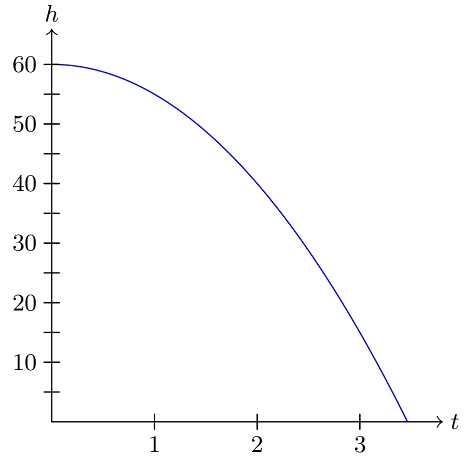
0.1 Gjennomsnittlig vekstfart

Se for deg at vi slipper en ball fra 60 meter over bakken, og lar den falle fritt nedover. Når vi slipper ballen, starter vi også en stoppeklokke. Antall meter h ballen er over bakken etter t sekunder kan da tilnærmes ved funksjonen

$$h(t) = 50 - 5t^2$$



Det er åpenbart at ballen ikke har konstant[1] fart, men i mange sammenhenger er det nyttig å undersøke hva farten hadde vært hvis den var det. Vi har at

$$h(0) = 60 \qquad , \qquad h(1) = 60 - 5 \cdot 1^2 = 55$$

Dette betyr at i løpet av det første sekundet har ballen bevegd seg $60 - 55 = 5$ meter nedover. Hvis farten var konstant ville den derfor vært

$$\frac{5\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m/s}$$

Videre har vi at

$$h(3) = 60 - 5 \cdot 3^2 = 45$$

Dette betyr at mellom $t = 1$ og $t = 3$ har ballen gått fra å være 55 til 15 meter over bakken. Altså har ballen bevegd seg $55 - 15 = 40$ meter i løpet av $3 - 1 = 2$ sekunder. Hvis farten var konstant på dette intervallet, ville den derfor vært

$$\frac{40\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}$$

[1] Se ??

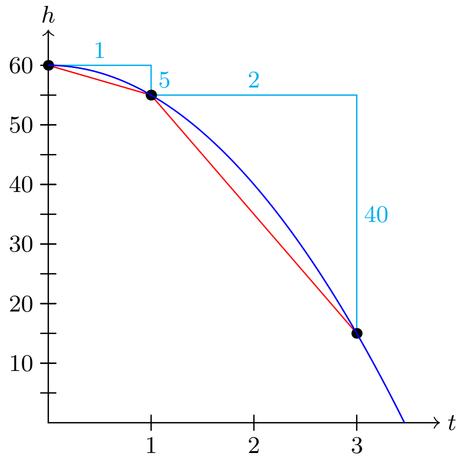
La oss oppsummere det vi har funnet:

- På intervallet $t \in [0, 1]$ har ballen bevegd seg 5 meter. Den ville bevegd seg like langt hvis den i løpet av dette sekundet hadde hatt en konstant fart lik $5\,\mathrm{m/s}$.

  Verdien til denne farten, 5, er stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(0, 60)$ og $(1, 45)$.

- På intervallet $t \in [1, 3]$ har ballen bevegd seg 40 meter. Den ville bevegd seg like langt hvis den i løpet av disse 2 sekundene hadde hatt en konstant fart lik $20\,\mathrm{m/s}$.

  Verdien til denne farten, 20, er stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(1, 45)$ og $(3, 15)$.

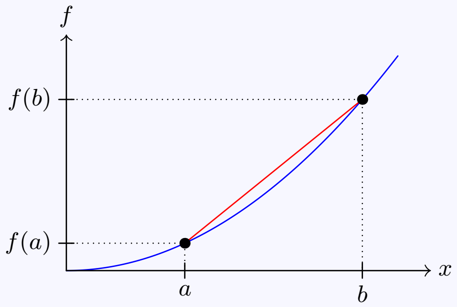


Stigningstallet til linja mellom to punkt som ligger på grafen til en funksjon kalles gjennomsnittlig vekstfart:

Regel 0.1 Gjennomsnittlig vekstfart

Gitt en funksjon $f(x)$. Da er

$$\text{gjennomsnittlig vekstfart på intervallet } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$



Merk

Uttrykket for gjennomsnittlig vekstfart er også uttrykket for stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

Navnevalg

Til å begynne med er gjennomsnittlig vekstfart et lite beskrivende begrep, så det er nyttig å drøfte litt hva det innebærer.

På side 1 så vi på avstanden ballen falt mellom $t = 1$ og $t = 3$. Farten til ballen er i stadig endring, men det er nyttig å stille spørsmålet "hvis farten var konstant, hva måtte den vært for at ballen skulle falt like langt?". Hvis vi tenker oss at farten er konstant, er h og t proporsjonale størrelser, og da er[1]

$$\text{fart} = \frac{\text{lengde}}{\text{tid}}$$

Siden ballen har falt 40 meter på 2 sekunder, er farten 20 m/s. Den gjennomsnittlige vekstfarten er altså størrelsen vi får dersom vi antar at funksjonen (i nevnte tilfelle h) og variabelen (i nevnte tilfelle t) er proporsjonale størrelser. Hvis ballen hadde hatt konstant fart lik 20 m/s, ville vi også fått en gjennomsnittsfart lik 20 m/s, uansett hvor mange ganger vi hadde målt farten. Derfor er det også vanlig å kalle farten vi fant for gjennomsnittsfarten på intervallet.

[1]Se MB.

Motvirkende krefter for kjørende bil

#algebra #modellering #andregradsfunksjon #omgjøring av enheter #proporsjonalitet #digital kompetanse

La F være summen av kreftene som virker i motsatt retning av en bils kjøreretning. Ifølge en rapport[1] fra SINTEF kan[2] F tilnærmes som

$$F(v) = mgC_r + \frac{1}{2}\rho v^2 D_m \qquad , \qquad v \geq 10$$

	betydning	**verdi**	**enhet**
v	bilens hastighet	variabel	m/s
m	bilens masse[3]	1409	kg
g	tyngdeakselerasjonen	9.81	m/s^2
C_r	koeffisient for bilens rullemotstand	0.015	
ρ	tettheten til luft	1.25	kg/m^3
D_m	koeffisient for bilens luftmotstandsareal[4]	0.74	

a) Tegn grafen til F for $v \in [10, 35]$

b) På intervallet gitt i oppgave a, for hvilken hastighet er det at

- rullemotstanden gir det største bidraget til F?
- luftmotstanden gir det største bidraget til F?

Oppgi svarene rundet av til nærmeste heltall og målt i km/h.

c) Med ”energiforbruk”[5] mener vi her den energien som må til for å motvirke F over en viss kjørelengde. Ved konstant hastighet er

[1]https://sintef.brage.unit.no/sintef-xmlui/handle/11250/2468761

[2]Det er er her forutsatt flatt strekke, og sett vekk ifra motstand ved akselerasjon.

[3]Det er tatt ugangspunkt i gjennomsnittsvekten til en norsk personbil.

[4]Verdien er hentet fra en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficient#Drag_area

[5]Den totale energimengden en bil bruker på en kjørelengde vil være høyere enn det vi har kalt ”energiforbruket”. Som regel vil den totale energimengden som kreves for å kjøre en strekning være høyere jo høyere hastighet man har. Slik kan man anta at differansen i energiforbruk vi finner i denne oppgaven er et minimum for den reelle differansen i total energimengde.

energiforbruket etter kjørt lengde proporsjonal med F. På norske motorveier er 90 km/h og 110 km/h vanlige fartsgrenser. Hvor stor økning i energiforbruk vil en økning fra 90 km/h til 110 km/h innebære?

d) Lag en funksjon F_1 som gir F ut ifra bilens hastighet målt i km/h.