, если $A(\lambda x + \nu y) = \lambda A(x) + \nu A(y)\ \forall x, y \in X\ \forall \lambda, \nu \in \mathbb{R}$.

Утверждение 3.3.1.

1. $A(0_X) = 0_Y$.

   Доказательство. $\lambda = \nu = 0$ и подставляем: $\lambda x + \nu y = 0_X, \lambda A(x) + \nu A(y) = 0_Y$. □

2. $A(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A(x_k)$.

   Доказательство. Индукция. □

Определение 3.3.2. Пусть $A, B : X \to Y$ линейные операторы, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $A + B : X \to Y$. $(A + B)(x) := A(x) + B(x)$ – линейный оператор.
2. $\lambda A : X \to Y$. $(\lambda A)(x) := \lambda A(x)$ – линейный оператор.

3.4 Матричная запись линейного оператора

Определение 3.4.1. $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} i$

$A(e_i) \in \mathbb{R}^n$, $A(e_i) = A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ ... \\ a_{in} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ ... \\ x_{in} \end{pmatrix}$

$A(x) = A(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i A(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i A_i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ ... \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + ... + x_m a_{m1} \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + ... + x_m a_{m2} \\ ... \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + ... + x_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 3.4.2. X и Y – нормированные пространспва, $A : X \to Y$ – линейный оператор. $\|A\| := \sup\limits_{\|x\|_X \le 1} \|A_X\|_Y$ – *норма*. Если $\|A\| < +\infty$, то A – *ограниченный оператор*.

Замечание.

1. $A(B_1(0)) \subset B_{\|A\|}(0)$.

2. Ограниченный оператор $\neq$ ограниченное отображение. Более того, линейный оператор, являющийся ограниченным отображением – тождественный ноль.

   Если $A_{x_0} \neq 0$, то $\|A(tx_0)\| = \|tAx_0\| = |t| \cdot \|Ax_0\| \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$

3. Бывают неограниченные операторы.

   $X := \{(x_1, x_2, ...) \mid$ лишь конечное число $x_n \neq 0\}$, $\|(x_n)\| := \max\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$, $Ax := \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$.

Утверждение 3.4.1. Свойства нормы:

1. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

   Доказательство. $\|A + B\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|(A + B)x\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax + Bx\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$. $\square$

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Доказательство. $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|\lambda Ax\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$ $\square$

3. Если $\|A\| = 0$, то $A \equiv 0$.

   Доказательство. Если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\| = 0$ $\forall x \in X : \|x\| \leq 1 \Rightarrow Ax = 0$ $\forall x \in X : \|x\| \leq 1$.

   Возьмем $y_{\neq 0} \in X$. $\frac{y}{\|y\|}$ – единичный вектор. Тогда $\underbrace{A(\frac{y}{\|y\|})}_{= \frac{1}{\|y\|} Ay} = 0 \Rightarrow Ay = 0$ $\square$

4. $\| \cdot \|$ – норма на векторном пространтсве ограниченных линейных операторов.

Теорема 3.4.1. $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{C \in \mathbb{R} \mid \|Ax\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$
$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5$

Доказательство.

- $N_1 \geq N_2$ и $N_1 \geq N_3$ очевидно (множество больше $\Rightarrow$ sup больше).

- $N_3 = N_4$

  $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\|$

  $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \neq 0} \|A(\frac{x}{\|x\|})\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

- $N_4 = N_5$

  $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ – наименьшая верхняя граница, то есть наименьшее $C \in R$, для которого $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C \Leftrightarrow \|Ax\| \leq C\|x\|$

- $N_2 \geq N_1$

  Возьмем $x \in X : \|x\| \leq 1$. Тогда $\|(1-\varepsilon)x\| \leq 1 - \varepsilon < 1$

  $(1-\varepsilon)\|Ax\| = \|A(1-\varepsilon)x\| \leq N_2 \Rightarrow (1-\varepsilon)N_1 \leq N_2$ и устремим ε к 0.

- $N_3 \geq N_1$

  Возьмем $x \in X : \|x\| \leq 1$ и $x \neq 0$. Тогда $y = \frac{x}{\|x\|}$ – единичный вектор.

  $N_3 \geq \|Ay\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|x\| \cdot N_3 \leq N_3 \Rightarrow N_1 \leq N_3$

  $\square$

Следствие.

1. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

   Доказательство. Это $N_4 : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ $\square$

2. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

   Доказательство. $\|AB\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|A(Bx)\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|A\| \cdot \|Bx\| = \|A\| \cdot \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| \cdot \|B\|$ $\square$

Теорема 3.4.2. *Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда равносильны:*

1. *A – ограниченный оператор.*
2. *A непрерывен в нуле.*
3. *A непрерывен во всех точках.*
4. *A равномерно непрерывен.*

Доказательство. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ очевидны.

$1 \Rightarrow 4: \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \cdot \|x-y\|$ и возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Если $\|x-y\| < \delta$, то $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$.

$2 \Rightarrow 1$: Возьмем $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ из определения непрерывности в нуле.

$\forall x \in X \ \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| \leq \varepsilon = 1$. Тогда $\|A\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$:

$\|x\| < \delta \Rightarrow$ если $\|y\| < 1$, то $\|\delta y\| < \delta$ и $\|A(\delta y)\| = \delta\|Ay\| < \varepsilon \Rightarrow \|A\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$. □

Теорема 3.4.3. *$A : \mathbb{R}^n \to R^m$ – линейный оператор. Тогда $\|A\|^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2$. В частности A – ограниченный оператор.*

Доказательство. $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k)^2 \overset{\text{К.-Б.}}{\leq} \sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}_{=\|x\|^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2$

$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2}$ □

4. Ряды

4.1 Ряды в нормированном пространстве

Определение 4.1.1. Пусть X – нормированное пространство. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, где $x_n \in X$ – *ряд.*

Частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k := S_n$.

Если существует $\lim S_n$, то он называется *суммой ряда.*

Ряд сходится, если $\lim S_n$ существует.

Замечание. Для числовых рядов сходимость означает, что $\lim S_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.1.1. ***Необходимое условие сходимости***

Если ряд сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. $\lim x_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$ □

Утверждение 4.1.1. Свойства:

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n)$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \beta\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то расстановка скобок не меняет сумму.

   $(x_1 + x_2 + x_3)_{=S_3} + x_{4_{=S_4}} + (x_5 + x_6)_{=S_6} + ...$

   Замечание. Расстановка скобок – выбор подпоследовательности в последовательности частичных сумм.

Теорема 4.1.2. ***Критерий Коши***

Пусть X – полное нормированное пространство.
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *– сходится* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m \geq N\ \|\sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k\| < \varepsilon$.

Доказательство. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится $\Leftrightarrow$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ имеет предел $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная последовательность $\Leftrightarrow \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m \geq N\ \|S_n - S_m\| = \|\sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k\| < \varepsilon$ □

Определение 4.1.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится абсолютно*, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится (для числовых рядов это означает, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится).

Теорема 4.1.3. *Пусть X – полное нормированное пространство. Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *абсолютно сходится, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится.*

Доказательство. Критерий Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ абсолютно сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m \geq N\ \underbrace{\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|}_{\geq \|\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} x_k\|} < \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится. □

Теорема 4.1.4. ***Группировка членов ряда***

1. *Если каждая группа содержит не более M слагаемых и $\lim x_n = 0$, то из сходимости сгрупированного ряда следует сходимость исходного.*

   Доказательство. По условию $\lim S_{n_k} = S$ и $n_{k+1} - n_k \leq M$.

   Возьмем какое-то n. Тогда $n_k \leq n < n_{k+1}$ для какого-то k.

   $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + ... + x_n$.

   $\|S_n - S\| = \|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + ... + x_n\| \leq \underbrace{\|S_{n_k} - S\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|x_{n_k+1}\|}_{<\varepsilon} + ... + \underbrace{\|x_n\|}_{<\varepsilon} < \varepsilon \cdot (M+1)$

   $\exists K : \forall k \geq K\ \|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$

   $\exists N : \forall m \geq N\ \|x_m\| < \varepsilon$ □

2. *Для числовых рядов: если члены в каждой группе одного знака, то из сходимости сгрупированного ряда следует сходимость исходного.*

Доказательство. Возьмем какое-то n: $n_k \leq n < n_{k+1}$. Пусть в блоке все слагаемые неотрицательные.

$$\left.\begin{array}{l} S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + ... + x_n \geq S_{n_k} \\ S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_k+1} - x_{n_k+2} - ... - x_n \leq S_{n_{k+1}} \text{ (вычитаем неотрицательные числа)} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underset{\to S}{S_{n_k}} \leq S_n \leq \underset{\to S}{S_{n_{k+1}}}$ или $S_{n_{k+1}} \leq S_n \leq S_{n_k}$ (если в блоке все слагаемые ≤ 0)$\Rightarrow \lim S_n = S$. □

4.2 Знакопостоянные ряды

Теорема 4.2.1. *Пусть $a_n \geq 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ последовательность частичных сумм ограничена.*

Доказательство. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \Rightarrow S_n$ монотонно возрастает
$\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow S_n$ имеет конечный предел $\Leftrightarrow S_n$ ограничена (так как монотонна). □

Теорема 4.2.2. ***Признак сравнения***
Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда:

1. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*
2. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.*

Доказательство. Второй пункт – отрицание первого, поэтому докажем только первый.
$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \Rightarrow A_n \leq B_n$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow B_n$ – ограниченная последовательность $\Rightarrow A_n$ – ограниченная последовательность $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. □

Следствие.

1. *Если $a_n, b_n \geq 0$, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

   Доказательство. $0 \leq a_n \leq C \cdot b_n$ □

2. *Если $a_n, b_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково.*

   Доказательство. $a_n \sim b_n \Rightarrow \frac{1}{2}a_n \leq b_n \leq 2b_n$ при больших n, □

Теорема 4.2.3. ***Признак Коши***
Пусть $a_n \geq 0$.

1. *Если* $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ *при больших* n*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

   Доказательство. Поменяем начальные a-шки так, чтобы $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ для всех $n \Rightarrow a_n \leq q^n$
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ – сходящийся (геометрическая прогрессия с $q < 1$) $\Rightarrow$ признак сравнения. □

2. *Если* $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$ *при больших* n*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

   Доказательство. Сколь угодно далеко есть члены ряда больше 1 $\Rightarrow$ нет необходимого условия сходимости. □

3. *Пусть* $q^* = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$.

   Если $q^* < 1$*, то ряд сходится.*

   Если $q^* > 1$*, то ряд расходится.*

   Замечание. Если $q^* = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

   Доказательство. Если $q^* > 1$ и $\overline{\lim}$ – какой-то частичный предел $\Rightarrow$ найдется последовательность n_k: $\lim \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow$ при больших k $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow$ ряд расходится по второму пункту.

   Если $q^* < 1$ и $q^* = \overline{\lim} = \lim \underbrace{\sup\limits_{k \geq n} \sqrt[n_k]{a_{n_k}}}_{:=b_n}$.

   При больших n $\sqrt[n]{a_n} \leq b_n < q \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow$ по первому пункту ряд сходится. □

Теорема 4.2.4. ***Признак Даламбера***
Пусть $a_n > 0$.

1. *Если* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$ *при больших* n*, то ряд сходится.*

   Доказательство. Подправим начало так, чтобы неравенство было верным для всех n.

   $a_{n+1} \leq d \cdot a_n \leq d^2 \cdot a_{n-1} \leq ... \leq d^n \cdot a_1 \Rightarrow a_n = \mathcal{O}(d^{n-1})$
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^{n-1}$ – сходится, так как $d < 1$. □

2. *Если* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq$ *при больших* n*, то ряд расходится.*

   Доказательство. $a_n \leq a_{n+1}$ последовательность положительна и возрастает $\Rightarrow$ нет стремления к 0 $\Rightarrow$ ряд расходится. □

3. *Пусть $d^* = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.*

   Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

   Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

   Замечание. Если $d^* = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

   Доказательство. Пусть $d^* < 1$. Тогда $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1 \Rightarrow$ при больших n $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d \Rightarrow$ по 1 пункту ряд сходится.

   Пусть $d^* > 1$. Тогда $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1 \Rightarrow$ при больших n $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ по 2 пункту ряд расходится. □

Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится: $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ и $\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

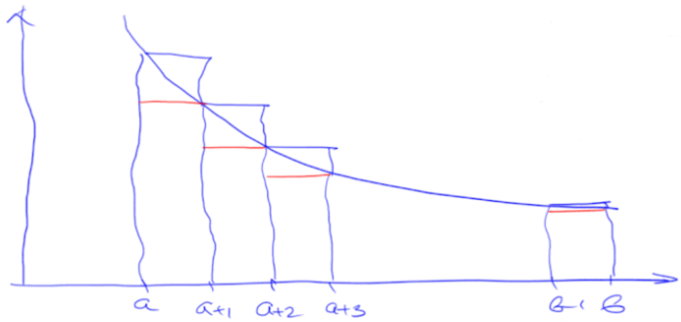
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится: $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$ и $\lim \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$

Теорема 4.2.5. *Пусть $a_n > 0$. Если $d^* = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$.*

Доказательство. $\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln a_n}{n}$ по теореме Штольца надо найти $\lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln d^* \Rightarrow \lim \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d^* \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$. □

Теорема 4.2.6. *Пусть f монотонна и $f \geq 0$. Тогда $|\sum\limits_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b f(x)dx| \leq \max\{f(a), f(b)\}$.*

Доказательство. Пусть f убывает.



$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \geq \int_a^b f(x)dx \geq \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{k=a+1}^{b} f(k) = f(a)$$

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)dx \geq \sum_{k=a}^{b-1} f(k) = f(b)$$

□

Упражнение. Если f монотонна, то $|\sum\limits_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b f(x)dx| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$.

Теорема 4.2.7. ***Интегральный признак сходимости ряда (Коши).***
Пусть $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ *монотонно убывает. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ *и* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ *ведут себя одинаково.*

Доказательство. Пусть $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ и $F(y) := \int\limits_1^{y} f(x)dx$.
Так как все неотрицательно, то:

1. $\int\limits_1^{y} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow F(y)$ ограничена сверху.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ сходится $\Leftrightarrow S(n)$ ограничена сверху.

Поэтому нужно понять, что ограниченность $S_n \Leftrightarrow$ ограниченность $F(n)$.
$|S_n - F(n)| = |\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_1^{n} f(x)dx| \leq f(1)$ (по предыдущей лемме, $f(1)$ – максимум, так как f убывает).

$\Leftarrow$. Если $S_n \leq M$, то $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \leq M + f(1) \Rightarrow F(y) \leq M + f(1)$.

$\Rightarrow$. Если $F(y) \leq M$, то $S_n \leq M + f(1)$.

□

Пример. Эта теорема позволяет смотреть на интегралы вместо рядов, чтобы отвечать на вопрос об их сходимости (что иногда проще, чем исследовать на сходимость сам ряд).

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ ведет себя также, как $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ведет себя также, как $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x|_2^{+\infty} = +\infty$ расходится.

Следствие. *Если* $0 \leq a_n \leq \frac{C}{n^p}$ *при* $p > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^p}$ *сходится.*

Доказательство. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^p}$ – сходится, а дальше признак сравнения. □

4.3 Знакопеременные ряды

Теорема 4.3.1. ***Преобразование Абеля.***
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$, *где* $A_k = a_1 + ... + a_k$, $A_0 = 0$.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum\limits_{j=2}^{n} A_{j-1} b_j \overset{j=k+1}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ □

Замечание. Получили некоторый дискретный аналог интегрирования по частям (потому что частичная сумма = аналог первообразной, а разность соседних членов ряда = аналог дифференцирования).

Теорема 4.3.2. ***Признак Дирихле.***

$$\begin{cases} 1.\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \text{ ограничены.} \\ 2.\ b_n \text{ монотонны.} \\ 3.\ \lim b_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится.}$$

Доказательство. Распишем частичную сумму через преобразование Абеля:

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) \rightsquigarrow$ хотим доказать, что S_n имеет предел.

$\lim A_n b_n = 0$ – ограниченная A_n на бесконечно малую b_n. $\lim \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ – если сходится, то сходится к сумме ряда, то есть надо доказать, что ряд сходится.

Проверим абсолютную сходимость:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} M \cdot |b_k - b_{k+1}|$ (так как A_k – ограниченны).

Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}|$ сходится:

$\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = |\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})|$ (разности одного знака, так как b_n монотонны) $=$

$= |(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + .. + (b_n - b_{n+1})| = |b_1 - b_{n+1}| \to b_1 \Rightarrow$ частичная сумма сходится $\Rightarrow$ ряд сходится. □

Теорема 4.3.3. ***Признак Абеля***

$$\begin{cases} 1.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.} \\ 2.\ b_n \text{ монотонны.} \\ 3.\ b_n \text{ ограничены.} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится.}$$

Доказательство. b_n монотонны и ограниченны $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim b_n = b$.

Пусть $\tilde{b_n} := b_n - b$, $\tilde{b_n}$ монотонны и $\lim \tilde{b_n} = 0$.

Посмотрим на частичные суммы $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow A_n$ ограничена.

a_n и $\tilde{b_n}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле и тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b_n}$ сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b_n}}_{\text{сх-ся}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b}_{=b \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх-ся по усл.}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится.}$$ □

Упражнение. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ – сходится. Указание – использовать формулу суммы $\sin x$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ неизвестно сходится или нет (конкретно Храброву, и вообще социуму).

Определение 4.3.1. Пусть $a_n \geq 0$. Тогда *знакочередующийся ряд* – это ряд $\sum\limits_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = $ $= a_1 - a_2 + a_3 - ...$

Теорема 4.3.4. ***Признак Лейбница.***
Если a_n монотонно убывают и $\lim a_n = 0$, то $\sum\limits_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится. Более того, $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$, где S – сумма ряда, S_n – частичная сумма.

Доказательство. $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2_n+2} \geq S_{2n}$
$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2_n+1} \leq S_{2n-1}$
$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset ...$ и $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ – это стягивающиеся отрезки. Тогда есть единственная точка S, лежащая во всех отрезках и это предел их концов, то есть предел частичных сумм $\Rightarrow S$ – сумма ряда. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$
Если $p > 0$, то ряд *сходится*, так как $a_n = \frac{1}{n^p} \searrow$.
Если $p \leq 0$, то ряд *расходится*, так как $a_n \not\to 0$.

Пример. Ряд Лейбница.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$
$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1) \to \ln 2$.

Пример. $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + .. + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) + ...$
$\tilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(\underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2}}_{=\frac{1}{4k-2}} - \frac{1}{4k}) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{1}{2}S_{2n} \to \frac{\ln 2}{2}$
Переставили члены ряда и сумма поменялась...

Определение 4.3.2. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – ряд. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$ – *перестановка ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Теорема 4.3.5.

1. *Если $a_n \geq 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (тут могут быть $+\infty$).*

2. *Если ряд абсолютно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.*

Доказательство.

1. Пусть $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $\tilde{S}_n := \sum\limits_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}$, S и $\tilde{S}$ – суммы рядов (существуют, так как слагаемые неотрицательны).

$\tilde{S}_n = a_{\varphi(1)} + .. + a_{\varphi(n)} \le S_{\max\{\varphi(1),...,\varphi(n)\}} \le S \Rightarrow \underset{\to \tilde{S}}{\tilde{S}_n} \le S \Rightarrow \tilde{S} \le S$.

Все симметрично, поэтому если мы напишем обратную перестановку, то получим, что $S \le \tilde{S} \Rightarrow S = \tilde{S}$.

2. Пусть $(a_n)_+ = \max\{a_n, 0\}$, $(a_n)_- = \max\{-a_n, 0\}$.

   $0 \le (a_n)_\pm \le |a_n|$ и $a_n = (a_n)_+ + (a_n)_-$

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_\pm$ – сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{\varphi(n)})_\pm$ сходится по тем же суммам (сумма неотрицательных членов).

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_+ - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_-}_{\text{сх-ся}} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{\varphi(n)})_+ - \sum_{n=1}^{\infty}(a_{\varphi(n)})_- = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{\varphi(n)})$$

□

Упражнение. Доказать 2 для $a_n \in \mathbb{C}$.

Определение 4.3.3. $\sum a_n$ *сходится условно*, если $\sum a_n$ – сходится, а $\sum |a_n|$ – расходится.

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_\pm = +\infty$.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_\pm$ конечна, $(a_n)_- = (a_n)_+ - a_n$.

$\sum (a_n)_- = \underbrace{\sum (a_n)_+ - \sum a_n}_{\text{сх-ся}} \Rightarrow \sum (a_n)_-$ сходится.

$\sum |a_n|_- = \underbrace{\sum (a_n)_+ \sum a_n}_{\text{сх-ся}}$ сходится. Противоречие. □

Теорема 4.3.6. ***Теорема Римана.***
Пусть $\sum a_n$ сходится условно. Тогда $\forall S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $\sum a_{\varphi(n)} = S$. Также существует перестановка, для которой ряд не имеет суммы.

Доказательство. Берем $(a_n)_+$ и выкидываем все, для которых $a_n \le 0$, остальное перенумеруем и назовем b_n. Берем $(a_n)_-$ и выкидываем все, для которых $a_n > 0$, остальное перенумеруем и назовем c_n (разделили все члены ряда на положительные и неположительные).

$\sum b_n = \sum (a_n)_+ = +\infty \quad \sum c_n = \sum (a_n)_- = +\infty$.

Для каждого a_n есть ровно одна b_k или c_k, т.ч. $a_n = b_k$ или $a_n = c_k$ (существует биекция).

Еще знаем, что $\lim b_n = \lim c_n = 0$.

1. $S \in \mathbb{R}$

   Берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через S.

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1} \le S < b_1 + .. + b_2 + .. + b_{n_1}$

$S_1 - b_{n_1} \leq S < S_1$

Берем $-c$-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через S.

$b_1 + b_2 + ... + b_{n_1-1} - c_1 - .. - c_{m_1-1} < S \leq b_1 + .. + b_2 + .. + b_{n_1} - c_1 - .. - c_{m_1}$

$S_2 < S \leq S_2 + c_{m_1}$

Снова берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через S.

$b_1 + b_2 + ... + b_{n_1-1} - c_1 - .. - c_{m_1-1} + b_{n_1+1} + .. + b_{n_2-1} \leq S < b_1 + .. + b_2 + .. + b_{n_1} - c_1 - .. - c_{m_1} + b_{n_1+1} + .. + b_{n_2}$

$S_3 - b_{n_2} \leq S < S_3$

У нас получилась перестановка (на каждом шаге берем какую-то b-шку или c-шку, пустых шагов не бывает).

Так можно брать, так как ряд b_n и ряд c_n расходящиеся, их сумма может быть сколь угодно большой (иначе сумма была бы конечная с какого-то номера). При этом строгие знаки нужны, чтобы не было пустых шагов.

Осталось проверить, что сумма полученной перестановки равна S. Расставим скобки вокруг блоков с одним знаком и проверим, что такая последовательность частичных сумм стремится к S.

$|S_{2k+1} - S| \leq b_{n_k} \to 0$

$|S_{2k} - S| \leq c_{m_k} \to 0$

2. $S = +\infty$

   Берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через $1 \rightsquigarrow S_1 > 1$, $\lim S_{2k-1} = +\infty$.

   Берем одну $-c$-шку.

   Берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через $2 \rightsquigarrow S_3 > 2$, $\lim S_{2k-1} = +\infty$.

   Берем одну $-c$-шку.

   И так далее. Для $-\infty$ аналогично.

3. Нет суммы.

   Берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через $1 \rightsquigarrow S_1 > 1$.

   Берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через $-1 \rightsquigarrow S_2 < -1$.

   Берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через $1 \rightsquigarrow S_3 > 1$.

   Берем b-шки до тех пор, пока сумма не перевалит через -1. И так далее.

$\square$

Теорема 4.3.7. ***Теорема Коши о произведении рядов.***
Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *абсолютно сходящиеся, то ряд, составленный из всевозможных произведений* $a_k b_m$*, абсолютно сходится и его сумма* AB*.*

Доказательство. Пусть $A^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$.
Рассмотрим сумму $\sum |a_i b_j| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} |b_j| \le A^* \cdot B^*$, где n – наибольший из индексов i, встречающийся слева, m – наибольший из индексов j, встречающийся слева
$\Rightarrow \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_i b_j|$ абсолютно сходящийся $\Rightarrow$ сумма ряда $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$ не зависит от порядка суммирования.

$$\begin{array}{llll} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \ \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \ \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \ \dots \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \\ \dots & & & \end{array}$$

$$S_{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\to A} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_j}_{\to B} \to AB$$

$\lim S_{n^2} = AB \Rightarrow S = AB.$ □

Определение 4.3.4. *Произведение рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$.

$$\begin{array}{llll} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \ \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \ \dots & \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 \ \dots & \end{array}$$

Замечание. Из теоремы Коши следует, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

Теорема 4.3.8. ***Теорема Мертенса.***
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *и один из рядов абсолютно сходящийся, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = AB$*.*

Доказательство. Не будет. □

Замечание.

1. Здесь важен порядок суммирования, так как нет абсолютной сходимости.

2. Обычно сходимости не хватает.

Пример. $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, но не абсолютно.
$c_n = (-1)^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}})$
Каждое слагаемое не меньше $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n}$
$n^2 \geq k(n-k)$
Тогда $|c_n| \geq n \cdot \frac{1}{n} = 1$ и ряд расходится, так как $c_n \not\to 0$.

Теорема 4.3.9. ***Теорема Абеля.***
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = C$, *где* $c_n = a_1 b_n + .. + a_n b_1$, *то* $AB = C$.

Лемма 4.3.1. Пусть $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ – конечные пределы. Тогда $\frac{x_1 y_n + ... + x_n y_1}{n} \to xy$.

Доказательство.

1. Пусть $y = 0$. Надо доказать, что $x_1 y_n + ... + x_n y_1 = o(n)$.

   $|x_n| \leq M$, $|y_n| \leq M$, $\lim y_n = 0 \Rightarrow \exists N \ \forall n \geq N \ |y_n| < \varepsilon$.

   $|x_1 y_n + ... + x_n y_1| \leq \underbrace{|x_1 y_n|}_{<\varepsilon M} + \underbrace{|x_2 y_{n-1}|}_{<\varepsilon M} ... + \underbrace{|x_{n-N+1} y_N|}_{\leq M^2} + ... + \underbrace{|x_n y_1|}_{\leq M^2} < (n-N+1)\varepsilon M + (N-1)M^2$

   $\frac{x_1 y_n + ... + x_n y_1}{n} < \underbrace{(1 - \frac{N-1}{n})}_{<1}\varepsilon M + \underbrace{\frac{N-1}{n}}_{<\varepsilon \text{ при больших } n} M^2 < \varepsilon M + \varepsilon$

2. Пусть $y_n = y$.

   $\frac{x_1 y_n + ... + x_n y_1}{n} = y \cdot \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \to xy$ (по следствию из теоремы Штольца).

3. Общий случай $\tilde{y_n} = y_n - y \to 0$

   $\frac{x_1 \tilde{y_n} + ... + x_n \tilde{y_1}}{n} \to 0$, $\frac{x_1 y + ... + x_n y}{n} \to xy$ и сложим.

□

Доказательство. Пусть $A_n := \sum\limits_{n=1}^{n} a_k$, $B_n := \sum\limits_{n=1}^{n} b_k$ и $C_n := \sum\limits_{n=1}^{n} c_k$.
По лемме знаем, что $\frac{A_1 B_n + ... + A_n B_1}{n} \to AB$
$\frac{A_1 B_n + ... + A_n B_1}{n} = \frac{1}{n}(n a_1 b_2 + (n-1)(a_1 b_2 + a_2 b_1) + (n-2)(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + ... + (a_1 b_n + ... + a_n b_1)) =$
$\frac{n c_1 + (n-1)c_2 + ... + c_n}{n} = \frac{C_1 + ... + C_n}{n} \to C$ □

4.4 Бесконечные произведения

Определение 4.4.1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – *бесконечное произведение*, $P_n := x_1 x_2 ... x_n$ – *частичное произведение.*

Если существует $\lim P_n$, то его называют *значением бесконечного произведения.*

Если он конечен и отличен от 0, то бесконечное проивзедение *сходится.*

Пример.

1. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$

   $P_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{n^2})=\frac{(2^2-1)(3^2-1)...(n^2-1)}{2^2\cdot3^2\cdot...\cdot n^2}=\frac{1\cdot3\cdot2\cdot4...\cdot(n-1)(n+1)}{2^2\cdot3^2\cdot...\cdot n^2}=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4n^2})=\frac{2}{\pi}$

   $P_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{4^2})...(1-\frac{1}{(2n)^2})=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n-1)(2n+1)}{2^2\cdot4^2\cdot...\cdot(2n)^2}=\frac{(2n+1)((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2}\to\frac{2}{\pi}$

Упражнение.

1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(2n-1)^2})=\frac{\pi}{4}$.

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1}{1-x}$ при $|x|<1$.

Утверждение 4.4.1. Свойства бесконечного произведения:

1. Конечное число ненулевых начальных множителей не влияет на сходимость.

   Комментарий: добавляется константа, на которую нужно умножать, на существование предела не влияет.

2. Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ сходится, то $\lim x_n=1$.

   Доказательство. $x_n=\frac{P_n}{P_{n-1}}\to\frac{P}{P}=1$, если $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty}x_n$. пользуемся тем, что $P\neq0$ и $P\neq\pm\infty$. □

3. У сходящегося произведения все сомножители, начиная с некоторого номера, положительны.

   Комментарий: стремятся к 1 $\Rightarrow$ можно рассматривать только такие произведения.

4. Если $x_n>0$, то для сходимости $\prod\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ необходимо и достаточно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln x_n$. Если L – сумма ряда, то $P=e^L$.

   Доказательство. $S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln x_n\Leftrightarrow P=\prod\limits_{n=1}^{\infty}x_n=e^{S_n}$. □

Пример. Пусть p_n – простое n-ое число. Рассмотрим $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{p_k-1}=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ – расходится. Более того, $\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{p_k}{p_k-1}\geq H_n$ – n-ое гармоническое число.

$\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>\prod\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{p_k^j}=\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdot p_n^{\alpha_n}}\geq\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=H_n\to+\infty$

$0\leq\alpha_1,...,\alpha_n\leq n$

$\frac{1}{1-x}>\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ при $0<x<1$.

Теорема 4.4.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ *расходится. Более того* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \geq \ln\ln n - 1$.

Доказательство. $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_k-1} \geq H_n$

$\sum\limits_{k=1}^{n} -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \geq \ln H_n$

Докажем: $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \leq \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2}$

$-\ln(1-t) \leq t + t^2$ при $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1-t} \leq 1 + 2t \quad (1 \leq (1+2t)(1-t) = 1 + t - 2t^2)$

Тогда: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \geq \ln H_n \geq \ln\ln n$

Поймем, что слева за константа: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$ □

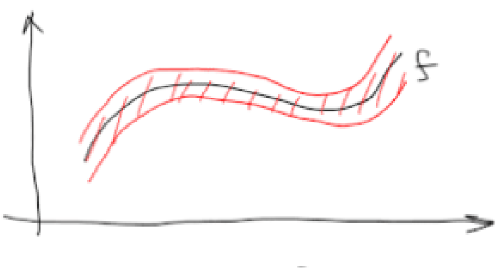
Замечание. На самом деле $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \ln\ln n + \mathcal{O}(1)$.

Упражнение.

1. $\sum\limits_{k \leq p \leq k^2, p \text{ – простое}} \leq \frac{4}{3}$
2. $\sum\limits_{p \leq n} \leq 2\ln\ln n + 4$

4.5 Функциональные последовательности и ряды

Определение 4.5.1. Пусть $f, f_n : E \to \mathbb{R}$. f_n *сходятся к* f *поточечно*, если $\lim f_n(x) = f(x)\ \forall x \in E$.



Определение 4.5.2. Пусть $f, f_n : E \to \mathbb{R}$. f_n *сходятся к* f *равномерно на* E ($f_n \rightrightarrows f$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{=N(\varepsilon)}{N} : \forall n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Замечание. Поточечная сходимость с помощью $\varepsilon - N$: $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{=N(\varepsilon,x)}{N} : \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Замечание. $f_n(x) = x^n \quad E = (0,1) \quad f(x) \equiv 0$

$\lim f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1)$ – поточечная сходимость есть.

Заметим, что если есть равномерная сходимость, то поточечная тоже есть к такой же функции (нашлась такая универсальная, которая точно подойдет под условия поточечной сходимости).

Пусть $f_n \rightrightarrows 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \underbrace{\forall x \in (0,1)\ x^n < \varepsilon}_{\text{так не бывает}} \Rightarrow$ равномерной сходимости нет.

Теорема 4.5.1. *Пусть $f, f_n : E \to \mathbb{R}$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $E \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.*

Доказательство.

$$\Rightarrow\ f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists \underset{=N(\varepsilon)}{N} : \forall n \geq N\ \underbrace{\forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\Rightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists \underset{=N(\varepsilon)}{N} : \forall n \geq N\ \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in E} |f_n(x_- f(x)| \to 0$$

$$\Leftarrow\ \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists \underset{=N(\varepsilon)}{N} : \forall n \geq N\ \sup_{x\in E} \underset{\geq |f_n(x)-f(x)| \quad \forall x\in E}{|f_n(x) - f(x)|} < \varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists \underset{=N(\varepsilon)}{N} :$$
$$\forall n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$

□

Следствие.

1. *Если $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n\ \forall x \in E$ и $\lim a_n = 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E.*

   Доказательство. $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \to 0$ □

2. *Если существуют $x_n \in E : \underbrace{f_n(x_n) - f(x_n)}_{=:b_n} \not\to 0$, то нет равномерной сходимости.*

   Доказательство. $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |b_n|$ (значение в какой-то точке)

   $|b_n| \not\to 0 \Rightarrow \exists b_{n_k} : |b_{n_k}| > \delta > 0 \Rightarrow \sup \ldots > \delta$ и $\not\to 0$. □

Определение 4.5.3. Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$. Последовательность f_n *равномерно ограничена*, если $\exists M$, т.ч. $\forall n\ \forall x \in E\ |f_n(x)| \leq M$.

Теорема 4.5.2. *Пусть f_n равномерно ограничена, $g_n \rightrightarrows 0 \Rightarrow f_n g_n \rightrightarrows 0$.*

Доказательство. Если $|f_n(x) g_n(x)| \leq M |g_n(x)|$, то и $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) g_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in E} |g_n(x)| \cdot M \to 0$. □

Теорема 4.5.3. ***Критерий Коши для равномерной сходимости последовательности функций.***
Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$. Тогда f_n равномерно сходится на E у некоторой функции $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E.

$$\left.\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m \geq N\ \forall x \in E\ |f_m(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad x \in E.$$

$\Leftarrow$. Зафиксируем $x \in E$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x)$ – фундаментальная последовательность вещественных чисел (для каждого конкретного аргумента) $\Rightarrow$ она имеет конечный предел $f(x) := \lim f_n(x)$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\underset{m\to\infty}{\to} |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E.

$\square$

Определение 4.5.4. *Пространство* $l^\infty(E) := \{f : E \to \mathbb{R}$ ограниченные$\}$.
$\|f\|_{l^\infty(E)} = \|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$ – *норма.*

Замечание. Несложно проверить, что это норма: неотрицательность, $\sup = 0 \Rightarrow f \equiv 0$, выносимость константы – очевидно.
Неравенство треугольника тоже банально.

Определение 4.5.5. Пространство $C(K) := \{f : K \to \mathbb{R}$ непрерывное$\}$
$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty : \max\limits_{x\in K} |f(x)|$

Замечание. $C(K) \subset l^\infty(K)$ – непрерывная функция на компакте ограничена и нормы совпадают (sup и max – это одно и то же).

Теорема 4.5.4. $l^\infty(E)$ – *полное пространство.*

Доказательство. Пусть $f_n \in l^\infty(E)$ – фундаментальная последовательность.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$
$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)| \quad \forall x \in E$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \overset{\text{крит. Коши}}{\Rightarrow}$ найдется $f : E \to \mathbb{R}$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на E, то есть $\sup\limits_{x\in E} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{=\|f_n - f\|} \to 0$ (то есть сходимость по норме).
Осталось понять, что $f_n \in l^\infty(E)$, то есть ограниченная функция.
Возьмем n, для которого $|f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall x \in E \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f_n(x)| \leq C$ так как f_n – ограниченная функция. $\square$

Теорема 4.5.5. *Пусть* $f_n, f : E \to \mathbb{R}$, f_n *непрерывны в точке* a *и* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E. *Тогда* f *непрерывна в точке* a.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и будем искать для него $\delta > 0$ из окрестности непрерывности f.
$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f(a)|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon$
$\exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Возьмем любое $n \geq N$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ и $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$.

Знаем, что f_n непрерывна в точке $a \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$.

Нашли подходящую $\delta > 0$. □

Следствие. ***Теорема Стокса-Зайделя.***
Пусть $f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E. Тогда $f \in C(E)$.
(Предыдущая теорема, примененная во всех точках по отдельности)

Следствие. *$C(K)$ – замкнутое подпространство $l^\infty(K)$.*

Доказательство. $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ (расшифровка нормы) $\Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E.

По предыдущей теореме равномерная сходимость непрерывность не портит $\Rightarrow$ мы не вылезем за пределы непрерывных функций. □

Теорема 4.5.6. *Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство, $Y \subset X$ – замкнутое. Тогда (Y, ρ) – полное.*

Доказательство. Возьмем фундаментальную последовательность $y_n \in Y \Rightarrow$ она фундаментальная в (X, ρ) (метрика та же самая) $\overset{X \text{ – полное}}{\Rightarrow}$ найдется $x \in X$, т.ч. $\lim y_n = x \Rightarrow x$ – предельная точка $Y \Rightarrow x \in Y$, так как Y – замкнуто. □

Следствие. *$C(K)$ – полное.*

Замечание. Поточечная сходимость не сохраняет непрерывность.

Пример. Рассмотрим $f_n(x) = x^n$ на $(0, 1]$.
Она поточечно сходится к $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (0,1) \\ 1, & \text{при } x = 1 \end{cases}$ – непрерывность испортилась.

Определение 4.5.6. Пусть $u_k : E \to \mathbb{R}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится поточечно*, если $\forall x \in E$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится $\Leftrightarrow S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ поточечно сходится.

Определение 4.5.7. Ряд *сходится равномерно* на E, если $S_n(x)$ сходятся равномерно на E.

Определение 4.5.8. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится поточечно, $u_k : E \to \mathbb{R}$. *Остаток ряда* $r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) : E \to \mathbb{R}$.

Замечание. $S_n(x) + r_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) =: S(x)$

Теорема 4.5.7. *Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится поточечно. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно $\Leftrightarrow r_n \rightrightarrows 0$.*

Доказательство. $S(x) - S_n(x) = r_n(x) \rightrightarrows 0 \Leftrightarrow S_n \rightrightarrows S$ □

Замечание.

1. Если ряд сходится равномерно, то $u_n \rightrightarrows 0$ (полный аналог необходимого условия сходимости числового ряда, только здесь равномерная сходимость и равномерное стремление к нулю).

   Доказательство. $S_n \rightrightarrows S \Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$ □

2. Если найдутся $x_n \in E : \underbrace{u_n(x_n) \not\to 0}_{\Rightarrow \text{ нет } \rightrightarrows 0}$, то нет равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

3. Если найдутся $x_n \in E : \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ расходится, то это вообще ничего не значит.

   Пример. $u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

   $x_n = \frac{1}{n+1}$, $u_n(x_n) = \frac{1}{n}$, $\sum u_n(x_n) = \sum \frac{1}{n}$ – расходится.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, $0 \le r_n(x) \le \frac{1}{n}$

Теорема 4.5.8. ***Критерий Коши для равномерной сходимости функционального ряда.***

Пусть $u_k : E \to \mathbb{R}$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится равномерно на* $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > m \ge N\ \forall x \in E\ |\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k| < \varepsilon$.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на $E \Leftrightarrow S_n \rightrightarrows S$ на $E \overset{\text{крит. Коши}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > m \ge N\ \forall x \in E\ |\underbrace{S_n(x) - S_m(x)}_{=\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k}| < \varepsilon$ □

Теорема 4.5.9. ***Признак сравнения.***

Пусть $|u_n(x)| \le v_n(x)\ \forall x \in E\ \forall n$. *Тогда если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходится равномерно, то и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно.*

Доказательство. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно $\overset{\text{крит. Коши}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > m \ge N\ \forall x \in E\ \underbrace{|\sum\limits_{k=m+1}^{n} v_k(x)|}_{\ge \sum\limits_{k=m+1}^{n} |u_k(x)| \ge |\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k(x)|} < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > m \ge N\ \forall x \in E\ |\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k(x)| < \varepsilon \overset{\text{крит. Коши}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно. □

Замечание. Должно напоминать факт, что из абсолютной сходимости ряда следует обычная.

Следствие. *Признак Вейерштрасса.*
Если $|u_n(x)| \le a_n\ \forall x \in E\ \forall n$ и числовый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство. Возьмем $v_n(x) = a_n$. Тогда $v_n(x)$ сходятся равномерно, так как от x не зависят. □

Следствие. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.*

Доказательство. Возьмем $v_n(x) = |u_n(x)|$. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$: $|\frac{\sin nx}{n^2}| \le \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Замечание. Абсолютная и равномерная сходимости – разные вещи.

1. Может быть абсолютная сходимость, но не быть равномерной.

   Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на $(0, 1)$

2. Может быть равномерная сходимость, но не быть абсолютной.

   Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

3. Может быть равномерная сходимость, абсолютная сходимость, но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно.

Теорема 4.5.10. *Признак Дирихле.*

$$\left.\begin{array}{l} |\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)| \le K \quad \forall x \in E\ \forall n \\ b_n \rightrightarrows 0 \text{ на } E \\ b_n(x) \text{ монотоннны по } n \text{ для любого фикс. } x \end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \text{ равномерно сходится.}$$

Доказательство. Напишем преобразование Абеля: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$, где $A_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j(x)$.
Надо доказать, что частичные суммы равномерно сходятся, то есть что каждое слагаемое в правой части равномерно сходится.
$A_n(x)b_n(x) \rightrightarrows 0$ (равномерно ограниченная на равномерно стремлящуюся к 0)
Осталось доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ равномерно сходится. Проверим, что есть равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |A_k(x)||b_k(x) - b_{k+1}(x)|$.

$|A_k(x)||b_k(x)-b_{k+1}(x)| \le K|b_k(x)-b_{k+1}(x)|$, поэтому осталось доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1}|b_k(x)-b_{k+1}(x)|$ равномерно сходится.
$\sum\limits_{k=1}^{n-1}|b_k(x)-b_{k+1}(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_k(x)-b_{k+1}(x)|$ (b_n монотонные, то есть разности одного знака) $=$ $|b_1(x)-b_{n+1}(x)| \rightrightarrows |b_1(x)|$ □

Теорема 4.5.11. ***Признак Абеля.***

$$\left.\begin{array}{l} |\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)| \text{ равномерно сходится на } E \\ b_n \text{ равномерно ограничены на } E \\ b_n(x) \text{ монотоннны по } n \text{ для любого фикс. } x\in E \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x) \text{ равномерно сх-ся на } E.$$

Доказательство. Хотим понять, что при больших n такая сумма маленькая, напишем критерий Коши: $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n+k}(x)b_{n+k}(x) \overset{\text{пр. Абеля}}{=} (A_{n+p}(x)-A_n(x))b_{n+p}(x) + \sum\limits_{k=1}^{p-1}(A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x))$
$\sum\limits_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) = A_{n+p}(x)-A_n(x)$
$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)| \le \underbrace{|(A_{n+p}(x)-A_n(x)|}_{<\varepsilon \text{ если } n\ge N}\cdot\underbrace{|b_{n+p}(x)|}_{\le M} + \sum\limits_{k=1}^{p-1}\underbrace{|A_{n+k}(x)-A_n(x)|}_{<\varepsilon \text{ если } n\ge N}\cdot|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)| \overset{(*)}{\le}$
b_n равномерно ограничены $\Rightarrow |b_n(x)| \le M$.
$A_n(x)$ равномерно сходится $\Rightarrow \exists N\ \forall m>n\le N\ \forall x\in E\ |A_m(x)-A_n(x)|<\varepsilon$, рассмотрим только такие n,m:
$\overset{(*)}{\le} \varepsilon M + \varepsilon\sum\limits_{k=1}^{p-1}|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)| = \varepsilon M + \varepsilon|\sum\limits_{k=1}^{p-1}b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)| \le \varepsilon M + \varepsilon|b_{n+1}(x)-b_{n+p+1}(x)| \le \varepsilon M + 2\varepsilon M = 3\varepsilon M$ □

Теорема 4.5.12. ***Признак Лейбница.***

Пусть $b_n(x)\ge 0$ и монотонно убывают $\forall x\in E$, $b_n \rightrightarrows 0$ на E. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n(x)$ равномерно сходятся на E.

Доказательство. $a_n(x) = (-1)^{n-1}$ и подставляем в Дирихле. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ на $(0,1)$ сходится равномерно:
$b_n(x) = \frac{x^n}{n} \ge 0$, $0\le b_n(x)\le \frac{1}{n} \Rightarrow b_n \rightrightarrows 0$ и признак Лейбница.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ сходится неравномерно:
Применим критерий Коши: $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m>n\ge N\ \forall x\in(0,1)\ \sum\limits_{k=n+1}^{m}\frac{x^k}{k}<\varepsilon$
$m=2n\ x\to 1_-\quad \frac{1}{2} < \frac{x^k}{k} < \varepsilon$
Вот тот самый пример, когда абсолютная есть, равномерная есть, но у суммы модулей равномерная исчезает.

Теорема 4.5.13. ***Признак Дини.***

Пусть K – компакт, $u_n\in C(K)$, $u_n\ge 0$ и $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)\in C(K)$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится равномерно на K.

Доказательство. $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad r_n(x) = r_{n+1}(x) + u_{n+1}(x) \geq r_{n+1}(x) \Rightarrow r_n(x) \geq 0$ и монотонно убывают.

Надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists n\ \forall x \in K\ r_n(x) < \varepsilon$.

Пусть никакое n не подходит, то есть $\forall n\ \exists x_n \in K$, т.ч. ы$r_n(x_n) \leq \varepsilon$

x_n – последовательность компакта $\Rightarrow$ найдется сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}, $x_0 := \lim x_{n_k}$.

r_n непрерывно в точке x_0 так как $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ непрерывно по условию, а $_n(x)$ – конечное число непрерывных слагаемых.

Тогда знаем, что $r_m(x_0) \underset{k\to\infty}{\leftarrow} r_m(x_{n_k}) \underset{\text{так как } r_n \searrow}{\geq} r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon \Rightarrow r_m(x_0) \geq \varepsilon \quad \forall m$. Тогда в этой точке нет стремления к нулю. Противоречие с тем, что ряд сходится в точке x_0. □

4.6 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 4.6.1. *Пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$, a – предельная точка E, $b_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim b_n$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существуют, конечны и равны.*

Доказательство. Критерий Коши для $f_n \rightrightarrows f$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \underset{x\to a}{\overset{\to}{\Rightarrow}} |b_n - b_m| \leq \varepsilon$

b_n – фундаментальная последовательность в $\mathbb{R} \Rightarrow b = \lim b_n \in \mathbb{R}$.

Проверим, что $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b$.

$|f(x) - b| \leq \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon \text{ при } n \geq N_1} + |f_n(x) - b_n| + \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\varepsilon \text{ при } n \geq N_2\ \forall x \in E} + |b_n - b| < 2\varepsilon + \underbrace{|f_n(x) - b_n|}_{<\varepsilon \text{ при } |x-a|<\delta}$

Возьмем $\max\{N_1, N_2\}$. □

Теорема 4.6.2. *Пусть $u_n : E \to \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, a – предельная точка и $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = c_n$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$ и ряд сходится.*

Доказательство. Пусть $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \rightrightarrows f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $b_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \overset{\text{т.к. сумма конечна}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} \lim u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. Подставляем b_n в предыдущую теорему.

Тогда по теореме $\exists \lim b_n$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

$\lim\limits_{x\to a} b_n = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ □

Замечание. В случае равномерной сходимости ряда мы можем менять местами lim и $\sum$.

Следствие. *Если u_n непрерывны в точке a и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. $c_n = u_n(a)$ в предыдущей теореме. □

Теорема 4.6.3. ***Теорема об интегрировании функциональных последовательностей.*** *Пусть* $f_n \in C[a,b]$ *и* $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$, $c \in [a,b]$. *Тогда* $\int\limits_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_c^x f(t)dt$. *В частности,* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n(t)dt = \int\limits_c^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt$.

Доказательство. Пусть $F_n(x) := \int\limits_c^x f_n(t)dt$.

$|F_n(x) - F(x)| = |\int\limits_c^x f_n(t)dt - \int\limits_c^x f(t)dt| \le \int\limits_c^x |f_n(t) - f(t)|dt \le |x-c| \cdot \max\limits_{t\in[c,x]} |f_n(t) - f(t)| \le |b-a| \cdot \sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \to 0$, то есть равномерная сходимость есть. □

Замечание. В случае равномерной сходимости ряда мы можем менять местами lim и $\int$.

Следствие. *Если* $u_n \in C[a,b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится, то* $\int\limits_c^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_n(t)dt$.

Доказательство. $\int\limits_c^x \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_c^x u_k(t)dt$ частичные суммы – это F из предыдущей теоремы. □

Замечание. Поточечной сходимости не хватает.

Пример. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0,1]$

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, но $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-nx^2}d(nx^2) = -\frac{e-nx^2}{2}|_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{2} \to \frac{1}{2} \not\to 0 = \int\limits_0^1 f(x)dx$

Замечание. $f_n(x_n) \not\to 0 \Rightarrow$ нет равномерной сходимости:

$f_n(x_n) \not\to 0 \Rightarrow \underbrace{|f_n(x_n)|}_{\le \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x_n)} \not\to 0$

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $f_n(x_n) = n\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n(\frac{1}{\sqrt{n}})^2} = \frac{\sqrt{n}}{e} \not\to 0$

Теорема 4.6.4. ***Теорема о дифференцировании функциональных последовательностей.***

Пусть $f_n \in C^1[a,b]$, $c \in [a,b]$, $f_n(c) \to A$ *и* $f_n' \rightrightarrows g$ *на* $[a,b]$. *Тогда* $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$ *и* $f' = g$. *В частности,* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$.

Доказательство. $\int\limits_c^x g(t)dt = \int\limits_c^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n'(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(c)) =$

(так как предел существует) $= \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) = f(x) - A \Rightarrow f(x) = A + \int\limits_c^x g(t)dt \Rightarrow$

$\Rightarrow f \in C^1[a,b]$ (так как это интеграл от непрерывной функции) и $f'(x) = g(x)$.

Осталось понять, что $f_n \rightrightarrows f$.

$f(x) = \int\limits_c^x g(t)dt + A$

$$f_n(x) = \underbrace{\int\limits_c^x f_n'(t)dt}_{\rightrightarrows \int\limits_c^x g(t)dt} + \underbrace{f_n(c)}_{\rightrightarrows A} \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ (по теореме Барроу).}$$ □

Следствие. *Пусть* $u_n \in C^1[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *равномерно сходится на* $[a,b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится к дифференцируемой функции и* $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Доказательство. Пусть $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \in C^1[a,b]$ (конечная сумма дифференцируемых функций), $f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x) \rightrightarrows \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) =: g(x)$ (опять же конечная сумма).
$f_n' \rightrightarrows g$ и $f_n(c)$ сходится.
По теореме $f_n \rightrightarrows f$, f – дифференцируемая функция и ее производная – это g:
$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ □

Замечание. Равномерной сходимости исходных функций недостаточно, нужна именно равномерная сходимость производных.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится: $|\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin nx}{n^2})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ расходится при $x = 0$.

4.7 Степенные ряды

Определение 4.7.1. Пусть $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(z-z_0)^n}_{:=w^n}$ – *степенной ряд.*

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, $w = z - z_0$.

Теорема 4.7.1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *сходится при* $z = z_0$, *то ряд сходится (и даже абсолютно сходится) при* $|z| < |z_0|$. *Если ряд расходится при* $z = z_0$, *то он расходится при* $|z| > |z_0|$.

Доказательство. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – сходится $\Rightarrow a_n z_0^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (необходимое условие) $\Rightarrow a_n z_0^n$ – ограниченная последовательность: $|a_n z_0^n| < M \ \forall n \Rightarrow |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot |\frac{z}{z_0}|^n \leq M|\frac{z}{z_0}|^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M|\frac{z}{z_0}|^n$ сходится ($\frac{z}{z_0} < 1$ – геометрическая прогрессия) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ абсолютно сходится по признаку сравнения.
Второе утверждение – отрицание первого. □

Определение 4.7.2. *Радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – такое $R \in [0, +\infty)$, что ряд сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.
Круг сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – круг $|z| < R$.

$|z-z_0|<R$

Теорема 4.7.2. ***Формула Коши-Адамара***

Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости и он равен $R := \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Применим признак Коши для $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$:

$q := \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z|$.

Если $q<1$, то ряд сходится. $q<1 \Leftrightarrow \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z|<1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = R$.

Если $q>1$, то члены ряда не стремятся к 0. $q>1 \Leftrightarrow |z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n$ расходится. □

Замечание. Внутри круга сходимости ряд абсолютно сходится.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\quad R := \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim\sqrt[n]{n!} = +\infty$

   $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

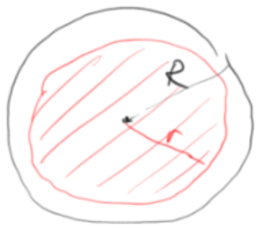
   $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ $\quad R=0$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ – сходится при $|z|\le 1$, при $|z|>1$ расходится.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ $\quad R=1$ – при $|z|\ge 1$ ряд расходится, так как члены $\not\to 0$.

Теорема 4.7.3. *Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $0<r<R$. Тогда ряд равномерно сходится в круге $|z|\le r$.*



Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ абсолютно сходится (из определения радиуса сходимости) $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится.

$|a_n z^n| \le |a_n| r^n$ при $|z|\le r \overset{\text{пр. Вейерш.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равномерно сходится при $|z|\le r$. □

Следствие. *Сумма степенного ряда в круг сходимости – непрерывная функция.*

Доказательство. Проверяем непрерывность в точке z_0, $|z_0| < R$. Возьмем $|z_0| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| \le r$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow$ там сумма ряда непрерывна $\Rightarrow$ есть непрерывность в точке z_0.

□

Теорема 4.7.4. ***Теорема Абеля***
Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot (\frac{x}{R})^n$, $x \in [0, R]$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ равномерно сходится (так как не зависит от x), $(\frac{x}{R})^n$ монотонно убывает, $0 \le (\frac{x}{R})^n \le 1$ $\overset{\text{пр. Абеля}}{\Rightarrow}$ ряд равномерно сходится. □

Следствие. *В условиях теоремы сумма $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n : [0, R] \to \mathbb{C}$ – непрерывна на $[0, R]$ (слагаемые непрерывны + ряд равномерно сходится).*
В частности, $\lim\limits_{x \to R_-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ (непрерывность в точка R).

Лемма 4.7.1. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $\lim x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim}\, x_n y_n = \lim x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$.

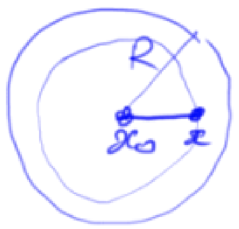
Доказательство. Пусть $A := \lim x_n$, $B := \overline{\lim}\, y_n$ и $C := \overline{\lim}\, x_n y_n$.
C - верхний предел, тогда $\exists x_{n_k} y_{n_k} \to C \Rightarrow x_{n_k} \to A \Rightarrow y_{n_k} \to \frac{C}{A} \to \frac{C}{A} \le B$, так как B – наибольший из всех частичных пределов.
Возьмем $n_j : y_{n_j} \to B \Rightarrow x_{n_j} y_{n_j} \to A \cdot B \Rightarrow AB \le C$
Вывод: $AB = C$. □

Следствие. *Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ совпадают.*

Доказательство. Радиусы сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ совпадают (радиус не меняется от умножения на какое-то ненулевое число z).
Радиусы сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}$ совпадают (опять же отличаются на z).
То есть надо доказать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^n$ имеют одинаковые радиусы сходимости, то есть (пользуюсь формулой Коши-Адамара), что $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}$.
А это верно из леммы + $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$. □

Замечание. Второй ряд получен из первого почленным дифференцированием первого, а третий – почленным интегрированием.

Теорема 4.7.5. ***Почленное интегрирование степенного ряда.***
Пусть R – радиус сходимости, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тогда при $|x-x_0| < R$ $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и этот ряд имеет тот же радиус сходимости.



Доказательство. На $[x_0, x]$ ряд равномерно сходится (так как отрезок целиком лежит в круге сходимости) $\Rightarrow$ можно интегрировать почленно. □

Определение 4.7.3. Пусть $f : E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, z_0 – внутренная точка E. Если существует такое $k \in \mathbb{C}$, что $f(z) = f(z_0) + k(z-z_0) + o(z-z_0)$ при $z \to z_0$, то f – *комплексно-дифференцируема в точке* z_0.

Замечание.

1. $k = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ – *производная* f *в точке* z_0.

2. Существование производной равносильно дифференцируемости.

Теорема 4.7.6. *Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n =: f(z)$. Тогда f бесконечно дифференцируема в круге сходимости и $f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)...(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$.*

Доказательство. Пусть $m = 1$ (дальше индукция).
Возьмем $0 < r < R$ и $|z| < r$, $|w| < r$.
$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{1}{w-z}(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n w^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{w^n-z^n}{w-z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + ... + z^{n-1})$
$\lim\limits_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim\limits_{w\to z} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + ... + z^{n-1}) \overset{?}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{w\to z} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + ... + z^{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$
Про ?: $|a_n(w^{n-1}+w^{n-2}z+...+z^{n-1})| \le |a_n| \cdot n r^{n-1}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \overset{\text{пр. Вейерш.}}{\Rightarrow}$ нужный ряд равномерно сходится, то есть можно переставлять $\lim$ и $\sum$ местами. □

Теорема 4.7.7. ***Единственность разложения в степенной ряд.***
Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ – радиус сходимости. Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Доказательство. Выведем формулу для коэффициентов:
$f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)...(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$. Подставим $z = z_0 \Rightarrow f^{(m)}(z_0) = m\cdot(m-1)\cdot...\cdot 1\cdot a_n = m! \cdot a_m$. □

Определение 4.7.4. Пусть f бесконечно дифференцируема в точке z_0.
Тогда ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ – *ее ряд Тейлора в точке* z_0.

Определение 4.7.5. f – *аналитическая в точке* z_0, если в окрестности точки z_0 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

Замечание. f – бесконечно дифференцируема $\not\Rightarrow$ аналитичность.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$

Проверим, что $f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{p_n(x)}{x^{3n}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$

Индукция. Переход $n \to n+1$, $x \neq 0$:
$(f^{(n)}(x))' = (p_n(x)x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}})' = p_n'(x)x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(x)(-3n)x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(x)x^{-3n}3\cdot x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$
$x = 0$:
$f^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{p_n(x)}{x^{3n+1}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to\infty} p_n(\frac{1}{y})y^{3n+1}e^{-y^2} = 0$
Есть бесконечная дифференцируемость.
Формула Тейлора при $x_0 = 0$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$, но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
3. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ряд сходятся $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ сходятся $\forall x \in \mathbb{C}$.

Определение 4.7.6. Пусть $z \in \mathbb{C}$, тогда:

1) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

2) $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

3) $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Формула Эйлера:

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Упражнение. Доказать, что:

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$
3. $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
4. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ при $x \in (-1, 1)$.

Доказательство. $\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} \overset{\text{геом. прогр.}}{=} \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^x t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ □

5) $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ при $x \in (-1, 1)$.

Доказательство. $\arctan x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} \overset{\text{геом. прогр.}}{=} \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^x t^{2n} dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ □

6) $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2} x^2 + ... + \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} x^n + ...$ при $x \in (-1, 1)$.

Доказательство. Пусть $(1+x)^p = T_n(x) + R_n(x)$. Надо доказать, что $T_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} (1+x)^p$, то есть $R_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Воспользуемся интегральной формулой для остатка:: $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-t)^n \underbrace{(1+t)^{p-n-1} p(p-1)...(p-n)}_{=f^{(n+1)}(t)} dt$

Посмотрим на отношение: $|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{n+1} (1+t)^{p-n-2} p(p-1)...(p-n-1) dt}{\frac{1}{(n)!} \int\limits_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} p(p-1)...(p-n) dt} \right| = \frac{|p-n-1|}{n+1} \cdot \frac{|\int\limits_0^x (x-t)^{n+1} (1+t)^{p-n-2} dt|}{|\int\limits_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} dt|}$

$= \frac{|p-n-1|}{n+1} \cdot \frac{\int\limits_0^x |x-t|^{n+1} (1+t)^{p-n-2} dt}{\int\limits_0^x |x-t|^n (1+t)^{p-n-1} dt} = \frac{|p-n-1|}{n+1} \cdot \frac{\int\limits_0^x |x-t|^n (1+t)^{p-n-1} \cdot \frac{|x-t|}{1+t} dt}{\int\limits_0^x |x-t|^n (1+t)^{p-n-1} dt} \le \frac{|p-n-1|}{n+1} |x| \underset{n \to +\infty}{\to} |x| < 1 \Rightarrow$ члены последовательности стремятся к 0.

$\frac{|x-t|}{1+t} \le |x|$

Если $x < 0$: $(t - x) \le (-x)(1+t) = -x - tx \Leftrightarrow t \le -tx \Leftrightarrow -1 \le x$ □

Пример. Частный случай: $p = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$

7) $\arcsin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Доказательство. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ □

5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

5.1 Дифференцируемые отображения

Определение 5.1.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$. Тогда f *дифференцируема в точке* a, если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, т.ч.
$f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$ при $h \to 0$.

Замечание. Если T существует, то оно определено однозначно.
Зафиксируем $h \in \mathbb{R}^n$: $f(a+th) = f(a) + T(th) + o(t) = f(a) + t \cdot Th + o(t)$.
$Th = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ (предел единственный $\Rightarrow$ значение t на векторе определяется однозначно $\Rightarrow$ отображение определяется однозначно)

Определение 5.1.2. Матрица линейного оператора T называется *матрицей Якоби для отображения* f и обозначается $f'(a)$.
(раньше f' была производной, а теперь стала матрицей)
Линейный оператор T называется *дифференциалом функции* f *в точке* a и обозначается $d_a f$.

Замечание. Дифференцируемость в точке a влечет непрерывность в точке a.
$f(a+h) = \underset{\to f(a)}{f(a)} + \underset{\to T0=0}{Th} + \underset{\to 0}{o(\|h\|)}$
Замечание. Важный частный случай: (координатные функции, из которых можно составить вектор)
$m = 1$, $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{Int}E$.
$f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$
Найдется такой $v \in \mathbb{R}^n : f(a+h) = f(a) + \langle v, h\rangle + o(\|h\|)$ при $h \to 0$. Этот вектор v – *градиент функции* f в точке a. Обозначается $\operatorname{grad} f(a)$ или $\nabla f(a)$ (∇ – *символ Набла*).

Пример.

1. Постоянное отображение f дифференцируемо во всех точках, $T = 0$.

2. Линейное отображение: $f(a+h) = f(a) + f(h)$, $T = f$.

   Матрица Якоби – матрица этого отображения f.

Теорема 5.1.1. *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, *где* $f_1, ..., f_m : E \to \mathbb{R}$ *(координатные функции). Тогда* f *дифференцирема в точке* $a \Leftrightarrow f_j$ *дифференцируема в точка* a $\forall j = 1, ..., m$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h) \cdot \|h\|$, где $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

$f_j(a+h) = f_j(a) + T_j h + \alpha_j(h) \cdot \|h\|$, где $T_j h$ – это j-ая координата Th, $\alpha_j(h)$ – j-ая координата $\alpha(h)$.

$|\alpha_j(h)| \le \sqrt{\alpha_1(h)^2 + ... + \alpha_m(h)^2} = \|\alpha(h)\| \to 0$.

$\Leftarrow$. $f_j(a+h) = f_j(a) + T_j h + \alpha_j(h) \cdot \|h\|$, составим из них равенство для векторов:

$\alpha(h) = \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix}$ и надо доказать, что $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$:

$\|\alpha(h)\| = \sqrt{\alpha_1(h)^2 + ... + \alpha_m(h)^2} \le \|\alpha_1(h)^2\| + ... + \|\alpha_m(h)^2\| \underset{h\to 0}{\to} 0$

$\square$

Следствие. *Матрица Якоби f – матрица, составленная из градиентов координатных функций:* $f'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$.

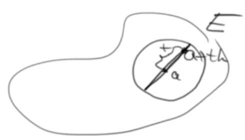
Определение 5.1.3. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $h \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор. Тогда $\frac{\partial f}{\partial h} := \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ – *производная f по направлению h в точке a.*

Замечание.

1. $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

2. Пусть $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a+th)$.

   Тогда $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0)$



Теорема 5.1.2. ***Экстремальное свойство градиента.***
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \ne 0$. Тогда $\forall\ h \in \mathbb{R}^n$ единичного $-\|\nabla f(a)\| \le \frac{\partial f}{\partial h} \le \|\nabla f(a)\|$ и неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow h = \pm\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$. (смысл: градиент задает то направление, в котором производная по направлению самая большая по модулю, то есть градиент – это направление наибыстрейшего изменения функции)

Доказательство. $|\frac{\partial f}{\partial h}(a)| = |\langle \nabla f(a), h \rangle| \le \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| = \|\nabla f(a)\|$ и неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство $\Leftrightarrow$ вектора пропорциональны. $\square$

Определение 5.1.4. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $f(x_1, ..., x_n)$. Тогда *частной производной по x_k в точке a* называется $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$, где $e_k = \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_{k-1} \\ 1_k \\ \vdots \\ 0) \end{pmatrix}$.

Альтернативные обозначения: $f'_{x_k}(a)$, $\partial_k f(a)$, $D_k f(a)$.

Утверждение 5.1.1. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \nabla f(a), e_k \rangle$, то есть $\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.
(производная по направлению – градиент скалярно умножить на направление, а частная производная – это производная поо направлению e_k)

Следствие. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$ и f дифференцируема в точке a. Тогда*
$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство. $f'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$ □

Пример. Пусть $f(x, y) = x^y$, $x, y > 0$.
Тогда:
$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = ba^{b-1}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t} = a^b \ln a$

Теорема 5.1.3. ***Линейность дифференциала.***
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g дифференцируемы в точке a. Тогда $f + g$ и λf дифференцируемы в точке a и:
$d_a(f + g) = d_a f + d_a g, \quad (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_a f, \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

Доказательство. $f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$
$g(a + h) = g(a) + d_a g(h) + \beta(h)\|h\|$, где $\beta(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$
$\Rightarrow f(a + h) + g(a + h) = f(a) + g(a) + \underbrace{d_a f(h) + d_a g(h)}_{\text{лин.}} + \underbrace{\alpha(h)\|h\| + \beta(h)\|h\|}_{\underset{h \to 0}{\to} 0}$
$\Rightarrow \lambda f(a + h) = \lambda f(a) + \underbrace{\lambda d_a f(h)}_{\text{лин.}} + \underbrace{\lambda \alpha(h)\|h\|}_{\underset{h \to 0}{\to} 0}$ □

Теорема 5.1.4. ***Дифференцируемость композиции.***

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $g : E \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^l$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} D$ *и* $f(D) \subset E$. *Если* f *дифференцируема в точке* a *и* g *дифференцируема в точке* $f(a)$, *то* $g \circ f$ *дифференцируема в точке* a *и* $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Доказательство. $f(a+h) = f(a) + \underbrace{d_a f(h) + \alpha(h)\|h\|}_{:=k}$, где $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.
$g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\|$, где $\beta(k) \underset{k\to 0}{\to} 0$.
Возьмем $k = d_a f(h) + \alpha(h)\|h\|$. Тогда $f(a+h) = f(a) + k = b + k$.
$g(f(a+h)) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| = g(b) + d_b g(d_a f(h) + \alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| = g(f(a)) + d_b g(d_a f(h) + \underbrace{d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\|}_{=o(\|h\|)\ ?}$
$d_b g(\alpha(h)\|h\|) = \|h\| d_b g(\alpha(h))$. Надо понять, что $d_b g(\alpha(h)) \underset{h\to 0}{\to} 0$:
$\|d_b g(\alpha(h))\| \le \|d_b g\| \cdot \underbrace{\|\alpha(h)\|}_{\underset{h\to 0}{\to} 0} \Rightarrow$ первое слагаемое маленькое.
Осталось понять, что $\frac{\beta(k)\|k\|}{\|h\|} \underset{h\to 0}{\to} 0$:
$\|k\| = \|d_a f(h) + \alpha(h)\|h\|\| \le \|d_a f(h)\| + \|\alpha(h)\|h\|\| \le \|d_a\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \cdot \|h\| = \|h\| \cdot (\underbrace{\|d_a f\| + \|\alpha(h)\|}_{\text{огр.}}) \le$
$C \cdot \|h\|$ (как константа + что-то $\to 0$) $\Rightarrow$ если $h \to 0$, то $k \to 0 \Rightarrow \beta(k) \to 0$.
$\|\frac{\beta(k)\|k\|}{\|h\|}\| = \frac{\|k\|}{\|k\|} \cdot \|\beta(k)\| \le C \cdot \|\beta(k)\| \underset{k\to 0}{\to} 0$
В частности:
$d_a(g \circ f) = d_b g \circ d_a f$
$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$ □

Теорема 5.1.5. ***Дифференцирование скалярной и векторной функции.***

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $\lambda : E \to \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, λ *и* f *дифференцируемы в точке* a. *Тогда* λf *дифференцируема в точке* a *и* $d_a(\lambda f)(h) = d_a\lambda(h) \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot d_a f(h)$.

Доказательство. $f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.
$\lambda(a+h) = \lambda(a) + d_a\lambda(h) + \beta(h)\|h\|$, где $\beta(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.
$\lambda(a+h)f(a+h) = \underbrace{\overset{1}{\lambda(a)f(a)}} + \underbrace{\overset{2}{\lambda(a)d_a f(h)} + \overset{3}{d_a\lambda(h)f(a)}} +$
$\underbrace{\overset{4}{d_a\lambda(h)d_a f(h)} + \overset{5}{\beta(h)\|h\|f(a)} + \overset{6}{\beta(h)\|h\|d_a f(h)} + \overset{7}{\alpha(h)\beta(h)\|h\|^2} + \overset{8}{\lambda(a)\alpha(h)\|h\|} + \overset{9}{\alpha(h)\|h\|d_a\lambda(h)}}_{\overset{?}{=}o(h)}$
5. $\underbrace{\beta(h)}_{\to 0}\underbrace{f(a)}_{const}\|h\| = o(\|h\|)$
8. $\underbrace{\alpha(h)}_{\to 0}\underbrace{\lambda(a)}_{const}\|h\| = o(\|h\|)$
7. $\underbrace{\alpha(h)\beta(h)\|h\|}_{0}\|h\| = o(\|h\|)$
$\|d_a f(h)\| \le \|d_a f(h)\| \cdot \|h\| \underset{h\to 0}{\to} 0$ и в частности ограничена.

$\|d_a\lambda(h)\| \leq \|d_a\lambda(h)\| \cdot \|h\| \underset{h\to 0}{\to} 0$ и в частности ограничена.

6. $\underbrace{\beta(h)}_{\to 0}\underbrace{d_af(h)}_{\text{огр.}}\|h\| = o(\|h\|)$

9. $\underbrace{\alpha(h)}_{\to 0}\underbrace{d_a\lambda(h)}_{\text{огр.}}\|h\| = o(\|h\|)$

4. $\|d_a\lambda(h)\cdot d_af(h)\| = \|d_a\lambda(h)\|\cdot\|d_af(h)\| \leq \|d_a\lambda(h)\|\cdot\|d_af(h)\|\cdot\|h\|^2 = o(\|h\|)$ □

Теорема 5.1.6. ***Дифференцирование скалярного произведения векторнозначных функций.***
Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $f, g : E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a. Тогда $\langle f, g\rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g\rangle(h) = \langle d_af(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_ag(h)\rangle$.

Доказательство. $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} f_kg_k \Rightarrow \langle f, g\rangle$ дифференцируемо в точке a по предыдущей теореме (как скалярные функции):
$d_a\langle f, g\rangle(h) = \sum\limits_{k=1}^{m} d_a(f_kg_k)(h) = \sum\limits_{k=1}^{m}(d_af_k(h)g_k(a) + f_k(a)d_ag_k(h))) = \langle d_af(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_ag(h)\rangle$
□

Замечание. Если $n = 1$, то формула упрощается (умножение числа на вектор): $\langle f(x), g(x)\rangle' = \langle f'(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x)\rangle$.

Теорема 5.1.7. ***Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.***
Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\|f'(c)\|$.

Доказательство. Возьмем $\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a)\rangle : [a, b] \to \mathbb{R}$ функция от одной переменной непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b). Тогла по теореме Лагранжа для φ найдется $c \in (a, b)$, т.ч. $\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\varphi'(c) = (b - a)\langle f'(c), f(b) - f(a)\rangle$.
$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a)\rangle - \langle f(a), f(b) - f(a)\rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|^2 = (b - a)\langle f'(c), f(b) - f(a)\rangle \leq (b - a)\cdot\|f'(c)\|\|f(b) - f(a)\|$ и сократим $\|f(b) - f(a)\|$ (если был $f(b) = f(a)$, то изначальное неравенство было очевидно: справа 0, а слева что-то неотрицательное). □

Замечание. Равенство может никогда не достигаться.

$$f(x) = \begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} \quad \|f'(x)\| = 1$$

5.2 Непрерывная дифференцируемость

Теорема 5.2.1. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$. Если все частные производные функции f непрерывны в точке a, то f дифференцируема в точке a.*

Доказательство. Пусть $R(h) := f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k$. Надо доказать, что $R(h) = o(\|h\|)$ при $h \to 0$.

$$b_k = \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_k + h_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f(b_k) - f(b_{k-1})) \overset{(*)}{=}$$

$a = b_0$, $a + h = b_n$ $\quad F_{k-1}(t) := f(b_{k-1} + t h_k e_k)$

$f(b_k) - f(b_{k-1}) = F_{k-1}(1) - F_{k-1}(0) =$ (по th Лагранжа) $= \underset{\Theta_k \in (0,1)}{F'_{k-1}(\Theta_k)} =$ (производная композиции)

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = h_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k)$$

$\overset{(*)}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} h_k \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)}_{\underset{h \to 0}{\to} 0} \Big)}_{\substack{= o(\|h\|) \\ \le \|h\| \cdot \|\dots\|}}$ (b_k-шки стремятся к a и по непрерывности в точке a коэффициент перед каждым h_k стремится к 0)

$F_0(1) - F_0(0) = f(a + h_1 e_1) - f(a) = h \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + o(h_1)$ – определение дифференцируемости F_0 в точке a. $\square$

Замечание.

1. Теорема верна и без непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ в точке a. Достаточно только ее существования.

2. Обратное утверждение неверно. Дифференцируемость функции в точке a не гарантирует даже непрерывности в окрестности a, а также существования хоть каких-то частных производных.

   Пример. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если ровно одно из чисел } x \text{ и } y \text{ рационально;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

f дифференцируема в точке $(0,0)$

$f(h,k) = o(\sqrt{h^2+k^2})$

$f(0,0) = 0$, линейное отображение $\equiv 0$.

Определение 5.2.1. f *непрерывно дифференцируема в точке* a, если f дифференцируема в окрестности точки a и $\|d_xf - d_af\| \underset{x\to a}{\to} 0$.

Теорема 5.2.2. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, f дифференцируема в окрестности точки a. Тогда f непрерывно дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывно в точке a $\forall i, j$.*

Доказательство.

$\Leftarrow$. Проверим непрерывность:

$$\|d_xf - d_af\|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \underbrace{(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a))^2}_{\underset{x\to a}{\to} 0} \underset{x\to a}{\to} 0$$

$$f'(x) - f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$. $|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)| \le \| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \| = \|(d_xf - d_af)(e_i)\| \le \underbrace{\|d_xf - d_af\|}_{\to 0} \underbrace{\|e_i\|}_{=1}$, где $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

□

Теорема 5.2.3. *Непрерывная дифференцируемость сохраняется при линейной комбинации, скалярном произведении, композиции.*

5.3 Частные производные высших порядков

Определение 5.3.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$ и в окрестности точки a существует $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: окр-ть точки a $\to \mathbb{R}$. Если у $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существует частная производная по x_j, то результат $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ – это *вторая частная производная по* x_j (нужно уточнение, по какой переменной).
Обозначения: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $f''_{x_i x_j}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial} x_i)$, $(f'_{x_i})'_{x_j}$.
$\frac{\partial^r f}{x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}}$ – *частная производная порядка* r.

Замечание. Всего n^r производных r-ого порядка.

Пример. $f(x,y)=x^y$, где $x,y>0$.
$f'_x(x,y)=yx^{y-1}$, $f'_y(x,y)=x^y\ln x$
$f''_{xx}(x,y)=(yx^{y-1})'_x=y(y-1)x^{y-2}$
$f''_{yy}(x,y)=(x^y\ln x)'_y=\ln^2 x\cdot x^y$
$f''_{xy}(x,y)=(yx^{y-1})'_y=yx^{y-1}\cdot\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}$
$f''_{yx}(x,y)=(x^y\ln x)'_x=yx^{y-1}\cdot\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}$
Заметим, что $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

Пример. $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{при } x=y=0\end{cases}$
$f'_x(x,y)=y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$
$f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$
$f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$
$f''_{yx}(0,0)=1$ (меняется знак исходного выражения) $\Rightarrow f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$

Теорема 5.3.1. *Пусть $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in\operatorname{Int}E$ и в окрестности точки (x_0,y_0) существуют f'_x, f'_y и f''_{xy}. Тогда если f''_{xy} непрерывна в точке (x_0,y_0), то f''_{yx} существует в точке (x_0,y_0) и $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(s):=f(s,y_0+k)-f(s,y_0)$ – дифференцируема, так как у f существует производная по первой координате.
$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=h\varphi'(x_0+\Theta h)\underset{\text{где }\Theta\in(0,1)}{=}h(f'_x(x_0+\Theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\Theta h,y_0))=$ (теперь функция дифференцируема по второй координате) $\underset{\text{где }\tilde\Theta\in(0,1)}{=}hkf''_{xy}(x_0+\Theta h,y_o+\tilde\Theta k)=hk(f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha(h,k))$, где $\alpha(h,k)\underset{(h,k)\to 0}{\to}0$
$\forall\varepsilon>0$ при (h,k) близких к $(0,0)$: $|\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{hk}-f''_{xy}(x_0,y_0)|<\varepsilon$
$\frac{\varphi(x_0)}{k}=\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\to f'_y(x_0,y_0)$
$|\frac{1}{h}(\frac{\varphi(x_0+h)}{k}-\frac{\varphi(x_0)}{k})-f''_{xy}(x_0,y_0)|\to|\frac{1}{h}(f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0))-f''_{xy}(x_0,y_0)|\leq\varepsilon$ (перешли к пределу)
$\Rightarrow$ при h близких к нулю $|\frac{f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{h}-f''_{xy}(x_0,y_0)|<\varepsilon\Rightarrow\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{h}}_{=f''_{yx}(x_0,y_0)\text{ по опр.}}=f''_{xy}(x_0,y_0)$

$\square$

Упражнение. Если f'_x и f'_y определены в окрестности точки (x_0,y_0) и дифференцируемы в этой точке, то $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Определение 5.3.2. Пусть $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$, D открыто. Тогда f – *r раз непрерывно дифференцируема в D* (*r-гладкая функция в D*), если все частные производные до r-ого порядка включительно существуют и непрерывны.
Обозначение: $f\in C^r(D)$.

Теорема 5.3.2. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D *открыто,* $f \in C^r(D)$ *и* $(i_1, i_2, ..., i_r)$ *– перестановка* $(j_1, j_2, ..., j_r)$. *Тогда* $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}}$.

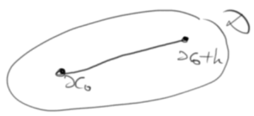
Доказательство. Любая перестановка получается с помощью какого-то количества транспозиций, то есть достаточно доказать для элементарных транспозиций: $(j_1, ..., j_{k-1}, j_{k+1}, j_k, j_{k+2}, ... j_r)$.
Пусть $g := \frac{\partial^{r-k-1} f}{\partial x_{j_{k+2}} ... \partial x_{j_r}}$.
По теореме: $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k+1}}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}} \Rightarrow \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_{k-1}} \partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}}$
$\Rightarrow \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_{k-1}} \partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k} ... \partial x_{j_r}}$. □

Приложения частных производных

Определение 5.3.3. *Мультииндекс* $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$, где $k_1, k_2, ..., k_n$ – неотрицательные числа.
Высота мультииндекса $|k| := k_1 + ... + k_n$.
$k! := k_1! ... k_n!$
Если $h \in \mathbb{R}^n$, то $h^k := h_1^{k_1} ... h_n^{k_n}$.
$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{(\partial x_1)^{k_1} ... (\partial x_n)^{k_n}}$

Определение 5.3.4. *Полиномиальный (мультиномиальный) коэффициент* – $\binom{|k|}{k_1, ..., k_n} = \frac{|k|!}{k!}$.
Количество способов покрасить $|k|$ шариков в n цветов так, что будет k_i шариков i-ого цвета.
$\binom{|k|}{k_1} \cdot \binom{|k| - k_1}{k_2} \cdot ... \cdot \binom{|k| - k_1 - ... - k_{n-2}}{k_{n-1}} = \frac{|k|!}{k_1!(|k| - k_1)!} \cdot \frac{(|k| - k_1)!}{k_2!(|k| - k_1 - k_2)!} \cdot \frac{(|k| - k_1 - k_2)!}{k_3!(|k| - k_1 - k_2 - k_3)!} \cdot ... = \frac{|k|!}{k_1! k_2! ... k_n!} = \frac{|k|!}{k!}$

Лемма 5.3.1. Пусть $f \in C^r(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $[x_0, x_0 + h] \subset D$, $F(t) := f(x_0 + th)$, $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Тогда $F \in C^r[0, 1]$ и $F^{(l)}(t) = \sum\limits_{|k| = l} \binom{l}{k_1, ..., k_n} f^{(k)}(x + th) \cdot h^k$.



Доказательство. Пусть $G(t) = g(x_0 + th)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$G'(t) = (g'_{x_1}(x_0 + th) \ ... \ g'_{x_n}(x_0 + th)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} g'_{x_i}(x_0 + th) h_i$$

$F^{(l)}(t) = \sum\limits_{i_1 = 1}^{n} ... \sum\limits_{i_l = 1}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_l}} (x_0 + th) h_{i_1} h_{i_2} ... h_{i_l} = \sum\limits_{|k| = l} \binom{|k|}{k_1, ..., k_n} f^{(k)}(x_0 + th) h^k$.
$k = (k_1, ..., k_n)$, где $k_j = \#\{i_p \mid i_p = j\}$ □

Теорема 5.3.3. ***Многомерная формула Тейлора***
Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ *открытое,* $f \in C^{r+1}(D)$, $[a, x] \subset D$. *Тогда существует* $\Theta \in (0, 1)$:
$f(x) = \sum\limits_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum\limits_{|k| = r+1} \frac{f^{(k)}(a + \Theta(x - a))}{k!} (x - a)^k$.

Доказательство. $h = x - a$, $F(t) = f(a + th) \Rightarrow F \in C^{r+1}[0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow F(1) = \sum\limits_{l=0}^{r} \frac{F^{(l)}(0)}{l!} \cdot 1^l + \underset{\text{где } \Theta\in(0,1)}{\frac{F^{(r+1)}(\Theta)}{(r+1)!} \cdot 1^{r+1}} = \sum\limits_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} \sum\limits_{|k|=l} \binom{l}{k_1,...,k_n} f^{(k)}(a)h^k + \frac{1}{(r+1)!} \sum\limits_{|k|=r+1} \binom{r+1}{k_1,...,k_n} f^{(k)}(a +$
$\Theta h)h^k \overset{(*)}{=} \sum\limits_{l=0}^{r} \sum\limits_{|k|=l} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum\limits_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a+\Theta h)}{k!} h^k.$
$(*) : \frac{1}{l!}\binom{l}{k_1,...,k_n} = \frac{1}{k!}$ □

Замечание.

1. $\sum\limits_{|k|\le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ – *многочлен Тейлора степени* r.
2. Если $r = 0$, то получаем аналог теоремы Лагранжа:
   $f(x) = f(a) + \sum\limits_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a + \Theta(x-a))(x_i - a_i) = f(a) + \langle \nabla f(a + \Theta(x-a), x-a) \rangle$

Утверждение 5.3.1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.
Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $f \in C^r(D)$, $a \in D$. Тогда при $x \to a$:
$f(x) = \sum\limits_{|k|\le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(\|x-a\|^r)$

Доказательство. Пишем формулу с остатком в форме Лагранжа для $r - 1$:
$f(x) = \sum\limits_{|k|\le r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\Theta(x-a))}{k!}(x-a)^k = \sum\limits_{|k|\le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k +$

$$+\underbrace{\sum_{|k|=r}\Big(\frac{f^{(k)}(a+\Theta(x-a)) - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}{k!}\Big)(x-a)^k}_{o(\|x-a\|^r)}$$

Пусть $h = x - a$: $f^{(k)}(a + \Theta h) - f^{(k)}(a) \underset{h\to 0}{\to} 0$. Надо понять, что $|h^k| \le \|h\|^r$:
$|h_1^{k_1}...h_n^{k_n}| \le \|h\|^{k_1} \cdot ... \cdot \|h\|^{k_n} = \|h\|^r.$ □

Утверждение 5.3.2. Полиномиальная формула
$(x_1 + x_2 + ...x_n)^r = \sum\limits_{|k|=r} \binom{r}{k_1,...,k_n} x_1^{k_1}...x_n^{k_n} = \sum\limits_{|k|=r} \frac{r!}{k!}x^k.$

Доказательство. $f(x_1, ..., x_n) = (x_1 + ...x_n)^r = g^r(x)$, где $g(x) = x_1 + ...x_n$.
$\frac{\partial f}{\partial x_i} = rg^{r-1}(x)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = rg^{r-1}(x)$
$f(x) = \sum\limits_{|k|\le r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum\limits_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum\limits_{|k|=r} \frac{r!}{k!}x^k$ □

5.4 Обратная и неявная функция

Определение 5.4.1. Пусть $\lambda \in (0,1)$, $f : X \to X$. Тогда f – *сжатие с коэффициентом* λ, если $\forall x, y \in X$ $\rho(f(x), f(y)) \le \lambda\rho(x, y)$.

Теорема 5.4.1. ***Теорема Банаха о сжатии.***
Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \to X$ – сжатие с коэффициентом $\lambda \in (0,1)$. Тогда существует единственная неподвижная точка (то есть такая точка, что $f(x) = x$).

Доказательство.

1. *Единственность.*

   Пусть $f(x) = x$ и $f(y) = y$.

   Тогда $\rho(x,y) = \rho(f(x), f(y)) \le \lambda\rho(x,y) \overset{\lambda\in(0,1)}{\Rightarrow} \rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

2. *Существование.*

   Возьмем $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$.

   Проверим, что x_n – фундаментальная последовательность, то есть имеет предел, который и будет искомой точкой.

   $\rho(x_n, x_{n+k}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_{n+k-1})) \le \lambda\rho(x_{n-1}, x_{n+k-1}) \le \lambda^2\rho(x_{n-2}, x_{n+k-2}) \le ... \le \lambda^n\rho(x_0, x_k) \le \underset{\to 0}{\lambda^n} \cdot \underset{=const}{\frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\lambda}}$

   $\rho(x_0, x_k) \le \rho(x_0, x_1) + \underbrace{\rho(x_1, x_2)}_{\le\lambda\rho(x_0,x_1)} + ... + \underbrace{\rho(x_{k-1}, x_k)}_{\le\lambda^{k-1}\rho(x_0,x_1)} \overset{\text{геом. прогр.}}{\le} \frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\lambda}$

   Есть фундаментальность (так как можем сделать $\lambda^n \cdot \frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\lambda} < \varepsilon$) $\Rightarrow \exists x_* := \lim x_n$.

   $f(x_*) = f(\lim x_n) \overset{f \text{ непр.}}{=} \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x_* \Rightarrow x_* = f(x_*)$

□

Замечание. Не просто доказали, но еще и предъявили алгоритм – взять произвольную точку и начать итерироваться: применять f к точке, к образу... Тогда с хорошей скоростью будет сходимость к неподвижной точкой.
Можно, конечно, улучшить скорость, взяв начальную точку получше, но глобально и так будет очень даже неплохо.

Замечание. Если x_* – неподвижная точка и $x_n \in X$, то $\rho(x_*, x_n) \le \lambda^n \frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\lambda}$.
$\underbrace{\rho(x_n, \underbrace{x_{n+k}}_{\to x_*})}_{\to\rho(x_n,x_*)} \le \lambda^n \frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\lambda}$ и устремим k к $+\infty$.

Следствие. *Пусть X – полное метрическое пространство, $f, g : X \to X$ сжатия с коэффициентом $\lambda \in (0,1)$, $f(x) = x$, $g(y) = y$. Тогда $\rho(x,y) \le \frac{\rho(f(x),g(x))}{1-\lambda}$.*

Доказательство. $\rho(x,y) = \rho(f(x), g(y)) \le \rho(f(x), g(x)) + \underbrace{\rho(g(x), g(y))}_{\le\lambda\rho(x,y)} \le \lambda\rho(x,y) + \rho(f(x), g(x))$

□

Определение 5.4.2. *Задача Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.*
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Сейчас мы поймем, что если у нас f – достаточно хорошая функция, то задача Коши обязательно имеет единственное решение (правда, только локально, глобально может не быть).

Теорема 5.4.2. ***Теорема Пикара.***
Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна, $D \subset \mathbb{R}^2$ открытое, $(x_0, y_0) \in D$ и $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le M \cdot |y - \tilde{y}|$ $\forall (x,y)$, $(x,\tilde{y}) \in D$ (то есть при изменении второй координаты функция меняется не сильно). Тогда при некотором $\delta > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ существует единственная дифференцируемая функция φ, являющаяся решением задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Доказательство. Предъявим сжатие, для которого φ является неподвижной точкой.
$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$ – подходит под задачу Коши (дифференцируема функция, значение подходит).
Возьмем $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0, y_0) \subset D$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ найдется $K : |f(x,y)| \le K$ при $(x,y) \in \mathrm{B}_r(x_0, y_0)$.
Выберем $\delta > 0$ так, что:

1. $M\delta < 1$.

2. Если $|x - x_0| \le \delta$ и $|y - y_0| \le K\delta$, то $(x,y) \in \mathrm{B}_r(x_0, y_0)$.

Рассмотрим $C_* := \{\varphi \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mid |\varphi(x) - y_0| \le K\delta\} \subset C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
C_* – полное нормированное пространство, $\|\varphi\| = \max\limits_{t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |\varphi(t)|$.
Определим $T : C_* \to C_*$: $T(\varphi) = \psi$, где $\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$.
Проверим, что T – это сжатие.
$|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\tilde{\varphi}(t))dt| \le \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t,\varphi(t)) - f(t,\tilde{\varphi}(t))|}_{\le M|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| \le \|\varphi - \tilde{\varphi}\|} dt \le M\delta\|\varphi - \tilde{\varphi}\| \Rightarrow$
получилось сжатие с коэффициентом $M\delta{<}1$.
Тогда по теореме Банаха есть единственная неподвижная точка, которая и является решением задачи Коши. □

Замечание. Решение задачи Коши существует только локально:
$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\quad y(x) = \frac{1}{x}$ определено только на $(0, +\infty)$.
То есть если $D = (-1,1) \times (-1,1)$, то на всем отрезке определить не удастся.

Теорема 5.4.3. *Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейный оператор: $\|Ax\| \ge m\|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $m > 0$. Тогда A обратим и $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{m}$.*

Доказательство. Для обратимости нужна инъективность, то есть проверим, что нет точки $\neq 0$, переходящей в 0.

Если $Ax = 0$, то $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|Ax\| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A$ обратимо.

$\|A^{-1}\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup\limits_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leq \frac{1}{m}$, так как $\frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leq \frac{1}{m}$ □

Теорема 5.4.4. ***Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.*** *Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратимый линейный оператор, $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда B обратим, $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B-A\|}$ и $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^{-1}\|B-A\|}{\|A^{-1}\|^{-1}-\|B-A\|}$*

Доказательство. $\|Bx\| = \|Ax + (B - A)x\| \geq \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\|x\| = \|x\| \underbrace{(\|A^{-1}\|^{-1}\|B - A\|)}_{=m}$ и подставляем m в предыдущую теорему.

$\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \geq \|A^{-1}(Ax)\| = \|x\|$

Последний пункт: $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$ – очевидно, так как норма композиции не превосходит композиции норм. □

Теорема 5.4.5. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в $B_r(a)$ и $\|f'(x)\| \leq C$ $\forall x \in B_r(a)$. Тогда $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$.*

Доказательство. $\varphi(t) := \langle f(x + t(y - x), f(y) - f(x)\rangle$

Любой отрезок между x и y целиком лежит в круге, то есть при $t \in [0, 1]$ функция определена,

$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) \overset{\text{th Лагранжа}}{=} \varphi'(\xi)$, $\xi \in (0, 1)$ (φ – дифференцируема как композиция, функция от одной переменной)

$\varphi'(\xi) = \langle f'(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x), f(y) - f(x)\rangle \leq \|f'(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x)\| \cdot \|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f'(x + \xi(y - x))\|}_{\leq C} \cdot \|y - x\| \cdot \|f(y) - f(x)\|$ □

Теорема 5.4.6. ***Теорема об обратной функции.***
Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0)$, f непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, $A := f'(x_0)$ обратимо. Тогда существует U и V окрестности точек x_0 и y_0: $f : U \to V$ обратима и $f^{-1} : V \to U$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $G_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$.

Выберем $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ т.ч. $\|A^{-1}\|\|A - f'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ при $x \in \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ (так как $\|A^{-1}\| = const$ и f непрерывно дифференцируема, то при $x \to x_0$ мы можем сделать норму маленькой).

Тогда $f'(x)$ обратимо при $x \in \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ (по теореме).

$G'_y(x) = E + A^{-1}(-f'(x)) = E - A^{-1} \cdot f'(x)$

$\|G'_y(x)\| = \|A^{-1}(A - f'(x))\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|A - f'(x)\| \le \frac{1}{2} \Rightarrow \|G'_y(x)\| \le \frac{1}{2}$ при $\forall x \in \overline{\mathrm{B}}_r(x_0) \Rightarrow$ $\|G'_y(x) - G'_y(\tilde{x})\| \le \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|$ при $\forall x, \tilde{x} \in \overline{\mathrm{B}}_r(x_0) \Rightarrow G_y$ – сжатие с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Хотим понять, что круг перейдет в круг.

$$\|G_y(x) - x_0\| \le \|G_y(x_0) - x_0\| + \|G_y(x) - G_y(x_0)\| \le \underbrace{\|A^{-1}(y - f(x_0))\|}_{\le\|A^{-1}\|\cdot\|y-f(x_0)\|=\|A^{-1}\|\cdot\|y-y_0\|} + \underbrace{\frac{1}{2}\|x - x_0\|}_{\le\frac{r}{2} \text{ при } x\in\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)}$$

Можно выбрать $\mathrm{B}_R(y_0)$, т. ч. $\forall y \in \mathrm{B}_R(y_0)$ $\|A^{-1}\| \cdot \|y - y_0\| < \frac{r}{2} \Rightarrow \|G_y(x) - x_0\| < r$.

То есть если $y \in \mathrm{B}_R(y_0)$ (y близко к y_0), то $G_y(\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)) \subset \mathrm{B}_r(x_0) \Rightarrow$ у G_y есть единственная неподвижная точка $x_y \in \mathrm{B}_r(x_0)$:

$x_y = G_y(x_y) = x_y + A^{-1}(y - f(x_y)) \Leftrightarrow A^{-1}(y - f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x_y) = y \Leftrightarrow f(\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)) \supset \overline{\mathrm{B}}_R(y_0)$

($\Leftrightarrow$, так как есть инъективность в силу единственности неподвижной точки)

Определим окрестности: $V := \overline{\mathrm{B}}_R(y_0)$, $U := f^{-1}(V)$, $f : U \to V$ биекция

Проверяем непрерывность f^{-1}. Пусть $f(x) = y$ и $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y})\| = \|x - \tilde{x}\| = \|G_y(x) - G_{\tilde{y}}(\tilde{x})\| \le 2\|G_y(x) - G_{\tilde{y}}(x)\| = 2\|(x + A^{-1}(y - f(x))) -$ $(x + A^{-1}(\tilde{y} - f(x)))\| = 2\|A^{-1}(y - \tilde{y})\| \le 2\|A^{-1}\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \Rightarrow$ если y близки, то и x близки. □

Теорема 5.4.7. ***Теорема о дифференцируемости обратного отображения.***
Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо, $f(x_0) = y_0$, $A := f'(x_0)$ обратимо, U и V окрестности точек x_0 и y_0, т. ч. $f : U \to V$ и $f^{-1} : V \to U$ непрерывно. Тогда f^{-1} дифференцируемо в точке y_0.

Доказательство. $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

$k := f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h)\|h\|$

$\|Ah\| \ge \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}$, тогда $k \ge \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\|h\| \ge \underbrace{(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|)}_{>0} \cdot \|h\| \Rightarrow$ если $k \to 0$, то и $h \to 0$.

$f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0) = x_0 + h - x_0 = h = A^{-1}\underbrace{(Ah + \alpha(h)\|h\|)}_{=k} - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = A^{-1}k -$ $\underbrace{A^{-1}(\alpha(h))\|h\|}_{=o(\|k\|)}$, так как $\|h\| \le C\|k\|$ □

Следствие. *В условиях теоремы об обратной функции если f непрерывно дифференцируема, то f^{-1} также непрерывно дифференцируема.*

Следствие. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $f'(x)$ обратимо $\forall x \in D$. Тогда $\forall G \subset D$ открытого $f(G)$ открыто.*

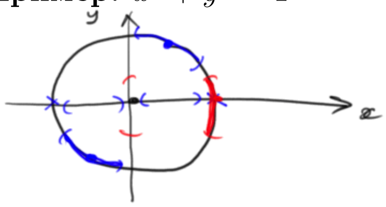
Доказательство. Возьмем $y_0 \in f(G) \Rightarrow \exists x_0 \in G$ т.ч. $f(x_0) = y_0$. Применим теорему об обратной функции: $\exists U$ и V окрестности точек x_0 и y_0, т.ч. $f : U \to V$ биекция $\Rightarrow V = f(U) \subset f(G) \Rightarrow y_0$ – внутренняя точка $f(G) \Rightarrow f(G)$ открыта. □

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Утверждение 5.4.1. Пусть $A : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ линейный оператор, т.ч. $A(h, 0) = 0 \Rightarrow h = 0$. Тогда уравнение $A(x, y) = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}^m$ имеет единственное решение.

Доказательство. $h \in \mathbb{R}^n \to A(j, 0) \in \mathbb{R}^n$ биекция, так как это инъекция (0 переходит только в 0) + размерности совпадают.
$A(x, y) = 0 \Leftrightarrow A(x, 0) = -A(0, y)$, так как $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$.
$A(x, 0)$ – биекция $\Rightarrow$ существует единственный y. □

Пример. $x^2 + y^2 = 1$



Нас интересует задание графика функции. Можем сделать это для некоторых точек в некоторых окрестностях, причем где-то мы получим графие $y(x)$, где-то – $x(y)$, а где-то – и то, и то.
Зависит все от матрицы из производных:
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
$f'(x, y) = (2x, 2y)$
Посмотрим на какую-то точку:
$f'(1, 0) = (2, 0)$
$(2\ 0)\binom{h}{0} \Leftrightarrow h = 0$ – выполнено, то есть $x(y)$ есть по аналогии с линейной ситуации.
$(2\ 0)\binom{h}{0}$ – всегда $\Rightarrow$ функция $y(x)$ не получится, нет нужного линейного свойства.
Неявная функция – функции, которые получаются в качестве решения уравнения в окрестности непрерывности (те самые функции, графики которых мы нарисовали).

Теорема 5.4.8. ***Теорема о неявной функции.***
Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ открытое, $f : D \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема, $(\underset{\in\mathbb{R}^n}{a}, \underset{\in\mathbb{R}^m}{b})$ и $f(a, b) = 0$, $A := f'(a, b)$ и A удовлетворяет условию: $A(h_0) = 0 \Rightarrow h_0 = 0$. Тогда существует W – окрестность точки b и единственная $g : W \to \mathbb{R}^n : g(b) = a$, $f(g(y), y) = 0$ $\forall y \in W$ и эта функция непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Пусть $F : D \to \mathbb{R}^{n+m}$, $F(x, y) = (f(x, y), y)$ непрерывно дифференцируема.
$F'(a, b) = \begin{pmatrix} f'(a,b) \\ O\ \ E \end{pmatrix}$
Здесь будет обратимость: $F'(a, b)\binom{h}{k} = \binom{A(h,k)}{k}$, если это $= \binom{0}{0}$, то $k = 0$ и $A(h, 0) = 0 \Rightarrow h = 0$, то есть умножение на $F'(a, b)$ – это инъективное отображение $\Rightarrow F'(a, b)$ обратима.
Тогда по теореме об обратной функции $\exists U$ – окрестность (a, b) и V – окрестность $(0, b)$, т.ч. $F : U \to V$ биекция и $G := F^{-1} : V \to U$ непрерывно дифференцируема.
Как действует эта функция:

$G(z, w) = (\varphi(z, w), w)$ (вторая координата должна не меняться)

$\Rightarrow f(\varphi(z, w), w) = z$

Возьмем W – окрестность точки b, т.ч. $\{0\} \times W \subset V$. Тогда $g : W \to \mathbb{R}^n$, т.ч. $g(w) := \varphi(0, w)$.

То, что надо, так как $f(g(w), w) = 0$ и $g(b) = a$, $\varphi(0, b) = a$

Единственность следует из биективности F: $f(x, y) = f(\tilde{x}, y) \Rightarrow F(x, y) = F(\tilde{x}, y) \overset{F \text{ вз. одн.}}{\Rightarrow} (x, y) = (\tilde{x}, y) \Rightarrow x = \tilde{x}$ $\square$

5.5 Экстремумы функций

Определение 5.5.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$.

a – *точка локального минимума*, если $\exists U$-окрестность точки a, т.ч.

$\forall x \in E \cap U \ f(x) \geq f(a)$.

a – *точка строгого локального минимума,* если $\exists U$-окрестность точки a, т.ч.

$\forall \underset{\neq a}{x} \in E \cap U \ f(x) > f(a)$.

a – *точка локального максимума*, если $\exists U$-окрестность точки a, т.ч.

$\forall x \in E \cap U \ f(x) \leq f(a)$.

a – *точка строгого локального максимума*, если $\exists U$-окрестность точки a, т.ч.

$\forall \underset{\neq a}{x} \in E \cap U \ f(x) > f(a)$.

Определение 5.5.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$.

a – *точка экстремума*, если это точка локального минимума или точка локального максимума.

a – *точка строгого экстремума*, если это точка строгого локального минимума или точка строгого локального максимума.

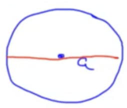
Теорема 5.5.1. ***Необходимое условие экстремума.***

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, a – точка экстремума функции f. Тогда если существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$. В частности, если f дифференцируема в точке a, то $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$, то есть $\nabla f(a) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности a – точка максимума.

Пусть $g(t) := f(t, a_1, a_2, ..., a_n)$ задана в окрестности точки a_1.

a_1 точка локального максимума для функции g: $g(a_1) \geq g(t)$ $\forall t$ в некоторой окрестности a_1.



Если существует $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, то g дифференцируема в точке $a_1 \Rightarrow g'(a_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$ (необходимое условие для функции от одной переменной). $\square$

Определение 5.5.3. a – *стационарная точка функции* f, если $\nabla f(a) = 0$.

Замечание. Пусть f дважды дифференцируема и a стационарная точка.
$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + o(\|h\|^2)$ – *формула Тейлора в стационарной точке.*

Определение 5.5.4. *Квадратичная форма* $Q(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}h_i h_j$. Считают, что $c_{ij} = c_{ji}$.
$C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, $Q(h) = \langle Ch, h\rangle$

Определение 5.5.5. Q – *положительно определенная квадратичная форма*, если $Q(h) \geq 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.
Q – *строго положительно определенная квадратичная форма*, если $Q(h) > 0$ $\forall \underset{\neq 0}{h} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 5.5.6. Q – *отрицательно определенная квадратичная форма*, если $Q(h) \leq 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.
Q – *строго отрицательно определенная квадратичная форма*, если $Q(h) < 0$ $\forall \underset{\neq 0}{h} \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 5.5.1. Пусть Q строго положительно определенная квадратичная форма. Тогда существует $c > 0$, т.ч. $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $Q(h) \geq c\|h\|^2$.

Доказательство. $Q(h) = \langle Ch, h\rangle$ – непрерывная функция.
Рассмотрим ее на единичной сфере $S := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\}$ – компакт $\Rightarrow$ Q достигает наименьшего значения на S. Пусть в точке $y \in S : Q(x) \geq Q(y) > 0$ $\forall x \in S$.
Проверим, что $c = Q(y)$ подходит.
$Q(h) = \langle Ch, h\rangle = \|h\|^2\langle C\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle$ (вытащили по линейности константу) $\geq \|h\|^2 Q(\frac{h}{\|h\|})$, так как $\frac{h}{\|h\|} \in S$.
Если $h = 0$, то неравенство очевидно. □

Теорема 5.5.2. ***Достаточные условия экстремума.***
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, a *– стационарная точка,* f *дважды дифференцируема,* $Q(h) := \sum\limits_{i=1,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j$. *Тогда:*

1. *Если* Q *строго положительно определена, то* a *точка строгого локального минимума.*
2. *Если* Q *строго отрицательного определена, то* a *точка строгого локального максимума*
3. *Если* a *точка нестрого локального минимума, то* Q *нестрого положительно определена.*
4. *Если* a *точка нестрого локального максимума, то* Q *нестрого отрицательно определена.*

Доказательство. $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + o(\|h\|^2)$
$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + o(\|h\|^2)$

1. По лемме $Q(h) \geq c\|h\|^2 \Rightarrow f(a+h) - f(a) \geq \frac{c}{2}\|h\|^2 + o(\|h\|^2) = \underbrace{\|h\|^2}_{>0}(\underbrace{\frac{c}{2} + o(1)}_{>0 \text{ при } h \text{ близких к } 0})$ (так как стремится $\frac{c}{2} > 0$)

3. Зафиксируем h: $f(a+th)-f(a)=\frac{1}{2}Q(th)+o(t^2)=t^2\frac{1}{2}Q(h)+o(t^2)$

$$\frac{1}{2}Q(h)\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{f(a+th)-f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{t^2}_{>0}}\geq 0\Rightarrow Q(h)\geq 0$$

$\square$

Пример. $f(x,y)=x^4+y^4-36xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-36y \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-36x \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$\begin{cases} x^3=9y \quad y=\frac{x^3}{9} \\ y^3=9x \quad 9x=y^3=(\frac{x^3}{9})^3 \quad x^9=3^8x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right. \Rightarrow (0,0),\ (3,3),\ (-3,-3)$ удовлетворяют необходимому условию эксттремума.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-36 \quad \begin{pmatrix} 12x^2 & -36 \\ -36 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x^2 & -3 \\ -3 & y^2 \end{pmatrix}$

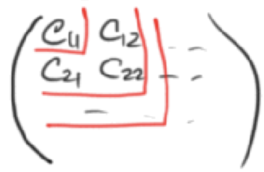
1. $(0,0) \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=-9<0$

   Нет знакоопределенности $\Rightarrow$ не точка экстремума.

2. $(3,3)$ и $(-3,-3) \quad \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}=81-9>0$

   Положительно определена $\Rightarrow$ точка строгого локального минимума.

Утверждение 5.5.1. Критерий Сильвестра.



1. $c_{11}>0$

   $\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}>0$

   $\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}>0$

   ...

   $\Leftrightarrow$ строгая положительная определенность.

2. $c_{11} < 0$

   $\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} < 0$

   $\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} < 0$

   ...

   $\Leftrightarrow$ строгая отрицательная определенность.

Определение 5.5.7. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ открытое, $\Phi : D \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $\Phi(a) = 0$. Тогда:

1. a точка *условного локального минимума при условии* $\Phi(x) = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in U$, удовлетворяющего условию $\Phi(x) = 0$, $f(x) \geq f(a)$.

2. *a точка строго условного локального минимума при условии* $\Phi(x) = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall \underset{\neq a}{x} \in U$, удовлетворяющего условию $\Phi(x) = 0$, $f(x) > f(a)$.

Теорема 5.5.3. ***Метод неопределенных множителей Лагранжа***
Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $\Phi : D \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема, $a \in D$, $\Phi(a) = 0$, D открытое.
Если a точка условного экстремума (при условии $\Phi(x) = 0$), то $\nabla f_{(a)}$, $\nabla\Phi_1^{(a)}$, ..., $\nabla\Phi_m^{(a)}$ линейно зависимы.

Замечание.

1. Пусть $\nabla\Phi_1(a)$, ..., $\nabla\Phi_m(a)$ линейно зависимы. Тогда $\nabla f(a) = \lambda_1\Phi_1(a) + ... + \lambda_m\nabla\Phi_m(a)$.

   Эти λ_i – *неопределенные коэффициенты Лагранжа.*

2. Что значит линейная независимость $\nabla\Phi_1(a)$, ..., $\nabla\Phi_m(a)$? Это строки матрицы $\Phi'(a)$, то есть ранг матрицы $\Phi'(a)$ максимально возможный.

Хотим доказать, что если ранг $\Phi'(a)$ максимально возможный, a точка условного экстремума, то $\nabla f(a) = \lambda_1\Phi_1(a) + ... + \lambda_m\nabla\Phi_m(a)$ для некоторых $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть минор по последним столбцам у $\Phi'(a)$ невырожденный:
$\Phi'(a)(0, h) = 0 \Rightarrow h = 0$
$a = (b, c)$. Тогда по теореме о неявной функции $\exists W$ окрестность точки b, $g : W \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема, т.ч. $\Phi(x, g(x)) = 0\ \forall x \in W$.
Рассмотрим функцию $\underbrace{h(x)}_{\leq h(b) = f(b, g(b)) =} := \underbrace{f(x, g(x))}_{\leq f(a)}$. Тогда b – локальный экстремум функции h (для определенности рассматриваем условный максимум).

Тогда по необходимому условию экстремума $h'(b)$ – нулевая матрица.

h – композиция f и $x \mapsto \binom{x}{g(x)}$. $0 = h'(b) = f'(a)\binom{E}{g'(b)} = (f'_x(a) f'_y(a))\binom{E}{g'(b)} = f'_x(a) + f'_y(a)g'(b)$ строка

$\Phi(x, g(x)) \equiv 0 \Rightarrow \Phi'_x(a) + \Phi'_y(a)g'(b) = 0$ матрица

Возьмем $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$.

$\lambda\Phi'_x(a) + \lambda\Phi'_y(a)g'(b) = 0 \Rightarrow \underbrace{(f'_x(a) - \lambda\Phi'_x(a))}_{=0} + \underbrace{(f'_y(a) - \lambda\Phi'_y(a))}_{=0} g'(b) = 0$

Нужно так подобрать λ, что $f'_y(a) - \lambda\Phi'_y(a) = 0 \Rightarrow \lambda\Phi'_y(a) = f'_y(a)$ □

Определение 5.5.8. $f - \lambda\Phi = f - \lambda_1\Phi_1 - ...\lambda_m\Phi_m$ – *функция Лагранжа.*

Замечание. Условие из метода множителей Лагранжа можно записать так: $\nabla(f - \lambda\Phi)(a) = 0$.

Пример. Наибольшее и наименьшее значение квадратичной формы на сферей

A – симметричная матрица, $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$, $\|x\|^2 = 1$

$F(x) = Q(x) = \lambda(\|x\|^2 - 1) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda$

В точках условного экстремума $\nabla F = 0$.

$m = 1$: $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$, $\Phi'(x) = (2x_1, 2x_2, ..., 2x_n)$

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}x_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - \lambda \cdot 2x_k = 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}x_i - 2\lambda x_k = 0 \Rightarrow \lambda$ – собственное число матрицы, x_k - соответствующий единичный собственный вектор

$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda$

Теорема 5.5.4. *Наибольшее (наименьшее) значение квадратичной формы $Q(h) = \langle Ah, h\rangle$ (A – симметричная матрица) на единичной сфере –эо наибольшее (наименьшее) собственное число матрицы. Они достигаются на соответсвующих единичных собственных векторах.*

Следствие. $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda$ – *собственное число матрицы* $A^T A\}$

Доказательство. $\|A\|^2 = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \max\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax\rangle = \max\limits_{\|x\|=1} \langle A^T Ax, x\rangle$ □