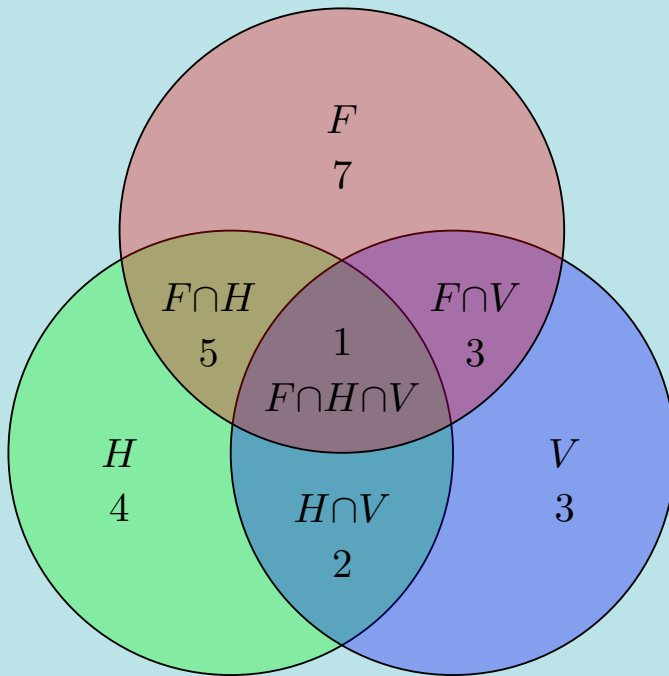


# Anvendt matematikk for grunnskole og VGS



*”Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,  
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,  
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,  
was den grössten Genuss gewährt”*

*”Det er ikke å vite, men å lære,  
ikke å eie, men å tilegne seg,  
ikke å være til stede, men å komme dit,  
som gir den største gleden.”*

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laget av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X og figurene er lagd vha. Asymptote.

*Anvendt matematikk for grunnskole og VGS by Sindre Sogge Heggen is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>*

31.03.2022

Kjære leser.

Denne boka er i utgangspunktet gratis å bruke, men jeg håper du forstår hvor mye tid og ressurser jeg har brukt på å lage den. Hvis du ender opp med å like boka, håper jeg derfor du kan donere 50 kr via Vipps til 90559730 eller via [PayPal](#). Vær vennlig å markere donasjonen med "Mattebok" ved bruk av Vipps. Pengene vil bli brukt til å fortsette arbeidet med å lage lærebøker som er med på å gjøre matematikk lett tilgjengelig for alle. På forhand takk!

Boka blir oppdatert så snart som råd når skrivefeil og lignende blir oppdaget, jeg vil derfor råde alle til å laste ned en ny versjon i ny og ne ved å følge [denne linken](#).

Nynorskversjonen av boka finner du [her](#).

For spørsmål, ta kontakt på mail: [sindre.heggen@gmail.com](mailto:sindre.heggen@gmail.com)

# Forord til lærere

## Bokas bruksområde

Sammen med [Matematikkens byggesteiner](#) (MB) dekker denne boka matematikk for 5.-10. klasse og for VGS-fagen 1P og 2P. Mens MB tar for seg de teoretiske grunnprinsippene matte er bygd på, er denne boka ment for å vise hvordan matte kan anvendes i det daglige. Det er likevel med en viss ambivalens jeg bruker ordet ”anvendt”. Jeg er hellig overbevist om at de aller fleste har behov å bruke matematikk i konkrete, praktiske situasjoner for å få opplevelsen av at matematikk blir anvendt. Jeg håper derfor disse gratis-bøkene kan frigi midler for skuler, som da kan investere i utstyr som gjør at elever (og lærere) får måle, estimere, kalkulere og vurdere ut i fra reelle situasjoner.

## Bokas disponering

Da boka gaper over matematikk for 5. klasse og helt til VGS, vil kanskje mange mene at språket er noe avansert, spesielt for de yngste. Men forenklinger fører ofte til at man stadig må vende tilbake til tema for å kommentere nye utvidelser og/eller unntak, og da dannes det fort et unødig kronglete og innviklet bilde av matematikkens struktur. Jeg tror man i lengden er tjent med å presentere temaene så utfyllende som mulig, og heller bruke god tid på å forstå dem én gang for alle.

Noen vil kanskje også reagere på at eksemplene er veldig enkle, at de viser få sammensatte problemer. Én av grunnene til dette er at slik vil det faktisk være for de aller fleste etter endt skolegang; det handler om å bruke formler direkte. En annen grunn er at jeg mener det å mestre likninger er den overlegent beste måten å løse sammensatte problemer på, og derfor handler nesten hele kapittel 6 om problemløsning.

## Tilbakemeldinger og eventuelle endringer

Jeg håper å høre fra deg med tilbakemeldinger om boka. Merk likevel at alle har sine tanker om hvordan ei lærebok ideelt sett bør utformes, så ikke tolk det som utakknemlighet hvis tilbakemeldinger ikke tas til etterretning. Husk at kodekilden til både denne [boka](#) og [MB](#) ligger åpen for alle på GitHub; med litt kunnskaper om Git og  $\text{\LaTeX}$  kan du enkelt gjøre endringer slik det passer deg og din klasse!

## Gjøreliste

Prosjektet som denne boka er en viktig del av er under stadig utvikling. Her er en liste med kommende gjøremål, i prioritert rekkefølge:

- Korrigere skrivefeil. Dette gjøres kontinuerlig, gir du beskjed om feil funnet til [sindre.heggen@gmail.com](mailto:sindre.heggen@gmail.com), vil korrigerings som oftest bli utført samme dag.
- Legge til flere oppgaver både i denne boka og i [MB](#).
- Legge til fasit
- Lage en pensumoversikt for denne boka og [MB](#) sett opp mot kompetansemålene f.o.m. 5. klasse og t.o.m. 2P.
- Videreutvikle [nettside](#) med læringsvideoer, undervisningsopplegg og mer.

# Innhold

<b>1</b>	<b>Utregningsmetoder</b>	<b>8</b>
1.1	Standardform . . . . .	9
1.2	Regning med tid . . . . .	12
1.3	Avrunding og overslagsregning . . . . .	14
1.3.1	Avrunding . . . . .	14
1.3.2	Overslagsregning . . . . .	15
	Oppgaver . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Størrelser og enheter</b>	<b>19</b>
2.1	Størrelser, enheter og prefikser . . . . .	20
2.2	Regning med forskjellige benevninger . . . . .	23
	Oppgaver . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Statistikk</b>	<b>28</b>
3.1	Introduksjon . . . . .	29
3.2	Presentasjonsmetoder . . . . .	31
3.2.1	Frekvenstabell . . . . .	31
3.2.2	Søylediagram (stolpediagram) . . . . .	32
3.2.3	Sektordiagram (kakediagram) . . . . .	33
3.2.4	Linjediagram . . . . .	34
3.3	Tolking av tendenser; sentralt mål . . . . .	35
3.3.1	Typetall . . . . .	36
3.3.2	Gjennomsnitt . . . . .	36
3.3.3	Median . . . . .	38
3.4	Tolking av forskjeller; spredningsmål . . . . .	40
3.4.1	Variasjonsbredde . . . . .	40
3.4.2	Kvartilbredde . . . . .	41
3.4.3	Avvik, varians og standardavvik . . . . .	43
	Oppgaver . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Geometri</b>	<b>49</b>
4.1	Symmetri . . . . .	50
4.2	Omkrets, areal og volum med enheter . . . . .	55
	Oppgaver . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Brøkgregning</b>	<b>60</b>
5.1	Brøkdeler av helheter . . . . .	61
5.2	Prosent . . . . .	63
5.2.1	Prosentvis endring; økning eller redusering . . . . .	67
5.2.2	Vekstfaktor . . . . .	70

5.2.3	Prosentpoeng . . . . .	75
5.2.4	Gjentatt prosentvis endring . . . . .	78
5.3	Forhold . . . . .	80
5.3.1	Målestokk . . . . .	81
5.3.2	Blandingsforhold . . . . .	84
	Oppgaver . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Likninger, formler og funksjoner</b>	<b>91</b>
6.1	Å finne størrelser . . . . .	92
6.1.1	Å finne størrelser direkte . . . . .	92
6.1.2	Å finne størrelser indirekte . . . . .	93
6.2	Funksjoners egenskaper . . . . .	98
6.2.1	Funksjoner med samme verdi; skjæringspunkt . . .	98
6.2.2	Null-, bunn- og toppunkt . . . . .	102
6.3	Likningssett . . . . .	104
6.3.1	Innsettingsmetoden . . . . .	104
6.3.2	Grafisk metode . . . . .	108
	Oppgaver . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Økonomi</b>	<b>116</b>
7.1	Indeksregning . . . . .	117
7.1.1	Introduksjon . . . . .	117
7.1.2	Konsumprisindeks og basisår . . . . .	117
7.1.3	Kroneverdi . . . . .	119
7.1.4	Reallønn og nominell lønn . . . . .	120
7.2	Lån og sparing . . . . .	123
7.2.1	Lån . . . . .	123
7.2.2	Sparing; innskuddsrente og forventet avkastning .	128
7.3	Skatt . . . . .	130
7.3.1	Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag . . . . .	130
7.3.2	Trygdeavgift . . . . .	131
7.3.3	Trinnskatt . . . . .	132
7.3.4	Nettolønn . . . . .	134
7.4	Budsjett og regnskap . . . . .	135
7.4.1	Budsjett . . . . .	135
7.4.2	Regnskap . . . . .	136
	Oppgaver . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Sannsynlighet</b>	<b>141</b>
8.1	Grunnprinsippet . . . . .	142
8.2	Hendelser med og uten felles utfall . . . . .	144
8.2.1	Hendelser uten felles utfall . . . . .	144
8.2.2	Summen av alle sannsynligheter er 1 . . . . .	146

8.2.3	Felles utfall . . . . .	148
8.2.4	Vennndiagram . . . . .	151
8.2.5	Krysstabell . . . . .	156
8.3	Gjentatte trekk . . . . .	157
8.3.1	Permutasjoner . . . . .	157
8.3.2	Sannsynlighet ved gjentatte trekk . . . . .	160
8.3.3	Valgtre . . . . .	162
	Oppgaver . . . . .	166
<b>9</b>	<b>Digitale verktøy</b>	<b>167</b>
9.1	Programmering . . . . .	168
9.2	Regneark . . . . .	169
9.2.1	Introduksjon . . . . .	169
9.2.2	Utregninger . . . . .	169
9.2.3	Cellereferanser . . . . .	170
9.2.4	Kopiering og låsing av celler . . . . .	171
9.2.5	Andre nyttige funksjoner . . . . .	173
9.3	GeoGebra . . . . .	174
9.3.1	Introduksjon . . . . .	174
9.3.2	Å skrive inn punkt, funksjoner og linjer . . . . .	174
9.3.3	Å finne verdien til funksjoner og linjer . . . . .	176
9.3.4	Knapper og kommandoer . . . . .	178
	Oppgaver . . . . .	180
	<b>Vedlegg</b>	<b>183</b>
	<b>Fasit</b>	<b>184</b>



## Kapittel 1

# Utrekningsmetoder

## 1.1 Standardform

Vi kan utnytte [Regel ??](#) og [Regel ??](#), og det vi kan om potenser<sup>1</sup>, til å skrive tall på *standardform*.

La oss se på tallet 6 700. Av [Regel ??](#) vet vi at

$$6\,700 = 6,7 \cdot 1\,000$$

Og siden  $1000 = 10^3$ , er

$$6\,700 = 6,7 \cdot 1\,000 = 6,7 \cdot 10^3$$

$6,7 \cdot 10^3$  er 6 700 skrevet på standardform fordi

- 6,7 er større enn 0 og mindre enn 10.
- $10^3$  er en potens med grunntall 10 og eksponent 3, som er et heltall.
- 6,7 og  $10^3$  er ganget sammen.

---

La oss også se på tallet 0,093. Av [Regel ??](#) har vi at

$$0,093 = 9,3 : 100$$

Men å dele med 100 er det samme som å gange med  $10^{-2}$ , altså er

$$0,093 = 9,3 : 100 = 9,3 \cdot 10^{-2}$$

$9,3 \cdot 10^{-2}$  er 0,093 skrevet på standardform fordi

- 9,3 er større enn 0 og mindre enn 10.
- $10^{-2}$  er en potens med grunntall 10 og eksponent  $-2$ , som er et heltall.
- 9,3 og  $10^{-2}$  er ganget sammen.

---

<sup>1</sup>se [MB](#) s 101-106.

## 1.1 Standardform

Et tall skrevet som

$$a \cdot 10^n$$

hvor  $0 < a < 10$  og  $n$  er et heltall, er et tall skrevet på standardform.

### Eksempel 1

Skriv 980 på standardform.

**Svar:**

$$980 = 9,8 \cdot 10^2$$

### Eksempel 2

Skriv 0,00671 på standardform.

**Svar:**

$$0,00671 = 6,71 \cdot 10^{-3}$$

### Tips

For å skrive om tall på standardform kan du gjøre følgende:

1. Flytt komma slik at du får et tall som ligger mellom 0 og 10.
2. Gang dette tallet med en tierpotens som har eksponent med tallverdi lik antallet plasser du flyttet komma. Flyttet du komma mot venstre/høgre, er eksponenten positiv/negativ.

### Eksempel 3

Skriv 9 761 432 på standardform.

**Svar:**

1. Vi flytter komma 6 plasser til venstre, og får 9,761432
2. Vi ganger dette tallet med  $10^6$ , og får at

$$9\,761\,432 = 9,761432 \cdot 10^6$$

#### **Eksempel 4**

Skriv 0,00039 på standardform.

**Svar:**

1. Vi flytter komma 4 plasser til høyre, og får 3,9.
2. Vi ganger dette tallet med  $10^{-4}$ , og får at

$$0,00039 = 3,9 \cdot 10^{-4}$$

## 1.2 Regning med tid

Sekunder, minutter og timer er organisert i grupper på 60:

$$1 \text{ minutt} = 60 \text{ sekund}$$

$$1 \text{ time} = 60 \text{ minutt}$$

Dette betyr at *overganger* oppstår i utregninger når vi når 60.

### Eksempel 1

$$2 \text{ t } 25 \text{ min} + 10 \text{ t } 45 \text{ min} = 13 \text{ t } 10 \text{ min}$$

#### Utrekningsmetode 1

		10 t 45 min
15 min	15 min	11 t 00 min
10 min	25 min	11 t 10 min
2 t	2 t 25 min	13 t 10 min

#### Utrekningsmetode 2

		10:45
00:15	00:15	11:00
00:10	00:25	11:10
02:00	02:25	13:10

### Eksempel 2

$$14 \text{ t } 18 \text{ min} - 9 \text{ t } 34 \text{ min} = 4 \text{ t } 44 \text{ min}$$

#### Utrekningsmetode 1

	9 t 34 min
26 min	10 t 00 min
18 min	10 t 18 min
4 t	14 t 00 min
4 t 44 min	

#### Utrekningsmetode 2

	09:34
00:26	10:00
00:18	10:18
04:00	14:18
04:44	

## 1.3 Avrunding og overslagsregning

### 1.3.1 Avrunding

Ved *avrunding* av et tall minker vi antall siffer forskjellige fra 0 i et tall. Videre kan man runde av til *nærmeste ener*, *nærmeste tier* eller lignende.

#### Eksempel 1

Ved avrunding til *nærmeste ener* avrundes

- 1, 2, 3 og 4 *ned* til 0 fordi de er nærmere 0 enn 10.
- 6, 7, 8 og 9 *opp* til 10 fordi de er nærmere 10 enn 0.

5 avrundes også opp til 10.



#### Eksempel 2

- **63 avrundet til nærmeste tier = 60**

Dette fordi 63 er nærmere 60 enn 70.



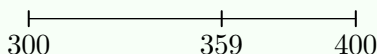
- **78 avrundet til nærmeste tier = 80**

Dette fordi 78 er nærmere 80 enn 70.



- **359 avrundet til nærmeste hundrer = 400**

Dette fordi 359 er nærmere 400 enn 300.



- **11,8 avrundet til nærmeste ener = 12**

Dette fordi 11,8 er nærmere 12 enn 11.



### 1.3.2 Overslagsregning

Det er ikke alltid vi trenger å vite svaret på regnestykker helt nøyaktig, noen ganger er det viktigere at vi fort kan avgjøre hva svaret *omtrent* er det samme som, aller helst ved hoderegning. Når vi finner svar som omtrent er riktige, sier vi at vi gjør et *overslag*. *Et overslag innebærer at vi avrunder tallene som inngår i et regnestykke slik at utregningen blir enklere.*

*Obs!* Avrunding ved overslag trenger ikke å innebære avrunding til nærmeste tier o.l.

#### Språkboksen

At noe er "omtrent det samme som" skriver vi ofte som "cirka" (ca.). Symbolet for "cirka" er  $\approx$ .

#### Overslag ved addisjon og ganging

La oss gjøre et overslag på regnestykket

$$98,2 + 24,6$$

Vi ser at  $98,2 \approx 100$ . Skriver vi 100 istedenfor 98,2 i regnestykket vårt, får vi noe som er litt mer enn det nøyaktige svaret. Skal vi endre på 24,6 bør vi derfor gjøre det til et tall som er litt mindre. 24,6 er ganske nærme 20, så vi kan skrive

$$98,2 + 24,6 \approx 100 + 20 = 120$$

Når vi gjør overslag på tall som legges sammen, bør vi altså prøve å gjøre det ene tallet større (runde opp) og et tall mindre (runde ned).

---

Det samme gjelder også hvis vi har ganging, for eksempel

$$1689 \cdot 12$$

Her avrunder vi 12 til 10. For å "veie opp" for at svaret da blir litt mindre enn det egentlige, avrunder vi 1689 opp til 1700. Da får vi

$$1689 \cdot 12 \approx 1700 \cdot 10 = 17\,000$$

## Overslag ved subtraskjon og deling

Skal et tall trekkes fra et annet, blir det litt annerledes. La oss gjøre et overslag på

$$186,4 - 28,9$$

Hvis vi runder 186,4 opp til 190 får vi et svar som er større enn det egentlige, derfor bør vi også trekke ifra noe. Det kan vi gjøre ved også å runde 28,9 oppover (til 30):

$$\begin{aligned} 186,4 - 28,9 &\approx 190 - 30 \\ &= 160 \end{aligned}$$

Samme prinsippet gjelder for deling:

$$145 : 17$$

Vi avrunder 17 opp til 20. Deler vi noe med 20 istedenfor 17, blir svaret mindre. Derfor bør vi også runde 145 oppover (til 150):

$$145 : 17 \approx 150 : 20 = 75$$

## Overslagsregning oppsummert

### 1.2 Overslagsregning

- Ved addisjon eller multiplikasjon mellom to tall, avrund gjerne et tall opp og et tall ned.
- Ved subtraksjon eller deling mellom to tall, avrund gjerne begge tall ned eller begge tall opp.

### Eksempel

Rund av og finn omtrentlig svar for regnestykkene.

a)  $23,1 + 174,7$       b)  $11,8 \cdot 107,2$

c)  $37,4 - 18,9$       d)  $1054 : 209$

**Svar:**

a)  $32,1 + 174,7 \approx 30 + 170 = 200$

b)  $11,8 \cdot 107,2 \approx 10 \cdot 110 = 1100$

c)  $37,4 - 18,9 \approx 40 - 20 = 20$

d)  $1054 : 209 \approx 1000 : 200 = 5$



## Kommentar

Det finnes ingen konkrete regler for hva man *kan* eller ikke *kan* tillate seg av forenklinger når man gjør et overslag, det som er kalt [Regel 1.2](#) er strengt tatt ikke en regel, men et nyttig tips.

Man kan også spørre seg hvor langt unna det faktiske svaret man kan tillate seg å være ved overslagsregning. Heller ikke dette er det noe fasitsvar på, men en grei føring er at overslaget og det faktiske svaret skal være av samme *størrelsesorden*. Litt enkelt sagt betyr dette at hvis det faktiske svaret har med tusener å gjøre, bør også overslaget ha med tusener å gjøre. Mer nøyaktig sagt betyr det av det faktiske svaret og ditt overslag bør ha samme tierpotens når de er skrevet på standardform.

# Oppgaver for kapittel 1

## 1.1.1

Skriv tallet på standardform.

- a) 98 000      b) 167 000 000      c) 4 819      d) 21  
e) 9 132,27      f) 893,7      g) 18 002,1      h) 302,4

## 1.1.2

Skriv tallet på standardform.

- a) 0,027      b) 0,0001901      c) 0,32      d) 0,00000020032

## 1.1.3

Gitt regnestykket

$$900\,000\,000 \cdot 0,00007$$

- a) Forklar hvorfor regnestykket kan skrives som

$$9 \cdot 10^8 \cdot 7 \cdot 10^{-5}$$

- b) Bruk potensregler (se [MB](#), s 101-106) og finn svaret på regnestykket fra a).

## Kapittel 2

# Størrelser og enheter

## 2.1 Størrelser, enheter og prefikser

Det vi kan måle og uttrykke med tall, kaller vi *størrelser*. En størrelse består gjerne av både en verdi og en *enhet*, og i denne seksjonen skal vi se på disse tre enhetene:

enhet	forkortelse	enhet for
meter	m	lengde
gram	g	masse
liter	L	volum

Noen ganger har vi veldig store eller veldig små størrelser, for eksempel er det ca 40 075 000 m rundt ekvator! For så store tall er det vanlig å bruke en *prefiks*. Da kan vi skrive at det er ca 40 075 km rundt ekvator. Her står 'km' for 'kilometer', og 'kilo' betyr '1 000'. Så 1 000 meter er altså 1 kilometer. Her er prefiksene man oftest<sup>1</sup> møter på i hverdagen:

prefiks	forkortelse	verdi
kilo	k	1 000
hekto	h	100
deka	da	10
desi	d	0,1
centi	c	0,01
milli	m	0,001

Bruker vi denne tabellen i kombinasjon med enhetene kan vi for eksempel se at

$$1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$$

$$0,1 \text{ m} = 1 \text{ dm}$$

$$0,01 \text{ L} = 1 \text{ cL}$$

Enda ryddigere kan vi få det hvis vi lager en vannrett tabell (se neste side) med meter, gram eller liter lagt til i midten<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Unntaket er 'deka', som er en veldig lite brukt prefiks, men vi har tatt den med fordi den kompletterer tallmønsteret.

<sup>2</sup>Legg merke til at 'meter', 'gram' og 'liter' er *enheter*, mens 'kilo', 'hekto' osv. er *tall*. Det kan derfor virke litt rart å sette dem opp i samme tabell, men for vårt formål fungerer det helt fint.

## 2.1 Omgjøring av prefikser

Når vi skal endre prefikser kan vi bruke denne tabellen:

	kilo		hekto		deka		m/g/L		desi		centi		milli	
--	------	--	-------	--	------	--	-------	--	------	--	-------	--	-------	--

Komma må flyttes like mange ganger som antall ruter vi må flytte oss fra opprinnelig prefiks til ny prefiks.

For lengde brukes også enheten 'mil' (1 mil = 10 000 m). Denne kan legges på til venstre for 'kilo'.

### Eksempel 1

Skriv om 23,4 mL til antall L.

#### Svar:

Vi skriver tabellen vår med L i midten, og legger merke til at vi må *tre ruter til venstre* for å komme oss fra mL til L:

	kilo		hekto		deka		L		desi		centi		milli	
--	------	--	-------	--	------	--	---	--	------	--	-------	--	-------	--

Det betyr at vi må flytte kommaet vårt tre plasser til venstre for å gjøre om mL til L:

$$23,4 \text{ mL} = 0,0234 \text{ L}$$

### Eksempel 2

Skriv om 30 hg til antall cg.

#### Svar:

Vi skriver tabellen vår med g i midten og legger merke til at vi må *fire ruter til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

	kilo		hekto		deka		g		desi		centi		milli	
--	------	--	-------	--	------	--	---	--	------	--	-------	--	-------	--

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fire plasser til høyre for å gjøre om hg til cg:

$$30 \text{ mg} = 300\,000 \text{ cg}$$

### Eksempel 3

Gjør om 12 500 dm til antall mil.

#### Svar:

Vi skriver tabellen vår med m i midten, legger til 'mil', og merker oss at vi må *fem ruter til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

| mil | kilo | hekto | deka | m | desi | centi | milli |

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fem plasser til høyre for å gjøre om mil til dm:

$$12\,500\text{ dm} = 0,125\text{ mil}$$

### 2.1 Omgjøring av prefikser (forklaring)

Omgjøring av prefikser handler om å gange/dele med 10, 100 osv. (se [Seksjon ??](#) og [Seksjon ??](#))

La oss som første eksempel skrive om 3,452 km til antall meter. Vi har at

$$\begin{aligned} 3,452\text{ km} &= 3,452 \cdot 1000\text{ m} \\ &= 3\,452\text{ m} \end{aligned}$$

La oss som andre eksempel skrive om 47 mm til antall meter. Vi har at

$$\begin{aligned} 47\text{ mm} &= 47 \cdot \frac{1}{1000}\text{ m} \\ &= (47 : 1000)\text{ m} \\ &= 0,047\text{ m} \end{aligned}$$

## 2.2 Regning med forskjellige benevninger

En (eventuell) prefiks og en enhet utgjør en *benevning*. For eksempel, 9 km har benevningen 'km', mens 9 m har benevningen 'm'. Når vi skal utføre regneoperasjoner med størrelser som har benevning, er det helt avgjørende at vi passer på at benevningene som er involvert er de samme.

### Eksempel 1

Regn ut  $5 \text{ km} + 4\,000 \text{ m}$ .

#### Svar:

Her må vi enten gjøre om 5 km til antall m eller 4 000 m til antall km før vi kan legge sammen verdiene. Vi velger å gjøre om 5 km til antall m:

$$5 \text{ km} = 5\,000 \text{ m}$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} 5 \text{ km} + 4\,000 \text{ m} &= 5\,000 \text{ m} + 4\,000 \text{ m} \\ &= 9\,000 \text{ m} \end{aligned}$$

### Tips

I mange utregninger kan enheter føre til at uttrykkene blir litt rotete. Hvis du er helt sikker på at alle benevningene er like, kan du med fordel skrive utregninger uten benevning. I *Eksempel 1* over kunne vi da regnet ut

$$5\,000 + 4\,000 = 9\,000$$

Men merk at i et endelig svar *må* vi ha med benevning:

$$5 \text{ km} + 4\,000 \text{ m} = 9\,000 \text{ m}$$

## Eksempel 2

Hvis du kjører med konstant fart, er strekningen du har kjørt etter en viss tid gitt ved formelen

$$\text{strekning} = \text{fart} \cdot \text{tid}$$

- a) Hvor langt kjører en bil som holder farten 50 km/h i 3 timer?
- b) Hvor langt kjører en bil som holder farten 90 km/h i 45 minutt?

### Svar:

- a) I formelen er nå farten 50 og tiden 3, og da er

$$\text{strekning} = 50 \cdot 3 = 150$$

Altså har bilen kjørt 150 km

- b) Her har vi to forskjellige enheter for tid involvert; timer og minutt. Da må vi enten gjøre om farten til km/min eller tiden til timer. Vi velger å gjøre om minutt til timer:

$$\begin{aligned} 45 \text{ minutt} &= \frac{45}{60} \text{ timer} \\ &= \frac{3}{4} \text{ timer} \end{aligned}$$

I formelen er nå farten 90 og tiden  $\frac{3}{4}$ , og da er

$$\text{strekning} = 90 \cdot \frac{3}{4} = 67.5$$

Altså har bilen kjørt 67.5 km.



### Eksempel 3

*Kiloprisen* til en vare er hva en vare koster per kg. Kilopris er gitt ved formelen

$$\text{kilopris} = \frac{\text{pris}}{\text{vekt}}$$

- a) 10 kg tomater koster 35 kr. Hva er kiloprisen til tomatene?
- b) Safran går for å være verdens dyreste krydder, 5 g kan koste 600 kr. Hva er da kiloprisen på safran?

**Svar:**

- a) I formelen er nå prisen 35 og vekten 10, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{35}{10} = 3,5$$

Altså er kiloprisen på tomater 3,5 kr/kg

- b) Her har vi to forskjellige enheter for vekt involvert; kg og gram. Vi gjør om antall g til antall kg (se ??):

$$5 \text{ g} = 0,005 \text{ kg}$$

I formelen vår er nå prisen 600 og vekten 0,005, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{600}{0,005} = 120\,000$$

Altså koster safran 120 000 kr/kg.

## Oppgaver for kapittel 2

### 2.1.1

Gjør om til antall meter.

- a) 484 km      b) 91 km      c) 2 402 km

### 2.1.2

Gjør om til antall gram.

- a) 484 kg      b) 91 hg      c) 2 402 hg

### 2.1.3

Gjør om til antall liter

- a) 480 dl      b) 9100 cl      c) 24 000 cl

### 2.1.4

Gjør om

- |                               |                                |                              |
|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| a) 12,4 m<br>til antall km.   | f) 9,7 g<br>til antall hg.     | k) 89 dL<br>til antall L.    |
| b) 42 dm<br>til antall m.     | g) 0,15 mg<br>til antall g.    | l) 691,4 L<br>til antall cL. |
| c) 58,15 cm<br>til antall mm. | h) 1,419 hg<br>til antall mg.  | m) 15 L<br>til antall mL.    |
| d) 0,0074 km<br>til antall m. | i) 31 mg<br>til antall hg.     | n) 918 cL<br>til antall L.   |
| e) 0,15 m<br>til antall cm.   | j) 64 039 mg<br>til antall kg. | o) 0,55 dL<br>til antall mL. |

### 2.2.1

En prisme har lengde 9, bredde 10 og høyde 8.

- a) Finn grunnflaten til prismet.  
b) Finn volumet til prismet.

### 2.2.2

En kjegle har radius 10 og høyde 4.

- a) Finn grunnflaten til kjeglen.
- b) Finn volumet til kjeglen.

### 2.2.3

En prisme har lengde 9 cm, bredde 10 cm og høyde 8 cm.

Finn volumet til prismet.

### 2.2.4

En kjegle har radius 10 dm og høyde 4 dm.

- a) Finn volumet til kjeglen.
- b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

### 2.2.5

En firkantet pyramide har lengde 4 cm, bredde 9 cm og høyde 10 cm.

- a) Finn volumet til kjeglen.
- b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

## Kapittel 3

# Statistikk

## 3.1 Introduksjon

I en *undersøkelse* henter vi inn informasjon. Denne informasjonen kan gjerne være tall eller ord, og kalles *data*. En samling av innhentet data kalles et *datasett*.

For eksempel, tenk at du spør to mennesker om de liker kaviar. Den ene svarer "ja", den andre "nei". Da er "ja" og "nei" dataene (svarene) du har samlet inn, og {"ja", "nei"} er datasettet ditt.

Statistikk handler grovt sett om to ting; å *presentere* og å *tolke* innsamlet data. For begge disse formålene har vi noen verktøy som vi i kommende seksjoner skal studere ved hjelp av noen forskjellige eksempler på undersøkelser. Disse finner du på side 30.

Det er ikke noen fullstendige fasitsvar på hvordan en presenterer eller tolker data, men to retningslinjer bør du alltid ha med deg:

- La det alltid komme tydelig fram hva du har undersøkt, og hvilke data som er innhentet.
- Tenk alltid over hvilke metoder du bruker for å tolke dataene.

### Språkboksen

Personer som deltar i en undersøkelse der man skal svare på noe, kalles *respondenter*.

### Undersøkelse 1

10 personer testet hvor mange sekunder de kunne holde pusten. Resultatene ble disse:

47 124 61 38 97 84 101 79 56 40

### Undersøkelse 2

15 personer ble spurt hvor mange epler de spiser i løpet av en uke. Svarene ble disse:

7 4 5 4 1 0 6 5 4 8 1 6 8 0 14

### Undersøkelse 3

300 personer ble spurt hva deres favorittdyr er.

- 46 personer svarte tiger
- 23 personer svarte løve
- 17 personer svarte krokodille
- 91 personer svarte hund
- 72 personer svarte katt
- 51 personer svarte andre dyr

### Undersøkelse 4

Mobiltelefoner med smartfunksjoner (app-baserte) kom på det norske markedet i 2009. Tabellen<sup>1</sup> under viser det totale salget mobiltelefoner i tidsperioden 2009-2014, og andelen med og uten smartfunksjoner.

År	2009	2010	2011	2012	2013	2014
totalt	2 365	2 500	2 250	2 200	2 400	2 100
u. sm.f.	1 665	1 250	790	300	240	147
m. sm.f.	700	1 250	1 460	1 900	2 160	1 953

---

<sup>1</sup>Tallene er hentet fra [medienorge.uib.no](http://medienorge.uib.no).

## 3.2 Presentasjonsmetoder

Skal vi presentere våre undersøkelser, bør vi vise datasettene slik at det er lett for andre å se hva vi har funnet. Dette kan vi gjøre blant annet ved hjelp av *frekvenstabeller*, *søylediagram*, *sektordiagram* eller *linjediagram*.

### 3.2.1 Frekvenstabell

I en frekvenstabell setter man opp dataene i en tabell som viser hvor mange ganger hvert unike svar dukker opp. Dette antallet kalles *frekvensen*.

#### Undersøkelse 2

I vår undersøkelse har vi to 0, to 1, tre 4, to 5, to 6, én 7, to 8 og én 14. I en frekvenstabell skriver vi da

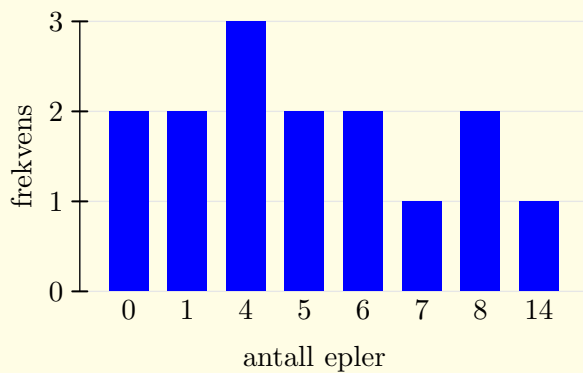
antall epler	frekvens
0	2
1	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	2
14	1

### 3.2.2 Søylediagram (stolpediagram)

Med et søylediagram presenterer vi dataene med søyler som viser frekvensen.

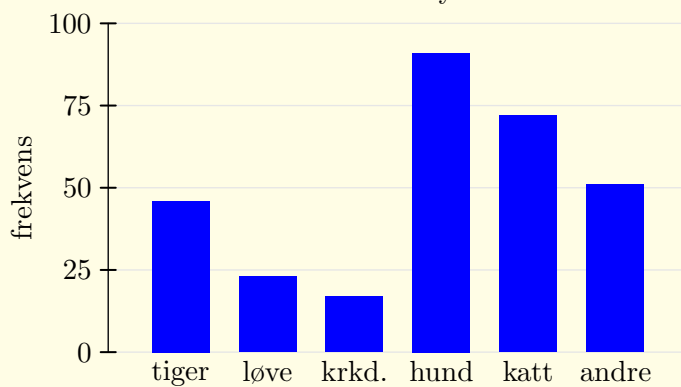
#### Undersøkelse 2

”Hvor mange epler spiser du i løpet av uka?”



#### Undersøkelse 3

”Hva er favorittdyret ditt?”



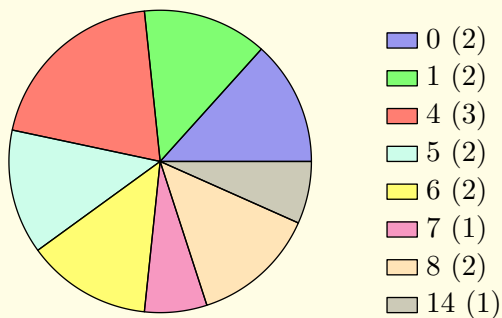


### 3.2.3 Sektordiagram (kakediagram)

I et sektordiagram vises frekvensene som sektorer av en sirkel.

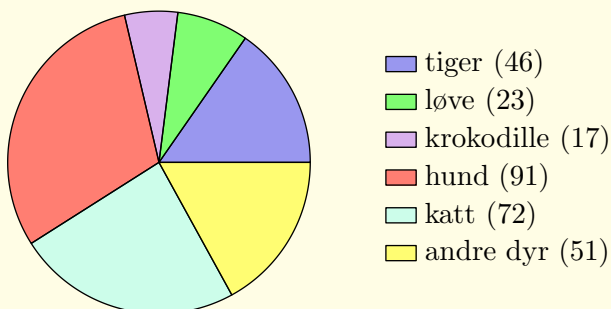
#### Undersøkelse 2

Epler spist i løpet av uka (frekvens i parantes)



#### Undersøkelse 3

Favorittdyr (frekvens i parantes)



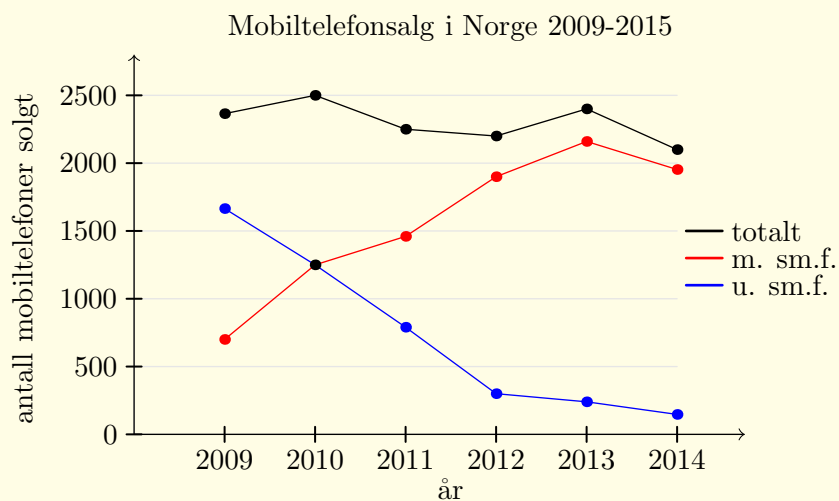
#### Å lage et sektordiagram for hand

Skal du selv tegne et sektordiagram, trenger du kunnskaper om vinkler og om brøkandeler. Se [Seksjon 5.1, MB](#), s. 76 og oppgave ??.

### 3.2.4 Linjediagram

I et linjediagram legger vi inn dataene som punkt i et koordinatsystem, og trekker en linje mellom dem. Linjediagram brukes oftest når det er snakk om en form for utvikling.

#### Undersøkelse 4



## 3.3 Tolking av tendenser; sentralmål

I et datasett er det gjerne svar som er helt eller tilnærmet like, og som gjentar seg. Dette betyr at vi kan si noe om hva som gjelder for mange; en *tendens*. De matematiske begrepene som forteller noe om dette kalles *sentralmål*. De vanligste sentralmålene er *typetall*, *gjennomsnitt* og *median*.

### 3.3.1 Typetall

#### 3.1 Typetall

Typetallet er verdien det er flest eksemplarer av i datasettet.

#### Undersøkelse 2

I datasettet er det verdien 4 som opptrer flest (tre) ganger. (Dette kan vi se fra selve datasett på s. 30, fra frekvenstabellen på s. 31, fra søylediagrammet på s. 32 eller sektordiagrammet på s. 33.)

4 er altså typetallet.

### 3.3.2 Gjennomsnitt

Når et datasett består av svar i form av tall kan vi finne summen av svarene. Når vi spør hva gjennomsnittet er, spør vi om dette:

*”Hvis alle svarene var like, og summen den samme, hvilken verdi måtte alle svarene da ha hatt?”*

Dette er jo ingenting annet enn divisjon<sup>1</sup>:

#### 3.2 Gjennomsnitt

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{summen av verdiene fra datasettet}}{\text{antall verdier}}$$

#### Undersøkelse 1

Vi summerer verdiene fra datasettet, og deler med antall verdier:

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{47 + 124 + 61 + 38 + 97 + 84 + 101 + 79 + 56 + 40}{10} \\ &= \frac{727}{10} \\ &= 72,7\end{aligned}$$

Altså, i gjennomsnitt holdt de 10 deltakerne pusten i 72,7 sekunder.

---

<sup>1</sup>se [MB](#), side 23.

## Undersøkelse 2

### Metode 1

---

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{7 + 4 + 5 + 4 + 1 + 0 + 6 + 5 + 4 + 8 + 1 + 6 + 8 + 0 + 14}{15} \\ &= \frac{73}{15} \\ &\approx 4.87\end{aligned}$$

### Metode 2

---

Vi utvider frekvenstabellen fra side 31 for å finne summen av verdiene fra datasettet (vi har også tatt med summen av frekvensene):

Antall epler	Frekvens	antall · frekvens
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	2	$1 \cdot 2 = 2$
4	3	$4 \cdot 3 = 12$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$
6	2	$6 \cdot 2 = 12$
7	1	$7 \cdot 1 = 14$
8	1	$8 \cdot 2 = 16$
14	1	$14 \cdot 1 = 14$
<b>sum</b>	15	73

Nå har vi at

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{73}{15} \\ &\approx 4,87\end{aligned}$$

Altså, i gjennomsnitt spiser de 15 respondentene 4,87 epler i uka.

### Undersøkelse 4

(Utrekning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

- Gjennomsnitt for totalt salg av mobiler: 2302
- Gjennomsnitt for salg av mobiler uten smartfunksjon: 732
- Gjennomsnitt for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

### 3.3.3 Median

#### 3.3 Median

Medianen er tallet som ender opp i midten av datasettet når det rangeres fra tallet med lavest til høyest verdi.

Hvis datasettet har partalls antall verdier, er medianen gjennomsnittet av de to verdiene i midten (etter rangering).

#### Undersøkelse 1

Vi rangerer datasettet fra lavest til høyest verdi:

38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

De to tallene i midten er 61 og 79. Gjennomsnittet av disse er

$$\frac{61 + 79}{2} = 70$$

Altså er medianen 70.

#### Undersøkelse 2

Vi rangerer datasettet fra lavest til høyest verdi:

0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14

Tallet i midten er 5, altså er medianen 5.

#### Undersøkelse 4

(Utrekning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

- Median for totalt salg av mobiler: 2307
- Median for salg av mobiler uten smartfunksjon: 545
- Median for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

## 3.4 Tolking av forskjeller; spredningsmål

Ofte vil det også være store forskjeller (stor spredning) mellom dataene som er samlet inn. De vanligste matematiske begrepene som forteller noe om dette er *variasjonsbredde*, *kvartilbredde*, *varians* og *standardavvik*.

### 3.4.1 Variasjonsbredde

#### 3.4 Variasjonsbredde

Differansen mellom svarene med henholdsvis høyest og lavest verdi.

#### Undersøkelse 1

Svaret med henholdsvis høyest og lavest verdi er 124 og 38. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 124 - 38 = 86$$

#### Undersøkelse 2

Svaret med henholdsvis høyest og lavest verdi er 14 og 0. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 14 - 0 = 14$$

#### Undersøkelse 4

- Variasjonsbredde for mobiler totalt:

$$2\,500 - 2\,100 = 400$$

- Variasjonsbredde for mobiler uten smartfunksjoner:

$$1\,665 - 147 = 518$$

- Variasjonsbredde for mobiler med smartfunksjoner:

$$2\,160 - 700 = 1460$$



### 3.4.2 Kvartilbredde

#### 3.5 Kvartilbredde og øvre og nedre kvartil

Kvartilbredden til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Ranger datasettet fra høgest til lavest verdi.
2. Skill det rangerte datasettet på midten, slik at to nye sett oppstår. (Viss det er oddetalls antall verdier i datasettet, utelates medianen).
3. Finn de respektive medianene i de to nye settene.
4. Finn differansen mellom medianene fra punkt 3.

Om medianene fra punkt 3: Den med høgest verdi kalles *øvre kvartil* og den med lavest verdi kalles *nedre kvartil*.

#### Undersøkelse 1

1. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124
2. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124
3. Medianen i det blå settet er 47 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 97 (øvre kvartil).

38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

4. Kvartilbredde =  $97 - 47 = 50$

#### Undersøkelse 2

1. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14
2. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14
3. Medianen i det blå settet er 1 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 7 (øvre kvartil).

0 0 1 1 4 4 4 5 6 6 7 8 8 14

4. Kvartilbredde =  $7 - 1 = 6$

## Undersøkelse 4

(Utrekning utelatt)

- For mobiler totalt er kvartilbredden: 200
- For mobiler uten smartfunksjoner er kvartilbredden: 1010
- For mobiler med smartfunksjoner er kvartilbredden: 703

## Språkboksen

Nedre kvartil, medianen og øvre kvartil blir også kalt henholdsvis *1. kvartil*, *2. kvartil* og *3. kvartil*.

### 3.4.3 Avvik, varians og standardavvik

#### 3.6 Varians

Differansen mellom en verdi og gjennomsnittet i et datasett kalles *avviket* til verdien.

Variansen til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Kvadrer avviket til hver verdi i datasettet, og summer disse.
2. Divider med antall verdier i datasettet.

*Standardavviket* er kvadratroten av variansen.

#### Eksempel

Gitt datasettet

2 5 9 7 7

Da har vi at

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{2 + 5 + 9 + 7 + 7}{5} = 6$$

Og videre er

$$\begin{aligned}\text{variansen} &= \frac{(2 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (9 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (7 - 6)^2}{5} \\ &= 5\end{aligned}$$

Da er standardavviket  $= \sqrt{5} \approx 2,23$ .

#### Undersøkelse 1

(Utrekning utelatt)

Variansen er 754,01. Standardavviket er  $\sqrt{754,01} \approx 27,46$

## Undersøkelse 2

Gjennomsnittet fant vi på side 37. Vi utvider frekvenstabellen vår fra side 31:

antall epler	frekvens	frekvens · kvadrert avvik
0	2	$2 \cdot \left(0 - \frac{73}{15}\right)^2$
1	2	$2 \cdot \left(1 - \frac{73}{15}\right)^2$
4	3	$3 \cdot \left(4 - \frac{73}{15}\right)^2$
5	2	$2 \cdot \left(5 - \frac{73}{15}\right)^2$
6	2	$2 \cdot \left(6 - \frac{73}{15}\right)^2$
7	1	$1 \cdot \left(7 - \frac{73}{15}\right)^2$
8	2	$2 \cdot \left(8 - \frac{73}{15}\right)^2$
14	1	$1 \cdot \left(9 - \frac{73}{15}\right)^2$
sum	15	189,7 $\bar{3}$

Altså er variansen

$$\frac{189,7\bar{3}}{15} \approx 12,65$$

Da er standardavviket  $\sqrt{12,65} \approx 3.57$

## Undersøkelse 4

(Utrekning utelatt)

- For mobiler totalt er variansen 17 781,25 og standardavviket ca. 133,4.
- For mobiler uten smartfunksjoner er variansen 318 848. $\bar{3}$  og standardavviket ca. 17,87
- For mobiler med smartfunksjoner er variansen 245 847.91 $\bar{6}$  og standardavviket ca. 495,83.

## Hvorfor innebærer variansen kvadrering?

La oss se hva som skjer hvis vi gjentar utregningen fra *Eksempel 1* på side 43, men uten å kvadrere:

$$\begin{aligned} & \frac{(2 - 6) + (5 - 6) + (9 - 6) + (7 - 6) + (7 - 6)}{5} \\ &= \frac{2 + 5 + 9 + 7 + 7}{5} - 6 \end{aligned}$$

Men brøken  $\frac{2+5+9+7+7}{5}$  er jo per definisjon gjennomsnittet til datasettet, og dermed blir uttrykket over lik 0. Dette vil gjelde for alle datasett, så i denne sammenhengen gir ikke tallet 0 noen ytterligere informasjon. Om vi derimot kvadrerer avvikene, unngår vi et uttrykk som alltid blir lik 0.

## Oppgaver for kapittel 3

### 3.2.1

Gitt datasettet

2   12   3   0   2   5   8   2   10

Finn

a) typetallet      b) medianen      c) gjennomsnittet

### 3.2.2

Gitt datasettet

9   12   3   0   8   5   8   4   10   5   6

Finn

a) typetallet      b) medianen      c) gjennomsnittet

### 3.2.3

Gitt datasettet

11   7   16   0   8   9   8   5   16   5

Finn

a) typetallet      b) medianen      c) gjennomsnittet

### 3.2.4

Gitt datasettet

6   11   14   5   6   9   8   5   11   5   11   17

Finn

a) typetallet      b) medianen      c) gjennomsnittet

### 3.2.5

Du ønsker å finne ut hva nordmenn flest har i formue<sup>1</sup>, og bestemmer deg for å finne ut av dette ved å spørre fem tilfeldige personer du møter i gata. De fire første svarene (i kr) er disse:

3,2 millioner      2,9 millioner      1,8 millioner      4,2 millioner

Den siste personen du tilfeldigvis møter er mannen i Norge med høyest formue<sup>2</sup>, Gustav Magnar Witzøe. Hans svar er dette:

20 915,3 millioner

- a) Finn medianen i datasettet.
- b) Finn gjennomsnittet i datasettet.
- c) Er det medianen eller gjennomsnittet som trolig best representerer hva nordmenn flest har i formue?

### 3.2.6

Lag en frekvenstabell for datasettet under. (La tittelen til venstre kolonne være "frukt".)

banan	eple	eple	eple	pære	banan	eple	pære
	appelsin	eple	pære	pære			

### 3.2.7

Lag en frekvenstabell for datasettet fra oppgave 3.2.4. (La tittelen til venstre kolonne være "tall".)

### 3.2.8

- a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 3.2.6.
- b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 3.2.7.

### 3.2.9 (regneark)

- a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 3.2.6.
- b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 3.2.7.

---

<sup>1</sup>Enkelt sagt er formue summen av penger du har i banken, verdier av hus, bil etc., fratrukket gjeld o.l.

<sup>2</sup>Ifølge ligningstallene for 2019.

### 3.2.10

Av de fire undersøkelsene på side 30, hvorfor har vi

- a) vist frekvenstabell bare for undersøkelse 2?
- b) vist søylediagram bare for undersøkelse 2 og 3?
- c) vist sektordiagram bare for undersøkelse 2 og ?
- d) vist linjediagram bare for undersøkelse 4?

### 3.2.11

Hvis datasettet har partalls antall svar kan man også finne medianen slik:

1. Finn de to tallene i midten.
2. Finn differansen mellom tallene, og del denne med 2.
3. Legg resultatet fra punkt 2 til det laveste av de to tallene i midten.

- a) Prøv metoden på datasettet fra oppgave 3.2.3.

### 3.2.12

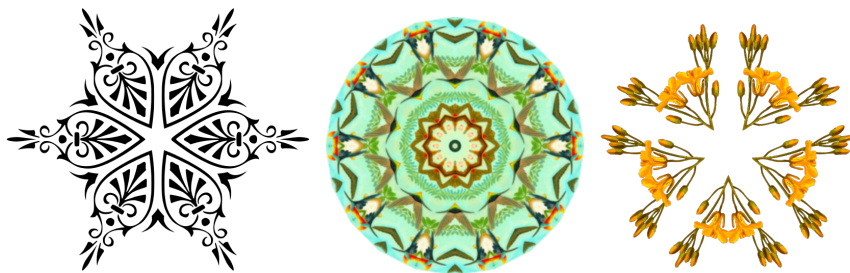
Av de fire undersøkelsene på side 30, hvorfor har vi ikke funnet sentral- og spredningsmål for undersøkelse 3?



## Kapittel 4

# Geometri

## 4.1 Symmetri



Bilder hentet fra [freessvg.org](https://www.freepress.org).

Mange figurer kan deles inn i minst to deler hvor den éne delen bare er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av den andre. Dette kalles *symmetri*. De tre kommende regelboksene definerer de tre variantene for symmetri, men merk dette: Symmetri blir som regel intuitivt forstått ved å studere figurer, men er omstendelig å beskrive med ord. Her vil det derfor, for mange, være en fordel å hoppe rett til eksemplene.

### 4.1 Translasjonssymmetri (parallellforskyvning)

En symmetri hvor minst to deler er forskjøvne utgaver av hverandre kalles en *translasjonssymmetri*.

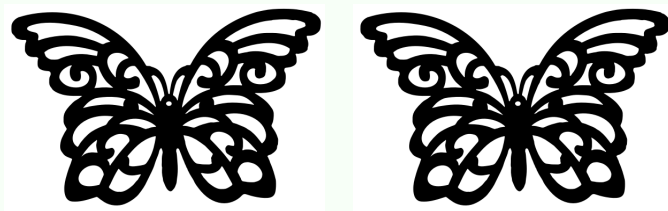
Når en form forskyves, blir hvert punkt på formen flyttet langs den samme vektoren<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>En vektor er et linjestykke med retning.

#### Eksempel 1

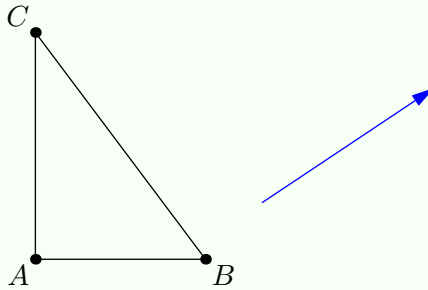
Figuren under viser en translasjonssymmetri som består av to sommerfugler.



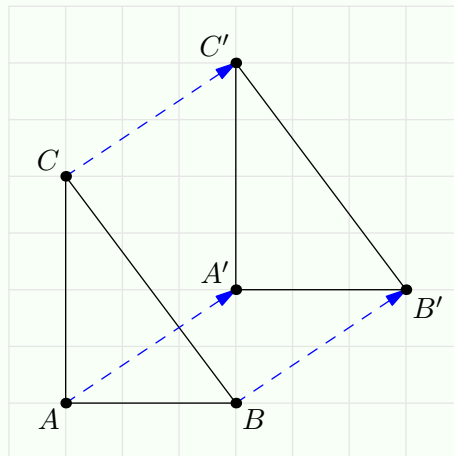
Bilde hentet fra [freessvg.org](https://www.freepress.org).

## Eksempel 2

Under vises  $\triangle ABC$  og en blå vektor.



Under vises  $\triangle ABC$  forskjøvet med den blå vektoren.



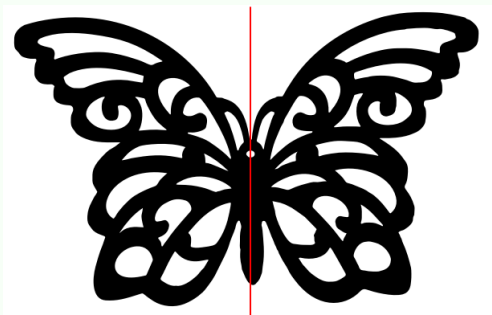
## 4.2 Speiling

En symmetri hvor minst to deler er vendte utgaver av hverandre kalles en *speilingssymmetri* og har minst én *symmetrilinje* (*symmetriakse*).

Når et punkt speiles, blir det forskjøvet vinkelrett på symmetrilinja, fram til det nye og det opprinnelige punktet har samme avstand til symmetrilinja.

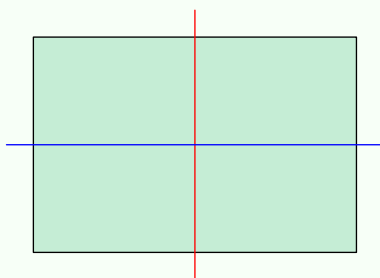
### Eksempel 1

Sommerfuglen er en speilsymmetri, med den røde linja som symmetrilinje.



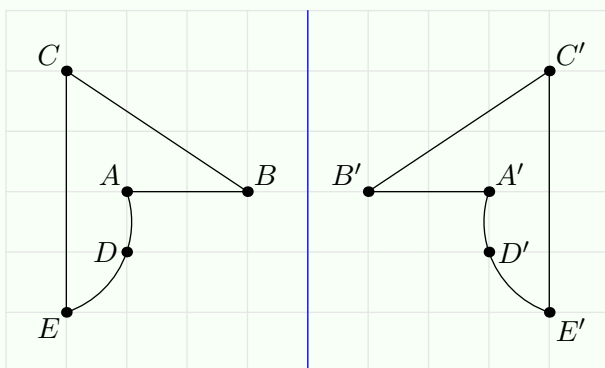
### Eksempel 2

Den røde linja og den blå linja er begge symmetrilinjer til det grønne rektangelet.



### Eksempel 3

Under vises en form laget av punktene  $A, B, C, D, E$  og  $F$ , og denne formen speilet om den blå linja.



### 4.3 Rotasjonssymmetri

En symmetri hvor minst to deler er en rotert utgave av hverandre kalles en *rotasjonssymmetri* og har alltid et tilhørende *rotasjonspunkt* og en *rotasjonsvinkel*.

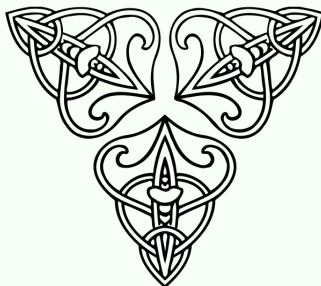
Når et punkt roteres vil det nye og det opprinnelige punktet

- ligge langs den samme sirkelbuen, som har sentrum i rotasjonspunktet.
- med rotasjonspunktet som toppunkt danne rotasjonsvinkelen.

Hvis rotasjonsvinkelen er et positivt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *mot* klokka. Hvis rotasjonsvinkelen er et negativt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *med* klokka.

#### Eksempel 1

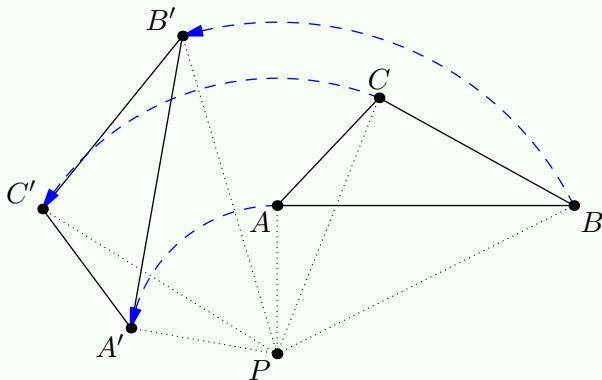
Mønsteret under er rotasjonssymmetrisk. Rotasjonssenteret er i midten av figuren og rotasjonsvinkelen er  $120^\circ$



Bilde hentet fra [freesvg.org](https://freesvg.org).

## Eksempel 2

Figuren under viser  $\triangle ABC$  rotert  $80^\circ$  om rotasjonspunktet  $P$ .



Da er

$$PA = PA' \quad , \quad PB = PB' \quad , \quad PC = PC'$$

og

$$\angle APA' = \angle BPB' = \angle CPC' = 80^\circ$$

## Språkboksen

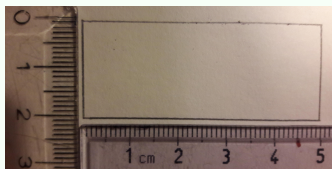
En form som er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av en annen form, kalles en *kongruensavbildning*.

## 4.2 Omkrets, areal og volum med enheter

*Merk: I eksemplene til denne seksjonen bruker vi areal- og volumformler som du finner i [MB](#).*

Når vi måler lengder med linjal eller lignende, må vi passe på å ta med benevningene i svaret vårt.

### Eksempel 1



$$\begin{aligned}\text{Omkretsen til rektangelet} &= 5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} \\ &= 14 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 2 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \\ &= 2 \cdot 5 \text{ cm}^2 \\ &= 10 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Vi skriver  $\text{cm}^2$  fordi vi har ganget sammen 2 lengder som vi har målt i cm.

## Eksempel 2

En sylinder har radius 4 m og høyde 2 m. Finn volumet til sylind-  
deren.

### Svar:

Så lenge vi er sikre på at størrelsene vår har samme benevning  
(i dette tilfellet 'm'), kan vi først regne uten størrelser:

$$\begin{aligned}\text{grunnflate til sylindringen} &= \pi \cdot 4^2 \\ &= 16\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{volumet til sylindringen} &= 16\pi \cdot 2 \\ &= 32\pi\end{aligned}$$

Vi har her ganget sammen tre lengder (to faktorer lik 4 m og  
én faktor lik 2 m) med meter som enhet, altså er volumet til  
sylindringen  $32\pi \text{ m}^3$ .

## Merk

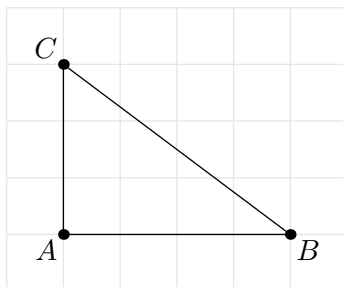
Når vi finner volumet til gjenstander, måler vi gjerne lengder  
som høyde, bredde, radius og lignende. Disse lengdene har en-  
heten 'meter'. Men i det daglige oppgir vi gjerne volum med  
enheten 'liter'. Da er det verdt å ha med seg at

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$



## Oppgaver for kapittel 4

### 4.1.1

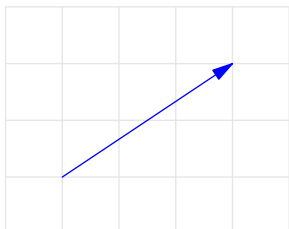


Forskyv trekanten med linjestykkene vist under

a)



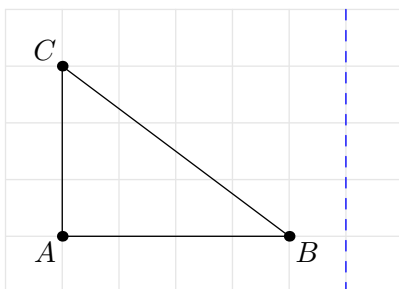
b)



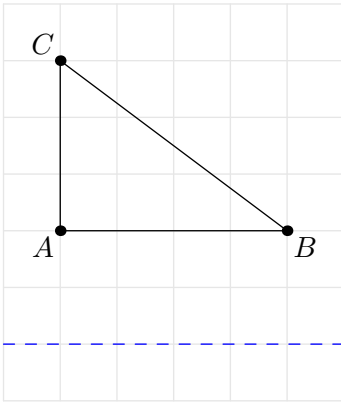
### 4.1.2

Speil trekanten om symmetrilinja.

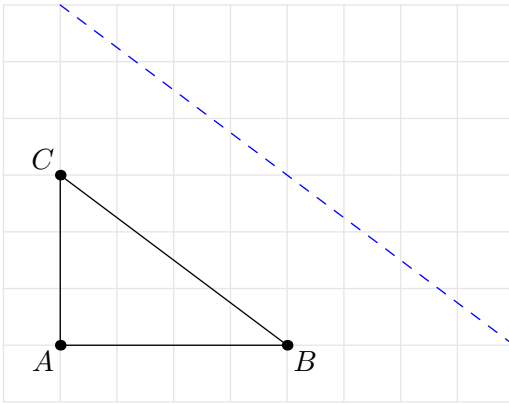
a)



b)



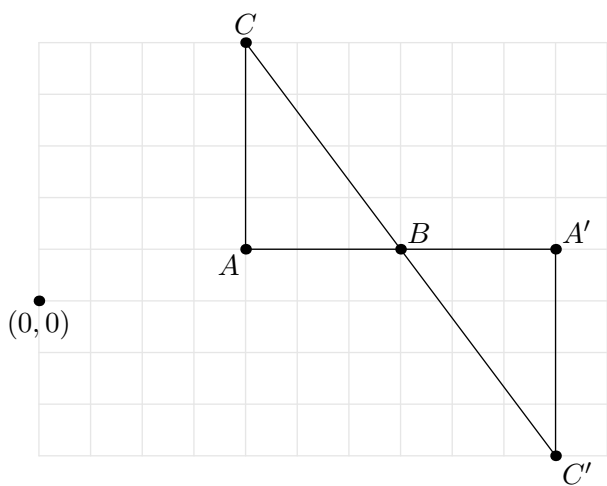
c)



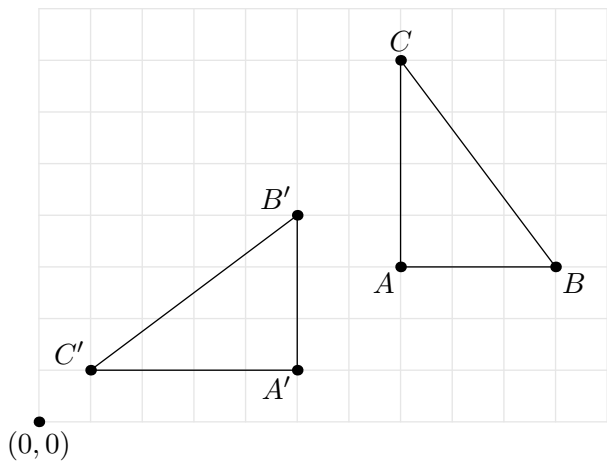
### 4.1.3

Finn rotasjonsvinkelen og rotasjonspunktet.

a)



b)

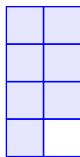


## Kapittel 5

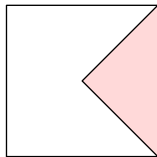
# Brøkregning

## 5.1 Brøkdeler av helheter

I MB (s. 35-47) har vi sett hvordan brøker er definert ut ifra en inndeling av 1. I hverdagen bruker vi også brøker for å snakke om inndelinger av en helhet:



(a)



(b)

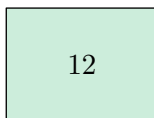


(c)

- (a) Helheten er 8 ruter.  $\frac{7}{8}$  av rutene er blå.  
 (b) Helheten er et kvadrat.  $\frac{1}{4}$  av kvadratet er rødt.  
 (c) Helheten er 5 kuler.  $\frac{3}{5}$  av kulene er svarte.

### Brøkdeler av tall

Si at rektangelet under har verdien 12.

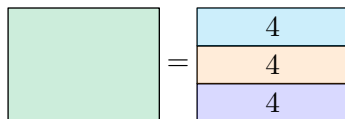


Når vi sier " $\frac{2}{3}$  av 12" mener vi at vi skal

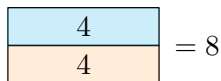
- a) dele 12 inn i 3 like grupper.  
 b) finne ut hvor mye 2 av disse gruppene utgjør til sammen.

Vi har at

- a) 12 delt inn i 3 grupper er lik  $12 : 3 = 4$ .



- b) 2 grupper som begge har verdi 4 blir til sammen  $2 \cdot 4 = 8$ .



Altså er

$$\frac{2}{3} \text{ av } 12 = 8$$

For å finne  $\frac{2}{3}$  av 12, delte vi 12 med 3, og ganget kvotienten med 2. Dette er det samme som å gange 12 med  $\frac{2}{3}$  (se MB, s. 45 og 50).

### 5.1 Brøkdelen av et tall

For å finne brøkdelen av et tall, ganger vi brøken med tallet.

$$\frac{a}{b} \text{ av } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

#### Eksempel 1

Finn  $\frac{2}{5}$  av 15.

**Svar:**

$$\frac{2}{5} \text{ av } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

#### Eksempel 2

Finn  $\frac{7}{9}$  av  $\frac{5}{6}$ .

**Svar:**

$$\frac{7}{9} \text{ av } \frac{5}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$$

### Språkboksen

Deler av en helhet blir også kalt *andeler*.

## 5.2 Prosent

Brøker er ypperlige til å oppgi andeler av en helhet fordi de gir et raskt bilde av hvor mye det er snakk om. For eksempel er det lett å se (omtrent) hvor mye  $\frac{3}{5}$  eller  $\frac{7}{12}$  av en kake er. Men ofte er det ønskelig å raskt avgjøre hvilke andeler som utgjør *mest*, og da er det best om brøkene har samme nevner.



Når andeler oppgis i det daglige, er det vanlig å bruke brøker med 100 i nevner. Brøker med denne nevneren er så mye brukt at de har fått sitt eget navn og symbol.

### 5.2 Prosenttall

$$a\% = \frac{a}{100}$$

### Språkboksen

% uttales *prosent*. Ordet kommer av det latinske *per centum*, som betyr *per hundre*.

### Eksempel 1

$$43\% = \frac{43}{100}$$

### Eksempel 2

$$12,7\% = \frac{12,7}{100}$$

*Merk:* Det er kanskje litt uvant, men ikke noe galt med å ha et desimaltall i teller (eller nevner).

### Eksempel 3

Finn verdien til

- a) 12%      b) 19,6%      c) 149%

**Svar:**

(Se [Regel ??](#))

$$\text{a) } 12\% = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$\text{b) } 19,6\% = \frac{19,6}{100} = 0,196$$

$$\text{c) } 149\% = \frac{149}{100} = 1,49$$

### Eksempel 4

Gjør om brøkene til prosenttall.

$$\text{a) } \frac{34}{100}$$

$$\text{b) } \frac{203}{100}$$

**Svar:**

$$\text{a) } \frac{34}{100} = 34\%$$

$$\text{b) } \frac{203}{100} = 203\%$$

### Eksempel 5

Finn 50% av 800. Av [Regel 5.1](#) og [Regel 5.2](#) har vi at

**Svar:**

$$50\% \text{ av } 800 = \frac{50}{100} \cdot 800 = 400$$



### Eksempel 6

Finn 2% av 7,4.

**Svar:**

$$2\% \text{ av } 7,4 = \frac{2}{100} \cdot 7,4 = 0,148$$

### Tips

Å dele med 100 er såpass enkelt, at vi gjerne kan uttrykke prosenttall som desimaltall når vi gjør utregninger. I *Eksempel 5* over kunne vi har regnet slik:

$$2\% \text{ av } 7,4 = 0,02 \cdot 7,4 = 0,148$$

## Prosentdeler

Hvor mange prosent utgjør 15 av 20?

15 er det samme som  $\frac{15}{20}$  av 20, så svaret på spørsmålet får vi ved å gjøre om  $\frac{15}{20}$  til en brøk med 100 i nevner. Siden  $20 \cdot \frac{100}{20} = 100$ , utvider vi brøken vår med  $\frac{100}{20} = 5$ :

$$\frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100}$$

15 utgjør altså 75% av 20. Vi kunne fått 75 direkte ved utregningen

$$15 \cdot \frac{100}{20} = 75$$

### 5.3 Antall prosent $a$ utgjør av $b$

$$\text{Antall prosent } a \text{ utgjør av } b = a \cdot \frac{100}{b}$$

#### Eksempel 1

Hvor mange prosent utgjør 340 av 400?

**Svar:**

$$340 \cdot \frac{100}{400} = 85$$

340 utgjør 85% av 400.

#### Eksempel 2

Hvor mange prosent utgjør 119 av 500?

**Svar:**

$$119 \cdot \frac{100}{500} = 23,8$$

119 utgjør 23,8% av 500.

### Tips

Å gange med 100 er såpass enkelt å ta i hodet at man kan ta det bort fra selve utregningen. *Eksempel 2* over kunne vi da regnet slik:

$$\frac{119}{500} = 0,238$$

119 utgjør altså 23,8% av 500. (Her regner man i hodet at  $0,238 \cdot 100 = 23,8$ .)

## 5.2.1 Prosentvis endring; økning eller redusering

### Økning

Med utsagnet "200 økt med 30%" menes dette:

Start med 200, og legg til 30% av 200.

Altså er

$$\begin{aligned} 200 \text{ økt med } 30\% &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 + 60 \\ &= 260 \end{aligned}$$

I uttrykket over kan vi legge merke til at 200 er å finne i begge ledd, dette kan vi utnytte til å skrive

$$\begin{aligned} 200 \text{ økt med } 30\% &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 \cdot (1 + 30\%) \\ &= 200 \cdot (100\% + 30\%) \\ &= 200 \cdot 130\% \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$200 \text{ økt med } 30\% = 130\% \text{ av } 200$$

### Redusering

Med utsagnet "Reduser 200 med 60%" menes dette:

Start med 200, og trekk ifra 60% av 200

Altså er

$$\begin{aligned} 200 \text{ redusert med } 60\% &= 200 - 200 \cdot 60\% \\ &= 200 - 120 \\ &= 80 \end{aligned}$$

Også her legger vi merke til at 200 opptrer i begge ledd i utregningen:

$$\begin{aligned}200 \text{ økt med } 30\% &= 200 - 200 \cdot 60\% \\&= 200 \cdot (1 - 60\%) \\&= 200 \cdot 40\%\end{aligned}$$

Dette betyr at

$$200 \text{ redusert med } 60\% = 40\% \text{ av } 200$$

## Prosentvis endring oppsummert

### 5.4 Prosentvis endring

- Når en størrelse reduseres med  $a\%$ , ender vi opp med  $(100\% - a\%)$  av størrelsen.
- Når en størrelse øker med  $a\%$ , ender vi opp med  $(100\% + a\%)$  av størrelsen.

#### Eksempel 1

Hva er 210 redusert med 70%?

**Svar:**

$100\% - 70\% = 30\%$ , altså er

$$\begin{aligned}210 \text{ redusert med } 70\% &= 30\% \text{ av } 210 \\&= \frac{30}{100} \cdot 210 \\&= 63\end{aligned}$$

#### Eksempel 2

Hva er 208,9 økt med 124,5%?

**Svar:**

$100\% + 124,5\% = 224,5\%$ , altså er

$$\begin{aligned}208,9 \text{ økt med } 124,5\% &= 224,5\% \text{ av } 208,9 \\&= \frac{224,5}{100} \cdot 208,9\end{aligned}$$

## Språkboksen

*Rabatt* er en pengesum som skal trekkes ifra en pris når det gis tilbud. Dette kalles også et *avslag* på prisen. Rabatt oppgis enten i antall kroner eller som prosentdel av prisen.

*Merverdiavgiften* (mva.) er en avgift som legges til prisen på de aller fleste varer som selges. Merverdiavgift oppgis som regel som prosentdel av prisen.

## Eksempel 3

I en butikk kostet en skjorte først 500 kr , men selges nå med 40% *rabatt*.

Hva er den nye prisen på skjorta?



### Svar:

(Vi tar ikke med kr i utregningene)

Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale  $100\% - 40\% = 60\%$  av 500:

$$\begin{aligned} 60\% \text{ av } 500 &= \frac{60}{100} \cdot 500 \\ &= 300 \end{aligned}$$

Med rabatt koster altså skjorta 300 kr.

## Eksempel 4

På bildet står det at prisen på øreklokkene er 999,20 kr *ekskludert* mva. og 1 249 *inkludert* mva. For øreklokker er mva. 25% av prisen.

Undersøk om prisen der mva. er inkludert er rett.



### Svar:

(Vi tar ikke med 'kr' i utregningene)

Når vi inkluderer mva., må vi betale 100% + 25% av 999,20:

$$\begin{aligned} 125\% \text{ av } 999,20 &= \frac{125}{100} \cdot 999,20 \\ &= 1249 \end{aligned}$$

Altså 1249 kr, som også er opplyst på bildet.

## 5.2.2 Vekstfaktor

På side 67 økte vi 200 med 30%, og endte da opp med 130% av 200. Vi sier da at *vekstfaktoren* er 1,3. På side 67 reduserte vi 200 med 60%, og endte da opp med 40% av 200. Da er vekstfaktoren 0,40.

Mange stusser over at ordet vekstfaktor brukes selv om en størrelse *synker*, men slik er det. Kanskje et bedre ord ville være *endringsfaktor*?

### 5.5 Vekstfaktor I

Når en størrelse endres med  $a\%$ , er vekstfaktoren verdien til  $100\% \pm a\%$ .

Ved økning skal **+** brukes, ved redusering skal **-** brukes.

### Eksempel 1

En størrelse økes med 15%. Hva er vekstfaktoren?

**Svar:**

$100\% + 15\% = 115\%$ , altså er vekstfaktoren 1,15.

### Eksempel 2

En størrelse reduseres med 19,7%. Hva er vekstfaktoren?

**Svar:**

$100\% - 19,7\% = 80,3\%$ , altså er vekstfaktoren 0,803

La oss se tilbake til *Eksempel 1* på side 68, hvor 210 ble redusert med 70%. Da er vekstfaktoren 0,3. Videre er

$$0,3 \cdot 210 = 63$$

Altså, for å finne ut hvor mye 210 redusert med 70% er, kan vi gange 210 med vekstfaktoren (forklar for deg selv hvorfor!).

## 5.6 Prosentvis endring med vekstfaktor

$$\text{endret originalverdi} = \text{vekstfaktor} \cdot \text{originalverdi}$$

### Eksempel 1

En vare verd 1 000 kr er rabattert med 20%.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Finn den nye prisen.

**Svar:**

a) Siden det er 20% rabatt, må vi betale  $100\% - 20\% = 80\%$  av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.

b) Vi har at

$$0,8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså 800 kr .

## Eksempel 2

En sjokolade koster 9,80 kr , ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

- a) Hva er vekstfaktoren?
- b) Hva koster sjokoladen inkludert mva.?

**Svar:**

- a) Med 15% i tillegg må vi betale  $100\% + 15\% = 115\%$  av prisen ekskludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.

- b)

$$1,15 \cdot 9,90 = 12,25$$

Sjokoladen koster 12,25 kr inkludert mva.

Vi kan også omskrive likningen<sup>1</sup> fra [Regel 5.6](#) for å få et uttrykk for vekstfaktoren:

## 5.7 Vekstfaktor II

$$\text{vekstfaktor} = \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$$

### Å finne den prosentvise endringen

Når man skal finne en prosentvis endring, er det viktig å være klar over at det er snakk om prosent av en helhet. Denne helheten man har som utgangspunkt er den originale verdien.

La oss som et eksempel si at Jakob tjente 10 000 kr i 2019 og 12 000 kr i 2020. Vi kan da stille spørsmålet ”Hvor mye endret lønnen til Jakob seg med fra 2019 til 2020, i prosent?”.

Spørsmålet tar utgangspunkt i lønnen fra 2019, dette betyr at 10 000 er vår originale verdi. To måter å finne den prosentvise endringen på er disse (vi tar ikke med 'kr' i utregningene):

---

<sup>1</sup>Se [Kapittel 6](#) for hvordan skrive om likninger.



- Lønnen til Jakob endret seg fra 10 000 til 12 000, en forandring på  $12\,000 - 10\,000 = 2\,000$ . Videre er (se [Regel 5.3](#))

$$\begin{aligned}\text{antall prosent } 2\,000 \text{ utgjør av } 10\,000 &= 2\,000 \cdot \frac{100}{10\,000} \\ &= 20\end{aligned}$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med 20%.

- Vi har at

$$\frac{12\,000}{10\,000} = 1,2$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med en vekstfaktor lik 1,2 (se [Regel 5.6](#)). Denne vekstfaktoren tilsvarer en endring lik 20% (se [Regel 5.5](#)). Det betyr at lønnen økte med 20%.

## 5.8 Prosentvis endring I

$$\text{prosentvis endring} = \frac{\text{endret originalverdi} - \text{originalverdi}}{\text{originalverdi}} \cdot 100$$

Hvis 'prosentvis endring' er et positivt/negativt tall, er det snakk om en prosentvis økning/reduksjon.

### Kommentar

[Regel 5.8](#) kan se litt voldsom ut, og er ikke nødvendigvis så lett å huske. Hvis du virkelig har forstått [Delseksjon 5.2.1](#), kan du uten å bruke [Regel 5.8](#) finne prosentvise endringer trinnvis. I påfølgende eksempel viser vi både en trinnvis løsningsmetode og en metode ved bruk av formel.

### Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

#### Svar:

Vi starter med å merke oss at det er medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

#### Metode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, altså var det  $20 - 12 = 8$  som sluttet. Vi har at

$$\text{antall prosent 4 utgjør av } 20 = 8 \cdot \frac{100}{20} = 40$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

#### Metode 2; formel

Vi har at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= \frac{12 - 20}{20} \cdot 100 \\ &= -\frac{8}{20} \cdot 100 \\ &= -40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

*Merk:* At medlemmer slutter, innebærer en *reduksjon* i medlemstall. Vi forventet derfor at 'prosentvis endring' skulle være et negativt tall.

## 5.9 Prosentvis endring II

$$\text{prosentvis endring} = 100 (\text{vekstfaktor} - 1)$$

## Merk

[Regel 5.8](#) og [Regel 5.9](#) gir begge formler som kan brukes til å finne prosentvise endringer. Her er det opp til en selv å velge hvilken man liker best.

## Eksempel 1

I 2019 tjente du 12 000 kr og i 2020 tjente du 10 000 kr. Beskriv endringen i din inntekt, med inntekten i 2019 som utgangspunkt.

### Svar:

Her er 12 000 vår originalverdi. Av [Regel 5.7](#) har vi da at

$$\begin{aligned}\text{vekstfaktor} &= \frac{10\,000}{12\,000} \\ &= 0,8\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= 100(0,8 - 1) \\ &= 100(-0,2) \\ &= -20\end{aligned}$$

Altså er lønnen *reduisert* med 20% i 2020 sammenliknet med lønnen i 2019.

## 5.2.3 Prosentpoeng

Ofte snakker vi om mange størrelser samtidig, og når man da bruker prosent-ordet kan setninger bli veldig lange og knotete hvis man også snakker om forskjellige originalverdier (utgangspunkt). For å forenkle setningene, har vi begrepet *prosentpoeng*.



Tenk at et par solbriller først ble solgt med 30% rabatt av originalprisen, og etter det med 80% rabatt av originalprisen. Da sier vi at rabatten har økt med 50 *prosentpoeng*.

$$80\% - 30\% = 50\%$$

*Hvorfor kan vi ikke si at rabatten har økt med 50%?*

Tenk at solbrillene hadde originalpris 1 000 kr. 30% rabatt på 1 000 kr tilsvarer 300 kr i rabatt. 80% rabatt på 1000 kr tilsvarer 800 kr i rabatt. Men hvis vi øker 300 med 50%, får vi  $300 \cdot 1,5 = 450$ , og det er ikke det samme som 800! Saken er at vi har to forskjellige originalverdier som utgangspunkt:

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten 80%.”

*Forklaring:* ”Rabatten” er en størrelse vi regner ut ifra originalprisen til solbrillene. Når vi sier ”prosentpoeng” viser vi til at **originalprisen fortsatt er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med  $1\,000\text{ kr} \cdot 0,3 = 300\text{ kr}$  i rabatt. Når vi legger til 50 prosentpoeng, legger vi til 50% av originalprisen, altså  $1\,000\text{ kr} \cdot 0,5 = 500\text{ kr}$ . Totalt blir det 800 kr i rabatt, som utgjør 80% av originalprisen.

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten 45%.”

*Forklaring:* ”Rabatten” er en størrelse vi regner ut ifra originalprisen til solbrillene, men her viser vi til at **rabatten er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med 300 kr i rabatt. Videre er

$$300\text{ kr økt med }50\% = 300\text{ kr} \cdot 1,5 = 450\text{ kr}$$

og

$$\text{antall prosent } 450 \text{ utgjør av } 1\,000 = \frac{450}{100} = 45$$

Altså er den nye rabatten 45%.

I de to (gule) tekstboksene over regnet vi ut den økte rabatten via originalprisen på solbrillene (1 000 kr). Dette er strengt tatt ikke nødvendig:

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten

$$30\% + 50\% = 80\%$$

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten

$$30\% \cdot 1,5 = 45\%$$

### 5.10 Prosentpoeng

$a\%$  økt/redusert med  $b$  prosentpoeng  $= a\% \pm b\%$ .

$a\%$  økt/redusert med  $b\% = a\% \cdot (1 \pm b\%)$

#### Merk

Andre linje i [Regel 5.10](#) er egentlig identisk med [Regel 5.6](#).

#### Eksempel

En dag var 5% av elevene på en skole borte. Dagen etter var 7,5% av elevene borte.

- a) Hvor mange prosentpoeng økte fraværet med?
- b) Hvor mange prosent økte fraværet med?

#### Svar:

- a)  $7,5\% - 5\% = 2,5\%$ , derfor har fraværet økt med 2,5 prosentpoeng.
- b) Her må vi svare på hvor mye endringen, altså 2,5%, utgjør av 5%. Av [Regel 5.3](#) har vi at

$$\begin{aligned}\text{antall prosent } 2,5\% \text{ utgjør av } 5\% &= 2,5\% \cdot \frac{100}{5\%} \\ &= 50\end{aligned}$$

Altså har fraværet økt med 50%.

#### Merk

Å i *Eksempel 1* over stille spørsmålet "Hvor mange prosentpoeng økte fraværet med?", er det samme som å stille spørsmålet "Hvor mange prosent av det totale elevantallet økte fraværet med?".

### 5.2.4 Gjentatt prosentvis endring

Hva om vi foretar en prosentvis endring gjentatte ganger? La oss som et eksempel starte med 2000, og utføre 10% økning 3 påfølgende ganger (se [Regel 5.6](#)):

$$\text{verdi etter 1. endring} = \overbrace{2000}^{\text{originalverdi}} \cdot 1,10 = 2\,200$$

$$\text{verdi etter 2. endring} = \overbrace{2\,200}^{2\,200} \cdot 1,10 = 2\,420$$

$$\text{verdi etter 3. endring} = \overbrace{2\,420}^{2\,420} \cdot 1,10 = 2\,662$$

Mellomregningen vi gjorde over kan kanskje virke unødvendig, men utnytter vi skrivemåten for potenser<sup>1</sup> kommer et mønster til syne:

$$\text{verdi etter 1. endring} = 2\,000 \cdot 1,10^1 = 2\,200$$

$$\text{verdi etter 2. endring} = 2\,000 \cdot 1,10^2 = 2\,420$$

$$\text{verdi etter 3. endring} = 2\,000 \cdot 1,10^3 = 2\,662$$

### 5.11 Gjentatt vekst eller nedgang

$$\text{ny verdi} = \text{originalverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^{\text{antall endringer}}$$

#### Eksempel 1

Finn den nye verdien når 20% økning utføres 6 påfølgende ganger med 10 000 som originalverdi.

**Svar:**

Vekstfaktoren er 1,2, og da er

$$\begin{aligned}\text{ny verdi} &= 10\,000 \cdot 1,2^6 \\ &= 29\,859,84\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Se [MB](#), s.101

## Eksempel 2

Marion har kjøpt seg en ny bil til en verdi av 300 000 kr, og hun forventer at verdien vil synke med 12% hvert år de neste fire årene. Hva er bilen da verd om fire år?

### Svar:

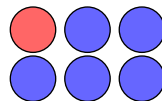
Siden den årlige nedgangen er 12%, blir vekstfaktoren 0,88. Starverdien er 300 000, og tiden er 4:

$$300\,000 \cdot 0,88^4 \approx 179\,908$$

Marion forventer altså at bilen er verdt ca. 179 908 kr om fire år.

## 5.3 Forhold

Med *forholdet* mellom to størrelser mener vi den ene størrelsen delt på den andre. Har vi for eksempel 1 rød kule og 5 blå kuler, sier vi at



$$\text{forholdet mellom antall røde kuler og antall blå kuler} = \frac{1}{5}$$

Forholdet kan vi også skrive som  $1 : 5$ . Verdien til dette regnestykket er

$$1 : 5 = 0,2$$

Om vi skriver forholdet som brøk eller som delestykke vil avhenge litt av oppgavene vi skal løse.

I denne sammenhengen kalles 0,2 *forholdstallet*.

### 5.12 Forhold

$$\text{forholdet mellom } a \text{ og } b = \frac{a}{b}$$

Verdien til brøken kalles forholdstallet.

#### Eksempel 1

I en klasse er det 10 handballspillere og 5 fotballspillere.

- Hva er forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere?
- Hva er forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere?

**Svar:**

- Forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere er

$$\frac{10}{5} = 2$$

- Forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere er

$$\frac{5}{10} = 0,5$$



### 5.3.1 Målestokk

I MB (s.145 - 149) har vi sett på formlike trekantar. Prinsippet om at forholdet mellom samsvarende sider er det samme, kan utvides til å gjelde de fleste andre former, som f. eks. firkanter, sirkler, prismer, kuler osv. Dette er et fantastisk prinsipp som gjør at små tegninger eller figurer (modeller) kan gi oss informasjon om størrelsene til virkelige gjenstander.

#### 5.13 Målestokk

En målestokk er forholdet mellom en lengde på en modell av en gjenstand og den samsvarende lengden på den virkelige gjenstanden.

$$\text{målestokk} = \frac{\text{en lengde i en modell}}{\text{den samsvarende lengden i virkeligheten}}$$

#### Eksempel 1

På en tegning av et hus er en vegg 6 cm. I virkeligheten er denne veggen 12 m.

Hva er målestokken på tegningen?

**Svar:**

Først må vi passe på at lengdene har samme benevning<sup>1</sup>. Vi gjør om 12 m til antall cm:

$$12 \text{ m} = 1200 \text{ cm}$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned}\text{målestokk} &= \frac{6 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} \\ &= \frac{6}{12}\end{aligned}$$

Vi bør også prøve å forkorte brøken så mye som mulig:

$$\text{målestokk} = \frac{1}{6}$$

---

<sup>1</sup>Se [Seksjon 2.2](#).

### Tips

Målestokk på kart er omtrent alltid gitt som en brøk med teller lik 1. Dette gjør at man kan lage seg disse reglene:

$$\text{lengde i virkelighet} = \text{lengde på kart} \cdot \text{nevner til målestokk}$$

$$\text{lengde i virkelighet} = \frac{\text{lengde på kart}}{\text{nevner til målestokk}}$$



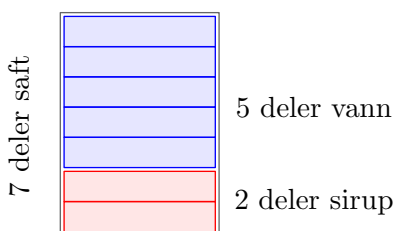
### 5.3.2 Blandingsforhold

I mange sammenhenger skal vi blande to sorter i riktig forhold.

På en flaske med solbærsirup kan du for eksempel lese symbolet "2 + 5", som betyr at man skal blande sirup og vann i forholdet 2 : 5. Heller vi 2 dL sirup i en kanne, må vi fylle på med 5 dL vann for å lage saften i rett forhold.

Blander du solbærsirup og vann, får du solbærsaft :-)

Noen ganger bryr vi oss ikke om *hvor mye* vi blander, så lenge forholdet er riktig. For eksempel kan vi blande to fulle bøtter med solbærsirup med fem fulle bøtter vann, og fortsatt være sikre på at forholdet er riktig, selv om vi ikke vet hvor mange liter bøtta rommer. Når vi bare bryr oss om forholdet, bruker vi ordet *del*. "2 + 5" på sirupflasken leser vi da som "2 deler sirup på 5 deler vann". Dette betyr at saften vår i alt inneholder  $2 + 5 = 7$  deler:



Dette betyr at 1 del utgjør  $\frac{1}{7}$  av blandingen, sirupen utgjør  $\frac{2}{7}$  av blandingen, og vannet utgjør  $\frac{5}{7}$  av blandingen.

### 5.14 Deler i et forhold

En blanding med forholdet  $a : b$  har til sammen  $a + b$  deler.

- 1 del utgjør  $\frac{1}{a+b}$  av blandingen.
- $a$  utgjør  $\frac{a}{a+b}$  av blandingen.
- $b$  utgjør  $\frac{b}{a+b}$  av blandingen.

#### Eksempel 1

Ei kanne som rommer 21 dL er fylt med en saft der sirup og vann er blandet i forholdet  $2 : 5$ .

- a) Hvor mye vann er det i kanna?  
b) Hvor mye sirup er det i kanna?

**Svar:**

a) Til sammen består saften av  $2 + 5 = 7$  deler. Da 5 av disse er vann, må vi ha at

$$\begin{aligned}\text{mengde vann} &= \frac{5}{7} \text{ av } 21 \text{ dL} \\ &= \frac{5 \cdot 21}{7} \text{ dL} \\ &= 15 \text{ dL}\end{aligned}$$

b) Vi kan løse denne oppgaven på samme måte som oppgave a), men det er raskere å merke seg at hvis vi har 15 dL vann av i alt 21 dL, må vi ha  $(21 - 15) \text{ dL} = 6 \text{ dL}$  sirup.

## Eksempel 2

I et malerspann er grønn og rød maling blandet i forholdet  $3 : 7$ , og det er 5 L av denne blandingen. Du ønsker å gjøre om forholdet til  $3 : 11$ .

Hvor mye rød maling må du helle oppi spannet?

**Svar:**

I spannet har vi  $3 + 7 = 10$  deler. Siden det er 5 L i alt, må vi ha at

$$\begin{aligned} 1 \text{ del} &= \frac{1}{10} \text{ av } 5 \text{ L} \\ &= \frac{1 \cdot 5}{10} \text{ L} \\ &= 0,5 \text{ L} \end{aligned}$$

Når vi har 7 deler rødmaling, men ønsker 11, må vi blande oppi 4 deler til. Da trenger vi

$$4 \cdot 0,5 \text{ L} = 2 \text{ L}$$

Vi må helle oppi 2 L rødmaling for å få forholdet  $3 : 11$ .

## Eksempel 3

I en ferdig blandet saft er forholdet mellom sirup og vann  $3 : 5$ .

Hvor mange deler saft og/eller vann må du legge til for at forholdet skal bli  $1 : 4$ ?

**Svar:**

Brøken vi ønsker,  $\frac{1}{4}$ , kan vi skrive om til en brøk med samme teller som brøken vi har (altså  $\frac{3}{5}$ ):

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

I vårt opprinnelige forhold har vi 3 deler sirup og 5 deler vann. Skal dette gjøres om til 3 deler sirup og 12 deler vann, må vi legge til 7 deler vann.

## Oppgaver for kapittel 5

### 5.1.1

Finn

- a)  $\frac{2}{3}$  av 9.      b)  $\frac{5}{8}$  av 24.      c)  $\frac{7}{2}$  av 12.      d)  $\frac{10}{4}$  av 32.

### 5.1.2

- a) Finn  $\frac{2}{3}$  av  $\frac{4}{5}$ .  
b) Finn  $\frac{6}{7}$  av  $\frac{8}{11}$ .  
c) Finn  $\frac{9}{10}$  av  $\frac{2}{13}$ .

### 5.1.3

Du har startet et firma i lag med en venn, og dere har blitt enige om at du skal få  $\frac{3}{5}$  av det firmaet tjener. Hvis firmaet tjener 600 000 kr, hvor mange kroner får du?

### 5.2.1

Skriv om brøkene til prosenttall

- a)  $\frac{78}{100}$       b)  $\frac{91,2}{100}$       c)  $\frac{0,7}{100}$       d)  $\frac{193,54}{100}$

### 5.2.2

Skriv verdien til

- a) 57%      b) 98,1%      c) 219%      d) 0,3%

### 5.2.3

Skriv om brøken til prosenttall

- a)  $\frac{7}{10}$       b)  $\frac{11}{50}$       c)  $\frac{9}{25}$       d)  $\frac{29}{20}$

### 5.2.4

Finn

- a) 20% av 500.      b) 25% av 1000.      c) 70% av 90.  
c) 80% av 700.      d) 15% av 200.

### 5.2.5

Hvor mange prosent utgjør

- a) 4 av 10?      b) 6 av 24?      c) 21 av 49?      d) 18 av 81?

### 5.2.6

Se tilbake til *Undersøkelse 2* på s. 30 og 33.

- a) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "tiger"?  
b) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "løve"?  
c) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "krokodille"?  
d) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "hund"?

### 5.2.7

- a) Hva er 40 økt med 10%?  
b) Hva er 250 økt med 30%?  
c) Hva er 560 økt med 80%?  
d) Hva er 320 økt med 100%?  
e) Hva er 800 økt med 150%?

### 5.2.8

- a) Hva er 40 senket med 10%?  
b) Hva er 250 senket med 30%?  
c) Hva er 560 senket med 80%?

### 5.2.9

Du kjøper en hest for 20 000 kr, og håper at verdien til hesten vil stige med 8% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

### 5.2.10

Du kjøper en ny gaming-PC til 20 000 kr, og regner med at verdien til PCen vil synke med 12 % i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

### 5.3.1



- a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 5.2.7a).
- b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 5.2.7b).
- c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 5.2.7c).

### 5.3.2

- a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 5.2.8a).
- b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 5.2.8b).
- c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 5.2.8c).

### 5.3.3

Finn forholdet og forholdstallet mellom antall hester og griser når vi har:

- a) 5 hester og 2 griser.    b) 12 griser og 4 hester.

### 5.3.4

Totaktsmotorer krever som regel bensin som er tilsatt en viss mengde motorolje. STHIL er en produsent av motorsager drevet av slike motorer, på deres hjemmesider kan vi lese dette:



**Vi anbefaler følgende blandingsforhold:**  
Ved STIHL 1 : 50-totaktsmotorolje:  
**1 : 50 => 1 del olje + 50 deler bensin**

Si at vi skal fylle på 2,5 L bensin på motorsagen vår, hvor mye olje må vi da tilsette?

---

I de to neste oppgavene går vi ut ifra at både 1 dL vann og 1 dL saftsirup veier 100 g.

---

### 5.3.5

Coca-Cola inneholder 10 g karbohydrater. En type saftsirup inneholder 44 g karbohydrater per 100 g. Saften skal lages med 2 deler sirup og 9 deler vann.

Inneholder saften mer eller mindre karbohydrater per 100 g enn Coca-Cola?

### 5.3.6

På *Lærums solbærsirup* står det at 100 g ferdig utblandet saft inneholder 12,5 g sukker. Saften inneholder sirup og vann blandet i forholdet 1 : 5.

Hvor mye sukker inneholder 100 g solbærsirup? (Rent vann inneholder ikke sukker i det hele tatt).

## Kapittel 6

# Likninger, formler og funksjoner

## 6.1 Å finne størrelser

Likninger, formler og funksjoner (og uttrykk) er begrep som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. Når alle størrelsene utenom den éne er kjent, kan vi finne denne enten direkte eller indirekte.

### 6.1.1 Å finne størrelser direkte

Mange av regelboksene i boka inneholder en formel. Når en størrelse står alene på én side av formelen, sier vi at det er en formel for *den* størrelsen. For eksempel inneholder [Regel 5.13](#) en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, er det snakk om å sette verdiene inn i formelen og regne ut for å finne den ukjente, 'målestokk'.

Men ofte har vi bare en beskrivelse av en situasjon, og da må vi selv lage formlene. Da gjelder det å først identifisere hvilke størrelser som er til stede, og så finne relasjonen mellom dem.

#### Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
  - I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.
- a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.
- b) Hva koster en taxitur på 17 km?

#### Svar:

- a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

- b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

### Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La  $k$  stå for 'kostnad for taxituren' og  $x$  for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

## 6.1.2 Å finne størrelser indirekte

Når formlene er kjente

### Eksempel 1

Vi har sett at strekningen  $s$  vi har kjørt, farten  $f$  vi har holdt, og tiden  $t$  vi har brukt kan settes i sammenheng via formelen<sup>1</sup>:

$$s = f \cdot t$$

Dette er altså en formel for  $s$ . Ønsker vi i stedet en formel for  $f$ , kan vi gjøre om formelen ved å følge prinsippene for likninger<sup>2</sup>:

$$s = f \cdot t$$

$$\frac{s}{t} = \frac{f \cdot t}{t}$$

$$\frac{s}{t} = f$$

---

<sup>1</sup>strekning = fart · tid

<sup>2</sup>Se [MB](#), s. 121.

## Eksempel 2

*Ohms lov* sier at strømmen  $I$  gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor  $U$  er spenningen og  $R$  er resistansen.

- a) Skriv om formelen til en formel for  $R$ .

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm ( $\Omega$ ).

- b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

**Svar:**

- a) Vi gjør om formelen slik at  $R$  står alene på én side av likhetstegnet:

$$I \cdot R = \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}}$$

$$I \cdot R = U$$

$$\frac{I \cdot R}{I} = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

- b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \frac{12}{2}$$

$$= 6$$

Resistansen er altså 6  $\Omega$ .

### Eksempel 3

Gitt en temperatur  $T_C$  målt i antall grader Celsius ( $^{\circ}C$ ). Temperaturen  $T_F$  målt i antall grader Fahrenheit ( $^{\circ}F$ ) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

- a) Skriv om formelen til en formel for  $T_C$ .
- b) Hvis en temperatur er målt til  $59^{\circ}F$ , hva er da temperaturen målt i  $^{\circ}C$ ?

#### Svar:

- a) Vi isolerer  $T_C$  på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\ T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= 9T_C \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{9T_C}{9} \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C \end{aligned}$$

- b) Vi bruker formelen fra a), og finner at

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\ &= \frac{5(27)}{9} \\ &= 5 \cdot 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

## Når formlene er ukjente

### Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

- a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.
- b) Løs likningen.

### Svar:

- a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

penger allerede skaffet + antall lodd · penger per lodd = prisen på turen

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatte<sup>1</sup> *antall lodd* med  $x$ , og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$\begin{aligned} 25x &= 11\,000 - 2\,000 \\ 25x &= 9\,000 \\ \frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\ x &= 360 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.



## Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for  $P$  og 'utgift per person' for  $U$ , og lag en formel for  $U$ .

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

**Svar:**

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter  $P$  med 20, og får

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

## 6.2 Funksjoners egenskaper

Denne seksjonen tar utgangspunkt i at leseren er kjent med funksjoner, se [MB](#), kapittel 9.

### 6.2.1 Funksjoner med samme verdi; skjæringspunkt

#### 6.1 Skjæringspunkt til grafer

Et punkt hvor to funksjoner har samme verdi kalles et *skjæringspunkt* til funksjonene.

#### Eksempel 1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x + 4$$

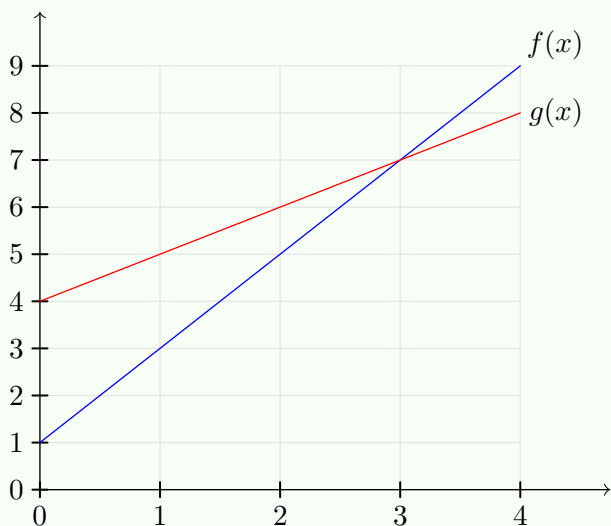
Finn skjæringspunktet til  $f(x)$  og  $g(x)$ .

#### Svar:

Vi kan finne skjæringspunktet både ved en *grafisk* og en *algebraisk* metode.

#### Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i det samme koordinatsystemet:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når  $x = 3$ , og da har begge funksjonene verdien 7. Altså er skjæringspunktet  $(3, 7)$ .

### Algebraisk metode

At  $f(x)$  og  $g(x)$  har samme verdi gir likningen

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\2x + 1 &= x + 4 \\x &= 3\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}f(3) &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\g(3) &= 3 + 4 = 7\end{aligned}$$

Altså er  $(3, 7)$  skjæringspunktet til grafene.

*Merk:* Det hadde selvsagt holdt å bare finne én av  $f(3)$  og  $g(3)$ .

## Eksempel 2

En klasse planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

**Svar:**

Vi innfører følgende variabler:

- $x$  = antall kilometer kjørt
- $f(x)$  = pris for Busselskap 1
- $g(x)$  = pris for Busselskap 2

Da er

$$f(x) = 10x + 10\,000$$

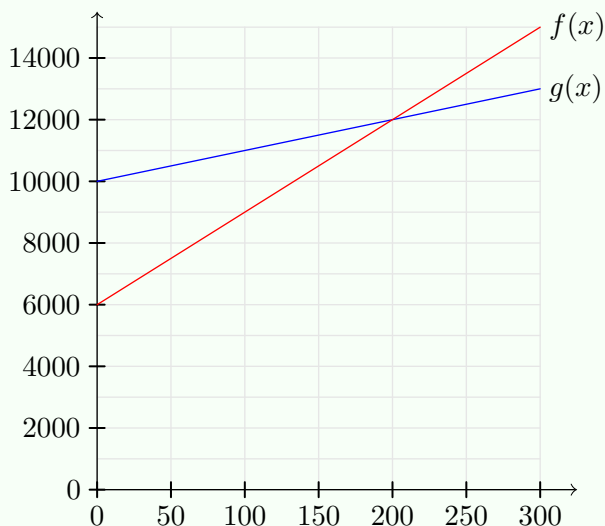
$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Videre løser vi nå oppgaven både med en grafisk og en algebraisk metode.

*Grafisk metode*

---

Vi tegner grafene til funksjonene inn i samme koordinatsystem:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når  $x = 200$ . Dette betyr at busselskapene tilbyr samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

#### Algebraisk metode

Busselskapene har samme pris når

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\4\,000 &= 20x \\x &= 200\end{aligned}$$

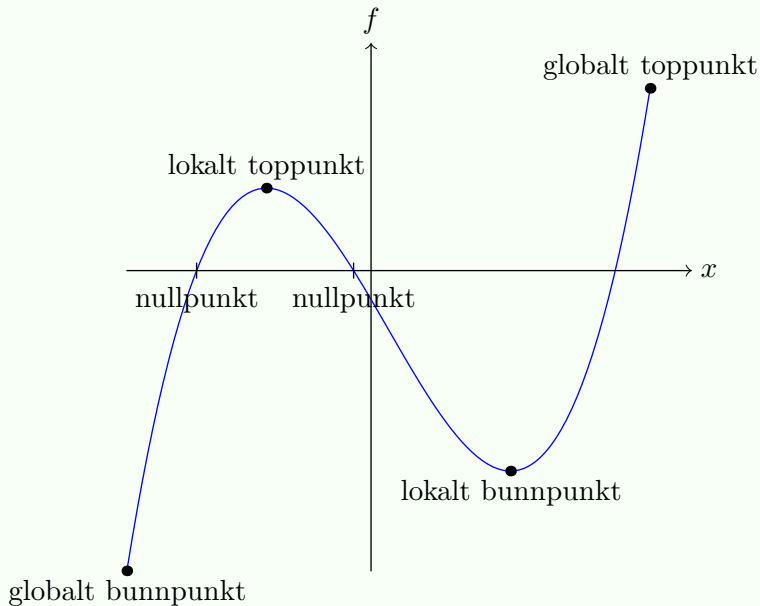
Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

## 6.2.2 Null-, bunn- og toppunkt

### 6.2 Null-, bunn- og toppunkt

- **Nullpunkt**  
En  $x$ -verdi som gir funksjonsverdi 0.
- **Lokalt bunnpunkt**  
Punkt der funksjonen (fra venstre) går fra å synke i verdi til å stige i verdi.
- **Lokalt toppunkt**  
Punkt der funksjonen (fra venstre) går fra å stige i verdi til å synke i verdi
- **Globalt bunnpunkt**  
Punkt der funksjonen har sin laveste verdi.
- **Globalt toppunkt**  
Punkt der funksjonen har sin høyeste verdi.

### Eksempel



### Hvorfor er nullpunkt en verdi?

Det kan kanskje virke litt rart at vi kaller  $x$ -verdier for nullpunkt, punkt har jo både en  $x$ -verdi og en  $y$ -verdi. Men når det er snakk om nullpunkt, er det underforstått at  $y = 0$ , og da er det tilstrekkelig å vite  $x$ -verdien for å avgjøre hvilket punkt det er snakk om.

## 6.3 Likningssett

Vi har så langt sett på likninger med ett ukjent tall, men det kan også være to eller flere tall som er ukjente. Som regel er det slik at

- er det to ukjente, trengs minst to likninger for å finne løsninger som er konstanter.
- er det tre ukjente, trengs minst tre likninger for å finne løsninger som er konstanter.

Og slik fortsetter det. Likningene som gir oss den nødvendige informasjonen om de ukjente, kalles et *likningssett*. I denne boka skal vi konsentrere oss om *lineære likninger med to ukjente*, som betyr at likningssettet består av uttrykk for lineære funksjoner.

### 6.3.1 Innsetningsmetoden

#### 6.3 Innsetningsmetoden

Et lineært likningssett bestående av to ukjente,  $x$  og  $y$ , kan løses ved å

1. bruke den éne likningen til å finne et uttrykk for  $x$ .
2. sette uttrykket fra punkt 1 inn i den andre likningen, og løse denne med hensyn på  $y$ .
3. sette løsningen for  $y$  inn i uttrykket for  $x$ .

*Merk:* I punktene over kan selvsagt  $x$  og  $y$  bytte roller.



### Eksempel 1

Løs likningssettet, og sett prøve på svaret.

$$x - y = 5 \quad (\text{I})$$

$$x + y = 9 \quad (\text{II})$$

**Svar:**

Av (I) har vi at

$$x - y = 5$$

$$x = 5 + y$$

Vi setter dette uttrykket for  $x$  inn i (II):

$$5 + y + y = 9$$

$$2y = 9 - 5$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Vi setter løsningen for  $y$  inn i uttrykket for  $x$ :

$$x = 5 + y$$

$$= 5 + 2$$

$$= 7$$

Altså er  $x = 7$  og  $y = 2$ .

Vi setter prøve på svaret:

$$x - y = 7 - 2 = 5$$

$$x + y = 7 + 2 = 9$$

## Eksempel 2

Løs likningssettet

$$7x - 5y = -8 \quad (\text{I})$$

$$5x - 2y = 4x - 5 \quad (\text{II})$$

**Svar:**

Ved innsettingsmetoden kan man ofte spare seg for en del utregning ved å velge likningen og den ukjente som gir det fineste uttrykket innledningsvis. Vi observerer at (II) gir et fint uttrykk for  $x$ :

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -6 \\ x &= 2y - 5 \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for  $x$  inn i (I):

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -8 \\ 7(2y - 5) - 5y &= -8 \\ 14y - 35 - 5y &= -8 \\ 9y &= 27 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for  $y$  inn i uttrykket for  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Altså er  $x = 1$  og  $y = 3$ .

### Eksempel 3

Løs likningssettet

$$3x - 4y = -2$$

$$9y - 5x = 6x + y \quad (\text{II})$$

**Svar:**

Vi velger her å bruke (I) til å finne et uttrykk for  $y$ :

$$3x - 4y = -2$$

$$3x + 2 = 4y$$

$$\frac{3x + 2}{4} = y$$

Vi setter dette uttrykket for  $y$  inn i (II):

$$9y - 5x = 6x + y$$

$$9 \cdot \frac{3x + 2}{4} - 5x = 6x + \frac{3x + 2}{4}$$

$$9(3x + 2) - 20x = 24x + 3x + 2$$

$$27x + 18 - 20x = 24x + 3x + 2$$

$$-20x = -16$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Vi setter løsningen for  $x$  inn i uttrykket for  $y$ :

$$y = \frac{3x + 2}{4}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{4}{5} + 2}{4}$$

$$= \frac{\frac{22}{5}}{4}$$

$$= \frac{11}{10}$$

Altså er  $x = \frac{4}{5}$  og  $y = \frac{11}{10}$ .

### Eksempel 4

”Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9

år gamle. Hvor gammel er jeg?”.

**Svar:**

”Broren min er dobbelt så gammel som meg.” betyr at

$$\text{brors alder} = 2 \cdot \text{min alder}$$

”Til sammen er vi 9 år gamle.” betyr at

$$\text{brors alder} + \text{min alder} = 9$$

Erstatter vi ’brors alder’ med ” $2 \cdot \text{min alder}$ ”, får vi

$$2 \cdot \text{min alder} + \text{min alder} = 9$$

Altså er

$$3 \cdot \text{min alder} = 9$$

$$\frac{3 \cdot \text{min alder}}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\text{min alder} = 3$$

”Jeg” er altså 3 år gammel.

### 6.3.2 Grafisk metode

#### 6.4 Grafisk løsning av likningssett

Et lineært likningssett bestående av to ukjente,  $x$  og  $y$ , kan løses ved å

1. omskrive de to likningene til uttrykk for to linjer.
2. finne skjæringspunktet til linjene.

## Eksempel 1

Løs likningsettet

$$x - y = 5 \quad (\text{I})$$

$$x + y = 9 \quad (\text{II})$$

**Svar:**

Av (I) har vi at

$$x - y = 5$$

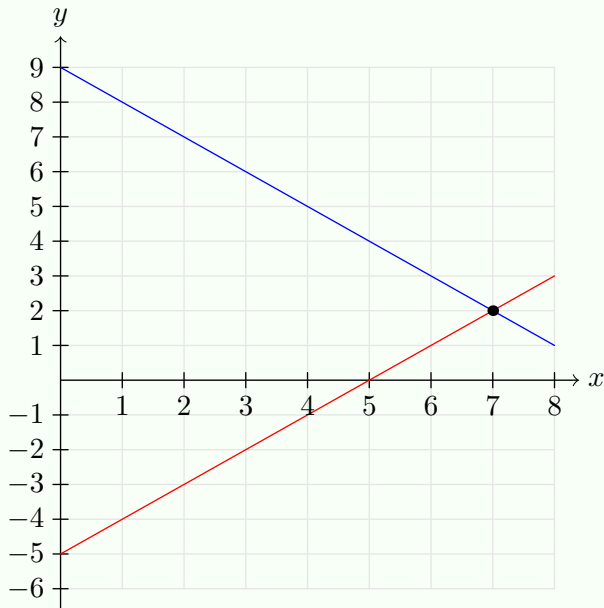
$$y = x - 5$$

Av (II) har vi at

$$x + y = 9$$

$$y = 9 - x$$

Vi tegner disse to linjene inn i et koordinatsystem:



Altså er  $x = 7$  og  $y = 2$ .

## Oppgaver for kapittel 6

### 6.2.1

Vanlig gåfart regnes for å være ca.  $1,5 \text{ m/s}$ . Hvor langt har man da gått

- a) etter 25 min?
- b) etter 3 timer?

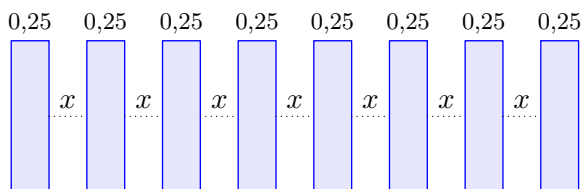
### 6.2.2

Ola og Kari tilbyr et kurs i svømming. For kurset tjener de til sammen 12 000 kr. Ola er assistenten til Kari, og Kari skal ha dobbelt så mye av inntekten som Ola.

Hvor mye tjener Ola og hvor mye tjener Kari for kurset?

### 6.2.3

Du skal snekre et gjerde som er  $3,4 \text{ m}$  langt. For å lage gjerdet skal du bruke 8 planker som er  $0,25 \text{ m}$  breie, som vist i figuren under:



Det skal være den samme avstanden mellom alle plankene. Hvor lang er denne avstanden?

### 6.2.4

- a) Skriv dette som en likning: "Volumet til en firkantet prisme med bredde 4, lengde 7 og høyde  $x$  er 252."
- b) Løs likningen fra oppgave a).

### 6.2.5

- a) Skriv dette som en likning: "35% av  $x$  er lik 845".
- b) Løs likningen fra oppgave a).

### 6.2.6

Det gis 360 kr rabatt på en vare, og dette tilsvarer 20% av prisen.

- a) La  $x$  være prisen på varen. Sett opp en likning som beskriver informasjonen gitt over.
- b) Finn prisen på varen.

### 6.2.7

Prisen på en vare er først senket med 20%, og så er den nye prisen senket med 50%. Etter dette koster varen 400 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

### 6.2.8

Du skal lage et lotteri der forholdet mellom antall vinnerlodd og taperlodd er  $\frac{1}{8}$ . Hvor mange taperlodd må du lage hvis du skal ha 160 vinnerlodd?

### 6.2.9

*Makspuls* er et mål på hvor mange hjerteslag hjertet maksimalt kan slå i løpet av et minutt. På siden [trening.no](https://trening.no) kan man lese dette:

”Den tradisjonelle metoden å estimere maksimalpuls er å ta utgangspunkt i 220 og deretter trekke fra alderen.”

a) Kall ”maksimalpuls” for  $m$  og ”alder” for  $a$  og lag en formel for  $m$  ut i fra sitatet over.

b) Bruk formelen fra a) til å regne ut makspulsen din.

På den samme siden kan vi lese at en ny og bedre metode er slik: ”Ta din alder og multipliser dette med 0,64. Deretter trekker du dette fra 211.”

c) Lag en formel for  $m$  ut ifra sitatet over.

d) Bruk formelen fra c) til å regne ut makspulsen din.

For å fysisk måle makspulsen din kan du gjøre dette:

1. Hopp opp og ned i ca. 30 sekunder (så fort og så høyt

du greier).

2. Tell hjerteslag i 15 sekunder umiddelbart etter hoppingen.

e) Kall ”antall hjerteslag i løpet av 15 sekunder” for  $A$  og lag en formel for  $m$ .

f) Bruk formelen fra e) til å regne ut makspulsen din.

g) Sammenlign resultatene fra b), d) og f).

### 6.3.1

På nettsiden [viivilla.no](http://viivilla.no) får vi vite at dette er formelen for å lage en perfekt trapp:

”2 ganger opptrinn (trinnhøyde) pluss 1 gang inntrinn (trinndybde) bør bli 62 centimeter (med et slingringsmonn på et par centimeter).”

a) Kall ”trinnhøyden” for  $h$  og ”trinndybden” for  $d$  og skriv opp formelen i sitatet (uten slingringsmonn).

b) Sjekk trappene på skolen, er formelen oppfylt eller ikke?

c) Hvis ikke: Hva måtte trinnhøyden vært for at formelen skulle blitt oppfylt?

d) Skriv om formelen til en formel for  $h$ .

### 6.3.2

Effekten  $P$  (målt i Watt) i en elektrisk krets er gitt ved formelen:

$$P = R \cdot I^2$$

hvor  $R$  er motstanden og  $I$  er strømmen i kretsen.

a) Hvis  $R = 5 \Omega$  og  $I = 10 A$ , hva er da effekten?

b) Skriv om formelen til en formel for  $I^2$ .

### 6.3.3

Skriv om arealformelen for et trapes (se [MB](#), s. 143) til en formel for høgden.

### 6.3.4



På [klikk.no](http://klikk.no) finner man disse formelene for å regne ut hvor høy et barn kommer til å bli:

*For jenter:*

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Trekk fra 13 cm
3. Del med 2.

*For gutter:*

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Legg til 13 cm
3. Del med 2.

Kall barnets (fremtidige) høyde for  $B$ , mors høyde for  $M$  og fars høyde for  $F$ .

- a) Lag en formel for  $B$  når barnet er ei jente.
- b) Lag en formel for  $B$  når barnet er en gutt.
- c) Gjør om formelen fra a) til en formel for  $F$ .
- d) Ei jente har en mor som er 165 cm. Formelen fra oppgave a) sier at jenta vil bli 171 cm høy. Hvor høy er faren til jenta?

### 6.3.5

I 2005 kostet en sykkel 1 500 kr, mens den i 2014 ville kostet 1 784 kr om prisen hadde fulgt konsumprisindeksen.

I 2005 var KPI 82,3, hva var den i 2014?

### 6.4.1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 3x - 7$$

$$g(x) = x + 5$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

### 6.4.2

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = -2x - 3$$

$$g(x) = 4x + 9$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

### 6.4.3

Si at du kan velge mellom disse to månedsabonnementene for mobil:

- **Abonnement A**

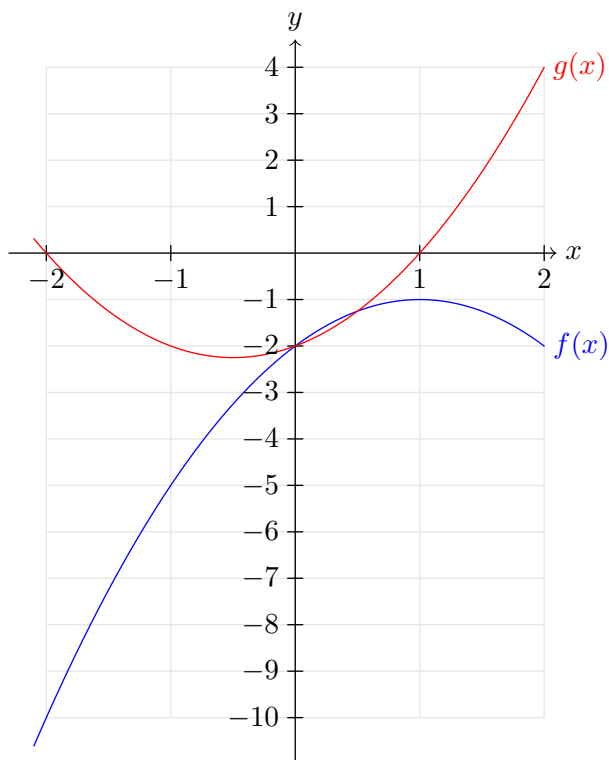
300 kr i fast pris og 50 kr per GB data brukt.

- **Abonnement B**

Fast pris på 500 kr og 10 kr per GB data brukt.

- For hvilket databruk har vil abonnementene koste det samme?
- Hvis du bruker ca. 7 GB data i måneden, hvilket abonnement bør du da velge?

### 6.4.4



- a) Finn koordinatene til toppunktet til  $f(x)$ .
- b) Finn koordinatene til minst ett av skjæringspunktene til  $f(x)$  og  $g(x)$ .
- c) Finn nullpunktene til  $g(x)$ .

### 6.5.1

Løs likningssettet

$$3b - 2a = 15$$

$$5a - b = 8$$

### 6.5.2

Løs likningssettet

$$8x - 3y = 4x - 3$$

$$x + 8y = y - 2x$$

## Kapittel 7

# Økonomi

## 7.1 Indeksregning

### 7.1.1 Introduksjon

Innen økonomi er *indekser* forholdstall som forteller hvor mye størrelser har forandret seg. For eksempel kostet kro-  
neisen ca 0,75 kr (!) da den ble lansert  
i 1953, mens den i 2021 kostet ca 27 kr.  
Forholdet mellom prisen i 2053 og i 2021  
er da

$$\frac{\text{pris 2021}}{\text{pris 1953}} = \frac{27}{0,75} = 36$$



I denne sammenhengen er tallet 36 en indeks for prisforskjellen på kro-  
neis i 1953 og 2021.

### 7.1.2 Konsumprisindeks og basisår

*Konsumprisindeksen* (KPI) er en indeks som beskriver prisnivået på  
varer og tjenester som en typisk husstand i Norge bruker penger på i  
løpet av et år. Disse varene er

- Matvarer og alkoholfrie drikkevarer
- Alkoholholdige drikkevarer og tobakk
- Klær og skotøy
- Bolig, lys og brensel
- Møbler, husholdningsartikler og vedlikehold av innbo
- Helsepleie
- Transport
- Post- og teletjenester
- Kultur og fritid
- Utdanning
- Hotell- og restauranttjenester
- Andre varer og tjenester

For å sammenligne noe må man alltid ha et utgangspunkt, og kon-  
sumprisindeksen tar utgangspunkt i prisnivået på de nevnte varene/tjenestene  
i året 2015. 2015 kalles da *basisåret*<sup>1</sup>, og i dette året er indeksen satt  
til 100.

---

<sup>1</sup>Hvilket år som er basisår forandrer seg med tiden. Før 2015 ble basisår var 1998  
det.

## 7.1 Basisår

I et basisår er verdien til indeksen 100. For konsumprisindeksen er 2015 basisåret.

Tabellen under viser samlet KPI for de 10 siste årene:

År	KPI
2020	112,2
2019	110,8
2018	112,2
2017	105,5
2016	103,6
2015	100
2014	97,9
2013	95,9
2012	93,9
2011	93,3

Tabell 7.1: Konsumprisindeksen for årene 2010-2021. Tall hentet fra [SSB](#).

Ut ifra tabellen kan vi for eksempel lese dette:

- Da KPI for 2017 er 105,5, har prisene steget med 5,5% siden 2015.
- Da KPI i 2011 er 93,3, var prisene 7,7% lavere i 2011 enn i 2015.

## 7.2 Prosentvis endring fra basisår

$$\text{indeks} - 100 = \text{prosentvis endring fra basisår}$$

### Eksempel 1

I juli 2021 var KPI for matvarer 109,4. Hvor mye har prisen på matvarer endret seg sammenlignet med basisåret?

**Svar:**

$109,4 - 100 = 9,4$ . Prisen på matvarer har altså økt med 9,4% sammenlignet med basisåret.

## Eksempel 2

I juli 2021 var KPI for sko 98,0. Hvor mye har prisen på sko endret seg sammenlignet med basisåret?

**Svar:**

$98,0 - 100 = -2$ . Prisen på sko har altså blitt redusert med 2% sammenlignet med basisåret.

### 7.1.3 Kroneverdi

Vi har nevnt at en kroneis kostet 0,75 kr i 1953 og 27 kr i 2021. Når vi ved to tidspunkt må betale *forskjellig* pris på den *samme* varen skyldes det ofte at *kroneverdien* har forandret seg; *1 kr i 1957 var mer verd enn 1 kr i 2021*.

Kroneverdien for et gitt år regnes ut ifra KPI til basisåret (100):

## 7.3 Kroneverdi

$$\text{kroneverdi} = \frac{100}{\text{KPI}}$$

*Merk:* Kroneverdien for basisåret (2015) er 1.

## Eksempel 1

KPI i 2012 var 93,9. Regn ut kroneverdien i 2012.

**Svar:**

$$\begin{aligned}\text{kroneverdi i 2012} &= \frac{100}{93,9} \\ &\approx 1,06\end{aligned}$$

Dette betyr at 1 kr i 2012 tilsvarer 1,06 kr i basisåret.

## Obs!

Ordet *kroneverdi* brukes også når man sammenlikner verdien av 1 kr opp mot verdien av utenlandsk valuta. Kroneverdi ut ifra et basisår og kroneverdi ut ifra en valuta er ikke det samme.

## 7.4 Realverdi

Realverdien til en pengesum er hvor mye en pengesum ville vært verd i basisåret.

$$\text{realverdi} = \text{opprinnelig verdi} \cdot \text{kroneverdi}$$

### Eksempel

I 1928 var KPI 3,2 og i 2020 var KPI 112,2. Hva hadde størst realverdi, 10 000 kr i 1928 eller 350 000 kr i 2020?

#### Svar:

Vi har at

$$\text{kroneverdi i 1928} = \frac{100}{3,2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av 10 000 kr fra 1928 i basisår} &= 10\,000 \text{ kr} \cdot \frac{100}{3,2} \\ &= 312\,500 \text{ kr}\end{aligned}$$

Videre er

$$\text{kroneverdi i 2020} = \frac{100}{112,2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av 350 000 kr fra 2020 i basisår} &= 350\,000 \cdot \frac{100}{112,2} \\ &\approx 311\,943 \text{ kr}\end{aligned}$$

Altså var 10 000 kr mer verd i 1928 enn det 350 000 kr var verd i 2020.

### 7.1.4 Reallønn og nominell lønn

Hvor god *råd* vi har avhenger av hvor mye vi tjener og hva prisnivået er. Tenk at du hadde en årslønn på 500 000 kr i både 2020 og i 2019. *Tabell 7.1* forteller oss da at du hadde du best råd i 2019, fordi da var prisnivået (KPI) lavere enn i 2020.

At prisnivået har blitt høyere er det samme som at kroneverdien har blitt lavere. Dette betyr igjen at hvis lønnen din var den samme i 2019



og 2020, er *realverdien* til lønnen din høyere i 2019 enn i 2020. Den opprinnelige lønnen og realverdien til lønnen er så mye brukt i statistikk at de har fått egne navn:

## 7.5 Reallønn og nominell lønn

Nominell lønn er lønn mottatt et gitt år.

Reallønnen er realverdien til den nominelle lønnen.

### Eksempel

I 2016 tjente Per 450 000 kr, mens i 2012 tjente han 420 000 kr. I 2016 var  $KPI = 103,6$ , mens i 2012 var  $KPI = 93,9$ . I hvilket av disse årene hadde Per best råd?

### Svar:

For å finne ut hvilket av årene Per hadde best råd i, sjekker vi hvilket år han hadde høyest reallønn<sup>1</sup> (se [Regel 7.4](#)):

$$\begin{aligned}\text{reallønn i 2016} &= 450\,000 \cdot \frac{100}{103,6} \text{ kr} \\ &\approx 434\,363 \text{ kr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{reallønn i 2012} &= 420\,000 \cdot \frac{100}{93,9} \\ &\approx 447\,284 \text{ kr}\end{aligned}$$

Reallønnen til Per var altså høyest i 2012, derfor hadde han bedre råd da enn i 2016.

---

<sup>1</sup>KPI-verdiene i utregningen henter vi fra *Tabell 1*.

## 7.6 Verdi som følger indeks

En verdi er sagt å ha *fulgt indeks* hvis verdi og indeks ved to tidspunkt er like.

$$\frac{\text{verdi ved tidspunkt 1}}{\text{indeks ved tidspunkt 1}} = \frac{\text{verdi ved tidspunkt 2}}{\text{indeks ved tidspunkt 2}}$$

### Eksempel 1

Tabellen under viser en oversikt over prisen registrert i en butikk på to varer ved to forskjellige tidspunkt.

	2010	2020
sjokolade	11,00 kr	13,40 kr
brus	12,50 kr	19,00 kr

I 2010 var KPI 92,1 og i 2020 var KPI 112,1. Har prisen på noen av varene fulgt indeks?

#### Svar:

Vi har at

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2010}}{\text{KPI i 2010}} = \frac{11}{92,1} \approx 0,119$$

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2020}}{\text{KPI i 2020}} = \frac{13,40}{112,1} \approx 0,119$$

Videre er

$$\frac{\text{pris på brus i 2010}}{\text{KPI i 2010}} = \frac{12,5}{92,1} \approx 0,136$$

$$\frac{\text{pris på brus i 2020}}{\text{KPI i 2020}} = \frac{19}{112,1} \approx 0,169$$

Altså er det rimelig å si at prisen for sjokolade har fulgt indeks, mens prisen for brus ikke har gjort det.

## 7.2 Lån og sparing

### 7.2.1 Lån

Noen ganger har vi ikke nok penger til å kjøpe det vi ønsker oss, og må derfor ta opp et lån fra en bank. Banken gir oss da en viss *lånesum* mot at vi betaler tilbake denne, og *renter*, i løpet av en bestemt tid. Det vanligste er at vi underveis betaler banken det som kalles *terminbeløp*, som på sin side består av *avdrag* og renter. Det vi til enhver tid skylder banken kaller vi *gjelden*.

Si at en bank låner oss 100 000 kr, som da er lånesummen. Lånet skal tilbakebetales i løpet av 5 år, med ett terminbeløp hvert år, og renten er 10%. Det finnes forskjellige måter å betale tilbake et lån på, men følgende vil som regel gjelde:

- **Summen av alle avdragene skal tilsvare lånesummen.**

For å gjøre det enkelt i vårt eksempel, bestemmer vi oss for å betale tilbake lånet med like avdrag hvert år. Siden 100 000 kr skal fordeles likt over 5 år, må det årlige avdraget bli  $\frac{100\,000}{5}$  kr = 20 000 kr.

- **Det man betaler i avdrag skal trekkes fra gjelden.**

Startgjelden er 100 000 kr, men det første året betaler vi 20 000 kr i avdrag, og da blir gjelden 100 000 kr – 20 000 kr = 80 000 kr. Det andre året betaler vi nye 20 000 kr, og da blir gjelden 80 000 kr – 20 000 kr = 60 000 kr. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Renter skal beregnes av gjelden.**

Siden gjelden det første året er 100 000 kr, må vi betale  $100\,000 \text{ kr} \cdot 0,1 = 10\,000 \text{ kr}$  i renter. Siden gjelden det andre året er 80 000 kr må vi betale  $80\,000 \text{ kr} \cdot 0,1 = 8\,000 \text{ kr}$  i renter. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Terminbeløpet er summen av avdraget og rentene.**

Av første og tredje punkt får vi at

	1. år	2. år
Terminbeløp	20 000 kr + 10 000 kr	20 000 kr + 8 000 kr
	=	=
	30 000 kr	28 000 kr

Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Lånet er fullført når gjelden er lik 0 kr og alle renter er betalt.**

Hvis vi har betalt avdrag lik 20 000 kr i 5 år, er gjelden 0 kr. Har vi da betalt alle rentene også, er lånet fullført.

*Merk:* Du har alltid rett til å betale større avdrag enn det som først er avtalt. Betaler du hele gjelden vil lånet avsluttes så lenge eventuelle renter også er betalt.

## **Serielån og annuitetslån**

To vanlige typer lån er *serielån* og *annuitetslån*. Lånet fra eksempelet vi akkurat har sett på er et serielån fordi avdragene er like store. Hvis terminbeløpene hadde vært like store, ville det isteden vært et annuitetslån. Hvis lånesum, rente og nedbetalingstid er lik, vil et serielån alltid medføre minst utgifter totalt sett. For privatpersoner er det likevel veldig populært å velge annuitetslån på grunn av at det er lettere å planlegge økonomien når man betaler det samme beløpet hver gang.

## **Kredittkort**

Kredittkort er et betalingskort som er slik at hvis du f.eks. bruker kortet for å betale 10 000 kr, så låner du pengene fra banken. Etter en tid som er avtalt med banken vil den kreve renter av gjelden din. Til hvilken tid du betaler denne gjelden er delvis opp til deg selv, men generelt har kredittkort veldig høye renter, så det lureste er å betale før rentekravet har startet!



## 7.7 Lån

<b>lånesum</b>	Beløpet vi låner av banken.
<b>gjeld</b>	Det vi til enhver tid skylder banken.
<b>rente</b>	Prosentandel av gjeld som skal betales.
<b>avdrag</b>	Det vi betaler ned på gjelden.  Summen av avdragene tilsvarer lånesummen.  $\text{ny gjeld} = \text{gammel gjeld} - \text{avdrag}$
<b>renter</b>	$\text{gjeld} \cdot \text{rente}$
<b>terminbeløp</b>	$\text{avdrag} + \text{renter}$
<b>serielån</b>	Lån hvor avdragene er like store.
<b>annuitetslån</b>	Lån hvor terminbeløpene er like store.
<b>kredittkort</b>	Betalingskort som oppretter et lån fra banken.

### Eksempel 1

Fra en bank låner du 300 000 kr med 3% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 5 årlige terminbeløp.

- a) Hva blir det årlige avdraget?
- b) Hva er gjelden din etter at du har betalt tredje terminbeløp?
- c) Hvor mye må du betale i renter ved fjerde terminbeløp?
- d) Hvor stort blir det fjerde terminbeløpet?

#### Svar:

- a) Siden 300 000 kr skal betales over 5 år, blir det årlige avdraget

$$\frac{300\,000 \text{ kr}}{5} = 60\,000 \text{ kr}$$

- b) Når tredje terminbeløp er betalt, har du betalt tre avdrag. Det betyr at gjelden din er

$$\begin{aligned} 300\,000 - 60\,000 \cdot 3 &= 300\,000 - 180\,000 \\ &= 120\,000 \end{aligned}$$

Altså 120 000 kr.

- c) Ut ifra oppgave b) vet vi at gjelden er 120 000 kr når fjerde terminbeløp skal betales. 3% av gjelden blir da

$$120\,000 \cdot 0,03 = 3\,600$$

Altså 3 600 kr.

- d) Terminbeløpet tilsvare avdrag pluss renter. Ut ifra oppgave a) og c) vet vi da at det fjerde terminbeløpet blir

$$60\,000 \text{ kr} + 3\,600 \text{ kr} = 63\,600 \text{ kr}$$

## Eksempel 2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 6,4% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 5 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 24 000 kr.

Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

### Svar:

Det første året er gjelden 100 000 kr, i renter må du betale 6,4% av denne:

$$100\,000 \cdot 0,064 = 6\,400$$

Altså må du betale 6 400 kr i renter det første året.

Vi har at

$$\text{terminbeløp} = \text{avdrag} + \text{renter}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\text{avdrag} &= \text{terminbeløp} - \text{renter} \\ &= 24\,000 - 6\,400 = 17\,600\end{aligned}$$

Altså må du betale 17 600 kr i avdrag det første året.

## 7.2.2 Sparing; innskuddsrente og forventet avkastning

### Innskuddsrente

Vi har sett at vi må betale renter når vi låner penger av en bank, men hvis vi i steden setter penger (gjør et innskudd) i en bank *får* vi renter:

#### 7.8 Innskuddsrente

Innskuddsrente er en prosentvis økning av pengene du har i banken, gjentatt over faste tidsintervaller (månedlig, årlig o.l.)

#### Eksempel 1

Du setter inn 20 000 kr i en bank som gir 2% årlig sparerente. Hvor mye penger har du i banken etter 8 år?

#### Svar:

For å beregne innskuddsrenter kan vi anvende [Regel 5.11](#). Siden renten er 2%, er vekstfaktoren 1,02. Originalverdien er 20 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$20\,000 \cdot 1,02^8 \approx 23\,433$$

Du har altså ca. 23 433 kr i banken etter 8 år med sparing.

### Forventet avkastning

En annen måte å spare penger på, er å investere i et aksjefond. Da vil man snakke om *forventet avkastning*:

#### 7.9 Forventet avkastning

Forventet avkastning angir en *forventet* prosentvis økning av en investering, gjentatt over faste tidsintervaller.



### Eksempel 1

Du investerer 15 000 i et aksjefond som forventer 5% årlig avkastning. Hvor mye penger er investeringen verd etter 8 år ved en slik avkastning?

#### Svar:

Også for forventet avkastning kan vi bruke [Regel 5.11](#). Vekstfaktoren er 1,05, originalverdien er 15 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$15\,000 \cdot 1,05^8 \approx 22\,162$$

Etter 8 år er det forventet at investeringen er verdt 22 162 kr.

### Spare med innskuddsrente eller aksjefond?

Som regel er forventet avkastning på et aksjefond høyere enn innskuddsrenten du får i en bank, men ulempen er at forventet avkastning ikke gir noen garantier. Forventet avkastning oppgir bare økningen eksperter antar vil skje. Er du heldig blir økningen høyere, er du uheldig blir den lavere, og kan til og med føre til en *reduksjon* av investeringen din. I verste fall, rett nok i ekstremt sjeldne tilfeller, kan hele investeringen din ende opp med å bli verd 0 kr.

Innskuddsrenten kan også forandre seg noe med tiden, men den kan aldri føre til en reduksjon av investeringen din.

## 7.3 Skatt

Om du har en inntekt, må du som regel betale en del av disse pengene til staten. Disse pengene kalles *skatt* (og noen ganger *avgift*). Hensikten med skatt er at staten skal ha råd til å gi innbyggerne tilbud som skole, helsetjenester og mye mer. I dag blir skatten i stor grad beregnet av datasystemer, men det er ditt ansvar å sjekke at beregningene er riktige – og da er det viktig å forstå hvordan skattesystemet fungerer.

### Obs!

I eksamensoppgaver og i virkeligheten vil du fort oppdage at skattesystemer er presentert på en litt annen måte enn i denne boka. Dette er blant annet fordi skattereglene kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi tatt utgangspunkt i skattereglene for 2018. Det viktigste er ikke at du husker spesifikt disse reglene, men at du lærer deg hva som menes med begrepene *bruttolønn*, *fradrag*, *skattegrunnlag*, *trygdeavgift* og *nettolønn*.

### 7.3.1 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

De fleste må betale 23% av det som kalles *skattegrunnlaget*, som er *bruttolønnen* minus *fradrag*. Bruttolønnen er lønnen du mottar fra arbeidsgiver, mens fradrag kan være mye forskjellig. *Personfradrag* og *minstefradrag* er noe alle skattebetalere får, i tillegg kan man blant annet få fradrag hvis man betaler *fagforeningskontingent* eller har gitt penger til veldedige formål.

Skattegrunnlag kalles noen ganger *trekkgrunnlag*.

Fagforeningskontingent er det du betaler for å være med i en [fagforening](#).

### 7.10 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

	bruttolønn
–	fradrag
=	<u>skattegrunnlag</u>

## Eksempel

Bruttolønnen til Magnus er 500 000 kr. Han får 56 000 kr i personfradrag 97 600 kr i minstefradrag, i tillegg betaler han 1 000 kr for årlig medlemskap i fagforeningen *Tekna*.

Hva må Magnus betale hvis han skatter 23% av skattegrunnlaget?

### Svar:

Vi starter med å regne ut skattegrunnlaget, som er bruttolønnen minus fradragene:

	500 000	bruttolønn
–	56 000	personfradrag
–	97 600	minstefradrag
–	1 000	fagforeningskontingent
=	345 400	skattegrunnlag

## 7.3.2 Trygdeavgift

Alle lønnsinntakere må også betale *trygdeavgift*. Dette er en inntekt staten bruker til å dekke [Folketrygden](#). Hva man må betale i trygdeavgift kommer an på hvor gammel du er og hvilken type inntekt du har, men her skal vi bare bry oss om det man må betale for lønn fra en arbeidsgiver. Da er trygdeavgiften avhengig av alderen:

### 7.11 Trygdeavgift

alder	trygdeavgift
17-69 år	8,2 %
under 17 år eller over 69 år	5,1%

Trygdeavgiften skal beregnes av bruttolønnen.

### Eksempel

Jonas og bestemoren hans, Line, har begge 150 000 kr i lønn. Jonas er 18 år og Line er 71 år.

a) Hva må Jonas betale i trygdeavgift?

b) Hva må Line betale i trygdeavgift?

#### Svar:

a) Siden Jonas er mellom 17 år og 69 år, skal han betale 8,2% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0,082 = 12\,300$$

Altså skal Jonas betale 12 300 kr i trygdeavgift. Siden Line er over 69 år, skal hun betale 5,1% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0,051 = 7\,650$$

Altså skal Line betale 7 650 kr i trygdeavgift.

### 7.3.3 Trinnskatt

Av lønnen din må du også betale en viss prosent av forskjellige intervall, dette kalles *trinnskatt*:

#### 7.12 Trinnskatt

	Intervall	Skatt
Trinn 1	169 000 - 237 900 kr	1,4%
Trinn 2	237 900 - 598 050 kr	3,3%
Trinn 3	598 050 - 962 050 kr	12,4%
Trinn 4	Over 962 050 kr	15,4%

Trinnskatt beregnes av bruttolønnen.

## Eksempel

Hvis du tjener 550 000 blir utregningen av trinnskatt slik:

Trinn 1	Da hele lønnen er over 237 900 kr, må du betale skatt av $(237\,900 - 169\,000)$ kr = 68 900 kr. Skatt for trinn 1 blir da $68\,900 \text{ kr} \cdot 0,014 \approx 965$ kr.
Trinn 2	Da 550 000 kr er over 237 900 kr, men under 598 050 kr, må du betale skatt av $(550\,000 - 237\,900)$ kr = 312 100 kr. Skatt for trinn 2 blir da $312\,100 \text{ kr} \cdot 0,033 \approx 10\,299$ kr.
Totalt	Totalt må du betale $965 \text{ kr} + 10\,299 \text{ kr} = 11\,264$ kr i trinnskatt.

### 7.3.4 Nettolønn

Det du sitter igjen med etter å ha betalt skatt, trygdeavgift og fagforeningskontigent kalles *nettolønnen*. Med tanke på de tre tidligere delseksjonene kan vi sett opp et regnestykke som dette:

#### 7.13 Nettolønn

	Bruttolønn
—	Fagforeningskontigent
—	23% skatt
—	Trygdeavgift
—	Trinnskatt
<hr/>	
=	Nettolønn

#### Eksempel

Emblas bruttolønn er 550 000 kr. Hun betaler 1500 kr i året for medlemskap i *LO* (Norges største fagforening) og har 409 900 kr som skattegrunnlag. Embla er 28 år.

Hva er nettolønnen til Embla?

**Svar:**

	550 000	Bruttolønn
—	1 500	Fradrag for fagforening
—	93 127	23% av skattegrunnlaget
—	45 100	8,2% av bruttolønn
—	11 264	Total skatt for trinn 1 og 2
<hr/>		
=	399 009	Nettolønn

(Den totale trinnskatten har vi hentet fra utregningen i *Eksempel 1* fra delseksjon 7.3.3.)

Embla har altså 399 009 kr i nettolønn.

## 7.4 Budsjett og regnskap

### 7.4.1 Budsjett

Når man skal planlegge økonomien sin, kan det være lurt å sette opp en oversikt over det man forventer av inntekter og utgifter. En slik oversikt kalles et *budsjett*. Når man regner ut hva inntekter minus utgifter er, finner man et *resultat*. Er tallet positivt går man med *overskudd*, er tallet negativt går man med *underskudd*.

#### Eksempel

Lisa vil lage en oversikt over sine månedlige inntekter og utgifter, og kommer fram til dette:

- Hun tar på seg kveldsvakter på en gamlehjem. Av dette forventer hun ca. 4 000 arg1 i nettolønn.
- Hun bruker ca. 4 500 kr i måneden på mat.
- Hun får 4 360 kr i borteboerstipend.
- Hun bruker ca. 1 200 kr på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et månedsbudsjett for Lisa.

Svar:

Inntekter	Budsjett
Lønn	4 000
Stipend	4 360
<i>Sum</i>	8 360
<b>Utgifter</b>	
Mat	4 500
Klær, fritid o.l.	1 200
<i>Sum</i>	5 700
<b>Resultat</b>	2 660

Budsjettet viser at Lisa forventer 2 660 kr i overskudd.

## 7.4.2 Regnskap

I et budsjett fører man opp *forventede* inntekter og utgifter, mens i et *regnskap* fører man opp *faktiske* inntekter og utgifter. Forskjellen mellom budsjett og regnskap kalles *avviket*. For avviket er det vanlig at man for inntekter og resultat regner ut 'regnskap – budsjett', mens man for utgifter regner ut 'budsjett – regnskap'. Dette fordi vi ønsker positive tall hvis inntektene er større enn forventet, og negative tall hvis utgiftene er større enn forventet.

### Eksempel

I eksempelet fra forrige delseksjon (7.4.1) satt vi opp et månedsbudsjett for Lisa. I mars viste det seg at dette ble de faktiske inntektene og utgiftene hennes:

- Hun fikk ikke jobbet så mye som hun hadde tenkt. Nettolønnen ble 3 500 kr.
- Hun brukte 4 200 kr i måneden på mat.
- Hun fikk 4 360 i borteboerstipend.
- I bursdagsgave fikk hun i alt 2 000 kr.
- Hun brukte ca. 3 600 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et regnskap for Lisas mars måned.

**Svar:**

<b>Inntekter</b>	Budsjett	Regnskap	Avvik
Lønn	4 000	3 500	–500
Stipend	4 360	4 360	0
Bursdagsgave	0	2 000	2 000
<i>Sum</i>	8 360	9 860	2 000
<b>Utgifter</b>			
Mat	4 500	4 200	300
Klær, fritid o.l.	1 200	3 600	–2 400
<i>Sum</i>	5 700	7 800	1 900
<b>Resultat</b>	2 660	2 060	–600

Lisa gikk altså med 2 060 kr i overskudd, men 600 kr mindre enn forventet ut ifra budsjettet.



## Oppgaver for kapittel 7

### Konsumprisinder<sup>1</sup>

År	KPI		
2020	112,2	2008	88
2019	110,8	2007	84.8
2018	112,2	2006	84.2
2017	105,5	2005	82.3
2016	103,6	2004	81
2015	100	2003	80.7
2014	97,9	2002	78.7
2013	95,9	2001	77.7
2012	93,9	2000	75.5
2011	93,3	1999	73.2
2010	92.1	1998	71.5
2009	89.9	1997	69.9

<sup>1</sup>Hentet fra [ssb.no](https://ssb.no).

### 7.1.1

Regn ut kroneverdien i årene:

- a) 1998      b) 2014      c) 2017

### 7.1.2

I 2016 var KPI 103,6. Hvor mye høyere var prisnivået i 2016 enn i 2015?

### 7.1.3

I 2017 tjente Else 490 000 kr, mens hun i 2012 tjente 410 000 kr. I 2017 var KPI = 105,5, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Else best råd?

### 7.2.1

Fra en bank låner du 200 000 kr med 2% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 10 årlige terminbeløp.

- a) Hva blir det årlige avdraget?  
b) Hva er gjelden din etter at du har betalt sjette terminbeløp?

- c) Hvor mye må du betale i renter det sjuende terminbeløp?
- d) Hvor stort blir det sjuende terminbeløpet?

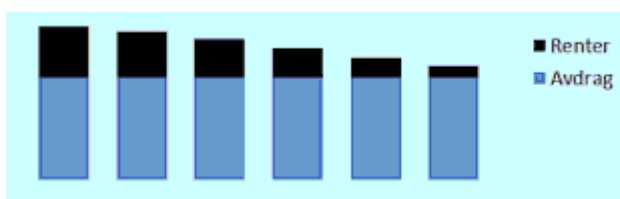
### 7.2.2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 2% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 15 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 7 783.

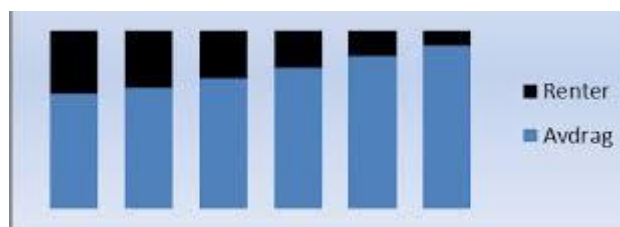
Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

### 7.2.3

Hvilken av figurene skisserer et serielån og hvilken skisserer et annuitetslån? Forklar hvorfor.



(a)



(b)

### 7.2.4

Du oppretter en sparekonto i en bank som gir 2,3% årlig rente og setter inn 45 000 kr. Hvor mye har du på kontoen etter 15 år?

### 7.2.5

Tenk at kredittkortet ditt har 45 dagers lån uten renter, og 10% månedlig rente etter dette. Du kjøper en scooter for 50 000 kr med kredittkortet. (Regn måneder som 30 dager).

- a) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 75 dager?

**b)** Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 105 dager?

**c)** Hvor mye skylder du banken etter 75 dager hvis du betalte 20 000 kr innen de første 45 dagene?

### 7.3.1

Børge har 350 000 kr i lønn. Børge er pensjonist, og skal da ha 56 000 kr i personfradrag og 83 000 kr i minstefradrag. I tillegg betaler han 700 kr i fagforeningskontigent.

**a)** Beregn skattegrunnlaget til Børge.

**b)** Av skattegrunnlaget betaler Børge 23% skatt. Finn hvor mye dette er.

### 7.3.2

Mira er 19 år og tjener 200 000 i året, mens 74 år gamle Børge tjener 350 000 i året.

Hvem av de to betaler mest trygdeavgift (i antall kroner)?

### 7.3.3

Beregn trinnskatten til Børge (nevnt i oppgave 7.3.1 og 7.3.2).

### 7.3.4

Beregn nettolønnen til Børge (nevnt i oppgave 7.3.1-7.3.3).

### 7.4.1

I februar antok Nora at dette ville bli hennes utgifter og inntekter:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 4 500 kr på mat
- 1 500 kr på andre utgifter

**a)** Sett opp et budsjett for Noras inntekter og utgifter i februar.

**b)** Det viste seg at de *faktiske* utgiftene og inntektene ble disse:

- 23 000 kr i nettolønn

- 6 000 kr for leie av hybel
- 5 500 på mat
- Kjøp av fire FLAX-lodd som kostet 25 kr hver.
- Gevinst på 1 000 kr fra FLAX-loddene
- 1 800 på andre utgifter.

Sett opp et regnskap for Nora. Gikk hun med overskudd eller underskudd i februar? Ble overskuddet/underskuddet større eller mindre enn i budsjettet?

## Kapittel 8

# Sannsynlighet

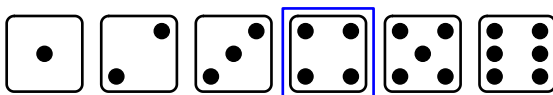
## 8.1 Grunnprinsippet

Selve prinsippet bak sannsynlighetsregning er at vi spør hvor mange *gunstige utfall* vi har i et utvalg av *mulige utfall*. Sannsynligheten for en *hendelse* er da gitt som et forholdstall mellom disse.

### 8.1 Sannsynligheten for en hendelse

$$\text{sannsynligheten for en hendelse} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Når vi kaster en terning, kaller vi 'å få en firer' en hendelse. Og da en terning har seks forskjellige sider, er det seks mulige utfall.



Hvis vi ønsker 'å få en firer', er det bare 1 av disse 6 utfallene som gir oss det vi ønsker, altså er

$$\text{sannsynlighet for å få en firer} = \frac{1}{6}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi gjerne enkeltbokstaver for å indikere en hendelse. Istedenfor å skrive 'å få en firer', kan vi bruke bokstaven  $F$ , og for å indikere at vi snakker om sannsynligheten for en hendelse, bruker vi bokstaven  $P$ .

$P$  kommer av det engelske ordet for sannsynlighet, *probability*.

Når vi skriver  $P(S)$  betyr dette 'sannsynligheten for å få en firer':

$$P(S) = \frac{1}{6}$$

Hva med det motsatte, altså sannsynligheten for å *ikke* å få en firer? For å uttrykke at noe er motsatt av en hendelse, setter vi en strek over navnet. Hendelsen 'å ikke få en firer' skriver vi altså som  $\bar{F}$ . Det 'å ikke få en firer' er det samme som 'å få enten en ener, en toer, en treer, en femmer eller en sekser', derfor har denne hendelsen 5 gunstige utfall. Det betyr at

$$P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$$

## 8.2 Symboler for sannsynlighet

$P(A)$  er sannsynligheten for at hendelsen  $A$  skjer.

$A$  og  $\bar{A}$  er motsatte hendelser.

$P(\bar{A})$  er sannsynligheten for at  $A$  ikke skjer, og omvendt.

### Obs!

Som regel er det en god vane å forkorte brøker når det lar seg gjøre, men i sannsynlighetsregning vil det ofte lønne seg å la være. Du vil derfor oppdage at mange brøker i kommende seksjoner kunne vært forkortet.

## 8.2 Hendelser med og uten felles utfall

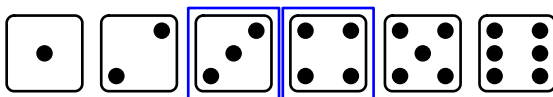
### 8.2.1 Hendelser uten felles utfall

La oss kalle hendelsen 'å få en treer' (på en terning) for  $T$ . Hendelsen 'å få en treer eller en firer' skriver vi da som  $T \cup F$ .

Symbolet  $\cup$  kalles *union*.

Det er 2 av 6 sider på en terning som er tre *eller* fire, sannsynligheten for 'å få en treer *eller* en firer' er derfor  $\frac{2}{6}$ :

$$P(F \cup S) = \frac{2}{6}$$



Det samme svaret får vi ved å legge sammen  $P(F)$  og  $P(S)$ :

$$P(T \cup F) = P(T) + P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne  $P(T \cup F)$  ved å summere  $P(T)$  og  $P(F)$  kan vi gjøre da  $T$  og  $F$  ikke har noen *felles utfall*. Dette fordi ingen sider på trekanten viser *både* en treer og en firer.

### 8.3 Hendelser uten felles utfall

For to hendelser  $A$  og  $B$  uten felles utfall, er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



## Eksempel

Du trekker opp en kule fra en bolle hvor det ligger én rød, to blå og én grønn kule. Hva er sannsynligheten for at du trekker opp en rød *eller* en blå kule?

### Svar:

Vi kaller hendelsene 'å få en rød kule' for  $R$  og hendelsen 'å få en blå kule' for  $B$ .

- Det er i alt 4 mulige utfall (kuler).
- Siden alle kulene bare har én farge, er det ingen av hendelsene  $R$  og  $B$  som har felles utfall.
- Sannsynligheten for å trekke en rød kule er

$$P(R) = \frac{1}{4}$$

- Sannsynligheten for å trekke en blå kule er

$$P(B) = \frac{2}{4}$$

Sannsynligheten for å få en rød *eller* en blå kule er dermed

$$\begin{aligned} P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

### 8.2.2 Summen av alle sannsynligheter er 1

Tenk at vi kaster en terning og at vi holder både 'å få en firer' og 'å ikke få en firer' for gunstige hendelser. Vi har tidligere sett at  $P(F) = \frac{1}{6}$ ,  $P(\bar{F}) = \frac{5}{6}$ , og at  $F$  og  $\bar{F}$  ikke har felles utfall. Av [Regel 8.3](#) har vi da at

$$\begin{aligned}P(F \cup \bar{F}) &= P(F) + P(\bar{F}) \\&= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\&= 1\end{aligned}$$

Enten så skjer  $F$ , eller så skjer den ikke. Og skjer den ikke, så skjer  $\bar{F}$ . Hvis vi sier at *både*  $F$  og  $\bar{F}$  er gunstige hendelser, sier vi altså at alle mulige utfall er gunstige, og da gir [Regel 8.1](#) en sannsynlighet lik 1.

#### 8.4 Summen av alle sannsynligheter

Summen av sannsynlighetene for alle mulige hendelser er alltid lik 1.

En hendelse  $A$  og den motsatte hendelsen  $\bar{A}$  vil til sammen alltid utgjøre alle hendelser. Av [Regel 8.4](#) har vi da at

$$\begin{aligned}P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\P(A) &= 1 - P(\bar{A})\end{aligned}$$

#### 8.5 Motsatte hendelser

For en hendelse  $A$  er

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

## Eksempel

I en klasse med 25 elever er det 12 jenter og 13 gutter. En elev skal tilfeldig trekkes ut til å være med i en matematikkonkurranse.

- a) Hva er sannsynligheten for at en gutt blir trukket?
- b) Hva er sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket?

### Svar:

Vi kaller hendelsen 'en gutt blir trukket' for  $G$ .

- a) Sannsynligheten for at en gutt blir trukket er

$$P(G) = \frac{13}{25}$$

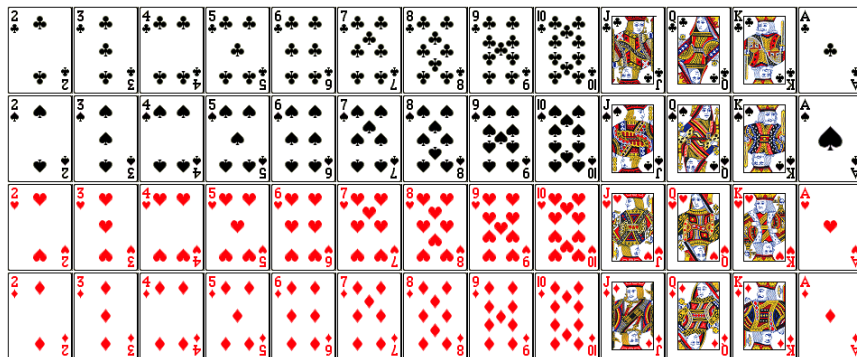
- b) Sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket er

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\ &= 1 - \frac{13}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

*Merk:* At en gutt *ikke* blir trukket er det samme som at en jente blir trukket.

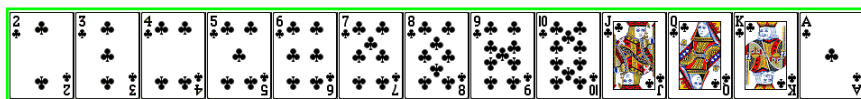
### 8.2.3 Felles utfall

Noen ganger er det slik at to hendelser kan ha *felles utfall*. La oss se på en vanlig kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typene spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av sorten knekt, dame, kong eller ess kalles *honnørkort*.

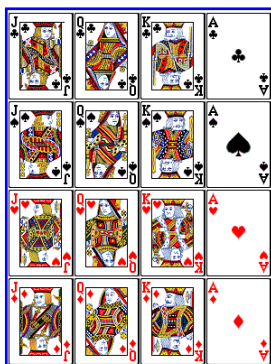


Tenk at vi trekker opp et kort fra en blandet kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynligheten for 'å trekke kløverkort *eller* honnørkort'. Vi starter med å telle opp de gunstige utfallene for kløverkort, og finner at antallet er 13.

Et kort som kløver kong er et kløverkort, men det er også et honnørkort, og derfor er det begge deler; *både* kløverkort og honnørkort.



Etterpå teller vi opp gunstige utfall for honnørkort, og finner at antallet er 16.

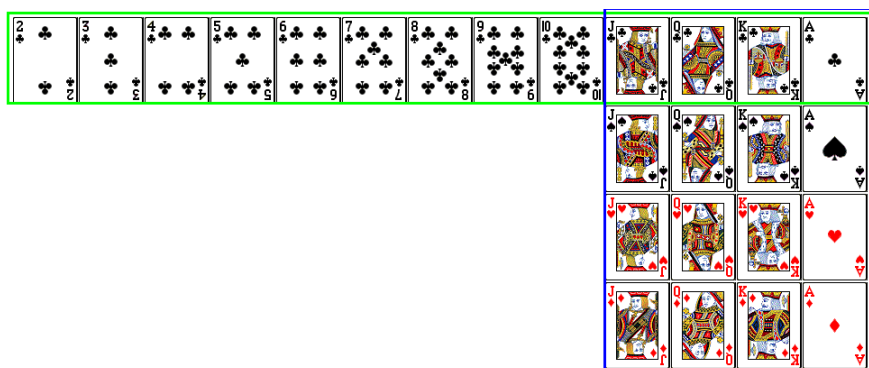


Til sammen har vi telt  $13 + 16 = 29$  gunstige utfall, men nå støter vi på et problem. For da vi fant alle kløverkort, telte vi blant andre kløver knekt, dame, kong og ess. Disse fire kortene telte vi også da vi fant alle honnørkort, noe som betyr at vi har telt de samme kortene to ganger!



Det finnes jo for eksempel ikke to kløver ess i en kortstokk, så skal vi regne ut hvor mange kort som oppfyller kravet om å være kløver *eller* honnør, så må vi trekke ifra antallet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La  $K$  være hendelsen 'å trekke et kløverkort' og  $H$  være hendelsen 'å trekke et honnørkort'. Siden det er 25 kort som er kløverkort *eller* honnørkort av i alt 52 kort, har vi at

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Siden vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi videre at

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er *både* kløver og honnørkort, dette skriver vi som

Symbolet  $\cap$  kalles *snitt*.

$$K \cap H = 4$$

Vi sier da at  $K$  og  $H$  har 4 *felles utfall*. Videre er

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

Nå som vi har funnet  $P(K)$ ,  $P(H)$  og  $P(K \cup H)$  kan vi igjen finne  $P(K \cap H)$  på følgende måte:

$$\begin{aligned} P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{25}{52} \end{aligned}$$

### 8.6 Hendelser med felles utfall

For to hendelser  $A$  og  $B$  er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

#### Merk

Hvis man anvender [Regel 8.6](#) på to hendelser uten felles utfall, ender man opp med [Regel 8.3](#).

### Eksempel

I en klasse på 20 personer spiller 7 personer fotball og 10 personer spiller handball. Av disse er det 4 som spiller både fotball og handball. Om man trekker ut én person fra klassen, hva er sannsynligheten for at denne personen spiller fotball *eller* handball?

#### Svar:

Vi lar  $F$  være hendelsen 'spiller fotball' og  $H$  være hendelsen 'spiller handball'.

- Sannsynligheten for at en person spiller fotball er

$$P(F) = \frac{7}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller handball er

$$P(H) = \frac{10}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller *både* fotball og handball er

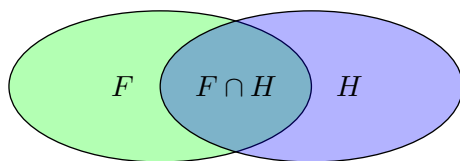
$$P(F \cap H) = \frac{4}{20}$$

Sannsynligheten for at en person spiller fotball *eller* handball er derfor

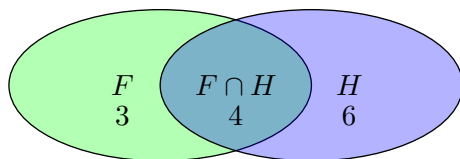
$$\begin{aligned} P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

### 8.2.4 Venndiagram

Målet med et venndiagram er å lage en figur som illustrerer antallet av de *særskilte* utfallene og de *felles* utfallene. La oss bruke eksempelet på side 151 til å lage en slik figur. For klassen der noen spiller fotball, noen handball og noen begge deler, kan vi lage et venndiagram som vist under.



Den grønne ellipsen<sup>1</sup> representerer de som spiller fotball ( $F$ ) og den blå de som spiller handball ( $H$ ). Da noen spiller *begge* sportene ( $F \cap H$ ), har vi tegnet ellipsene litt over i hverandre. Videre vet vi at 7 spiller fotball, 10 spiller handball og 4 av disse gjør *begge* deler. Dette illustreres slik:



Diagrammet forteller nå at 3 personer spiller *bare* fotball og 6 spiller *bare* handball. I tillegg spiller 4 personer *både* fotball og handball. (Til sammen er det derfor 7 som spiller fotball og 10 som spiller handball.)

---

<sup>1</sup>En ellipse er en "strekt" sirkel.



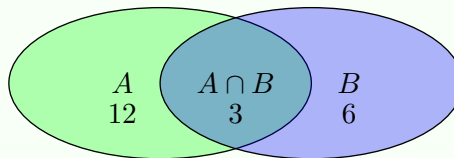
### Eksempel 1

I en skoleklasse er det 31 elever. I denne klassen er det 15 elever som tar buss til skolen og 9 elever som tar båt. Av disse er det 3 stykker som tar både buss og båt.

- a) Sett opp et venndiagram som illustrerer gitt informasjon.
- b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen tar buss *eller* båt til skolen?

#### Svar:

- a) Siden 3 elever tar *både* buss og båt, er det  $15 - 3 = 12$  som *bare* tar buss og  $9 - 3 = 6$  som *bare* tar båt. Vi lar  $A$  bety 'tar buss' og  $B$  bety 'tar båt', venndiagrammet vårt blir da seende slik ut:



- b) Sannsynligheten for at en person tar buss *eller* båt kan vi skrive som  $P(A \cup B)$ . Siden 15 elever tar buss, 9 tar båt og 3 tar begge deler, er det i alt  $15 + 9 - 3 = 21$  elever som tar buss *eller* båt. Da det er 31 elever i alt å velge mellom, er

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

## Eksempel 2

Om en klasse med 29 elever vet vi følgende:

- 16 elever spiller fotball
- 12 elever spiller handball
- 7 elever spiller volleyball
- 5 elever spiller både fotball og handball, men ikke volleyball
- 3 elever spiller både fotball og volleyball, men ikke handball
- 2 elever spiller både handball og volleyball, men ikke fotball.
- 1 elev spiller alle tre sportene.

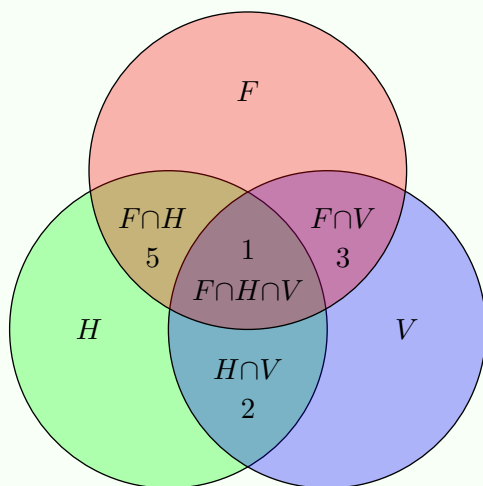
a) Sett opp et venndiagram som beskriver fordelingen av de tre sportene i klassen.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen spiller enten fotball, handball eller volleyball?

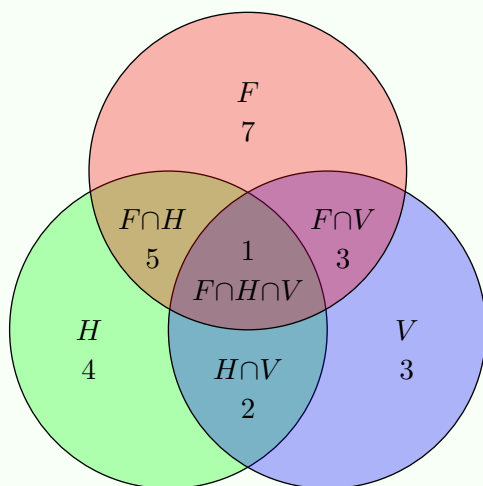
c) Personen som trekkes ut viser seg å spille fotball. Hva er sjansen for at denne personen også spiller handball?

### Svar:

La  $F$  bety 'spiller fotball',  $H$  bety 'spiller handball' og  $V$  bety 'spiller volleyball'. Når vi skal lage et venndiagram, er det lurt å skrive inn de felles utfallene først. Ut ifra fjerde til syvende punkt kan vi tegne dette:



Da ser vi videre at  $16 - 5 - 1 - 3 = 7$  elever spiller *bare* fotball,  $12 - 5 - 1 - 2 = 4$  spiller *bare* handball og  $9 - 3 - 1 - 2 = 3$  spiller *bare* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er  $8 + 5 + 1 + 3 + 4 + 2 + 3 = 26$  unike elever som spiller én eller flere av sportene. Sjansen for å trekke en av disse 26 i en klasse med 29 elever er  $\frac{26}{29}$ .

c) Vi leser av diagrammet at av de totalt 16 som spiller fotball, er det  $5 + 1 = 6$  som også spiller handball. Sjansen for at personen som er trukket ut spiller handball er derfor  $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ .

### 8.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendelser, kan vi også sette opp en *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Si at det på en skole med 300 elever deles ut melk og epler til de elevene som ønsker det i lunsjen. Si videre at 220 av elevene får melk, mens 250 får eple. Av disse er det 180 som får både melk og eple. Hvis vi lar  $M$  bety *får melk* og  $E$  bety *får eple*, vil krysstabellen vår først se slik ut:

	M	$\bar{M}$	sum
$E$			
$\bar{E}$			
sum			

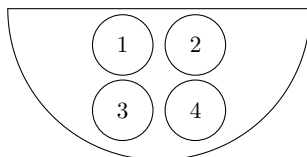
Så fyller vi inn tabellen ut ifra infoen vi har:

- får *både* melk og eple:  $M \cap E = 180$
- får melk, men ikke eple:  $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$
- får eple, men ikke melk:  $E \cap \bar{M} = 250 - 180 = 70$
- får hverken melk eller eple:  $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

	M	$\bar{M}$	sum
$E$	180	70	250
$\bar{E}$	40	10	50
sum	220	80	300

## 8.3 Gjentatte trekk

### 8.3.1 Permutasjoner



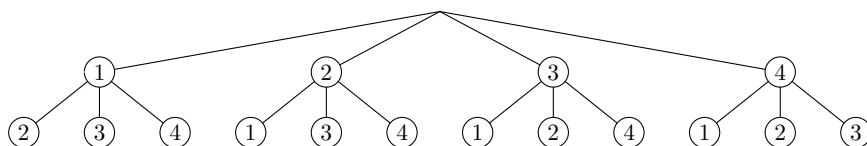
Si vi har en bolle med fire kuler som er nummererte fra 1 til 4. I et forsøk trekker vi opp en og en kule fram til vi har trukket opp tre kuler. Hvis vi for eksempel først trekker kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi *permutasjonen* 2 4 3.

Hvor mange forskjellige permutasjoner kan vi få? La oss lage en figur som hjelper oss med å finne svaret. Ved første trekning er det 4 kuler å plukke av, vi kan derfor si at vi har 4 veier å gå. Enten trekker vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



1. trkn.

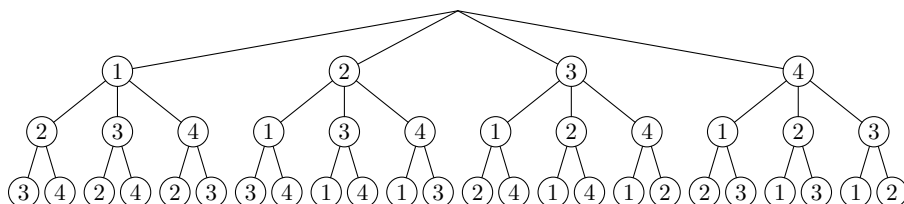
Kula vi trekker opp, legger vi ut av bollen, og trekker så for andre gang. For hver av de 4 veiene vi kunne gå i første trekning får vi nå 3 nye veier å gå. Altså har vi nå  $3 \cdot 4 = 12$  veier vi kan gå.



1. trkn.

2. trkn.

Den andre kula vi trekker opp legger vi også ut av bollen, så for hver av de 12 veiene fra 2. trekning, får vi nå to nye mulige veier å gå. Totalt antall veier (permutasjoner) blir derfor  $12 \cdot 2 = 24$ .



1. trkn.

2. trkn.

3. trkn.

Denne utregningen kunne vi også ha skrevet slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

## 8.7 Produktregelen for permutasjoner

Når vi foretar flere trekninger etter hverandre, finner vi alle mulige permutasjoner ved å gange sammen antall mulige utfall i hver trekning.

### Eksempel

Av de 29 bokstavene i alfabetet ønsker vi å lage et ord som består av 3 bokstaver. Vi godkjenner ord som ikke har noen betydning, men en bokstav kan bare brukes én gang i ordet.

Hvor mange ord kan vi lage?

#### Svar:

Først har vi 29 bokstaver å trekke fra, deretter 28 bokstaver, og til slutt 27 bokstaver. Dermed er antall permutasjoner gitt som

$$\underbrace{29}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{28}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{27}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{3. trekning}}} = 21\,924$$

Vi kan altså lage 21 924 forskjellige ord.

### Eksempel 2

Vi kaster om krone eller mynt fire ganger etter hverandre. Hvor mange permutasjoner har vi da?

#### Svar:

Hver gang vi kaster om krone eller mynt, har vi to mulige utfall. Antall permutasjoner er derfor gitt som

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

## Kombinasjoner

I dagligtale blir ofte ordet *kombinasjoner* brukt istedenfor permutasjoner, men innenfor sannsynlighetsregning har kombinasjoner og permutasjoner forskjellig betydning. Den store forskjellen er at permutasjoner tar hensyn til rekkefølge, mens kombinasjoner ikke gjør det.

Si vi ønsker å danne et ord med to bokstaver ved hjelp av med bokstavene  $A$ ,  $B$  og  $C$ , og at vi godtar gjenbruk av bokstav. Da har vi 9 mulige permutasjoner:

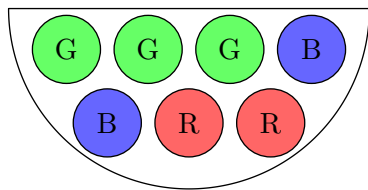
$$AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA, CB$$

Kombinasjoner derimot viser til en unik sammensetting når rekkefølge ikke tas hensyn til, for eksempel er  $AB$  og  $BA$  den samme kombinasjonen. I dette tilfellet har vi altså 6 kombinasjoner

$$AA, AB, AC, BB, BC, CC$$

### 8.3.2 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Tenk at vi har en med bolle sju kuler. Tre av dem er grønne, to er blå og to er røde. Si at vi tar opp først én kule av bollen, og deretter én til. Hva er sannsynligheten for at vi trekker opp to grønne kuler?



Hvis vi lar  $G$  bety 'å trekke en grønn kule', kan vi skrive denne sannsynligheten som  $P(GG)$ . For å komme fram til et svar, starter vi med å finne ut hvor mange *gunstige* permutasjoner vi har. Siden vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi  $3 \cdot 2 = 6$  gunstige permutasjoner. Totalt velger vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antall *mulige* permutasjoner er derfor  $7 \cdot 6 = 42$ . Sannsynligheten for å få to grønne kuler blir da

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \quad (8.1)$$

La oss også finne sannsynligheten for å få en grønn kule for hver trekning isolert sett. I første trekning har vi 3 grønne av i alt 7 kuler, altså er

$$P(G) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning tas det for gitt at en grønn kule er plukket opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grønne:

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Symbolet  $|$  betyr *gitt at ... har skjedd*.  $P(G|G)$  er derfor en forkortelse for 'sannsynligheten for å trekke en grønn kule, *gitt* at en grønn kule er trukket'.

Hvis vi ganger sannsynligheten fra første trekning med sannsynligheten fra andre trekning, blir regnestykket det samme som i ligning (8.1):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$



## 8.8 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Sannsynligheten for at  $A$  vil skje, *gitt* at  $B$  har skjedd, skrives som  $P(A|B)$ .

Sannsynligheten for at  $A$  skjer først, deretter  $B$ , deretter  $C$ , og så videre (...) er

$$P(ABC...) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot \dots$$

### Eksempel

I en bolle ligger to blå og to røde kuler. Vi trekker én og én kule opp av bollen, fram til vi har hentet opp tre kuler. Hva er sannsynligheten for at vi først trekker en blå, deretter en rød, og til slutt en blå kule?

#### Svar:

Vi lar  $B$  bety 'å trekke blå kule' og  $R$  bety 'å trekke rød kule'. Sannsynligheten for først en blå, så en rød, og så en blå kule, skriver vi da som  $P(BRB)$ .

- Sannsynligheten for  $B$  i første trekning er  $P(B) = \frac{2}{4}$ .
- Sannsynligheten for  $R$  i andre trekning, *gitt*  $B$  i første er

$$P(R|B) = \frac{2}{3}$$

- Sannsynligheten for  $B$  i tredje trekning, *gitt*  $B$  i første og  $R$  i andre er

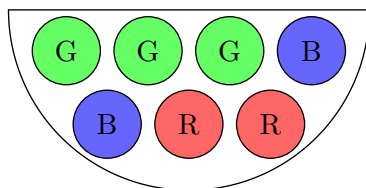
$$P(B|RB) = \frac{1}{2}$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned} P(BRB) &= P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{24} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

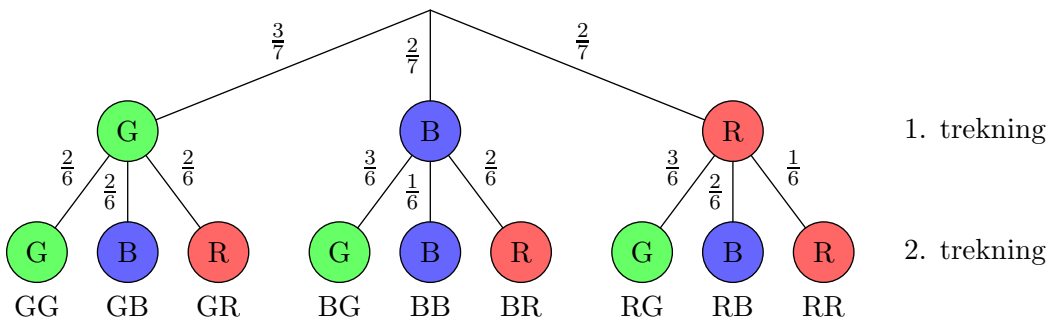
### 8.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte *Regel 8.8* for å lage en hjelpetegning når vi har å gjøre med gjentatte trekk. Tegningen vi her skal ende opp med kalles et *valgtre*. Vi tegner da en lignende figur som vi gjorde i delkapittel 8.3, men langs alle veier skriver vi på sannsynligheten for utfallet veien leder oss til.



La oss igjen se på bollen med de syv kulene. Trekk av grønn, blå eller rød kule betegner vi henholdsvis med bokstavene  $G$ ,  $B$  og  $R$ .

Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule  $\frac{3}{7}$ , derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til  $G$ . Gitt at vi har trukket en grønn kule, er sannsynligheten for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik  $\frac{2}{6}$ . Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra  $G$  til  $G$ . Og sånn fortsetter vi til vi har ført opp alle sannsynlighetene til hver vei. For å få en rask oversikt over de forskjellige permutasjonene veiene fører til, kan det være lurt å skrive opp disse under hver ende av treet.



La oss nå bruke valgtreet over til å finne sannsynligheten for å trekke én grønn og én blå kule.  $GB$  og  $BG$  er da de gunstige permutasjonene. Ved å gange sammen sannsynlighetene langs veien til  $GB$ , finner vi at

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne  $P(BG)$ :

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$

Sannsynligheten for at 'GB eller BG' inntreffer er (se [Regel 8.6](#)):

$$\begin{aligned}P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\&= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\&= \frac{12}{42} \\&= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

## 8.9 Permutasjoner på et valgtre

For å finne sannsynlighetene til en permutasjon på et valgtre, ganger vi sammen sannsynlighetene langs veien vi må følge for å komme til permutasjonen.

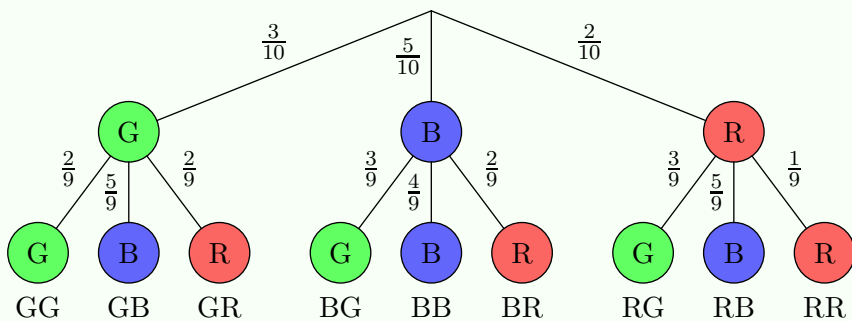
### Eksempel

I en bolle med 10 kuler er tre kuler grønne, to er blå og fem er røde. Du trekker to kuler ut av bollen. La  $G$ ,  $B$  og  $R$  henholdsvis bety 'å trekke en blå kule', 'å trekke en grønn kule' og 'å trekke en rød kule'.

- a) Tegn et valgtre som skisserer permutasjonene av  $B$ ,  $G$  og  $R$  du kan få.
- b) Hva er sannsynligheten for at du trekker to røde kuler?
- c) Hva er sannsynligheten for at du trekker én blå og én grønn kule?
- d) Hva er sannsynligheten for at du trekker *minst* én blå *eller* *minst* én grønn kule?

**Svar:**

a)



b) Av valgtreet vårt ser vi at

$$\begin{aligned}
 P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\
 &= \frac{2}{90} \\
 &= \frac{1}{45}
 \end{aligned}$$

c) Både permutasjonen  $GB$  og  $BG$  gir oss én blå og én grønn kule. Sannsynligheten for hver av dem er

$$\begin{aligned}
 P(GB) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \\
 &= \frac{15}{90} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(BG) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Sannsynligheten for  $GB$  eller  $BG$  er summen av  $P(GB)$  og  $P(BG)$ :

$$\begin{aligned}
 P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{2}{6} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

d) For å svare på denne oppgaven kan vi selvsagt legge sammen sannsynligheten for permutasjonene  $GG$ ,  $GB$ ,  $GR$ ,  $BG$ ,  $BB$ ,  $BR$ ,  $RG$  og  $RB$ , men vi sparer oss veldig mye arbeid hvis vi merker oss dette: Å få *minst* én blå eller én grønn kule er det motsatte av å *bare* få røde kuler. Sannsynligheten for dette, å få to røde kuler, fant vi i oppgave b). Av [Regel 8.5](#) har vi at

$$\begin{aligned} P(\bar{R}) &= 1 - P(R) \\ &= 1 - \frac{1}{45} \\ &= \frac{45}{45} - \frac{1}{45} \\ &= \frac{44}{45} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for å få *minst* én blå *eller* *minst* én grønn kule er altså  $\frac{44}{45}$ .

## Oppgaver for kapittel 8

### 8.2.1

Du trekker et kort fra en kortstokk.

- a) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort?
- b) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort eller et sparkort?
- c) Hva er sannsynligheten for at kortet ikke er et kløverkort?  
Bruk to forskjellige regnemåter for å finne svaret.

### 8.2.2

Du trekker et kort fra en kortstokk.

- a) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort?
- b) Hva er sannsynligheten for at du trekker et hjerterkort?
- c) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort eller et hjerterkort?
- d) Hva er sannsynligheten for at kortet du trekker hverken er et 8-kort eller et hjerterkort?

## Kapittel 9

# Digitale verktøy

## 9.1 Programmering

Programmering handler om å gi instrukser til en datamaskin. Slik kan datamaskiner utføre utregninger, framstille bilder, animasjoner, spill, og mye mer. For å gi instrukser bruker vi forskjellige *programmeringsspråk*, og det er et hav av forskjellige språk å velge i. I norsk skole er de de mest brukte språkene [Scratch](#), [Python](#) og [JavaScript](#)<sup>1</sup>. Da det finnes et stort utvalg av gratis ressurser for å lære seg programmeringsspråk, vil vi i denne boka nøye oss<sup>2</sup> med å referere til disse:

- [code.org](#) (koding generelt)
- [microbit.org](#) (koding med micro:bit)
- [espensklasserom.co](#) (Koding i Sracht, micro:bit m.m.)
- [kidsakoder.no](#) (koding i Scratch, micro:bit, Python m.m)

Har du allerede nådd et høyt nivå som programmerer, og føler du har god kontroll på data-typer, funksjoner, klasser o.l.? Da anbefales språket [Rust](#). Mange holder dette for å være arvtakeren til C++ og liknende språk.

---

<sup>1</sup>Rett nok i blokkbasert utgave ved koding av [micro:bit](#).

<sup>2</sup>Enn så lenge. Programmering er et forholdsvis nytt tema i norsk skole, forslag om hva en lærebok bør inneholde om programmering mottas med glede på mail [sindre.heggen@gmail.com](mailto:sindre.heggen@gmail.com).

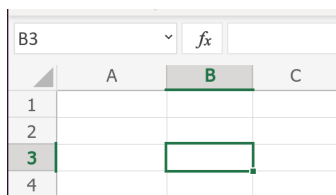


## 9.2 Regneark

I denne boka tar vi utgangspunkt i Mircrosofts programvare Excel. Det finnes andre gode regneark på markedet, for eksempel Google Sheets og Libre Office Calc. Disse tre nevnte regnearkene ligner hverandre mye både i utforming og i funksjoner de har å tilby.

### 9.2.1 Introduksjon

Når du åpner et regne-ark vil du få opp en tabell hvor *radene* er nummerert med tall (1, 2 3 osv), mens *kolonnene* er indeksert med bokstaver (A, B, C osv.). Hvordan radene og kolonnene brukes er avgjørende for å forstå Excel. I figuren under har vi markert det vi kaller *celle B3*. Dette er altså cellen hvor *rad 3* og *kolonne B* krysser hverandre. (Legg også merke til at B3 er markert oppe til venstre i figuren).



	A	B	C
1			
2			
3			
4			

I hver celle kan vi skrive inn både tall og tekst. Si at Ole har en jobb med 250 kr i timelønn, og at han jobber 7 timer i uka. Denne informasjonen kan vi skrive inn i Excel slik:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4		

### 9.2.2 Utregninger

Vi ønsker nå å finne ukelønnen til Ole. Ukelønnen er gitt ved formelen

$$\text{ukelønn} = \text{timelønn} \cdot \text{timer i uka}$$

For å foreta en utregning i regneark, starter man med å skrive = i cellen. I celle B4 finner vi ukelønnen til Ole ved å skrive =250\*7.

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=250*7

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Når vi trykker enter-tasten, er det resultatet, 1750, som vises i cellen. Ønsker vi å se formelen vi har brukt, kan vi dobbeltklikke på cellen, eller se i *inntastingsfeltet* (oppe til høyre i figuren under.)

B4		$f_x$	=250*7
	A	B	C
1		Ole	
2	Timelønn	250	
3	Timer i uka	7	
4	Ukelønn	1750	

*Merk:* Inntastingsfeltet kan også brukes til å taste inn tall og tekst i cellen.

## 9.2.3 Cellereferanser

Excels kanskje viktigste egenskap er *cellereferanser*. Dette betyr kort sagt at vi bruker celler istedenfor tall når vi skal gjøre utregninger. I forrige seksjon regnet vi lønnen til Ole ved å gange 250 (timelønnen) med 7 (timer i uka). Ved å bruke cellereferanser kunne vi isteden gjort dette:

Tallet tilhørende timelønnen (250) står i celle B2, mens tallet tilhørende timer (35) står i celle B3. For å gange tallene i disse cellene kan vi skrive =B2\*B3:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=B2*B3

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Én av fordelene med å bruke cellereferanser er at det blir mye lettere å rette opp i feil som har blitt gjort. Si f.eks. at det skulle stått 300 istedenfor 250 i B3. Om vi derfor endrer B3, vil resultatet i B4 endre seg deretter:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	300
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	2100

*Merk:* Du kan også trykke på cellene du ønsker å bruke i formlene dine, slik som vist [her](#).

## 9.2.4 Kopiering og låsing av celler

Kopiering av cellene er en metode som hindrer deg i å skrive de samme formelene om og om igjen. Vi ønsker nå å lage et ark som passer til følgende informasjon:

- Timelønnen til Ole, Dole og Doffen er henholdsvis 300 kr, 200 kr og 500 kr.
- Alle tre jobber 7 dager i uka.
- Vi ønsker å regne ut hvor mange timer de jobber til sammen og hvor mye ukelønn de har til sammen.

Vi starter med å sette opp dette regnearket:

	A	B	C	D
1		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>
2	Timelønn	300	200	500
3	Timer i uka			
4	Ukelønn			

Her har vi bare fylt inne informasjonen som er *unik* for Ole, Dole og Doffen, nettopp fordi de andre cellene enten inneholder de samme tallene eller den samme regnemåten. For cellene som ikke er unike bør vi bruke kopieringsmulighetene, og dette vises i denne [videoen](#). Her er en liten beskrivelse av hva som blir gjort:

1. Siden alle tre jobber i 7 timer, skriver vi 7 i celle B4. Etterpå kopierer vi ved å trykke musepekeren helt nede i høyre hjørne av B4 og drar *bortover* til C2 og D2.
2. Siden regnemåten av ukelønn er den samme for alle tre, skriver vi den (med cellereferanser) inn i B4, og kopierer den *bortover* til celle C4 og D4.
3. Regnemåten for summen av timene og summen av ukelønnene er også den samme, vi skriver den derfor inn i celle E3 og kopierer den *nedover* til E4.

Resultatet ble dette:

	A	B	C	D	E
1		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
2	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
3	Timer i uka	7	7	7	21
4	Ukelønn	2100	1400	3500	7000

	A	B	C	D	E
1		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
2	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
3	Timer i uka	=7	=7	=7	=B3+C3+D3
4	Ukelønn	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=B4+C4+D4

Av det vi har sett i [videoen](#) og figurene over kan vi ta med oss to generelle regler:

1. Hver gang man kopierer en formel én celle *bortover*, vil kolonnene i formelen øke med én bokstav i alfabetet. (A blir til B, B blir til C osv.)
2. Hver gang man kopierer en formel én celle *nedover*, vil radene i formelen øke med 1 (1 blir 2 B, 2 blir til 3 osv.).

## Låsing av celler

Når man kopierer celler, er det viktig å se opp for celler man ønsker å bruke i alle kopiene, for disse cellen må *låses*. Si for eksempel at Ole, Dole og Doffen alle jobber 48 arbeidsuker i året. For å finne årslønnen deres må vi altså gange ukeslønnen til hver av dem med 48.

Igjen merker vi oss at regnemethoden for å finne årslønnen er den samme for alle tre, men hvis vi bruker celle B8 i en formel, og kopierer slik vi har gjort hittil, vil bokstaven B endre seg i formlene. For å unngå dette skriver vi \$ foran B i formelen – dette gjør at kolonnebokstaven ikke endrer seg, selv om vi kopierer formelen. Dette er vist i denne [videoen](#), og resultatet ser vi her:

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
4	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
5	Timer i uka	7	7	7	21
6	Ukelønn	2100	1400	3500	7000
7	Årslønn	100800	67200	168000	

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
4	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
5	Timer i uka	=7	=7	=7	=B5+C5+D5
6	Ukelønn	=B4*B5	=C4*C5	=D4*D5	=B6+C6+D6
7	Årslønn	=\$B1*B6	=\$B1*C6	=\$B1*D6	

Skal vi låse en celle *nedover* må vi sette dollaren foran radnummeret, for eksempel B\$1.

## 9.2.5 Andre nyttige funksjoner

### Videoer

- [Sum bort og sum ned](#)
- [Justere bredde på kolonne](#)
- [Sette inn rad](#)
- [Formelvisning](#)
- [Gjøre om til prosenttall](#)
- [Endre antall desimaler](#)
- [Sorter i stigende/synkende rekkefølge](#)
- [Lage søylediagram](#)
- [Lage sektordiagram](#)
- [Lage linjediagram](#)

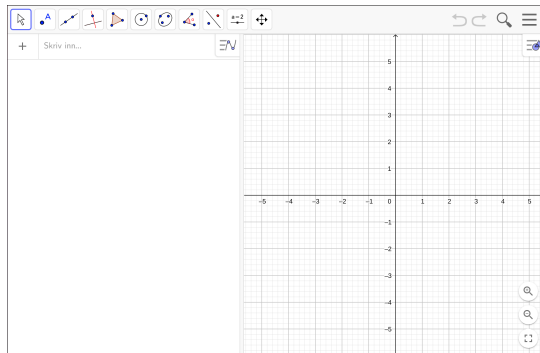
### Kommandoer (skrives med = foran).

- `SUM(celle1:celle2)`  
Summerer alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.
- `AVERAGE(celle1:celle2)`  
Finner gjennomsnittet for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.
- `MEDIAN(celle1:celle2)`  
Finner medianen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.
- `VAR.P(celle1:celle2)`  
Finner variansen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

## 9.3 GeoGebra

### 9.3.1 Introduksjon

Når du åpner GeoGebra får du et bilde som dette:



Feltet hvor det står "Skriv inn" kalles *inntastingsfeltet*. Dette feltet og det blanke feltet under utgjør *algebrafeltet*. Koordinatsystemet til høyre kalles *grafikkfeltet*.

### 9.3.2 Å skrive inn punkt, funksjoner og linjer

#### Punkt

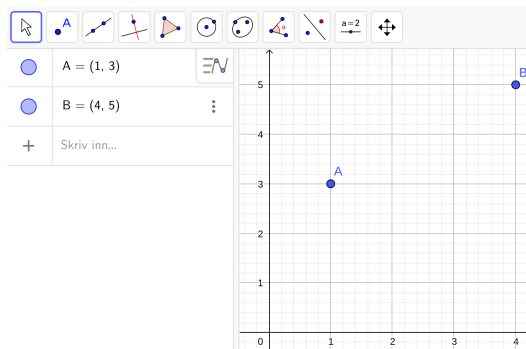
Si at vi ønsker å få punktene  $(1,3)$  og  $(4,5)$  til å vises i grafikkfeltet. I inntastingsfeltet skriver vi da

$$(1,3)$$

og

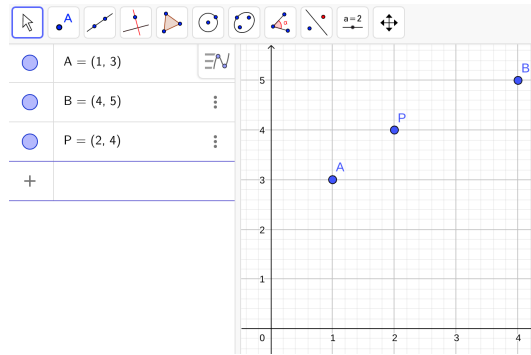
$$(4,5)$$

GeoGebra kaller da punktene  $A$  og  $B$ , og tegner dem inn i grafikkfeltet:



Ønsker vi å selv et punkts navn kan vi f. eks skrive

$$P=(2,4)$$



## Funksjoner

Si vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

For å bruke  $f(x)$  i GeoGebra, skriver vi:

$$3/2*x^2+3x$$

Når vi ikke gir funksjonen noen navn, vil GeoGebra automatisk gi funksjonen navnet  $f$ . I algebrafeltet får vi derfor

I grafikkfeltet får vi grafen til  $f$ .

Hvis vi isteden har funksjonen

$$P(x) = 0,15x^3 - 0,4x$$

er det to ting vi må passe på. Det første er at *alle desimaltall må skrives med punktum istedenfor komma* i GeoGebra . Det andre er at vi ønsker å gi funksjonen navnet  $P(x)$ . Vi skriver da

$$P(x) = 0.15x^3 - 0.4x$$

og får

## Obs!

Man kan aldri gi funksjoner navnet  $y(x)$  i GeoGebra.  $y$  kan bare brukes når man skriver inn uttrykk for en rett linje, altså  $y = ax + b$ , hvor  $a$  og  $b$  er to valgfrie tall.

## Vannette og loddrette linjer

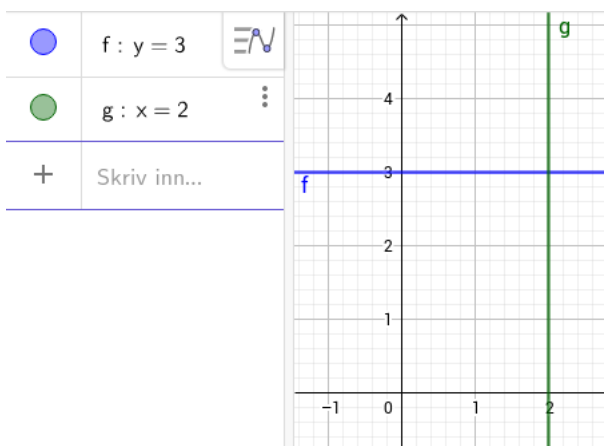
Ønser vi å lage ei linje som går vannrett gjennom verdien 3 på  $y$ -aksen og ei linje som går loddrett gjennom verdien 2 på  $x$ -aksen skriver vi:

$$y = 3$$

og

$$x = 2$$

Da får vi denne figuren:



### 9.3.3 Å finne verdien til funksjoner og linjer

#### Funksjoner

Si vi har funksjonen





$$H(x) = x^2 + 3x - 3$$

Hvis vi ønsker å vite hva  $H(2)$  er, skriver vi

$$H(2)$$

som resulterer i dette



	$H(x) = x^2 + 3x - 3$	
	$a = H(2)$ $\rightarrow 7$	

Da vet vi at  $H(2) = 7$ .

## Linjer



Det anbefales på det sterkeste at du bruker funksjonsuttrykk når du behandler linjer i GeoGebra, men i noen tilfeller kommer man ikke utenom linjer på former  $y = ax + b$ .

La oss se på de to linjene



$$y = x - 3$$

$$y = -2x + 1$$

Vi skriver disse inn i GeoGebra, og får

	f: $y = x - 3$	
	g: $y = -2x + 1$	

Ønsker vi nå å finne hva verdien til  $y = x - 3$  er når  $x = 2$ , må vi legge merke til at GeoGebra har kalt denne linja for  $f$ . Svaret vi søker får vi da ved å skrive  $f(2)$ . Ønsker vi samtidig å vite hva  $y = -2x + 1$  er når  $x = 0$  må vi skrive  $g(0)$ :

	$a = f(2)$ $\rightarrow -1$	
	$b = g(0)$ $\rightarrow 1$	

### 9.3.4 Knapper og kommandoer

#### Videoer

- [Finne nullpunktene til en graf](#)
- [Finne bunnpunkt \(eller toppunkt\) til en graf](#)
- [Finne skjæringspunktene til to funksjoner](#)
- [Justere akser](#)
- [Endre tykkelse, farge o.l på graf](#)
- [Tegne graf på gitt intervall](#)

I videoen tegner vi  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  på intervallet  $0 \leq x \leq 5$ .

- [Lage linje mellom to punkt.](#)

Legg merke til hva som gjøres mot slutten av videoen for å få det vante uttrykket  $y = ax + b$ .

#### Kommandoer

*Merk:* Mange av kommandoene har egne knapper, som blant annet vist i videoene over.

- `abs( <x> )`  
Gir lengden til  $x$  (et tall, et linjestykke o.l.). Alternativt kan man skrive  $|x|$ .
- `Linje( <Punkt>, <Punkt> )`  
Gir linjen mellom to punkt.
- `Ekstremalpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`  
Finner topp- og bunnpunkt for en funksjon innenfor et gitt intervall.
- `Funksjon( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`  
Tegner en funksjon innenfor et gitt intervall.
- `Mangekant( <Punkt>, ..., <Punkt> )`  
Tegner mangekanten mellom gitte punkt.
- `Nullpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`  
Gir nullpunktene til en funksjon innenfor et gitt intervall

- Skjæring( <Objekt>, <Objekt> )  
Finner skjæringspunktene til to objekt (funksjoner, linjer o.l.)

## Oppgaver for kapittel 9

### 9.1.1

Lag et script som fra en liste med tall finner

- a) gjennomsnittet.
- b) typetallet.
- c) medianen.

(Bruk gjerne datasettet fra oppgave 3.2.2 som et utgangspunkt.)

### 9.2.1

- a) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgave 3.2.6.
- b) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgave 3.2.7.

### 9.2.2

Gjør oppgave 7.3.4 og 7.4.1.

### 9.2.3

a) Sett opp et serielån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt? (Summen av alle terminbeløpene.)

### 9.2.4

a) Sett opp et annuitetslån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp, som er 23 523 kr.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

- b) Hvor mye koster lånet totalt?
- c) Sammenlign svaret du fikk i oppgave b) med svaret fra oppgave 9.2.3b, hvilket lån koster mest penger?

### 9.2.5

Sjekk at du i oppgave E9.2.3 og E9.2.4 har fått samme svar som nettsiden [laanekalkulator.no](http://laanekalkulator.no). (Velg *Tinglysning*: Ingen og sett alle gebyrer til 0).

### 9.3.1

- a) Skriv den lineære funksjonen  $f(x) = 2x + 4$  og linja  $y = 2x + 2$  inn i GeoGebra. Lag  $f(x)$  blå og  $y$  grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?
- b) Finn verdien til  $f(x)$  når  $x = 4$ .
- c) Finn verdien til  $y$  når  $x = -3$ .

### 9.3.2

- a) Tegn punktene  $(-1,2)$  og  $(2,8)$ .
- b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

### 9.3.3

- a) Skriv inn funksjonen  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .
- b) Finn  $f(4)$ .
- c) Finn nullpunktene til  $f(x)$ .
- d) Finn bunnpunktet til  $f(x)$ .
- e) Finn skjæringspunktet mellom  $f(x)$  og linja  $y = 5$ .

# Vedlegg

## Definisjonsmengde

Definisjonsmengden til en funksjon  $f(x)$  er  $x$ -verdiene  $f(x)$  er gyldige for.

## Verdimengde

Verdimengden til en funksjon  $f(x)$  er alle verdiene  $f(x)$  kan ha. Verdimengden er bestemt av funksjonsuttrykket og funksjonens definisjonsmengde.

## Proporsjonale størrelser

Gitt en konstant  $a$  og to variabler  $x$  og  $y$ . Hvis

$$y = ax$$

er  $x$  og  $y$  proporsjonale størrelser.

## Proporsjonale størrelser

Gitt en konstant  $a$  og to variabler  $x$  og  $y$ . Hvis

$$y = \frac{a}{x}$$

er  $x$  og  $y$  omvendt proporsjonale størrelser.

## Polynomfunksjoner

En polynomfunksjon er en funksjon som består av en sum av potenser med positive eksponenter og en variabel som grunntal.

Polynomfunksjoner har undertitler som bestemmes av den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$ , og en variabel  $x$ , har vi at

funksjonsuttrykk	funksjonsnavn
$ax + b$	1. gradsfunksjon (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. gradsfunksjon (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. gradsfunksjon (kubisk)

# Fasit

Kommer