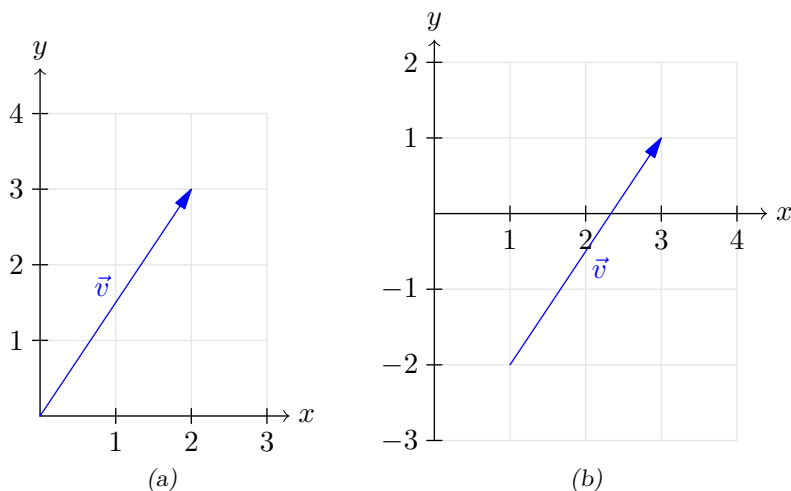


0.1 Introduksjon

En todimensjonal vektor angir en forflytning i et koordinatsystem med en x -akse og en y -akse. En vektor tegner vi som et linjestykke mellom to punkt, i tillegg til at vi lar en pil vise til hva som er endepunktet. Det betyr at forflytningen starter i punktet uten pil, og ender i punktet med pil.



I figur (a) er vektoren \vec{u} vist med startpunkt $(0,0)$ og endepunkt $(3,1)$. Når en vektor har startpunkt $(0,0)$, sier vi at den er vist i *grunnstillingen*. I figur (b) er \vec{u} vist med startpunkt $(1,-2)$ og endepunkt $(3,1)$. Forflytningen \vec{u} viser til å vandre 2 mot høyre langs x -aksen og 3 opp langs y -aksen. Dette skriver vi som $\vec{u} = [2,3]$, som kalles \vec{u} skrevet på *komponentform*.

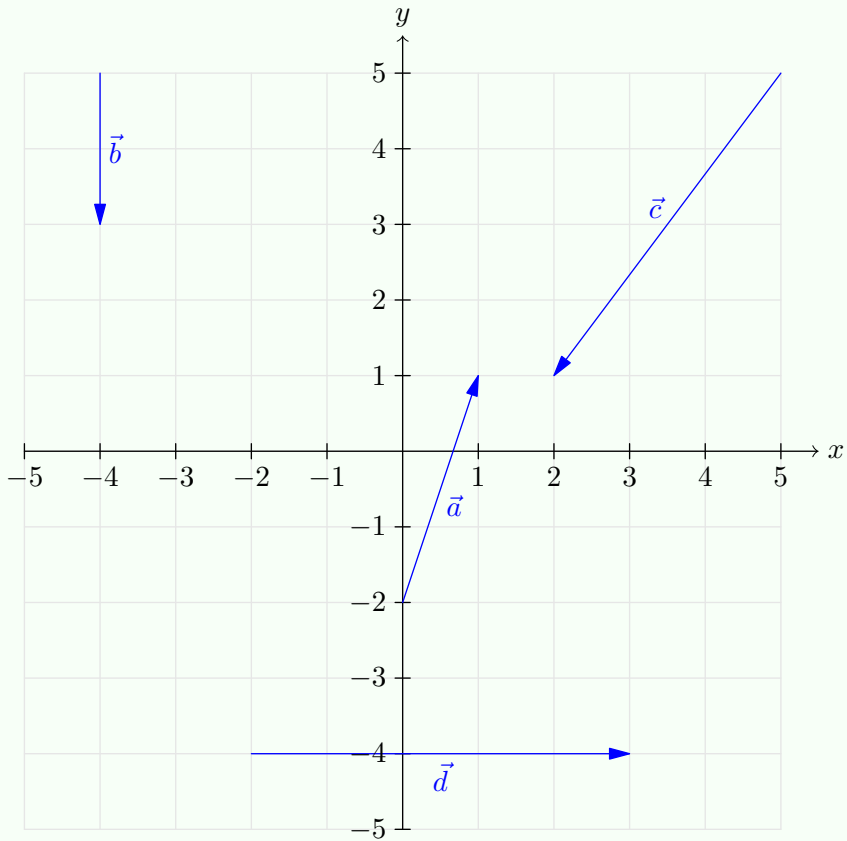
Eksempel 1

$$\vec{a} = [1, 3]$$

$$\vec{b} = [0, -2]$$

$$\vec{c} = [-3, -4]$$

$$\vec{d} = [5, 0]$$



0.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor \vec{v} med startpunkt (x_1, y_1) og endepunkt (x_2, y_2) er gitt som

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] \quad (1)$$

Eksempel 1

Skriv vektorene på komponentform.

- \vec{a} har startpunkt $(1, 3)$ og endepunkt $(7, 5)$
- \vec{b} har startpunkt $(0, 9)$ og endepunkt $(-3, 2)$
- \vec{c} har startpunkt $(-3, 7)$ og endepunkt $(2, -4)$
- \vec{d} har startpunkt $(-7, -5)$ og endepunkt $(3, 0)$

Svar

$$\vec{a} = [7 - 1, 5 - 3] = [6, 2]$$

$$\vec{b} = [-3 - 0, 2 - 9] = [-3, -7]$$

$$\vec{c} = [2 - (-3), -4 - 7] = [5, -11]$$

$$\vec{d} = [3 - (-7), 0 - (-5)] = [10, 5]$$

0.2 Regneregler

0.2 Regneregler for vektorer

Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, punktet $A = (x_0, y_0)$ og en konstant t . Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1) \quad (2)$$

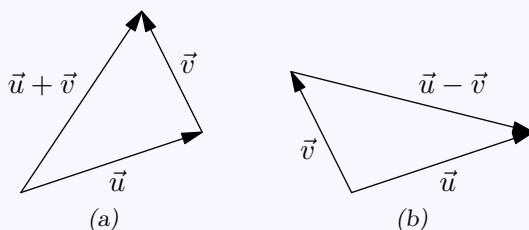
$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \quad (3)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \quad (4)$$

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \quad (5)$$

$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \quad (6)$$

Summen eller differansen av \vec{u} og \vec{v} kan vi tegne slik:



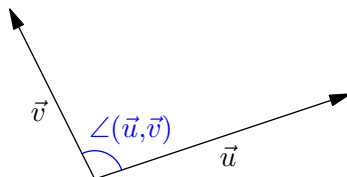
For en vektor \vec{w} har vi videre at

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad (7)$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad (8)$$

Vinkelen mellom to vektorer

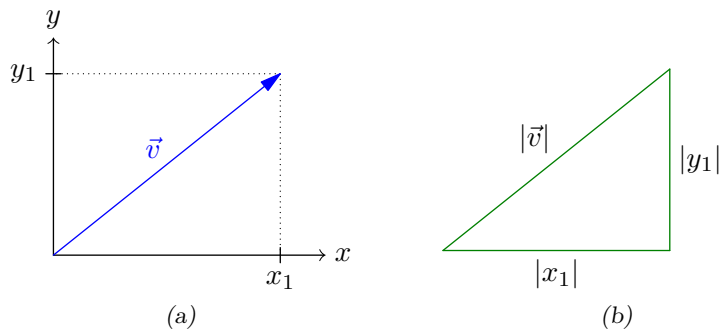
Vinkelen mellom to vektorer er (den minste) vinkelen som blir dannet når vektorene plasseres i samme startpunkt. For to vektorer \vec{u} og \vec{v} skriver vi denne vinkelen som $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.



I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkler i grader, altså på intervallet $[0^\circ, 180^\circ]$.

0.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. Lengden til \vec{v} er avstanden mellom startpunktet og endepunktet.



Av enhver vektor kan vi danne en rettvinklet trekant hvor $|\vec{v}|$ er lengden til hypotenusen og $|x_1|$ og $|y_1|$ er de respektive lengdene til katetene. Dermed er $|\vec{v}|$ gitt av Pytagoras' setning.

0.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. Lengden $|\vec{v}|$ er da

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (9)$$

Eksempel 1

Finn lengden til vektorene $\vec{a} = [7, 4]$ og $\vec{b} = [-3, 2]$.

Svar

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

0.4 Skalarproduktet I

0.4 Skalarproduktet I

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, er *skalarproduktet* gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad (10)$$

Språkboksen

Skalarproduktet kalles også *prikkproduktet* eller *indreproduktet*.

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{a} = [3, 2]$, $\vec{b} = [4, 7]$ og $\vec{c} = [1, -9]$. Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

Svar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + 2(-9) = -15$$

0.5 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene \vec{u} , \vec{v} og \vec{w} har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \quad (11)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (12)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (13)$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad (14)$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2$$

når du vet at $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Svar

$$\begin{aligned}
 \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2 &= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\
 &= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\
 &= (\vec{a} + \vec{b})^2
 \end{aligned}$$

0.5 Skalarproduktet II

Gitt vektoren $\vec{u} - \vec{v}$, hvor $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Da er

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

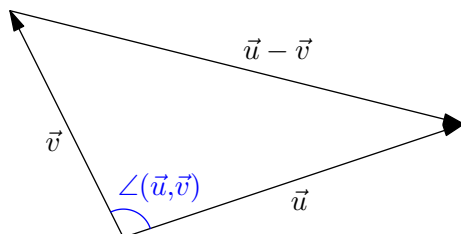
Av (9) har vi at

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Ved hjelp av (10) og (11) kan vi skrive (15) som

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2} \quad (16)$$

Videre merker vi oss følgende figur:



. Av cosinussetningen¹ og (16) er

$$\begin{aligned} |(\vec{v} - \vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}^2 &= \vec{v}^2 + \vec{u}^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

0.6 Skalarproduktet II

For to vektorer \vec{u} og \vec{v} er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \quad (17)$$

¹Se ??

0.6 Vektorer vinkelrett på hverandre

Fra (17) kan vi gjøre en viktig observasjon; Hvis $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$, er $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, og da blir

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

0.7 Vinkelrette vektorer

For to vektorer \vec{u} og \vec{v} har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \quad (18)$$

Språkboksen

Det er mange måter å uttrykke at $\vec{u} \perp \vec{v}$ på. Blant annet kan vi si at

- \vec{u} og \vec{v} står vinkelrett på hverandre.
- \vec{u} og \vec{v} står normalt på hverandre.
- \vec{u} er en normalvektor til \vec{v} (og omvendt).
- \vec{u} og \vec{v} er ortogonale.

Eksempel 1

Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5, -3]$, $\vec{b} = [6, -10]$ og $\vec{c} = [2, 7]$ er ortogonale.

Svar

Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \cdot 6 + (-3)10 \\ &= 0\end{aligned}$$

Altså er $\vec{a} \perp \vec{b}$. Videre er

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= 5 \cdot 2 + (-3)7 \\ &= 11\end{aligned}$$

Altså er \vec{a} og \vec{c} ikke ortogonale. Da $\vec{a} \perp \vec{b}$, kan heller ikke \vec{b} og \vec{c} være ortogonale.

Nullvektoren

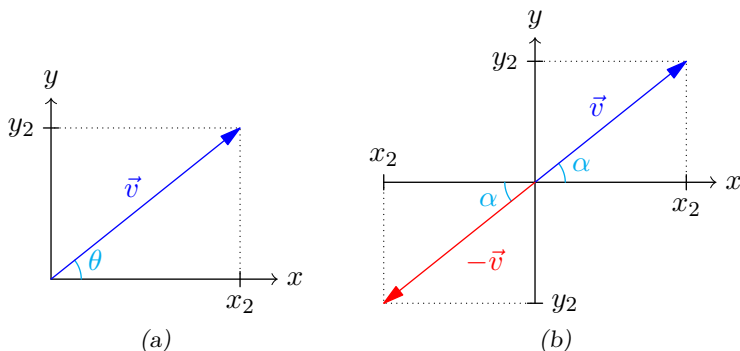
I forkant av [regel 0.7](#) har vi bare argumentert for at $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. For å rettferdiggjøre betingelsen som går begge veier i (18), må vi spørre: Kan vi få $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ om vinkelen mellom \vec{u} og \vec{v} *ikke* er 90° ?

På intervallet $[0^\circ, 180^\circ]$ er det bare vinkelverdien 90° som resulterer i cosinusverdi 0. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av \vec{u} eller \vec{v} være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er *nullvektoren* $\vec{0} = [0, 0]$, som rett og slett ikke har noen retning¹. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

¹Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger!

0.7 Parallele vektorer

Hvis vinkelen mellom to vektorer er 0° eller 180° , er de parallelle.



Gitt to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. La θ og α være vinkelen mellom x -aksen og henholdsvis \vec{u} og \vec{v} , med x -aksen som høyre vinkelbein. Da er $\tan \theta = \frac{y_1}{x_1}$ og $\tan \alpha = \frac{y_2}{x_2}$. Hvis $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, er det to muligheter:

(i) $\theta = 0^\circ$ og $\alpha = 180^\circ$, eller omvendt.

(ii) $\theta = \alpha$

I begge tilfeller er $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ enten 0° eller 180° , og da er \vec{u} og \vec{v} parallelle. Det omvendte gjelder også: Hvis punkt (i) eller (ii) gjelder, er $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Det er ofte praktisk å omskrive denne sammenhengen til forholdet mellom samsvarende komponenter¹:

0.8 Parallele vektorer

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \quad (19)$$

Alternativt, for et tall t har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \quad (20)$$

¹For vektorene $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$ er disse samsvarende komponenter:

- x_1 og x_2
- y_1 og y_2

Språkboksen

Når $\vec{u} = t\vec{v}$, sier vi at \vec{u} er et *multiplum* av \vec{v} (og omvendt). Vi sier også at \vec{u} og \vec{v} er *lineært uavhengige*.

Eksempel

Undersøk hvorvidt $\vec{a} = [2, -3]$ og $\vec{b} = [20, -45]$ er parallelle med $\vec{c} = [10, -15]$.

Svar

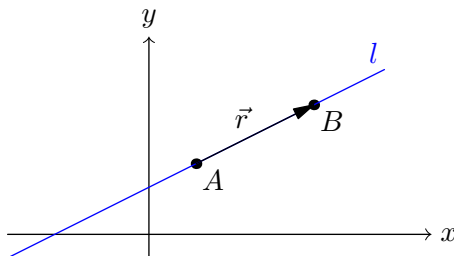
Vi har at

$$\vec{c} = 5[2, -4] = 5\vec{a}$$

Dermed er $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Da $\frac{20}{10} \neq \frac{-45}{-15}$, er \vec{b} og \vec{c} ikke parallelle.

0.8 Parameterisering av ei linje

Gitt ei linje l , som vist i figuren under



Hvis en vektor \vec{r} er parallell med l , kalles den en *retningsvektor* for linja. Si at $\vec{r} = [a, b]$ er en retningsvektor for l , og at $A = (x_0, y_0)$ er et punkt på l . Om vi starter i A og vandrer parallellt med \vec{r} , kan vi være sikre på at vi fortsatt befinner oss på linja. Dette må bety at vi for en variabel t kan nå et vilkårlig punkt $B = (x, y)$ på linja ved følgende utregning:

$$B = A + t\vec{r}$$

På koordinatform kan vi skrive dette som¹

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Uttrykket over kalles *parameteriseringen* til linja, uttrykt ved t . Parameteriseringen skrives ofte slik:

0.9 Linje i rommet

Ei linje l som går gjennom punktet $A = (x_0, y_0)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [a, b]$ kan parameteriseres ved

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (21)$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

¹Se (2).

0.9 Determinanter

0.10 2×2 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v})$ av to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$ er gitt som

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc\end{aligned}$$

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-1, 3]$ og $\vec{v} = [-2, 4]$. Bestem $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

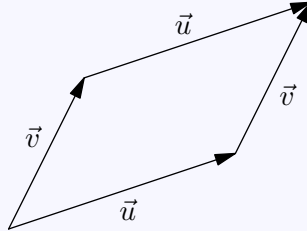
Svar

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2\end{aligned}$$

0.11 Arealformler med determinanter

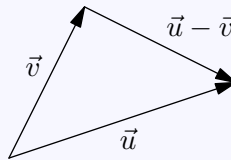
Arealet A til et parallelogram formet av to vektorer \vec{u} og \vec{v} er gitt ved

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \quad (22)$$



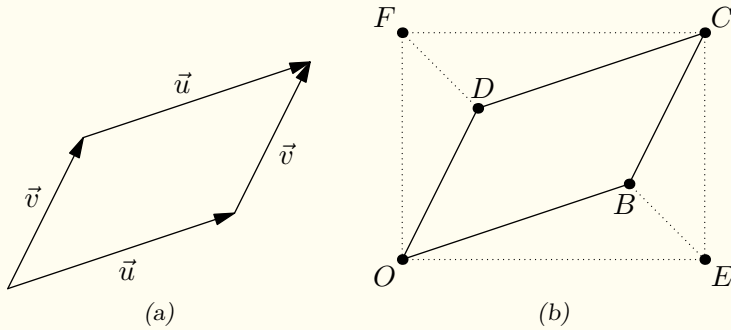
Arealet A til en trekant formet av to vektorer \vec{u} og \vec{v} er gitt ved

$$A = \frac{1}{2} |\det(\vec{u}, \vec{v})| \quad (23)$$



0.11 Arealformler med determinanter (forklaring)

Vi lar A_N betegne arealet til en geometrisk form N .



Gitt to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$, hvor $a, b, c, d > 0$, som vist i figur (a). Plasserer vi vektorene i grunnstillingen er punktene vist i figur (b) gitt som

$$\begin{aligned} O &= (0, 0) & B &= (a, b) & C &= (a + b, c + d) \\ D &= (c, d) & E &= (a + c, 0) & F &= (0, b + d) \end{aligned}$$

Med OE som grunnlinje har $\triangle OEB$ høyde b , altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$ og $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OBE} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

I figurene har vi antatt at (den minste) vinkelen mellom \vec{v} og x -aksen er mindre enn vinkelen mellom \vec{u} og x -aksen. I omvendt tilfelle ville vi fått at

$$A_{\square OECF} = bc - ad$$

Altså er

$$A_{\square OECF} = |ac - bd|$$

På lignende måte kan det vises at (22) gjelder for alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se oppgave ??.