0.1 Å finne størrelser

Likningar, formlar og funksjonar (og utttrykk) er omgrep som dukkar i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handlar om det same; *dei uttrykker relasjonar mellom størrelsar*. Når alle størrelsane utanom den éine er kjent, kan vi finne denne enten direkte eller indirekte.

0.1.1 Å finne størrelser direkte

Mange av regelboksane i boka inneheld ein formel. Når ein størrelse står aleine på éi side av formelen, seier vi at det er ein formel for *den* størrelsen. For eksempel inneheld *Regel* **??** ein formel for 'målestokk'. Når dei andre størrelsane er gitt, er det snakk om å sette verdiane inn i formelen og regne ut for å finne den ukjente, 'målestokk'.

Men ofte har vi berre ei skildring av ein situasjon, og da må vi sjølv lage formlane. Da gjeld det å først identifisere kva størrelsar som er til stades, og så finne relasjonen mellom dei.

Eksempel 1

For ein taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
- I tillegg betaler du 15 kr for kvar kilometer du blir kjørt.

a) Sett opp eit uttrykk for kor mykje taxituren kostar for kvar kilometer du blir kjørt.

b) Hva kostar ein taxitur på 17 km?

Svar:

a) Her er det to ukjente størrelsar; 'kostnaden for taxituren' og 'antal kilometer køyrt'. Relasjonen mellom dei er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antal kilometer køyrt}$$

b) Vi har no at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren kostar altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelsar, får ein kortare uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antal kilometer køyrt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan ein gjerne bruke skrivemåten for funksjonar:

$$k(x) = 50 + 15x$$

0.1.2 Å finne størrelsar indirekte

Når formlane er kjente

Eksempel 1

Vi har sett at strekninga s vi har køyrt, farta f vi har halde, og tida t vi har brukt kan settast i samanheng via formelen[1]:

$$s = f \cdot t$$

Dette er altså ein formel for s. Ønsker vi i staden ein formel for f, kan vi gjere om formelen ved å følge prinsippa for likningar[2]:

$$s = f \cdot t$$
$$\frac{s}{t} = \frac{f \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}$$
$$\frac{s}{t} = f$$

[1]strekning = fart · tid

[2]Sjå MB, s. 121.

Eksempel 2

Ohms lov seier at strømmen I gjennom ein metallisk ledar (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

der U er spenninga og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til ein formel for R.

Strøm målast i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er $2\,\text{A}$ og spenninga $12\,\text{V}$, kva er da resistansen?

Svar:

a) Vi gjer om formelen slik at R står aleine på éi side av likskapsteiknet:

$$\begin{aligned}
I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\
I \cdot R &= U \\
\frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\
R &= \frac{U}{I}
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$\begin{aligned}
R &= \frac{U}{I} \\
&= \frac{12}{2} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 3

Gitt ein temperatur T_C målt i antall grader Celsius ($°C$). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit ($°F$) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til ein formel for T_C.

b) Vis ein temperatur er målt til $59°F$, kva er da temperaturen målt i $°C$?

Svar:

a) Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finn at

$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

Når formlane er ukjente

Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å fare på ein klassetur som til saman kostar 11 000 kr. For å dekke utgiftane har de allereie skaffa 2 000 kr, resten skal skaffast gjennom loddsalg. For kvart lodd som selgast, tener de 25 kr.

a) Lag ei ligning for kor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løys likninga.

Svar:

a) Vi startar med å tenke oss reknestykket i ord:

pengar allereie skaffa+antal lodd·pengar per lodd = prisen på turen

Den einaste størrelsen vi ikkje veit om er 'antal lodd'. Vi erstattar[1] *antal lodd* med x, og sett verdiane til dei andre størrelsane inn i likninga:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$\begin{aligned} 25x &= 11\,000 - 2\,000 \\ 25x &= 9\,000 \\ \frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\ x &= 360 \end{aligned}$$

[1] Dette gjer vi berre fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 2

Ein vennegjeng ønsker å spleise på ein bil som kostar 50 000 kr, men det er usikkert kor mange personar som skal vere med på å spleise.

a) Kall 'antal personar som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U, og lag ein formel for U.

b) Finn utgifta per person viss 20 personar blir med.

Svar:

a) Sidan prisen på bilen skal delast på antal personar som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstattar P med 20, og får

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgifta per person er altså 2 500 kr .

0.2 Funksjoners egenskaper

Denne seksjonen tar utgangspunkt i at lesaren er kjed med funksjonar, sjå MB, kapittel 9.

0.2.1 Funksjoner med samme verdi; skjæringspunkt

0.1 Skjæringspunkt til grafer

Et punkt der to funksjonar har same verdi kallast eit *skjæringspunkt* til funksjonane.

Eksempel 1

Gitt de to funksjonane

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x + 4$$

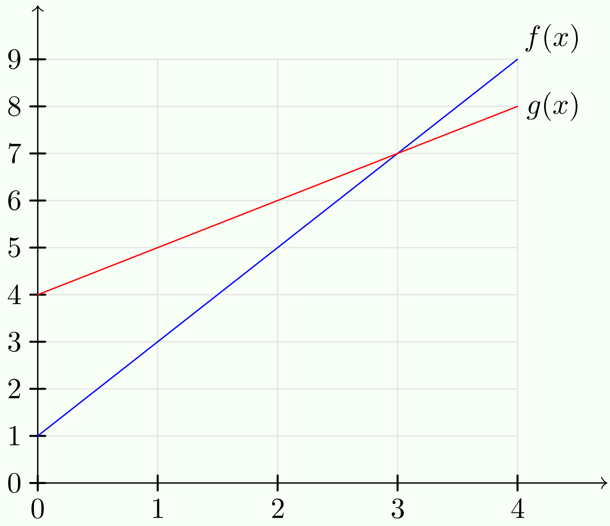
Finn skjæringspunktet til $f(x)$ og $g(x)$.

Svar:

Vi kan finne skjæringspunktet både ved ein *grafisk* og ein *algebraisk* metode.

Grafisk metode

Vi teikner grafane til funksjonane inn i det same koordinatsystemet:



Vi les av at funksjonane har same verdi når $x = 3$, og da har begge funksjonane verdien 7. Altså er skjæringspunktet $(3, 7)$.

Algebraisk metode

At $f(x)$ og $g(x)$ har samme verdi gir likninga

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x + 1 &= x + 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Vidare har vi at

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$g(3) = 3 + 4 = 7$$

Altså er $(3, 7)$ skjæringspunktet til grafane.

Merk: Det hadde sjølvsagt halde å berre finne éin av $f(3)$ og $g(3)$.

Eksempel 2

Ein klasse planlegg ein tur som krever bussreise. Dei får tilbud frå to busselskap:

- **Busselskap 1**

  Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

  Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For kva lengde kjøyrt tilbyr busselskapa same pris?

Svar:

Vi innfører følgande variablar:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1
- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

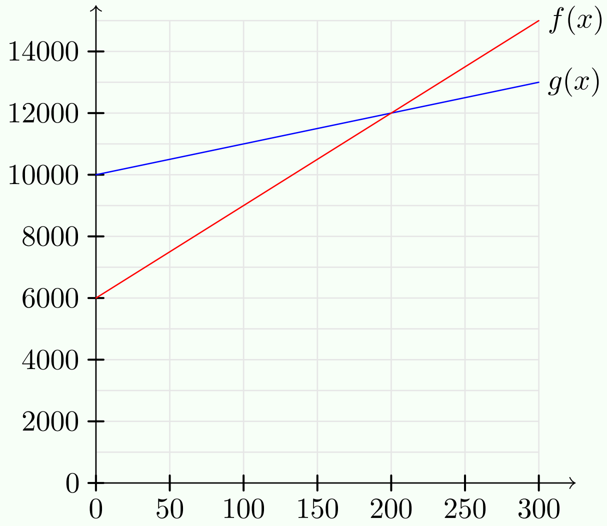
$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Vidare løyser vi no oppgåva både med ein grafisk og ein algebraisk metode.

Grafisk metode

Vi teikner grafane til funksjonane inn i same koordinatsystem:



Vi les av at funksjonane har same verdi når $x = 200$. Dette betyr at busselskapa tilbyr same pris viss klassen skal køyre 200 km.

Algebraisk metode

Busselskapa har same pris når

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\ 4\,000 &= 20x \\ x &= 200 \end{aligned}$$

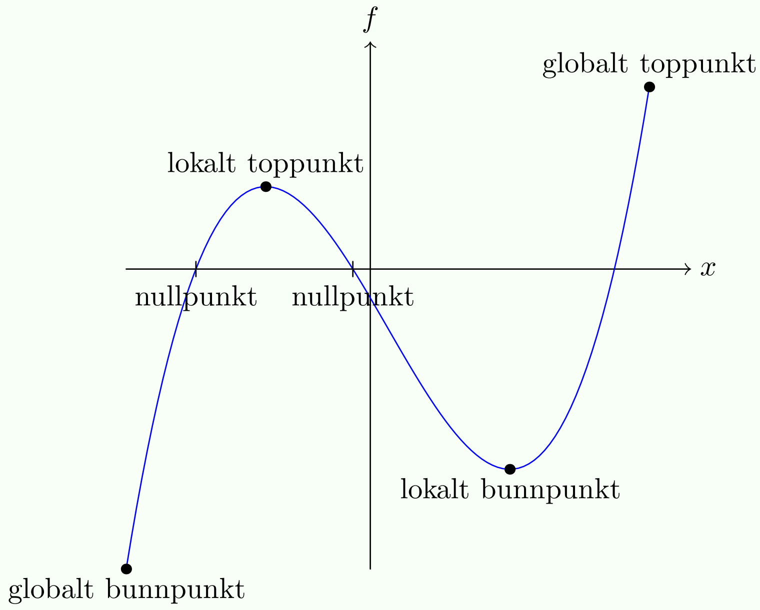
Busselskapa tilbyr altså samm pris viss klassen skal køyre 200 km.

0.2.2 Null-, bunn- og toppunkt

0.2 Null-, bunn- og toppunkt

- **Nullpunkt**
  Ein x-verdi som gir funksjonsverdi 0.
- **Lokalt bunnpunkt**
  Punkt hvor funksjonen (mot høgre) går fra å synke i verdi til å stige i verdi.
- **Lokalt toppunkt**
  Punkt hvor funksjonen (mot høgre) går fra å stige i verdi til å synke i verdi
- **Globalt bunnpunkt**
  Punkt hvor funksjonen har sin laveste verdi.
- **Globalt toppunkt**
  Punkt hvor funksjonen har sin høyeste verdi.

Eksempel



Kvifor er nullpunkt ein verdi?

Det kan kanskje verke litt rart at vi kallar x-verdiar for nullpunkt, punkt har jo både ein x-verdi og eni y-verdi. Men når det er snakk om nullpunkt, er det underforstått at $y = 0$, og da er det tilstrekkeleg å vite x-verdien for å avgjere kva punkt det er snakk om.

0.3 Likningssett

Vi har så langt sett på likningar med eitt ukjend tal, men det kan også vere to eller fleire tal som er ukjende. Som regel er det slik at

- er det to ukjende, trengs minst to likningar for å finne løysingar som er konstantar.
- er det tre ukjende, trengs minst tre likningar for å finne løysingar som er konstantar.

Og slik fortset det. Likningane som gir oss den nødvendige informasjonen om dei ukjende, kallast eit *likningssett*. I denne boka skal vi konsentrere oss om *lineære likninger med to ukjente*, som betyr at likningssettet består av uttrykk for lineære funksjonar.

0.3.1 Innsettingsmetoden

0.3 Innsettingsmetoden

Eit lineært likningssett som består av to ukjende, x og y, kan løses ved å

1. bruke den éine likninga til å finne eit uttrykk for x.
2. sette uttrykket fra punkt 1 inn i den andre likninga, og løyse denne med hensyn på y.
3. sette løysninga for y inn i uttrykket for x.

Merk: I punkta over kan sjølvsagt x og y bytte roller.

Eksempel 1

Løys likningssettet, og sett prøve på svaret.

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

Svar:

Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x &= 5 + y \end{aligned}$$

Vi set dette uttrykket for x inn i (II):

$$\begin{aligned} 5 + y + y &= 9 \\ 2y &= 9 - 5 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Vi set løysinga for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 5 + y \\ &= 5 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Altså er $x = 7$ og $y = 2$.

Vi set prøve på svaret:

$$x - y = 7 - 2 = 5$$

$$x + y = 7 + 2 = 9$$

Eksempel 2

Løs likningssettet

$$7x - 5y = -8 \tag{I}$$

$$5x - 2y = 4x - 5 \tag{II}$$

Svar:

Ved innsettingsmetoden kan ein ofte spare seg for ein del utrekning ved å velge likninga og den ukjende som gir det finaste uttrykket innleiingsvis. Vi observerer at (II) gir et fint uttrykk for x:

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -6 \\ x &= 2y - 5 \end{aligned}$$

Vi set dette uttrykket for x inn i (I):

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -8 \\ 7(2y - 5) - 5y &= -8 \\ 14y - 35 - 5y &= -8 \\ 9y &= 27 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vi set løysinga for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Altså er $x = 1$ og $y = 3$.

Eksempel 3

Løys likningssettet

$$3x - 4y = -2$$

$$9y - 5x = 6x + y \qquad \text{(II)}$$

Svar:

Vi velg her å bruke (I) til å finne eit uttrykk for y:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -2 \\ 3x + 2 &= 4y \\ \frac{3x+2}{4} &= y \end{aligned}$$

Vi set dette uttrykket for y inn i (II):

$$\begin{aligned} 9y - 5x &= 6x + y \\ 9 \cdot \frac{3x+2}{4} - 5x &= 6x + \frac{3x+2}{4} \\ 9(3x+2) - 20x &= 24x + 3x + 2 \\ 27x + 18 - 20x &= 24x + 3x + 2 \\ -20x &= -16 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Vi set løysinga for x inn i uttrykket for y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+2}{4} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{4}{5} + 2}{4} \\ &= \frac{\frac{22}{5}}{4} \\ &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

Altså er $x = \frac{4}{5}$ og $y = \frac{11}{10}$.

Eksempel 4

"Bror min er dobbelt så gamal som meg. Til saman er vi 9 år gamle. Kor gamal er eg?".

Svar:

"Bror min er dobbelt så gamal som meg." betyr at

$$\text{brors alder} = 2 \cdot \text{min alder}$$

"Til saman er vi 9 år gamle." betyr at

$$\text{brors alder} + \text{min alder} = 9$$

Erstattar vi 'brors alder' med "$2 \cdot$ min alder", får vi

$$2 \cdot \text{min alder} + \text{min alder} = 9$$

Altså er

$$\begin{aligned} 3 \cdot \text{min alder} &= 9 \\ \frac{\cancel{3} \cdot \text{min alder}}{\cancel{3}} &= \frac{9}{3} \\ \text{min alder} &= 3 \end{aligned}$$

"Eg" er altså 3 år gammel.

0.3.2 Grafisk metode

0.4 Grafisk løsning av likningssett

Eit lineært likningssett som består av to ukjende, x og y, kan løysast ved å

1. omskrive dei to likningane til uttrykk for to linjer.
2. finne skjæringspunktet til linjene.

Eksempel 1

Løys likningsettet

$$x - y = 5 \qquad \text{(I)}$$

$$x + y = 9 \qquad \text{(II)}$$

Svar:

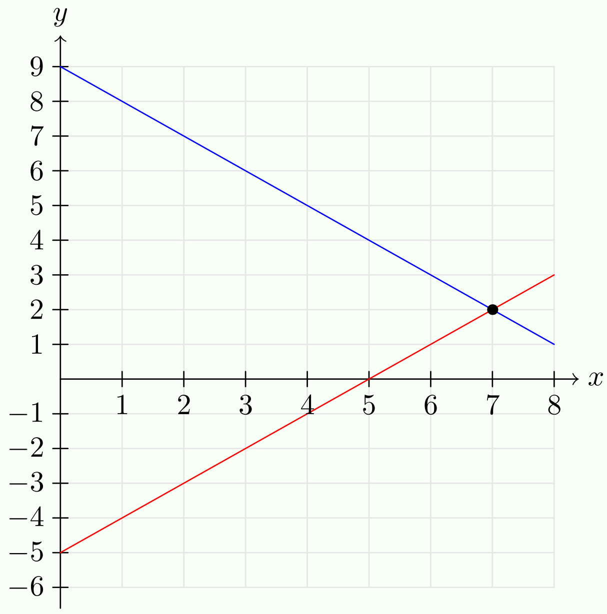
Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ y &= x - 5 \end{aligned}$$

Av (II) har vi at

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y &= 9 - x \end{aligned}$$

Vi teikner desse to linjene inn i eit koordinatsystem:



Altså er $x = 7$ og $y = 2$.