0.1 Kvadratsetningene og fullstendige kvadrat

Regel 0.1 Kvadratsetningene

For to reelle tall a og b er

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(1. kvadratsetning)}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(2. kvadratsetning)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(3. kvadratsetning)}$$

Språkboksen

$(a+b)^2$ og $(a-b)^2$ kalles *fullstendige kvadrat*.

3. kvadratsetning kalles også *konjugatsetningen*.

Eksempel 1

Skriv om $a^2 + 8a + 16$ til et fullstendig kvadrat.

Svar

$$\begin{aligned} a^2 + 8a + 16 &= a^2 + 2 \cdot 4a + 4^2 \\ &= (a+4)^2 \end{aligned}$$

Eksempel ??

Skriv om $k^2 + 6k + 7$ til et uttrykk der alle instanser av k er i et fullstendig kvadrat.

Svar

$$\begin{aligned} k^2 + 6k + 7 &= k^2 + 2 \cdot 3k + 7 \\ &= k^2 + 2 \cdot 3k + 3^2 - 3^2 + 7 \\ &= (k+3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Eksempel ??

Faktoriser $x^2 - 10x + 16$.

Svar

Vi starter med å lage et fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 16 &= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + 16 \\ &= (x-5)^2 - 9 \end{aligned}$$

Vi legger merke til at $9 = 3^2$, og bruker 3. kvadratsetning:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 - 3^2 &= (x-5+3)(x-5-3) \\ &= (x-2)(x-8) \end{aligned}$$

Altså er

$$x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$$

Regel 0.2 a_1a_2-metoden

Gitt $x, b, c \in \mathbb{R}$. Hvis $a_1a_2 = c$ og $a_1 + a_2 = b$, er

$$x^2 + bx + c = (x + a_1)(x + a_2) \tag{1}$$

Eksempel 1

Faktoriser uttrykket $x^2 - x - 6$.

Svar

Siden $2(-3) = -6$ og $2 + (-3) = -1$, er

$$x^2 - 1x - 6 = (x+2)(x-3)$$

Eksempel 2

Faktoriser uttrykket $b^2 - 5b + 4$.

Svar

Siden $(-4)(-1) = 4$ og $(-4) + (-1) = -5$, er

$$b^2 - 5b + 4 = (b-4)(b-1)$$

0.2 Andregradslikninger

Regel 0.3 Andregradslikning uten konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx = 0$$

Likningen kan da faktoriseres til

$$x(ax + b) = 0$$

Altså er

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = -\frac{b}{a}$$

Eksempel 1

Løs likningen

$$2x^2 - 4x = 0$$

Svar

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 0 \\ x(2x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $x = 0$, eller

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Regel 0.4 Andregradslikning med konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

hvor a, b og c er konstanter. Da er x gitt ved abc-formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (abc\text{-formelen}) \tag{3}$$

Hvis $x = x_1$ og x_2 er løsninger gitt av abc-formelen, kan vi skrive

$$ax^2 + bx + x = 0 \tag{4}$$

Eksempel 1

Løs likningen

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

Svar

Vi bruker *abc*-formelen. Da er $a = 2$, $b = -7$ og $c = 5$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Enten er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7+3}{4} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Eller så er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7-3}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$x^2 + 3 - 10 = 0$$

Svar

Vi bruker *abc*-formelen. Da er $a = 1$, $b = 3$ og $c = -10$. Nå får vi at

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm 7}{2}
\end{aligned}
$$

Altså er

$$x = -5 \qquad \vee \qquad x = 2$$

Eksempel 3

Løs likningen

$$4x^2 - 8x + 1$$

Svar

Av *abc*-formelen har vi at

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\
&= \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{8} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Altså er

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

0.3 Navn på funksjoner

Regel 0.5 Potensfunksjoner

Gitt $k, b \in \mathbb{R}$. En funksjon på formen

$$f(x) = kx^m \tag{5}$$

er da en *potensfunksjon* med *koeffisient* k.

Regel 0.6 Polynomfunksjoner

En polynomfunksjon er én av følgende:

- en potensfunksjon med heltalls eksponent større eller lik 0.
- summen av flere potensfunksjoner med heltalls eksponent større eller lik 0.

Polynomfunksjoner kategoriseres etter den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene a, b, c og d, og en variabel x, har vi at

funksjonsuttyrykk	**funksjonsnavn**
$ax + b$	1. grads funksjon/polynom (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. grads funksjon/polynom (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. grads funksjon/polynom (kubisk)

Eksempel 1

a) Skriv uttrykket til et 7. grads polynom med utelukkende heltalls koeffisienter.

b) Skriv uttrykket til et 5. grads polynom med minst én koeffisient uttrykt som et rasjonalt tall.

Svar

a) $4x^7 - 5x^2 + 4$

b) $\frac{2}{7}x^5 - 3$

0.4 Polynomdivisjon

Når to gitte tall ikke er delelige med hverandre, kan vi bruke brøker for å uttrykke kvotienten. For eksempel er

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \tag{6}$$

At likheten over stemmer er også lett å bekrefte ved utregningen

$$\left(5 + \frac{2}{3}\right) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 17$$

Tanken bak (6) er at vi skriver om telleren slik at den delen av 17 som er delelig med 5 framkommer:

$$\frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

Den samme tankegangen om divisjon kan brukes for brøker med polynomer, og da kalles det *polynomdivisjon*:

Eksempel 1

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5}$$

Svar

Metode 1

Vi gjør følgende trinnvis; med den største potensen av x i telleren som utgangspunkt, lager vi uttrykk som er delelige med telleren.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5} &= \frac{2x(x+5) - 10x + 3x - 4}{x + 5} \\
&= 2x + \frac{-7x - 4}{x + 5} \\
&= 2x + \frac{-7(x+5) + 35 - 4}{x + 5} \\
&= 2x - 7 + \frac{31}{x + 5}
\end{aligned}$$

Metode 2 (Se utregningen under punktene)

i) Vi observerer at leddet med den høyste ordenen av x i dividenden er $2x^2$. Dette uttrykket kan vi framkalle ved å multiplisere dividenden med $2x$. Vi skriver $2x$ til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $2x(x+5) = 2x^2 + 10x$.

ii) Differansen fra punkt ii) er $-7x - 4$. Vi kan framkalle leddet med den høyeste ordenen av x ved å multiplisere dividenden med -7. Vi skriver -7 til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $-7(x+5) = -7x - 5$.

iii) Differansen fra punkt iii) er 31. Dette er et uttrykk som har lavere orden av x enn dividenden, og dermed skriver vi $\frac{31}{x+5}$ til høgre for likhetstegnet.

$$
\begin{array}{l}
(2x^2 + 3x - 4) : (x+5) = 2x - 7 + \dfrac{31}{x+5} \\
-\underline{(2x^2 + 10x)} \\
\qquad\qquad -7x - 4 \\
\qquad\quad - \underline{(-7x - 35)} \\
\qquad\qquad\qquad 31
\end{array}
$$

Eksempel 2

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2}$$

Svar

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} &= \frac{x(x^2 - 2) + 2x - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4(x^2 - 2) - 8 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2}
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 9) : (x^2 - 2) = x - 4 + \dfrac{2x + 1}{x^2 - 2} \\
-\underline{(x^3 - 2x)} \\
\qquad\quad -4x^2 + 2x + 9 \\
\quad\; - \underline{(-4x^2 + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad 2x + 1
\end{array}$$

Eksempel 3

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Svar

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} &= \frac{x^2(x-4) + 4x^2 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x(x-4) + 4x - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x + \frac{-2x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x - 2
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = x^2 + x - 2 \\
-\underline{(x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\qquad x^2 - 6x + 8 \\
\qquad - \underline{(-x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad\quad - 2x + 8 \\
\qquad\qquad - \underline{(-2x + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

0.5 Polynomers egenskaper

Eksemplene på side ??-?? peker på noen viktige sammenhenger som gjelder for generelle tilfeller:

Regel 0.7 Polinomdivisjon

La A_k betegne et polynom A med grad k. Gitt polynomet P_m, da fins polynomene Q_n, S_{m-n} og R_{n-1}, hvor $m \geq n > 0$, slik at

$$\frac{P_m}{Q_n} = S_{m-n} + \frac{R_{n-1}}{Q_n} \tag{7}$$

Språkboksen

Hvis $R_{n-1} = 0$, sier vi at P_m er delelig med Q_n.

Regel 0.8 Faktorer i polynomer

Gitt et polynom $P(x)$ og en konstant a. Da har vi at

$$P \text{ er delelig med } x - a \iff P(a) = 0 \tag{8}$$

Hvis dette stemmer, fins det et polynom $S(x)$ slik at

$$P = (a - x)S \tag{9}$$

Eksempel 1

Gitt polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

a) Vis at $x = 1$ løser likningen $P = 0$.

b) Faktoriser P.

Svar

a) Vi undersøker $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $P = 0$ når $x = 1$.

b) Siden $P(1) = 0$, er $x - 1$ en faktor i P. Ved polynomdivisjon (se s.??-??) finner vi at

$$P = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)$$

Da $2(-4) = -8$ og $-4 + 2 = -2$, er

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$

Dette betyr at

$$P = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

0.6 Logaritmer

I MB så vi på potenstall, som består av et grunntall og en eksponent. En *logaritme* er en matematisk operasjon relativ til et tall. Hvis en logaritme er relativ til grunntallet til en potens, vil operasjonen resultere i ekspontenten.

La oss skrive logaritmen relativ til 10 som $\log_{10}$, da er for eksempel

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

Videre er

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Følelig kan vi også skrive

$$10^3 = 10^{\log_{10} 1000}$$

Med potensreglene som ugangspunkt (se MB), kan man utlede mange regler for logartimer.

Regel 0.9 Definisjon av logaritmen

La $\log_a$ betegne logaritmen relativ til $a \in \{\mathbb{R} | a \neq 0\}$. For $m \in \mathbb{R}$ er da

$$\log_a a^m = m \tag{10}$$

Alternativt kan vi skrive

$$m = a^{\log_a m} \tag{11}$$

Regel 0.10 Logaritmeregler

Gitt de reelle tallene a, x og y, alle forskjellige fra 0. Da er

$$\log_a a = 1 \tag{12}$$

$$\log_a 1 = 0 \tag{13}$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \tag{14}$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \tag{15}$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \tag{16}$$

Språkboksen

$\log_{10}$ skrives ofte bare som $\log$.

$\log_e$ skrives ofte som $\ln$. (Se ?? for mer om tallet e.)

Eksempel ?

Løs likningen

$$4e^x - 8 = 16$$

Svar

$$\begin{aligned} 4e^x &= 24 \\ e^x &= 6 \\ \ln e^x &= \ln 6 \\ x &= \ln 6 \end{aligned}$$

0.7 Å løse likninger ved bytte av variabel

La oss løse likningen

$$x - 11\sqrt{x} + 28 = 0 \tag{17}$$

Hvis vi ser nøye etter, innser vi at dette er en andregradslikning for $\sqrt{x}$. Enda tydeligere blir dette hvis vi definerer variabelen $u = \sqrt{x}$, da kan vi skrive (17) som

$$u^2 - 11u + 28 = 0$$

Siden $(-7) \cdot (-4) = 28$ og $-7 - 4 = -11$, har vi av (1) at

$$(u - 4)(u - 7) = 0$$

Altså er

$$u = 4 \qquad \vee \qquad u = 7$$

Dette betyr at

$$\sqrt{x} = 4 \qquad \vee \qquad \sqrt{x} = 7$$

Dermed er

$$x = 16 \qquad \vee \qquad x = 49$$

0.8 Forklaringer

Andregradslikninger (forklaring)

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi starter med å omskrive likningen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Så lager vi et fullstendig kvadrat, og anvdender konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Uttrykket over er lik 0 når

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \vee \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logaritmerregler (forklaring)

Likning (12)

$$\log_a a = \log_a a^1 = 1$$

Likning (13)

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$$

Likning (14)

For $m, n \in \mathbb{R}$, har vi at

$$\begin{aligned} \log_a a^{m+n} &= m + n \\ &= \log_a a^m + \log_a a^n \end{aligned}$$

Vi setter[1] $x = a^m$ og $y = a^n$. Siden $\log_a a^{m+n} = \log_a(a^m \cdot a^n)$, her da

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Likning (15)
Ved å undersøke $\log_a a^{m-n}$, og ved å sette $y = a^{-n}$, blir forklaringen tilsvarende den gitt for likning (14).

Likning (16)

Siden $x = a^{\log_a x}$ og $\left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}$ (se potensregler i MB), har vi at

$$\begin{aligned} \log_a x^y &= \log_a a^{y \log_a x} \\ &= y \log_a x \end{aligned}$$

[1] Vi tar det her for gitt at ethvert reelt tall forskjellig fra 0 kan uttrykkes som et potenstall.

Polynomdivisjon (0.7) (forklaring)

Gitt polynomene

$$P_m \quad \text{hvor } ax^m \text{ er leddet med høyest grad}$$
$$Q_n \quad \text{hvor } bx^n \text{ er leddet med høyest grad}$$

Da kan vi skrive

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n - \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m \tag{18}$$

Polynomet $-\frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$ må nødvendigvis ha grad lavere eller lik $m-1$. Vi kaller dette polynomet U, og får at

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + U \tag{19}$$

Dermed er

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{a}{b}x^{m-n} + \frac{U}{Q_n} \tag{20}$$

Vi kan nå stadig gjenta prosedyren fra (18) og (19), hvor høgresiden i (20) får ledd med grad stadig mindre enn $m-n$, fram til polynomet i telleren på høgresiden får grad $n-1$.

Faktorisering av polynom (forklaring)

(i) Vi starter med å vise at

Hvis P er delelig med $x-a$ er $x=a$ en løsning for $P=0$.

For et polynom S har vi av (7) at

$$\frac{P}{x-a}=S$$
$$P=(x-a)S$$

Da er åpenbart $x=a$ en løsning for likningen $P=0$.

(ii) Vi går over til å vise at

Hvis $x=a$ er en løsning for $P=0$, er P delelig med $x-a$.

For polynomene S og R

$$\frac{P}{x-a}=S+\frac{R}{x-a}$$
$$P=(x-a)S+R$$

Siden $x-a$ har grad 1, må R ha grad 0, og er dermed en konstant. Hvis $P(a)=0$, er

$$0=R$$

Altså er P delelig med $x-a$.