

Oppgave 1

Av produktregelen ved derivasjon har vi at

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2)' \ln x + x^2(\ln x)' \\&= 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \\&= x(2 \ln x + 1)\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi har at

$$2 \ln e = 2$$

$$3 \log 70 = 3 \log 7 + 3 \log 10 = 3 \log 7 + 3 > 2$$

$$e^{3 \ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Da $\log 7 < 1$, er $3 \log 7 + 3 < 8$, og dermed er

$$2 \ln e < 3 \log 70 < e^3 \ln 2$$

Oppgave 3

a) Vi har at

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-3), -2 - (-1)] = [5, -1]$$

$$\overrightarrow{BC} = [3, 4]$$

$$\overrightarrow{AC} = [8, 3]$$

Videre er

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{73}$$

Dermed er BC kortest.

- b) For to vektorer \vec{a} og \vec{b} har vi at $\vec{a} \cdot \vec{b} \iff \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. Videre har vi at

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot 3 + (-1)4 = 11$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 37$$

Dermed er ingen av vinklene i trekanten 90° .

Oppgave 4

- a) I skriptet:

Linje 1-2: Definerer $f(x)$.

Linje 4-5: Definerer $f'(x)$

Linje 6-7: Setter verdiene til h og a

Linje 10-11: Kjører en while-loop som stopper når $df(a, h) \geq 0$, og som øker a med 1 for hver iterasjon.

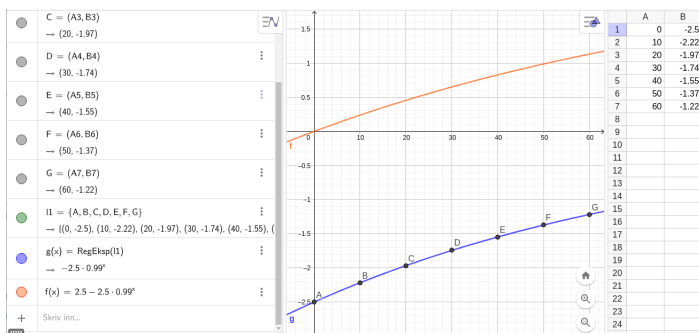
Egil antar at $f'(a) < 0$ for $a = 0$, og forsøker etterpå å finne a -verdien hvor $f(x)$ skifter fortegn. Hvis $f'(x)$ skifter fra negativt til positivt fortegn i a , vil dette være bunnpunktet til f .

- b) Å øke a med 1 gjør at Egil bare sjekker for $a \in \mathbb{N}$. Han bør derfor øke a med en mye mindre verdi. Forslag for Linje 11:

`a = a + 0.01`

Oppgave 1

- a) Da potensfunksjoner ikke kan gå gjennom punktet $(0,0)$, bruker vi tallene i tabellen hvor konsentrasjonen er fratrekt 2,5. Ved regresjon får vi potensfunksjonene $g(x)$. Da denne tilnærmet går gjennom alle punktene vi har lagt inn, ser $g(x)$ ut til å være en god modell. $f(t)$ fra oppgaven gjenkjenner vi som $g(t) + 2,5$, og dermed er f en god modell for konsentrasjonen av stoffet.



- b) Ved hjelp av CAS finner vi at konsentrasjonen vil være 2.0 mmol/L etter ca. 160 sekunder.

$$1 \quad \text{Løs}(f(x) = 2) \\ \approx \{x = 160.14\}$$

- c) Ved hjelp av CAS finner vi at konsentrasjonen vil øke med mindre enn 0,001 mmol/L per sekund etter ca 321 sekunder.

$$2 \quad \text{Løs}(f'(x) = 0.001) \\ \approx \{x = 320.775\}$$

Oppgave 2

I CAS-celle 1 og 2 definerer vi $g(x)$ og $h(x)$ slik at

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x < k \\ h(x) & , \quad x \geq k \end{cases}$$

| | |
|-----------------------|--------------------------------------|
| 1 | $g(x) := -x^2 + (2+k)x$ |
| | $\rightarrow g(x) := -x^2 + kx + 2x$ |
| 2 | $h(x) := x^2 + (2-k)x$ |
| | $\rightarrow h(x) := x^2 - kx + 2x$ |
| 3 | $g(k)$ |
| | $\rightarrow 2k$ |
| 4 | $h(k)$ |
| | $\rightarrow 2k$ |
| 5 | Løs($g'(k) = h'(k)$) |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \{k = 0\}$ |

- a) Av celle 3 og 4 ser vi at $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = 2k$, og dermed er f kontinuerlig for alle k .
- b) For at f skal være deriverbar i $x = k$, må vi at at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(k+h) - g(k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(k+h) - h(k)}{h}$$

Da både $g(x)$ og $h(x)$ er polynomer, har de en kontinuerlig deriverte funksjon for alle k , og dermed er det tilstrekkelig å sjekke for hvilke verdier $g'(k) = h'(k)$. Av celle 5 ser vi at dette bare gjelder for $k = 0$.

- c) Da $g(x)$ er en konkav funksjon, er den injektiv for alle $x \in [\infty, x_m]$, hvor x_m er maksimumspunktet til g . Maksimumspunktet finner vi ved å kreve at $g'(x) = 0$ (celle 6). I tillegg må vi kreve at $x_m < k$, som gir at $k > 2$ (celle 7). En tilsvarende utregning med hensyn på $h(x)$ (celle 8 og 9) gir at $k \leq 2$. Altså er f injektiv dersom $-2 \leq k < 2$.

| | |
|-----------------------|--|
| 6 | $\text{Løs}(g'(x) = 0)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{2} k + 1 \right\}$ |
| 7 | $\text{Løs}\left(\frac{1}{2} k + 1 < k\right)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \{k > 2\}$ |
| 8 | $\text{Løs}(h'(x) = 0)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{2} k - 1 \right\}$ |
| 9 | $\text{Løs}\left(\frac{1}{2} k - 1 \geq k\right)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \{k \leq -2\}$ |

Oppgave 3

- a) Vi definerer tredjegradsfunksjonen f med koeffisienter $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (celle 1). Ska f ha et ekstremalpunkt, må det finnes en reell løsning av ligningen $f'(x) = 0$. Av celle 2 ser vi at hvis $c_2^2 < 3c_1c_3$, så har ikke ligningen en reell løsning. Det er åpenbart at det finnes sett med c_1, c_2 og c_3 som oppfyller ulikheten (for eksempel $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1$), og dermed er ikke Påstand 1 gyldig for alle sett med c_1, c_2 og c_3 .
- b) For at $y = ax + b$ skal skjære f , må ligningen $f = ax + b$ ha minst én løsning. Dette er en tredjegradslikning. Alle tredjegradslikninger har minst én reell løsning, og dermed er påstand 2 riktig.

c) Løsning 1

Vi definerer $g(x) = f'(x)$. Da f er en tredjegradsfunksjon, er g en andregradsfunksjon, og siden $g'(3) = 0$ er $(3, g(3))$ ekstremalpunktet til g . Da $x = 1$ og $x = 5$ har lik horisontalavstand til ekstremalpunktet, har vi av symmetriegenskapene til en andregradsfunksjon at $g(1) = g(3)$. Altså er Påstand 3 riktig.

Løsning 2

Hvis f har et vendepunkt i $x = 3$, er $f''(3) = 0$. Da er $c_2 = -9c_3$ (celle 3). Vi definerer $g(x)$ som f med koeffisienter $c_1, c_2 = -9c_3$ og c_3 (celle 4). Da stemmer det at $g'(x) = g'(5)$ (celle 5).

| | |
|---|--|
| 1 | $f(x) := c_3 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d$ → $f(x) := c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + d$ |
| 2 | Løs($f'(x) = 0$) → $\left\{ x = \frac{-\sqrt{-3 c_1 c_3 + c_2^2} - c_2}{3 c_3}, x = \frac{\sqrt{-3 c_1 c_3 + c_2^2} - c_2}{3 c_3} \right\}$ |
| 3 | Løs($f''(3) = 0$) → $\{c_2 = -9 c_3\}$ |
| 4 | $g(x) := \text{ByttUt}(f, c_2, -9c_3)$ → $g(x) := c_3 x^3 - 9 c_3 x^2 + c_1 x + d$ |
| 5 | $g'(1) \stackrel{?}{=} g'(5)$ → true |

Oppgave 4

Vi setter sidelengden til grunnflaten lik s og høyden lik h . Da er volumet V og overflatearealet A til prisma gitt i CAS-celle 1 og 2. I celle 3 finner vi h uttrykt ved s og A , og setter dette inn i V (celle 4). I celle 5 og 6 finner vi ekstremalpunktene til uttrykket fra celle 4. Da dette er et 3. gradsuttrykk med negativ koeffisient foran s^3 , forventer vi at ekstremalpunktet lengst til høyre på x -aksen er maksimalpunktet. Setter vi ekstremalpunktet inn i uttrykket for V (celle 7), ser vi at det største volumet oppnås ved å ha en så stor overflate som tillat.

- a) I celle 8 finner vi at det største volumet når $s = 5$ er $\frac{475}{4} \text{ L} = 118.75 \text{ L}$.
- b) I celle 9 finner vi at det maksimale volumet kassen kan få er $40\sqrt{10} \text{ L} \approx 126.49 \text{ L}$.
- c) Vi løser ligningen $V = 80$, og får et uttrykk for h (celle 10). Deretter lager vi funksjonen $a(s)$ (celle 11), hvor uttrykket for h er satt inn i uttrykket for A i celle 2. Da a bare har ett ekstremalpunkt (celle 12) er det ut i fra oppgaven naturlig å anta at dette er et bunnpunkt (dette kan også bekreftes av grafen til a). Dermed er det minste samlede arealet platene kan ha lik $12 \cdot 20^{\frac{2}{3}} \text{ dm}^2 \approx 88,42 \text{ dm}^2$.

| | |
|----------------------------------|--|
| 1 | $V(s, h) := s^2 h$ |
| <input checked="" type="radio"/> | $\rightarrow V(s, h) := h s^2$ |
| 2 | $A = s^2 + 4 h s$ |
| | $\rightarrow A = s^2 + 4 h s$ |
| 3 | $\text{Løs}(\$2, h)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \left\{ h = \frac{A - s^2}{4 s} \right\}$ |
| | $\text{ByttUt}\left(V, h, \frac{A - s^2}{4 s}\right)$ |
| 4 | $\rightarrow -\frac{1}{4} s^3 + \frac{1}{4} A s$ |
| | $\text{Derivert}(\$4)$ |
| 5 | $\rightarrow -\frac{3}{4} s^2 + \frac{1}{4} A$ |
| 6 | $\text{Løs}(\$5, s)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \left\{ s = \frac{-\sqrt{A}}{\sqrt{3}}, s = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{3}} \right\}$ |
| | $\text{ByttUt}\left(\$4, s, \sqrt{\frac{A}{3}}\right)$ |
| 7 | $\rightarrow \sqrt{A} \cdot \frac{A}{6 \sqrt{3}}$ |
| 8 | $\text{ByttUt}(\$4, \{s = 5, A = 120\})$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \frac{475}{4}$ |
| 9 | $\text{ByttUt}(\$7, A, 120)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow 40 \sqrt{10}$ |
| 10 | $\text{Løs}(V = 80)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \left\{ h = \frac{80}{s^2} \right\}$ |
| 11 | $a(s) := \text{ByttUt}\left(\text{HøyreSide}(\$2), h, \frac{80}{s^2}\right)$ |
| <input checked="" type="radio"/> | $\rightarrow a(s) := s^2 + \frac{320}{s}$ |
| 12 | $\text{Ekstremalpunkt}(a)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \left\{ (2 \sqrt[3]{20}, 12 \sqrt[3]{20^2}) \right\}$ |

Oppgave 5

- a) Vi definerer $f(t)$ og $g(t)$ slik at $r(t) = [f, g]$ (celle 1, 2 og 3). $r'(t)$ er fartsvektoren til pucken, som dermed har utgangsfart ca. lik 18,87 m/s (celle 3).
- b) Vi tiden det vil ta før r antar x - og y -verdiene til randsonene (celle 5-8), og finner at den minste gyldige tiden er ca 3,05 s. Dett er altså tiden det tok før pucken traff vantet.
- c) Vi definerer posisjonsvektoren til spilleren som $p(t)$ (celle 9), og sjekker om $r = p$ har en løsning (celle 10). Det har den ikke, og dermed treffer ikke pucken spilleren. (Hvis vi skulle sjekket om p og r kan anta samme posisjon, måtte vi brukt to forskjellige variabler, men siden det her er snakk om samme posisjon til samme tid, kan vi bruke t for begge).

| | |
|----------------------------------|--|
| 1 | $f(t) := 8(e^{-t} - t)$ |
| <input checked="" type="radio"/> | $\rightarrow f(t) := 8e^{-t} - 8t$ |
| 2 | $g(t) := -5t + 5e^{-t}$ |
| <input checked="" type="radio"/> | $\rightarrow g(t) := 5e^{-t} - 5t$ |
| 3 | $r(t) := (f, g)$ |
| | $\rightarrow r(t) := (-8t + 8e^{-t}, -5t + 5e^{-t})$ |
| 4 | $ r'(0) $ |
| <input type="radio"/> | ≈ 18.87 |
| 5 | $\text{Løs}(f = 30)$ |
| <input type="radio"/> | $\approx \{t = -1.01\}$ |
| 6 | $\text{Løs}(f = -30)$ |
| <input type="radio"/> | $\approx \{t = 3.77\}$ |
| 7 | $\text{Løs}(g = 15)$ |
| <input type="radio"/> | $\approx \{t = -0.79\}$ |
| 8 | $\text{Løs}(g = -15)$ |
| <input type="radio"/> | $\approx \{t = 3.05\}$ |
| 9 | $p(t) := (-18, 11) + t(3, -7)$ |
| | $\rightarrow p(t) := (3t - 18, -7t + 11)$ |
| 10 | $\text{Løs}(r = p)$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \{\}$ |

Oppgave 6

Kommentar: Vi vil her presentere to løsninger. Den første løsningen fremhever viktigheten av å lese alle deloppgaver før man setter i gang med besvarelsen, og styrken av å bruke CAS så mye som mulig.

Løsning 1

Vi definerer $f(x) = kx^2 + lx + m$ hvor $k, l, m \in \mathbb{R}$ (celle 1). I celle 2 har vi da et generelt uttrykk som gjelder for alle andregradsfunksjoner.

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) := kx^2 + lx + m$ $\rightarrow f(x) := kx^2 + lx + m$ |
| 2 | $\text{Løs}\left(f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, c\right)$ $\rightarrow \left\{c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right\}$ |

- a) Av uttrykket vi har funnet er $c = \frac{3+1}{2} = 2$.
- b) Se linje 2-3 i Python-skriptet.
- c) Linje 5-7 bekrefter det vi har funnet, at $c = \frac{a+b}{2}$.
- d) Da $\frac{2+8}{2} = 5$, er Annes påstand riktig.

Løsning 2

Vi har at $f'(x) = 2x + 3$. Dermed er

$$\begin{aligned}f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\2c &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\c &= \frac{1}{2} \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - 3 \right)\end{aligned}$$

- a) Vi bruker skriptet fra oppgave b) og får at $c = 2$ (linje 8).
- b) Se linje 2-6.
- c) Ut i fra forsøk med tilfeldige tall ser det ut til at $c = \frac{a+b}{2}$.
- d) Gitt $f(x) = kx^2 + lx + m$ hvor $k, l, m \in \mathbb{R}$. Ved å generalisere uttrykket vi har funnet for c , får vi at

$$c = \frac{1}{2k} \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - l \right)$$

Videre er

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= kb^2 + 3lb + m - (ka^2 + 3la + m) \\&= k(a+b)(b-a) + l(b-a)\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{2k}k(a+b) \\&= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Uttrykket gjelder altså for alle andregradsfunksjoner, og dermed er Annes påstand riktig.

```
1
2 def f(x):
3     return x**2 + 3*x + 1
4
5 def c(a, b):
6     return 1/2.0*(( f(b)-f(a) ) / (b-a) - 3)
7
8 print(c(1, 3))
9 print(c(2, 7))
10 print(c(10, 100))
```

Utdata

2.0

4.5

55.0