## 0.1 Mengder

En samling av tall kalles en *mengde*[1], og et tall som er en del av en mengde kalles et *element* i denne mengden. Mengder kan inneholde et endelig antall elementer og de kan inneholde uendelig mange elementer.

**0.1 Mengder**

For to reelle tall $a$ og $b$, hvor $a < b$, har vi at

| | |
|---|---|
| $[a, b]$ | er mengden av alle reelle tall større eller lik $a$ og mindre eller lik $b$. |
| $(a, b]$ | er mengden av alle reelle tall større enn $a$ og mindre eller lik $b$. |
| $[a, b)$ | er mengden av alle reelle tall større eller lik $a$ og mindre enn $b$. |

$[a, b]$ kalles et lukket intervall, $(a, b)$ kalles et åpent intervall, og både $(a, b]$ og $[a, b)$ kalles halvåpne intervall.

Mengden som inneholder bare $a$ og $b$ skrives som $\{a, b\}$.

At $x$ er et element i en mengde $M$ skrives som $x \in M$.

At $x$ ikke er et element i en mengde $M$ skrives som $x \notin M$.

At $x$ er et element i både en mengde $M_1$ og en mengde $M_2$ skrives som $x \in M_1 \cup M_2$.

**Språkboksen**

$x \in M$ uttales "$x$ inneholdt i $M$".

Mange tekster bruker $\langle$ istedenfor $($ for å indikere åpne (eller halvåpne) intervall.

**Merk**

Når vi heretter i boka definerer et intervall beskrevet av $a$ og $b$, tar vi det for gitt at $a$ og $b$ er to reelle tall.

[1] En mengde kan også være en samling av andre matematiske objekter, som for eksempel funksjoner, men i denne boka holder det å se på mengder av tall.

**Eksempel 1**

Mengden av alle heltall større enn 0 og mindre enn 10 skriver vi som

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Denne mengden inneholder 9 elementer. 3 er et element i denne mengden, og da kan vi skrive $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

10 er ikke et element i denne mengden, og da kan vi skrive $10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

**Eksempel 2**

Skriv opp ulikhetene som gjelder for alle $x \in M$, og om 1 er inneholdt i $M$.

a) $M = [0, 1]$

b) $M = (0, 1]$

c) $M = [0, 1)$

**Svar**

a) $0 \leq x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

b) $0 < x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

c) $0 \leq x < 1$. Videre er $1 \notin M$.

## 0.2 Navn på mengder

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Mengden av alle positive heltall[1] |
| $\mathbb{Z}$ | Mengden av alle heltall[2] |
| $\mathbb{Q}$ | Mengden av alle rasjonale tall |
| $\mathbb{R}$ | Mengden av alle reelle tall |
| $\mathbb{C}$ | Mengden av alle komplekse tall |

[1] Inneholder *ikke* 0.

[2] Inneholder 0.

### Symbolet for uendelig

Det finnes uendelig

## 0.2 Verdi- og definisjonsmengder

Alle funksjoner har en definisjonsmengde og en verdimengde. For en funksjon $f(x)$, er definisjonsmengden den mengden som utelukkende inneholder alle verdier $x$ kan ha. Denne mengden skrives da som $D_f$. Hvilke verdier $x$ kan ha er bestemt av to ting:

- Hvilken sammenheng $x$ skal brukes i.
- Om $f$ ikke er definert for visse $x$-verdier.

La oss først bruke $f(x) = 2x + 1$ som et eksempel. Denne funksjonene er definert for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi kunne derfor latt $\mathbb{R}$ være definisjonsmengden til $f$, men for enhelhets skyld velger vi her $D_f = [0, 1]$. Mengden som utelukkende inneholder alle verdier $f$ kan ha når $x \in D_f$, er verdimengden til $f$. Denne mengden skrives som $V_f$. I dette tilfellet er (forklar for deg selv hvorfor) $f \in [1, 3]$, altså er $V_f = [1, 3]$.

La oss videre se på funksjonen $g(x) = \frac{1}{x}$. Denne funksjonen er ikke definert for $x = 0$, noe som betyr at vi allerede har fått en restriksjon på definisjonsmengden til $g$. Også her gjør vi det enkelt, og unngår[1] 0 med god klaring ved å sette $D_g = [1, 2]$. Da er (forklar for deg selv hvorfor) $V_g = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

**0.3 Verdi- og definisjonsmengder**

Gitt en funksjon $f(x)$. Mengden som utelukkende inneholder alle verdier $x$ kan ha, er da definisjonsmengden til $f$. Denne mengden skrives som $D_f$.

Mengden som utelukkende inneholder alle verdier $f$ kan ha når $x \in D_f$, er verdimengden til $f$.

[1] I *seksjon* **??** skal vi se nærmere på funksjoner som $g$ når $x$ nærmer seg 0.

## 0.3 Betingelser

Symbolet $\Rightarrow$ bruker vi for å vise til at hvis et vilkår er oppfylt, så er en annen (eller flere) vilkår også oppfylt. For eksempel; i MB så vi at hvis en trekant er rettvinklet, er Pytagoras' setning gyldig. Dette kan vi skrive slik:

$$\text{trekanten er rettvinklet} \Rightarrow \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Men vi så også at det omvendte gjelder; hvis Pytagoras' setning er gyldig, må trekanten være rettvinklet. Da kan vi skrive

$$\text{trekanten er rettvinklet} \iff \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Det er veldig viktig å være bevisst forskjellen på $\Rightarrow$ og $\iff$; at vilkår A oppfylt gir B oppfylt, trenger ikke å bety at vilkår B oppfylt gir vilkår A oppfylt!

**Eksempel 1**

$$\text{firkanten er et kvadrat} \Rightarrow \text{firkanten har fire like lange sider}$$

**Eksempel 2**

$$\text{tallet er et primtall større enn } 2 \Rightarrow \text{tallet er et oddetall}$$

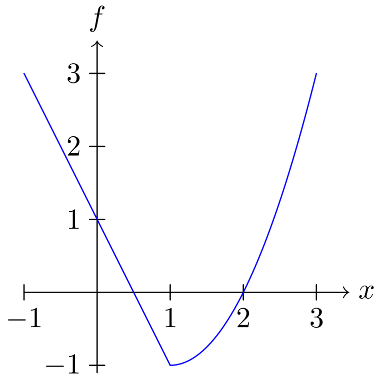
**Eksempel 3**

$$\text{tallet er et partall} \iff \text{tallet er delelig med } 2$$

### Funksjoner med betingelser

Funksjoner kan gjerne ha flere uttrykk som gjelder for forskjellige vilkår. La oss for eksempel definere en funksjon $f(x)$ slik:

For $x < 1$ er funksjonsuttrykket $-2x + 1$
For $x \geq 1$ er funksjonsuttrykket $x^2 - 2x$




Dette kan vi skrive som

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x & , \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$