

0.1 Grenseverdier

Si at vi starter med verdien 0.9, og deretter stadig legger til 9 som bakerste siffer. Da får vi verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre. Ved å legge til 9 som bakerste siffer på denne måten, *kan vi komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – verdien 1*. Det å ”komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – en verdi” vil vi heretter kalle å ”gå mot en verdi”. Metoden vi akkurat beskrev kan vi se på som en metode for å gå mot 1. Vi kan da si at **grenseverdien** til denne metoden er 1. For å indikere en grenseverdi skriver vi **lim**.

Det er viktig å tenke over at vi kan gå mot et tall fra to sider; fra venstre eller fra høyre på tallinjen. Med en metode som gir oss verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre, nærmer vi oss 1 fra venstre. Lager vi oss en metode som gir verdiene 1.1, 1.01, 1.001 og så videre, nærmer vi oss 1 fra høyre. Dette vises ved å markere **+** eller **–** over tallet vi går mot.

0.1 Grenseverdier

$x \rightarrow a^+ = x$ går mot a fra høyre

$x \rightarrow a^- = x$ går mot a fra venstre

$x \rightarrow a = x$ går mot a (fra både høyre og venstre)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ = grenseverdien til f når x går mot a
= verdien f går mot når x går mot a

Språkboksen

Å gå mot en verdi fra høyre/venstre kalles også å gå mot en verdi ovenfra/nedenfra.

Merk

$x \rightarrow a$ omfatter de to tilfellene $x \rightarrow a^+$ og $x \rightarrow a^-$. Ofte vil disse være så like at vi kan behandle $x \rightarrow a$ som ett tilfelle.

En utvidelse av $=$

Det litt paradoksale med grenserverdier hvor x går mot a , er at vi ofte ender opp med å erstatte x med a , selv om vi per definisjon har at $x \neq a$. For eksempel er

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \quad (1)$$

Det er verd å filosofere litt over likhetene i (1). Når x går mot 2, vil x aldri bli eksakt lik 2. Dette betyr at $x + 1$ aldri kan bli *eksakt lik* 3. Men *jo nærmere* x er lik 2, *jo nærmere* er $x + 1$ lik 3. Med andre ord går $x + 1$ mot 3 når x går mot 2. Likheten i (1) viser altså ikke til et uttrykk som er *eksakt lik* en verdi, men et uttrykk som *går eksakt mot* en verdi. Dette gjør altså at grenseverdier bringer en noe utvidet forståelse av $=$.

Eksempel 1

Gitt $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$. Finn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Svar

Når $x \neq 1$, har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} \\ &= x + 3 \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

0.2 Kontinuitet

0.2 Kontinuitet

Gitt en funksjon $f(x)$ og et tall c . Hvis $f(c)$ eksisterer, er f **kontinuerlig** for $x = c$ hvis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (2)$$

Hvis (2) er ugyldig, er f **diskontinuerlig** for $x = c$.

Eksempel 1

Undersøk om funksjonene er kontinuerlige for $x = 2$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < 2 \\ -3x + 12 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad x \leq 2 \\ -x + 6 & , \quad x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

Svar

a) Vi har at

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -3 \cdot 2 + 12 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 + 4 = 6$$

Altså er f kontinuerlig for $x = 2$.

b) Vi har at

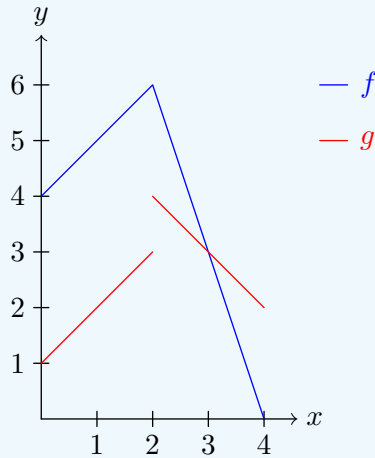
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = g(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2 + 6 = 4$$

Altså er g ikke kontinuerlig for $x = 2$.

Visualisering av kontinuitet

Visuelt kan vi skille mellom kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner slik; kontinuerlige funksjoner har sammenhengende grafer, diskontinuerlige funksjoner har det ikke. Et utsnitt av grafene til funksjonene fra *Eksempel 1* på side 3 ser slik ut:



Grafer fungerer utmerket til å avgjøre hvilke funksjoner vi *forventer* å være kontinuerlige eller ikke, men er aldri gyldige som et bevis for dette.