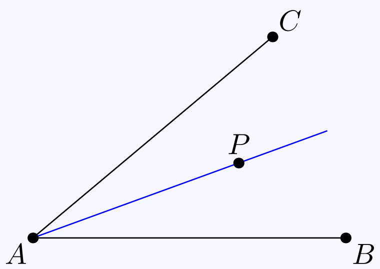
0.1 Definisjoner

0.1 Halveringslinje

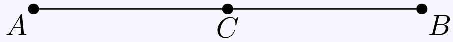
Gitt $\angle BAC$. For et punkt P som ligger på *halveringslinja* til vinkelen, er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC$$



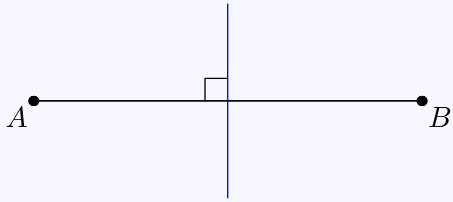
0.2 Midtpunkt

Midtpunktet C til AB er punktet på linjestykket som er slik at $AC = CB$.



0.3 Midtnormal

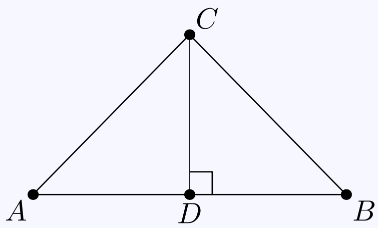
Midtnormalen til AB står normalt på, og går gjennom midtpunktet til, AB.



0.2 Egenskaper til trekanter

0.4 Midtnormal i likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$, hvor $AC = BC$, som vist i figuren under.



Høgda DC ligger da på midtnormalen til AB.

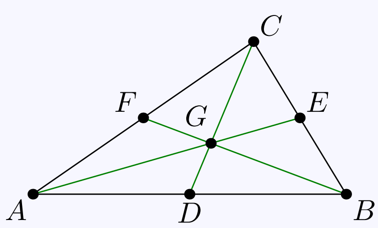
0.4 (forklaring)

Da både $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ er rettvinklede, har CD som korteste katet, og $AC = BC$, følger det av Pytagoras' setning at $AD = BD$.

0.5 Medianer i trekanter

En *median* er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

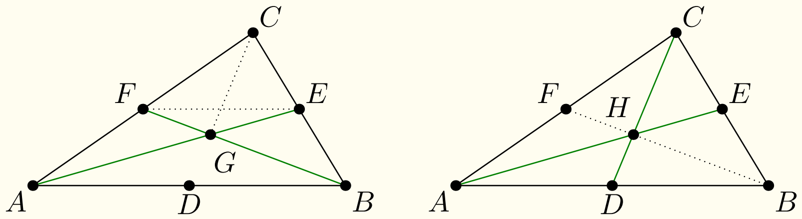
De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.



Gitt $\triangle ABC$ med medianer CD, BF og AE, som skjærer hverandre i G. Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

0.5 (forklaring)



(a) (b)

Vi lar G være skjæringspunktet til BF og AE, og tar det for gitt at dette ligger inne i $\triangle ABC$. Da $AF = \frac{1}{2}AC$ og $BE = \frac{1}{2}BC$, er $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$. Dermed har F og E lik avstand til AB, som betyr at $FE \parallel AB$. Videre har vi også at

$$\begin{aligned} ABG + AFG &= ABG + BGE \\ AFG &= BGE \end{aligned}$$

G har lik avstand til AF og FC, og $AF = FC$. Dermed er $AFG = GFC$. Tilsvarende er $BGE = GEC$. Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$\begin{aligned} AFG + GFC + GEC &= AEC \\ GEC &= \frac{1}{6}ABC \end{aligned}$$

La H være skjæringspunktet til AE og CD. Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både $\triangle GEC$ og $\triangle HEC$ har CE som side, likt areal, og både G og H ligger på AE, må $G = H$. Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

$\triangle ABG \sim \triangle EFG$ fordi $\angle EGF$ og $\angle AGB$ er toppvinkler og $AB \parallel FE$. Dermed er

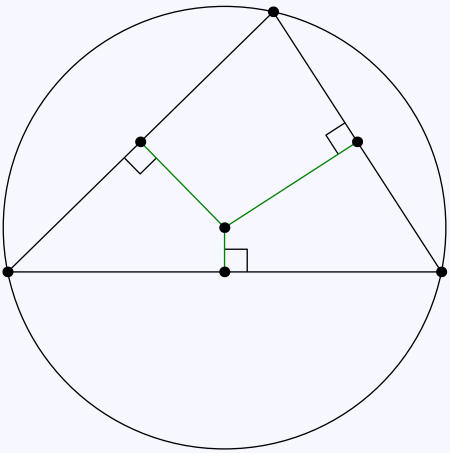
$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

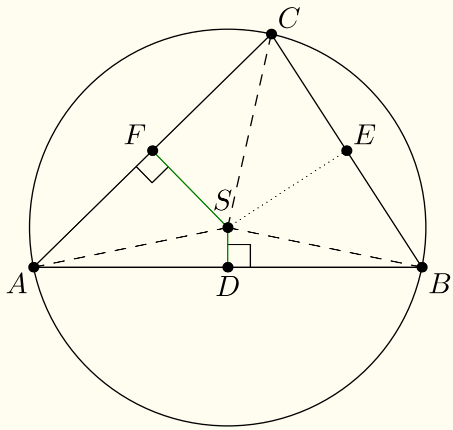
$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

0.6 Midtnormaler i trekanter

Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i sirkelen som har hjørnene til trekanten på sin bue.



0.6 (forklaring)

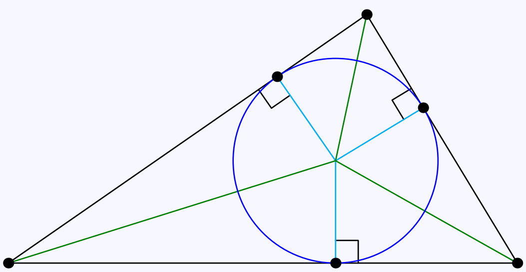


Gitt $\triangle ABC$ med midtpunktene D, E og F. Vi lar S være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til AC og AB. $\triangle AFS \sim \triangle CFS$ fordi begge er rettvinklede, begge har FS som korteste katet, og $AF = FC$. Tilsvarende er $\triangle ADS \sim \triangle BDS$. Følgelig er $CS = AS = BS$. Dette betyr at

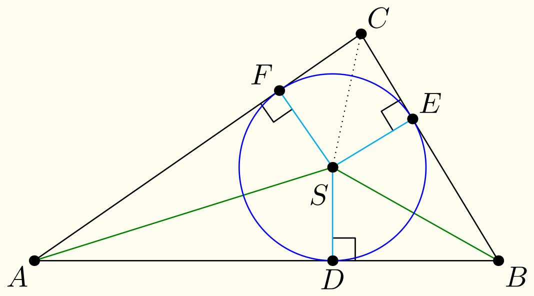
- $\triangle BSC$ er likebeint, og da går midtnormalen til BC gjennom S.
- A, B og C må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum S og radius $AS = BS = CS$

0.7 Halveringslinjer og innskrevet sirkel i trekanter

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den *innskrevne* sirkelen, som tangerer hver av sidene i trekanten.



0.7 (forklaring)



Gitt $\triangle ABC$. Vi lar S være skjæringspunktet til de respective halveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle CBA$. Videre plasserer vi D, E og F slik at $DS \perp AB$, $ES \perp BC$ og $FS \perp AC$. $\triangle ASD \cong \triangle ASF$ fordi begge er rettvinklede og har hypotenus AS, og $\angle DAS = \angle SAF$. Tilsvarende er $\triangle BSD \cong \triangle BSE$. Dermed er $SE = SD = SF$. Følgelig er F, C og E de respektive tangeringspunktene til AB, BC og AC og sirkelen med sentrum S og radius SE.

Videre har vi at $\triangle CSE \cong \triangle CSF$, fordi begge er rettvinklede og har hypotenus CS, og $SF = SE$. Altså er $\angle FCS = \angle ECS$, som betyr at CS ligger på halveringslinja til $\angle ACB$.