## 0.1 Mengder

### 0.1.1 Definisjon

En samling av tall kalles en **mengde**<sup>1</sup>, og et tall som er en del av en mengde kalles et **element**. Mengder kan inneholde et endelig antall elementer og de kan inneholde uendelig mange elementer.

#### 0.1 Mengder

For to tall a og b, hvor  $a \leq b$ , har vi at

- [a, b] er mengden av alle tall større eller lik a og mindre eller lik b.
- (a, b] er mengden av alle tall større enn a og mindre eller lik b.
- [a,b) er mengden av alle reelle tall større eller lik a og mindre enn b.

[a,b] kalles et **lukket intervall**, (a,b) kalles et **åpent intervall**, og både (a,b] og [a,b) kalles **halvåpne intervall**.

Mengden som inneholder bare a og b skrives som  $\{a, b\}$ .

At x er et element i en mengde M skrives som  $x \in M$ .

At x ikke er et element i en mengde M skrives som  $x \notin M$ .

At mengden M består av mengdene  $M_1$  og  $M_2$  skrives som  $M = M_1 \cup M_2$ .

## Språkboksen

 $x \in M$  uttales "x inneholdt i M".

Mange tekster bruker ( istedenfor ( for å indikere åpne (eller halvåpne) intervall.

#### Merk

Når vi heretter i boka definerer et intervall beskrevet av a og b, tar vi det for gitt at a og b er to tall, og at  $a \le b$ .

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>En mengde kan også være en samling av andre matematiske objekter, som for eksempel funksjoner, men i denne boka holder det å se på mengder av tall.

### Eksempel 1

Mengden av alle heltall større enn 0 og mindre enn 10 kan vi skrive som

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Denne mengden inneholder 9 elementer. 3 er et element i denne mengden, og da kan vi skrive  $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 

10 er ikke et element i denne mengden, og da kan vi skrive  $10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$ 

### Eksempel 2

I uttrykket 0 ? x ? 1, erstatt ? med et ulikhetssymbol slik at uttrykket gjelder for alle  $x \in M$ , og om 1 er inneholdt i M.

- a) M = [0, 1]
- b) M = (0, 1]
- c) M = [0, 1)

#### Svar

- a)  $0 \le x \le 1$ . Videre er  $1 \in M$ .
- b)  $0 < x \le 1$ . Videre er  $1 \in M$ .
- c)  $0 \le x < 1$ . Videre er  $1 \notin M$ .

### 0.2 Navn på mengder

- $\mathbb{N}$  Mengden av alle positive heltall<sup>1</sup>
- $\mathbb{Z}$  Mengden av alle heltall<sup>2</sup>
- Q Mengden av alle rasjonale tall
- $\mathbb{R}$  Mengden av alle reelle tall
- $\mathbb{C}$  Mengden av alle komplekse tall

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Inneholder ikke 0.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Inneholder 0.

#### 0.1.2 Symbolet for uendelig

Mengdene i definisjon 0.2 inneholder uendelig mange elementer. Noen ganger ønsker vi å avgrense deler av en uendelig mengde, og da melder det seg et behov for et symbol som er med på å symbolisere dette.  $\infty$  er symbolet for en uendelig stor, positiv verdi.

#### Eksempel

Et vilkår om at  $x \geq 2$  kan vi skrive som  $x \in [2, \infty)$ .

Et vilkår om at x < -7 kan vi skrive som  $x \in (-\infty, -7)$ .

#### Språkboksen

De to intervallene i eksempelet over kan også skrives som  $[2, \rightarrow)$  og  $(\leftarrow, -7)$ .

#### Merk

er ikke noe bestemt tall. Å bruke de fire grunnleggende regneartene alene med dette symbolet gir derfor ingen mening.

## 0.1.3 Verdi- og definisjonsmengder

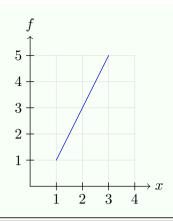
## 0.3 Verdi- og definisjonsmengder

Gitt en funksjon f(x).

- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier x kan ha, er **definisjonsmengden** til f. Denne mengden skrives som  $D_f$ .
- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier f kan ha når  $x \in D_f$ , er **verdimengden** til f. Denne mengden skrives som  $V_f$ .

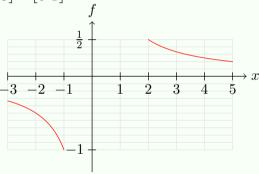
## Eksempel 1

Figuren under viser f(x) = 2x + 1, hvor  $D_f = [1, 3]$ . Da er  $V_f = [1, 5]$ .



# Eksempel 2

Figuren under viser  $f(x) = \frac{1}{x}$ , hvor  $D_f = [-3, -1] \cup [2, 5]$ . Da er  $V_f = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$ .



### Merk

Definisjonsmengden til en funksjon bestemmes av to ting; hvilken sammenheng funksjonen skal brukes i, og eventuelle verdier som gir et udefinert funksjonsuttrykk. I *Eksempel 1* på side 3 er definisjonsmengden helt vilkårlig valgt, siden funksjonen er definert for alle x. I *Eksempel 2* derimot er ikke funksjonen definert for x=0, så en definisjonsmengde som inneholdt denne verdien for x ville ikke gitt mening.

#### 0.2 Vilkår

### 0.2.1 Symboler for vilkår

Symbolet  $\Rightarrow$  bruker vi for å vise til at hvis et vilkår er oppfylt, så er et annet (eller flere) vilkår også oppfylt. For eksempel; i MB så vi at hvis en trekant er rettvinklet, er Pytagoras' setning gyldig. Dette kan vi skrive slik:

trekanten er rettvinklet ⇒ Pytagoras' setning er gyldig

Men vi så også at det omvendte gjelder; hvis Pytagoras' setning er gyldig, må trekanten være rettvinklet. Da kan vi skrive

trekanten er rettvinklet ⇔ Pytagoras' setning er gyldig

Det er veldig viktig å være bevisst forskjellen på  $\Rightarrow$  og  $\iff$ ; at vilkår A oppfylt gir B oppfylt, trenger ikke å bety at vilkår B oppfylt gir vilkår A oppfylt!

### Eksempel 1

firkanten er et kvadrat  $\Rightarrow$  firkanten har fire like lange sider

### Eksempel 2

tallet er et primtall større enn  $2 \Rightarrow$  tallet er et oddetall

## Eksempel 3

tallet er et partall  $\iff$  tallet er delelig med 2

### 0.2.2 Funksjoner med vilkår

Funksjoner kan gjerne ha flere uttrykk som gjelder ved forskjellige vilkår. La oss for eksempel definere en funksjon f(x) slik:

For x < 1 er funksjonsuttrykket -2x + 1For  $x \ge 1$  er funksjonsuttrykket  $x^2 - 2x$ 

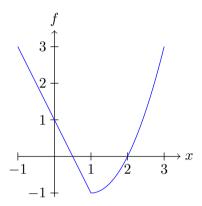


Figure 1: Grafen til f på intervallet [-1, 3].

Dette kan vi skrive som

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , & x < 1 \\ x^2 - 2x & , & x \ge 1 \end{cases}$$