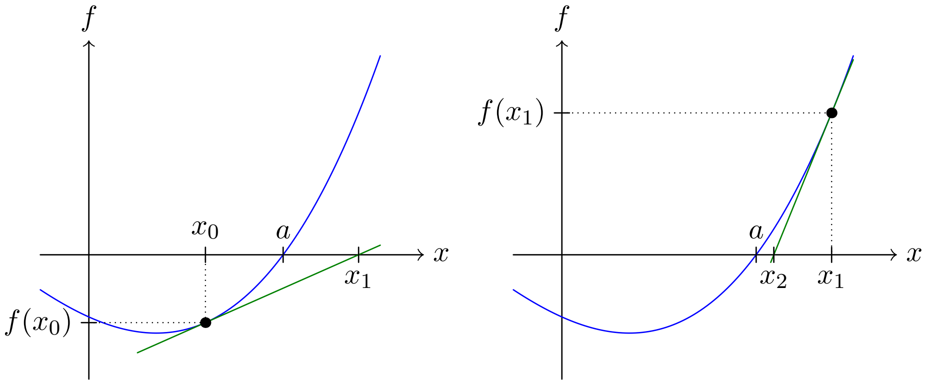
0.1 Newtons metode

Gitt en funskjon $f(x)$ si at vi ønsker å finne et tall a slik at $f(a) = 0$. Ved **Newtons metode** gjør vi denne antakelsen for å en tilnærming a:

> La x_1 være skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_0. Vi antar da at $|x_1 - a| < |x_0 - a|$. Sagt med ord antar vi at x_1 gir en bedre tilnærming for a enn det x_0 gjør.

Siden x_1 er skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_0, har vi at[1]

$$
\begin{aligned}
f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) &= 0 \\
f'(x_0)x_1 &= f'(x_0)x_0 - f(x_0) \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}
$$



(a) (b)

La x_2 være skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_1. Ved å gjenta prosedyren vi brukte for å finne x_1, kan vi finne x_2, som vi antar er en enda bedre tilnærming for a enn x_1. Prosedyren kan vi gjenta fram til vi har funnet en x-verdi som gir en tilstrekkelig[2] tilnærming til a.

[1]Se oppgave??

[2]Hva som er en *tilstrekkelig tilnærming* er det opp til oss selv å bestemme.

0.1 Newtons metode

Gitt en funskjon $f(x)$ si at vi ønsker å finne et tall a slik at $f(a) = 0$. Gitt x-verdiene x_n og x_{n+1} for $n \in \mathbb{N}$. Ved å bruke formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

antas det at x_{n+1} gir en bedre tilnærming for a enn x_n.

Språkboksen

Newtons metode kalles også **Newton-Rhapsos metode**.

Når er tilmærmingen god nok?

Newtons metode beskriver en iterasjonsprossess som man håper at nærmer seg en verdi. Hvis meotden lykkes, vil x_{n+1} og x_n etterhvert være veldig like, og slik kan en grense for hvor liten $|x_{n+1} - x_n|$ kan være fungere som et godt mål for når iterasjonsprossessen skal stoppe.

0.2 Trapesmetoden

Gitt en funksjone $f(x)$. Integralet $\int_a^b f\,dx$ kan vi tilnærme ved å

1. Dele intervallet $[a, b]$ inn i mindre intervall. Disse kaller vi **delintervall**.
2. Finne en tilnærmet verdi for integralet av f på hvert delintervall.
3. Summere verdiene fra punkt 2.

I *figur 1a* har vi 3 like store delintervaller. Hvis vi setter $a = x_0$ og $\Delta x = \frac{b-a}{3}$, betyr dette at

$$x_1 = x_0 + \Delta x \qquad x_2 = x_0 + 2\Delta x \qquad x_3 = x_3 + 3\Delta x = b$$

En tilnæret verdi for $\int_a^{x_1} f\,dx$ får vi ved å finne arealet til trapeset med hjørner (husk at $x_0 = a$)

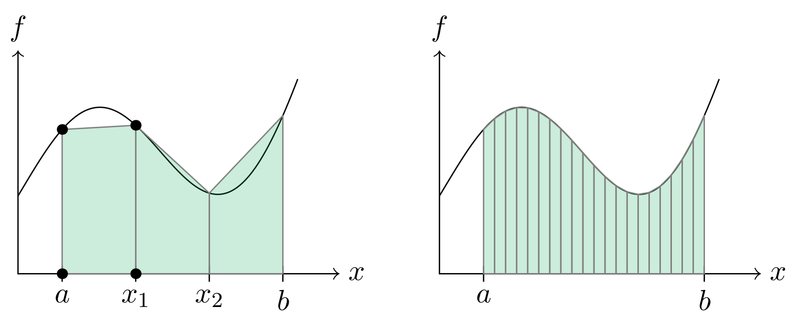
$$(x_0, 0) \qquad (x_1, 0) \qquad (x_1, f(x_1)) \qquad (x_0, f(a))$$

Dette arealet er gitt ved uttrykket

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_0)\left[f(x_0) + f(x_1)\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) - f(x_1)\right]$$

Ved å tilnærme integralet for hvert delintervall på denne måten, kan vi skrive

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$



(a) Tilnærming med 3 delintervaller.

(b) Tilnærming med 20 delintervaller

Figure 1

0.2 Trapesmetoden

Gitt en integrerbar funksjon f. En tilnærmet verdi for $\int_a^b f\,dx$ er da gitt som

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \tag{1}$$

hvor

$$n \in \hat{\mathbb{N}}$$

$$a = x_0$$

$$b = x_n$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n+1}$$

$$x_{n+1} = x_n + i\Delta x$$

Merk

Slik regel 0.2 er formulert, vil $[a, b]$ være delt inn i $n+1$ delintervaller.