

??

a) Vi bruker den eksplisitte formelen for en aritmetisk følge, og får:

$$a_4 = a_1 + d(i - 1)$$

$$30 = 3 + d(4 - 1)$$

$$27 = 3d$$

$$9 = d$$

b) Vi observerer at:

$$a_5 - a_3 = a_1 + d(5 - 1) - (a_1 + d(3 - 1))$$

$$a_5 - a_3 = 2d$$

$$26 - 14 = 2d$$

$$6 = d$$

Videre har vi at:

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$14 = a_1 + 12$$

$$2 = a_1$$

??

a) Vi har at:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

Dermed er det eksplisitte uttrykket gitt som:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{1-i} \end{aligned}$$

b) Vi vet at:

$$a_1 \cdot k^{4-1} = a_4$$

$$5 \cdot k^3 = 40$$

$$k^3 = 8$$

$$k = 2$$

Altså får vi:

$$a_n = 5 \cdot 2^{i-1}$$

??

a) Vi observerer at rekka er en aritmetisk rekke med $a_1 = 7$ og $d = 6$. For å finne summen trenger vi verdien til a_{10} :

$$\begin{aligned}a_{10} &= 7 + 6(10 - 1) \\ &= 61\end{aligned}$$

Summen S_{10} blir da:

$$\begin{aligned}S_{10} &= 10 \cdot \frac{7 + 61}{2} \\ &= 340\end{aligned}$$

b) Se a.

??

Rekken er aritmetisk med $a_1 = 8$ og $d = 3$. Vi har at:

$$\begin{aligned}n \frac{8 + (8 + 3(n - 1))}{2} &= 435 \\ 3n^2 + 13n - 870 &= 0\end{aligned}$$

Vi bruker *abc*-formelen og får at $n \in \{15, -\frac{58}{3}\}$, hvorav $n = 15$ er eneste mulige svar.

?? Dette er den aritmetiske rekken fra eksempelet på side ?? . I formelen for S_n setter vi inn det eksplisitte uttrykket for a_n , og får at

$$\begin{aligned}S_n &= n \frac{a_1 + a_n + d(n - 1)}{2} \\ 2 \cdot 903 &= n(3 + 3 + 4(n - 1)) \\ 0 &= 6n + 4n^2 - 4n - 2 \cdot 903 \\ 0 &= 2n^2 + n - 903\end{aligned}$$

Denne ligningen har løsningene $n \in \{21, -\frac{43}{2}\}$. Vi søker et positivt heltall, derfor er $n = 21$ eneste mulige løsning.

?? Dette er den geometriske rekken fra eksempelet på side ?? . Vi lar n være antall ledd, og får at

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} &= 93 \\ 2^n - 1 &= \frac{93}{3} \\ 2^n &= 31 + 1 \\ 2^n &= 2^5 \\ n &= 5\end{aligned}$$

??

$$\begin{aligned}3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 3^n &= 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \dots \cdot 3^n \\&= 3^{1+2+\dots+n} \\&= 3^{n \frac{1+n}{2}} \\&= 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}\end{aligned}$$

Som er det vi skulle vise.

??

Rekken er geometrisk, med $a_1 = 3$ og $k = 4$. For å finne summen må vi vite hvor mange ledd rekken består av:

$$\begin{aligned}3 \cdot 4^{n-1} &= 768 \\4^{n-1} &= 256 \\4^{n-1} &= 4^4 \\n - 1 &= 4 \\n &= 5\end{aligned}$$

??

a) Summen S_n er gitt som:

$$\begin{aligned}S_n &= 2 \cdot \frac{1 - 3^k}{1 - 3} \\&= 2 \cdot \frac{1 - 3^k}{-2} \\&= 3^k - 1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}S_3 &= 3^3 - 1 \\&= 26\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}3^n - 1 &= 728 \\3^n &= 729 \\3^n &= 3^6 \\n &= 6\end{aligned}$$

?? Dette er en geometrisk rekke fra eksempelet på side ??.

a) Hvis rekka har en endelig sum $S_\infty = \frac{3}{2}$, er

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} &= \frac{3}{2} \\2x &= 3(x-1) \\x &= 3\end{aligned}$$

Summen av rekka er altså $\frac{3}{2}$ når $x = 3$.

b) Skal summen bli -1 , må x oppfylle følgende ligning:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} &= -1 \\ x &= -(x-1) \\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Men $x = \frac{1}{2}$ oppfylle ikke kravet om at rekka er konvergent (den er divergent) for dette valget av x . Altså er det ingen verdier for x som oppfyller ligningen.

??

a) Dette er en uendelig geometrisk rekke med $k = \frac{1}{4}$. Siden $|k| < 1$ er rekka konvergent.

b) Siden rekka er uendelig geometrisk og konvergent, har rekka en endelig sum S_∞ gitt ved:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1 - k} \\ &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

??

a) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$ Dette er en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{9}{10}$ og $k = 10^{-1}$. **b)** Fordi $|k| < 1$ er rekken konvergent. Den uendelige summen er derfor gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Summen av rekken blir 1, altså er $0.999\dots = 1$ (!).

??

a) Vi observerer at $k = x - 2$. Skal rekka konvergere må altså $|x - 2| < 1$. Skal dette være sant må vi ha at:

$$\begin{aligned} -1 &< x - 2 \\ 1 &< x \end{aligned}$$

og videre at:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 1 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Derfor må vi ha at $1 < x < 3$.

b)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - (x - 2)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3(3 - x)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{18 - 6x} = \frac{2}{9}$$

$$18 - 6x = 9$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ ligger i konvergensområdet, og er derfor et gyldig svar.

c)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - (x - 2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3(3 - x)} = \frac{1}{6}$$

$$3(3 - x) = 6$$

$$x = 1$$

Men $x = 1$ ligger ikke i konvergensområdet, og er derfor ikke et gyldig svar. $S_n = \frac{1}{6}$ har derfor ingen løsning.

??

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2}$$

$$\frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} &= \\ \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1 = 2^n - 1$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k , får vi:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k+1-1} = 2^{k+1} - 1$$

$$2^k - 1 + 2^k =$$

$$2 \cdot 2^k - 1 =$$

$$2^{k+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

c) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$4 = \frac{4}{3}(4^1 - 1)$$

$$4 = \frac{4}{3} \cdot 3$$

$$4 = 4$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k+1} = \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1)$$

$$\frac{4}{3}(4^k - 1) + 4^{k+1} =$$

$$\frac{4^{k+1} - 1 + 3 \cdot 4^{k+1}}{3} =$$

$$\frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) = \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1)$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

d) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1 = \frac{1(2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)}{6}$$

$$= \frac{6}{6}$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k får vi:

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)((k+1)+1)}{6} \\
 \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\
 \frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+1) + 2k + 4k + 6)}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+3) + 4k + 6)}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+3) + 2(2k+3))}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}
 \end{aligned}$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.

Merk: Faktorisering er en treningsak, men observer hvordan vi i overgangen mellom linje 5 og 6 framkalte leddet $2k + 3$. Hvis man ikke kommer i mål med ren faktorisering, kan man selvfølgelig etter linje 4 vise at $k(2k+1) + 6(k+1) = (2k+3)(k+2)$ ved å skrive ut uttrykkene på begge sider.

??

Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1(1^2 + 2) = 1 \cdot 3$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer for $n = k$, får vi:

$$\begin{aligned}
 (k+1)((k+1)^2 + 2) &= (k+1)(k^2 + 2k + 3) \\
 &= (k+1)(k(k+2) + 3)
 \end{aligned}$$

Antakelsen vår sier at $k(k+2)$ er delelig med 3, noe tallet 3 også er. Faktoren $(k(k+2) + 3)$ er derfor delelig med 3, mens $(k+1)$ er et heltall. Uttrykket i ligningen over er derfor delelig med 3.

??

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\frac{(2 \cdot 1)!}{(2 \cdot 1 - 1)!} = 2^1 \cdot 1!$$

$$\frac{1 \cdot 2}{1} = 2$$

$$2 = 2$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k , får vi:

$$\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(2(k+1))!}{(2(k+1) - 1)!} = 2^{k+1}(k+1)!$$

$$2^k k! \frac{(2(k+1))!}{(2k+1)!} =$$

$$2^k k! \frac{(2k+1)!(2k+2)}{(2k+1)!} =$$

$$2^{k+1} k! (k+1) =$$

$$2^{k+1} (k+1)! = 2^{k+1} (k+1)!$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Venstresiden kan enklere skrives som:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(k+1)$$

For $n = 1$:

$$2 = 2^1 \cdot 1!$$

$$2 = 2$$

For $n = k + 1$:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(k+1) = 2^{k+1} (k+1)!$$

$$2^k k! \cdot 2(k+1) =$$

$$2^{k+1} (k+1)! = 2^{k+1} (k+1)!$$

Gruble ?? a) Summen av de n første oddetallene tilsvarer n^2 (se f. eks ??b), derfor kan vi skrive kvadratene som summer av oddetall.

b) Vi får n enere, $n - 1$ treere, $n - 2$ femmere og så videre. Den isolerte n -en på høyresiden representerer de n enerene, mens summen representerer bidragene fra alle de andre oddetallene (skriv opp hvis du synes det er vanskelig å se).

c)

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n i^2 &= n + \sum_{i=1}^n (n - i)(2i + 1) \\
 \sum_{i=1}^n i^2 &= n + \sum_{i=1}^n (2in + n - 2i^2 - i) \\
 \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 2i^2 &= n + \sum_{i=1}^n ((2n - 1)i + n) \\
 \sum_{i=1}^n 3i^2 &= n + n^2 + (2n - 1)\frac{n(n + 1)}{2} \\
 \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n(1 + n) + (2n - 1)n(n + 1)}{6} \\
 &= \frac{(2n + (2n - 1)n)(n + 1)}{6} \\
 &= \frac{n(2 + (2n - 1))(n + 1)}{6} \\
 &= \frac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}
 \end{aligned}$$

Gruble ??

Vi starter med å vise at for $n \in \mathbb{N}$ er

$$p(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

Vi har at

$$p(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 \geq 2$$