0.1 Andregradslikningar

Den mest klassiske potenslikninga av dem alle er *andregradslikninga*. Vi skal se på to sorter, som vi løser på litt forskjellige måter.

0.1.1 $ax^2 + bx = 0$

0.1 Andregradslikning uten konstantledd

Gitt likninga

$$ax^2 + bx = 0$$

Likninga kan da faktoriseres til

$$x(ax + b) = 0$$

Altså er

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = -\frac{b}{a}$$

Eksempel 1

Løys likninga

$$2x^2 - 4x = 0$$

Svar

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 0 \\ x(2x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $x = 0$ eller

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

0.1.2 $ax^2 + bx + c = 0$

0.2 Andregradslikning med konstantledd

Gitt likninga

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hvor a, b og c er konstanter. Da er x gitt ved abc-formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eksempel 1

Løys likninga

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

Svar

Vi bruker abc-formelen. Da er $a = 2$, $b = -7$ og $c = 5$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Enten er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + 3}{4} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Eller så er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 - 3}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$x^2 + 3 - 10 = 0$$

Svar

Vi bruker abc-formelen. Da er $a = 1$, $b = 3$ og $c = -10$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = -5 \qquad \vee \qquad x = 2$$

0.2 Ligninger med flere ukjente

Hvis vi har to ukjente størrelser x og y, kan vi finne verdien til begge dersom vi har to forskjellige likningar:

Eksempel 1

Finn x og y gitt av de to likningae under

$$x + y = 8 \tag{I}$$

$$6x + 3y = 33 \tag{II}$$

Svar

Vi starter med å løse én av likningae med hensyn på én av de ukjente. I dette tilfellet velger vi å løse likning (I) med hensyn på x:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x &= 8 - y \end{aligned}$$

Dette uttrykket for x setter vi nå inn i likning (II):

$$\begin{aligned} 6(8 - y) + 3y &= 33 \\ 48 - 6y + 3y &= 33 \\ 15 &= 3y \\ 5 &= y \end{aligned}$$

Denne verdien for y setter vi inn i likning (I):

$$\begin{aligned} x + 5 &= 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Altså er $x = 3$ og $y = 5$.

Eksempel 2

Finn x og y gitt av de to likningae under

$$3x + 2y = 32 \tag{I}$$

$$2x + y = 18 \tag{II}$$

Svar

Vi velger her å først løse likning (II) med hensyn på y:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ y &= 18 - 2x \end{aligned}$$

Dette uttrykket fot y setter vi inn i likning (I):

$$\begin{aligned} 3x + 2(18 - 2x) &= 32 \\ 3x + 36 - 4x &= 32 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Denne verdien for x setter vi inn i likning (II):

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 + y &= 18 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Altså er $x = 4$ og $y = 10$.

0.3 Forklaringar

Andregradslikningar (forklaring)

Gitt likninga

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi startar med å omskrive likninga:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Så lagar vi eit fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Uttrykket over er lik 0 når

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \vee \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$