Greining reiknirita vor 2024
Heimaverkefni 2 – drög að lausnum

Skila skal þessu verkefni á vefnum Gradescope.

Gradescope tekur við .pdf skjölum. Frágangur á þeim skiptir máli.

Telji nemandi að mistök hafi verið gerð við yfirferð skal tilkynna slíkt á Gradescope.

Skilafrestur er til kl. 22:00 miðvikudaginn 24. janúar. Gangi þér vel!

1. Rakningarvensl ($\star$)

a) Setjið fram rakningarvensl á forminu $T(n) = rT(n/b) + f(n)$ sem lýsa hversu oft eftirfarandi fall skrifar út TÖL403G. Reiknið gildið á $T(5)$ með því að ítra rakningarvenslin.

```
def process(n):
   # Forskilyrði: n er ekki neikvæð heiltala
   if n >= 1:
      process(n - 1)
      print("TÖL403G")
```

Lausn: Rakningarvenslin eru

$$\begin{aligned} &T(n) = T(n-1) + 1, n \geq 1 \\ &T(0) = 0. \end{aligned}$$

Þá er

$$\begin{aligned} T(5) &= T(4) + 1 = (T(3) + 1) + 1 = ((T(2) + 1) + 1) + 1 = (((T(1) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= ((((T(0) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1 = ((((0 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1 = 5. \end{aligned}$$

b) Setjið fram rakningarvensl á forminu $T(n) = rT(n/b) + f(n)$ sem lýsa hversu oft eftirfarandi fall skrifar út TÖL403G. Reiknið gildið á $T(32)$ með því að ítra rakningarvenslin.

```
def process(n)
   # Forskilyrði: n er veldi af 2
   if n > 1:
      for i = 1 to log2(n)
         print("TOL403G")
      process(n/2)
      process(n/2)
```

Lausn: Rakningarvenslin eru því

$$\begin{aligned} &T(n) = 2T(n/2) + \log_2(n), n \geq 2 \\ &T(1) = 0. \end{aligned}$$

Þá er

$$T(32) = 2T(16)+5 = 2(2T(8)+4)+5 = 2(2(2T(4)+3)+4)+5 = 2(2(2(2T(2)+2)+3)+4)+5$$
$$= 2(2(2(2(2T(1)+1)+2)+3)+4)+5 = 2(2(2(2(2(0)+1)+2)+3)+4)+5 = 57.$$

c) Setjið fram rakningarvensl á forminu $T(n) = rT(n/b) + O(g(n))$ sem lýsa tímaflækju eftirfarandi reiknirits. Gerið ráð fyrir að grunnaðgerðir, $+, -, *, /$ og stakasamanburður ($a < b$ og $a = b$) taki fastan tíma og sama gildi um föllin $\mathrm{mod}(a, b)$ og $\mathrm{floor}(x)$.

```
def process(a, b):
    # Forskilyrði: a og b eru jákvæðar heiltölur
    if b == 1 return a
    d = b * b
    half = floor(b/2)
    result = process(d, half)
    if mod(b, 2) == 0
        return result
    return a * result
```

Lausn: Gildið á b helmingast í hverju kalli. Rakningarvenslin eru

$$T(b) = T(\lfloor b/2 \rfloor) + c$$

þar sem $c > 0$ er fastur "kostnaður" í hverju fallskalli.

2. Lausnir á rakningarvenslum ($\star$)

Notið endurkvæmnistré til að leysa rakningarvenslin hér að neðan. Teiknið mynd af viðkomandi trjám og setjið lausnir fram með stóra-O rithætti.

a) $T(n) = 2T(n-1) + O(1)$

Lausn: Endurkvæmnistré fyrir rakningarvenslin er

```
        c
       / \
      c   c
     / \ / \
    c  c c  c

        .
        .
        .

   c    ...   c
```

Fjöldi undirverkefna tvöfaldast í hverju lagi (e. layer) en stærðin minnkar um einn. Kostnaður í lagi k er þá $c2^k$. Fjöldi laga er n þannig að

$$T(n) = c\sum_{k=0}^{n} 2^k = c(2^{n+1} - 1) = c(2(2^n) - 1) = O(2^n).$$

b) $T(n) = 2T(n/3) + 1$

Lausn: Endurkvæmnistré fyrir venslin er

```
      c
     / \
    c   c
   / \ / \
  c  c c  c

      .
      .
      .

 c    ...    c
```

Hæð trésins er $\log_3 n$ og vinna í lagi k er $c(2^k)$. Fáum að

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c \sum_{k=0}^{\log_3 n} 2^k \\
&= c(2^{(\log_3 n)+1} - 1) \\
&= c(2 \cdot 2^{\log_3 n} - 1) \\
&= c(2n^{\log_3 2} - 1) \\
&= O(n^{\log_3 2}) \\
&= O(n^{0.631})
\end{aligned}
$$

c) $T(n) = 25T(n/5) + n^2 - n + \log n$. *Ábending*: Notið aðfellumörk fyrir "kostnaðarfallið" í staðinn fyrir fallið sjálft.

Lausn: Athugum að $n^2 - n + \log n = O(n^2)$. Þá er

$$T(n) = 25T(n/5) + cn^2.$$

fyrir nægilega stórt gildi á c. Endurkvæmnistré fyrir þessu vensl eru

```
       cn^2
      / |  \
     /  |   \
 cn^2/5 ... cn^2/5

        .
        .
        .

c      ...      c
```

Hæð trésins er $h = \log_5 n$ og vinna í lagi k er $(25^k)c(n/5^k)^2 = cn^2$ þannig að

$$T(n) = O(n^2 \log n).$$

d) $T(n) = 2T(n/2) + \sqrt{n}$

Lausn: Endurkvæmnistréið er

```
       n
      / \
 n^0.5 n^0.5
  / \   / \
       .
       .
       .

1     ...    1
```

Vinna í lagi k er $(2^k)(n/2^k)^{1/2} = \sqrt{2}^k \sqrt{n}$ þannig að

$$T(n) = \sqrt{n} \sum_{k=0}^{\log_2 n} (\sqrt{2})^k = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2}\sqrt{n} - 1}{\sqrt{2} - 1} = O(n)$$

Ábendingar:

i) Ef $O(f(n))$ kemur fyrir í rakningarvenslum setjið þá $cf(n)$ inn í staðinn ($c > 0$ er einhver fasti).

ii) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$.

iii) Summa kvótaraðar (e. geometric series) er

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & r \neq 1 \\ (n+1) & r = 1. \end{cases}$$

iv) Þegar $|r| < 1$ í summunni hér að ofan þá gildir ennfremur

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

3. Leit í röðuðu fylki (⋆⋆)

(Gamalt prófdæmi) Látum A vera $n \times m$ fylki heiltalna þar sem öll stök innan raðar eru í vaxandi röð (frá vinstri til hægri) og öll stök í dálki eru í vaxandi röð (frá efstu til neðstu raðar). Setjið fram hagkvæmt reiknirit sem ákvarðar staðsetningu heiltölu x í A, þ.e. númer raðar og dálks (i, j) þ.a. $A_{ij} = x$ ef x er í A en skilar $(-1, -1)$ annars.

Dæmi: Fyrir 3×4 fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 15 & 19 \\ 21 & 25 & 27 & 37 \\ 72 & 72 & 80 & 82 \end{bmatrix}$$

skilar reikniritið $(2, 3)$ ef $x = 27$ en það skilar $(-1, -1)$ ef $x = 42$.

Setjið fram sauðakóða fyrir reikniritið, útskýrið stuttlega með orðum hvernig það virkar og rökstyðjið hver tímaflækja þess er. Reiknirit sem keyrir í tíma

- (⋆) $\Theta(nm)$ gefur 5 stig.
- (⋆) $\Theta(n + m)$ gefur 10 stig.
- (⋆⋆) $\Theta(\log n + \log m)$ gefur 20 stig [ATH! Gallað!]

Athugið að það er mest hægt að skila inn einu reikniriti.

Lausn: Þetta dæmi er gallað þar sem það er ekki hægt að leysa það í tíma $O(\log n + \log m)$ eftir því sem best er vitað.

Reiknirit sem ítrar yfir öll stök í fylkinu og ber saman við x, keyrir í tíma $\Theta(mn)$.

Athugum reiknirit sem byrjar efst til hægri í fylkinu, þ.e. í $(i, j) = (1, m)$ og rekur sig með "tröppugangi" að vinstra horninu niðri með því að útiloka einn dálk eða eina röð í hverri ítrun.

```
def leit(A[1...n, 1...m], x)
    i=1, j=m
    while i <= n and j >= 1
        if A[i, j] > x
            j = j - 1 # x getur ekki verið neðar í dálki j, útiloka hann
        elif A[i, j] < x
            i = i + 1 # x getur ekki verið framar í línu i, útiloka hana
        else
            return (i, j)
    return (-1,-1)
```

Dæmi: Leit að $x = 20$ í 4×4 fylki

```
  1   5  12--30
            |
  5  10--25  70
      |
 15  40  60  80
      |
 20--50  75 100
```

Ef við notum `compareTo` fall til að bera saman stök þá er framkvæmdur einn stakasamanburður til að útiloka eina línu eða einn dálk. Í versta falli þarf að útiloka n línur og m dálka þannig að tímaflækjan er $O(n) + O(m) = O(n + m)$. Ef fylkið er ferningsfylki ($m = n$) þá er tímaflækjan $O(n)$.

4. Hliðrun ($\star\star$)

(Gamalt prófdæmi) Þú færð raðað fylki A með n ólíkum stökum sem búið er að hliðra um k sæti, þar sem k er óþekkt heiltala milli 1 og $n - 1$. Með öðrum orðum, þú færð fylki $A[1 \dots n]$ sem er þannig að eitthvert forskeyti $A[1 \dots k]$ er raðað í vaxandi röð og tilsvarandi viðskeyti $A[k + 1 \dots n]$ er raðað í vaxandi röð og $A[n] < A[1]$.

Þú gætir til dæmis fengið eftirfarandi 16-staka fylki (með $k = 10$):

9	13	16	18	19	23	28	31	37	42	1	3	4	5	7	8

Setjið fram hagkvæmt reiknirit til að ákvarða óþekktu heiltöluna k með því að gefa sauðakóða fyrir það. Útskýrið stuttlega með orðum hvernig reikniritið virkar.

Stigagjöf í dæminu er eftirfarandi. Reiknirit sem keyrir í tíma

- ($\star$) $O(n)$ gefur 5 stig.
- ($\star\star$) $O(\log n)$ gefur 20 stig.

Athugið að það er mest hægt að skila inn einu reikniriti.

Lausn: Með því að ítra yfir stök $i = 1, \dots n - 1$ þangað til $A[i + 1] < A[i]$ fæst reiknirit sem keyrir í tíma $O(n)$.

Til að fá reiknirit sem keyrir í tíma $O(\log n)$ er ekki hægt að skoða öll stökin í fylkinu heldur þarf að beita einhvers konar helmingunarleit.

Athugum hlutfylki (e. subarray) $A[i \ldots j]$ og miðjustak $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Það er ljóst að annar helmingurinn inniheldur k og því þarf ekki að skoða hinn helminginn frekar. Þetta er svo endurtekið þangað til hlutfylkið inniheldur einungis tvö stök en þá svarar fyrra stakið til k. Þetta má útfæra með eftirfarandi reikniriti.

```
def search(A, i, j)
    if j - i <= 1
        return i
    m = floor((i + j) / 2)
    if A[m] > A[j]
        return search(A, m, j)
    else
        return search(A, i, m)
```

Í hverri ítrun þarf einn stakasamanburð þannig að tímaflækjan er

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$$

Við þekkjum lausnin á þessum venslum, $T(n) = O(\log n)$.

Ef við teljum líka stakasamanburðinn í setningunni `if` $j - i \leq 1$ þá fæst $+2$ í stað $+1$ í rakningarvenslunum en það breytir ekki efri-aðfellumörkunum, þ.e. þau eru áfram $O(\log n)$.

5. Leitin að veldissprota Ottókars konungs ($\star\star\star$)

Tinni er að leita að veldissprota Ottókars konungs á eyju sem er í laginu eins og mjó rönd. Eyjan liggur í austur-vestur stefnu og er sérstök að því leiti að hún teygir sig óendanlega langt í austur og vestur. Í upphafi er Tinni staddur á miðri eyjunni. Tinni getur gengið í austur eða vestur eins langt og hann vill. Ef Tinni gengur fram á sprotann þá er leit lokið (sprotinn er að mestu grafinn ofan í jörðina þannig að hann sést ekki fyrr en Tinni kemur alveg að honum).

Dæmi: Tinni getur t.d. gengið 30m til vesturs, svo haldið áfram 20m í til vesturs, snúið svo við og gengið 50m til baka að miðju eyjarinnar og síðan 10m í austur og hefur hann þá alls gengið $2(30+20)+10 = 110$m. Ef sprotinn var upphaflega í meira en 50m fjarlægð til vesturs eða í meira en 10m fjarlægð til austurs (frá miðju eyjarinnar) þá er hann ófundinn þegar hér er komið sögu og Tinni þarf að halda áfram að leita.

Lýsið reikniriti sem er þannig að ef veldissprotinn er í fjarlægð d í austur eða vestur frá miðju eyjunnar (Tinni veit ekki hvorum megin sprotinn er) þá getur Tinni fundið sprotann án þess að ganga mjög langt (með tilliti til d). Ákvarðið líka efri-aðfellumörk fyrir heildarvegalengdina sem Tinni gengur.

Lausn:

Við getum látið eyjuna svara til rauntalnalínunnar, vestur til neikvæða hlutans og austur til jákvæða hlutans. Táknum staðsetningu Tinna með s þannig að í upphafi er $s = 0$. Athugum að neðri mörk á vegalengdina eru augljóslega d.

Tinni gengur til skiptis í austur og vestur þannig að í hvert sinn sem hann snýr við þá gengur hann tvöfalt lengra en síðast. Hann byrjar á að fara 1m í austur (endar í $s = 1$). Ef sprotinn er ekki þar þá gengur hann 2m í vestur (endar í $s = -1$) o.s.frv. þangað til sprotinn er fundinn.

Eftir að Tinni hefur snúið n sinnum við og gengið til baka þá er staðsetning hans

$$\begin{aligned} s(n) &= 1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-2)^n \\ &= \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}. \end{aligned}$$

og heildarvegalengdin sem hann hefur gengið er

$$\begin{aligned} t(n) &= 1 + 2 + \ldots + 2^n \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Þegar sprotinn er austan megin þá er n slétt tala. Gerum ráð fyrir að n uppfylli

$$s(n) \leq d < s(n+2).$$

Fyrri ójafnan gefur að

$$\frac{1}{3}(1 + 2^{n+1}) \leq d$$

þ.e.

$$2^{n+1} \leq 3d - 1$$

eða

$$n + 1 \leq \log_2(3d - 1).$$

og seinni ójafnan gefur á sama hátt að

$$\log_2(3d - 1) < n + 3.$$

Þá fæst að

$$n + 1 \leq \log_2(3d - 1) < n + 3 \leq \log_2(3d - 1) + 2$$

og Tinni gengur þá aldrei lengra en

$$\begin{aligned} t(n+2) &= 2^{n+3} - 1 \\ &\leq 2^{\log_2(3d-1)+2} - 1 \\ &= 4(3d - 1) - 1 \\ &= 12d - 5 \\ &= O(d). \end{aligned}$$

Tilfellið þegar sprotinn er vestan megin á eyjunni er hliðstætt.