

Содержание

1. Теория меры	2
1.1 Система множеств . . . . .	2
1.2 Объем и мера . . . . .	6

# 1. Теория меры

## 1.1 Система множеств

$A \sqcup B := A \cup B$  и  $A \cap B = \emptyset$  – *дизъюнктные множества*.

$$\bigsqcup_{k=1}^n A_k := \bigcup_{k=1}^n A_k \text{ и } A_i \cap A_j = \emptyset$$

**Определение 1.1.1.**  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$  – разбиение множества  $E$ , если  $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha) \text{ и } X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus E_\alpha)$$

**Определение 1.1.2.**  $\mathcal{A}$  – система подмножеств  $X$ :

$\delta_0$ . Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то  $A \cap B \in \mathcal{A}$ .

$\delta$ . Если  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , то  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

$\sigma_0$ . Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .

$\sigma$ . Если  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , то  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

**Определение 1.1.3.** Система множества *симметрична*, если  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$ .

**Определение 1.1.4.** Система множества  $\mathcal{A}$  – *алгебра*, если она симметрична,  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , есть свойства  $\delta_0$  и  $\sigma_0$ .

**Определение 1.1.5.** Система множества  $\mathcal{A}$  –  *$\sigma$ -алгебра*, если она симметрична,  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , есть свойства  $\delta$  и  $\sigma$ .

**Утверждение 1.1.1.** Если  $\mathcal{A}$  симметричная система, то  $\sigma_0 \Leftrightarrow \delta_0$  и  $\sigma \Leftrightarrow \delta$ .

$$\text{Доказательство. } X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cup (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cap B)} = A \cap B$$

$$X \setminus \underbrace{((X \setminus A) \cap (X \setminus B))}_{X \setminus (A \cup B)} = A \cup B$$

□

*Замечание.* Если  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра, то  $\mathcal{A}$  – алгебра.

**Свойства алгебры множеств:**

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ .

2. Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

3. Если  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , то  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  и  $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$ .

**Пример.**

1.  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{A} = \{\text{все огранич. мн-ва и их дополнения}\}$

$\mathcal{A}$  – алгебра, но не  $\sigma$ -алгебра.

2.  $2^X$  –  $\sigma$ -алгебра

3.  $Y \subset X$ ,  $\mathcal{A}$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра) подмножеств  $X$ , тогда

$\mathcal{B} := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра). Называется *индуцированная алгебра*.

*Доказательство.*  $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (X \setminus A)$  □

4. Пусть  $\mathcal{A}_\alpha$  – алгебры ( $\sigma$ -алгебры). Тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра).

*Доказательство.* Если  $A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ , то  $A, B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  □

5.  $A, B \subset X$  из чего состоит наименьшая алгебра, содержащая  $A$  и  $B$ :

$\emptyset, X, A, B, A \cap B, A \cup B, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B), A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$

**Теорема 1.1.1.** Пусть  $\mathcal{E}$  – система подмножеств  $X$ . Тогда существует наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$ , содержащая  $\mathcal{E}$ .

*Доказательство.*  $2^X$  –  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$ .

Пусть  $\mathcal{A}_\alpha$  – всевозможные  $\sigma$ -алгебры, содержащие  $\mathcal{E}$ .

$\mathcal{B} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  –  $\sigma$ -алгебра,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$  и  $\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E} \forall \alpha$ . □

**Определение 1.1.6.** Такая  $\sigma$ -алгебра – *барелевская оболочка*  $\mathcal{E}$ .  $\mathcal{B}(\mathcal{E})$

**Определение 1.1.7.**  $X = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{E}$  – всевозможные открытые множества. Барелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}^m := \mathcal{B}(\mathcal{E})$ .

*Замечание.*  $\mathcal{B}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$  ( $\mathcal{B}^m$  – континуум,  $2^{\mathbb{R}^m}$  – больше континуума)

**Определение 1.1.8.**  $\mathcal{R}$  – *кольцо подмножеств*  $X$ , если  $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

*Замечание.* Если  $\mathcal{R}$  – кольцо и  $X \in \mathcal{R}$ , то  $\mathcal{R}$  – алгебра.

**Определение 1.1.9.**  $\mathcal{P}$  – *полукольцо подмножеств*  $X$ , если:

1.  $\emptyset \in \mathcal{P}$

$$2. A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$$

$$3. A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow \text{существуют } Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in \mathcal{P} \text{ т.ч. } A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$$

**Пример.**  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  – полукольцо

**Лемма 1.1.1.**  $\bigcup A_k = \bigsqcup (A_k \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j)$

*Доказательство.*  $B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j \subset A_k \Rightarrow \bigcup A_k \supset \bigcup B_k$

$B_n \subset A_n \setminus \underbrace{A_k}_{\supset B_k}$  при  $n > k \Rightarrow B_n \cup B_k = \emptyset$

Проверяем включение  $\subset$ .

Берем  $x \in \bigcup A_k$ ,  $n := \min\{j \mid x \in A_j\} \Rightarrow x \in B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \Rightarrow x \in \bigcup B_k$ . □

**Теорема 1.1.2. Свойства полукольца:**

$P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$  – полукольцо. Тогда:

$$1. P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \text{ для некоторых } Q_j \in \mathcal{P}.$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \text{ для некоторых } Q_{kj} \in \mathcal{P}, \text{ т.ч. } Q_{kj} \subset P_k.$$

3. Во 2 пункте можно вместо  $n$  написать  $\infty$ .

*Доказательство.*

1. Индукция по  $n$ . Переход  $n-1 \rightarrow n$

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \underbrace{\left( P \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k \right)}_{\text{инд. пр.} = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j} \setminus P_n = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \setminus P_n = \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left( P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j \right) \stackrel{\text{по 1}}{=} \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \Rightarrow Q_{kj} \subset P_k$$

□

**Теорема 1.1.3. Декартово произведение полуколец**

Пусть  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмножеств  $X$ ,  $\mathcal{Q}$  – полукольцо подмножеств  $Y$ .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$  – полукольцо подмножеств  $X \times Y$ .

*Доказательство.* Пусть  $P_1 \times Q_1$  и  $P_2 \times Q_2 \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2) = (P_1 \cap P_2) \times (Q_1 \cap Q_2)$

$$(P_1 \times Q_1) \setminus (P_2 \times Q_2) = \underbrace{\left( P_1 \setminus P_2 \right)}_{\text{диз. об. эл-в в } \mathcal{P}} \times \underbrace{Q_1}_{\in \mathcal{Q}} \sqcup \underbrace{(P_1 \cap P_2)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{\left( Q_1 \setminus Q_2 \right)}_{\text{диз. об. эл-в в } \mathcal{Q}} \quad \square$$

**Определение 1.1.10.** *Открытый параллелепипед*  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$(a, b) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$$

**Определение 1.1.11.** *Замкнутый параллелепипед*  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$$

**Определение 1.1.12.** *Ячейка*  $(a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$(a, b] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$$

*Замечание.*  $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$

**Утверждение 1.1.2.** Непустая ячейка – пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающих последовательностей замкнутых параллелепипедов.

*Доказательство.*  $(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$

$$P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \times \dots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$$

$$P_{n+1} \subset P_n, P_n \supset (a, b] \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$A_n := (a_1 - \frac{1}{n}, b_1] \times (a_2 - \frac{1}{n}, b_2] \times \dots \times (a_m - \frac{1}{n}, b_m]$$

$$A_{n+1} \supset A_n \subset (a, b], \bigcup A_n = (a, b]$$

□

**Обозначение:**

1.  $\mathcal{P}^m$  – семейство ячеек в  $\mathbb{R}^m$  (в т.ч. и пустое множество).
2.  $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$  – семейство ячеек в  $\mathbb{R}^m$ , у которых все координаты вершин рациональны.

**Теорема 1.1.4.** *Всякое непустое открытое множество  $G \subset \mathbb{R}^m$  представляется в виде дизъюнктного объединения счетного числа ячеек, замыкания которых  $\subset G$ . Более того, можно считать, что координаты всех вершин всех ячеек рациональны.*

*Доказательство.*  $x \in G \Rightarrow x \in \overline{B}_r(x) \subset G$

Найдется ячейка  $R_x$ , т.ч.  $x \in R_x$ , координаты  $R_x$  рациональны и  $\text{Cl } R_x \subset G$ . Выкинем все повторы и получим счетное число ячеек, объединение которых равно  $G$ . По свойству полукольца можно это объединение сделать дизъюнктым. □

*Замечание.* Явный алгоритм.

**Следствие.**  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \stackrel{1)}{\subset} \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \stackrel{2)}{\subset} \mathcal{B}^m \stackrel{3)}{\subset}$

*Доказательство.*

$$1) \mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$$

2)  $\mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m$

Ячейка – счетное пересечение открытых параллелепипедов, т.е. открытых множеств. Они лежат в  $\mathcal{B}^m$ , но  $\mathcal{B}^m$  –  $\sigma$ -алгебра  $\Rightarrow$  там есть счетное пересечение.

$$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{B}^m$$

3)  $G$  – открытое множество  $\Rightarrow G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$  т.к. по теореме  $G$  – счетное объединение элементов из  $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \Rightarrow \mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$

□

## 1.2 Объем и мера

**Определение 1.2.1.** Пусть  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмножеств  $X$ ,  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ .

$\mu$  – *объем*, если:

$$1. \mu \emptyset = 0$$

$$2. \text{ Если } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu A_k$$

**Определение 1.2.2.** Пусть  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмножеств  $X$ ,  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ .

$\mu$  – *мера*, если:

$$1. \mu \emptyset = 0$$

$$2. \text{ Если } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$$

*Замечание.* Если  $\mu$  – мера, то  $\mu$  – объем.

*Упражнение.* Если мера  $\mu \neq +\infty$ , то  $\mu \emptyset = 0$  из п. 2ю

**Пример. Объемы:**

1. Длина ячейки в  $\mathbb{R}$ .

2. Пусть  $g$  неубывающая функция :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ ,  $(a, b] \subset \mathbb{R}$

3. Классический объем ячейки в  $\mathbb{R}^m$  (докажем позже)

$$\lambda_m(a, b] = (b_m - a_m) \dots (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$$

$$4. x_0 \in X, a > 0, \mu A = \begin{cases} a, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

5.  $\mathcal{A}$  – огранич. подмн-ва  $\mathbb{R}$  и их дополнения.

$$\text{Если } A \in \mathcal{A}, \text{ то } \mu A = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ – огр. мн-во} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Это объем, но не мера.

**Теорема 1.2.1.** Пусть  $\mu$  – объем на полукольце  $\mathcal{P}$ . Тогда:

1. Если  $P' \subset P$  ( $P, P' \in \mathcal{P}$ ), то  $\mu P' \leq \mu P$ . (монотонность объема)
2. Если  $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P$ , то  $\sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$ . (усиленная монотонность)
- 2'. Если  $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$ .

Если  $P \subset \bigsqcup_{k=1}^n P_k$ , то  $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$  (полуаддитивность)

*Доказательство.*

2.  $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \Rightarrow \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$
  - 2'.  $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \Rightarrow \mu P \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$
  - 3'.  $P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup_{k=1}^n P'_k \Rightarrow P = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ ,  $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ ,  $Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$
- $$\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \subset P_k \xrightarrow{2)} \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \mu P_k$$
- $$\mu P = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

*Замечание.*

1. Если  $\mathcal{P}$  – кольцо,  $A, B \in \mathcal{P}$ ,  $A \subset B$  и  $\mu A < +\infty$ , то  $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$ .

$$B = \bigsqcup_{\in \mathcal{P}} A \sqcup \bigsqcup_{\in \mathcal{P}} (B \setminus A)$$

2. Объем с полукольца можно продолжить на кольцо, состоящее из всевозможных дизъюнктивных объединений.

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмножеств  $X$ ,  $\mu$  – объем на  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  – полукольцо подмножеств  $Y$ ,  $\nu$  – объем на  $\mathcal{Q}$ .

$$\lambda : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \rightarrow [0, +\infty].$$

$$\lambda(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) = \mu \mathcal{P} \cdot \nu \mathcal{Q} \text{ (считаем, что } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0 \text{)}.$$

Тогда  $\lambda$  – объем.

*Доказательство.* Если  $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k$  и  $Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , то  $P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j$

$$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\mu P_k \nu Q_j}_{=\lambda(P_k \times Q_j)}$$

$$\text{Противный случай: } P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

□

**Следствие.**  $\lambda_m$  – объем.

*Доказательство.*  $\lambda_1$  – объем,  $\lambda_m$  – декартово произведение  $\lambda_1$ .

□