0.1 Mengder

En samling av tall kalles en **mengde**[1], og et tall som er en del av en mengde kalles et **element**. Mengder kan inneholde et endelig antall elementer og de kan inneholde uendelig mange elementer.

0.1 Mengder

For to tall a og b, hvor $a \leq b$, har vi at

$[a, b]$	er mengden av alle tall større eller lik a og mindre eller lik b.
$(a, b]$	er mengden av alle tall større enn a og mindre eller lik b.
$[a, b)$	er mengden av alle reelle tall større eller lik a og mindre enn b.

$[a, b]$ kalles et **lukket intervall**, (a, b) kalles et **åpent intervall**, og både $(a, b]$ og $[a, b)$ kalles **halvåpne intervall**.

Mengden som inneholder bare a og b skrives som $\{a, b\}$.

At x er et element i en mengde M skrives som $x \in M$.

At x *ikke* er et element i en mengde M skrives som $x \notin M$.

At mengden M består av mengdene M_1 og M_2 skrives som $M = M_1 \cup M_2$.

Språkboksen

$x \in M$ uttales "x inneholdt i M".

Mange tekster bruker $\langle$ istedenfor $($ for å indikere åpne (eller halvåpne) intervall.

Merk

Når vi heretter i boka definerer et intervall beskrevet av a og b, tar vi det for gitt at a og b er to tall, og at $a \leq b$.

[1] En mengde kan også være en samling av andre matematiske objekter, som for eksempel funksjoner, men i denne boka holder det å se på mengder av tall.

Eksempel 1

Mengden av alle heltall større enn 0 og mindre enn 10 kan vi skrive som

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Denne mengden inneholder 9 elementer. 3 er et element i denne mengden, og da kan vi skrive $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

10 er ikke et element i denne mengden, og da kan vi skrive $10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Eksempel 2

I uttrykket $0 \ ? \ x \ ? \ 1$, erstatt ? med et ulikhetssymbol slik at uttrykket gjelder for alle $x \in M$, og om 1 er inneholdt i M.

a) $M = [0, 1]$

b) $M = (0, 1]$

c) $M = [0, 1)$

Svar

a) $0 \leq x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

b) $0 < x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

c) $0 \leq x < 1$. Videre er $1 \notin M$.

0.2 Navn på mengder

$\mathbb{N}$	Mengden av alle positive heltall[1]
$\mathbb{Z}$	Mengden av alle heltall[2]
$\mathbb{Q}$	Mengden av alle rasjonale tall
$\mathbb{R}$	Mengden av alle reelle tall
$\mathbb{C}$	Mengden av alle komplekse tall

[1]Inneholder *ikke* 0.

[2]Inneholder 0.

Symbolet for uendelig

Mengdene i definisjon 0.2 inneholder uendelig mange elementer. Noen ganger ønsker vi å avgrense deler av en uendelig mengde, og da melder det seg et behov for et symbol som er med på å symbolisere dette. ∞ er symbolet for en uendelig stor, positiv verdi.

Eksempel

Et vilkår om at $x \geq 2$ kan vi skrive som $x \in [2, \infty)$.

Et vilkår om at $x < -7$ kan vi skrive som $x \in (-\infty, -7)$.

Språkboksen

De to intervallene i eksempelet over kan også skrives som $[2, \rightarrow)$ og $(\leftarrow, -7)$.

Merk

∞ er ikke noe bestemt tall. Å bruke de fire grunnleggende regneartene alene med dette symbolet gir derfor ingen mening.

0.2 Verdi- og definisjonsmengder

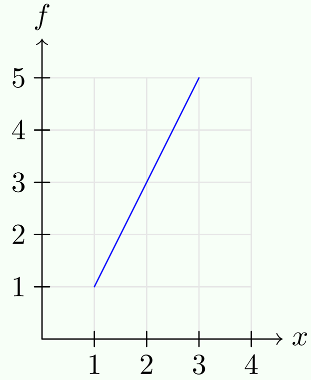
0.3 Verdi- og definisjonsmengder

Gitt en funksjon $f(x)$.

- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier x kan ha, er **definisjonsmengden** til f. Denne mengden skrives som D_f.
- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier f kan ha når $x \in D_f$, er **verdimengden** til f. Denne mengden skrives som V_f.

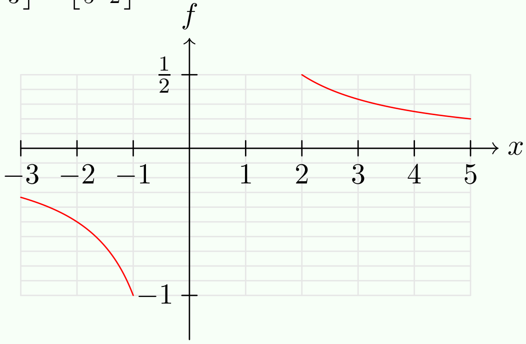
Eksempel 1

Figuren under viser $f(x) = 2x + 1$, hvor $D_f = [1, 3]$. Da er $V_f = [1, 5]$.



Eksempel 2

Figuren under viser $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $D_f = [-3, -1] \cup [2, 5]$. Da er $V_f = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$.



Merk

Definisjonsmengden til en funksjon bestemmes av to ting; hvilken sammenheng funksjonen skal brukes i, og eventuelle verdier som gir et udefinert funksjonsuttrykk. I *Eksempel 1* på side 4 er definisjonsmengden helt vilkårlig valgt, siden funksjonen er definert for alle x. I *Eksempel 2* derimot er ikke funksjonen definert for $x = 0$, så en definisjonsmengde som inneholdt denne verdien for x ville ikke gitt mening.

0.3 Vilkår

Symbolet $\Rightarrow$ bruker vi for å vise til at hvis et vilkår er oppfylt, så er et annet (eller flere) vilkår også oppfylt. For eksempel; i MB så vi at hvis en trekant er rettvinklet, er Pytagoras' setning gyldig. Dette kan vi skrive slik:

$$\text{trekanten er rettvinklet} \Rightarrow \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Men vi så også at det omvendte gjelder; hvis Pytagoras' setning er gyldig, må trekanten være rettvinklet. Da kan vi skrive

$$\text{trekanten er rettvinklet} \iff \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Det er veldig viktig å være bevisst forskjellen på $\Rightarrow$ og $\iff$; at vilkår A oppfylt gir B oppfylt, trenger ikke å bety at vilkår B oppfylt gir vilkår A oppfylt!

Eksempel 1

$$\text{firkanten er et kvadrat} \Rightarrow \text{firkanten har fire like lange sider}$$

Eksempel 2

$$\text{tallet er et primtall større enn 2} \Rightarrow \text{tallet er et oddetall}$$

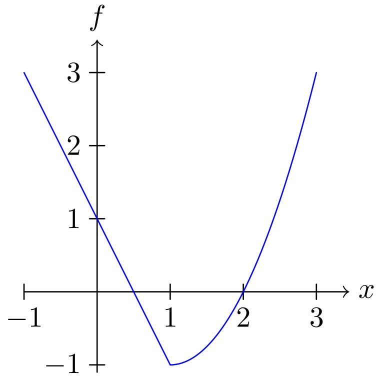
Eksempel 3

$$\text{tallet er et partall} \iff \text{tallet er delelig med 2}$$

Funksjoner med vilkår

Funksjoner kan gjerne ha flere uttrykk som gjelder ved forskjellige vilkår. La oss for eksempel definere en funksjon $f(x)$ slik:

$$\text{For } x < 1 \text{ er funksjonsuttrykket } -2x+1$$
$$\text{For } x \geq 1 \text{ er funksjonsuttrykket } x^2-2x$$



Figur 1: Grafen til f på intervallet $[-1, 3]$.

Dette kan vi skrive som

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & , \quad x < 1 \\ x^2-2x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$