

Содержание

9. Теория меры	2
9.1 Система множеств	2
9.2 Объем и мера	7
9.3 Продолжение меры	12

9. Теория меры

9.1 Система множеств

Обозначение:

Дизъюнктные множества:

1. $A \sqcup B := A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$
2. $\bigsqcup_{k=1}^n A_k := \bigcup_{k=1}^n A_k$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$

Определение 9.1.1. $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – разбиение множества E , если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha) \text{ и } X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$$

Определение 9.1.2. \mathcal{A} – система подмножеств X :

δ_0 . Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.

σ_0 . Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$.

δ . Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

σ . Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Замечание. Из δ следует δ_0 и из σ следует σ_0 (так как δ и σ подразумевают более сильные ограничения на структуру).

Определение 9.1.3. Система множества *симметрична*, если $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Определение 9.1.4. Система множества \mathcal{A} – *алгебра*, если она симметрична, $\emptyset \in \mathcal{A}$, есть свойства δ_0 и σ_0 .

Определение 9.1.5. Система множества \mathcal{A} – σ -*алгебра*, если она симметрична, $\emptyset \in \mathcal{A}$, есть свойства δ и σ .

Утверждение 9.1.1. Если \mathcal{A} симметричная система, то $\sigma_0 \Leftrightarrow \delta_0$ и $\sigma \Leftrightarrow \delta$.

Доказательство. $X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cup (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cap B)} = A \cap B$ и $X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cap (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cup B)} = A \cup B$ □

Замечание. Если \mathcal{A} – σ -алгебра, то \mathcal{A} – алгебра.

Свойства алгебры множеств:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $\underbrace{A \setminus B}_{A \cap (X \setminus B)} \in \mathcal{A}$.
3. Если $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k$ и $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$ (по индукции).

Пример.

1. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \{\text{все огранич. мн-ва и их дополнения}\}$

(пустое есть, для любого множества есть дополнение, пересечение двух ограниченных ограничено, пересечение ограниченного с каким-то ограничено и пересечение дополнений – это дополнение объединений, а объединение ограниченных ограничено)

\mathcal{A} – алгебра, но не σ -алгебра.

2. 2^X – σ -алгебра

3. $Y \subset X$, \mathcal{A} – алгебра (σ -алгебра) подмножеств X , тогда:

$\mathcal{B} := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ – алгебра (σ -алгебра) – *индуцированная алгебра*

Доказательство. $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (X \setminus A)$

Проверили, что взяли какую-то алгебру и пересекли с конкретным множеством, то структура сохранится.



□

4. Пусть \mathcal{A}_α – алгебры (σ -алгебры). Тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ -алгебра).

Доказательство. Пустое лежало везде, поэтому оно осталось в пересечении. Само пересечение, очевидно, тоже есть.

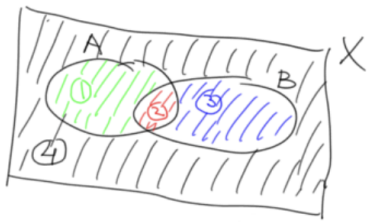
Если $A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$, то $A, B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$

□

5. Пусть есть $A, B \subset X$.

Вопрос: из чего состоит наименьшая алгебра, содержащая A и B ?

Ответ: $\emptyset, X, A, B, A \cap B, A \cup B, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B), A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$



Теорема 9.1.1. Пусть \mathcal{E} – система подмножеств X . Тогда существует наименьшая по включению σ -алгебра \mathcal{A} , содержащая \mathcal{E} .

Доказательство. 2^X – σ -алгебра, содержащая \mathcal{E} .

Пусть \mathcal{A}_α – всевозможные σ -алгебры, содержащие \mathcal{E} .

$\mathcal{B} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – σ -алгебра, $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E} \forall \alpha$.

Доказали существование. □

Определение 9.1.6. Такая σ -алгебра – борелевская оболочка \mathcal{E} . Обозначается как $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Определение 9.1.7. Пусть $X = \mathbb{R}^m$, \mathcal{E} – всевозможные открытые множества. Борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}^m := \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Замечание. $\mathcal{B}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$ (имеют разные мощности: \mathcal{B}^m – континуум, $2^{\mathbb{R}^m}$ – больше континуума)

Определение 9.1.8. \mathcal{R} – кольцо подмножеств X , если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

Замечание. Если \mathcal{R} – кольцо и $X \in \mathcal{R}$, то \mathcal{R} – алгебра.

Определение 9.1.9. \mathcal{P} – полукольцо подмножеств X , если:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow$ существуют $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in \mathcal{P}$ т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо



Лемма 9.1.1. $\bigcup A_k = \bigsqcup (A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$

Доказательство. Проверяем « \supset »: $B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \subset A_k \Rightarrow \bigcup A_k \supset \bigcup B_k$

Проверяем, что B_k дизъюнкты: $B_n \subset A_n \setminus \underbrace{A_k}_{\supset B_k}$ при $n > k \Rightarrow B_n \cup B_k = \emptyset$

Проверяем « \subset »: берем $x \in \bigcup A_k$, $n := \min\{j \mid x \in A_j\} \Rightarrow x \in B_n = \underbrace{A_n}_{x \in} \setminus \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j}_{x \notin} \Rightarrow x \in \bigcup B_k$. □

Теорема 9.1.2. Свойства полукольца:

Пусть $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$, где \mathcal{P} – полукольцо. Тогда:

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ для некоторых $Q_j \in \mathcal{P}$.
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ для некоторых $Q_{kj} \in \mathcal{P}$, т.ч. $Q_{kj} \subset P_k$.
3. Во 2 пункте можно вместо n написать ∞ .

Доказательство.

1. Индукция по n . База – определение. Переход $n - 1 \rightarrow n$

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \underbrace{\left(P \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k \right) \setminus P_n}_{\text{инд. пр.} = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j} = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^m \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j \right) \stackrel{\text{по 1}}{=} \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \Rightarrow Q_{kj} \subset P_k$$

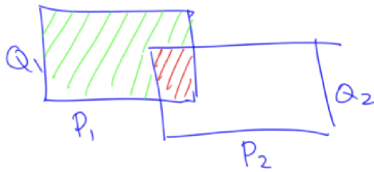
□

Теорема 9.1.3. Декартово произведение полуколец

Пусть \mathcal{P} – полукольцо подмножеств мн-ва X , \mathcal{Q} – полукольцо подмножеств мн-ва Y .

Тогда конструкция $\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – полукольцо подмножеств $X \times Y$.

Доказательство. Пусть $P_1 \times Q_1$ и $P_2 \times Q_2 \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2) = (P_1 \cap P_2) \times (Q_1 \cap Q_2)$
 $(P_1 \times Q_1) \setminus (P_2 \times Q_2) = \underbrace{\left(P_1 \setminus P_2 \right)}_{\text{диз. об. эл-в } \mathcal{P}} \times \underbrace{Q_1}_{\in \mathcal{Q}} \sqcup \underbrace{(P_1 \cap P_2)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{(Q_1 \setminus Q_2)}_{\text{диз. об. эл-в } \mathcal{Q}}$

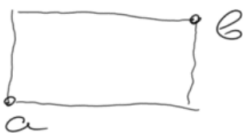


□

Замечание. Полукольцо – это структура, которая сохраняется при взятии декартового произведения (в отличие от алгебры и σ -алгебры).

Определение 9.1.10. Открытый параллелепипед (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$(a, b) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$$

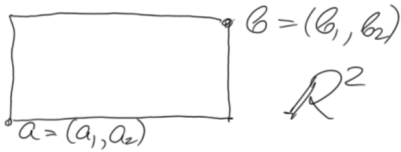


Определение 9.1.11. Замкнутый параллелепипед $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$$

Определение 9.1.12. Ячейка $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$(a, b] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$$



Замечание. $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$

Утверждение 9.1.2. Непустая ячейка – пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающих последовательностей замкнутых параллелепипедов.

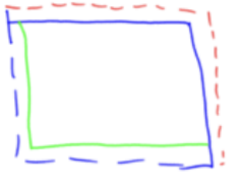
Доказательство. $(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$

Рассмотрим открытые параллелепипеды $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \times \dots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$P_{n+1} \subset P_n$, $P_n \supset (a, b]$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$

Рассмотрим замкнутые параллелепипеды $A_n := [a_1 - \frac{1}{n}, b_1] \times [a_2 - \frac{1}{n}, b_2] \times \dots \times [a_m - \frac{1}{n}, b_m]$

$A_{n+1} \supset A_n \subset (a, b]$, $\bigcup A_n = (a, b]$



□

Обозначение:

1. \mathcal{P}^m – семейство ячеек в \mathbb{R}^m (в т.ч. и пустое множество).
2. $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ – семейство ячеек в \mathbb{R}^m , у которых все координаты вершин рациональны.

Теорема 9.1.4. Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ представляется в виде дизъюнктного объединения счетного числа ячеек, замыкания которых $\subset G$. Более того, можно считать, что координаты всех вершин всех ячеек рациональны.

Доказательство. $x \in G \xrightarrow{G \text{ откр.}} x \in \overline{B}_r(x) \subset G$

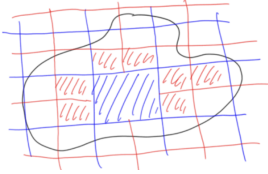
Найдется ячейка R_x , т.ч. $x \in R_x$, координаты R_x рациональны и $\text{Cl } R_x \subset G$ (Cl содержится в $\overline{B}_r(x)$, которое содержится в G).

Выкинем все повторы и получим счетное число ячеек, объединение которых (не дизъюнктное) равно G . По свойству полукольца можно это объединение сделать дизъюнктным.



□

Замечание. Явный алгоритм.



Нарезаем на сетку. Те ячейки, которые попали – берем, иначе – половином и снова смотрим, какие из ячеек попали, а какие нет.

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \stackrel{1)\subset}{=} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \stackrel{2)\subset}{=} \mathcal{B}^m \stackrel{3)\subset}{=}$

Доказательство.

$$1) \mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \xrightarrow{\sigma\text{-алгебра}} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$$

$$2) \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$$

Ячейка – счетное пересечение открытых параллелепипедов, т.е. открытых множеств. Они лежат в \mathcal{B}^m , но \mathcal{B}^m – σ -алгебра \Rightarrow там есть и счетное пересечение.

$$3) G \text{ – открытое множество} \Rightarrow G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m), \text{ т.к. по теореме } G \text{ – счетное объединение элементов из } \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \Rightarrow \mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$$

□

9.2 Объем и мера

Определение 9.2.1. Пусть \mathcal{P} – полукольцо подмножеств X , $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$.

Тогда μ – *объем*, если:

$$1. \mu \emptyset = 0$$

$$2. \text{ Если } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu A_k$$

Определение 9.2.2. Пусть \mathcal{P} – полукольцо подмножеств X , $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$.

μ – *мера*, если:

$$1. \mu \emptyset = 0$$

$$2. \text{ Если } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$$

Замечание. Если μ – мера, то μ – объем.

Упражнение. Если мера $\mu \neq +\infty$, то $\mu\emptyset = 0$ из п. 2.

Пример. Объемы:

1. Длина ячейки в \mathbb{R} .
2. Пусть g неубывающая функция : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu_g((a, b]) := g(b) - g(a)$, $(a, b] \subset \mathbb{R}$
3. Классический объем ячейки в \mathbb{R}^m (докажем позже)

$$\lambda_m(a, b] = (b_m - a_m) \dots (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$$

$$4. x_0 \in X, a > 0, \mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

5. \mathcal{A} – огранич. подмн-ва \mathbb{R} и их дополнения.

$$\text{Если } A \in \mathcal{A}, \text{ то } \mu A = \begin{cases} 0, & \text{если } A - \text{огр. мн-во} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Это объем, но не мера.

Теорема 9.2.1. Пусть μ – объем на полукольце \mathcal{P} . Тогда:

1. Если $P' \subset P$ ($P, P' \in \mathcal{P}$), то $\mu P' \leq \mu P$. (монотонность объема)
2. Если $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P$, то $\sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$. (усиленная монотонность)
- 2'. Если $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$.
3. Если $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, то $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$ (полуаддитивность)

Доказательство.

$$2. P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j, \text{ где } Q_j \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \Rightarrow \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$2'. \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \Rightarrow \mu P \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$$

$$3. P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup_{k=1}^n P'_k \Rightarrow P = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}, Q_{kj} \in \mathcal{P}, Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$$

$$\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \subset P_k \xrightarrow{2)} \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \mu P_k$$

$$\mu P = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

Замечание.

1. Если \mathcal{P} – кольцо, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subset B$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

$$B = \underset{\in \mathcal{P}}{A} \sqcup \underset{\in \mathcal{P}}{(B \setminus A)}$$

2. Объем с полукольца можно продолжить на кольцо, состоящее из всевозможных дизъюнктивных объединений.

Теорема 9.2.2. Пусть \mathcal{P} – полукольцо подмножеств X , μ – объем на \mathcal{P} , \mathcal{Q} – полукольцо подмножеств Y , ν – объем на \mathcal{Q} .

$$\lambda : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \rightarrow [0, +\infty].$$

$$\lambda(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) = \mu \mathcal{P} \cdot \nu \mathcal{Q} \text{ (считаем, что } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0 \text{)}.$$

Тогда λ – объем.

Доказательство. Если $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k$ и $Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, то $P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j$

$$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\mu P_k \nu Q_j}_{=\lambda(P_k \times Q_j)}$$

$$\text{Противный случай: } P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

□

Следствие. λ_m – объем.

Доказательство. λ_1 – объем, λ_m – декартово произведение λ_1 .

□

Пример. Меры.

1. Классический объём λ_m (потом докажем)
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неубывающая, непрерывная справа во всех точках

$$\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$$

Упражнение. Доказать, что непрерывность справа – необходимое условие для того, чтобы ν_g была мерой.

$$3. x_0 \in X, a > 0, \mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

4. Считаящая мера μA = количество элементов в множестве A .

$$5. T = \{t_1, t_2, \dots\} \subset X, \{w_1, w_2, \dots\} \text{ – неотрицательные числа, } \mu A := \sum_{i: t_i \in A} w_i$$

Доказательство. Нужно проверить, что если $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu A = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j$.

$$\mu A_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}, \mu A = \sum a_{jk} \text{ в каком-то порядке } \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}$$

$$\geq: \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_{jk} \leq \mu A$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}$$

\leq : Рассмотрим частичную сумму для $\sum_{j,k}^{\rightarrow \mu A} a_{jk}$. $Y := \max j$, $K := \max k$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum_{j=1}^Y \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum_{j=1}^Y \sum_{k=1}^K a_{jk}$$

□

Теорема 9.2.3. Пусть $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ – объем на полукольце.

Тогда μ – мера \Leftrightarrow (счетная полуаддитивность) Если $P, P_n \in \mathcal{P}, P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, то $\mu P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$.

Доказательство.

$$\Leftarrow. \text{ Если } P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$(a) \text{ счетная полуаддитивность } \Rightarrow \mu P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

$$(b) \text{ усиленная монотонность } \Rightarrow \mu P \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

$$\Rightarrow. P'_n := P \cap P_n \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \Rightarrow P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}, \text{ где } Q_{nk} \in \mathcal{P}, Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$$

$$\mu P = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

$$\bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P_n \xrightarrow{\text{усил. монот.}} \sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \mu P_n$$

□

Следствие. Если μ – мера, заданная на σ -алгебре, то счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры.

$$\text{Доказательство. } \mu_n = 0, A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \xrightarrow{\text{смет. полуад.}} \mu A_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0 \Rightarrow \mu A = 0$$

□

Теорема 9.2.4. Пусть μ – объем, заданный на σ -алгебре \mathcal{A} .

Тогда μ – мера \Leftrightarrow (непрерывность снизу) Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu A_n$.

Доказательство.

\Rightarrow . $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ (считаем, что $A_0 = \emptyset$)

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad (B_n \subset A_n)$$

\subset : если $x \in A$, то возьмем m – наименьший индекс, для которого $x \in A_m \Rightarrow x \in B_m$.

$$(\text{счет. ад.}) \quad \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu A_n - \mu A_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \text{Если все } \mu A_n \text{ конечны, то } \sum_{k=1}^n \mu B_k &= \sum_{k=1}^n (\mu A_k - \mu A_{k-1}) = \mu A_n \Rightarrow \mu A_n \rightarrow \mu A \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \mu A \end{aligned}$$

Если $\mu A_n = +\infty$ при больших n , то $\mu A = +\infty$ и все очевидно.

$$\Leftarrow. \text{ Пусть } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \quad A_n := \bigcup_{k=1}^n C_k, \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

$$\begin{aligned} \text{непр. снизу} \Rightarrow \mu A_n &\rightarrow \mu A \Rightarrow \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k \\ &= \mu \left(\bigcup_{k=1}^n C_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu C_k \end{aligned}$$

□

Теорема 9.2.5. Пусть μ – объем, заданный на σ -алгебре \mathcal{A} и $\mu X < +\infty$, тогда следующие условия равносильны:

1. μ – мера.

2. μ непрерывно сверху, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n =: A$, то $\mu A_n \rightarrow \mu A$.

3. μ непрерывна сверху на пустом множестве, т.е. если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\mu A_n \rightarrow 0$.

Доказательство.

2. \Rightarrow 3. Очевидно.

1. \Rightarrow 2. $B_n := A_1 \setminus A_n, \quad B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A \Rightarrow \mu B_n \rightarrow \mu(A_1 \setminus A) = \mu A_1 - \mu A$$

$= \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu A_1 - \mu A_n$

3. \Rightarrow 1. Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \quad A_n := \bigcup_{k=n+1}^{\infty} C_k, \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots$

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset, \quad A = A_n \sqcup \bigcup_{k=1}^n C_k &\xrightarrow{\mu - \text{объем}} \mu A = \mu A_n + \sum_{k=1}^n \mu C_k \Rightarrow \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k \end{aligned}$$

□

Следствие. Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\mu A_n < +\infty$ для некоторого n , то $\mu A_k \rightarrow \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$.

Замечание. Конечность меры существенна.

$$A_n = [n, +\infty), \quad \mu A_n = +\infty, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

9.3 Продолжение меры

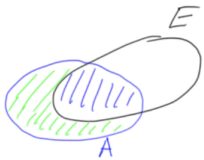
Определение 9.3.1. $\nu : 2^X \rightarrow [0, +\infty)$ – *субмера*, если:

1. $\nu \emptyset = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \nu A \leq \nu B$ (монотонность)
3. $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$ (счетная полуаддитивность)

Определение 9.3.2. $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – *полная мера*, если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0$, то $A \in \mathcal{A}$.

Замечание. Если μ – полная мера, $A \subset B$ и $\mu B = 0$, то $\mu A = 0$.

Определение 9.3.3. Пусть ν – субмера. Множество E назовем *измеримым относительно ν* , если $\forall A \subset X, \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$.



Замечание.

1. Достаточно писать « \leq », т.к. счетная полуаддитивность \Rightarrow

$$\nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \leq \underbrace{\nu((A \cap E) \cup (A \setminus E))}_{=A}.$$

2. Если E_1, E_2, \dots, E_n – ν -измеримые, то $\nu(A \cap \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^n E_k}_{\substack{=: B \\ \bigsqcup_{k=1}^n (A \cap E_k) =: B}}) = \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k)$

$$\begin{aligned} \nu B &= \nu(\underbrace{B \cap E_1}_{=A \cap E_1}) + \nu(B \setminus E_1) \\ &= \underbrace{\bigsqcup_{k=2}^n (A \cap E_k)}_{=: B} \end{aligned}$$

Теорема 9.3.1. Теорема Каратеодори

Пусть ν – субмера. Тогда ν -измеримые множества образуют σ -алгебру и сужение ν на эту σ -алгебру – полная мера.

Доказательство. \mathcal{A} – семейство ν -измеримых множеств E

1. Если $\nu E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.

$$\nu A \stackrel{\text{полуад.}}{\leq} \underbrace{\nu(A \cap E)}_{\subset A} + \underbrace{\nu(A \setminus E)}_{\subset E} \stackrel{\text{монот.}}{\leq} \nu E + \nu A = \nu A$$

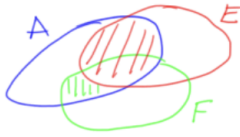
2. \mathcal{A} – симметрично.

$$\text{Пусть } E \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \setminus (X \setminus E)) + \nu(A \cap (X \setminus E)) \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{A}$$



3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cap F \in \mathcal{A}$

$$\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F) + \nu((A \setminus E) \setminus F) \stackrel{\text{счет. полуад.}}{\geq} \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$$



4. \mathcal{A} – алгебра.

5. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

$$\nu A = \nu(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E_k) \geq \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \stackrel{\text{счет. полуад.}}{\geq} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Переделаем в дизъюнктивное объединение.

7. \mathcal{A} – σ -алгебра.

Из 4 и 5.

8. ν – объем.

$$\nu(\bigcup_{k=1}^n (A \cap E_k)) = \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k)$$

Если A – любое и $E_k \in \mathcal{A}$, берем $A = X$ и получаем определение объема.

9. Объем + счетная полуаддитивность \Rightarrow мера.

□

Определение 9.3.4. Пусть μ – мера на полукольце \mathcal{P} . Внешней мерой, порожденной μ , назовем $\mu^* A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P} \text{ и } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$.

Если такого покрытия не существует, то $\mu^* A = +\infty$.

Замечание.

1. Можем рассматривать только дизъюнктные множества:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_k} B_k, \quad B_k \in \mathcal{P} \text{ и } \bigcup_{k=1}^{m_k} B_k \subset A_k \xrightarrow{\text{усил. монот.}} \mu A_k \geq \sum_{k=1}^{m_k} \mu B_k$$

2. Если μ задана на σ -алгебре \mathcal{A} , то:

$$\mu^* A := \inf \{ \mu B \mid A \subset B \text{ и } B \in \mathcal{A} \}$$

Теорема 9.3.2. μ^* – субмера, совпадающая с μ на \mathcal{P} .

Доказательство.

1. Пусть $A \in \mathcal{P}$. Тогда можно взять такие покрытия: $A_1 = A, A_2 = A_3 = \dots = \emptyset \Rightarrow \mu^* A \leq \mu A$

$$\text{Счетная полуаддитивность} \Rightarrow \text{если } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ то } \mu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n \Rightarrow \mu A \leq \mu^* A$$

т.е. $\mu^* = \mu$ на \mathcal{P}

2. μ^* – субмера

Монотонность:

$$\text{Если есть } A \subset B \text{ и покрытие } B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ то } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \mu^* A \leq \mu^* B$$

inf от большего мн-ва

Счетная полуаддитивность μ^ :*

$$\mu^*: \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n$$

Если справа есть $+\infty$, то очевидно, считаем, что там все конечно:

$$\mu^* B = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid P_k \in \mathcal{P} \text{ и } B_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$$

Выберем такие множества C_{nk} , что $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk} \supset B_n$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk} \Rightarrow \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^* B_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* B_n + \varepsilon \text{ и устремим } \varepsilon \text{ к нулю.}$$

□

Определение 9.3.5. *Стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца \mathcal{P} .*

Берем μ_0^* – ее внешняя мера и μ – сужение μ_0^* на μ_0^* -измеримые множества. Получается полная мера, заданная на σ -алгебре.

Теорема 9.3.3. *Это действительно продолжение, то есть множества из \mathcal{P} будут μ -измеримыми.*

Доказательство. Надо доказать, что если $E \in \mathcal{P}$, то $\forall A \subset X \quad \mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

1. Если $A \in \mathcal{P}$, то $A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P}$. Тогда т.к. $A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$:

$$\mu_0^* A = \mu_0 A \stackrel{\text{адд.}}{=} \mu_0(A \cap E) + \sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k = \mu_0^*(A \cap E) + \sum_{k=1}^n \mu_0^* Q_k \stackrel{\text{полуадд.}}{\geq} \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*\left(\bigsqcup_{k=1}^n Q_k\right) = \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$$

2. Если $A \notin \mathcal{P}$. Когда $\mu_0^* A = +\infty$ все очевидно, поэтому будем считать, что $\mu_0^* A < +\infty$.

$$\mu^* A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \mid P_k \in \mathcal{P}_n \text{ и } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$$

Берем конкретное покрытие $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, для которого $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \varepsilon$

$$\mu_0 P_k = \mu_0^* P_k \geq (P_k \cap E) + \mu_0^*(P_k \setminus E)$$

$$\varepsilon + \mu_0^* A \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E) \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E) \supset A \cap E, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E) \supset A \setminus E$$

□

Замечание.

1. Дальше и старая мера, и новая обозначается μ .

$$\mu A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \mid A_k \in \mathcal{P} \text{ и } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}.$$

2. Применение стандартного продолжения к стандартному продолжению не дает ничего нового.

Упражнение. Доказать это. *Указание:* μ_0 – стандартная мера, μ – стандартное продолжение μ_0^* . Доказать, что μ_0 и μ_0^* совпадают.

3. Можно ли продолжить на более широкую σ -алгебру, чем дает стандартное продолжение?

Часто да, но возникает неоднозначность.

Определение 9.3.6. σ – конечная мера, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, где $P_n \in \mathcal{P}$ и $\mu P_n < +\infty$ (можно считать, что P_n дизъюнкты).

4. Можно ли по-другому продолжить на σ -алгебру μ -измеримых множеств?

Если μ – σ -конечная мера, то нельзя.

5. Пусть ν – полная мера на σ -алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ и на \mathcal{P} $\mu = \nu$. Верно ли, что \mathcal{A} содержит все μ -измеримые множества?

Если σ – конечная мера, то да.

Теорема 9.3.4. Пусть \mathcal{P} – полукольцо, μ – стандартное с \mathcal{P} , μ^* – соответствующая внешняя мера. Если $\mu^*A < +\infty$, то существует $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч. $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A$ и $\mu C = \mu^*A$.

Доказательство. $\mu^*A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \mid P_k \in \mathcal{P} \text{ и } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$.

Берем такое покрытие $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A$, $B_{nk} \in \mathcal{P}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^*A + \frac{1}{n}$

$$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^*A + \frac{1}{n}, \quad C \subset C_n \Rightarrow \mu C \leq \mu C_n < \mu^*A + \frac{1}{n} \Rightarrow \mu C \leq \mu^*A \text{ и } C \supset A \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu^*C \geq \mu^*A$$

□

Следствие. Пусть \mathcal{P} – полукольцо, μ – стандартное продолжение с \mathcal{P} . Если A – μ -измеримо и $\mu A < +\infty$, то $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство. Берем C из теоремы, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, $\mu C = \mu A$ и $C \supset A$.

$C \setminus A =: e_1$, $\mu e_1 = 0$. Берем множество из теоремы для e_1 , назовем его e_2 .

$e_2 \supset e_1$, $e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e_1 = \mu e_2 = 0 \Rightarrow B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$

$e = A \setminus B \subset C \setminus B \subset e_2$, $\mu e_2 = 0 \Rightarrow \mu e = 0$

□

Теорема 9.3.5. Единственность продолжения

Пусть \mathcal{P} – полукольцо, μ – стандартное продолжение на σ -алгебру, ν – другая мера на \mathcal{A} , т.ч. $\mu E = \nu E$ при $E \in \mathcal{P}$. Если μ – σ -конечная мера, то $\mu A = \nu A$ при $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, где $P_k \in \mathcal{P}$

$$\nu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k. \text{ Напишем inf в правой части: } \nu A \leq \mu A.$$

$$\text{Если } P \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu P = \nu P = \nu \left(\overset{\leq \mu(P \cap A)}{\underset{\text{если } A \in \mathcal{A}}{P \cap A}} \right) + \nu \left(\overset{\leq \mu(P \setminus A)}{P \setminus A} \right) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$$

Когда $\mu P < +\infty$ неравенства обращаются в равенство $\Rightarrow \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$

$$\mu - \sigma\text{-конечная} \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \mu P_n < +\infty \Rightarrow \mu(P_n \cap A) = \nu(P_n \cap A) \Rightarrow \nu A = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(P_n \cap A) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n \cap A) = \mu A$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap P_n)$$

□