0.1 Newtons metode

Gitt en funskjon $f(x)$ og likningen

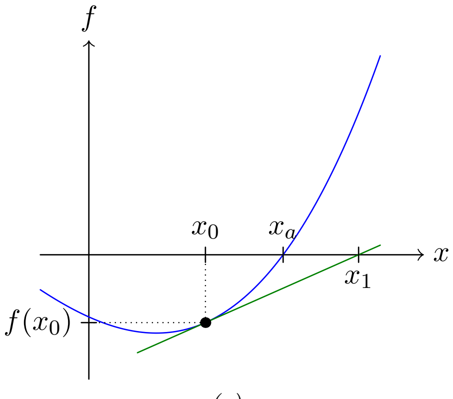
$$f = 0$$

Ved Newtons metode følger man følgende resonnement for å finne en løsning av likningen:

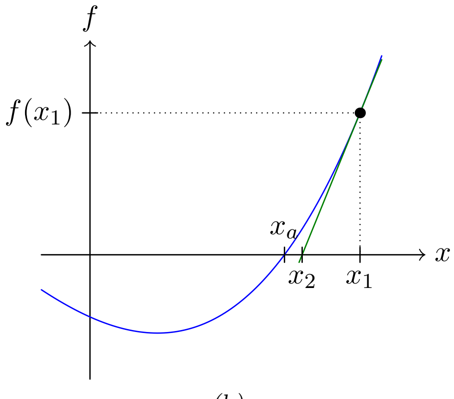
> Gitt at $f(x_a) = 0$. Vi starter med en x-verdi x_0. Skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_0 kaller vi x_1. Vi antar at $|x_1 - x_a| < |x_0 - x_a|$.

Siden x_1 er skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_0, har vi at[1]

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) &= 0 \\ f'(x_0)x_1 &= f'(x_0)x_0 - f(x_0) \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$



(a)



(b)

Ved å bruke tangenten til f i x_1, kan vi finne enda en ny x-verdi, som vi antar gir en bedre tilnærming til x_a enn det x_1 gir. Denne prosedyren kan vi gjenta fram til vi har funnet en x-verdi som gir en tilstrekkelig tilnærming til x_a.

[1]Se oppgave??

Regel 0.1 Newtons metode (Newton-Rhapson metoden)

Gitt en funskjon $f(x)$ og likningen

$$f = 0$$

hvor $f(x_a) = 0$. For et passende valg av x_n antas det da at $|x_{n+1} - x_a| < |x_n - x_a|$, hvor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

0.2 Trapesmetoden

Gitt en funksjone $f(x)$. Integralet $\int_a^b f\,dx$ kan vi tilnærme ved å

1. Dele intervallet $[a, b]$ inn i mindre intervall. Disse skal vi kalle *delintervall*.

2. Finne en tilnærmet verdi for integralet av f på hvert delintervall.

3. Summere verdiene fra punkt 2.

I *figur 1a* har vi 3 like store delintervaller. Hvis vi setter $a = x_0$, betyr dette at

$$x_1 = x_0 + h \qquad x_2 = x_0 + 2h \qquad x_3 = x_3 + 3h = b$$

hvor $h = \frac{b-a}{3}$. En tilnæret verdi for $\int_a^{x_1} f\,dx$, får vi ved å finne arealet til trapeset med hjørner (husk at $x_0 = a$)

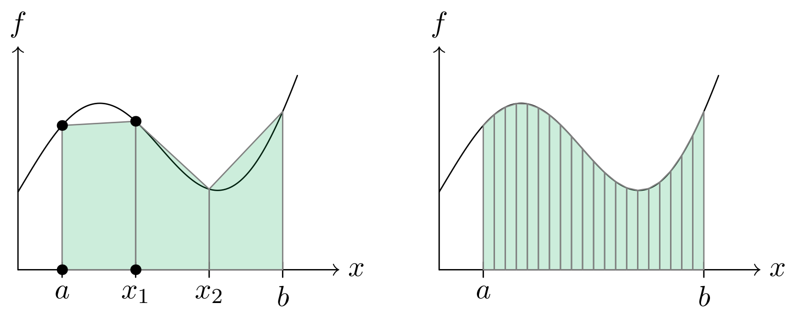
$$(x_0, 0) \qquad (x_1, 0) \qquad (x_1, f(x_1)) \qquad (x_0, f(a))$$

Dette arealet er gitt ved uttrykket

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_0)\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

Ved å tilnærme integralet for hvert delintervall på denne måten, kan vi skrive

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$



(a) Tilnærming med 3 delintervaller.

(b) Tilnærming med 20 delintervaller

Figur 1

Regel 0.2 Trapesmetoden

Gitt en integrerbar funksjon f. En tilnærmet verdi for $\int_a^b f\,dx$ er da gitt som

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

hvor $a = x_0$, $b = x_n$ og $x_{n+1} > x_n$.

Merk

Slik *regel 0.2* er formulert, vil $[a, b]$ være delt inn i $n+1$ delintervaller. Det er heller inget krav om at delintervallene skal være like store, men det gjør implementeringen av metoden lettere. Uttrykket for h fra side 3 vil i så fall bli

$$h = \frac{b-a}{n+1}$$