Eksakte sinus- og cosinus-verdier For å finne eksakte verdier av sinus til et tall x, kan vi sette opp følgende tabell:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

For cosinus setter vi opp mønsteret andre veien:

$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0

Erstatter vi $\frac{\sqrt{1}}{2}$ med $\frac{1}{2}$ og $\frac{\sqrt{4}}{2}$ med 1, får vi dette:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Av tabellen over kan vi enkelt finne $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

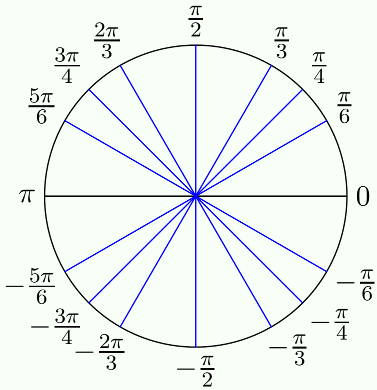
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Eksempel 1

Løs ligningen

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad , \qquad x \in [-\pi, \pi] \tag{1}$$

Svar



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

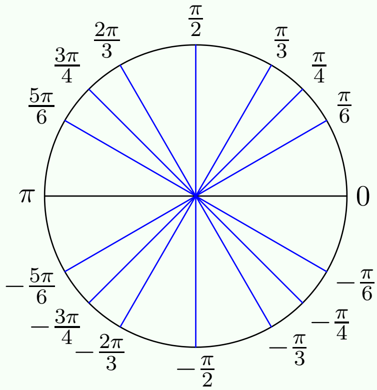
Av tabellen ser vi at $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Av figuren ser vi at $\frac{3\pi}{4}$ er $\frac{\pi}{4}$ speilet gjennom vertikalaksen. Altså har cosinusverdien til $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{3\pi}{4}$ samme tallverdi, men motsatt fortegn. Dermed er $\frac{3\pi}{4}$ en løsning av (1). Av figuren ser vi at $-\frac{3\pi}{4}$ er $\frac{3\pi}{4}$ speilet gjennom horisontalaksen. Følgelig er ogå $-\frac{3\pi}{4}$ en løsning av (1).

Eksempel 2

Løs likningen

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Svar



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Av tabellen ser vi at $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Av figuren ser vi at $\frac{5\pi}{6}$ er $\frac{\pi}{6}$ speilet gjennom vertikalaksen. Altså har cosinusverdien til $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$ samme tallverdi, men motsatt fortegn. Dermed er $\frac{5\pi}{6}$ en løsning av (2). Av figuren ser vi at $-\frac{5\pi}{6}$ er $\frac{5\pi}{6}$ speilet gjennom horisontalaksen. Følgelig er ogå $-\frac{5\pi}{6}$ en løsning av (2). Så legger vi merke til at om vi starter på $\frac{5\pi}{6}$, og går en hel runde rundt sirkelen, så kommer vi til et tall med samme cosinusverdi som $\frac{5\pi}{6}$. Det samme gjelder for $-\frac{5\pi}{6}$. Altså er

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \qquad \vee \qquad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

hvor $n \in \mathbb{N}$. Dette kan vi kortere skrive som

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Løsning av andregradsligninger Andregradssuttrykket

$$x^2 + bx + c$$

kan vi skrive som

$$(x + x_1)(x + x_2)$$

hvor $x = -x_1$ og $x = -x_2$ er løsningene av ligningen $x^2 + bc + c = 0$. Dette betyr at

$$
\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= (x + x_1)(x + x_2) \\
&= x^2 + x_1 x + x_2 x + x_1 x_2 \\
&= x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2
\end{aligned}
$$

Venstre og høyre side i ligningen over er lik for alle x bare hvis

$$x_1 x_2 = c \quad \text{og} \quad x_1 + x_2 = b \tag{3}$$

Eksempel 1

Faktoriser uttrykket $x^2 - 5x + 4$.

Svar

Siden $(-4)(-1) = 4$ og $(-4) + (-1) = -5$ er kravet fra (3) oppfylt, og vi kan skrive

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$$

Eksempel 2

Løs ligningen

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Svar

Siden $(-3)2 = -6$ og $(-3) + 2 = -1$, kan vi skrive

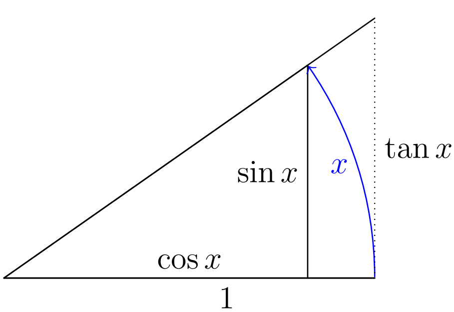
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Altså har vi løsningene $x = 3$ eller $x = -2$.

Grensen av $\sin x$ og $\cos x - 1$ over x $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Vi nøyer oss med å se på grensen når $x^+ \to 0$, da resonnementet blir helt symmetrisk for $x^- + \to 0$.

I figuren under ser vi bl. a. en rett trekant med katetene $\cos x$ og $\sin x$. Av formlikhet kan det vises at vi kan lage en forstørret trekant med katetene 1 og $\tan x$.



Bulengden x må alltid være større enn $\sin x$, altså må vi ha at

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \tag{4}$$

Videre observerer vi at trekanten med $\tan x$ som høyde og 1 som grunnlinje må ha et større areal enn sektoren til x. Fordi x utgjør $\frac{x}{2\pi}$ av omkretsen til enhetssirkelen, må den utgjøre den samme brøkdelen av arealet (forklar for deg selv hvorfor!). Arealet til enhetssirkelen er π, og da er arealet til sektoren $\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$. Vi kan derfor skrive

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &< \frac{1}{2}\tan x \\ x &< \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cos x &< \frac{\sin x}{x} \qquad (5) \end{aligned}$$

Fra (4) og (5) har vi at

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Når x går mot 0, går $\cos x$ mot 1. I denne grensen blir altså $\frac{\sin x}{x}$ klemt i mellom et tall uendelig nærme (men mindre enn) 1 på den ene siden og 1 på den andre. Derfor må vi ha at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Siden $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, har vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)}{x} \frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1}\right) \\ &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lagranges identitet Vi ønsker å vise Lagranges identitet for to vektorer $\vec{a} = [a_1,a_2,a_3]$ og $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

La oss starte med å skrive ut venstresiden. Vi ser at dette blir en tung oppgave, men kan lette litt på trykket ved å skrive:

$$c_{ij} = a_i b_j$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (c_{23} - c_{32})^2 + (c_{31} - c_{13})^2 + (c_{12} - c_{21})^2 \\ &= c_{23}^2 - 2c_{23}c_{32} + c_{32}^2 + c_{31}^2 - 2c_{31}c_{13} + c_{13}^2 + c_{12}^2 - 2c_{12}c_{21} + c_{21}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Tiden er nå inne for å observere to ting:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (c_{11} + c_{22} + c_{33})^2 \\ &= (c_{11} + c_{22})^2 + 2(c_{11} + c_{22})c_{33} + c_{33}^2 \\ &= c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 + 2c_{11}c_{22} + 2c_{11}c_{33} + 2c_{22}c_{33} \end{aligned} \tag{8}$$

Vi legger nå merke til at $c_{ii}c_{jj} = c_{ij}c_{ij}$. Om vi studerer høyresidene til (6), (7) og (8), ser vi at vi kan skrive

$$(6) = (7) - (8)$$

Dermed har vi vist det vi skulle. Bytte av variabel ved Leibniz-notasjon En annen måte å utføre bytte av variabel på, er å anvende seg av *Leibniz-notasjon.* For en funksjon $u(x)$ skriver man da at

$$u' = \frac{du}{dx}$$

du og dx betegner infinitesimale størrelser av u og x, begge størrelsene går altså mot 0. Strengt tatt kan vi ikke behandle høyresiden som en vanlig brøk. Men hvis vi *likevel* gjør det, kan vi skrive

$$dx = \frac{du}{u'}$$

Og når vi først er i gang med manipulasjoner som egentlig ikke gir mening, kan vi sette dette uttrykket inn i et integral vi ønsker å løse:

Eksempel

Finn det ubestemte integralet

$$\int x^4 e^{x^5}\, dx$$

Svar

Vi setter $u = x^5$, og får da at

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dx} \\ 5x^4 &= \frac{du}{dx} \\ dx &= \frac{du}{5x^4} \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i integralet, kan vi skrive

$$\begin{aligned} \int x^4 e^{x^5}\, dx &= \int x^4 e^u \,\frac{du}{5x^4} \\ &= \frac{1}{5}\int e^u\, du \\ &= \frac{1}{5} e^u\, du \\ &= \frac{1}{5} + e^u + C \\ &= \frac{1}{5} e^{x^5} + C \end{aligned}$$

Kommentar: I eksempelet over kom vi fram til rett svar, selv om regneoperasjonene med de infinitesimale størrelsene ikke kan forsvares rent matematisk. Derimot kan det vises matematisk at denne metoden alltid vil gi oss korrekte uttrykk! Å bruke regneoperasjoner som i seg selv er meningsløse, men som beviselig fører til riktige uttrykk, kalles *formell regning*.

Bytte av variabel for bestemt integral

0.1 Bytte av variabel for bestemt integral

Gitt funksjonene $u(x)$ og $g(u)$. Da har vi at

$$\int_a^b g(u)u'\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du \tag{1}$$

Eksempel 1

Finn det bestemte integralet

$$\int_1^2 \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx$$

Svar

Vi setter $u(x) = x^3 + x^2$ og $g(u) = \frac{1}{u}$. Da blir $u' = 3x^2 + 2x$, og vi kan skrive

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx &= 2\int (3x^2+2x)\frac{1}{x^3+x^2}\,dx \\
&= 2\int u'\frac{1}{u}\,dx \\
&= 2\int \frac{1}{u}\,du \\
&= 2\ln|u| + C
\end{aligned}$$

Siden $u(1) = 1^3 + 1^2 = 2$ og $u(2) = 2^3 + 2^2 = 12$, får vi at

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx &= \left[2\ln|u|\right]_2^{12} \\
&= 2(\ln 12 - \ln 2) \\
&= 2\ln\left(\frac{12}{2}\right) \\
&= 2\ln 6
\end{aligned}$$