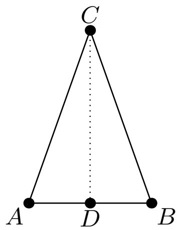
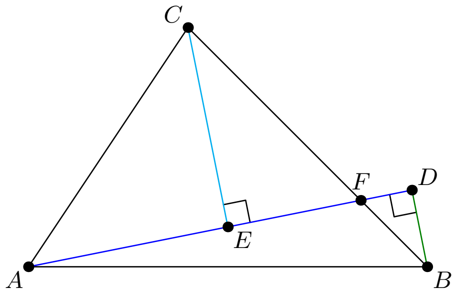
Oppgaver for kapittel 0

Gruble ??



Vi lar D være punktet der halveringslinja til $\angle ACB$ skjærer AB. $\triangle DAC \cong \triangle DBC$ fordi de har CD felles og $AC = BC$ (trekantene oppfyller altså vilkår iii for formlikhet, og må da være kongruente). Følgelig er $\angle BDA = \angle ADC$, og da er $2\angle DBA = 180°$. Altså er $\angle DBA = 90°$, og da $AD = BD$, ligger DC på midtnormalen til AB.

Gruble ??



$\triangle EFC \sim \triangle DFB$ fordi begge er rettvinklede, og $\angle CFE = \angle BFD$ (de er toppvinkler). Dermed har vi at

$$\frac{EF}{CE} = \frac{FD}{BD} \tag{1}$$

Videre er

$$EF + FD = AD - AE \tag{2}$$

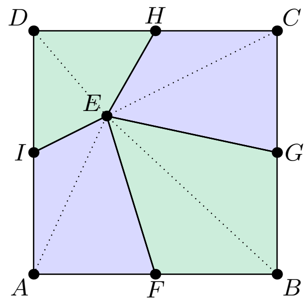
Ved å løse likningssettet vi får av (1) og (2), med hensyn på EF og ED, får vi at

$$EF = \frac{AD - AE}{CE + BD} CE \qquad , \qquad FD = \frac{AD - AE}{CE + BD} BD$$

Det doble arealet til $\triangle ABC$ er gitt som

$$\begin{aligned}
&(AE + EF)CE + (AD - FD)BD \\
&\qquad = \left(AE + \frac{AD - AE}{CE + BD} CE\right) CE + \left(AD - \frac{AD - AE}{CE + BD} BC\right) BD \\
&= \frac{1}{CE + BD} \left[(AE \cdot BD + AD \cdot CE)\, CE + (AD \cdot CE + AE \cdot BD)\, BD\right] \\
&= AD \cdot CE + AE \cdot BD
\end{aligned}$$

Gruble ??



Av å legge merke til trekanter med grunnlinje og høgde av lik lengde, finner vi at

$$A_{\triangle AFE} = A_{\triangle FBE} \qquad A_{\triangle AIE} = A_{\triangle EDI}$$

$$A_{\triangle BCE} = A_{\triangle GCE} \qquad A_{\triangle HDE} = A_{\triangle HCE}$$

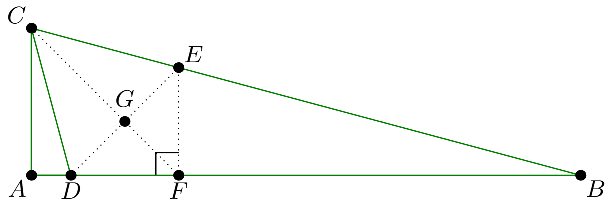
Følgelig er

$$(A_{\triangle AFE} + A_{\triangle AIE}) + (A_{\triangle BCE} + A_{\triangle HDE}) = (A_{\triangle FBE} + A_{\triangle EDI}) + (A_{\triangle GCE} + A_{\triangle HCE})$$
$$A_{\square AFEI} + A_{\square GCHE} = A_{\square FBGE} + A_{\square DIEH}$$

Altså er arealet til det blåfargede området er det samme som arealet til det grønnfargede området.

Gruble ??

a) **Alternativ 1**



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$. Videre lar vi E være punktet på BC slik at $CD = CE$, da er $\triangle CDE$ likesidet. Vi setter $s = CD$. Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle CBD$ er $\angle BDC = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 105^\circ$, og da er $\angle FDE = 45^\circ$. Altså er $\triangle DFE$ rettvinklet og likebeint, som betyr at $DF = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Altså er

$$CF = CG + GF = \frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{s}{2}$$

Vi uttrykker det doble arealet til $\triangle DFC$ på to måter:

$$\begin{aligned} DF \cdot CA &= GD \cdot CF \\ \frac{s}{\sqrt{2}}b &= \frac{s}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{s}{2}\right) && (s \neq 0) \\ 4b &= s(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \\ s &= \frac{4b}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \end{aligned}$$

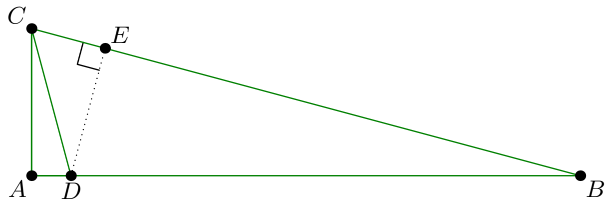
Da $\triangle ABC \sim \triangle BFE$, er

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{BE}{EF} \\ \frac{a}{b} &= \frac{a - s}{\frac{s}{\sqrt{2}}} \\ sa - a\sqrt{2} &= -bs\sqrt{2} \\ \frac{a}{b} &= s\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b - s} \end{aligned}$$

Altså er

$$\frac{a}{b} = \frac{4b}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b - \frac{4b}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

Alternativ 2



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$, og dermed er $\triangle CDE$ en 30°, 60°, 90° trekant. Vi setter $s = CE$ og $c = AB$. Da er $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ og $CE = \frac{s}{2}$. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle EBD$ fordi alle er rettvinklede og har en vinkel lik 15°. Dermed er

$$CD \cdot AB = BC \cdot AC$$
$$cs = ab$$

Videre har vi at

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DE}$$
$$\frac{c}{b} = \frac{a - \frac{s}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}s}$$
$$c = \frac{2ab - s}{\sqrt{3}s}$$
$$\sqrt{3}c = 2c - b$$

Altså er

$$c = \frac{b}{2 - \sqrt{3}} = b(2 + \sqrt{3})$$

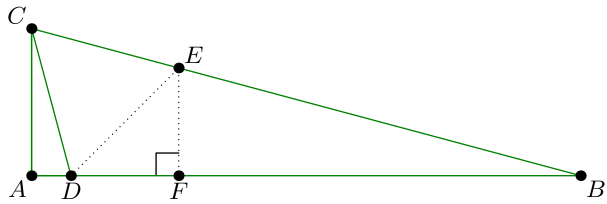
Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ABC$ er

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = b^2(2 + \sqrt{3})^2 + b^2$$
$$\frac{a^2}{b^2} = 8 + 4\sqrt{3}$$

Da $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$, er

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

Alternativ 3



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15° = 75°$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15°$. Da er $\angle CDA = 75°$ og $\angle DCE = 60°$. Videre lar vi E være punktet på BC slik at $CD = CE$, da er $\triangle CDE$ likesidet. Vi setter $s = CD$, og $c = AB$. $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ fordi begge er rettvinklede, og $\angle ACD = \angle ABC$. Dermed er

$$AD = AC\frac{AC}{AB} = \frac{b^2}{c}$$

$$s = BC\frac{AC}{AB} = \frac{ab}{c}$$

Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle CBD$ er $\angle BDC = 180° - 15° - 60° = 105°$, og da er $\angle FDE = 45°$. Altså er $\triangle DFE$ rettvinklet og likebeint, som betyr at $DF = FE = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Da $\triangle ABC \sim FBE$, er $\triangle ACD \sim \triangle FBE$, og dermed er

$$\begin{aligned} EF \cdot CD &= AD \cdot EB \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ab}{c}\right)^2 &= \frac{b^2}{c}\left(a - \frac{ab}{c}\right) \qquad (a,b \neq 0) \\ a &= c\sqrt{2} - b\sqrt{2} \end{aligned}$$

Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ABC$ har vi at $c^2 = a^2 - b^2$, og følgelig er

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2} - b\sqrt{2} \\ a + b\sqrt{2} &= \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2} \\ a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 &= 2(a^2 - b^2) \\ -a^2 + 2ab\sqrt{2} + 4b^2 &= 0 \end{aligned}$$

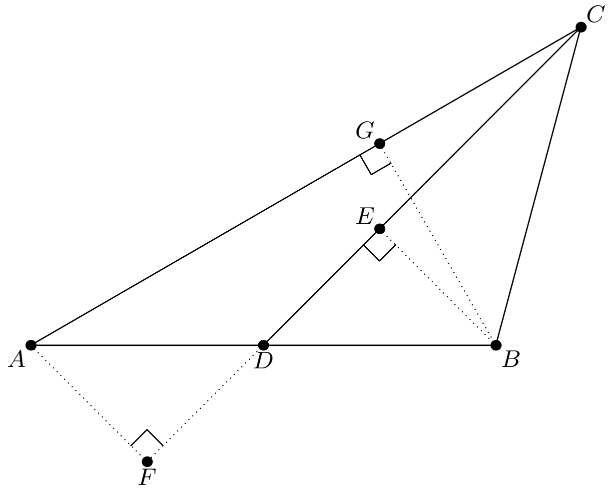
Av abc-formelen har vi at

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2b\sqrt{2} \pm \sqrt{8b^2 + 16b^2}}{-2} \\ &= \left(\sqrt{2} \mp \sqrt{6}\right) b \end{aligned}$$

Vi forkaster den negative løsningen for a, og får at

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

b)



$A_{\triangle DBC} = A_{\triangle ADC}$ fordi med henholdsvis DB og AD som grunnlinje har de lik høgde, og $DB = AD$. Altså er $AF \cdot DC = EB \cdot DC$, og da er $AF = EB$. Videre er $\triangle DAF \cong \triangle DBE$ fordi begge er rettvinklede $\angle ADF = \angle BDE$ (de er toppvinkler), og $AD = DB$. Vi setter $x = DE$, $a = EB$ og $b = AC$. Da $\triangle BCE$ er en 30°, 60°, 90° trekant, er $EC = \sqrt{3}a$ og $BC = 2a$. Da $\triangle BGC$ er en 45°, 45° , 90° trekant, er $GB = \frac{2}{\sqrt{2}}a$. Da $A_{\triangle ABC} = 2A_{\triangle DBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} b \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}a &= 2(\sqrt{3}a + x) \cdot a \\ b &= \sqrt{2}(\sqrt{3}a + x) \end{aligned}$$

Av løsningen i oppgave a) har vi at $AC = (\sqrt{2} + \sqrt{6})AF$, og dermed er $b = a\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$. Altså er $x = a$, som betyr at $\triangle AFD$ er en 45°, 45°, 90° trekant. Ved å betrakte vinkelsummen i $\triangle CAF$, finner vi da at

$$\begin{aligned} \angle DAC &= 180^\circ - 15^\circ - 90^\circ - 45^\circ \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

Alternativ metode for å vise at $x = a$

Av Pytagoras' setning på $\triangle ACD$ har vi at

$$\begin{aligned} AC^2 &= FC^2 + AF \\ 2(\sqrt{3}a + x)^2 &= (\sqrt{3}a + 2x)^2 + a^2 \\ x^2 &= a^2 \end{aligned}$$