

Содержание

Определение 0.0.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная; $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) := \int_a^x f$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

Определение 0.0.2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная; $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi(x) := \int_x^b f$ называется интегралом с переменным нижним пределом.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f$

Теорема 0.0.1. Теорема Барроу

Если $f \in C[a, b]$ и $\Phi(x) = \int_a^x f$, то Φ — первообразная f .

Доказательство. Надо доказать, что $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = f(x)$.

Проверим для предела справа $y > x$.

$$R(y) := \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \cdot \left(\int_a^y f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y f \stackrel{\text{по th о среднем}}{=} f(c), \text{ где } x < c < y \text{ (} c \text{ зависит от } y \text{)}.$$

Надо доказать, что $\lim_{y \rightarrow x} R(y) = f(x)$. Берем последовательность $y_n \xrightarrow{y_n > x} x$.

$R(y_n) = f(c_n)$, где $x < c_n < y_n$, но $c_n \rightarrow x$ и f непрерывна в точке $x \Rightarrow R(y_n) = f(c_n) \rightarrow f(x) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x} R(y) = f(x)$. □

Следствие.

$$1. \Psi'(x) = -f(x).$$

Доказательство. $\Psi(x) = \int_a^b f - \Phi(x) = \text{const} - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$. □

2. Если $f \in C(\langle a, b \rangle)$, то у f есть первообразная.

Доказательство. Возьмем $c \in (a, b)$ и определим $F(x) := \begin{cases} \int_c^x f, & \text{если } x \geq c \\ -\int_x^c f, & \text{если } x \leq c \end{cases}$. □

Теорема 0.0.2. Формула Ньютона-Лейбница

Если $f \in C[a, b]$, F — первообразная f , то $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) := \int_a^x f$ — первообразная f и все первообразные отличаются друг на

друга на константу $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$. □
 $0 = \Phi(a) = F(a) + C$

Обозначение 1. $\int_a^b f = F|_a^b := F(b) - F(a)$.

Теорема 0.0.3. Линейность интеграла

$f, g \in C[a, b]; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Доказательство. Знаем, что если F и G — первообразные f и g , то $\alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ \square

Теорема 0.0.4. Формула интегрирования по частям

$u, v \in C^1[a, b]$. Тогда: $\int_a^b uv' = uv|_a^b - \int_a^b u'v$.

Доказательство. Знаем, что если H — первообразная $u'v$, то $uv - H$ — первообразная для uv' .
 $\int_a^b uv' = (uv - H)|_a^b = uv|_a^b - H|_a^b = uv|_a^b - \int_a^b u'v$ \square

Теорема 0.0.5. Теорема о замене переменной в определенном интеграле

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \in C(\langle a, b \rangle); \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, \varphi \in C^1(\langle a, b \rangle); p, q \in \langle c, d \rangle$. Тогда $\int_p^q f(\varphi(t)) \cdot$

$$\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx.$$

Соглашение: если $a > b$, то $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Доказательство. Пусть F — первообразная для f . Тогда $F \circ \varphi$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
 $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F \circ \varphi|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx$ \square

Пример. $\int_1^3 \frac{x}{1+x^4} dx = \left[\begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctan t \Big|_1^9 = \frac{1}{2}(\arctan 9 - \arctan 1)$

0.1 Приложения формулы интегрирования по частям

Пример. $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

Доказательство. $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t, \varphi(t) := \frac{\pi}{2} - t, \varphi'(t) = -1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x \, dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$
 \square

Утверждение 0.1.1. $W_0 \geq W_1 \geq \dots \geq W_n$

Доказательство. Индукция.

База: $W_0 = \frac{\pi}{2}, W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Переход: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \left[\begin{matrix} u = \sin^{n-1} x & u' = (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv' = uv \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v =$
 $\underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - \right.$
 $\left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$

$$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow W_n = \frac{n-1}{n} \cdot W_{n-2} \quad \square$$

$$\text{Следствие. } W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot W_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Теорема 0.1.1. Формула Валлиса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство. $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ и } W_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \left| : \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right.$$

$$\frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

$$\text{Следствие. } C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\text{Доказательство. } C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(n!)^2} = [(2n)!! = 2^n \cdot n!] = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2} \cdot 4^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 4^n$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \underbrace{\sqrt{2n+1}}_{< \sqrt{2n}} \sim \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \square$$

Теорема 0.1.2. Формула Тейлора с остатком в интегральной формуле

$$f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle). \text{ Тогда } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{:=T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{:=R_n(x)}, \quad x, x_0 \in \langle a, b \rangle.$$

Доказательство. Индукция по n .

$$\text{База } n=0: f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

$$\text{Переход } n \rightarrow n+1: f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$$n! \cdot R_n(x) = \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \begin{bmatrix} u = f^{(n+1)}(t) & u' = f^{(n+2)}(t) \\ v' = (x-t)^n & v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix} = uv \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x u'v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{x_0}^x -$$

$$\int_{x_0}^x \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) \right) dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt}_{R_{n+1}(x)} \quad \square$$

$$\text{Пример. } H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

Утверждение 0.1.2. Свойства:

$$1. \quad 0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cos x dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j}}{j!}.$$

2. Если $c > 0$, то $c^j H_j \rightarrow 0$

Комментарий: $0 < c^j H_j < \frac{((\frac{\pi}{2})^2 c)^j}{j!} \rightarrow 0$.

3. $H_0 = 1, H_1 = 2$.

4. $H_j = (4j - 2) \cdot H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.

$$\begin{aligned}
 j! H_j &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j (\sin x)' dx = \underbrace{((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} dx = \\
 &= 2j \cdot \underbrace{(((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \cdot x (-\cos x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \cdot \cos x dx - \\
 &\quad - 2(j-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} \underbrace{x^2}_{(\frac{\pi}{2})^2 - ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)} \cos x dx = \\
 &= 2j((j-1)! \cdot H_{j-1} - 2(j-1)(\frac{\pi}{2})^2(j-2)! \cdot H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)! \cdot H_{j-1}) = \\
 &= 2j! \cdot H_{j-1} - \pi^2 j! \cdot H_{j-2} + 4j!(j-1) \cdot H_{j-1} = j!((4j-2) \cdot H_{j-1} - \pi^2 \cdot H_{j-2})
 \end{aligned}$$

5. Существует многочлен P_j степени $\leq j$ с целыми коэффициентами, для которого $H_j := P_j(\pi^2)$.

Доказательство. $P_0(x) \equiv 1, P_1(x) \equiv 2, P_j(x) = (4j-2) \cdot P_{j-1}(x) - x \cdot P_{j-2}(x)$ — подходит. \square

Теорема 0.1.3. Теорема Ламберта

π и π^2 иррациональны.

Доказательство. (Эрмит)

От противного. Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое}}{n^j}$

$n^j H_j \geq 1$ (это положительное целое). Но $n^j H_j \rightarrow 0$ (по свойству 2) ?? \square

0.2 Интегральные суммы

Определение 0.2.1. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; f равномерно непрерывна, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{=\delta(\varepsilon)}{\delta} > 0 : \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Замечание. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; f непрерывна во всех точках, если:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{=\delta(x, \varepsilon)}{\delta} > 0 : \forall y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Утверждение 0.2.1. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\Rightarrow f$ непрерывна на E .

Пример.

$$0. \quad f(x) = x.$$

1. $f(x) = \sin x$ – равномерно непрерывна на \mathbb{R} : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $\delta = \varepsilon$ подходит.

2. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ *липицева* с константой L , если $\forall x, y \in E : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$.

f равномерно непрерывна на E : $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ подходит.

3. $f(x) = x^2$ – не равномерно непрерывна на \mathbb{R} .

Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

$$y = x + \frac{\delta}{2}, |x - y| < \delta; f(x) - f(y) = y^2 - x^2 = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta > 1 \text{ при } x > \frac{1}{\delta}.$$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$ – не равномерно непрерывна.

Возьмем $\varepsilon = 1$ и проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит:

$$y = \frac{\delta}{2} \text{ и } x = \delta, |x - y| < \delta; f(y) - f(x) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1 \text{ при } \delta < 1 \text{ не подходит.}$$

$$\text{Если } \delta \geq 1, \text{ то } y = \frac{1}{2}, x = 1, \text{ то } f(y) - f(x) = 1.$$

Теорема 0.2.1. Теорема Кантора

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках. Тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит.

В частности, $\delta = 1$ не подходит $\Rightarrow \exists x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < \delta$ и $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_2, y_2 \in [a, b] : |x_2 - y_2| < \delta$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \delta$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

x_n – ограниченная последовательность $\xrightarrow{\text{th B.-B.}}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow c$

$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow c \in [a, b]$ f непрерывна в $c \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$

$c \leftarrow x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \rightarrow c \Rightarrow y_{n_k} \rightarrow c \Rightarrow f(y_{n_k}) \rightarrow f(c)$

Тогда $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \rightarrow f(c) - f(c) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, получили противоречие. \square

Определение 0.2.2. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in E \text{ и } |x - y| < \delta\}$ для $\delta \geq 0$.

$\omega_f(\delta)$ – модуль непрерывности.

Утверждение 0.2.2. Свойства:

1. $\omega_f(0) = 0$.

2. $\omega_f \geq 0$.

3. ω_f нестрого возрастает.

4. $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$.

5. Если f липшицева с константой L , то $\omega_f(\delta) \leq L\delta$.

Комментарий: $(|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L\delta, \text{ если } |x - y| \leq \delta; \text{ то есть все числа (и sup в том числе) не превышают } L\delta)$

6. f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \omega_f$ непрерывна в нуле (то есть $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$).

Доказательство. \Rightarrow : f равномерно непрерывна. Возьмем $\varepsilon > 0$, для него:

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Тогда если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2}$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) \leq \varepsilon \Rightarrow \omega_f(\alpha) \leq \varepsilon \forall \alpha < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

\Leftarrow : Возьмем $\varepsilon > 0$ и такую $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ если $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

7. $f \in C[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

Комментарий: \Rightarrow : th Кантора; \Leftarrow : 6 свойство.

Определение 0.2.3. $[a, b] : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \tau = \{x_0, \dots, x_n\}$

τ – дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a, b]$.

Определение 0.2.4. Ранг дробления $|\tau| := \max\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ (самый длинный отрезок дробления).

Определение 0.2.5. Оснащение дробления $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \forall k$.

Определение 0.2.6. Интегральная сумма (сумма Римана): $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Теорема 0.2.2. Теорема об интегральных суммах

$f \in C[a, b]$. Тогда $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a) \cdot \omega_f(|\tau|)$.

Доказательство. $\Delta := \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
 $x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt$
 $|\Delta| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{|f(t) - f(\xi_k)|}_{\leq \omega_f(x_k - x_{k-1}) \leq \omega_f(|\tau|)} dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) = \omega_f(|\tau|) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b - a). \quad \square$

Следствие.

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $< \delta$ и \forall его оснащения: $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$.

2. τ_n — последовательность дроблений, т.ч. если $|\tau_n| \rightarrow 0$, то $S(f, \tau, \xi) \rightarrow \int_a^b f$.

Пример. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p$, $p \geq 0$

Хотим посчитать $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

Возьмем непрерывную $f(x) = x^p$ и воспользуемся теоремой для нее:

$$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^p} = [x_k = \frac{k}{n}, [a, b] = [0, 1], x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}, \xi_k = x_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = S(f, \tau, \xi) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

Определение 0.2.7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — интегрируема по Риману и I — ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ дробления ранга $< \delta$ и \forall оснащения $\left| S(f, \tau, \xi) - I \right| < \varepsilon$.

Замечание. Любая непрерывная функция — такая.

Замечание. Берем дробления на равные отрезки $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ и $\xi_k = x_k$:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) \rightarrow \int_a^b f$$

Теперь рассмотрим $\xi'_k = x_{k-1}$:

$$S(f, \tau, \xi') = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \rightarrow \int_a^b f$$

Сумма площадей трапеций:

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

Лемма 0.2.1. $f \in C^2[\alpha, \beta]$. Тогда $\Delta := \int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt$.

Доказательство. $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)(t - \gamma)' dt = \underbrace{f(t)(t - \gamma)}_{f(\beta) \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} - f(\alpha) \cdot (-\frac{\beta - \alpha}{2}) = \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2}(\beta - \alpha)} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma) dt$$

Рассмотрим $((t - \alpha)(\beta - t))' = (-t^2 + (\beta + \alpha)t - \alpha\beta)' = -2t + (\beta + \alpha) = -2(t - \gamma)$

$$\Delta = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \underbrace{\frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t)}_0 \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt$$

□

Теорема 0.2.3. Оценка погрешности в формуле трапеций

$f \in C^2[a, b]$. Тогда $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |f''|$.

Доказательство. $\Delta = \int_{\alpha}^{\beta} f - \sum_{k=1}^n = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t) dt$

$$|\Delta| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \stackrel{(*)}{\leq} \frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''(t)| dt$$

$$(*) (t - x_{k-1})(x_k - t) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (x_k - x_{k-1})^2 \leq \frac{|\tau|^2}{4}$$

□

Теорема 0.2.4. Формула Эйлера-Маклорена для второй производной

$f \in C^2[m, n]$. Тогда $\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt$.

Доказательство. $\int_{k-1}^k f(t)dt - \frac{f(k-1)+f(k)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{k-1}^k f''(t) \underbrace{(t - (k-1))}_{\{t\}} \underbrace{(k-t)}_{1-\{t\}} dt = -\frac{1}{2} \int_{k-1}^k f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt$

$$\begin{aligned} \text{Суммирование по } k \text{ от } m+1 \text{ до } n: & \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f(t)dt}_{\int_m^n f(t)dt} - \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \frac{f(k-1)+f(k)}{2}}_{\sum_{k=m}^n f(k) - \frac{f(m)+f(n)}{2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt}_{\int_m^n f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt} \end{aligned}$$

□

Пример.

1. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p$, $f(t) = t^p$, $p > -1$, $m = 1$, $n = n$, $f''(t) = p(p-1) \cdot t^{p-2}$

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n f(t)dt + \frac{1}{2} \int_1^n f''(t) \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt = \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \underbrace{\int_1^n t^p dt}_{= \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}} + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1) t^{p-2} \{t\} (1 - \{t\})dt \end{aligned}$$

○ Случай $p \in (-1, 1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$

$$0 < \int_1^n t^{p-2} \underbrace{\{t\}(1 - \{t\})}_{\leq \frac{1}{4}} dt \leq \frac{1}{4} \underbrace{\int_1^n t^{p-2} dt}_{= \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} < \frac{1}{1-p}}$$

стантой

○ Случай $p > (-1, 1)$: $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + o(n^{p-1})$

$$0 < \int_1^n t^{p-2} \cdot \{t\} \cdot (1 - \{t\})dt \leq \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{n^{p-1}-1}{p-1}$$

2. *Гармонические числа* $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

$$f(t) = \frac{1}{t}, \quad m = 1, \quad n = n, \quad f''(t) = \frac{2}{t^3}$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int_1^n \frac{dt}{t}}_{\ln t \Big|_1^n = \ln n} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^n \frac{2\{t\}(1 - \{t\})}{t^3} dt}_{:= a_n}$$

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n$$

a_n — возрастающая последовательность; $a_n \leq \int_1^n \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) \leq \frac{1}{8}$

a_n возрастающая и ограниченная $\Rightarrow \exists \lim a_n = a \leq \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$

$$H_n = \ln n + \underbrace{\left(a + \frac{1}{2}\right)}_{=:\gamma} + o(1)$$

γ — постоянная Эйлера, $\gamma \approx 0,5772156649\dots$

3. Формула Стирлинга: $n! \sim n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k, \quad f(t) = \ln t, \quad f''(t) = -\frac{1}{t^2}, \quad m = 1, \quad n = n$$

$$\ln n! = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2} \ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t \, dt}_{=n \cdot \ln n - n + 1 (*)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt}_{=:b_n} \Rightarrow$$

$$(*) \int_1^n \ln t \, dt = t \cdot \ln t \Big|_1^n - \int_1^n t \frac{1}{t} dt = n \cdot \ln n - n + 1$$

$$\Rightarrow \ln n! = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1 - b_n$$

$$b_n \text{ — возрастающая последовательность: } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} \int_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt > 0$$

$$b_n \text{ — ограниченная последовательность: } b_n \leq \frac{1}{8} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8}$$

Тогда существует $\lim b_n = b$ и $b_n = b + o(1)$.

$$\ln n! = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1 - b + o(1) \Rightarrow n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot e^{1-b} \cdot \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1) \sim 1} \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot C$$

$$\text{Найдем } C. \text{ Рассмотрим } \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot C}{(n^n \cdot e^{-n} \sqrt{n} \cdot C)^2} = \frac{2^{2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot C}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot C^2} = \frac{4^n \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot C}$$

$$\text{Тогда } \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot C} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{2}}{C} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

0.3 Несобственные интегралы

Определение 0.3.1. $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C[a, b)$. Тогда *несобственный интеграл*:

$$\int_a^b f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f, \text{ если предел существует.}$$

Определение 0.3.2. $-\infty \leq a < b < +\infty$, $f \in C(a, b]$. Тогда *несобственный интеграл*:

$$\int_a^b f := \lim_{A \rightarrow a+} \int_A^b f, \text{ если предел существует.}$$

Определение 0.3.3. Если предел существует и конечен, то соответствующий интеграл назовем *сходящимся*. В остальных случаях назовем интеграл *расходящимся*.

Замечание.

1. Если $b \neq +\infty$ и $f \in C[a, b]$, то $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$.

Комментарий: $\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$, $\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| = \left| \int_B^b f \right| \leq (b - B) \cdot M$, где $M = \max |f|$.

2. Если f имеет первообразную F в $[a, b)$, то $\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{B \rightarrow b-} F(b) - F(a)$.

Комментарий: $\int_a^B f = F(B) - F(a)$ и написать пределы.

Теорема 0.3.1. Критерий Коши для несобственных интегралов

$-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C[a, b)$. Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, b) :$

$$\forall A, B \in (c, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная f . Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{B \rightarrow b-} F(b)$.

Если $b \neq +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in \underbrace{(b - \delta, b)}_{=c} \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{\substack{= \int_A^B f}} < \varepsilon$

Если $b = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists E \forall A, B \supset \underbrace{E}_{=c} \underbrace{|F(A) - F(B)|}_{\substack{= \int_A^B f}} < \varepsilon$ □

Замечание. Если $\exists A_n, B_n \in [a, b)$, т.ч. $A_n, B_n \rightarrow b$ и $\underbrace{\int_{A_n}^{B_n} f}_{:= C_n} \not\rightarrow 0$, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ расходится.

Комментарий: Найдется подпоследовательность C_{n_k} , т.ч. $|C_{n_k}| > \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{B_n}^{A_n} f \right| \geq \varepsilon$?! (противоречие с критерием Коши).

Пример.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(1)$, где $F(x)$ — первообразная $\frac{1}{x^p}$.

Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1) \cdot x^{p-1}}$ и тогда:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty, & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл расходится} \end{cases}$$

Итого: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p > 1$ и в этом случае $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = F(1) - \lim_{x \rightarrow 0+} F(x), \text{ где } F(x) - \text{первообразная } \frac{1}{x^p}.$$

Если $p = 1$, то $F(x) = \ln x$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

Если $p \neq 1$, то $F(x) = -\frac{1}{(p-1) \cdot x^{p-1}}$ и тогда:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-p} = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 1 \Rightarrow \text{интеграл сходится} \\ +\infty, & \text{если } p > 1 \Rightarrow \text{интеграл расходится} \end{cases}$$

$$\text{Итого: } \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ сходится } \Leftrightarrow p < 1 \text{ и в этом случае } \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}.$$

Определение 0.3.4. f непрерывно на $[a, b]$ за исключением точек c_1, \dots, c_n .

Рассмотрим $\int_a^{d_1} f, \int_{d_1}^{c_1} f, \int_{c_1}^{d_2} f, \dots, \int_{d_{n+1}}^b f$.

Если все интегралы сходятся, то и несобственный $\int_a^b f$ сходится и $\int_a^b f = \int_a^{d_1} f + \int_{d_1}^{c_1} f + \int_{c_1}^{d_2} f + \dots + \int_{d_{n+1}}^b f$.

В противном случае интеграл расходится.

Утверждение 0.3.1. Свойства несобственных интегралов:

1. Аддитивность

$c \in (a, b)$. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\int_c^b f$ сходится и $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Доказательство. F — первообразная f ; $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(b) - F(a)$

Сходимость $\int_a^b f \Leftrightarrow \lim_{B \rightarrow b-} F(b)$ существует и конечен.

$$\int_c^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(b) - F(c) = \int_a^b f - \underbrace{(F(c) - F(a))}_{\int_a^c f} \quad \square$$

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = 0$.

$$\text{Доказательство. } \int_a^b f = \underbrace{\int_a^c f + \int_c^b f}_{\rightarrow \int_a^b f} \Rightarrow \int_c^b f \rightarrow 0 \quad \square$$

3. Линейность

Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Доказательство. F и G — первообразные для f и g ; по условию $\lim_{B \rightarrow b_-} F(B)$ и $\lim_{B \rightarrow b_-} G(B)$ существуют и конечные $\Rightarrow \alpha F + \beta G$ — первообразные для $\alpha f + \beta g$ и $\lim_{B \rightarrow b_-} (\alpha \cdot F(B) + \beta \cdot$

$$G(B)) = \alpha \lim_{B \rightarrow b_-} F(B) + \beta \lim_{B \rightarrow b_-} G(B) \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) \text{ сходится}$$

$$\text{и } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_{B \rightarrow b_-} F(B) + \beta \lim_{B \rightarrow b_-} G(B) - \alpha \cdot F(a) - \beta \cdot G(a) = \alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g \quad \square$$

Замечание. Если $\int_a^b f$ сходится и $\int_a^b g$ расходится, то $\int_a^b (f + g)$ расходится.

Комментарий: $g = (f + g) - f$

4. Монотонность

Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и $f \leq g$ во всех точках от a до b , то $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Доказательство. $\int_a^B f \leq \int_a^B g$ и перейти к пределу. \square

5. Формула интегрирования по частям

Если $f, g \in C^1[a, b)$, то $\int_a^b f g' = f g \big|_a^{b \leftarrow \text{тут предел}} - \int_a^b f' g$.

Если существует два конечных предела, то существует и третий и есть равенство.

Доказательство. $\int_a^B f g' = f g \big|_a^B - \int_a^B f' g$ и перейти к пределу. \square

6. Замена переменной

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$ $\varphi \in C^{-1}[\alpha, \beta)$, $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta_-)$, $f \in C[a, b)$, тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x) dx$$

(если существует один \int , то существует и другой и они равны).

Доказательство. $F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx$, $\Phi(\gamma) := \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Далее рассмотрим следующие случаи:

I. Если $\exists \lim_{y \rightarrow \varphi(\beta_-)} F(y)$.

Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_n) \rightarrow \varphi(\beta_-) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\gamma_n} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) =$

$$\lim_{y \rightarrow \varphi(\beta_-)} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_-)} f(x) dx$$

II. Если $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma)$.

Проверим, что $\exists \lim_{y \rightarrow \varphi(\beta_-)} F(y)$.

При $\varphi(\beta_-) < b$ очевидно, поскольку $F \in C[a, b]$. Пусть $\varphi(\beta_-) = b$. Возьмем $b_n \nearrow b$. Считаем, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta)$ т.ч. $\varphi(\gamma_n) = b_n$.

Докажем, что $\gamma_n \rightarrow \beta$.

От противного. Найдется $\gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta \Rightarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) < b$ (φ непрерывна в $\tilde{\beta}$). Противоречие с тем, что $b_n \rightarrow b$. Следовательно, $\gamma_n \rightarrow \beta$.

$F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n)$ имеет предел $\xrightarrow{\text{по Гейне}} \exists \lim_{y \rightarrow b_-} F(y)$

□

Замечание. $\int_a^b f$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ сводится к $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{1}{t^2} dt$.

Теорема 0.3.2. Пусть $f \in C[a, b]$ и $f \geq 0$. Тогда сходимость $\int_a^b f$ равносильна ограниченности сверху функции $F(y) := \int_a^y f$.

Доказательство. Если $f \geq 0$, то F — возрастающая функция: $F(y) - F(x) = \int_x^y f \geq 0$

$\int_a^b f$ — сходится $\Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow b_-} F(y)$ существует и конечен, а так как F возрастает, то это равносильно ограниченности F сверху. □

Следствие. Признак сравнения

$f, g \in C[a, b]$, $f, g \geq 0$ и $f \leq g$, тогда:

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.

2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. F и G первообразные. Знаем, что $F(x) \leq G(x)$: $F(x) = \int_a^x f \leq \int_a^x g = G(x)$.

Если $\int_a^b g$ сходится, то G ограничена сверху $\Rightarrow F$ ограничена сверху $\xrightarrow{\text{по th}} \int_a^b f$ сходится.

Второй пункт = отрицание первого. □

Замечание.

1. Неравенство $f \leq g$ может выполняться лишь при аргументах, близких к b .
2. Неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

3. Если $f \in C[a, +\infty)$, $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int_a^{+\infty} f$ сходящийся.

Следствие. Пусть $f, g \in C[a, b)$ $f, g \geq 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b_-$. Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x) \rightarrow 1 \Rightarrow$ при x близких к b ; $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x) \leq 2g(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int_a^b g \text{ сходящийся, то и } \int_a^b f \text{ сходящийся} \\ g(x) \leq 2f(x) & \text{при } x \text{ близких к } b \Rightarrow \text{если } \int_a^b f \text{ сходящийся, то и } \int_a^b g \text{ сходящийся} \end{cases} \quad \square$$

Замечание. Если $\int_a^{+\infty} f$ сходящийся и $f \geq 0$, то необязательно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Определение 0.3.5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. $\int_a^b f$ называется абсолютно сходящимся, если $\int_a^b |f| < +\infty$.

Теорема 0.3.3. Если $\int_a^b f$ абсолютно сходящийся, то он сходится.

Доказательство. $|f| = f_+ + f_-$, $f_{\pm} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f_{\pm} \leq |f| \Rightarrow \int_a^b f_{\pm}$ — сходящийся $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f_+ + \int_a^b f_-$ — сходящийся. \square

Теорема 0.3.4. Признак Дирихле

$$f, g \in C[a, +\infty) \begin{cases} 1) f \text{ имеет ограниченную первообразную.} \\ 2) g \text{ монотонна.} \\ 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. \end{cases} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство. Только для $g \in C^1[a, +\infty)$.

$F(y) := \int_a^y f(x)g(x)dx$ — ограниченная функция, $|F(y)| \leq M$.

$$\int_a^y f(x)g(x)dx = \int_a^y F'(x)g(x)dx = F(x)g(x)|_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)dx$$

$F(y)g(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ (ограниченная на бесконечно малую) \Rightarrow надо доказать, что $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходящийся.

$$\int_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|dx \leq M \int_a^{+\infty} |g'(x)|dx = M \left| \int_a^{+\infty} g(x)dx \right| = M |g(x)|_a^{+\infty} = M|g(a)| < +\infty \quad \square$$

Теорема 0.3.5. Признак Абеля

$$f, g \in C[a, +\infty) \left\{ \begin{array}{l} 1) \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится.} \\ 2) g \text{ монотонна на } [a, +\infty). \\ 3) g \text{ ограничена на } [a, +\infty). \end{array} \right. \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство. Пусть $b := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \in \mathbb{R}$; $\tilde{g}(x) := g(x) - b$ — монотонна и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$.

$F(y) := \int_a^y f(x)dx$ и $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \int_a^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R} \Rightarrow F(y)$ ограничена при больших $y \Rightarrow F$ — ограниченная функция.

Тогда f и \tilde{g} удовлетворяют признаку Дирихле $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx}_{\text{доказали, что сходится}} + \underbrace{b \cdot \int_a^{+\infty} f(x)dx}_{\text{сходится по условию}} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.} \quad \square$$

Следствие. $f, g \in C[a, +\infty)$, f периодична с периодом T , g монотонна, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ — сходится $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = 0$.

Доказательство. \Leftarrow : $F(y) := \int_a^y f(x)dx$ — периодична с периодом T . $F(y+T) = F(y) +$

$$\underbrace{\int_y^{y+T} f(x)dx}_{=0} \Rightarrow \text{все значения } F \text{ принимает на } [a, a+T], \text{ а там она ограничена по th В.} \Rightarrow \text{можно}$$

применить принцип Дирихле.

\Rightarrow : от противного.

Пусть $b := \int_a^{a+T} f(x)dx \neq 0$. Рассмотрим $\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{b}{T} \Rightarrow \int_a^{a+T} \tilde{f}(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \tilde{f}(x)g(x)dx$

$$\text{сходится} \Rightarrow \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} \tilde{f}(x)g(x)dx}_{\text{сходится}} = \frac{b}{T} \int_a^{+\infty} g(x)dx - \text{сходится. Противоречие.} \quad \square$$

Пример. $\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

1. Если $p > 1$: $|\frac{\sin x}{x^p}| \leq \frac{1}{x^p}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ сходится при $p > 1 \Rightarrow$ абсолютно сходящийся.

2. Если $0 < p \leq 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ — расходится $\frac{1}{x^p} \searrow$ при $x \rightarrow +\infty$.

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \xRightarrow{\text{по следствию}} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} \text{ сходится.}$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx > 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} \text{ расходится.}$$

Т.е. сходится, но не абсолютно.

3. Если $p \leq 0$: $a_n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $b_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$ при $x \in [a_n, b_n]$

$$\int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^p} dx \geq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ т.е. сколь угодно далеко есть отрезок с}$$

$$\int = \frac{\pi}{3}.$$

Противоречие с критерием Коши: $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \underbrace{\varepsilon}_{=\frac{\pi}{3}} > 0 \exists B \forall \underbrace{a}_{=a_n}, \underbrace{b}_{=b_n} >$

$$B \mid \int_a^b f(x) dx < \varepsilon$$

1. Метрические пространства

1.1 Метрические и нормированные пространства

Определение 1.1.1.

$\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ – метрика (расстояние), если:

1. $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in X$.
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Определение 1.1.2. Пара (X, ρ) – это метрическое пространство.

Пример.

1. Дискретная метрика: $\rho(x, x) = 0, \rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$.
2. $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$.
3. $X = \mathbb{R}^2$, расстояние на плоскости.
4. Манхэттенская метрика: $X = \mathbb{R}^2, \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
5. $\mathbb{R}^d = (x_1, \dots, x_d)$.

$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}$ * (на самом деле, даже p -ая степень и корень p -ой степени подойдет)

*Неравенство треугольника в этом случае – это неравенство Минковского.

6. $X = C[a, b], \rho(f, g) = \int_a^b |f - g|$.
7. Французская железнодорожная метрика: $\rho(A, B) = AB$, если A и B на одной прямой и $\rho(AB) = AP + PB$ иначе.

Определение 1.1.3. (X, ρ) – метрическое пространство, $a \in X, r > 0$.

Открытый шар $B_r(a) := \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$.

Замкнутый шар $\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$.

a – центр шара, r – радиус шара.

Утверждение 1.1.1. Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.
2. Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 : \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \emptyset$.

Доказательство. $r := \frac{\rho(a,b)}{3} > 0$. Предположим, что $x \in \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) \Rightarrow \begin{matrix} \rho(x,a) \leq r \\ \rho(x,b) \leq r \end{matrix} \Rightarrow \rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) \leq r + r = \frac{2}{3}\rho(a,b)$, противоречие. \square

Определение 1.1.4. $A \subset X$; A – открытое множество, если $\forall a \in A$ найдется $B_r(a) \subset A$.

Теорема 1.1.1. О свойствах открытых множеств

1. \emptyset и X – открытые множества.
2. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество.
4. $B_R(a)$ – открытое множество.

Замечание. В третьем конечность существенна: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1, \frac{1}{n}) = (-1, 0]$.

Доказательство.

2. A_α – открытые множества, $\alpha \in I$. Проверим, что $U := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ – открытое.

Возьмем $a \in U \Rightarrow$ найдется $\alpha_0 : a \in A_{\alpha_0}$ – открытое \Rightarrow найдется $r > 0 : B_r(a) \subset A_{\alpha_0} \subset U$.

3. A_1, \dots, A_n – открытые множества. Проверим, что $U := \bigcap_{k=1}^n A_k$ – открытое.

Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in A_k \ k = 1, \dots, n$ – открытое \Rightarrow найдется такое $r_k : B_{r_k}(a) \subset A_k$.

$r := \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0 \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \ \forall k = 1, \dots, n \Rightarrow B_r(a) \subset U$.

4. $B_R(a)$ – открытый шар; $r := R - \rho(a, x)$ и покажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$.

Возьмем $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(x, y) < r \Rightarrow \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R$.

\square

Определение 1.1.5. $A \subset X, a \in A$; a – внутренняя точка A , если найдется $r > 0 : B_r(a) \subset A$.

Замечание. A – открытое множество \Leftrightarrow всего его точки внутренние.

Определение 1.1.6. $\text{Int } A$ – внутренность множества A – множество всех внутренних точек.

Замечание. Если A – открытое множество, то $\text{Int } A = A$.

Утверждение 1.1.2. Свойства внутренности:

1. $\text{Int } A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A .
2. $\text{Int } A$ – открытое множество.

3. A – открыто $\Leftrightarrow \text{Int } A = A$.
4. Если $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$.
5. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$.
6. $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$.

Доказательство.

1. $G := \bigcup_{U \in A, U \text{ — откр.}} U$. Надо доказать, что $G = \text{Int } A$.
 \supset : Берем $a \in \text{Int } A \Rightarrow \underset{\text{открытое}}{B_r(a)} \subset A \Rightarrow a \in B_r(a) \subset G$.
 \subset : Берем $a \in G \Rightarrow a \in U$ для некоторого открытого $U \subset A \Rightarrow B_r(a) \subset U \subset A \Rightarrow a$ – внутренняя точка $A \Rightarrow a \in \text{Int } A$.
2. Объединение открытых множеств – открытое.
3. $\text{Int } A$ – открытое \Rightarrow , \Leftarrow есть.
4. Если a – внутренняя точка A , то $B_r(a) \subset A \subset B \Rightarrow a \in \text{Int } B$.
5. $\begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \\ A \cap B \subset B \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B \end{cases} \Rightarrow \subset \text{ есть.}$
 \supset : Пусть $a \in \text{Int } A \cap \text{Int } B \Rightarrow \begin{cases} B_{r_1}(a) \subset A \\ B_{r_2}(a) \subset B \end{cases} \Rightarrow B_{\min(r_1, r_2)}(a) \in A \cap B \Rightarrow a \in (\text{Int } A \cap \text{Int } B)$.
6. 2 + 3

□

Определение 1.1.7. A – замкнутое множество, если $X \setminus A$ – открытое множество.

Теорема 1.1.2. *О свойствах замкнутых множеств:*

1. \emptyset и X – замкнутые множества.
2. Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнутое множество.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств – замкнутое множество.
4. $\overline{B_r}$ – замкнутое множество.

Доказательство.

1. Пусть A_α — замкнутое, $\alpha \in I$, $F := \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Проверим, что $x \setminus F$ — открытое: $x \setminus F = x \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (x \setminus A_\alpha)$ — открытое.

2. Пусть A_1, \dots, A_n — замкнутые, $F := \bigcup_{k=1}^n A_k$.

Проверим, что $x \setminus F$ — открытое: $x \setminus F = x \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (x \setminus A_k)$ — открытое.

3. Проверим, что $X \setminus \overline{B}_R(a)$ — открытое множество. Возьмем $x \notin \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(a, x) > R$.

(picture)

$r := \rho(x, a) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$, т.е. что $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) = \emptyset$.

Пусть $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(y, x) < r$ & $\rho(y, a) \leq R \Rightarrow \rho(a, y) + \rho(y, x) \leq R + r = \rho(a, x)$.

□

Замечание. В третьем существенна конечность: $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, \frac{1}{n})$.

Определение 1.1.8. $\text{Cl } A$ — замыкание множества A — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

Теорема 1.1.3. $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$.

$X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\text{Int}(X \setminus A) = \bigcup \{U \text{ — открытое: } U \subset X \setminus A\}$

$X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \bigcup \{\dots\} = \bigcap \{X \setminus U : U \text{ — открытое: } U \subset X \setminus A\} = \bigcap \{F : F \text{ — замкнутое и } X \setminus F \subset X \setminus A\} = \text{Cl } A$
 $\Leftrightarrow F \supset A$

□

Утверждение 1.1.3. Свойства замыканий:

1. $\text{Cl } A$ — замкнутое множество.

2. A замкнуто $\Leftrightarrow \text{Cl } A = A$.

3. $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$.

Комментарий: $X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B)$.

4. $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$.

Комментарий: $X \setminus \text{Cl}(A \cup B) = \text{Int}(X \setminus (A \cup B)) = \text{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$.

5. $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$.

Теорема 1.1.4. A — множество в метрическом пространстве (X, ρ) . Тогда $x \in \text{Cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0$ $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$.

Доказательство. $\neg(P \Leftrightarrow Q) = \neg P \Leftrightarrow \neg Q$. Тогда докажем: $x \notin \text{Cl } A \Leftrightarrow \exists r > 0 \ B_r(x) \cap A = \emptyset$
 $x \notin \text{Cl } A \Leftrightarrow x \in X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A) \Rightarrow x - \text{внутренняя точка } X \setminus A \Rightarrow \exists r > 0 : \underbrace{B_r(x) \subset X \setminus A}_{B_r(x) \cap A = \emptyset} \quad \square$

Следствие. Если U – открытое и $U \cap A = \emptyset$, то $U \cap \text{Cl } A = \emptyset$.

Доказательство. От противного. Пусть $U \cap \text{Cl } A \neq \emptyset$. Возьмем $x \in U \cap \text{Cl } A$.

$\left. \begin{array}{l} x \in U - \text{открытое} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset U \\ x \in \text{Cl } A \stackrel{\text{no th}}{\Rightarrow} B_r(x) \cap A \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \text{точка из } B_r(x) \cap A \text{ лежит и в } U, \text{ и в } A. \text{ Противоречие.} \quad \square$

Определение 1.1.9. U_a – окрестность точки a – шар $B_r(a)$ некоторого радиуса $r > 0$.

Определение 1.1.10. $\overset{\circ}{U}_a$ – проколота окрестность точки a – $\overset{\circ}{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$ некоторого радиуса $r > 0$.

Определение 1.1.11. a – предельная точка множества A , если любая проколота окрестность точки a пересекается с множеством A .

Обозначение 2. A' – множество всех предельных точек A .

Утверждение 1.1.4.

$$1. \text{Cl } A = A \cup A'$$

Доказательство. $a \in \text{Cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(a) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ \forall r > 0 \ \overset{\circ}{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow a \in A' \end{cases} \quad \square$

$$2. A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$$

$$3. A \text{ замкнуто} \Rightarrow A' \subset A.$$

Доказательство. $A \text{ замкнуто} \Leftrightarrow A = \text{Cl } A \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A' \subset A. \quad \square$

$$4. (A \cup B)' = A' \cup B'$$

Доказательство. $A \subset A \cup B \Rightarrow A' \subset (A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B' \subset (A \cup B)'$

Теперь докажем обратное включение. Возьмем $x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 \ \overset{\circ}{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ (1)

Пусть $x \notin B'$ для дост. малых $r \Rightarrow \overset{\circ}{B}_r(x) \cap B = \emptyset$ (2)

Из (1) и (2) : $\overset{\circ}{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$ для достаточно малых $r \Rightarrow \forall r > 0 \ \overset{\circ}{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \quad \square$

Теорема 1.1.5. $x \in A' \Leftrightarrow \exists r > 0 : \text{шар } B_r(x) \text{ содержит бесконечно много точек из } A.$

Доказательство.

\Leftarrow : если $B_r(x) \cap A$ содержит бесконечно много точек, то $\overset{\circ}{B}_r(x) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Rightarrow \overset{\circ}{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$.

\Rightarrow : $x \in A' \Rightarrow \overset{\circ}{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$. Возьмем точку x_1 из этого пересечения, для нее $0 < \underbrace{\rho(x, x_1)}_{=:r_2} < 1$

$\overset{\circ}{B}_{r_2}(x) \cap A \neq \emptyset$. Возьмем точку x_2 из этого пересечения, для нее $0 < \underbrace{\rho(x, x_2)}_{=:r_3} < r_2 = \rho(x, x_1)$.

И так далее: $\rho(x, x_1) > \rho(x, x_2) > \dots \Rightarrow$ все радиусы различны.

□

Замечание. Можно добиться того, что $\rho(x, x_n) \rightarrow 0$. Для этого надо брать $r_n = \frac{1}{2}\rho(x, x_{n-1})$.

Следствие. Конечное множество не имеет предельных точек.

Определение 1.1.12. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X$. Подпространством метрического пространства называется $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ (более кратко: (Y, ρ)).

Теорема 1.1.6. *Об открытых и замкнутых множествах в подпространстве*

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство $A \subset Y \subset X$. Тогда:

1. A открыто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G$ – открытое в (X, ρ) : $A = G \cap Y$.
2. A замкнуто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists F$ – замкнутое в (X, ρ) : $A = F \cap Y$.

Доказательство.

\Rightarrow : A открытое в $Y \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x)$, где $r_x > 0$ такой радиус, что $B_{r_x}^Y \subset A$.

$$B_{r_x}^Y = \{y \in Y : \rho(x, y) < r_x\} = \underbrace{\{y \in X : \rho(x, y) < r_x\}}_{=B_{r_x}^X(x)} \cap Y = B_{r_x}^X \cap Y \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) =$$

$$Y \cap \underbrace{\bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x)}_{=:G \text{ откр. в } X}$$

\Leftarrow : $A = Y \cap G$, G – открытое в $X \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} B_{r_x}^X(x)$, где $r_x > 0$ такой радиус, что

$$B_{r_x} \subset G \Rightarrow A = Y \cap \bigcup_{x \in G} B_{r_x}^X(x) = \bigcup_{x \in G} (Y \cap B_{r_x}^X(x)) = \bigcup_{x \in G} B_{r_x}^Y(x) \text{ – открытое в } Y.$$

1. A замкнуто в $Y \Leftrightarrow Y \setminus A$ открыто в $Y \xLeftrightarrow{1} \exists G$ – открытое в X : $Y \setminus A = G \cap Y \Leftrightarrow A = Y \setminus G = Y \cap (X \setminus G) \Leftrightarrow \exists F$ – замкнутое в X : $A = Y \cap F$ (и обратно доказывается с конца).

□

Пример. $x = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) := |x - y|$, $Y = [0, 3)$

$B(Y, \rho)$:

$[0, 1)$ – открытое множество $[0, 1) = (-1, 1) \cap Y$.

$[2, 3)$ – закрытое множество $[2, 3) = [2, 4] \cap Y$.

Определение 1.1.13. X – векторное пространство над \mathbb{R} . $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ – норма, если:

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y, z$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Пример.

1. $|x|$ в \mathbb{R} .
2. $\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ в \mathbb{R}^d при $p \geq 1$.
3. $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$ в \mathbb{R}^d .
4. $X = C[a, b]$; $\|f\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.
5. $X = C[a, b]$; $\|f\| := \int_a^b |f(x)| dx$.

Определение 1.1.14. X – векторное пространство над \mathbb{R} . $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ скалярное произведение, если:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ $\forall x, y, z$.
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ $\forall x, y \in X$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\forall x, y \in X$.

Пример.

1. $X = \mathbb{R}^d$; $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k$
2. $X = \mathbb{R}^d$, $w_1, \dots, w_d > 0$; $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d w_k x_k y_k$
3. $X \in C[a, b]$; $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$.

Утверждение 1.1.5.

1. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Доказательство. Пусть $y \neq \vec{0}$ (если $y = \vec{0}$, то очевидно).

$f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t\langle y, x \rangle + t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle = \langle y, y \rangle t^2 + 2t\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$ – квадратный трехчлен.

$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in R \Rightarrow$ его дискриминант $\leq 0 \Rightarrow (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ \square

2. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма.

Доказательство.

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$ – первое свойство скалярного произведения.

2. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

$\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$ и осталось неравенство Коши-Буняковского. \square

3. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ – метрика.

Доказательство. $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = \rho(x, y)$

Неравенство треугольника: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

$$\|x - y\| + \|y - z\| \geq \|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| \quad \square$$

4. $\|x - y\| \geq ||x\| - \|y\||$

Доказательство. $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ и $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\| \quad \square$$

Определение 1.1.15. (X, ρ) – метрическое пространство, x_n – последовательность в X , $a \in X$.

Тогда $\lim x_n = a$:

1. Вне любого шара $B_r(a)$ содержится лишь конечное число членов последовательности.

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon$.

Утверждение 1.1.6.

1. $\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim \rho(x_n, a) = 0$.
2. Предел единственен.

Доказательство. Если $\lim x_n = a$ и $\lim x_n = b$, то возьмем такое число $r > 0$, что $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset \Rightarrow$ вне $B_r(a)$ конечное число членов и вне $B_r(b)$ конечное число членов \Rightarrow всего конечное число членов. Противоречие. \square

3. Если $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = a$, то последовательность, полученная перемешиванием x_n и y_n , также стремится к a .
4. Если $\lim x_n = a$, то последовательность, полученная перестановкой членов последовательности, имеет тот же предел.
5. Если $\lim x_n = a$, то последовательность, в которой x_n взяты с конечной кратностью, имеет тот же предел.

Определение 1.1.16. $A \subset X$; A — ограниченное множество, если A содержится в некотором шаре.

6. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. $\exists N : \forall n \geq N \rho(x_n, a) < 1$

$$R := \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_{N-1}, a)\} + 1 \Rightarrow x_n \in B_R(a). \quad \square$$

7. Если $\lim x_n = a$, то $\lim x_{n_k} = a$.
8. a — предельная точка множества $A \Leftrightarrow$ существует последовательность $x_n \in A$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
Более того, x_n можно выбрать так, что $\rho(x_n, a)$ монотонно убывают.

Доказательство. \Rightarrow : было.

$$\Leftarrow: \text{берем } B_r(a) \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \underset{\neq a}{x_n} \in B_r(a) \Rightarrow \overset{\circ}{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \quad \square$$

Теорема 1.1.7. Об арифметических действиях с пределами

X — векторное пространство, $\|\cdot\|$ — норма в X , $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, $\lim \lambda_n = \nu$; $\lambda_n, \nu \in \mathbb{R}$; $x_n, y_n, a, b \in X$. Тогда:

1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

$$2. \lim(\lambda_n x_n) = \nu a.$$

$$3. \lim \|x_n\| = \|a\|.$$

$$4. \text{ Если в } X \text{ есть скалярное произведение, то } \lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Доказательство.

$$1. \rho(x_n + y_n, a + b) = \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| = \underset{\rightarrow 0}{\rho(x_n, a)} + \underset{\rightarrow 0}{\rho(y_n, b)} \Rightarrow \rho(x_n + y_n, a + b) \rightarrow 0$$

$$2. \|\lambda_n x_n - \nu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \nu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \nu a\| = \underset{\text{огр.}}{|\lambda_n|} \underset{\rightarrow 0}{\|x_n - a\|} + |\lambda_n - \nu| \|a\| \rightarrow 0$$

$$3. \left| \|x_n\| - \|a\| \right| \leq \|x_n - a\| \rightarrow 0$$

$$4. \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\langle x_n, y_n \rangle = \frac{1}{4}(\|x_n + y_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2) \xrightarrow[\rightarrow \|a+b\|^2]{\rightarrow \|a-b\|^2} \frac{1}{4}(\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2) = \frac{1}{4}\langle a, b \rangle$$

□

Важный случай: \mathbb{R}^d , $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$

Определение 1.1.17. Покоординатная сходимость $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$ и $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(d)})$ — x_n сходится к a покоординатно, если $\forall i \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)} = a^{(i)}$.

Теорема 1.1.8. В \mathbb{R}^d покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.

Доказательство. По норме \Rightarrow покоординатная:

$$\|x_n - a\| \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n^{(i)} - a^{(i)}| \leq \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} = \|x_n - a\| \rightarrow 0$$

Покоординатная \Rightarrow по норме:

$$\|x_n - a\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} \leq \underbrace{|x_n^{(1)} - a^{(1)}|}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{|x_n^{(d)} - a^{(d)}|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

□

Определение 1.1.18. (X, ρ) — метрическое пространство, x_n — последовательность в X . x_n — фундаментальная последовательность, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Утверждение 1.1.7. Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. Фундаментальная последовательность ограничена.
3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность имеет тот же предел.

Доказательство. Аналогично последовательностям, только вместо модуля используется норма. \square

Определение 1.1.19. (X, ρ) – метрическое пространство называется *полным*, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел.

Пример. \mathbb{R} – полное пространство.

Теорема 1.1.9. \mathbb{R}^d – полное пространство.

Доказательство. Пусть $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$ – фундаментальная последовательность.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$
 $\rho(x_m, x_n) = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} \geq |x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| \Rightarrow$ последовательность $x_n^{(i)}$ фундаментальная \Rightarrow найдется $a^{(i)} \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)} = a^{(i)}$.

Рассмотрим $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(d)})$. x_n покоординатно сходится к $a \Rightarrow x_n$ по норме сходится к a . \square

2. Компактность

Определение 2.0.1. $A_\alpha, \alpha \in I$. Множества A_α покрывают множество B , если $B \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Определение 2.0.2. *Открытое покрытие* = покрытие открытыми множествами.

Определение 2.0.3. K – компакт (компактное множество), если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 2.0.1. *О свойствах компактных множеств.*

1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X, K \subset Y$. Тогда K компактно в $(X, \rho) \Leftrightarrow K$ компактно в (Y, ρ) .
2. K – компакт $\Rightarrow K$ замкнуто и K ограничено.
3. Если K компакт, $K \supset \tilde{K}$ – замкнуто, то \tilde{K} – компакт.

Доказательство.

1. \Rightarrow : пусть $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α открыто в $Y \Rightarrow \forall \alpha U_\alpha = G_\alpha \cap Y$, где G_α – открыто в $X \Rightarrow$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \xrightarrow{K-\text{комп.}} \text{найдется } \alpha_1, \dots, \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \Rightarrow K = K \cap Y \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

$$\Leftarrow: \text{ пусть } K \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha, \text{ где } G_\alpha \text{ открыто в } Y \Rightarrow K = K \cap Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y) \xrightarrow{K-\text{комп.}} \text{найдется}$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

2. *Компактность \Rightarrow ограниченность:*

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a), \text{ если } n > \rho(x, a), \text{ то } x \in B_n(a)$$

$$\text{Выделим конечное подпокрытие } B_{n_1}(a), \dots, B_{n_k}(a). K \subset \bigcup_{j=1}^k B_{n_j}(a) = B_{\max\{n_i\}}(a).$$

Компактность \Rightarrow замкнутость:

Докажем, что $X \setminus K$ – открытое множество. Возьмем $a \notin K. \forall x \in K a \notin B_{\frac{\rho(a,x)}{2}}(x) := U_x$.

U_x – открыто, $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$. Выделим конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}, K \subset \bigcup_{j=1}^k U_{x_j}$.

$$r := \min\{\frac{\rho(a,x_1)}{2}, \dots, \frac{\rho(a,x_k)}{2}\} > 0. B_r(a) \cap U_{x_j} = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{j=1}^k U_{x_j} = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap K = \emptyset \Rightarrow$$

$$B_r(a) \subset X \setminus K \Rightarrow a \text{ – внутренняя точка } X \setminus K.$$

3. Рассмотрим открытое покрытие $\tilde{K} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow K \subset \underbrace{(X \setminus \tilde{K})}_{\text{откр.}} \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое покрытие

$$K \Rightarrow \text{ можем выделить конечное подпокрытие } K \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \xrightarrow{\tilde{K} \subseteq K} \tilde{K} \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup$$

$$\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K} \text{ компакт}$$

□

Теорема 2.0.2. K_α семейство компактов такое, что пересечение любого из конечного числа непусто. Тогда $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset \Rightarrow \exists \alpha_0 : K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus K_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = X \Rightarrow$ можно выделить конечное подпокрытие $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^n X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} = \emptyset$. Противоречие. □

Следствие. $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ непустые, тогда $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$.

Определение 2.0.4. K – секвенциальный компакт, если из любой последовательности точек из K можно выделить подпоследовательность, имеющую предел в K .

Пример. $[a, b] \in \mathbb{R}$ – секвенциальный компакт (th Б.-В.)

Теорема 2.0.3. Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

Доказательство. K – компакт, $K \supset A$ – бесконечное подмножество.

От противного. Пусть $A' = \emptyset \Rightarrow A$ – замкнутое $\Rightarrow A$ – компакт.

Возьмем $a \in A$, a – не предельная точка в $A \Rightarrow$ найдется $\overset{\circ}{B}_{r_a}(a)$, не пересекающийся с $A \Rightarrow B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$.

$A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$ – открытое покрытие A . Выделим конечное подпокрытие $B_{r_{a_1}}(a_1), \dots, B_{r_{a_n}}(a_n) \Rightarrow A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – конечное множество. Противоречие. □

Следствие. Компактность \Rightarrow секвенциальная компактность.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_n \in K$, $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ – подмножество.

1) $\#D < +\infty \Rightarrow$ какой-то член последовательности повторяется бесконечно много раз, возьмем его.

2) $\#D = +\infty \Rightarrow$ у D есть предельная точка $a \Rightarrow \exists n_k : \lim x_{n_k} = a$.

□

Лемма 2.0.1. Лемма Лебега

K – секвенциальный компакт, $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое покрытие. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in K$ шар $B_\varepsilon(x)$ целиком покрывается каким-то элементом покрытия.

Определение 2.0.5. ε из леммы Лебега называется *числом Лебега* для покрытия $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Доказательство. От противного. Тогда $\varepsilon = \frac{1}{n}$ не подходит. Найдется $x_n \in K : B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ целиком не накрывается никаким U_α .

Выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a \in K \Rightarrow \exists \alpha_0 : a \in U_{\alpha_0}$ – открытое $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists N : \forall k \geq N \rho(x_{n_k}, a) < \frac{r}{2}$.

Кроме того, $\rho(x_{n_k}, a) \rightarrow 0 \Rightarrow x_{n_k} \in B_{\frac{r}{2}}(a)$ при $k \geq N$.

Возьмем такое $k \geq N$, что $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$. Тогда $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_r(a) \subset U_{\alpha_0}$. Противоречие.

Проверим, что $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_r(a)$. Берем $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \Rightarrow \rho(x, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$ (& $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{r}{2}$) $\Rightarrow \rho(x, a) \leq \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. \square

Теорема 2.0.4. *Компактность = секвенциальная компактность.*

Доказательство.

\Rightarrow : доказано.

\Leftarrow : K – секвенциальный компакт. Рассмотрим открытое покрытие $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое.

Возьмем ε из леммы Лебега. Тогда $\forall x \in K B_\varepsilon(x)$ целиком содержится в каком-то элементе покрытия.

$K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ – открытое покрытие.

Если $K \subset B_\varepsilon(x_1)$, то выделили конечное подпокрытие. Если это не так, то $\exists x_2 \notin B_\varepsilon(x_1)$.

Если $K \subset B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$, то выделили конечное подпокрытие. Иначе $\exists x_3 \notin B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$.

...

В итоге построили последовательность $x_n \in K$ – секвенциальный компакт \Rightarrow можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \Rightarrow x_{n_k}$ фундаментальная.

Но так быть не может: $\rho(x_{n_k}, x_{n_j}) > \varepsilon \forall k \neq j$. Противоречие.

Таким образом, найдется $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$. Но $B_\varepsilon(x_j)$ целиком содержится в $U_{\alpha_j} \Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$. Получилось конечное подпокрытие. \square

Определение 2.0.6. (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

a_1, a_2, \dots – ε -сеть множества A , если $\forall a \in A$ найдется $a_k : \rho(a, a_k) \leq \varepsilon$.

Это означает, что $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(a_k)$.

Определение 2.0.7. *Конечная ε -сеть* – конечное множество точек a_1, \dots, a_n с тем же условием.

Определение 2.0.8. A – *вполне ограничено*, если $\forall \varepsilon > 0$ у A есть конечная ε -сеть.

Утверждение 2.0.1.

1. Вполне ограниченность \Rightarrow ограниченность.
2. В \mathbb{R}^d ограниченность \Rightarrow вполне ограниченность.

Доказательство.

1. Возьмем $\varepsilon = 1$ и конечную 1-сеть a_1, \dots, a_n .

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n \bar{B}_1(a_k) \subset \bar{B}_R(a_1), \text{ где } R = 1 + \max\{\rho(a_1, a_2), \dots, \rho(a_1, a_n)\}.$$

$$\rho(x, a_1) \leq \rho(x, a_j) + \rho(a_j, a_1) < 1 + R$$

2. A – ограниченное множество в \mathbb{R}^d .

l – длина стороны куба. Возьмем $n : \frac{l}{n} < \varepsilon$ и нарежем на n^d равных кубиков.

Если есть пересечение кубика с A , то берем точку из этого пересечения. Если нет, то просто выкидываем.

Выбранные точки образуют $\varepsilon\sqrt{d}$ -сеть: $\rho(x, a) \leq \varepsilon\sqrt{d}$.

□

Теорема 2.0.5. *Компактное множество вполне ограничено.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и покроем компакт $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x_i)$. Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. Тогда x_1, \dots, x_n – ε -сеть множества K .

□

Следствие. *Компактное множество замкнуто и вполне ограничено.*

Теорема 2.0.6. Теорема Хаудсдорфа

Если (X, ρ) – полное метрическое пространство, то K – компакт $\Leftrightarrow K$ – замкнуто и вполне ограничено.

Доказательство. \Leftarrow : будем проверять секвенциальную компактность.

Рассмотрим последовательность $x_n \in K$ и выделим из нее сходящуюся подпоследовательность.

Возьмем 1-сеть, то есть покроем K конечным числом шаров радиуса 1 \Rightarrow в каком-то из шаров бесконечное число членов последовательности, возьмем их: x_{11}, x_{12}, \dots . Остальные выкинем.

Возьмем $\frac{1}{2}$ -сеть, то есть покроем K конечным числом шаров радиуса $\frac{1}{2}$ \Rightarrow в каком-то из шаров бесконечное число членов последовательности, возьмем их: x_{21}, x_{22}, \dots . Остальные выкинем.

Возьмем $\frac{1}{3}$ -сеть и так далее...

Получили:

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} \dots$ – лежат в шаре радиусом 1.

$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \dots$ – лежат в шаре радиусом $\frac{1}{2}$.

$x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \dots$ – лежат в шаре радиусом $\frac{1}{3}$.

При этом каждая следующая строка – подпоследовательность из предыдущей. В частности $x_k, \dots, x_{k+1, k+1}, \dots$ – подпоследовательность k -ой строки, поэтому $x_{k, k}, \dots, x_{k+1, k+1}, \dots$ лежат в шаре радиусом $\frac{1}{k}$.

$\Rightarrow \forall i, j \geq k \rho(x_{ii}, x_{jj}) \leq \frac{2}{k} \Rightarrow x_{11}, x_{22}, x_{33}, \dots$ фундаментальная \Rightarrow у нее есть предел \Rightarrow из исходной последовательности выбрали сходящуюся. \square

Следствие. Характеристика компактов в \mathbb{R}^d

$K \subset \mathbb{R}^d$. Тогда K – компакт $\Leftrightarrow K$ замкнуто и ограничено.

Доказательство.

\Rightarrow : верно всегда, было.

\Leftarrow : в \mathbb{R}^d ограниченность \Rightarrow вполне ограниченность $\Rightarrow K$ – компакт
 \mathbb{R}^d полное

\square

Следствие. Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}^d

Ограниченная последовательность в \mathbb{R}^d имеет сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. x_n – ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists R : x_n \in \bar{B}_R(0)$ – замкнуто и ограничено $\Rightarrow \bar{B}_R(0)$ – компакт \Rightarrow секвенциальный компакт \Rightarrow можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. \square

2.1 Непрерывные отображения

Определение 2.1.1. $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, $E \subset X, f : E \rightarrow Y, a \in E, a$ – предельная точка $E, b \in Y$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, если:

- по Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$.
- в терминах окрестностей: $\forall U_b$ – окрестность точки $b \exists \overset{\circ}{U}_a$ – проколота окрестность точки $a : f(\overset{\circ}{U}_a \cap E) \subset U_b$.
- по Гейне: \forall последовательности $x_n \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Замечание. Определение по Коши и с окрестностями – это одно и то же.

Доказательство. $U_b = B_\varepsilon(b), \overset{\circ}{U}_a = \overset{\circ}{B}_\delta(a)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b)$

Если $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$, то $f(x) \in B_\varepsilon(b)$.

Если $x \neq a \in E$ и $\rho_X(x, a) < \delta$, то $\rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$. \square

Теорема 2.1.1. *Все определения равносильны.*

Доказательство. Как раньше. □

Теорема 2.1.2. Критерий Коши

$f : E \rightarrow Y$, $E \subset X$, a – предельная точка E , Y – полное пространство. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E \underset{x \neq y}{\rho_X(x, a) < \delta \ \& \ \rho_X(y, a) < \delta} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Доказательство. \Rightarrow : Как раньше.

\Leftarrow : Будем проверять определение по Гейне.

Берем последовательность $x_n \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Хотим доказать, что $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in E \underset{x \neq y}{\rho_X(x, a) < \delta \ \& \ \rho_X(y, a) < \delta} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Из $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \exists N : \begin{matrix} \forall n \geq N \ \rho_X(x_n, a) < \delta \\ \forall m \geq N \ \rho_X(x_m, a) < \delta \end{matrix} \Rightarrow \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \ \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \Rightarrow f(x_n)$ – фундаментальная последовательность \Rightarrow имеет предел. □

Теорема 2.1.3. Теорема об арифметических действиях с пределами

$f, g : E \rightarrow Y$ – нормированное пространство, a – предельная точка E . Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha b + \beta c$.
2. Если $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \nu$, то $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \nu b$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|$.
4. Если в Y есть скалярное произведение, то $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$.
5. Если $Y = \mathbb{R}$ и $c \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Доказательство. Все из определения по Гейне. Берем $x_n \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(x_n) = \nu$.

Как раньше. □

Определение 2.1.2. (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \rightarrow Y$, $a \in E$. Отображение f непрерывно в точке a , если: 1) a – изолированная точка E (то есть не предельная) или 2) a – предельная точка E и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- по Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
- в терминах окрестностей: $\forall U_{f(a)} \exists U_a : f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$.
- по Гейне: $\forall x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$.

Теорема 2.1.4. Теорема о непрерывности композиции

$(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z)$ – метрические пространства, $D \subset X, E \subset Y, f : D \rightarrow Y, g : E \rightarrow Z, a \in D, f(D) \subset E$. Если f непрерывна в точке a и g непрерывна в точке $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в точке a .

Доказательство. $\forall U_{g(b)} \exists U_b : g(U_b \cap E) \subset U_{g(b)}$ (непрерывность g в точке $b = f(a)$)

$\forall U_{f(a)} \exists U_a : f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$ (непрерывность f в точке a)

т.к. $f(D) \subset E \Rightarrow f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)} \cap E = U_b \cap E \Rightarrow g(f(U_a \cap D)) \subset g(U_b \cap E) \subset U_{g(b)} = U_{g \circ f(a)}$

Это непрерывность композиции. □

Теорема 2.1.5. Характеристика непрерывности в терминах открытых множеств

$(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда f непрерывна во всех точках $\Leftrightarrow \forall U \subset Y$ – открытого $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ – открытое.

Доказательство.

\Rightarrow : Пусть U – открытое. Докажем, что $f^{-1}(U)$ – открытое. Возьмем $a \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(a) \in U$ – открытое $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

f непрерывна в $a \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow a$ лежат в $f^{-1}(U)$ – открыто (так как все точки внутренние).

\Leftarrow : $U := B_\varepsilon(f(a))$ – открытое $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ – открытое

$a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow$ она лежит в этом множестве вместе с некоторым шаром $B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$

Это непрерывность функции в точке a . □

Теорема 2.1.6. Непрерывный образ компакта – компакт.

Доказательство. $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, K – компакт $\subset X, f : K \subset Y$ непрерывна.

(K, ρ_X) – метрическое пространство, K – компакт в нем.

Докажем, что $f(K)$ – компакт. Возьмем его открытое покрытие: $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$ – открытое \Rightarrow это открытое покрытие компакта \Rightarrow выделим конечное подпокрытие

$K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ – это конечное подпокрытие из исходного покрытия $f(K)$. □

Следствие.

1. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Определение 2.1.3. $f : E \rightarrow Y$ ограничена, если множество ее значений – ограниченное множество.

2. Если $f : K \rightarrow Y$, K – компакт, f непрерывна во всех точках $\Rightarrow f$ ограниченная функция.

3. **Теорема Вейерштрасса**

Теорема 2.1.7. $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, K – компакт, f непрерывна во всех точках. Тогда существуют $a, b \in K : f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in K$.

Доказательство. $f(K)$ – ограниченное множество в $\mathbb{R} \Rightarrow$ у него есть супремум – $B := \sup\{f(x) : x \in K\}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K \ B = \frac{1}{n} < f(x_n) \leq B \Rightarrow \lim f(x_n) = B.$$

x_n – последовательность из K – секвенциальный компакт \Rightarrow найдется сходящаяся подпоследовательность: $\lim f(x_{n_k}) = b \in K \xrightarrow{f \text{ непр. в точке } b} \lim f(x_n) = f(b) = B$.

Аналогично с инфимумом. □

Теорема 2.1.8. $f : K \rightarrow Y$ непрерывна во всех точках и биекция, K – компакт \Rightarrow обратная f^{-1} тоже непрерывна.

Доказательство. Надо проверить, что для f^{-1} прообраз открытого множества – открытое множество.

Берем U – открытое подмножество K . И надо доказать, что $f(U)$ – открытое.

$K \setminus U$ – замкнутое подмножество $K \Rightarrow K \setminus U$ – компакт $\Rightarrow f(K \setminus U)$ – компакт $\Rightarrow Y \setminus f(K \setminus U)$ – открытое $\Rightarrow Y \setminus f(K \setminus U) = f(U)$ – открытое. □

Определение 2.1.4. (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \rightarrow Y$. f равномерно непрерывна на E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E$ и $\rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Замечание. Равномерная непрерывность $\Rightarrow f$ непрерывна во всех точках E .

Теорема 2.1.9. Теорема Кантора

Если $f : K \rightarrow Y$ непрерывна во всех точках, K – компакт, то f равномерно непрерывна на K .

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $x \in K$, f непрерывна в точке $x \Rightarrow \exists r_x > 0 : f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$.

Берем покрытие $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$. Пусть δ – число Лебега для этого покрытия.

Проверим, что оно подходит. Пусть $x, y \in K : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow y \in B_\delta(x)$. $B_\delta(x)$ целиком содержится в каком-то элементе покрытия $B_{r_a}(a)$. Тогда $x, y \in B_{r_a}(a) \Rightarrow f(x), f(y) \in f(B_{r_a}(a)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(a)) + \rho(f(a), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Определение 2.1.5. X – векторное пространство, $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ – нормы в X . Если существуют $c_1, c_2 > 0 : c_1\|x\| \leq |||x||| \leq c_2\|x\|$, то $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ – эквивалентные нормы.

Замечание.

1. Это отношение эквивалентности.
2. Пределы последовательностей по эквивалентным нормам совпадают:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \ \|x_n - a\| < \varepsilon \Leftrightarrow |||x_n - a||| < c_1 \varepsilon.$
3. Предельные точки в смысле $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадают.
4. Непрерывность в смысле $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадает.
5. Замкнутые и открытые множества по $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадают.

Теорема 2.1.10. В \mathbb{R}^d все нормы эквивалентны.

Доказательство. Докажем, что все нормы эквивалентны $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$.

Пусть $p(x)$ – другая норма в \mathbb{R}^d .

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

$$p(x) = p\left(\sum_{i=1}^d x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^d p(x_i e_i) = \sum_{i=1}^d |x_i| \cdot p(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^d p(e_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{= \|x\|} \quad := c_2 \text{ не зависит от } x$$

$$p(x) \leq C_2 \|x\|$$

Тогда $|px - py| \leq p(x - y) \leq c_2 \|x - y\| \Rightarrow p(x)$ непрерывна во всех точках.

$S := \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d x_i^2 = 1\}$ – единичная сфера – компакт.

p непрерывна на компакте $S \Rightarrow$ в некоторой точке $a \in S$ достигается минимальное значение

$\Rightarrow p(a) \leq p(x) \ \forall x \in S$. Проверим неравенство $c_1 \|x\| \leq p(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^d$:
 $:= c_1 > 0$

Если $x \neq 0$, то $\frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow c_1 \leq p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = p\left(\frac{1}{\|x\|} \cdot x\right) = \frac{1}{\|x\|} \cdot p(x).$

□

Замечание. В бесконечномерных пространствах бывают не эквивалентные нормы.

$C[a, b], \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, |||f(x)||| = \int_a^b |f(x)| dx$ не эквивалентны.

$|||f||| \leq (b - a) \|f\|$, а обратного неравенства нет.

2.2 Длина кривой

Определение 2.2.1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Тогда *путь* – это непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow X$.

Начало пути – $\gamma(a)$, *конец пути* – $\gamma(b)$, *носитель пути* $\gamma([a, b])$.

Замкнутый путь – $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Простой (несамопересекающийся) путь $\gamma(x) \neq \gamma(y) \forall x \neq y \in [a, b]$ (возможно за исключением равенства $\gamma(a) = \gamma(b)$).

Противоположный путь $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$.

Определение 2.2.2. Пусть $A \subset X$. Тогда A – *линейно связно*, если $\forall p, q \in A$ найдется путь, лежащий в A и соединяющий эти точки: $\exists \gamma : [a, b] \rightarrow A : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q$.

Теорема 2.2.1. Теорема Больцано-Коши

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, E линейно связно, $p, q \in E$. Тогда для любого C , лежащего между $f(p)$ и $f(q)$, найдется $x \in E : f(x) = C$.

Доказательство. Берем $\gamma : [a, b] \rightarrow E : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q$. Тогда $g = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

$f(p) = g(a), f(q) = g(b) \Rightarrow C$ лежит между $g(a)$ и $g(b) \Rightarrow \exists t \in [a, b] : g(t) = C = f(\gamma(t))$ \square

Определение 2.2.3. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ и $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow X$ – пути. Если существует $\tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$ строго возрастающая биекция ($\tau(a) = c, \tau(b) = d$ и непрерывность) такая, что $\tilde{\gamma} \circ \tau = \gamma$, то такие пути называют *эквивалентными*. Такие τ будем называть *допустимыми заменами параметра*.

Замечание. Это отношение эквивалентности.

Определение 2.2.4. *Кривая* – класс эквивалентных путей. Конкретный представитель класса – *параметризация кривой*.

Определение 2.2.5. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ – путь. Рассмотрим дробление $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Тогда $\sup \left\{ \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \mid t_0, \dots, t_n \text{ – дробление } [a, b] \right\} := l(\gamma)$ – *длина пути*.

Неформально: длина пути – супремум по всем длинам полученных ломанных.

Утверждение 2.2.1. Свойства:

1. Длины эквивалентных и противоположных путей равны.
2. Длина пути \geq длины отрезка, соединяющего концы.
3. Длина пути \geq длины вписанной в него ломаной.

Определение 2.2.6. *Длина кривой* – длина любого пути из класса эквивалентности.

Теорема 2.2.2. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ – путь, $c \in [a, b]$, $\gamma_1|_{[a, c]}$, $\gamma_2|_{[c, b]}$. Тогда $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

Доказательство.

\leq : Возьмем какое-то дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} \leq c < t_k < \dots < t_n = b$.

$$\sum_{j=1}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))}_{\leq l(\gamma_1)} + \underbrace{\rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_k)) + \sum_{j=k+1}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))}_{\leq l(\gamma_2)} \Rightarrow$$

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) - \text{верхняя граница для всех длин вписанных ломаных} \Rightarrow \underbrace{\sup}_{=l(\gamma)} \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

\geq : Возьмем дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t = c = u_0 < u_1 < \dots < u_m = b$.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))}_{\text{приисуем сюда } \sup} + \sum_{j=1}^m \rho(\gamma(u_{j-1}), \gamma(u_j)) \leq l(\gamma) \Rightarrow l(\gamma_1) + \underbrace{\sum_{j=1}^m \rho(\gamma(u_{j-1}), \gamma(u_j))}_{\text{приисуем сюда } \sup} \leq l(\gamma) \Rightarrow$$

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$$

□

Дальше все пути рассматриваем в \mathbb{R}^d .

Определение 2.2.7. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ – r -гладкий путь, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in C^r[a, b]$.

Если $r = 1$, то γ – гладкий путь.

Определение 2.2.8. Кривая r -гладкая, если в классе эквивалентности есть r -гладкий путь.

Лемма 2.2.1. Пусть $\Delta \subset [a, b]$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ – гладкий путь.

$$m_{\Delta}^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|, \quad m_{\Delta}^2 = \sum_{i=1}^d (m_{\Delta}^{(i)})^2.$$

$$M_{\Delta}^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|, \quad M_{\Delta}^2 = \sum_{i=1}^d (M_{\Delta}^{(i)})^2.$$

Тогда $m_{\Delta} l(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta} l(\Delta)$ (где $l(\Delta)$ – длина отрезка Δ).

Доказательство. Пусть $t_0 < \dots < t_n$ – дробление Δ , a_k – длина k -ого звена ломанной, построенной по этому дроблению.

$$a_k^2 = \sum_{i=1}^d (\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}))^2.$$

$$|\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| = (t_k - t_{k-1}) \cdot |\gamma'_i(\xi_{ki})|, \text{ где } \xi_{ki} \in (t_{k-1}, t_k) \text{ (теорема Лагранжа)}$$

$$(t_k - t_{k-1}) m_{\Delta}^{(i)} \leq (t_k - t_{k-1}) \cdot |\gamma'_i(\xi_{ki})| \leq (t_k - t_{k-1}) M_{\Delta}^{(i)}$$

$$\text{Тогда } (t_k - t_{k-1})^2 \cdot m_{\Delta}^2 \leq a_k^2 \leq (t_k - t_{k-1})^2 \cdot M_{\Delta}^2 \Rightarrow (t_k - t_{k-1}) \cdot m_{\Delta} \leq a_k \leq (t_k - t_{k-1}) \cdot M_{\Delta}.$$

$$\text{Просуммируем по всем звеньям: } \Rightarrow m_{\Delta} l(\Delta) \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq M_{\Delta} l(\Delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\Delta} l(\Delta) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k^2}_{=l(\gamma|_{\Delta})} \leq M_{\Delta} l(\Delta)$$

□

Теорема 2.2.3. Теорема о длине гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ – гладкий путь. Тогда $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \dots + \gamma'_d(t)^2} dt$.

Доказательство. Рассмотрим дробление $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Пусть $m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$, $M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$.

По лемме: $m_k(t_k - t_{k-1}) \leq l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}) \leq M_k(t_k - t_{k-1})$, $\Delta = [t_{k-1}, t_k]$

А также: $m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \leq M_k(t_k - t_{k-1})$

Просуммируем по k :

$$\sum_{k=1}^n m_k(t_k - t_{k-1}) \leq l(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^n m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1})$$

Чтобы доказать равенство, достаточно будет доказать, что $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$.

$$M_k - m_k = \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)})^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^d (m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)})^2} \stackrel{\text{н-во Минковского}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)})^2} \leq \sum_{i=1}^d |M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}|$$

$$m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} = \sum_{i=1}^d (|\gamma'_i(\xi_{ki})| - |\gamma'_i(\nu_{ki})|) \leq \sum_{i=1}^d |\gamma'_i(\xi_{ki}) - \gamma'_i(\nu_{ki})| \leq \sum_{i=1}^d w_{\gamma'_i}(|\tau|) =: f(|\tau|) \xrightarrow{\text{мелкость} \rightarrow 0} 0$$

где $\xi_{ki}, \nu_{ki} \in [t_{k-1}, t_k]$

Просуммируем:

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n f(|\tau|)(t_k - t_{k-1}) = f(|\tau|) \cdot (b - a) \xrightarrow{\text{мелкость} \rightarrow 0} 0 \quad \square$$

Следствие.

1. Длина графика функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1[a, b]$ равна $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Доказательство. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – это график функции.

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = l(\gamma). \quad \square$$

2. Длина пути в полярных координатах $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ (непрерывно дифференцируема) равна

$$\int_a^b \sqrt{r^2(t) + r'(t)^2}.$$

$r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно.

Доказательство. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos t \\ r(t) \sin t \end{pmatrix}$, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} r'(t) \cos t - r(t) \sin t \\ r'(t) \sin t + r(t) \cos t \end{pmatrix}$ и подставляем. \square

3. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ гладкий путь. Тогда $l(\gamma) \leq (b - a) \cdot \max_{t \in [a, b]} \|\gamma'(t)\|$.

$$\text{Доказательство. } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} \|\gamma'(t)\| \quad \square$$

2.3 Линейные операторы

Определение 2.3.1. Пусть X, Y – векторные пространства. Тогда $A : X \rightarrow Y$ – *линейный оператор*, если $A(\lambda x + \nu y) = \lambda A(x) + \nu A(y) \quad \forall x, y \in X \quad \forall \lambda, \nu \in \mathbb{R}$.

Утверждение 2.3.1.

1. $A(0_X) = 0_Y$.

Доказательство. $\lambda = \nu = 0$ и подставляем: $\lambda x + \nu y = 0_X, \lambda A(x) + \nu A(y) = 0_Y$. □

2. $A\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A(x_k)$.

Доказательство. Индукция. □

Определение 2.3.2. Пусть $A, B : X \rightarrow Y$ линейные операторы, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $A + B : X \rightarrow Y$. $(A + B)(x) := A(x) + B(x)$ – линейный оператор.
2. $\lambda A : X \rightarrow Y$. $(\lambda A)(x) := \lambda A(x)$ – линейный оператор.

2.4 Матричная запись линейного оператора

Определение 2.4.1. $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad i$

$$A(e_i) \in \mathbb{R}^n, A(e_i) = A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{in} \end{pmatrix}$$

$$A(x) = A\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i A(e_i) = \sum_{i=1}^m x_i A_i$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_m a_{m1} \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{m2} \\ \dots \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \dots + x_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 2.4.2. X и Y – нормированные пространства, $A : X \rightarrow Y$ – линейный оператор.

$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y$ – норма. Если $\|A\| < +\infty$, то A – *ограниченный оператор*.

Замечание.

1. $A(B_1(0)) \subset B_{\|A\|}(0)$.
2. Ограниченный оператор \neq ограниченное отображение. Более того, линейный оператор, являющийся ограниченным отображением – тождественный ноль.

Если $Ax_0 \neq 0$, то $\|A(tx_0)\| = \|tAx_0\| = |t| \cdot \|Ax_0\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$

3. Бывают неограниченные операторы.

$X := \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{лишь конечное число } x_n \neq 0\}$, $\|(x_n)\| := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$, $Ax := \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Утверждение 2.4.1. Свойства нормы:

1. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Доказательство. $\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A + B)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax + Bx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$. \square

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$ \square

3. Если $\|A\| = 0$, то $A \equiv 0$.

Доказательство. Если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\| = 0 \quad \forall x \in X : \|x\| \leq 1 \Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in X : \|x\| \leq 1$.

Возьмем $y \neq 0 \in X$. $\frac{y}{\|y\|}$ – единичный вектор. Тогда $A(\frac{y}{\|y\|}) = 0 \Rightarrow Ay = 0$ \square
 $= \frac{1}{\|y\|} Ay$

4. $\|\cdot\|$ – норма на векторном пространстве ограниченных линейных операторов.

Теорема 2.4.1. $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{C \in \mathbb{R} \mid \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}$

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5$$

Доказательство.

- $N_1 \geq N_2$ и $N_1 \geq N_3$ очевидно (множество больше $\Rightarrow \sup$ больше).

$$\circ N_3 = N_4$$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\|$$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \|A(\frac{x}{\|x\|})\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$$\circ N_4 = N_5$$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} - \text{наименьшая верхняя граница, то есть наименьшее } C \in R, \text{ для которого } \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C \Leftrightarrow \|Ax\| \leq C\|x\|$$

$$\circ N_2 \geq N_1$$

Возьмем $x \in X : \|x\| \leq 1$. Тогда $\|(1 - \varepsilon)x\| \leq 1 - \varepsilon < 1$

$$(1 - \varepsilon)\|Ax\| = \|A(1 - \varepsilon)x\| \leq N_2 \Rightarrow (1 - \varepsilon)N_1 \leq N_2 \text{ и устремим } \varepsilon \text{ к } 0.$$

$$\circ N_3 \geq N_1$$

Возьмем $x \in X : \|x\| \leq 1$ и $x \neq 0$. Тогда $y = \frac{x}{\|x\|}$ — единичный вектор.

$$N_3 \geq \|Ay\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|x\| \cdot N_3 \leq N_3 \Rightarrow N_1 \leq N_3$$

□

Следствие.

$$1. \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\text{Доказательство. Это } N_4 : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

□

$$2. \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\text{Доказательство. } \|AB\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(Bx)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|A\| \cdot \|Bx\| = \|A\| \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| \cdot \|B\|$$

□

Теорема 2.4.2. Пусть $A : X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Тогда равносильны:

1. A — ограниченный оператор.

2. A непрерывен в нуле.

3. A непрерывен во всех точках.

4. A равномерно непрерывен.

Доказательство. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ очевидны.

$1 \Rightarrow 4$: $\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$ и возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Если $\|x - y\| < \delta$, то $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$.

$2 \Rightarrow 1$: Возьмем $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ из определения непрерывности в нуле.

$\forall x \in X \ \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| \leq \varepsilon = 1$. Тогда $\|A\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$:

$\|x\| < \delta \Rightarrow$ если $\|y\| < 1$, то $\|\delta y\| < \delta$ и $\|A(\delta y)\| = \delta \|Ay\| < \varepsilon \Rightarrow \|A\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$. □

Теорема 2.4.3. $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейный оператор. Тогда $\|A\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$. В частности A – ограниченный оператор.

Доказательство. $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)^2 \stackrel{\text{К.-Б.}}{\leq} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{=\|x\|^2} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$

$$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$$

□

3. Ряды

3.1 Ряды в нормированном пространстве

Определение 3.1.1. Пусть X – нормированное пространство. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, где $x_n \in X$ – *ряд*.

Частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^n x_k := S_n$.

Если существует $\lim S_n$, то он называется *суммой ряда*.

Ряд сходится, если $\lim S_n$ существует.

Замечание. Для числовых рядов сходимость означает, что $\lim S_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1.1. Необходимое условие сходимости

Если ряд сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. $\lim x_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$ □

Утверждение 3.1.1. Свойства:

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.
2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то расстановка скобок не меняет сумму.

$$(x_1 + x_2 + x_3)_{=S_3} + x_{4=S_4} + (x_5 + x_6)_{=S_6} + \dots$$

Замечание. Расстановка скобок – выбор подпоследовательности в последовательности частичных сумм.

Теорема 3.1.2. Критерий Коши

Пусть X – полное нормированное пространство.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m \geq N \parallel \sum_{k=m+1}^n x_k \parallel < \varepsilon$.

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится $\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ имеет предел $\Leftrightarrow S_n$ – фундаментальная последовательность $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m \geq N \parallel S_n - S_m \parallel = \parallel \sum_{k=m+1}^n x_k \parallel < \varepsilon$ □

Определение 3.1.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится абсолютно*, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится (для числовых рядов это означает, что $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится).

Теорема 3.1.3. Пусть X – полное нормированное пространство. Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится.

Доказательство. Критерий Коши: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ абсолютно сходится
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m \geq N \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \|x_k\|}_{\geq \|\sum_{k=m+1}^n x_k\|} < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится. \square

Теорема 3.1.4. Группировка членов ряда

1. Если каждая группа содержит не более M слагаемых и $\lim x_n = 0$, то из сходимости сгруппированного ряда следует сходимость исходного.

Доказательство. По условию $\lim S_{n_k} = S$ и $n_{k+1} - n_k \leq M$.

Возьмем какое-то n . Тогда $n_k \leq n < n_{k+1}$ для какого-то k .

$$S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n.$$

$$\|S_n - S\| = \|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n\| \leq \underbrace{\|S_{n_k} - S\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|x_{n_k+1}\|}_{< \varepsilon} + \dots + \underbrace{\|x_n\|}_{< \varepsilon} < \varepsilon \cdot (M+1)$$

$$\exists K : \forall k \geq K \|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$$

$$\exists N : \forall m \geq N \|x_m\| < \varepsilon$$

\square

2. Для числовых рядов: если члены в каждой группе одного знака, то из сходимости сгруппированного ряда следует сходимость исходного.

Доказательство. Возьмем какое-то n : $n_k \leq n < n_{k+1}$. Пусть в блоке все слагаемые неотрицательные.

$$S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n \geq S_{n_k}$$

$$S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_k+1} - x_{n_k+2} - \dots - x_n \leq S_{n_{k+1}} \quad (\text{вычитаем неотрицательные числа}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\rightarrow S}{S_{n_k}} \leq S_n \leq \underset{\rightarrow S}{S_{n_{k+1}}} \text{ или } S_{n_{k+1}} \leq S_n \leq S_{n_k} \quad (\text{если в блоке все слагаемые } \leq 0) \Rightarrow \lim S_n = S.$$

\square

3.2 Знакопостоянные ряды

Теорема 3.2.1. Пусть $a_n \geq 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится \Leftrightarrow последовательность частичных сумм ограничена.

Доказательство. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ и $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \Rightarrow S_n$ монотонно возрастает

$\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow S_n$ имеет конечный предел $\Leftrightarrow S_n$ ограничена (так как монотонна). \square

Теорема 3.2.2. Признак сравнения

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда:

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Доказательство. Вторым пунктом – отрицание первого, поэтому докажем только первый.

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n := \sum_{k=1}^n b_k \Rightarrow A_n \leq B_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow B_n$ – ограниченная последовательность $\Rightarrow A_n$ – ограниченная последовательность $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. □

Следствие.

1. Если $a_n, b_n \geq 0$, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство. $0 \leq a_n \leq C \cdot b_n$ □

2. Если $a_n, b_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково.

Доказательство. $a_n \sim b_n \Rightarrow \frac{1}{2}a_n \leq b_n \leq 2a_n$ при больших n , □

Теорема 3.2.3. Признак Коши

Пусть $a_n \geq 0$.

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ при больших n , то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство. Поменяем начальные a -шки так, чтобы $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ для всех $n \Rightarrow a_n \leq q^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ – сходящийся (геометрическая прогрессия с $q < 1$) \Rightarrow признак сравнения. □

2. Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ при больших n , то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Сколь угодно далеко есть члены ряда больше 1 \Rightarrow нет необходимого условия сходимости. □

3. Пусть $q^* = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$.

Если $q^* < 1$, то ряд сходится.

Если $q^* > 1$, то ряд расходится.

Замечание. Если $q^* = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство. Если $q^* > 1$ и $\overline{\lim}$ – какой-то частичный предел \Rightarrow найдется последовательность n_k : $\lim \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow$ при больших k $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow$ ряд расходится по второму пункту.

Если $q^* < 1$ и $q^* = \overline{\lim} = \limsup_{k \geq n} \sqrt[n_k]{a_{n_k}}.$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{:=b_n}$

При больших n $\sqrt[n]{a_n} \leq b_n < q \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow$ по первому пункту ряд сходится. \square

Теорема 3.2.4. Признак Даламбера

Пусть $a_n > 0$.

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$ при больших n , то ряд сходится.

Доказательство. Подправим начало так, чтобы неравенство было верным для всех n .

$$a_{n+1} \leq d \cdot a_n \leq d^2 \cdot a_{n-1} \leq \dots \leq d^n \cdot a_1 \Rightarrow a_n = \mathcal{O}(d^{n-1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d^{n-1} - \text{сходится, так как } d < 1. \quad \square$$

2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ при больших n , то ряд расходится.

Доказательство. $a_n \leq a_{n+1}$ последовательность положительна и возрастает \Rightarrow нет стремления к 0 \Rightarrow ряд расходится. \square

3. Пусть $d^* = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Замечание. Если $d^* = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство. Пусть $d^* < 1$. Тогда $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1 \Rightarrow$ при больших n $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d \Rightarrow$ по 1 пункту ряд сходится.

Пусть $d^* > 1$. Тогда $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1 \Rightarrow$ при больших n $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ по 2 пункту ряд расходится. \square

Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится: $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ и $\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится: $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$ и $\lim \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$

Теорема 3.2.5. Пусть $a_n > 0$. Если $d^* = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$.

Доказательство. $\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln a_n}{n}$ по теореме Штольца надо найти $\lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \lim \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln d^* \Rightarrow \lim \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d^* \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$. \square

Теорема 3.2.6. Пусть f монотонна и $f \geq 0$. Тогда $\left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{f(a), f(b)\}$.

Доказательство. Пусть f убывает.

images/12-04-1.png

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{b-1} f(k) &\geq \int_a^b f(x) dx \geq \sum_{k=a+1}^b f(k) \\ \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx &\leq \sum_{k=a}^b f(k) - \sum_{k=a+1}^b f(k) = f(a) \\ \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx &\geq \sum_{k=a}^b f(k) - \sum_{k=a}^{b-1} f(k) = f(b) \end{aligned}$$

\square

Упражнение. Если f монотонна, то $\left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$.

Теорема 3.2.7. Интегральный признак сходимости ряда (Коши).

Пусть $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ монотонно убывает. Тогда $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ и $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство. Пусть $S_n := \sum_{k=1}^n f(k)$ и $F(y) := \int_1^y f(x) dx$.

Так как все неотрицательно, то:

1. $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится $\Leftrightarrow F(y)$ ограничена сверху.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится $\Leftrightarrow S(n)$ ограничена сверху.

Поэтому нужно понять, что ограниченность $S_n \Leftrightarrow$ ограниченность $F(n)$.

$$|S_n - F(n)| = \left| \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right| \leq f(1) \text{ (по лемме, } f(1) \text{ – максимум, так как } f \text{ убывает).}$$

$$\Leftarrow. \text{ Если } S_n \leq M, \text{ то } \int_1^{+\infty} f(x) dx \leq M + f(1) \Rightarrow F(y) \leq M + f(1).$$

$$\Rightarrow. \text{ Если } F(y) \leq M, \text{ то } S_n \leq M + f(1).$$

□

Пример. Эта теорема позволяет смотреть на интегралы вместо рядов, чтобы отвечать на вопрос об их сходимости (что иногда проще, чем исследовать на сходимость сам ряд).

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p > 0$ ведет себя также, как $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ведет себя также, как $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$ расходится.
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$ ведет себя также, как $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Следствие. Если $0 \leq a_n \leq \frac{C}{n^p}$ при $p > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^p}$ сходится.

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^p}$ – сходится, а дальше признак сравнения. □

3.3 Знакопеременные ряды

Теорема 3.3.1. Преобразование Абеля.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \text{ где } A_k = a_1 + \dots + a_k, A_0 = 0.$$

Доказательство. $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{j=2}^n A_{j-1} b_j \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} =$

$$A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

□

Замечание. Получили некоторый дискретный аналог интегрирования по частям (потому что частичная сумма = аналог первообразной, а разность соседних членов ряда = аналог дифференцирования).

Теорема 3.3.2. Признак Дирихле.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \sum_{k=1}^n a_k \text{ ограничены.} \\ 2. b_n \text{ монотонны.} \\ 3. \lim b_n = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится.}$$

Доказательство. Распишем частичную сумму через преобразование Абеля:

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \rightsquigarrow \text{хотим доказать, что } S_n \text{ имеет предел.}$$

$\lim A_n b_n = 0$ – ограниченная A_n на бесконечно малую b_n .

$\lim \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ – если сходится, то сходится к сумме ряда, то есть надо доказать, что ряд сходится.

Проверим абсолютную сходимость:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M \cdot |b_k - b_{k+1}| \quad (\text{так как } A_k \text{ – ограничены}).$$

Докажем, что $\sum_{k=1}^n |b_k - b_{k+1}|$ сходится:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |b_k - b_{k+1}| &= \left| \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) \right| \quad (\text{разности одного знака, так как } b_n \text{ монотонны}) = \\ &= |(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1})| = |b_1 - b_{n+1}| \rightarrow b_1 \Rightarrow \text{частичная сумма сходится} \Rightarrow \text{ряд} \\ &\text{сходится.} \end{aligned} \quad \square$$

Теорема 3.3.3. Признак Абеля

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.} \\ 2. b_n \text{ монотонны.} \\ 3. b_n \text{ ограничены.} \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится.}$$

Доказательство. b_n монотонны и ограничены $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim b_n = b$.

Пусть $\tilde{b}_n := b_n - b$, \tilde{b}_n монотонны и $\lim \tilde{b}_n = 0$.

Посмотрим на частичные суммы $A_n := \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow A_n$ ограничена.

a_n и \tilde{b}_n удовлетворяют условиям признака Дирихле и тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$ сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n}_{\text{сх-ся}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b}_{=b \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх-ся по усл.}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится.} \quad \square$$

Упражнение. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ – сходится. Указание – использовать формулу суммы $\sin x$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ неизвестно сходится или нет (конкретно Храброву, и вообще социуму).

Определение 3.3.1. Пусть $a_n \geq 0$. Тогда *знакопередающийся ряд* – это ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$

Теорема 3.3.4. Признак Лейбница.

Если a_n монотонно убывают и $\lim a_n = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится. Более того, $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$, где S – сумма ряда, S_n – частичная сумма.

Доказательство. $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \dots$ и $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$ – это стягивающиеся отрезки. Тогда есть единственная точка S , лежащая во всех отрезках и это предел их концов, то есть предел частичных сумм $\Rightarrow S$ – сумма ряда. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

Если $p > 0$, то ряд *сходится*, так как $a_n = \frac{1}{n^p} \searrow$.

Если $p \leq 0$, то ряд *расходится*, так как $a_n \not\rightarrow 0$.

Пример. Ряд Лейбница.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1) \rightarrow \ln 2.$$

Пример. $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) + \dots$

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right)}_{=\frac{1}{4k-2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_{2n} \rightarrow \frac{\ln 2}{2}$$

Переставили члены ряда и сумма поменялась...

Определение 3.3.2. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ – *перестановка* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 3.3.5.

1. Если $a_n \geq 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (тут могут быть $+\infty$).

2. Если ряд абсолютно сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство.

1. Пусть $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$, S и \tilde{S} – суммы рядов (существуют, так как слагаемые неотрицательны).

$$\tilde{S}_n = a_{\varphi(1)} + \dots + a_{\varphi(n)} \leq S_{\max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}} \leq S \Rightarrow \tilde{S}_n \xrightarrow{\rightarrow \tilde{S}} \tilde{S} \leq S \Rightarrow \tilde{S} \leq S.$$

Все симметрично, поэтому если мы напишем обратную перестановку, то получим, что $S \leq \tilde{S} \Rightarrow S = \tilde{S}$.

2. Пусть $(a_n)_+ = \max\{a_n, 0\}$, $(a_n)_- = \max\{-a_n, 0\}$.

$$0 \leq (a_n)_{\pm} \leq |a_n| \text{ и } a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_{\pm}$ – сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\varphi(n)})_{\pm}$ сходится по тем же суммам (сумма неотрицательных членов).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_+ - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_-}_{\text{сх-ся}} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\varphi(n)})_+ - \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\varphi(n)})_- = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

□

Упражнение. Доказать 2 для $a_n \in \mathbb{C}$.

Определение 3.3.3. $\sum a_n$ сходится условно, если $\sum a_n$ – сходится, а $\sum |a_n|$ – расходится.

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_{\pm} = +\infty$.

Доказательство. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_+$ конечна, $(a_n)_- = (a_n)_+ - a_n$.

$$\sum (a_n)_- = \underbrace{\sum (a_n)_+ - \sum a_n}_{\text{сх-ся}} \Rightarrow \sum (a_n)_- \text{ сходится.}$$

$$\sum |a_n| = \underbrace{\sum (a_n)_+ + \sum (a_n)_-}_{\text{сх-ся}} \text{ сходится. Противоречие.}$$

□

Теорема 3.3.6. Теорема Римана.

Пусть $\sum a_n$ сходится условно. Тогда $\forall S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, для которой $\sum a_{\varphi(n)} = S$. Также существует перестановка, для которой ряд не имеет суммы.

Доказательство. Берем $(a_n)_+$ и выкидываем все, для которых $a_n \leq 0$, остальное перенумеруем и назовем b_n . Берем $(a_n)_-$ и выкидываем все, для которых $a_n > 0$, остальное перенумеруем и назовем c_n (разделили все члены ряда на положительные и неположительные).

$$\sum b_n = \sum (a_n)_+ = +\infty \quad \sum c_n = \sum (a_n)_- = +\infty.$$

Для каждого a_n есть ровно одна b_k или c_k , т.ч. $a_n = b_k$ или $a_n = c_k$ (существует биекция).

Еще знаем, что $\lim b_n = \lim c_n = 0$.

1. $S \in \mathbb{R}$

Берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через S .

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} \leq S < b_1 + \dots + b_{n_1}$$

$$S_1 - b_{n_1} \leq S < S_1$$

Берем $-c$ -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через S .

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} - c_1 - \dots - c_{m_1-1} < S \leq b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1}$$

$$S_2 < S \leq S_2 + c_{m_1}$$

Снова берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через S .

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} - c_1 - \dots - c_{m_1-1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1} \leq S < b_1 + \dots + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2}$$

$$S_3 - b_{n_2} \leq S < S_3$$

У нас получилась перестановка (на каждом шаге берем какую-то b -шку или c -шку, пустых шагов не бывает).

Так можно брать, так как ряд b_n и ряд c_n расходящиеся, их сумма может быть сколь угодно большой (иначе сумма была бы конечная с какого-то номера). При этом строгие знаки нужны, чтобы не было пустых шагов.

Осталось проверить, что сумма полученной перестановки равна S . Расставим скобки вокруг блоков с одним знаком и проверим, что такая последовательность частичных сумм стремится к S .

$$|S_{2k+1} - S| \leq b_{n_k} \rightarrow 0$$

$$|S_{2k} - S| \leq c_{m_k} \rightarrow 0$$

2. $S = +\infty$

Берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через 1 $\rightsquigarrow S_1 > 1$, $\lim S_{2k-1} = +\infty$.

Берем одну $-c$ -шку.

Берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через 2 $\rightsquigarrow S_3 > 2$, $\lim S_{2k-1} = +\infty$.

Берем одну $-c$ -шку.

И так далее. Для $-\infty$ аналогично.

3. Нет суммы.

Берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через 1 $\rightsquigarrow S_1 > 1$.

Берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через -1 $\rightsquigarrow S_2 < -1$.

Берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через 1 $\rightsquigarrow S_3 > 1$.

Берем b -шки до тех пор, пока сумма не перевалит через -1 . И так далее.

□

Теорема 3.3.7. Теорема Коши о произведении рядов.

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ абсолютно сходящиеся, то ряд, составленный из всевозможных произведений $a_k b_m$, абсолютно сходится и его сумма AB .

Доказательство. Пусть $A^* = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B^* = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Рассмотрим сумму $\sum |a_i b_j| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot \sum_{j=1}^m |b_j| \leq A^* \cdot B^*$, где n – наибольший из индексов i , встречающийся слева, m – наибольший из индексов j , встречающийся слева
 $\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_i b_j|$ абсолютно сходящийся \Rightarrow сумма ряда $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$ не зависит от порядка суммирования.

images/12-04-2.png

$$S_{n^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j \xrightarrow[\rightarrow B]{\rightarrow A} AB$$

$$\lim S_{n^2} = AB \Rightarrow S = AB.$$

□

Определение 3.3.4. Произведение рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$.

images/12-04-3.png

Замечание. Из теоремы Коши следует, что если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно сходитя и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Теорема 3.3.8. Теорема Мертенса.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ и один из рядов абсолютно сходящийся, то $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$.

Доказательство. Не будет.

□

Замечание.

1. Здесь важен порядок суммирования, так как нет абсолютной сходимости.
2. Обычно сходимости не хватает.

Пример. $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, но не абсолютно.

$$c_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right)$$

Каждое слагаемое не меньше $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n}$

$$n^2 \geq k(n-k)$$

Тогда $|c_n| \geq n \cdot \frac{1}{n} = 1$ и ряд расходится, так как $c_n \not\rightarrow 0$.

Теорема 3.3.9. Теорема Абеля.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$, где $c_n = a_1 b_n + \dots + a_n b_1$, то $AB = C$.

Лемма 3.3.1. Пусть $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ – конечные пределы. Тогда $\frac{x_1 y_n + \dots + x_n y_1}{n} \rightarrow xy$.

Доказательство.

1. Пусть $y = 0$. Надо доказать, что $x_1 y_n + \dots + x_n y_1 = o(n)$.

$$|x_n| \leq M, |y_n| \leq M, \lim y_n = 0 \Rightarrow \exists N \forall n \geq N |y_n| < \varepsilon.$$

$$|x_1 y_n + \dots + x_n y_1| \leq \underbrace{|x_1 y_n|}_{< \varepsilon M} + \underbrace{|x_2 y_{n-1}|}_{< \varepsilon M} + \dots + \underbrace{|x_{n-N+1} y_N|}_{\leq M^2} + \dots + \underbrace{|x_n y_1|}_{\leq M^2} < (n - N + 1) \varepsilon M + (N - 1) M^2$$

$$\frac{x_1 y_n + \dots + x_n y_1}{n} < \underbrace{\left(1 - \frac{N-1}{n}\right) \varepsilon M}_{< 1} + \underbrace{\frac{N-1}{n} M^2}_{< \varepsilon \text{ при больших } n} < \varepsilon M + \varepsilon$$

2. Пусть $y_n = y$.

$$\frac{x_1 y_n + \dots + x_n y_1}{n} = y \cdot \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow xy \text{ (по следствию из теоремы Штольца).}$$

3. Общий случай $\tilde{y}_n = y_n - y \rightarrow 0$

$$\frac{x_1 \tilde{y}_n + \dots + x_n \tilde{y}_1}{n} \rightarrow 0, \frac{x_1 y + \dots + x_n y}{n} \rightarrow xy \text{ и сложим.}$$

□

Доказательство. Пусть $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ и $C_n := \sum_{k=1}^n c_k$.

По лемме знаем, что $\frac{A_1 B_n + \dots + A_n B_1}{n} \rightarrow AB$.

$$\frac{A_1 B_n + \dots + A_n B_1}{n} = \frac{1}{n} (n a_1 b_2 + (n-1)(a_1 b_2 + a_2 b_1) + (n-2)(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_n + \dots + a_n b_1)) =$$

$$\frac{n c_1 + (n-1) c_2 + \dots + c_n}{n} = \frac{C_1 + \dots + C_n}{n} \rightarrow C \quad \square$$

3.4 Бесконечные произведения

Определение 3.4.1. $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ – бесконечное произведение, $P_n := x_1 x_2 \dots x_n$ – частичное произведение.

Если существует $\lim P_n$, то его называют значением бесконечного произведения.

Если он конечен и отличен от 0, то бесконечное произведение *сходится*.

Пример.

$$1. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(2^2-1)(3^2-1)\dots(n^2-1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2} = \frac{(2n+1)((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Упражнение.

$$1. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x} \text{ при } |x| < 1.$$

Утверждение 3.4.1. Свойства бесконечного произведения:

1. Конечное число ненулевых начальных множителей не влияет на сходимость.

Комментарий: добавляется константа, на которую нужно умножать, на существование предела не влияет.

2. Если $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то $\lim x_n = 1$.

Доказательство. $x_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$, если $P = \prod_{n=1}^{\infty} x_n$. пользуемся тем, что $P \neq 0$ и $P \neq \pm\infty$. □

3. У сходящегося произведения все сомножители, начиная с некоторого номера, положительны.

Комментарий: стремятся к 1 \Rightarrow можно рассматривать только такие произведения.

4. Если $x_n > 0$, то для сходимости $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ необходимо и достаточно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln x_n$.
Если L – сумма ряда, то $P = e^L$.

Доказательство. $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln x_n \Leftrightarrow P = \prod_{n=1}^{\infty} x_n = e^{S_n}$. □

Пример. Пусть p_n – простое n -ое число. Рассмотрим $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{p_k-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ – расходится. Более

того, $\prod_{k=1}^n \frac{p_k}{p_k-1} \geq H_n$ – n -ое гармоническое число.

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} > \prod_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_k^j} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_n^{\alpha_n}} \geq \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} = H_n \rightarrow +\infty$$

$$0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq n$$

$$\frac{1}{1-x} > \sum_{k=1}^n x_k \text{ при } 0 < x < 1.$$

Теорема 3.4.1. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится. Более того $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \geq \ln \ln n - 1$.

Доказательство. $\prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^n \frac{p_k}{p_k-1} \geq H_n$

$$\sum_{k=1}^n -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \geq \ln H_n$$

Докажем: $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leq \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2}$

$$-\ln(1-t) \leq t + t^2 \text{ при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-t} \leq 1 + 2t \quad (1 \leq (1+2t)(1-t) = 1+t-2t^2)$$

Тогда: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2} \geq \sum_{k=1}^n -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \geq \ln H_n \geq \ln \ln n$

Поймем, что слева за константа: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$ □

Замечание. На самом деле $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$.

Упражнение.

$$1. \sum_{k \leq p \leq k^2, p - \text{простое}} \leq \frac{4}{3}$$

$$2. \sum_{p \leq n} \leq 2 \ln \ln n + 4$$

3.5 Функциональные последовательности и ряды

Определение 3.5.1. Пусть $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. f_n сходятся к f поточечно, если $\lim f_n(x) = f(x) \forall x \in E$.

images/19-04-1.png

Определение 3.5.2. Пусть $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. f_n сходятся к f равномерно на E ($f_n \rightrightarrows f$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N_{=N(\varepsilon)} : \forall n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Замечание. Поточечная сходимость с помощью $\varepsilon - N$: $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N_{=N(\varepsilon, x)} : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Замечание. $f_n(x) = x^n \quad E = (0, 1) \quad f(x) \equiv 0$

$\lim f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, 1)$ – поточечная сходимость есть.

Заметим, что если есть равномерная сходимость, то поточечная тоже есть к такой же функции (нашлась такая универсальная, которая точно подойдет под условия поточечной сходимости).

Пусть $f_n \rightrightarrows 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \underbrace{\forall x \in (0, 1) x^n < \varepsilon}_{\text{так не бывает}} \Rightarrow$ равномерной сходимости нет.

Теорема 3.5.1. Пусть $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $E \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_n \rightrightarrows f &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_{=N(\varepsilon)} : \forall n \geq N \underbrace{\forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon} \\ &\forall \varepsilon > 0 \exists N_{=N(\varepsilon)} : \forall n \geq N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \\ \Leftarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_{=N(\varepsilon)} : \forall n \geq N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_{=N(\varepsilon)} : \\ &\forall n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows f \end{aligned}$$

□

Следствие.

1. Если $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E$ и $\lim a_n = 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E .

Доказательство. $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0$

□

2. Если существуют $x_n \in E : \underbrace{f_n(x_n) - f(x_n)}_{=:b_n} \not\rightarrow 0$, то нет равномерной сходимости.

Доказательство. $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |b_n|$ (значение в какой-то точке)

$|b_n| \not\rightarrow 0 \Rightarrow \exists b_{n_k} : |b_{n_k}| > \delta > 0 \Rightarrow \sup \dots > \delta$ и $\not\rightarrow 0$. □

Определение 3.5.3. Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Последовательность f_n равномерно ограничена, если $\exists M$, т.ч. $\forall n \forall x \in E |f_n(x)| \leq M$.

Теорема 3.5.2. Пусть f_n равномерно ограничена, $g_n \rightarrow 0 \Rightarrow f_n g_n \rightarrow 0$.

Доказательство. Если $|f_n(x)g_n(x)| \leq M|g_n(x)|$, то и $\sup_{x \in E} |f_n(x)g_n(x)| \leq \sup_{x \in E} |g_n(x)| \cdot M \rightarrow 0$. □

Теорема 3.5.3. Критерий Коши для равномерной сходимости последовательности функций.

Пусть $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда f_n равномерно сходится на E к некоторой функции $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство.

\Rightarrow . Пусть $f_n \rightarrow f$ на E .

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m \geq N \forall x \in E |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad x \in E.$$

\Leftarrow . Зафиксируем $x \in E$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x)$ – фундаментальная последовательность вещественных чисел (для каждого конкретного аргумента) \Rightarrow она имеет конечный предел $f(x) := \lim f_n(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \forall x \in E \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ на } E.$$

□

Определение 3.5.4. Пространство $l^\infty(E) := \{f \mid f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ – ограниченная}\}$.

$$\|f\|_{l^\infty(E)} = \|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)| \text{ – норма.}$$

Замечание. Несложно проверить, что это норма: неотрицательность, $\sup = 0 \Rightarrow f \equiv 0$, выносимость константы – очевидно.

Неравенство треугольника тоже банально.

Определение 3.5.5. Пространство $C(K) := \{f \mid f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ – непрерывная}\}$.

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty : \max_{x \in K} |f(x)|$$

Замечание. $C(K) \subset l^\infty(K)$ – непрерывная функция на компакте ограничена и нормы совпадают (\sup и \max – это одно и то же).

Теорема 3.5.4. $l^\infty(E)$ – полное пространство.

Доказательство. Пусть $f_n \in l^\infty(E)$ – фундаментальная последовательность.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \forall x \in E \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)| \quad \forall x \in E$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \xrightarrow{\text{крит. Коши}} \text{найдется } f : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ т.ч. } f_n \rightrightarrows f \text{ на } E, \text{ то есть } \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \rightarrow 0 \text{ (то есть сходимость по норме).}$

Осталось понять, что $f \in l^\infty(E)$, то есть ограниченная функция.

Возьмем n , для которого $|f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall x \in E \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f_n(x)| \leq C$ так как f_n – ограниченная функция. \square

Теорема 3.5.5. Пусть $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$, f_n непрерывна в точке a и $f_n \rightrightarrows f$ на E . Тогда f непрерывна в точке a .

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и будем искать для него $\delta > 0$ из окрестности непрерывности f .

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{< \varepsilon} < 3\varepsilon$$

$$\exists N \forall n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Возьмем любое $n \geq N$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ и $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$.

Знаем, что f_n непрерывна в точке $a \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$.

Нашли подходящую $\delta > 0$. \square

Следствие. Теорема Стокса-Зайделя.

Пусть $f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E . Тогда $f \in C(E)$.

(Предыдущая теорема, примененная во всех точках по отдельности)

Следствие. $C(K)$ – замкнутое подпространство $l^\infty(K)$.

Доказательство. $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ (расшифровка нормы) $\Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E .

По предыдущей теореме равномерная сходимость непрерывность не портит \Rightarrow мы не вылезем за пределы непрерывных функций. \square

Теорема 3.5.6. Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство, $Y \subset X$ – замкнутое. Тогда (Y, ρ) – полное.

Доказательство. Возьмем фундаментальную последовательность $y_n \in Y \Rightarrow$ она фундаментальная в (X, ρ) (метрика та же самая) $\xrightarrow{X - \text{полное}} \text{найдется } x \in X, \text{ т.ч. } \lim y_n = x \Rightarrow x - \text{предельная точка } Y \Rightarrow x \in Y, \text{ так как } Y - \text{замкнуто.}$ \square

Следствие. $C(K)$ – полное.

Замечание. Поточечная сходимость не сохраняет непрерывность.

Пример. Рассмотрим $f_n(x) = x^n$ на $(0, 1]$.

Она поточечно сходится к $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (0, 1) \\ 1, & \text{при } x = 1 \end{cases}$ – непрерывность испортилась.

Определение 3.5.6. Пусть $u_k : E \rightarrow \mathbb{R}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится поточечно, если $\forall x \in E$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится $\Leftrightarrow S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ поточечно сходится.

Определение 3.5.7. Ряд сходится равномерно на E , если $S_n(x)$ сходятся равномерно на E .

Определение 3.5.8. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится поточечно, $u_k : E \rightarrow \mathbb{R}$. Остаток ряда $r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Замечание. $S_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) =: S(x)$ – сумма ряда.

Теорема 3.5.7. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится поточечно. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно $\Leftrightarrow r_n \Rightarrow 0$.

Доказательство. $S(x) - S_n(x) = r_n(x) \Rightarrow 0 \Leftrightarrow S_n \Rightarrow S$ □

Замечание.

1. Если ряд сходится равномерно, то $u_n \Rightarrow 0$ (полный аналог необходимого условия сходимости числового ряда, только здесь равномерная сходимость и равномерное стремление к нулю).

Доказательство. $S_n \Rightarrow S \Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow S - S = 0$ □

2. Если найдутся $x_n \in E : \underbrace{u_n(x_n) \not\rightarrow 0}_{\Rightarrow \text{нет} \Rightarrow 0}$, то нет равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

3. Если найдутся $x_n \in E : \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ расходится, то это вообще ничего не значит.

Пример. $u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$x_n = \frac{1}{n+1}$, $u_n(x_n) = \frac{1}{n}$, $\sum u_n(x_n) = \sum \frac{1}{n}$ – расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, $0 \leq r_n(x) \leq \frac{1}{n}$

Теорема 3.5.8. Критерий Коши для равномерной сходимости функционального ряда.

Пусть $u_k : E \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > m \geq N \forall x \in E \left| \sum_{k=m+1}^n u_k \right| < \varepsilon$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на $E \Leftrightarrow S_n \Rightarrow S$ на $E \stackrel{\text{крит. Коши}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > m \geq N \forall x \in E \underbrace{|S_n(x) - S_m(x)|}_{= \sum_{k=m+1}^n u_k} < \varepsilon$ \square

Теорема 3.5.9. Признак сравнения.

Пусть $|u_n(x)| \leq v_n(x) \forall x \in E \forall n$. Тогда если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно, то и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно $\stackrel{\text{крит. Коши}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > m \geq N \forall x \in E \underbrace{\left| \sum_{k=m+1}^n v_k(x) \right|}_{\geq \sum_{k=m+1}^n |u_k(x)|} < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > m \geq N \forall x \in E \left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x) \right| < \varepsilon \stackrel{\text{крит. Коши}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно. \square

Замечание. Должно напоминать факт, что из абсолютной сходимости ряда следует обычная.

Следствие. Признак Вейерштрасса.

Если $|u_n(x)| \leq a_n \forall x \in E \forall n$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E .

Доказательство. Возьмем $v_n(x) = a_n$. Тогда $v_n(x)$ сходятся равномерно, так как от x не зависят. \square

Следствие. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. Возьмем $v_n(x) = |u_n(x)|$. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно на \mathbb{R} : $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Замечание. Абсолютная и равномерная сходимости – разные вещи.

1. Может быть абсолютная сходимость, но не быть равномерной.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ на $(0, 1)$

2. Может быть равномерная сходимость, но не быть абсолютной.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

3. Может быть равномерная сходимость, абсолютная сходимость, но $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно.

Теорема 3.5.10. Признак Дирихле.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq K \quad \forall x \in E \quad \forall n \\ b_n \Rightarrow 0 \text{ на } E \\ b_n(x) \text{ монотонны по } n \text{ для любого фикс. } x \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \text{ равномерно сходится.}$$

Доказательство. Напишем преобразование Абеля: $\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(x) = A_n(x) b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x))$, где $A_k(x) = \sum_{j=1}^k a_j(x)$.

Надо доказать, что частичные суммы равномерно сходятся, то есть что каждое слагаемое в правой части равномерно сходится.

$A_n(x) b_n(x) \Rightarrow 0$ (равномерно ограниченная на равномерно стремящуюся к 0)

Осталось доказать, что $\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x))$ равномерно сходится. Проверим, что есть равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{n-1} |A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x))|$.

$|A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x))| \leq K |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$, поэтому осталось доказать, что $\sum_{k=1}^{n-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ равномерно сходится.

$$\sum_{k=1}^{n-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} b_k(x) - b_{k+1}(x) \right| \quad (b_n \text{ монотонные, то есть разности одного знака}) = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \Rightarrow |b_1(x)| \quad \square$$

Теорема 3.5.11. Признак Абеля.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right| \text{ равномерно сходится на } E \\ b_n \text{ равномерно ограничены на } E \\ b_n(x) \text{ монотонны по } n \text{ для любого фикс. } x \in E \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \text{ равномерно сх-ся на } E.$$

Доказательство. Хотим понять, что при больших n такая сумма маленькая, напишем критерий Коши:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=1}^p a_{n+k}(x) b_{n+k}(x) \stackrel{\text{пр. Абеля}}{=} (A_{n+p}(x) - A_n(x)) b_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x)) (b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x))$$

$$\sum_{k=1}^p a_{n+k}(x) = A_{n+p}(x) - A_n(x)$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| \leq \underbrace{|(A_{n+p}(x) - A_n(x))|}_{< \varepsilon \text{ если } n \geq N} \cdot \underbrace{|b_{n+p}(x)|}_{\leq M} + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{|A_{n+k}(x) - A_n(x)|}_{< \varepsilon \text{ если } n \geq N} \cdot |b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)| \stackrel{(*)}{\leq}$$

b_n равномерно ограничены $\Rightarrow |b_n(x)| \leq M$.

$A_n(x)$ равномерно сходится $\Rightarrow \exists N \forall m > n \leq N \forall x \in E |A_m(x) - A_n(x)| < \varepsilon$, рассмотрим только такие n, m :

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon M + \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)| = \varepsilon M + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{p-1} b_{n+k}(x) - b_{n+p+1}(x) \right| \leq \varepsilon M + \varepsilon |b_{n+1}(x) - b_{n+p+1}(x)| \leq \\
& \varepsilon M + 2\varepsilon M = 3\varepsilon M
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.5.12. Признак Лейбница.

Пусть $b_n(x) \geq 0$ и монотонно убывают $\forall x \in E$, $b_n \Rightarrow 0$ на E . Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$ равномерно сходится на E .

Доказательство. $a_n(x) = (-1)^{n-1}$ и подставляем в Дирихле.

□

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ на $(0, 1)$ сходится равномерно:

$b_n(x) = \frac{x^n}{n} \geq 0$, $0 \leq b_n(x) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow b_n \Rightarrow 0$ и признак Лейбница.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ сходится неравномерно:

Применим критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > n \geq N \forall x \in (0, 1) \sum_{k=n+1}^m \frac{x^k}{k} < \varepsilon$

$$m = 2n \quad x \rightarrow 1_- \quad \frac{1}{2} < \frac{x^k}{k} < \varepsilon$$

Вот тот самый пример, когда абсолютная есть, равномерная есть, но у суммы модулей равномерная исчезает.

Теорема 3.5.13. Признак Дини.

Пусть K – компакт, $u_n \in C(K)$, $u_n \geq 0$ и $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \in C(K)$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на K .

Доказательство. $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ $r_n(x) = r_{n+1}(x) + u_{n+1}(x) \geq r_{n+1}(x) \Rightarrow r_n(x) \geq 0$ и монотонно убывают.

Надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists n \forall x \in K \quad r_n(x) < \varepsilon$.

Пусть никакое n не подходит, то есть $\forall n \exists x_n \in K$, т.ч. $r_n(x_n) \geq \varepsilon$

x_n – последовательность компакта \Rightarrow найдется сходящаяся подпоследовательность x_{n_k} , $x_0 := \lim x_{n_k}$.

r_n непрерывно в точке x_0 так как $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ непрерывно по условию, а $S_n(x)$ – конечное число непрерывных слагаемых.

Тогда знаем, что $r_m(x_0) \xleftarrow{k \rightarrow \infty} r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon \Rightarrow r_m(x_0) \geq \varepsilon \quad \forall m$. Тогда в этой точке нет стремления к нулю. Противоречие с тем, что ряд сходится в точке x_0 .

□

3.6 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 3.6.1. Пусть $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \Rightarrow f$, a – предельная точка E , $b_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} b_n$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существуют, конечны и равны.

Доказательство. Критерий Коши для $f_n \Rightarrow f$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\xrightarrow{x \rightarrow a} |b_n - b_m| \leq \varepsilon$

b_n – фундаментальная последовательность в $\mathbb{R} \Rightarrow b = \lim b_n \in \mathbb{R}$.

Проверим, что $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b$.

$$|f(x) - b| \leq \underbrace{|b_n - b|}_{< \varepsilon \text{ при } n \geq N_1} + |f_n(x) - b_n| + \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{< \varepsilon \text{ при } n \geq N_2 \forall x \in E} < 2\varepsilon + \underbrace{|f_n(x) - b_n|}_{< \varepsilon \text{ при } |x - a| < \delta}$$

Возьмем $\max\{N_1, N_2\}$. □

Теорема 3.6.2. Пусть $u_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, a – предельная точка и $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$ и ряд сходится.

Доказательство. Пусть $f_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $b_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n u_k(x) =$
т.к. сумма конечна $\sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow a} u_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k$. Подставляем b_n в предыдущую теорему.

Тогда по теореме $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

$$\lim_{x \rightarrow a} b_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$
□

Замечание. В случае равномерной сходимости ряда мы можем менять местами \lim и \sum .

Следствие. Если u_n непрерывны в точке a и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке a .

Доказательство. $c_n = u_n(a)$ в предыдущей теореме. □

Теорема 3.6.3. Теорема об интегрировании функциональных последовательностей.

Пусть $f_n \in C[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$, $c \in [a, b]$. Тогда $\int_c^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_c^x f(t) dt$. В частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f_n(t) dt = \int_c^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

Доказательство. Пусть $F_n(x) := \int_c^x f_n(t) dt$.

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_c^x f_n(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right| \leq \int_c^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq |x - c| \cdot \max_{t \in [c, x]} |f_n(t) - f(t)| \leq |b - a| \cdot \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0, \text{ то есть равномерная сходимость есть.}$$
□

Замечание. В случае равномерной сходимости ряда мы можем менять местами \lim и \int .

Следствие. Если $u_n \in C[a, b]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt$.

Доказательство. $\int_c^x \sum_{k=1}^n u_k(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_c^x u_k(t) dt$ частичные суммы – это F из предыдущей теоремы. □

Замечание. Поточечной сходимости не хватает.

Пример. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0, 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ но } \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx^2} d(nx^2) = -\frac{e^{-nx^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx$$

Замечание. $f_n(x_n) \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ нет равномерной сходимости:

$$f_n(x_n) \not\rightarrow 0 \Rightarrow \underbrace{|f_n(x_n)|}_{\leq \sup_{x \in [0,1]} f_n(x)} \not\rightarrow 0$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, f_n(x_n) = n \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n(\frac{1}{\sqrt{n}})^2} = \frac{\sqrt{n}}{e} \not\rightarrow 0$$

Теорема 3.6.4. Теорема о дифференцировании функциональных последовательностей.

Пусть $f_n \in C^1[a, b]$, $c \in [a, b]$, $f_n(c) \rightarrow A$ и $f'_n \rightrightarrows g$ на $[a, b]$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, $f \in C^1[a, b]$ и $f' = g$. В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$.

$$\text{Доказательство. } \int_c^x g(t) dt = \int_c^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(c)) =$$

$$(\text{так как предел существует}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = f(x) - A \Rightarrow f(x) = A + \int_c^x g(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \in C^1[a, b] \text{ (так как это интеграл от непрерывной функции) и } f'(x) = g(x).$$

Осталось понять, что $f_n \rightrightarrows f$.

$$f(x) = \int_c^x g(t) dt + A$$

$$f_n(x) = \underbrace{\int_c^x f'_n(t) dt}_{\Rightarrow \int_c^x g(t) dt} + \underbrace{f_n(c)}_{\Rightarrow A} \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ (по теореме Барроу).}$$

□

Следствие. Пусть $u_n \in C^1[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится к дифференцируемой функции и $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Доказательство. Пусть $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \in C^1[a, b]$ (конечная сумма дифференцируемых функ-

ций), $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n u'_k(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) =: g(x)$ (опять же конечная сумма).

$f'_n \rightrightarrows g$ и $f_n(c)$ сходится.

По теореме $f_n \rightrightarrows f$, f — дифференцируемая функция и ее производная — это g :

$$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

□

Замечание. Равномерной сходимости исходных функций недостаточно, нужна именно равномерная сходимость производных.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится: $|\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin nx}{n^2})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ расходится при $x = 0$.

3.7 Степенные ряды

Определение 3.7.1. Пусть $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(z - z_0)^n}_{:=w^n}$ – степенной ряд.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, w = z - z_0.$$

Теорема 3.7.1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0$, то ряд сходится (и даже абсолютно сходится) при $|z| < |z_0|$. Если ряд расходится при $z = z_0$, то он расходится при $|z| > |z_0|$.

Доказательство. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – сходится $\Rightarrow a_n z_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (необходимое условие) $\Rightarrow a_n z_0^n$ – ограниченная последовательность: $|a_n z_0^n| < M \forall n \Rightarrow |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot |\frac{z}{z_0}|^n \leq M |\frac{z}{z_0}|^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} M |\frac{z}{z_0}|^n$ сходится ($|\frac{z}{z_0}| < 1$ – геометрическая прогрессия) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ абсолютно сходится по признаку сравнения.
 Второе утверждение – отрицание первого. □

Определение 3.7.2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – такое $R \in [0, +\infty)$, что ряд сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – круг $|z| < R$.

images/10-05-1.png

Теорема 3.7.2. Формула Коши-Адамара

Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости и он равен $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Применим признак Коши для $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$:
 $q := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|$.

Если $q < 1$, то ряд сходится. $q < 1 \Leftrightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$.

Если $q > 1$, то члены ряда не стремятся к 0. $q > 1 \Leftrightarrow |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ расходится. \square

Замечание. Внутри круга сходимости ряд абсолютно сходится.

Пример.

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R := \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

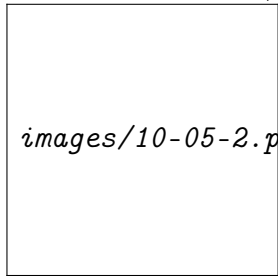
$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \quad R = 0$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} - \text{сходится при } |z| \leq 1, \text{ при } |z| > 1 \text{ расходится.}$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad R = 1 - \text{при } |z| \geq 1 \text{ ряд расходится, так как члены } \not\rightarrow 0.$$

Теорема 3.7.3. Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $0 < r < R$. Тогда ряд равномерно сходится в круге $|z| \leq r$.



Доказательство. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ абсолютно сходится (из определения радиуса сходимости) \Rightarrow

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ сходится.}$$

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \text{ при } |z| \leq r \xrightarrow{\text{пр. Вейерш.}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ равномерно сходится при } |z| \leq r. \quad \square$$

Следствие. Сумма степенного ряда в круг сходимости – непрерывная функция.

Доказательство. Проверяем непрерывность в точке z_0 , $|z_0| < R$. Возьмем $|z_0| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| \leq r$ есть равномерная сходимость \Rightarrow там сумма ряда непрерывна \Rightarrow есть непрерывность в точке z_0 .

images/10-05-3.png

□

Теорема 3.7.4. Теорема Абеля

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n$, $x \in [0, R]$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ равномерно сходится (так как не зависит от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, $0 \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$
 пр. Абеля \Rightarrow ряд равномерно сходится. □

Следствие. В условиях теоремы сумма $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывна на $[0, R]$ (слагаемые непрерывны + ряд равномерно сходится).

В частности, $\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ (непрерывность в точке R).

Лемма 3.7.1. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $\lim x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim} x_n y_n = \lim x_n \cdot \overline{\lim} y_n$.

Доказательство. Пусть $A := \lim x_n$, $B := \overline{\lim} y_n$ и $C := \overline{\lim} x_n y_n$.

C – верхний предел, тогда $\exists x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow C \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A \Rightarrow y_{n_k} \rightarrow \frac{C}{A} \rightarrow \frac{C}{A} \leq B$, так как B – наибольший из всех частичных пределов.

Возьмем $n_j : y_{n_j} \rightarrow B \Rightarrow x_{n_j} y_{n_j} \rightarrow A \cdot B \Rightarrow AB \leq C$

Вывод: $AB = C$. □

Следствие. Радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ совпадают.

Доказательство. Радиусы сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ совпадают (радиус не меняется от умножения на какое-то ненулевое число z).

Радиусы сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}$ совпадают (опять же отличаются на z).

То есть надо доказать, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^n$ имеют одинаковые радиусы сходимости, то есть (пользуясь формулой Коши-Адамара), что $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}$.

А это верно из леммы + $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$. □

Замечание. Второй ряд получен из первого почленным дифференцированием первого, а третий – почленным интегрированием.

Теорема 3.7.5. Почленное интегрирование степенного ряда.

Пусть R – радиус сходимости, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тогда при $|x-x_0| < R$ $\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и этот ряд имеет тот же радиус сходимости.

images/10-05-4.png

Доказательство. На $[x_0, x]$ ряд равномерно сходится (так как отрезок целиком лежит в круге сходимости) \Rightarrow можно интегрировать почленно. \square

Определение 3.7.3. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, z_0 – внутренняя точка E . Если существует такое $k \in \mathbb{C}$, что $f(z) = f(z_0) + k(z-z_0) + o(z-z_0)$ при $z \rightarrow z_0$, то f – комплексно-дифференцируема в точке z_0 .

Замечание.

1. $k = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ – производная f в точке z_0 .
2. Существование производной равносильно дифференцируемости.

Теорема 3.7.6. Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n =: f(z)$. Тогда f бесконечно дифференцируема в круге сходимости и $f^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$.

Доказательство. Пусть $m=1$ (далее индукция).

Возьмем $0 < r < R$ и $|z| < r$, $|w| < r$.

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{1}{w-z} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{w^n - z^n}{w-z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})$$

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow z} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

Про ? : $|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})| \leq |a_n| \cdot n r^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$ пр. Вейерш. \Rightarrow нужный ряд равномерно сходится, то есть можно переставлять \lim и \sum местами. \square

Теорема 3.7.7. Единственность разложения в степенной ряд.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ – радиус сходимости. Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Доказательство. Выведем формулу для коэффициентов:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}. \text{ Подставим } z = z_0 \Rightarrow f^{(m)}(z_0) = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_m = m! \cdot a_m. \quad \square$$

Определение 3.7.4. Пусть f бесконечно дифференцируема в точке z_0 .

Тогда ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ — ее ряд Тейлора в точке z_0 .

Определение 3.7.5. f — аналитическая в точке z_0 , если в окрестности точки z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Замечание. f — бесконечно дифференцируема \nRightarrow аналитичность.

Пример. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$

Проверим, что $f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{p_n(x)}{x^{3n}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$

Индукция. Переход $n \rightarrow n+1, x \neq 0$:

$$(f^{(n)}(x))' = (p_n(x)x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}})' = p'_n(x)x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(x)(-3n)x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(x)x^{-3n}3 \cdot x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_n(x)}{x^{3n+1}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} p_n\left(\frac{1}{y}\right) y^{3n+1} e^{-y^2} = 0$$

Есть бесконечная дифференцируемость.

Формула Тейлора при $x_0 = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$, но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$3. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ряд сходятся $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ сходятся $\forall x \in \mathbb{C}$.

Определение 3.7.6. Пусть $z \in \mathbb{C}$, тогда:

$$1) e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$2) \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$3) \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Формула Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Упражнение. Доказать, что:

$$1. \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$2. \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$3. \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$4. e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

$$4) \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ при } x \in (-1, 1).$$

$$\text{Доказательство. } \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} \stackrel{\text{геом. прогр.}}{=} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

□

$$5) \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ при } x \in (-1, 1).$$

$$\text{Доказательство. } \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{\text{геом. прогр.}}{=} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

□

$$6) (1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n + \dots \text{ при } x \in (-1, 1).$$

Доказательство. Пусть $(1+x)^p = T_n(x) + R_n(x)$. Надо доказать, что $T_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1+x)^p$, то есть $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Воспользуемся интегральной формулой для остатка: $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \underbrace{(1+t)^{p-n-1} p(p-1)\dots(p-n)}_{=f^{(n+1)}(t)} dt$

$$\begin{aligned} \text{Посмотрим на отношение: } \left| \frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} \right| &= \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-t)^{n+1} (1+t)^{p-n-2} p(p-1)\dots(p-n-1) dt}{\frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} p(p-1)\dots(p-n) dt} \right| = \frac{|p-n-1|}{n+1} \cdot \frac{\left| \int_0^x (x-t)^{n+1} (1+t)^{p-n-2} dt \right|}{\left| \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} dt \right|} \\ &= \frac{|p-n-1|}{n+1} \cdot \frac{\int_0^x |x-t|^{n+1} (1+t)^{p-n-2} dt}{\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{p-n-1} dt} = \frac{|p-n-1|}{n+1} \cdot \frac{\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{p-n-1} \cdot \frac{|x-t|}{1+t} dt}{\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{p-n-1} dt} \leq \frac{|p-n-1|}{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| < 1 \Rightarrow \text{члены} \end{aligned}$$

последовательности стремятся к 0.

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leq |x|$$

$$\text{Если } x < 0: (t-x) \leq (-x)(1+t) = -x - tx \Leftrightarrow t \leq -tx \Leftrightarrow -1 \leq x$$

□

$$\text{Пример. Частный случай: } p = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

$$7) \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{Доказательство. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

4.1 Дифференцируемые отображения

Определение 4.1.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$. Тогда f дифференцируема в точке a , если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.ч.

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Замечание. Если T существует, то оно определено однозначно.

Зафиксируем $h \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$: $f(a + th) = f(a) + T(th) + o(t) = f(a) + t \cdot Th + o(t)$.

$Th = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ (предел единственный \Rightarrow значение t на векторе определяется однозначно \Rightarrow отображение определяется однозначно)

Определение 4.1.2. Матрица линейного оператора T называется *матрицей Якоби для отображения* f и обозначается $f'(a)$ (теперь матрица f' – аналог производной).

Линейный оператор T называется *дифференциалом функции* f в точке a и обозначается $d_a f$.

Замечание. Дифференцируемость в точке a влечет непрерывность в точке a .

$$f(a + h) = \underset{\rightarrow f(a)}{f(a)} + \underset{\rightarrow T0=0}{Th} + \underset{\rightarrow 0}{o(\|h\|)} \text{ при } h \rightarrow 0$$

Замечание. **Важный частный случай:** координатные функции, из которых можно составить вектор.

$m = 1$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$.

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$$

Найдется такой $v \in \mathbb{R}^n$: $f(a + h) = f(a) + \langle v, h \rangle + o(\|h\|)$ при $h \rightarrow 0$.

Определение 4.1.3. Этот вектор v – *градиент функции* f в точке a . Обозначается $\text{grad } f(a)$ или $\nabla f(a)$ (∇ – символ Набла).

Пример.

1. Постоянное отображение f дифференцируемо во всех точках, $T = 0$.

2. Линейное отображение: $f(a + h) = f(a) + f(h)$, $T = f$.

Матрица Якоби – матрица этого отображения f .

Теорема 4.1.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, где $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow \mathbb{R}$ (координатные функции). Тогда f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f_j$ дифференцируема в точке $a \forall j = 1, \dots, m$.

Доказательство.

\Rightarrow . $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h) \cdot \|h\|$, где $\alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

$f_j(a+h) = f_j(a) + T_j h + \alpha_j(h) \cdot \|h\|$, где $T_j h$ – это j -ая координата Th , $\alpha_j(h)$ – j -ая координата $\alpha(h)$.

$$|\alpha_j(h)| \leq \sqrt{\alpha_1(h)^2 + \dots + \alpha_m(h)^2} = \|\alpha(h)\| \rightarrow 0.$$

\Leftarrow . $f_j(a+h) = f_j(a) + T_j h + \alpha_j(h) \cdot \|h\|$, составим из них равенство для векторов:

$$\alpha(h) = \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix} \text{ и надо доказать, что } \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0:$$

$$\|\alpha(h)\| = \sqrt{\alpha_1(h)^2 + \dots + \alpha_m(h)^2} \leq \|\alpha_1(h)^2\| + \dots + \|\alpha_m(h)^2\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

Следствие. Матрица Якоби f – матрица, составленная из градиентов координатных функций:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Определение 4.1.4. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, $h \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор. Тогда $\frac{\partial f}{\partial h} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ – производная f по направлению h в точке a .

Замечание.

$$1. \frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Доказательство. Зафиксируем единичный $h \in \mathbb{R}^n$.

По определению дифференцируемости f : $f(a+h) = f(a) + t \cdot Th + \alpha(th) \cdot \|h\| \Leftrightarrow f(a+th) - f(a) = Th + \alpha(th)$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot Th + \alpha(th)}{t \cdot \|h\|} = Th = d_a f \text{ (разделили на } \|h\| = 1)$$

Второе равенство – определение градиента.

□

$$2. \text{ Пусть } g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, g(t) := f(a+th).$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

images/17-05-1.png

Теорема 4.1.2. Экстремальное свойство градиента.

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \neq 0$. Тогда $\forall h \in \mathbb{R}^n$ единичного $-\|\nabla f(a)\| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \|\nabla f(a)\|$ и неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Замечание. Смысл: градиент задает то направление, в котором производная по направлению самая большая по модулю, то есть градиент – это направление наибоыстрейшего изменения функции.

Доказательство. $|\frac{\partial f}{\partial h}(a)| = |\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| = \|\nabla f(a)\|$ и неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство \Leftrightarrow вектора пропорциональны. \square

Определение 4.1.5. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, $f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда частной производной по x_k в точке a называется $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$, где $e_k =$

$$\begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_{k-1} \\ 1_k \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}.$$

Альтернативные обозначения: $f'_{x_k}(a)$, $\partial_k f(a)$, $D_k f(a)$.

Утверждение 4.1.1. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \nabla f(a), e_k \rangle$, то есть $\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.

(производная по направлению – градиент скалярно умножить на направление, а частная производная – это производная по направлению e_k)

Следствие. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$ и f дифференцируема в точке a . Тогда

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{Доказательство. } f'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$$

 \square

Пример. Пусть $f(x, y) = x^y$, $x, y > 0$.

Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} = ba^{b-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t} = a^b \ln a$$

Теорема 4.1.3. Линейность дифференциала.

Пусть $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g дифференцируемы в точке a . Тогда $f + g$ и λf дифференцируемы в точке a и:

$$d_a(f + g) = d_af + d_ag, \quad (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_af, \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

Доказательство. $f(a + h) = f(a) + d_af(h) + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$g(a + h) = g(a) + d_ag(h) + \beta(h)\|h\|$, где $\beta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$$\Rightarrow f(a + h) + g(a + h) = f(a) + g(a) + \underbrace{d_af(h) + d_ag(h)}_{\text{лин.}} + \underbrace{\alpha(h)\|h\| + \beta(h)\|h\|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

$$\Rightarrow \lambda f(a + h) = \lambda f(a) + \underbrace{\lambda d_af(h)}_{\text{лин.}} + \underbrace{\lambda \alpha(h)\|h\|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

□

Теорема 4.1.4. Дифференцируемость композиции.

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^l$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } D$ и $f(D) \subset E$. Если f дифференцируема в точке a и g дифференцируема в точке $f(a)$, то $g \circ f$ дифференцируема в точке a и $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_af$, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Доказательство. $f(a + h) = f(a) + \underbrace{d_af(h) + \alpha(h)\|h\|}_{:=k}$, где $\alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

$g(b + k) = g(b) + d_bg(k) + \beta(k)\|k\|$, где $\beta(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$.

Возьмем $k = d_af(h) + \alpha(h)\|h\|$. Тогда $f(a + h) = f(a) + k = b + k$.

$$g(f(a + h)) = g(b + k) = g(b) + d_bg(k) + \beta(k)\|k\| = g(b) + d_bg(d_af(h) + \alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| =$$

$$g(f(a)) + d_bg(d_af(h)) + \underbrace{d_bg(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\|}_{=o(\|h\|) \text{ ?}}$$

$d_bg(\alpha(h)\|h\|) = \|h\|d_bg(\alpha(h))$. Надо понять, что $d_bg(\alpha(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$:

$$\|d_bg(\alpha(h))\| \leq \|d_bg\| \cdot \underbrace{\|\alpha(h)\|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \Rightarrow \text{первое слагаемое маленькое.}$$

Осталось понять, что $\frac{\beta(k)\|k\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$:

$$\|k\| = \|d_af(h) + \alpha(h)\|h\| \leq \|d_af(h)\| + \|\alpha(h)\|h \leq \|d_af\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \cdot \|h\| = \|h\| \cdot (\underbrace{\|d_af\| + \|\alpha(h)\|}_{\text{огр.}}) \leq$$

$C \cdot \|h\|$ (как константа + что-то $\rightarrow 0$) \Rightarrow если $h \rightarrow 0$, то $k \rightarrow 0 \Rightarrow \beta(k) \rightarrow 0$.

$$\left\| \frac{\beta(k)\|k\|}{\|h\|} \right\| = \frac{\|k\|}{\|h\|} \cdot \|\beta(k)\| \leq C \cdot \|\beta(k)\| \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

В частности:

$$d_a(g \circ f) = d_bg \circ d_af$$

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

□

Теорема 4.1.5. Дифференцирование скалярной и векторной функции.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, λ и f дифференцируемы в точке a . Тогда λf дифференцируема в точке a и $d_a(\lambda f)(h) = d_a\lambda(h) \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot d_af(h)$.

Доказательство. $f(a + h) = f(a) + d_af(h) + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

$\lambda(a + h) = \lambda(a) + d_a\lambda(h) + \beta(h)\|h\|$, где $\beta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

$$\lambda(a + h)f(a + h) = \underbrace{\lambda(a)f(a)}_1 + \underbrace{\lambda(a)d_af(h)}_2 + \underbrace{d_a\lambda(h)f(a)}_3 +$$

$$\underbrace{d_a \lambda(h) d_a f(h) + \beta(h) \|h\| f(a) + \beta(h) \|h\| d_a f(h) + \alpha(h) \beta(h) \|h\|^2 + \lambda(a) \alpha(h) \|h\| + \alpha(h) \|h\| d_a \lambda(h)}_{\stackrel{?}{=} o(h)}$$

$$5. \underbrace{\beta(h)}_{\rightarrow 0} \underbrace{f(a)}_{const} \|h\| = o(\|h\|)$$

$$8. \underbrace{\alpha(h)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\lambda(a)}_{const} \|h\| = o(\|h\|)$$

$$7. \underbrace{\alpha(h) \beta(h)}_0 \|h\| \|h\| = o(\|h\|)$$

$$\|d_a f(h)\| \leq \|d_a f\| \cdot \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ и в частности ограничена.}$$

$$\|d_a \lambda(h)\| \leq \|d_a \lambda\| \cdot \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ и в частности ограничена.}$$

$$6. \underbrace{\beta(h)}_{\rightarrow 0} \underbrace{d_a f(h)}_{огр.} \|h\| = o(\|h\|)$$

$$9. \underbrace{\alpha(h)}_{\rightarrow 0} \underbrace{d_a \lambda(h)}_{огр.} \|h\| = o(\|h\|)$$

$$4. \|d_a \lambda(h) \cdot d_a f(h)\| = \|d_a \lambda(h)\| \cdot \|d_a f(h)\| \leq \|d_a \lambda\| \cdot \|d_a f\| \cdot \|h\|^2 = o(\|h\|) \quad \square$$

Теорема 4.1.6. Дифференцирование скалярного произведения векторнозначных функций.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a . Тогда $\langle f, g \rangle$ дифференцируемо в точке a и $d_a \langle f, g \rangle(h) = \langle d_a f(h), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(h) \rangle$.

Доказательство. $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^m f_k g_k \Rightarrow \langle f, g \rangle$ дифференцируемо в точке a по предыдущей теореме (как скалярные функции):

$$d_a \langle f, g \rangle(h) = \sum_{k=1}^m d_a (f_k g_k)(h) = \sum_{k=1}^m (d_a f_k(h) g_k(a) + f_k(a) d_a g_k(h)) = \langle d_a f(h), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(h) \rangle \quad \square$$

Замечание. Если $n = 1$, то формула упрощается (умножение числа на вектор): $\langle f(x), g(x) \rangle' = \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle$.

Теорема 4.1.7. Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \|f'(c)\|$.

Доказательство. Возьмем $\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) . Тогда по теореме Лагранжа для φ найдется $c \in (a, b)$, т.ч. $\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a) \varphi'(c) = (b - a) \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle$.

$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2 = (b - a) \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle \leq (b - a) \cdot \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\|$ и сократим $\|f(b) - f(a)\|$ (если был $f(b) = f(a)$, то изначальное неравенство было очевидно: справа 0, а слева что-то неотрицательное). \square

Замечание. Равенство может никогда не достигаться.

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad \|f'(x)\| = 1$$

4.2 Непрерывная дифференцируемость

Теорема 4.2.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$. Если все частные производные функции f непрерывны в точке a , то f дифференцируема в точке a .

Доказательство. Пусть $R(h) := f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k$. Надо доказать, что $R(h) = o(\|h\|)$ при $h \rightarrow 0$.

$$b_k = \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_k + h_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(b_{k-1})) \stackrel{(*)}{=}$$

images/24-05-1.png

$$a = b_0, \quad a+h = b_n \quad F_{k-1}(t) := f(b_{k-1} + th_k e_k)$$

$$f(b_k) - f(b_{k-1}) = F_{k-1}(1) - F_{k-1}(0) = (\text{по th Лагранжа}) = F'_{k-1}(\Theta_k) = (\text{производная композиции})$$

$\Theta_k \in (0,1)$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = h_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^n h_k \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)}_{\substack{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ = o(\|h\|) \\ \leq \|h\| \cdot \|\dots\|}} \right)}_{\substack{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ = o(\|h\|) \\ \leq \|h\| \cdot \|\dots\|}}$$

в точке a коэффициент перед каждым h_k стремится к 0)

$F_0(1) - F_0(0) = f(a + h_1 e_1) - f(a) = h \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + o(h_1)$ – определение дифференцируемости F_0 в точке a . \square

Замечание.

1. Теорема верна и без непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ в точке a . Достаточно только ее существования.
2. Обратное утверждение неверно. Дифференцируемость функции в точке a не гарантирует даже непрерывности в окрестности a , а также существования хоть каких-то частных производных.

$$\text{Пример. } f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если ровно одно из чисел } x \text{ и } y \text{ рационально;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

f дифференцируема в точке $(0, 0)$

$$f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$f(0, 0) = 0, \text{ линейное отображение } \equiv 0.$$

Определение 4.2.1. f непрерывно дифференцируема в точке a , если f дифференцируема в окрестности точки a и $\|d_x f - d_a f\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Теорема 4.2.2. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, f дифференцируема в окрестности точки a . Тогда f непрерывно дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывна в точке $a \forall i, j$.

Доказательство.

\Leftarrow . Проверим непрерывность:

$$\|d_x f - d_a f\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \underbrace{\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \right)^2}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} \rightarrow 0$$

$$f'(x) - f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow. \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \end{pmatrix} \right\| = \|(d_x f - d_a f)(e_i)\| \leq \underbrace{\|d_x f - d_a f\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|e_i\|}_{=1}, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Теорема 4.2.3. Непрерывная дифференцируемость сохраняется при линейной комбинации, скалярном произведении, композиции.

4.3 Частные производные высших порядков

Определение 4.3.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$ и в окрестности точки a существует $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \text{окр-ть точки } a \rightarrow \mathbb{R}$. Если у $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существует частная производная по x_j , то результат $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ — это вторая частная производная по x_j (нужно уточнение, по какой переменной).

Обозначения: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $f''_{x_i x_j}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $(f'_{x_i})'_{x_j}$.

$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}}$ — частная производная порядка r .

Замечание. Всего n^r производных r -ого порядка.

Пример. $f(x, y) = x^y$, где $x, y > 0$.

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1}, f'_y(x, y) = x^y \ln x$$

$$f''_{xx}(x, y) = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2}$$

$$f''_{yy}(x, y) = (x^y \ln x)'_y = \ln^2 x \cdot x^y$$

$$f''_{xy}(x, y) = (yx^{y-1})'_y = yx^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}$$

$$f''_{yx}(x, y) = (x^y \ln x)'_x = yx^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}$$

Заметим, что $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Пример. $f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$

$$f'_x(x, y) = y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, h) - f'_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f''_{yx}(0, 0) = 1 \text{ (меняется знак исходного выражения)} \Rightarrow f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$$

Теорема 4.3.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \text{Int } E$ и в окрестности точки (x_0, y_0) существуют f'_x , f'_y и f''_{xy} . Тогда если f''_{xy} непрерывна в точке (x_0, y_0) , то f''_{yx} существует в точке (x_0, y_0) и $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(s) := f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$ — дифференцируема, так как у f существует производная по первой координате.

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) &= h\varphi'(x_0 + \Theta h) \underset{\text{где } \Theta \in (0,1)}{=} h(f'_x(x_0 + \Theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \Theta h, y_0)) = (\text{теперь функция} \\ &\text{дифференцируема по второй координате}) \underset{\text{где } \tilde{\Theta} \in (0,1)}{=} hk f''_{xy}(x_0 + \Theta h, y_0 + \tilde{\Theta}k) = hk(f''_{xy}(x_0, y_0) + \\ &\alpha(h, k)), \text{ где } \alpha(h, k) \underset{(h,k) \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ при } (h, k) \text{ близких к } (0, 0): \left| \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{hk} - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon$$

$$\frac{\varphi(x_0)}{k} = \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \rightarrow f'_y(x_0, y_0)$$

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{\varphi(x_0 + h)}{k} - \frac{\varphi(x_0)}{k} \right) - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| \rightarrow \left| \frac{1}{h} (f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)) - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| \leq \varepsilon \text{ (перешли к пределу)}$$

$$\Rightarrow \text{при } h \text{ близких к нулю } \left| \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} = f''_{xy}(x_0, y_0) \\ = f''_{yx}(x_0, y_0) \text{ по опр.}$$

□

Упражнение. Если f'_x и f'_y определены в окрестности точки (x_0, y_0) и дифференцируемы в этой точке, то $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Определение 4.3.2. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D открыто. Тогда f — это r раз непрерывно дифференцируемая в D функция (r -гладкая функция в D), если все частные производные до r -ого порядка включительно существуют и непрерывны.

Обозначение: $f \in C^r(D)$.

Теорема 4.3.2. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D открыто, $f \in C^r(D)$ и (i_1, i_2, \dots, i_r) — перестановка (j_1, j_2, \dots, j_r) . Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_r}}$.

Доказательство. Любая перестановка получается с помощью какого-то количества транспозиций, то есть достаточно доказать для элементарных транспозиций: $(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, j_k, j_{k+2}, \dots, j_r)$.

$$\text{Пусть } g := \frac{\partial^{r-k-1} f}{\partial x_{j_{k+2}} \dots \partial x_{j_r}}.$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме: } \frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k+1}}} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}} \Rightarrow \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k-1}} \partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}} \\ \Rightarrow \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_r}} &= \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k-1}} \partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_r}}. \end{aligned}$$

□

Приложения частных производных

Определение 4.3.3. Мультииндекс $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, где k_1, k_2, \dots, k_n — неотрицательные числа.

Высота мультииндекса $|k| := k_1 + \dots + k_n$.

$$k! := k_1! \dots k_n!$$

Если $h \in \mathbb{R}^n$, то $h^k := h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n}$.

$$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{(\partial x_1)^{k_1} \dots (\partial x_n)^{k_n}}$$

Определение 4.3.4. *Полиномиальный (мультиномиальный) коэффициент* $\binom{|k|}{k_1, \dots, k_n} = \frac{|k|!}{k_1! \dots k_n!}$.

Количество способов покрасить $|k|$ шариков в n цветов так, что будет k_i шариков i -ого цвета.

$$\binom{|k|}{k_1} \cdot \binom{|k|-k_1}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{|k|-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}} = \frac{|k|!}{k_1!(|k|-k_1)!} \cdot \frac{(|k|-k_1)!}{k_2!(|k|-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(|k|-k_1-k_2)!}{k_3!(|k|-k_1-k_2-k_3)!} \cdot \dots = \frac{|k|!}{k_1!k_2!\dots k_n!} = \frac{|k|!}{k!}$$

Лемма 4.3.1. Пусть $f \in C^r(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $[x_0, x_0 + h] \subset D$, $F(t) := f(x_0 + th)$, $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $F \in C^r[0, 1]$ и $F^{(l)}(t) = \sum_{|k|=l} \binom{l}{k_1, \dots, k_n} f^{(k)}(x_0 + th) \cdot h^k$.

images/24-05-2.png

Доказательство. Пусть $G(t) = g(x_0 + th)$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$G'(t) = (g'_{x_1}(x_0 + th) \dots g'_{x_n}(x_0 + th)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n g'_{x_i}(x_0 + th) h_i$$

Применим это знание и будем брать производную $F^{(l)}$ как производную $(F^{(l-1)})'$.

$$F^{(l)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}(x_0 + th) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_l} = \sum_{|k|=l} \binom{|k|}{k_1, \dots, k_n} f^{(k)}(x_0 + th) h^k.$$

$k = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_j = \#\{i_p \mid i_p = j\}$

□

Теорема 4.3.3. Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $f \in C^{r+1}(D)$, $[a, x] \subset D$. Тогда существует $\Theta \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \Theta(x - a))}{k!} (x - a)^k.$$

Доказательство. $h = x - a$, $F(t) = f(a + th) \Rightarrow F \in C^{r+1}[0, 1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(1) = \sum_{l=0}^r \frac{F^{(l)}(0)}{l!} \cdot 1^l + \frac{F^{(r+1)}(\Theta)}{(r+1)!} \cdot 1^{r+1} = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} \sum_{|k|=l} \binom{l}{k_1, \dots, k_n} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|k|=r+1} \binom{r+1}{k_1, \dots, k_n} f^{(k)}(a + \Theta h) h^k$$

$$\Theta h) h^k \stackrel{(*)}{=} \sum_{l=0}^r \sum_{|k|=l} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \Theta h)}{k!} h^k.$$

$$(*) : \frac{1}{l!} \binom{l}{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{k!}$$

□

Замечание.

1. $\sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ — многочлен Тейлора степени r .

2. Если $r = 0$, то получаем аналог теоремы Лагранжа:

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a + \Theta(x - a))(x_i - a_i) = f(a) + \langle \nabla f(a + \Theta(x - a)), x - a \rangle$$

Теорема 4.3.4. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $f \in C^r(D)$, $a \in D$. Тогда при $x \rightarrow a$:

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o(\|x - a\|^r)$$

Доказательство. Пишем формулу с остатком в форме Лагранжа для $r - 1$:

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a + \Theta(x-a))}{k!} (x - a)^k = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k +$$

$$+ \underbrace{\sum_{|k|=r} \left(\frac{f^{(k)}(a + \Theta(x-a))}{k!} - \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \right) (x - a)^k}_{o(\|x-a\|^r)}$$

Пусть $h = x - a$: $f^{(k)}(a + \Theta h) - f^{(k)}(a) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Надо понять, что $|h^k| \leq \|h\|^r$:

$$|h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n}| \leq \|h\|^{k_1} \cdot \dots \cdot \|h\|^{k_n} = \|h\|^r.$$

□

Утверждение 4.3.1. Полиномиальная формула

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = \sum_{|k|=r} \binom{r}{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} x^k.$$

Доказательство. $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^r = g^r(x)$, где $g(x) = x_1 + \dots + x_n$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = r g^{r-1}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = r g^{r-1}(x)$$

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} x^k$$

□

4.4 Обратная и неявная функция

Определение 4.4.1. Пусть $\lambda \in (0, 1)$, $f : X \rightarrow X$. Тогда f – сжатие с коэффициентом λ , если $\forall x, y \in X \quad \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$.

Теорема 4.4.1. Теорема Банаха о сжатии.

Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \rightarrow X$ – сжатие с коэффициентом $\lambda \in (0, 1)$. Тогда существует единственная неподвижная точка (то есть такая точка, что $f(x) = x$).

Доказательство.

1. Единственность.

Пусть $f(x) = x$ и $f(y) = y$.

$$\text{Тогда } \rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) \xrightarrow{\lambda \in (0, 1)} \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

2. Существование.

Возьмем $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$.

Проверим, что x_n – фундаментальная последовательность, то есть имеет предел, который и будет искомой точкой.

$$\rho(x_n, x_{n+k}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_{n+k-1})) \leq \lambda \rho(x_{n-1}, x_{n+k-1}) \leq \lambda^2 \rho(x_{n-2}, x_{n+k-2}) \leq \dots \leq \lambda^n \rho(x_0, x_k) \leq \lambda^n \cdot \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda} \xrightarrow{\rightarrow 0} =_{const}$$

$$\rho(x_0, x_k) \leq \rho(x_0, x_1) + \underbrace{\rho(x_1, x_2)}_{\leq \lambda \rho(x_0, x_1)} + \dots + \underbrace{\rho(x_{k-1}, x_k)}_{\leq \lambda^{k-1} \rho(x_0, x_1)} \stackrel{\text{геом. прогр.}}{\leq} \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda}$$

Есть фундаментальность (так как можем сделать $\lambda^n \cdot \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda} < \varepsilon \Rightarrow \exists x_* := \lim x_n$).

$$f(x_*) = f(\lim x_n) \stackrel{f \text{ не пр.}}{=} \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x_* \Rightarrow x_* = f(x_*)$$

□

Замечание. Не просто доказали, но еще и предъявили алгоритм – взять произвольную точку и начать итерироваться: применять f к точке, к образу... Тогда с хорошей скоростью будет сходимость к неподвижной точке.

Можно, конечно, улучшить скорость, взяв начальную точку получше, но глобально и так будет очень даже неплохо.

Замечание. Если x_* – неподвижная точка и $x_n \in X$, то $\rho(x_*, x_n) \leq \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda}$.

$$\underbrace{\rho(x_n, x_{n+k})}_{\rightarrow x_*} \leq \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda} \text{ и устремим } k \text{ к } +\infty.$$

$$\underbrace{\quad}_{\rightarrow \rho(x_n, x_*)}$$

Следствие. Пусть X – полное метрическое пространство, $f, g : X \rightarrow X$ сжатия с коэффициентом $\lambda \in (0, 1)$, $f(x) = x$, $g(y) = y$. Тогда $\rho(x, y) \leq \frac{\rho(f(x), g(y))}{1-\lambda}$.

Доказательство. $\rho(x, y) = \rho(f(x), g(y)) \leq \rho(f(x), g(x)) + \underbrace{\rho(g(x), g(y))}_{\leq \lambda \rho(x, y)} \leq \lambda \rho(x, y) + \rho(f(x), g(x))$

□

Определение 4.4.2. Задача Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Сейчас мы поймем, что если у нас f – достаточно хорошая функция, то задача Коши обязательно имеет единственное решение (правда, только локально, глобально может не быть).

Теорема 4.4.2. Теорема Пикара.

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, $D \subset \mathbb{R}^2$ открытое, $(x_0, y_0) \in D$ и $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq M \cdot |y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D$ (то есть при изменении второй координаты функция меняется не сильно). Тогда при некотором $\delta > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ существует единственная

дифференцируемая функция φ , являющаяся решением задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Доказательство. Предъявим сжатие, для которого φ является неподвижной точкой.

$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t))dt$ – подходит под задачу Коши (дифференцируема функция, значение подходит).

Возьмем $\bar{B}_r(x_0, y_0) \subset D$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ найдется $K : |f(x, y)| \leq K$ при $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$.

Выберем $\delta > 0$ так, что:

1. $M\delta < 1$.
2. Если $|x - x_0| \leq \delta$ и $|y - y_0| \leq K\delta$, то $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$.

images/31-05-1.png

Рассмотрим $C_* := \{\varphi \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mid |\varphi(x) - y_0| \leq K\delta\} \subset C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

C_* – полное нормированное пространство, $\|\varphi\| = \max_{t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |\varphi(t)|$.

Определим $T : C_* \rightarrow C_*$: $T(\varphi) = \psi$, где $\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t))dt$.

Проверим, что T – это сжатие.

$$|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t))dt - \int_{x_0}^x f(t, \tilde{\varphi}(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^x \underbrace{|f(t, \varphi(t)) - f(t, \tilde{\varphi}(t))|}_{\leq M|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| \leq M\|\varphi - \tilde{\varphi}\|} dt \leq M\delta\|\varphi - \tilde{\varphi}\| \Rightarrow$$

получилось сжатие с коэффициентом $M\delta < 1$.

Тогда по теореме Банаха есть единственная неподвижная точка, которая и является решением задачи Коши. □

Замечание. Решение задачи Коши существует только локально:

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad y(x) = \frac{1}{x} \text{ определено только на } (0, +\infty).$$

То есть если $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$, то на всем отрезке определить не удастся.

Теорема 4.4.3. Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ линейный оператор: $\|Ax\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $m > 0$. Тогда A обратим и $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

Доказательство. Для обратимости нужна инъективность, то есть проверим, что нет точки $\neq 0$, переходящей в 0.

Если $Ax = 0$, то $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|Ax\| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A$ обратимо.

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leq \frac{1}{m}, \text{ так как } \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leq \frac{1}{m} \quad \square$$

Теорема 4.4.4. Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.

Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ обратимый линейный оператор, $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда B обратим,

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B - A\|} \text{ и } \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^{-1} \|B - A\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B - A\|}$$

Доказательство. $\|Bx\| = \|Ax + (B - A)x\| \geq \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\|x\| = \|x\| (\underbrace{\|A^{-1}\|^{-1} \|B - A\|}_{=m})$ и подставляем m в предыдущую теорему.

$$\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \geq \|A^{-1}(Ax)\| = \|x\|$$

Последний пункт: $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$ — очевидно, так как норма композиции не превосходит композиции норм. \square

Теорема 4.4.5. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в $B_r(a)$ и $\|f'(x)\| \leq C \forall x \in B_r(a)$. Тогда $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$.

Доказательство. $\varphi(t) := \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x) \rangle$

Любой отрезок между x и y целиком лежит в круге, то есть при $t \in [0, 1]$ функция определена,

images/31-05-2.png

$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) \stackrel{\text{th Лагранжа}}{=} \varphi'(\xi), \xi \in (0, 1)$ (φ — дифференцируема как композиция, функция от одной переменной)

$$\varphi'(\xi) = \langle f'(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x), f(y) - f(x) \rangle \leq \|f'(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x)\| \cdot \|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f'(x + \xi(y - x))\|}_{\leq C} \cdot \|y - x\| \cdot \|f(y) - f(x)\| \quad \square$$

Теорема 4.4.6. Теорема об обратной функции.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0)$, f непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 , $A := f'(x_0)$ обратимо. Тогда существует U и V окрестности точек x_0 и y_0 : $f : U \rightarrow V$ обратима и $f^{-1} : V \rightarrow U$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $G_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$.

Выберем $\bar{B}_r(x_0)$ т.ч. $\|A^{-1}\| \|A - f'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ при $x \in \bar{B}_r(x_0)$ (так как $\|A^{-1}\| = \text{const}$ и f непрерывно дифференцируема, то при $x \rightarrow x_0$ мы можем сделать норму маленькой).

Тогда $f'(x)$ обратимо при $x \in \bar{B}_r(x_0)$ (по теореме).

$$G'_y(x) = E + A^{-1}(-f'(x)) = E - A^{-1} \cdot f'(x)$$

$$\|G'_y(x)\| = \|A^{-1}(A - f'(x))\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - f'(x)\| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \|G'_y(x)\| \leq \frac{1}{2} \text{ при } \forall x \in \bar{B}_r(x_0) \Rightarrow \|G'_y(x) - G'_y(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\| \text{ при } \forall x, \tilde{x} \in \bar{B}_r(x_0) \Rightarrow G_y - \text{сжатие с коэффициентом } \frac{1}{2}.$$

Хотим понять, что круг перейдет в круг.

$$\|G_y(x) - x_0\| \leq \|G_y(x_0) - x_0\| + \|G_y(x) - G_y(x_0)\| \leq \underbrace{\|A^{-1}(y - f(x_0))\|}_{\leq \|A^{-1}\| \cdot \|y - f(x_0)\| = \|A^{-1}\| \cdot \|y - y_0\|} + \underbrace{\frac{1}{2}\|x - x_0\|}_{\leq \frac{r}{2} \text{ при } x \in \bar{B}_r(x_0)}$$

Можно выбрать $B_R(y_0)$, т. ч. $\forall y \in B_R(y_0) \quad \|A^{-1}\| \cdot \|y - y_0\| < \frac{r}{2} \Rightarrow \|G_y(x) - x_0\| < r$.

То есть если $y \in B_R(y_0)$ (y близко к y_0), то $G_y(\bar{B}_r(x_0)) \subset B_r(x_0) \Rightarrow$ у G_y есть единственная неподвижная точка $x_y \in B_r(x_0)$:

$x_y = G_y(x_y) = x_y + A^{-1}(y - f(x_y)) \Leftrightarrow A^{-1}(y - f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x_y) = y \Leftrightarrow f(\bar{B}_r(x_0)) \supset \bar{B}_R(y_0)$
 $(\Leftrightarrow, \text{ так как есть инъективность в силу единственности неподвижной точки})$

Определим окрестности: $V := \bar{B}_R(y_0)$, $U := f^{-1}(V)$, $f : U \rightarrow V$ биекция

Проверяем непрерывность f^{-1} . Пусть $f(x) = y$ и $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y})\| = \|x - \tilde{x}\| = \|G_y(x) - G_{\tilde{y}}(\tilde{x})\| \leq 2\|G_y(x) - G_{\tilde{y}}(x)\| = 2\|(x + A^{-1}(y - f(x))) - (x + A^{-1}(\tilde{y} - f(x)))\| = 2\|A^{-1}(y - \tilde{y})\| \leq 2\|A^{-1}\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \Rightarrow \text{если } y \text{ близки, то и } x \text{ близки.} \quad \square$$

Теорема 4.4.7. Теорема о дифференцируемости обратного отображения.

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо, $f(x_0) = y_0$, $A := f'(x_0)$ обратимо, U и V окрестности точек x_0 и y_0 , т. ч. $f : U \rightarrow V$ и $f^{-1} : V \rightarrow U$ непрерывно. Тогда f^{-1} дифференцируемо в точке y_0 .

Доказательство. $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

$$k := f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h)\|h\|$$

$$\|Ah\| \geq \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}, \text{ тогда } k \geq \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\|h\| \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\right)}_{>0} \cdot \|h\| \Rightarrow \text{если } k \rightarrow 0, \text{ то и } h \rightarrow 0.$$

$$f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0) = x_0 + h - x_0 = h = A^{-1} \underbrace{(Ah + \alpha(h)\|h\|)}_{=k} - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = A^{-1}k - \underbrace{A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)}_{=o(\|k\|)}, \text{ так как } \|h\| \leq C\|k\| \quad \square$$

Следствие. В условиях теоремы об обратной функции если f непрерывно дифференцируема, то f^{-1} также непрерывно дифференцируема.

Следствие. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $f'(x)$ обратимо $\forall x \in D$. Тогда $\forall G \subset D$ открытого $f(G)$ открыто.

Доказательство. Возьмем $y_0 \in f(G) \Rightarrow \exists x_0 \in G$ т.ч. $f(x_0) = y_0$. Применим теорему об обратной функции: $\exists U$ и V окрестности точек x_0 и y_0 , т.ч. $f : U \rightarrow V$ биекция $\Rightarrow V = f(U) \subset f(G) \Rightarrow y_0$ – внутренняя точка $f(G) \Rightarrow f(G)$ открыта. \square

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Утверждение 4.4.1. Пусть $A : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ линейный оператор, т.ч. $A(h, 0) = 0 \Rightarrow h = 0$. Тогда уравнение $A(x, y) = 0 \forall y \in \mathbb{R}^m$ имеет единственное решение.

Доказательство. $h \in \mathbb{R}^n \rightarrow A(j, 0) \in \mathbb{R}^n$ биекция, так как это инъекция (0 переходит только в 0) + размерности совпадают.

$$A(x, y) = 0 \Leftrightarrow A(x, 0) = -A(0, y), \text{ так как } (x, y) = (x, 0) + (0, y).$$

$A(x, 0)$ – биекция \Rightarrow существует единственный y . \square

Пример. $x^2 + y^2 = 1$

images/07-06-1.png

Нас интересует задание графика функции. Можем сделать это для некоторых точек в некоторых окрестностях, причем где-то мы получим графике $y(x)$, где-то – $x(y)$, а где-то – и то, и то.

Зависит все от матрицы из производных:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$f'(x, y) = (2x, 2y)$$

Посмотрим на какую-то точку:

$$f'(1, 0) = (2, 0)$$

$(2 \ 0) \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow h = 0$ – выполнено, то есть $x(y)$ есть по аналогии с линейной ситуации.

$(2 \ 0) \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$ – всегда \Rightarrow функция $y(x)$ не получится, нет нужного линейного свойства.

Неявная функция – функции, которые получаются в качестве решения уравнения в окрестности непрерывности (те самые функции, графики которых мы нарисовали).

Теорема 4.4.8. Теорема о неявной функции.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ открытое, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и $f(a, b) = 0$, $A := f'(a, b)$ и A удовлетворяет условию: $A(h_0) = 0 \Rightarrow h_0 = 0$. Тогда существует W – окрестность точки b и единственная $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n : g(b) = a$, $f(g(y), y) = 0 \ \forall y \in W$ и эта функция непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Пусть $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $F(x, y) = (f(x, y), y)$ непрерывно дифференцируема.

$$F'(a, b) = \begin{pmatrix} f'(a, b) \\ 0 \ E \end{pmatrix}$$

Здесь будет обратимость: $F'(a, b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(h, k) \\ k \end{pmatrix}$, если это $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $k = 0$ и $A(h, 0) = 0 \Rightarrow h = 0$, то есть умножение на $F'(a, b)$ – это инъективное отображение $\Rightarrow F'(a, b)$ обратима.

Тогда по теореме об обратной функции $\exists U$ – окрестность (a, b) и V – окрестность $(0, b)$, т.ч. $F : U \rightarrow V$ биекция и $G := F^{-1} : V \rightarrow U$ непрерывно дифференцируема.

Как действует эта функция:

$$G(z, w) = (\varphi(z, w), w) \text{ (вторая координата должна не меняться)}$$

$$\Rightarrow f(\varphi(z, w), w) = z$$

Возьмем W – окрестность точки b , т.ч. $\{0\} \times W \subset V$. Тогда $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.ч. $g(w) := \varphi(0, w)$.

То, что надо, так как $f(g(w), w) = 0$ и $g(b) = a$, $\varphi(0, b) = a$

Единственность следует из биективности F : $f(x, y) = f(\tilde{x}, y) \Rightarrow F(x, y) = F(\tilde{x}, y) \stackrel{F \text{ вз. одн.}}{\Rightarrow} (x, y) = (\tilde{x}, y) \Rightarrow x = \tilde{x}$ □

4.5 Экстремумы функций

Определение 4.5.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E$.

a – точка локального минимума, если $\exists U$ -окрестность точки a , т.ч.

$$\forall x \in E \cap U \quad f(x) \geq f(a).$$

a – точка строгого локального минимума, если $\exists U$ -окрестность точки a , т.ч.

$$\forall x \in E \cap U \quad f(x) > f(a).$$

a – точка локального максимума, если $\exists U$ -окрестность точки a , т.ч.

$$\forall x \in E \cap U \quad f(x) \leq f(a).$$

a – точка строгого локального максимума, если $\exists U$ -окрестность точки a , т.ч.

$$\forall x \in E \cap U \quad f(x) < f(a).$$

Определение 4.5.2. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E$.

a – точка экстремума, если это точка локального минимума или точка локального максимума.

a – точка строгого экстремума, если это точка строгого локального минимума или точка строгого локального максимума.

Теорема 4.5.1. Необходимое условие экстремума.

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, a – точка экстремума функции f . Тогда если существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$. В частности, если f дифференцируема в точке a , то $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$, то есть $\nabla f(a) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности a – точка максимума.

Пусть $g(t) := f(t, a_1, a_2, \dots, a_n)$ задана в окрестности точки a_1 .

a_1 точка локального максимума для функции g : $g(a_1) \geq g(t) \quad \forall t$ в некоторой окрестности a_1 .

images/07-06-2.png

Если существует $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, то g дифференцируема в точке $a_1 \Rightarrow g'(a_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$ (необходимое условие для функции от одной переменной). □

Определение 4.5.3. a – стационарная точка функции f , если $\nabla f(a) = 0$.

Замечание. Пусть f дважды дифференцируема и a стационарная точка.

$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2)$ – формула Тейлора в стационарной точке.

Определение 4.5.4. Квадратичная форма $Q(h) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}h_ih_j$. Считают, что $c_{ij} = c_{ji}$.

$$C = (c_{ij})_{i,j=1}^n, \quad Q(h) = \langle Ch, h \rangle$$

Определение 4.5.5. Q – положительно определенная квадратичная форма, если $Q(h) \geq 0 \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Q – строго положительно определенная квадратичная форма, если $Q(h) > 0 \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$.

Определение 4.5.6. Q – отрицательно определенная квадратичная форма, если $Q(h) \leq 0 \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Q – строго отрицательно определенная квадратичная форма, если $Q(h) < 0 \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$.

Лемма 4.5.1. Пусть Q строго положительно определенная квадратичная форма. Тогда существует $c > 0$, т.ч. $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad Q(h) \geq c\|h\|^2$.

Доказательство. $Q(h) = \langle Ch, h \rangle$ – непрерывная функция.

Рассмотрим ее на единичной сфере $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ – компакт $\Rightarrow Q$ достигает наименьшего значения на S . Пусть в точке $y \in S : Q(x) \geq Q(y) > 0 \forall x \in S$.

Проверим, что $c = Q(y)$ подходит.

$Q(h) = \langle Ch, h \rangle = \|h\|^2 \langle C \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \rangle$ (вытащили по линейности константу) $\geq \|h\|^2 Q(\frac{h}{\|h\|})$, так как $\frac{h}{\|h\|} \in S$.

Если $h = 0$, то неравенство очевидно. □

Теорема 4.5.2. Достаточные условия экстремума.

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, a – стационарная точка, f дважды дифференцируема,

$$Q(h) := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j. \text{ Тогда:}$$

1. Если Q строго положительно определена, то a точка строгого локального минимума.
2. Если Q строго отрицательно определена, то a точка строгого локального максимума.
3. Если a точка нестрогого локального минимума, то Q нестрого положительно определена.
4. Если a точка нестрогого локального максимума, то Q нестрого отрицательно определена.

Доказательство. $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2)$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2)$$

1. По лемме $Q(h) \geq c\|h\|^2 \Rightarrow f(a+h) - f(a) \geq \frac{c}{2}\|h\|^2 + o(\|h\|^2) = \underbrace{\|h\|^2}_{>0} \left(\underbrace{\frac{c}{2} + o(1)}_{>0 \text{ при } h \text{ близких к } 0} \right)$ (так как стремится $\frac{c}{2} > 0$)

3. Зафиксируем h : $f(a + th) - f(a) = \frac{1}{2}Q(th) + o(t^2) = t^2\frac{1}{2}Q(h) + o(t^2)$

$$\frac{1}{2}Q(h) \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(a + th) - f(a)}{t^2}}_{\substack{\geq 0 \\ > 0}} \geq 0 \Rightarrow Q(h) \geq 0$$

□

Пример. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 36xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 36y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 36x \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$\begin{cases} x^3 = 9y & y = \frac{x^3}{9} \\ y^3 = 9x & 9x = y^3 = (\frac{x^3}{9})^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), (3, 3), (-3, -3) \text{ удовлетворяют}$
необходимому условию экстремума.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -36 \quad \begin{pmatrix} 12x^2 & -36 \\ -36 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 & -3 \\ -3 & y^2 \end{pmatrix}$$

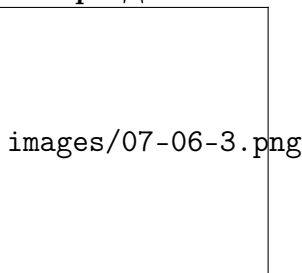
$$1. \quad (0, 0) \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$$

Нет знакоопределенности \Rightarrow не точка экстремума.

$$2. \quad (3, 3) \text{ и } (-3, -3) \quad \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = 81 - 9 > 0$$

Положительно определена \Rightarrow точка строгого локального минимума.

Утверждение 4.5.1. Критерий Сильвестра.



$$1. \quad c_{11} > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} > 0$$

...

\Leftrightarrow строгая положительная определенность.

2. $c_{11} < 0$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} < 0$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} < 0$$

...

\Leftrightarrow строгая отрицательная определенность.

Определение 4.5.7. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ открытое, $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $\Phi(a) = 0$. Тогда:

1. a точка *условного локального минимума* при условии $\Phi(x) = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a , т.ч. $\forall x \in U$, удовлетворяющего условию $\Phi(x) = 0$, $f(x) \geq f(a)$.
2. a точка *строго условного локального минимума* при условии $\Phi(x) = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a , т.ч. $\forall x \in U$, $x \neq a$, удовлетворяющего условию $\Phi(x) = 0$, $f(x) > f(a)$.

Теорема 4.5.3. Метод неопределенных множителей Лагранжа

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема, $a \in D$, $\Phi(a) = 0$, D открытое.

Если a точка *условного экстремума* (при условии $\Phi(x) = 0$), то $\nabla f(a)$, $\nabla \Phi_1^{(a)}$, ..., $\nabla \Phi_m^{(a)}$ линейно зависимы.

Замечание.

1. Пусть $\nabla \Phi_1(a)$, ..., $\nabla \Phi_m(a)$ линейно независимы. Тогда $\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(a) + \dots + \lambda_m \nabla \Phi_m(a)$.
Эти λ_i – неопределенные коэффициенты Лагранжа.
2. Что значит линейная независимость $\nabla \Phi_1(a)$, ..., $\nabla \Phi_m(a)$? Это строки матрицы $\Phi'(a)$, то есть ранг матрицы $\Phi'(a)$ максимально возможный.

Хотим доказать, что если ранг $\Phi'(a)$ максимально возможный, a точка *условного экстремума*, то $\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(a) + \dots + \lambda_m \nabla \Phi_m(a)$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть минор по последним столбцам у $\Phi'(a)$ невырожденный:

$$\Phi'(a)(0, h) = 0 \Rightarrow h = 0$$

$a = (b, c)$. Тогда по теореме о неявной функции $\exists W$ окрестность точки b , $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема, т.ч. $\Phi(x, g(x)) = 0 \forall x \in W$.

Рассмотрим функцию $\underbrace{h(x)}_{\leq h(b)=f(b, g(b))} := \underbrace{f(x, g(x))}_{\leq f(a)}$. Тогда b – локальный экстремум функции h (для определенности рассматриваем условный максимум).

Тогда по необходимому условию экстремума $h'(b)$ – нулевая матрица.

h – композиция f и $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$. $0 = h'(b) = f'(a) \begin{pmatrix} E \\ g'(b) \end{pmatrix} = (f'_x(a) f'_y(a)) \begin{pmatrix} E \\ g'(b) \end{pmatrix} = f'_x(a) + f'_y(a) g'(b)$

строка

$\Phi(x, g(x)) \equiv 0 \Rightarrow \Phi'_x(a) + \Phi'_y(a) g'(b) = 0$ матрица

Возьмем $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

$$\lambda \Phi'_x(a) + \lambda \Phi'_y(a) g'(b) = 0 \Rightarrow \underbrace{(f'_x(a) - \lambda \Phi'_x(a))}_{=0} + \underbrace{(f'_y(a) - \lambda \Phi'_y(a))}_{=0} g'(b) = 0$$

Нужно так подобрать λ , что $f'_y(a) - \lambda \Phi'_y(a) = 0 \Rightarrow \lambda \Phi'_y(a) = f'_y(a)$ □

Определение 4.5.8. $f - \lambda \Phi = f - \lambda_1 \Phi_1 - \dots - \lambda_m \Phi_m$ – функция Лагранжа.

Замечание. Условие из метода множителей Лагранжа можно записать так: $\nabla(f - \lambda \Phi)(a) = 0$.

Пример. Наибольшее и наименьшее значение квадратичной формы на сферах

A – симметричная матрица, $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$, $\|x\|^2 = 1$

$$F(x) = Q(x) = \lambda(\|x\|^2 - 1) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \lambda = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda$$

В точках условного экстремума $\nabla F = 0$.

$$m = 1: \Phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1, \Phi'(x) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i + \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - \lambda \cdot 2x_k = 2 \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i - 2\lambda x_k = 0 \Rightarrow \lambda - \text{собственное число матрицы,}$$

x_k – соответствующий единичный собственный вектор

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$$

Теорема 4.5.4. Наибольшее (наименьшее) значение квадратичной формы $Q(h) = \langle Ah, h \rangle$ (A – симметричная матрица) на единичной сфере – это наибольшее (наименьшее) собственное число матрицы. Они достигаются на соответствующих единичных собственных векторах.

Следствие. $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda - \text{собственное число матрицы } A^T A\}$

$$\text{Доказательство. } \|A\|^2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax \rangle = \max_{\|x\|=1} \langle A^T A x, x \rangle$$

□