Innhold

Viktig kommentar om funksjoner

Som nevnt i MB, er funksjoner variabler som endrer seg i takt med at andre variabler endrer seg. I denne boka vil det å skrive en funksjon f som $f(x)$ indikere at f endrer seg i takt med variabelen x. Så lenge det er etablert at x er en variabel, vil det derfor ikke være noen forskjell på f og $f(x)$, for eksempel kan vi skrive

$$f = f(x) = 2x \tag{1}$$

En slik konvensjon gjør at mange forklaringer får penere uttrykk, men den krever at vi er bevisst hvordan paranteser brukes i sammenheng med multiplikasjon og i sammenheng med funksjoner. Da må vi tenke over om et symbol står for en uavhengig variabel eller en variabel som avhenger av en annen $-$ altså en funksjon. Slik (1) er formulert, er x en uavhengig variabel og f en variabel avhengig av x. For en konstant a er da

$$x(a) = x \cdot a = ax$$

$$f(a) = 2 \cdot a = 2a$$

Videre er

$$f - a = 2x - a$$

Kapittel 1

Mengder

1.1 Mengder

En samling av tall kalles en *mengde*[2], og et tall som er en del av en mengde kalles et *element* i denne mengden. Mengder kan inneholde et endelig antall elementer og de kan inneholde uendelig mange elementer.

1.1 Mengder

For to reelle tall a og b, hvor $a < b$, har vi at

$[a, b]$	er mengden av alle reelle tall større eller lik a og mindre eller lik b.
$(a, b]$	er mengden av alle reelle tall større enn a og mindre eller lik b.
$[a, b)$	er mengden av alle reelle tall større eller lik a og mindre enn b.

$[a, b]$ kalles et lukket intervall, mens både $(a, b]$ og $[a, b)$ kalles halvåpne intervall.

Mengden av tre tall a, b og c skrives som $\{a, b, c\}$.

At x er et element i en mengde M skrives som $x \in M$.

At x ikke er et element i en mengde M skrives som $x \notin M$.

[2]En mengde kan også være en samling av andre matematiske objekter, som for eksempel funksjoner, men i denne boka holder det å se på mengder av tall.

Språkboksen

$x \in M$ uttales "x inneholdt i M" eller "x er et element i M".

Eksempel 1

Mengden av alle heltall større enn 0 og mindre enn 10 skriver vi som

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Denne mengden inneholder 9 elementer. 3 er et element i denne mengden, og da kan vi skrive $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

10 er ikke et element i denne mengden, og da kan vi skrive $10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Eksempel 2

Skriv opp ulikhetene som gjelder for alle $x \in M$, og om 1 er inneholdt i M.

a) $M = [0, 1]$

b) $M = (0, 1]$

c) $M = [0, 1)$

Svar

a) $0 \leq x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

b) $0 < x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

c) $0 \leq x < 1$. Videre er $1 \notin M$.

1.2 Navn på mengder

$\mathbb{N}$	Mengden av alle positive heltall[1]
$\mathbb{Z}$	Mengden av alle heltall[2]
$\mathbb{Q}$	Mengden av alle rasjonale tall
$\mathbb{N}$	Mengden av alle reelle tall
$\mathbb{C}$	Mengden av alle komplekse tall

---

[1] Inneholder *ikke* 0.

[2] Inneholder 0.

1.2 Verdi- og definisjonsmengder

Alle funksjoner har en definisjonsmengde og en verdimengde. For en funksjon $f(x)$, er definisjonsmengden den mengden som utelukkende inneholder alle verdier x kan ha. Denne mengden skrives da som D_f. Hvilke verdier x kan ha er bestemt av to ting:

- Hvilken sammenheng x skal brukes i.
- Om f ikke er definert for visse x-verdier.

La oss først bruke $f(x) = 2x + 1$ som et eksempel. Denne funksjonene er definert for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi kunne derfor latt $\mathbb{R}$ være definisjonsmengden til f, men for enhelhets skyld velger vi her $D_f = [0, 1]$. Mengden som utelukkende inneholder alle verdier f kan ha når $x \in D_f$, er verdimengden til f. Denne mengden skrives som V_f. I dette tilfellet er (forklar for deg selv hvorfor) $f \in [1, 3]$, altså er $V_f = [1, 3]$.

La oss videre se på funksjonen $g(x) = \frac{1}{x}$. Denne funksjonen er ikke definert for $x = 0$, noe som betyr at vi allerede har fått en restriksjon på definisjonsmengden til g. Også her gjør vi det enkelt, og unngår[1] 0 med god klaring ved å sette $D_g = [1, 2]$. Da er (forklar for deg selv hvorfor) $V_g = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1.3 Verdi- og definisjonsmengder

Gitt en funksjon $f(x)$. Mengden som utelukkende inneholder alle verdier x kan ha, er da definisjonsmengden til f. Denne mengden skrives som D_f.

Mengden som utelukkende inneholder alle verdier f kan ha når $x \in D_f$, er verdimengden til f.

[1] I *seksjon* **??** skal vi se nærmere på funksjoner som g når x nærmer seg 0.

Kapittel 2

Algebra

2.1 Kvadratsetningene og fullstendige kvadrat

2.1 Kvadratsetningene

For to reelle tall a og b er

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(1. kvadratsetning)}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(2. kvadratsetning)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(3. kvadratsetning)}$$

Språkboksen

$(a+b)^2$ og $(a-b)^2$ kalles *fullstendige kvadrat*.

3. kvadratsetning kalles også *konjugatsetningen*.

Eksempel 1

Skriv om $a^2 + 8a + 16$ til et fullstendig kvadrat.

Svar

$$\begin{aligned} a^2 + 8a + 16 &= a^2 + 2 \cdot 4a + 4^2 \\ &= (a+4)^2 \end{aligned}$$

Eksempel ??

Skriv om $k^2 + 6k + 7$ til et uttrykk der alle instanser av l er i et fullstendig kvadrat.

Svar

$$
\begin{aligned}
k^2 + 6k + 7 &= k^2 + 2 \cdot 3k + 7 \\
&= k^2 + 2 \cdot 3k + 3^2 - 3^2 + 7 \\
&= (k+3)^2 - 2
\end{aligned}
$$

Eksempel ??

Faktoriser $x^2 - 10x + 16$.

Svar

Vi starter med å lage et fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 16 &= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + 16 \\ &= (x-5)^2 - 9 \end{aligned}$$

Vi legger merke til at $9 = 3^2$, og bruker 3. kvadratsetning:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 - 3^2 &= (x-5+3)(x-5-3) \\ &= (x-2)(x-8) \end{aligned}$$

Altså er

$$x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$$

2.2 a_1a_2-metoden

Gitt $x, b, c \in \mathbb{R}$. Hvis $a_1a_2 = c$ og $a_1 + a_2 = b$, er

$$x^2 + bx + c = (x + a_1)(x + a_2)$$

Eksempel 1

Faktoriser uttrykket $x^2 - x - 6$.

Svar

Siden $2(-3) = -6$ og $2 + (-3) = -1$, er

$$x^2 - 1x - 6 = (x+2)(x-3)$$

Eksempel 2

Faktoriser uttrykket $b^2 - 5b + 4$.

Svar

Siden $(-4)(-1) = 4$ og $(-4) + (-1) = -5$, er

$$b^2 - 5b + 4 = (b-4)(b-1)$$

2.2 Andregradslikninger

2.3 Andregradslikning uten konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx = 0$$

Likningen kan da faktoriseres til

$$x(ax + b) = 0$$

Altså er

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = -\frac{b}{a}$$

Eksempel 1

Løs likningen

$$2x^2 - 4x = 0$$

Svar

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 0 \\ x(2x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $x = 0$, eller

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2.4 Andregradslikning med konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hvor a, b og c er konstanter. Da er x gitt ved abc-formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (abc\text{-formelen})$$

Hvis $x = x_1$ og x_2 er løsninger gitt av abc-formelen, kan vi skrive

$$ax^2 + bx + x = 0$$

Eksempel 1

Løs likningen

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

Svar

Vi bruker abc-formelen. Da er $a = 2$, $b = -7$ og $c = 5$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Enten er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + 3}{4} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Eller så er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 - 3}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$x^2 + 3 - 10 = 0$$

Svar

Vi bruker *abc*-formelen. Da er $a = 1$, $b = 3$ og $c = -10$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = -5 \qquad \vee \qquad x = 2$$

Eksempel 3

Løs likningen

$$4x^2 - 8x + 1$$

Svar

Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{8} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

2.3 Navn på funksjoner

2.5 Potensfunksjoner

Gitt $k, b \in \mathbb{R}$. En funksjon på formen

$$f(x) = kx^m$$

er da en *potensfunksjon* med *koeffisient* k.

2.6 Polynomfunksjoner

En polynomfunksjon er én av følgende:

- en potensfunksjon med heltalls eksponent større eller lik 0.
- summen av flere potensfunksjoner med heltalls eksponent større eller lik 0.

Polynomfunksjoner kategoriseres etter den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene a, b, c og d, og en variabel x, har vi at

funksjonsuttyrykk	**funksjonsnavn**
$ax + b$	1. grads funksjon/polynom (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. grads funksjon/polynom (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. grads funksjon/polynom (kubisk)

Eksempel 1

a) Skriv uttrykket til et 7. grads polynom med utelukkende heltalls koeffisienter.

b) Skriv uttrykket til et 5. grads polynom med minst én koeffisient uttrykt som et rasjonalt tall.

Svar

a) $4x^7 - 5x^2 + 4$

b) $\frac{2}{7}x^5 - 3$

2.4 Polynomdivisjon

Når to gitte tall ikke er delelige med hverandre, kan vi bruke brøker for å uttrykke kvotienten. For eksempel er

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \tag{2.1}$$

At likheten over stemmer er også lett å bekrefte ved utregningen

$$\left(5 + \frac{2}{3}\right) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 17$$

Tanken bak (2.1) er at vi skriver om telleren slik at den delen av 17 som er delelig med 5 framkommer:

$$\frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

Den samme tankegangen om divisjon kan brukes for brøker med polynomer, og da kalles det *polynomdivisjon*:

Eksempel 1

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5}$$

Svar

Metode 1

Vi gjør følgende trinnvis; med den største potensen av x i telleren som utgangspunkt, lager vi uttrykk som er delelige med telleren.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5} &= \frac{2x(x+5) - 10x + 3x - 4}{x + 5} \\
&= 2x + \frac{-7x - 4}{x + 5} \\
&= 2x + \frac{-7(x+5) + 35 - 4}{x + 5} \\
&= 2x - 7 + \frac{31}{x + 5}
\end{aligned}$$

Metode 2 (Se utregningen under punktene)

i) Vi observerer at leddet med den høyste ordenen av x i dividenden er $2x^2$. Dette uttrykket kan vi framkalle ved å multiplisere dividenden med $2x$. Vi skriver $2x$ til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $2x(x+5) = 2x^2 + 10x$.

ii) Differansen fra punkt ii) er $-7x - 4$. Vi kan framkalle leddet med den høyeste ordenen av x ved å multiplisere dividenden med -7. Vi skriver -7 til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $-7(x+5) = -7x - 5$.

iii) Differansen fra punkt iii) er 31. Dette er et uttrykk som har lavere orden av x enn dividenden, og dermed skriver vi $\frac{31}{x+5}$ til høgre for likhetstegnet.

$$
\begin{array}{rl}
 & (2x^2 + 3x - 4) : (x+5) = 2x - 7 + \dfrac{31}{x+5} \\
- & \underline{(2x^2 + 10x)} \\
 & \qquad -7x - 4 \\
 & \quad - \underline{(-7x - 35)} \\
 & \qquad\qquad 31
\end{array}
$$

Eksempel 2

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2}$$

Svar

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} &= \frac{x(x^2 - 2) + 2x - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4(x^2 - 2) - 8 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2}
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 4x^2 + 9) : (x^2 - 2) = x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2} \\
&-\underline{(x^3 - 2x)} \\
&\qquad -4x^2 + 2x + 9 \\
&\quad -\underline{(-4x^2 + 8)} \\
&\qquad\qquad 2x + 1
\end{aligned}$$

Eksempel 3

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Svar

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} &= \frac{x^2(x-4) + 4x^2 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x(x-4) + 4x - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x + \frac{-2x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x - 2
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = x^2 + x - 2 \\
-\underline{(x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\qquad x^2 - 6x + 8 \\
\quad - \underline{(-x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad\quad -2x + 8 \\
\qquad\qquad - \underline{(-2x + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

2.5 Polynomers egenskaper

Eksemplene på side ??-?? peker på noen viktige sammenhenger som gjelder for generelle tilfeller:

2.7 Polinomdivisjon

La A_k betegne et polynom A med grad k. Gitt polynomet P_m, da fins polynomene Q_n, S_{m-n} og R_{n-1}, hvor $m \geq n > 0$, slik at

$$\frac{P_m}{Q_n} = S_{m-n} + \frac{R_{n-1}}{Q_n} \tag{2.2}$$

Språkboksen

Hvis $R_{n-1} = 0$, sier vi at P_m er delelig med Q_n.

2.8 Faktorer i polynomer

Gitt et polynom $P(x)$ og en konstant a. Da har vi at

$$P \text{ er delelig med } x - a \iff P(a) = 0$$

Hvis dette stemmer, fins det et polynom $S(x)$ slik at

$$P = (a - x)S$$

Eksempel 1

Gitt polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

a) Vis at $x = 1$ løser likningen $P = 0$.

b) Faktoriser P.

Svar

a) Vi undersøker $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $P = 0$ når $x = 1$.

b) Siden $P(1) = 0$, er $x - 1$ en faktor i P. Ved polynomdivisjon (se s.??-??) finner vi at

$$P = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)$$

Da $2(-4) = -8$ og $-4 + 2 = -2$, er

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$

Dette betyr at

$$P = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

2.6 Logaritmer

I MB så vi på potenstall, som består av et grunntall og en eksponent. En *logaritme* er en matematisk operasjon relativ til et tall. Hvis en logaritme er relativ til grunntallet til en potens, vil operasjonen resultere i ekspontenten.

La oss skrive logaritmen relativ til 10 som $\log_{10}$, da er for eksempel

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

Videre er

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Følelig kan vi også skrive

$$10^3 = 10^{\log_{10} 1000}$$

Med potensreglene som ugangspunkt (se MB), kan man utlede mange regler for logartimer.

2.9 Definisjon av logaritmen

La $\log_a$ betegne logaritmen relativ til $a \in \{\mathbb{R}|a \neq 0\}$. For $m \in \mathbb{R}$ er da

$$\log_a a^m = m$$

Alternativt kan vi skrive

$$m = a^{\log_a m}$$

2.10 Logaritmeregler

Gitt de reelle tallene a, x og y, alle forskjellige fra 0. Da er

$$\log_a a = 1 \tag{2.3}$$

$$\log_a 1 = 0 \tag{2.4}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \tag{2.5}$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \tag{2.6}$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \tag{2.7}$$

Språkboksen

$\log_{10}$ skrives ofte bare som $\log$.

$\log_e$ skrives ofte som $\ln$. (Se ?? for mer om tallet e.)

2.7 Forklaringer

Andregradslikninger (forklaring)

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi starter med å omskrive likningen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Så lager vi et fullstendig kvadrat, og anvdender konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Uttrykket over er lik 0 når

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \vee \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logaritmerregler (forklaring)

Likning (2.3)

$$\log_a a = \log_a a^1 = 1$$

Likning (2.4)

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$$

Likning (2.5)
For $m, n \in \mathbb{R}$, har vi at

$$\begin{aligned}\log_a a^{m+n} &= m + n \\ &= \log_a a^m + \log_a a^n\end{aligned}$$

Vi setter[1] $x = a^m$ og $y = a^n$. Siden $\log_a a^{m+n} = \log_a(a^m \cdot a^n)$, her da

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Likning (2.6)
Ved å undersøke $\log_a a^{m-n}$, og ved å sette $y = a^{-n}$, blir forklaringen tilsvarende den gitt for likning (2.5).

Likning (2.7)

Siden $x = a^{\log_a x}$ og $\left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}$ (se potensregler i MB), har vi at

$$\begin{aligned}\log_a x^y &= \log_a a^{y \log_a x} \\ &= y \log_a x\end{aligned}$$

[1] Vi tar det her for gitt at ethvert reelt tall forskjellig fra 0 kan uttrykkes som et potenstall.

Polynomdivisjon (2.7) (forklaring)

Gitt polynomene

$$
\begin{aligned}
&P_m \quad \text{hvor } ax^m \text{ er leddet med høyest grad} \\
&Q_n \quad \text{hvor } bx^n \text{ er leddet med høyest grad}
\end{aligned}
$$

Da kan vi skrive

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n - \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m \tag{2.8}$$

Polynomet $-\frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$ må nødvendigvis ha grad lavere eller lik $m-1$. Vi kaller dette polynomet U, og får at

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + U \tag{2.9}$$

Dermed er

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{a}{b}x^{m-n} + \frac{U}{Q_n} \tag{2.10}$$

Vi kan nå stadig gjenta prosedyren fra (2.8) og (2.9), hvor høgresiden i (2.10) får ledd med grad stadig mindre enn $m-n$, fram til polynomet i telleren på høgresiden får grad $n-1$.

Faktorisering av polynom (forklaring)

(i) Vi starter med å vise at

Hvis P er delelig med $x-a$ er $x=a$ en løsning for $P=0$.

For et polynom S har vi av (2.2) at

$$
\begin{aligned}
\frac{P}{x-a} &= S \\
P &= (x-a)S
\end{aligned}
$$

Da er åpenbart $x=a$ en løsning for likningen $P=0$.

(ii) Vi går over til å vise at

Hvis $x=a$ er en løsning for $P=0$, er P delelig med $x-a$.

For polynomene S og R

$$
\begin{aligned}
\frac{P}{x-a} &= S + \frac{R}{x-a} \\
P &= (x-a)S + R
\end{aligned}
$$

Siden $x - a$ har grad 1, må R ha grad 0, og er dermed en konstant. Hvis $P(a) = 0$, er

$$0 = R$$

Altså er P delelig med $x - a$.

Kapittel 3

Grenseverdier og kontinuitet

3.1 Grenseverdier

Si at vi starter med verdien 0.9, og deretter stadig legger til 9 som bakerste siffer. Da får vi verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre. Ved å legge til 9 som bakerste siffer på denne måten, *kan vi komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – verdien 1*. Det å "komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – en verdi" vil vi heretter kalle å "gå mot en verdi". Metoden vi akkurat beskrev kan vi altså se på som en metode for å *gå mot* 1. Vi kan da si at *grenseverdien* til denne metoden er 1. For å indikere en grenseverdi skriver vi $\lim$, og for å vise til at en variabel x går mot et tall a skriver vi $x \to a$:

3.1 Grenseverdien til en funksjon

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \text{grenseverdien til } f \text{ når } x \text{ går mot } a \\ &= \text{verdien } f \text{ går mot når } x \text{ går mot } a\end{aligned}$$

En utvidelse av $=$

Det litt paradoksale med grenserverdier hvor x går mot a, er at vi ofte ender opp med å erstatte x med a, selv om vi per definisjon har at $x \neq a$. For eksempel skriver vi at

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = 2+1 = 3 \tag{3.1}$$

Det er verd å filosofere litt over likhetene i (3.1). Når x går mot 2, vil x aldri bli eksakt lik 2. Dette betyr at $x+1$ aldri kan bli *eksakt lik* 3. Men *jo nærmere* x er lik 2, *jo nærmere* er $x+1$ lik 3. Med andre ord går $x+1$ mot 3 når x går mot 2. Likheten i (3.1) viser altså ikke til et uttrykk som er *eksakt lik* en verdi, men et uttrykk som *går eksakt mot* en verdi. Dette gjør altså at grenseverdier bringer en noe utvidet forståelse av $=$.

Eksempel 1

Gitt $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$. Finn $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Svar

Hensikten med denne oppgaven er å undersøke om $f(x)$ går mot en bestemt verdi når x går mot 1, selv om f ikke

Kapittel 4

Derivasjon

4.1 Definisjoner

Gitt en funksjon $f(x)$ og to verdier x-verdier x_1 og x_2, hvor $x_1 < x_2$. Den gjennomsnittlige endringen til f fra x_1 til x_2 er da gitt som

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Uttrykket over forteller hvor mye funksjonsverdien endrer seg i forhold til hvor mye x-verdien endrer seg, og gir stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$.

$$figur$$

La oss finne den gjennomsnittlige endringen til $f(x) = x^2$ når $x = 2$ og $x = 3$.

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3^2 - 2^2}{1} = 5$$

Men vi kan jo så mye bedre enn dette. Det er ingenting som hindrer oss i å gjøre intervallet vi studerer mye mindre, og med dèt komme mye nærmere punktet vi er ute etter. Faktisk kan vi tenke oss en avstand mellom de to x-verdiene som er så nære 0 som overhodet mulig. Betegner vi denne avstanden som Δx så skriver vi $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, som indikerer at vi studerer tilfeller i grensen hvor Δx går mot 0.
Så om vi nå ser på gjennomsnittsstigningen til f mellom $x = 2$ og x i umiddelbar nærhet av 2, gir dette oss en uendelig god tilnærming til stignigstallet vi er ute etter. Resultatet kaller vi da *den deriverte av f med hensyn på x for* $x = 2$, som vi skriver som $f'(2)$:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

Så la oss nå prøve å regne ut $f'(2)$:

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^2 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\
&= 4
\end{aligned}$$

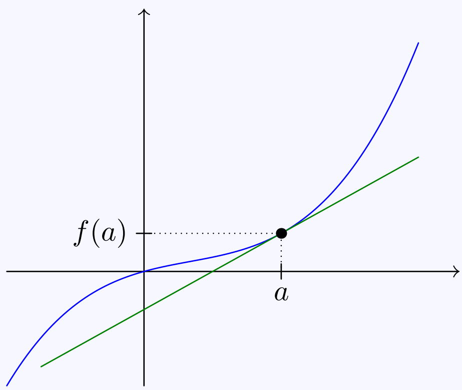
Metoden vi har brukt over kan brukes for en hvilken som helst kontinuerlig funksjon av x for et hvilket som helst valg av x.

4.1 Definisjon av den deriverte

Gitt en funksjon $f(x)$. Den deriverte av f i $x = a$ er da gitt som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(x)}{h}$$

Linja som har stigingstall $f'(a)$, og som går gjennom punktet $(a, f(a))$, kalles *tangeringslinja* til f for $x = a$.



Eksempel

Gitt $f(x) = x^3$. Finn $f'(a)$.

Svar

Vi har at

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(3a^2 + 3ah + h^2\right) \\
&= 3a^2
\end{aligned}
$$

Altså er $f'(a) = 3a^2$.

4.2 Den deriverte som funksjon

Gitt en funksjon f. Den deriverte av f med hensyn på x er da[1] definert som

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

[1]Gitt at grenseverdien eksisterer.

Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon $f(x)$ og en variabel k. Siden $f'(a)$ angir stigningstallet til $f(a)$ for $x = a$, vil en tilnærming til $f(a+k)$ være (se figur ???)

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k$$

Det er ofte nyttig å vite differansen mellom en tilnærming og den faktiske verdien:

$$\varepsilon_f = f(a+k) - \left[f(a) + f'(a)k\right] \tag{4.1}$$

Vi legger merket til at[1] $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$, og skriver om (4.1) til en formel for $f(x+k)$:

[1]Dette overlates til leseren å vise.

4.3 Linearisering av en funskjon

Gitt en funskjon $f(x)$ og en variabel k. Da finnes en funksjon ε slik at

$$f(x+k) = f(x) + f'(a)k + \varepsilon_f$$

hvor $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$.

Tilnærmingen

$$f(x+k) \approx f(x) + f'(x)k$$

kalles da lineæarapproksimasjonen av $f(x+k)$.

4.2 Derivasjonsregler

4.4 Den deriverte av utvalgte funksjoner

$$
\begin{aligned}
(x^r)' &= rx^{r-1} \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
(\sin x)' &= \cos(x) \\
(\cos x)' &= -\sin(x) \\
(e^x)' &= e^x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x
\end{aligned}
$$

4.3 Kjerneregelen

Bevis for kjerneregelen
La oss se på tre funksjoner f og g som oppfyller likheten $f(x) = g(u(x))$. f beskrives direkte av x, mens g beskrives av indirekte av x som en funksjon av $u(x)$.

La oss bruke $f(x) = e^{x^2}$ som eksempel. Kjenner vi verdien til x, kan vi fort regne ut hva verdien til $f(x)$ er. For eksempel er:

$$f(2) = e^4$$

Men vi kan også skrive $g(u(x)) = e^{u(x)}$, hvor $u(x) = x^2$. Denne skrivemåten impliserer at når vi kjenner verdien til x, så regner vi først ut verdien til u, før vi til slutt finner verdien av g:

$$u(2) = 4 \qquad , \qquad g(u(2)) = e^{u(2)} = e^4$$

Så det vi har nå er fire unike størrelser: en varierende x, f som funksjon av x, u som funksjon av x og g som funksjon av u.

$$fig$$

Av derdef?? har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} \end{aligned}$$

Vi setter $k = u(x+h) - u(x)$. Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u+k\right] - g\left[u\right]}{h}$$

Av (**??**) har vi at

$$g(u) - g(u+k) = g'(u)k + \varepsilon_g$$

Altså er

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{g'(u)k + \varepsilon_g}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k}\right) \frac{k}{h} \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$, er $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$. Videre har vi at $\lim\limits_{h\to 0} \frac{k}{h} = u'(x)$. Altså har vi at

$$\lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} = g'(u)u'(x)$$

4.5 Kjerneregelen

For en funksjon $f(x) = g(u(x))$ kan vi finne f derivert med hensyn på x som:

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

Eksempel

Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^{x^2+x+1}$
Svar: Vi setter $u = x^2 + x + 1$, og får:

$$\begin{aligned} g(u) &= e^u \\ g'(u) &= e^u \\ u'(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Altså blir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^{(x^2+x+1)}(2x + 1) \end{aligned}$$

4.4 Produktregelen

Bevis for produktregelen
Si at vi har en funksjon f som består av to funksjoner u og v, som begge er avhengige av x:

$$f(x) = u(x)v(x)$$

For enhver kontinuerlig funksjon g er $g'(x)$ er definert som:

$$g' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$ kan vi derfor skrive som:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

La oss nå skrive $u(x)$ og $v(x)$ som u og v og $u(x + \Delta x)$ og $v(x + \Delta x)$ som $\tilde{u}$ og $\tilde{v}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{\Delta x}$$

Vi kan alltids legge til 0 i form av $\dfrac{u\tilde{v}}{\Delta x} - \dfrac{u\tilde{v}}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{\Delta x} + \frac{u\tilde{v}}{\Delta x} - \frac{u\tilde{v}}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(\tilde{u} - u)\tilde{v}}{\Delta x} + \frac{u(\tilde{v} - v)}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

Siden vi for enhver kontinuerlig funksjon g har at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \tilde{g} = g$ og at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{g} - g}{\Delta x} = g'$, får vi nå:

$$f' = u'v + uv'$$

4.6 Produktregelen ved derivasjon

Gitt $f(x) = u(x)v(x)$ da er

$$f' = u'v + uv'$$

4.5 Divisjonsregelen

Dersom vi har uttrykket $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ kan vi bruke produktregelen og kjerneregelen:

$$\begin{aligned} f' &= \left(\frac{u}{v}\right)' \\ &= \left(uv^{-1}\right)' \\ &= u'v^{-1} - uv^{-2}v' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

4.7 Divisjonsregelen ved derivasjon

Dersom vi har funksjonen $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, kan vi finne $f'(x)$ ved:

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

L'hoptial (forklaring)

Siden $f(a) = g(a) = 0$, er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Vi setter $k = a - x$, da har vi av linaprx?? at

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(x + h) = -f'(x)k - \varepsilon_f$$

$$g(x) - g(a) = g(x) - g(x + h) = -g'(x)k - \varepsilon_g$$

Altså er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) + \frac{\varepsilon_f}{k}}{g'(x) + \frac{\varepsilon_g}{k}}$$

Da $\lim\limits_{x \to a} k = 0$, har vi at $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varepsilon_f}{k} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$ Altså er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'hopital 2 (forklaring)

Vi har at

$$\lim_{x\to a} \frac{g}{f} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}}$$

Da $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g = 0$, må $\lim_{x\to a} \frac{1}{f} = \lim_{x\to a} \frac{1}{g} = 0$. Av Lhopital1?? har vi da at

$$\lim_{x\to a} \frac{g}{f} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f^2} f'}{\frac{1}{g^2} g'}$$

Multipliserer vi begge sider med $\lim_{x\to a} \frac{f^2}{g^2}$, får vi at

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \lim_{x\to a} \frac{f'}{g'}$$

Kapittel 5

Funksjonsdrøfting

5.1 Monotoniegenskaper

5.2 Injektive funksjoner

5.1 Injektive funksoner

Gitt en funksjon $f(x)$. Hvis alle verdier til f er unike på intervallet $x \in [a, b]$, er f *injektiv* på dette intervallet.

Språkboksen

Et annet ord for injektiv er *én-entydig*.

5.3 Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 1$, som åpenbart er injektiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette betyr at likningen $f = 2x + 1$ bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på x eller f. Løser vi med hensyn på x, får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for f til, det "omvendte", et uttrykk for x. Siden x og f begge er variabler, er x en funksjon av f, og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den *omvendte* til f. Setter vi uttrykket til f inn i uttrykket til $x(f)$, får vi nødvendigvis x:

$$\begin{aligned} x\left(2x + 1\right) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle x som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både f og x, slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette $y = f$ og $g = x$. Den omvendte funksjonen g til f er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

5.2 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner $f(x)$ og $g(y)$. Hvis

$$g\left[f\right] = x$$

er f og g *omvendte* funksjoner.

Eksempel 1

Gitt funksjonen $f(x) = 5x - 3$.

a) Finn den omvendte funksjonen g til f.

b) Vis at $g\left[f(x)\right] = x$.

Svar

a) Vi setter $y = f$, og løser likningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= 5x - 3 \\ x &= \frac{y+3}{5} \end{aligned}$$

Da er $g(y) = \frac{y+3}{5}$.

b) Når $y = f$, har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x - 3) \\ &= \frac{5x - 3 + 3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

$\boldsymbol{f^{-1}}$

Hvis f og g er omvendte funksjoner, skrives g ofte som f^{-1}. Da er det veldig viktig å merke seg at f^{-1} ikke er det samme som $(f)^{-1}$. For eksempel, gitt $f(x) = x + 1$. Da er

$$f^{-1} = x - 1 \qquad , \qquad (f)^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

I alle andre tilfeller enn ved $n = -1$, vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$

5.4 Ekstremalpunkt

Merk: Et tall c kan omtales som et punkt i funskjonsdrøftinger.

5.3 Maksimum og minimum

Gitt en funksjon $f(x)$:

Absolutt maksimum og absolutt minimum:

- f har absolutt maksimum $f(c)$ hvis $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har absolutt minimum $f(c)$ hvis $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.

Lokalt maksimum og absolutt minimum:

- f har et lokalt maksimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in I$.
- f har et lokalt minimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \leq f(x)$ for $x \in I$.

5.4 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon $f(x)$ med maksimum/minimum $f(c)$. Da er

- $f(c)$ en ekstremalverdi for f.
- c et ekstremalpunkt for f. Nærmere bestemt et maksimalpunkt/minimumspunkt for f.
- $(c, f(c))$ et toppunkt/bunnpunkt for f.

5.5 Infleksjonspunkt og vendepunkt

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ har vi at

- Hvis $f''(c) = 0$ og f'' skifter fortegn i c, er c et *infleksjonspunkt* for f.
- Hvis c er er infleksjonspunkt for f, er $(c, f(x))$ et *vendepunkt*.
- Hvis f'' går fra positiv til negativ, går f fra konveks til konkav (og omvendt).

Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [-2, 4]$$

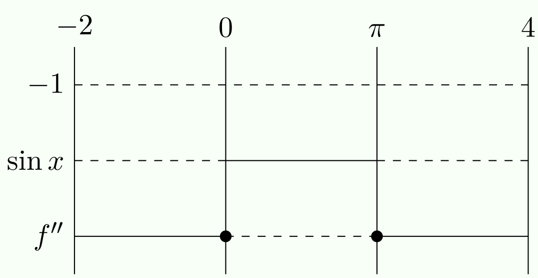
a) Finn infleksjonspunktene til f.
b) Finn vendepunktene til f.

Svar

a) Infleksjonspunktene finner vi der hvor $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (\sin x)'' &= 0 \\ -\sin x &= 0 \end{aligned}$$

Av $x \in D_f$ er det $x = 0$ og $x = \pi$ som oppfyller kravet fra ligningen over. For å finne ut om f'' skifter fortegn i disse punktene, setter vi opp et fortegnsskjema:



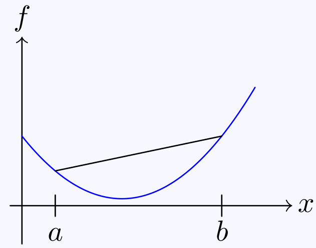
f'' går altså fra positiv til negativ i $x = 0$ og fra negativ til positiv i $x = \pi$. Dette betyr at f går fra konveks til konkav i $x = 0$ og fra konkav til konveks i $x = \pi$.

5.5 Konvekse og konkave funksjoner

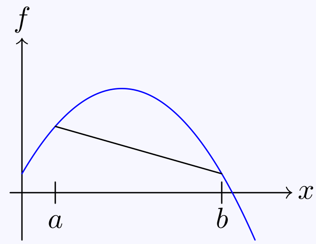
5.6 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$.

Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger over grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konveks for $x \in [a, b]$.



Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger under grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konkav for $x \in [a, b]$.



Kapittel 6

Vektorer

Kapittel 7

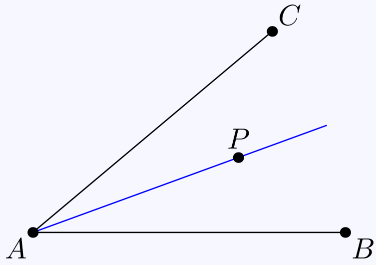
Geometri

7.1 Definisjoner

7.1 Halveringslinje

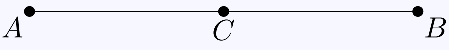
Gitt $\angle BAC$. For et punkt P som ligger på *halveringslinja* til vinkelen, er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC$$



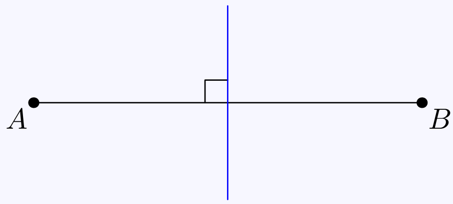
7.2 Midtpunkt

Midtpunktet C til AB er punktet på linjestykket som er slik at $AC = CB$.



7.3 Midtnormal

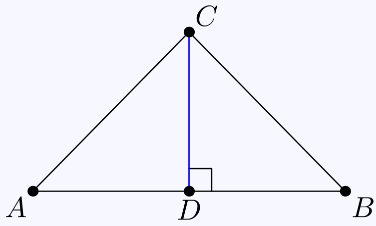
Midtnormalen til AB står normalt på, og går gjennom midtpunktet til, AB.



7.2 Egenskaper til trekanter

7.4 Midtnormal i likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$, hvor $AC = BC$, som vist i figuren under.



Høgda DC ligger da på midtnormalen til AB.

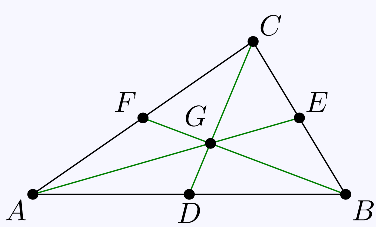
7.4 (forklaring)

Da både $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ er rettvinklede, har CD som korteste katet, og $AC = BC$, følger det av Pytagoras' setning at $AD = BD$.

7.5 Medianer i trekanter

En *median* er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

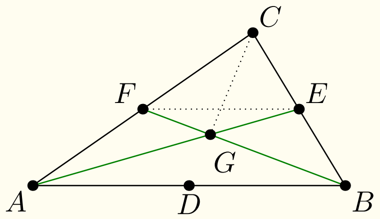
De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.



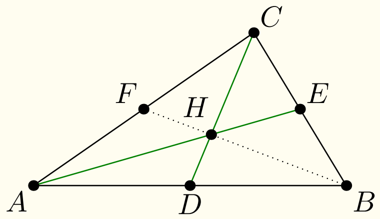
Gitt $\triangle ABC$ med medianer CD, BF og AE, som skjærer hverandre i G. Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

7.5 (forklaring)



(a)



(b)

Vi lar G være skjæringspunktet til BF og AE, og tar det for gitt at dette ligger inne i $\triangle ABC$. Da $AF = \frac{1}{2}AC$ og $BE = \frac{1}{2}BC$, er $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$. Dermed har F og E lik avstand til AB, som betyr at $FE \parallel AB$. Videre har vi også at

$$\begin{aligned} ABG + AFG &= ABG + BGE \\ AFG &= BGE \end{aligned}$$

G har lik avstand til AF og FC, og $AF = FC$. Dermed er $AFG = GFC$. Tilsvarende er $BGE = GEC$. Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$\begin{aligned} AFG + GFC + GEC &= AEC \\ GEC &= \frac{1}{6}ABC \end{aligned}$$

La H være skjæringspunktet til AE og CD. Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både $\triangle GEC$ og $\triangle HEC$ har CE som side, likt areal, og både G og H ligger på AE, må $G = H$. Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

$\triangle ABG \sim \triangle EFG$ fordi $\angle EGF$ og $\angle AGB$ er toppvinkler og $AB \parallel FE$. Dermed er

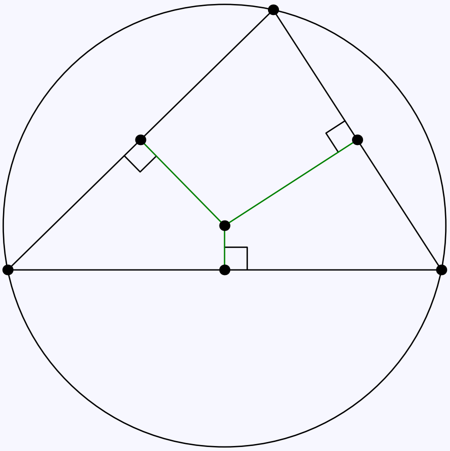
$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

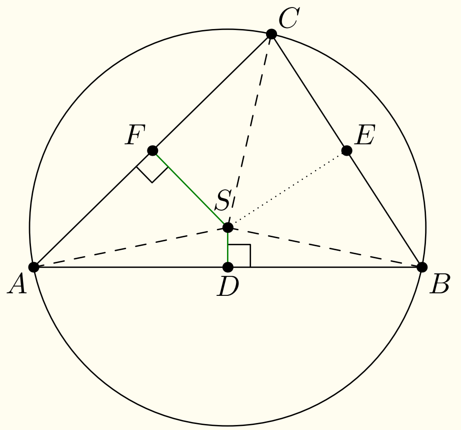
$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

7.6 Midtnormaler i trekanter

Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i sirkelen som har hjørnene til trekanten på sin bue.



7.6 (forklaring)

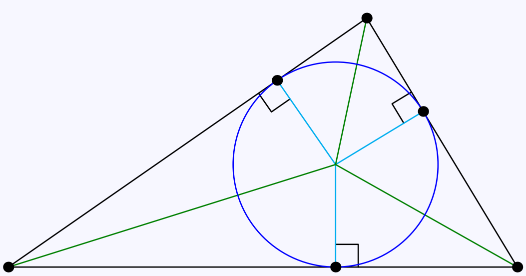


Gitt $\triangle ABC$ med midtpunktene D, E og F. Vi lar S være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til AC og AB. $\triangle AFS \sim \triangle CFS$ fordi begge er rettvinklede, begge har FS som korteste katet, og $AF = FC$. Tilsvarende er $\triangle ADS \sim \triangle BDS$. Følgelig er $CS = AS = BS$. Dette betyr at

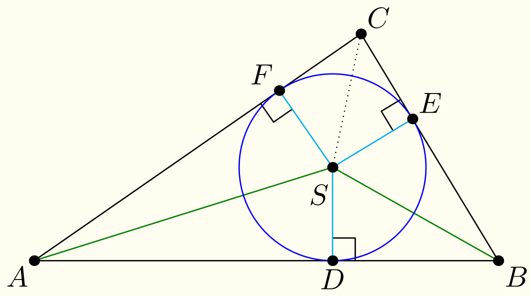
- $\triangle BSC$ er likebeint, og da går midtnormalen til BC gjennom S.
- A, B og C må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum S og radius $AS = BS = CS$

7.7 Halveringslinjer og innskrevet sirkel i trekanter

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den *innskrevne* sirkelen, som tangerer hver av sidene i trekanten.



7.7 (forklaring)



Gitt $\triangle ABC$. Vi lar S være skjæringspunktet til de respective halveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle CBA$. Videre plasserer vi D, E og F slik at $DS \perp AB$, $ES \perp BC$ og $FS \perp AC$. $\triangle ASD \cong \triangle ASF$ fordi begge er rettvinklede og har hypotenus AS, og $\angle DAS = \angle SAF$. Tilsvarende er $\triangle BSD \cong \triangle BSE$. Dermed er $SE = SD = SF$. Følgelig er F, C og E de respektive tangeringspunktene til AB, BC og AC og sirkelen med sentrum S og radius SE.

Videre har vi at $\triangle CSE \cong \triangle CSF$, fordi begge er rettvinklede og har hypotenus CS, og $SF = SE$. Altså er $\angle FCS = \angle ECS$, som betyr at CS ligger på halveringslinja til $\angle ACB$.

Kapittel 8

Numeriske metoder

8.1 Newtons metode

8.2 Derivasjon

8.3 Vekstmodeller

Vedlegg

Tangeringslinja til en graf

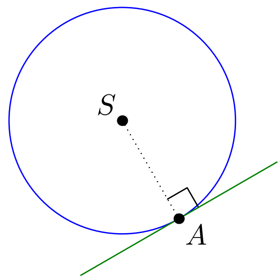
Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

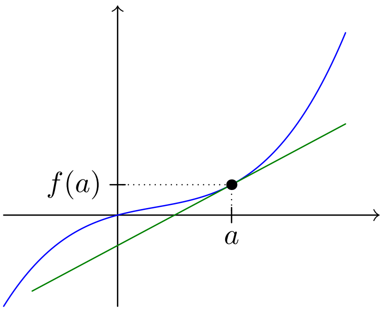
- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se *figur 8.1a*.)

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$. Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til f i punktet* $(a, f(a))$ som linja som går gjennom $(a, f(a))$ og har stigningstall $f'(a)$ (Spivak, 1994). (Se *Figur 8.1b*.)



(a)



(b)

Figur 8.1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

Senteret til krumningen

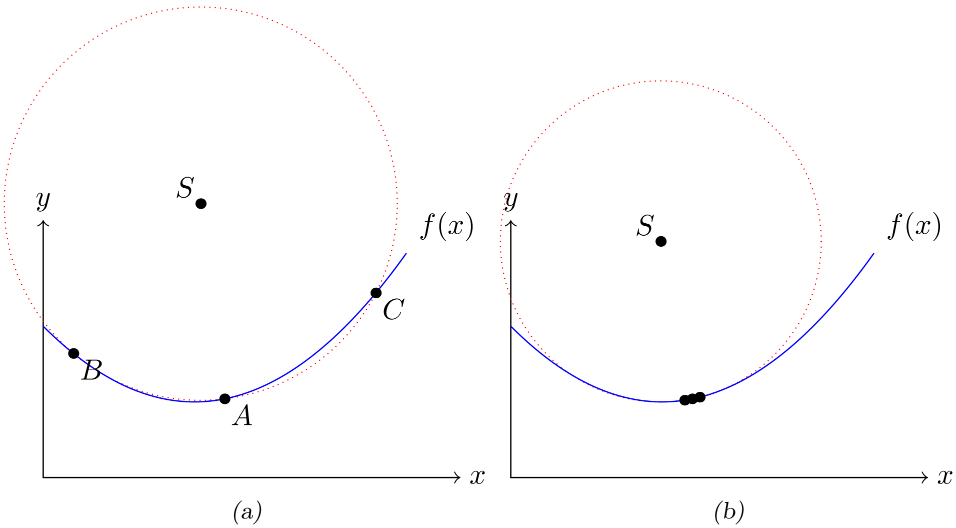
Gitt en funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig og to ganger deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, og hvor $f''(x) \neq 0$. For en gitt a lar vi $f_a = f(a)$, og definerer funksjonene

$$f_b(h) = f(a-h) \quad , \quad f_c(h) = f(a+h)$$

Vi innfører også punktene

$$A = (a, f_a) \quad , \quad B = (a-h, f_b) \quad , \quad C = (a+h, f_c)$$

Videre lar vi $S = (S_x, S_y)$ være sentrum i den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne *krumningen* i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ når h går mot 0.



Figur 8.2

Et likningssett for S

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [h, f_a - f_b] \quad , \quad \overrightarrow{AC} = [h, f_c - f_a]$$

La B_m og C_m være midptunktene til henholdsvis (sekantene) AB og AC. Da er

$$B_m = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad , \qquad C_m = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$[f_a - f_b, -h]$ er en normalvektor for $\overrightarrow{BA}$, dette betyr at midtnormalen $\boldsymbol{l}_1$ til sekanten AB kan parameterisere som

$$\boldsymbol{l}_1(t) = B_m + [f_a - f_b, -h]t \tag{8.1}$$

Tilsvarende er midtnormalen $\boldsymbol{l}_2$ til sekanten AC parameterisert ved

$$\boldsymbol{l}_2(q) = C_m + [f_c - f_a, -h]q$$

S sammenfaller med skjæringspunktet til $\boldsymbol{l}_1$ og $\boldsymbol{l}_2$. Ved å kreve at $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2$, får vi et lineært likningssett med to ukjente som gir

$$t = \frac{(f_a - f_c)(f_b - f_c) + 2h^2}{2h(f_b + f_c - 2f_a)} \tag{8.2}$$

S når *h* går mot 0

Vi definerer funkjonene $\dot{f}_b$, $\dot{f}_c$, $\ddot{f}_b$ og $\ddot{f}_c$ ut ifra de (respektive) deriverte og andrederiverte av f_b og f_c med hensyn på h:

$$-\dot{f}_b = (f_b)' = -f'(a-h)$$

$$\dot{f}_c = (f_c)' = f'(a+h)$$

$$\ddot{f}_b = (f_b)'' = f''(a-h)$$

$$\ddot{f}_c = (f_c)'' = f''(a+h)$$

Vi skal nå bruke dise funsjonene til å studere koordinatene til S når h går mot 0. Vi tar da med oss at

$$\lim_{h\to 0}\left\{h^2, h\right\} = 0 \qquad \lim_{h\to 0}\{f_b, f_c\} = f_a$$

$$\lim_{h\to 0}\left\{\dot{f}_c, \dot{f}_b\right\} = f'_a \qquad \lim_{h\to 0}\left\{\ddot{f}_b, \ddot{f}_c\right\} = f''_a$$

hvor[1] $f'_a = f'(a)$ og $f''_a = f''(a)$.

[1] Legg merke til at det her er snakk om f derivert med hensyn på x, og evaluert i a.

For t uttrykt ved (8.2) er (se (8.1))

$$S_y = \frac{f_a + f_b + 2ht}{2} = \frac{f_a + f_b}{2} + ht$$

Vi har at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_a + f_b}{2} = f_a$$

Videre er

$$\begin{aligned} ht &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c) + 2h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} \\ &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{2(f_b + f_c - 2f_a)} + \frac{h^2}{f_b + f_c - 2f_a} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Når h går mot 0, er begge leddene i (8.3) «0 over 0» uttrykk. Vi bruker L'Hopitals regel på det siste leddet:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} &= \lim_{h\to 0} \frac{(h^2)'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \qquad \text{«0 over 0»} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \\ &= \frac{1}{f_a''} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ved å bruke L'Hopitals regel på det første leddet i (8.3) har vi at

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{f_b + f_c - 2f_a} = \lim_{h\to 0} \frac{((f_c - f_a)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'}$$

Av produktregelen ved derivasjon er

$$\lim_{h\to 0} \frac{((f_a - f_c)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \right]$$

Begge leddene over er «0 over 0» uttrykk. Vi undersøker dem hver for seg ved å anvende L'Hopitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\ddot{f}_c(f_b - f_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \\ &= 0 + \frac{(f_a')^2}{2f_a''} \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(f_c-f_a)(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}+\frac{(f_c-f_a)(-\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}\right] \\
&= \frac{(f_a')^2}{2f_a''}+0 \qquad (8.6)
\end{aligned}
$$

Av (8.3), (8.4), (8.5) og (8.6) har vi at

$$\lim_{h\to 0} ht = \frac{1+(f_a')^2}{f_a''}$$

Dermed er

$$S_y = f_a + \frac{1+(f_a')^2}{f_a''}$$

Videre er (med t gitt av (8.2))

$$S_x = (f_b - f_a)t + a - \frac{1}{2}h$$

Vi har at

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(f_b-f_a)t &= \lim_{h\to 0}\frac{f_b-f_a}{h}\cdot ht \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f_b-f_a}{h}\cdot \lim_{h\to 0} ht \\
&= -f_a'\frac{1+(f_a')^2}{f_a''}
\end{aligned}
$$

Altså er

$$S_x = a - f_a'\frac{1+(f_a')^2}{f_a''}$$

Avslutning

Linja som har stigningstall $f'(a)$, og som går gjennom $(a, f(a))$, er gitt ved funksjonen

$$g(x) = f_a'(x-a) + f_a$$

$\vec{r} = [1, f_a]$ er en retningsvektoren til denne linja. Av uttrykkene vi har funnet for S_x og S_y har vi at

$$S = \left(a - f_a'\frac{1+(f_a')^2}{f_a''}, f_a + \frac{1+(f_a')^2}{f_a''}\right)$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f_a''}\left[-f_a(1+(f_a')^2), 1+(f_a')^2\right]$$

Siden $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AS} = 0$ og $g(a) = f(a)$, er grafen til g tangeringslinja til sirkelen med sentrum S når h går mot 0. Altså er g tangeringslinja til sirkelen som beskriver krumningen til f når $x = a$.

Litteratur

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint.* Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press