

## Oppgaver for kapittel 0

### 0.2.1

Gitt likningen

$$x^3 + 4x^2 - 5 = 0$$

- a) Hvorfor vil ikke Newtons metode fungere viss du starter med  $x_0 = 0$ ?
- b) Lag et skript som finner tilnærminger for de tre løsningene av likningen. Stopp søket når  $|x_{n+1} - x_1| < 10^{-6}$ .

### 0.3.1

Forklar hvorfor (??) også kan skrives som

$$\int_a^b f \, dx \approx \Delta x \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right)$$

### 0.3.2

I [TM2](#) har vi sett at det bestemte integralet  $I$  av en funksjon  $f(x)$  over intervallet  $[a, b]$  er gitt som

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \tag{1}$$

hvor  $x_i = a + (i - 1)\Delta x$  og  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . La  $I_n$  være tilnærmingen av  $I$  gitt ved å la  $n$  være et gitt tall. Implementer  $I_n$  i et skript, og bruk integralet  $\int_0^1 3x^2 \, dx$  til å sjekke at du får output som forventet.

### 0.3.3

Hvis funksjonen du skal integrere er konkav, vil trapesmetoden gi et overestimat eller et underestimat?

## Gruble 1

Trapesmetoden kan også implementeres slik at delintervallene ikke nødvendigvis har samme bredde. Forklar hvorfor (??) da kan skrives som

$$\int_a^b f \, dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Gitt funksjonen

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sin(\pi x) \quad x \in [0, 2]$$

a) Bruk (for eksempel) GeoGebra til å tegne grafen til  $f$ .

b) Du skal bruke trapesmetoden for å tilnærme  $\int_0^2 f \, dx$ , men får bare lov til å dele  $[0, 2]$  inn i tre delintervaller. Det er naturlig at  $x = 0$  og  $x = 2$  er med i hvert sitt delintervall. Forklar hvorfor de to  $x$ -verdiene som løser likningen

$$x + \pi \cos(\pi x) = 0$$

også er gode kandidater til å være med i delintervallene.

c) Bruk Newtons metode til å finne  $x$ -verdiene du ønsker. Stopp søket når  $|x_n - x_{n+1}| \leq 10^{-6}$ .

## Gruble 2

I MB har vi vist at<sup>1</sup> hvis  $s_n$  er sidelengden til en regulær mangekant med  $n$  sider, innskrevet i en sirkel med radius 1, har vi at

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

- a) Lag et skript som finner sidelengden til en regulær 768-kant når du vet at  $s_6 = 1$ . Bruk  $s_{768}$  til å finne en tilnærmet verdi for omkretsen til en sirkel med radius 1.

- b) Vis at

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

- c) Når man utfører numeriske beregninger er det alltid en utfordring at differansen mellom to tall som er veldig like, blir ”satt” til 0 av datamaskinen. Drøft hvilke av de to gitte uttrykkene for  $s_{2n}$  som er best egnet til en numerisk approksimasjon av  $\pi$ .
- d) Skriv to versjoner av skriptet fra oppgave a), slik at skriptene bruker hvert sitt uttrykk av  $s_{2n}$ . Kjør skriptene med minst 30 iterasjoner. (Hvor mange iterasjoner du må ha for å se noe merkelig avhenger av hvilken datamaskin du bruker).

## Gruble 3

Gitt integralet

$$I = \int_0^2 x^3 - 5x + 6 \, dx$$

La  $I_n$  være integralet tilnærmet ved trapesmetoden med  $n$  delintervaller.

- a) Beregn  $I_{10}$  og  $I_{100}$  og  $I_{1000}$
- b) La  $E_n = I - I_n$
- c) Bruk regresjon til å finne den best tilpassede polynomfunksjonen for punktene  $\left(\frac{1}{n}, E_n\right), n \in [10, 100, 1000]$ .

---

<sup>1</sup>Se forklaringen av omkretsen til en sirkel.