

1 Følger og rekker

Regresjonsanalyse (Regneark)

Analyse av tallfølge skrevet inn i regnearket for å finne en eksplisitt formel.

Eksempel

Finn den eksplisitte formelen til følgen

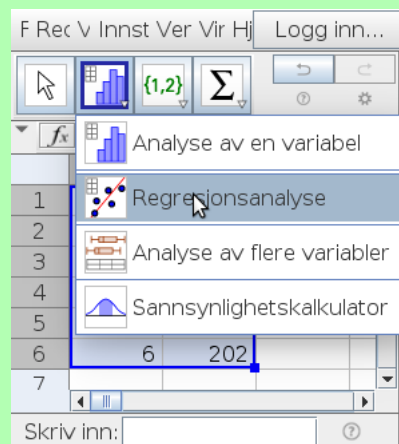
2,6, 22, 56, 114, 202, ...

Svar:

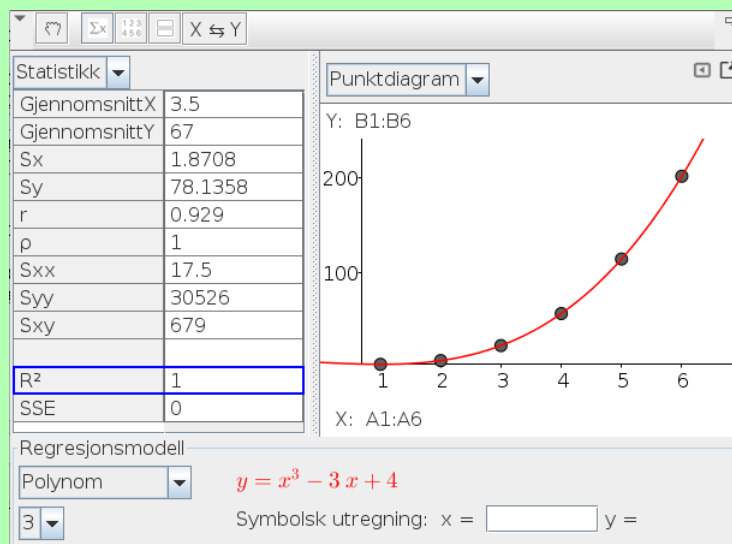
Vi velger **Vis ► Regneark** og skriver tallene inn i en tabell med leddnummeret i første kolonne og verdien i andre.

▼ Regneark		
	f_x	F K
	A	B
1	1	2
2	2	6
3	3	22
4	4	56
5	5	114
6	6	202

Vi markerer så hele tabellen, i verktøymenyen som da dukker opp, velger vi **Regresjonsanalyse**.



På vinduet som da kommer velger vi **Analyser**, og trykker deretter på **Vis statistikk** (Σx). I analysevinduet søker vi nå å finne en **Regresjonsmodell** hvor vi får $R^2 = 1$ i statistikkvinduet. I dette tilfellet gir et tredjegradspolynom det vi ønsker:



Av $y = x^3 - 3x + 4$ i figuren over konkluderer vi med at den eksplisitte formelen til følgen er:

$$a_n = n^3 - 3n + 4$$

^a R^2 er et mål på hvor godt modellen samsvarer med inputen, gitt som en skala mellom 0 og 1. 1 betyr fullstendig samsvar.

Sum(<Uttrykk>, <Variabel>, <Start>, <Slutt>) (CAS)

Finner summen av en rekke med en løpende variabel på et intervall.

Eksempel

Finn summen av den uendelige rekke

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots$$

Svar:

Dette er en geometrisk rekke med $k = \frac{1}{5}$ og eksplisitt formel gitt som:

$$a_n = \frac{1}{5^{(n-1)}}$$

for $n \in \mathbb{N}$.

I CAS skriver vi da (∞ -tegnet finner du ved å trykke på α -tegnet oppe i høyre hjørne):

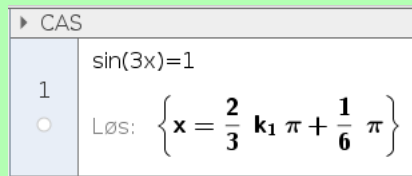
1	Sum[1/5^(n-1), n, 1, ∞]
○	→ $\frac{5}{4}$

2 Trigonometri

Løs(<Likning med x>) (CAS)

Løser en likning med x som ukjent.

Eksempel 1



I *Før Kalkulus*; *Teoridel* brukes $n \in \mathbb{Z}$ som heltallsvariabel, GeoGebra bruker en indeksert k (her $k_1 \in \mathbb{Z}$).

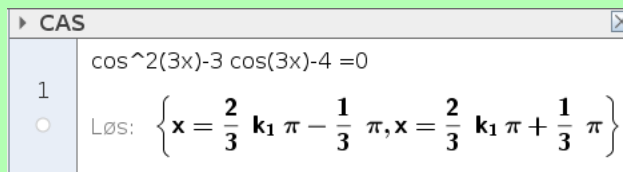
Merk: Du kan også løse ligningen ved å skrive den inn i en celle og deretter trykke på **Løs**.

Eksempel 2

Løs ligningen

$$\cos^2(3x) - 3 \cos(3x) - 4 = 0$$

Svar:



Merk: Løsningen kan komprimeres til (forklar for deg selv hvorfor):

$$x = \frac{1}{3}\pi(2k + 1)$$

for $k \in \mathbb{Z}$.

TrigKombiner(<Funksjon>, $\sin(x)$)

Skriver om en funksjon på formen $a \sin(kx) + b \cos(kx)$ til et kombinert uttrykk på formen $r \sin(kx + c)$.

Eksempel

RegSin(<Liste>)

Bruker regresjon med en sinusfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.

Eksempel

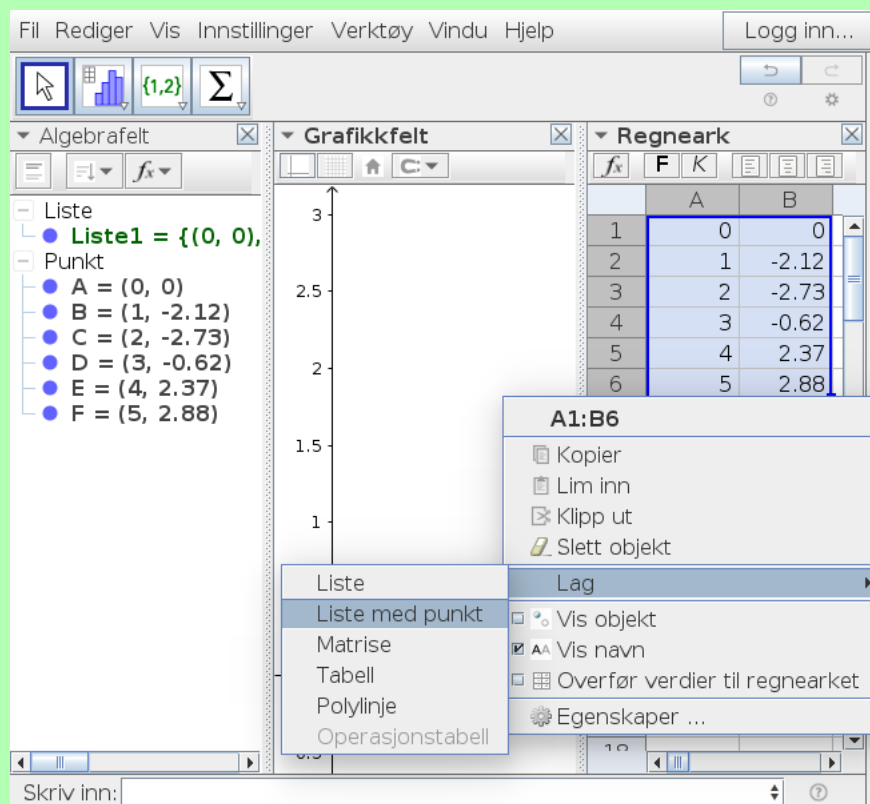
Gitt tabellen

x	$f(x)$
0	0
1	-2.12
2	-2.73
3	-0.62
4	2.37
5	2.88

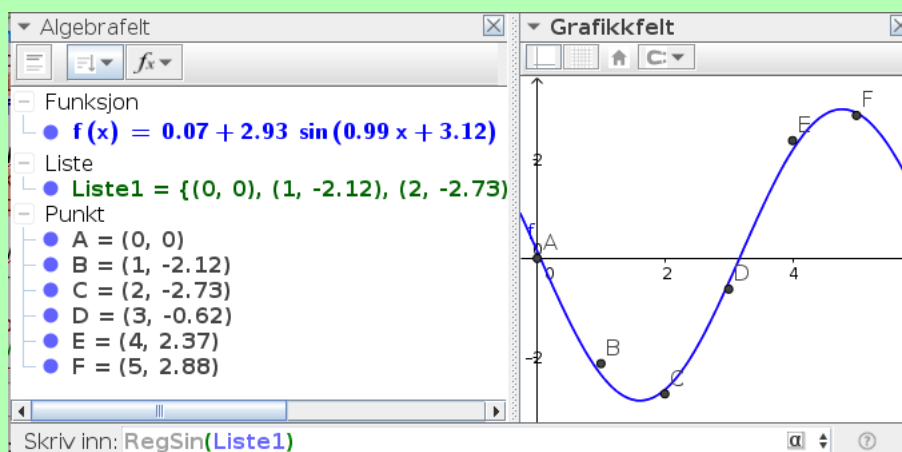
Bruk regresjon for å finne en tilnærming til $f(x)$ uttrykt som en sinusfunksjon.

Svar:

Vi velger **Vis ► Regneark** og skriver inn tabellen. Vi markerer så begge kolonner, høyreklikker innenfor markeringsfeltet og velger **Lag ► Liste med punkt**:



Om vi ønsker at alle punktene skal vises i grafikkfeltet, høyreklikker vi på grafikken og velger **Vis alle objekt**. Deretter skriver vi `RegSin[Liste1]` i kommandolinjen, og får funksjonen $f(x)$ i algebrafeltet og grafen til f i grafikkfeltet. Denne funksjonen er en tilnærming til $f(x)$ gitt i oppgaven.



3 Vektorer i rommet

Punkt(<Liste>)

Lager et punkt med koordinater gitt som liste.

Merk: For å lage punktet (x, y, z) kan man liksågodt skrive $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ i inntastingsfeltet. Skriver man $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ i CAS lager man vektoren $[x, y, z]$.

Vektor(<Punkt>)

Lager vektoren fra origo til et gitt punkt.

Merk: I CAS kan man lage vektoren $[x, y, z]$ ved å skrive $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, dette anbefales.

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-4, 2, 7]$, $\vec{v} = [4, 6 + s, -(s + t)]$ og $\vec{w} = [12, 2t - 9s, 3s - t]$.

- a) Finn s og t slik at $\vec{v} \parallel \vec{w}$.
b) Bestem s slik at $\vec{u} \perp \vec{v}$ når $t = -2$.

Svar:

a) Det er en litt spesiell sak i CAS at en vektor $[x, y, z]$ definert ved å skrive $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ vil ha en bedre funksjonalitet enn hvis den defineres ved **Vektor**-kommandoen. Vi starter derfor med å definere \vec{v} og \vec{w} på følgende måte (se [Definere variabler](#)):

CAS	
1	$\vec{v} := (4, 6+s, -(s+t))$ $\rightarrow \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ s+6 \\ -s-t \end{pmatrix}$
2	$\vec{w} := (12, 2t-9s, 3s-t)$ $\rightarrow \mathbf{w} := \begin{pmatrix} 12 \\ 2t-9s \\ 3s-t \end{pmatrix}$

Vi utnytter videre at $\vec{v} \parallel \vec{w}$ hvis $r\vec{v} = \vec{w}$, for en konstant r . Vi skriver denne ligningen inn i CAS og trykker så på **Løs**:

3	$r*\mathbf{v}=\mathbf{w}$
<input type="radio"/>	Løs: $\{\{\mathbf{r} = 3, \mathbf{s} = -1, \mathbf{t} = 3\}\}$

Vi har altså at $s = -1$ og $t = 3$.

b) Skal $\vec{u} \perp \vec{v}$, må vi ha at $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Vi definerer \vec{u} og bruker **ByttUt**-

kommandoen for å sette $t = 2$ i uttrykket til \vec{v} . Med det endrede uttrykket løser vi ligningen for skalarproduktet (se kommandoen Skalarprodukt på s. ??). CAS fjerner $*$ når vi skriver $u*5$).

4	$u := (-4, 2, 7)$
5	$\rightarrow u := \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$
6	ByttUt[v, t, 2]
7	$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ s + 6 \\ -s - 2 \end{pmatrix}$
8	$u \cdot 5 = 0$
9	Løs: $\left\{ s = -\frac{18}{5} \right\}$

Skalarprodukt(<Vektor>, <Vektor>)

Finner skalarproduktet av to vektorer.

Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive $u \cdot v$.

Vektorprodukt(<Vektor>, <Vektor>) (CAS)

Finner vektorproduktet av to vektorer. (Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive $u \otimes v$. Hurtigtast for \otimes er **alt+shift+8**).

Vinkel(<Vektor>, <Vektor>)

Gir vinkelen mellom to vektorer. Kan også brukes for vinkel mellom plan/linjer, plan/plan og linje/linje

4 Romgeometrier

Pyramide(<Punkt>, <Punkt>, ...)

Framstiller en pyramide i Grafikkfelt 3D. **Pyramide[A,B,C,D]** lager en pyramide med grunnflate A, B, C og toppunkt D , mens **Pyramide[A,B,C,D, E]** har grunnflate A, B, C, D og toppunkt E . Under kategorien *Pyramide* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

Høyde(<Objekt>)

Gir avstanden fra toppunkt til grunnflate i et objekt.

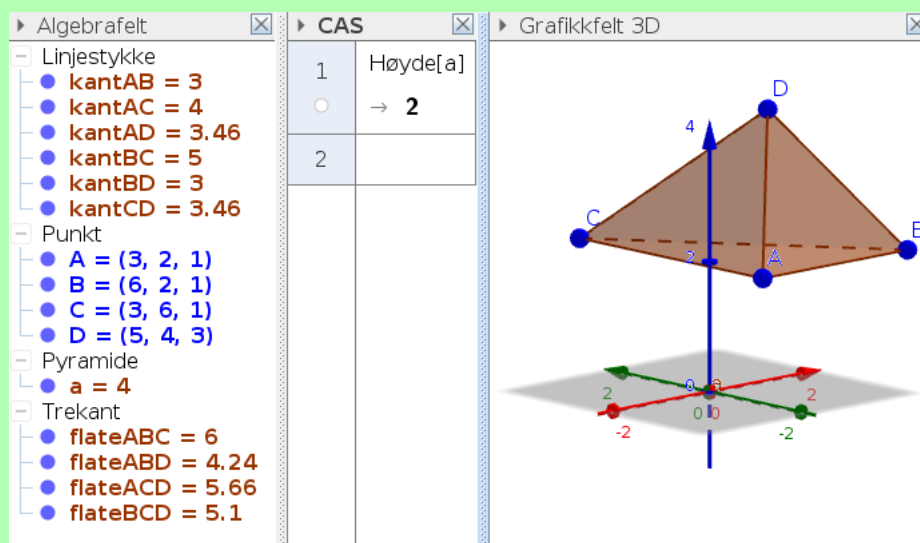
Merk: Avstanden har retning, og derfor kan den noen ganger være negativ. Tallverdien er den geometriske høyden.

Eksempel

Finn volumet og høyden til tetraedet med grunnflate gitt ved punktene $A = (3, 2, 1)$, $B = (6, 2, 1)$, $C = (3, 6, 1)$ og toppunkt $D = (5, 4, 3)$.

Svar:

Vi skriver inn punktene og bruker deretter kommandoen `Pyramide[A, B, C, D]` for å lage tetraedet a . Algebrafeltet gir oss da at volumet til a er 4. I celle 1 finner vi høyden, som er 2.



Prisme(<Punkt>, <Punkt>, ...)

Framstiller en prisme i Grafikkfelt 3D. `Prisme[A,B,C,D]` lager en prisme med grunnflate ABC og tak DEF , `Prisme[A,B,C,D,E]` har grunnflate $ABCD$ og tak EFG . F, G og eventuelt E blir konstruert av GeoGebra slik at hver sideflate er et parallelogram. Under kategorien *Prisme* i algebrafeltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Uttrykk>,
<Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)

Viser parameteriseringen av en kurve i Grafikkfelt 3D på et gitt intervall. Uttrykkene er henholdsvis uttrykkene for x, y og z -koordinatene, bestemt av en gitt parametervariabel.

Merk: Med mindre et bestemt intervall av kurven er ønsket, er det bedre å skrive parameteriseringen direkte inn i inntastingsfeltet som $A+t*u$, hvor A er et punkt på linja og u er en retningsvektor.

Linje(<Punkt>, <Punkt>)

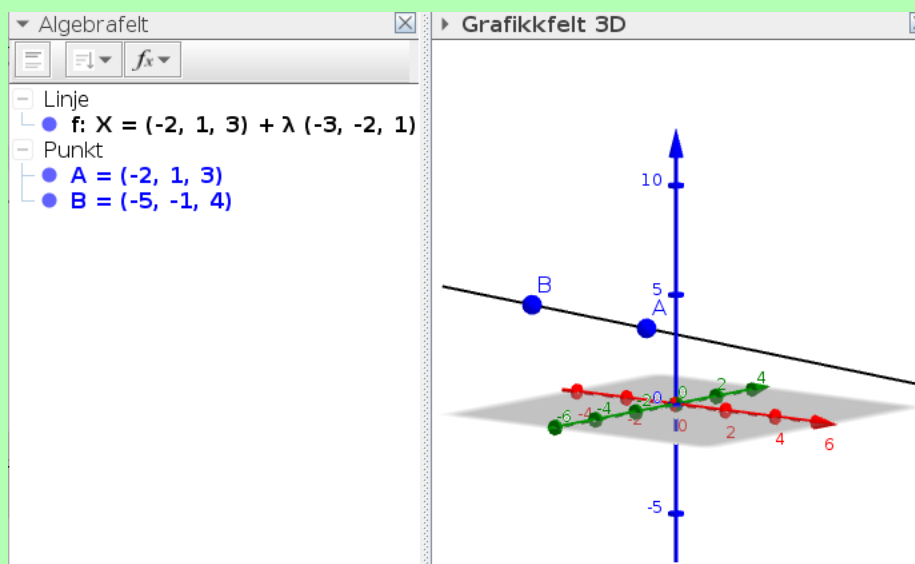
Gir uttrykket til en linje mellom to punkt. Hvis punktene har tre koordinater består uttrykket av et punkt på linja og en fri variabel λ multiplisert med en retningsvektor.

Eksempel

Finn parameteriseringen til linjen som går mellom punktet $(-2, 1, 3)$ og $(-5, -1, 4)$.

Svar:

Vi skriver punktene i inntastingsfeltet og får punktene A og B . Etterpå skriver vi $\text{Linje}[A, B]$ og får da linjen f .



Av dette finner vi at parameteriseringen til linjen er gitt som:

$$f : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Kule(<Punkt>, <Radius>)

Viser en kule i Grafikkfelt 3D med sentrum i et gitt punkt og med en gitt radius.

Eksempel

En linje l med parameteriseringen

$$l : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

skjærer en kule med sentrum i $(-1, 2, 6)$ og radius lik 3.

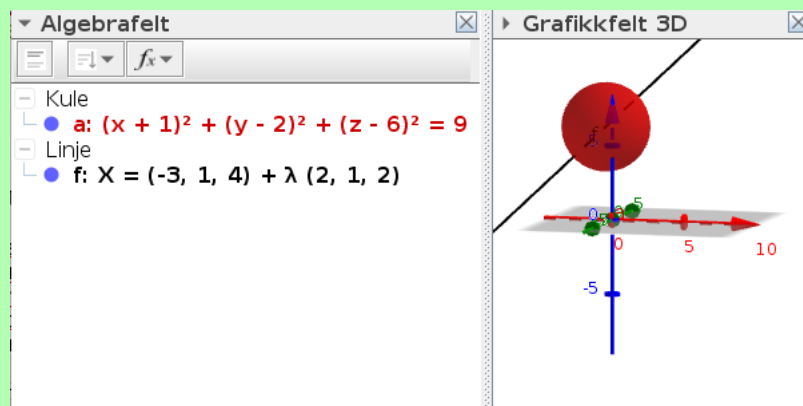
- Tegn kulen og linjen.
- Finn skjæringspunktet mellom kulen og linjen.

Svar:

Vi skal her se på to løsningsmetoder. Den første metoden er helt klart den raskeste, men den andre metoden er tatt med for å illustrere bruken av *Kurve*-kommandoen, i tillegg til å presentere en metode som vil sikre oss eksaktverdier.

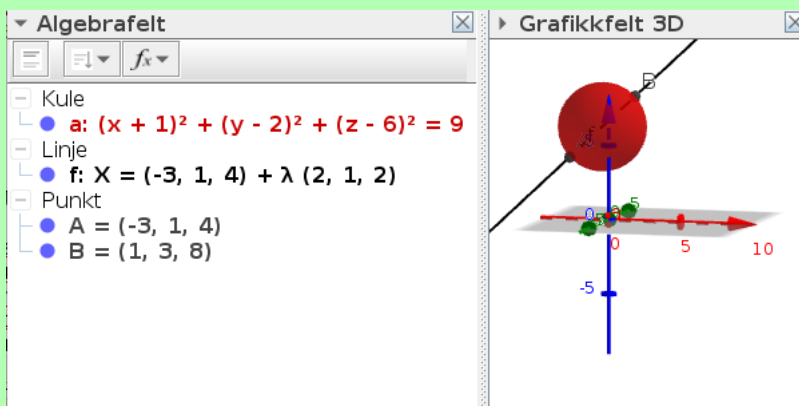
Løsningsmetode 1

a)



Vi starter med å tegne kulen. I inntastingsfeltet skriver vi `Kule[(-1, 2, 6), 3]` og får kulen a i algebrafelt og grafikkfelt 3D. For å tegne linjen, skriver vi `(-3, 1, 4)+t*(2,1,2)` i inntastingsfeltet, resultatet er kurven f .

b)

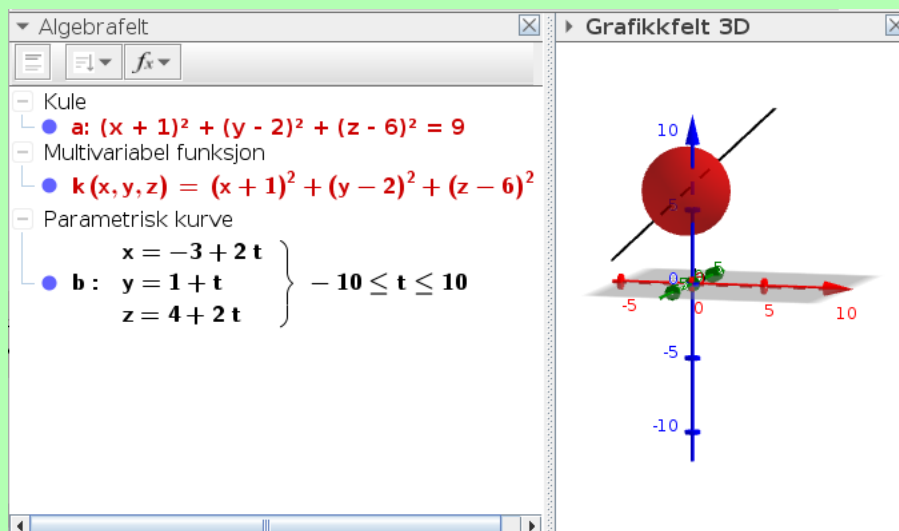


I inntastingsfeltet skriver vi `Skjæring[a, f]` og får de to punktene A og B .

Merk: Hadde vi tegnet linjen ved hjelp av `Kurve`-kommandoen, ville ikke dette funket. `Skjæring` er ikke kompatibel med `Kurve`, og i dette tilfellet heller ikke med CAS.

Løsningsmetode 2

a)



For å tegne linjen, skriver vi `Kurve[-3 + 2t, 1 + t, 4 + 2t, t, -10, 10]` i inntastingsfeltet. At $t \in [-10, 10]$ velger vi ut ifra inspeksjon i grafikkfelt 3D. Det gjelder å velge et intervall som viser begge skjæringspunktene mellom kulen og linjen (man kan velge $t \in [-\infty, \infty]$, men da blir ikke kurven vist grafikkfeltet). Resultatet er kurven b .

b) (Se [Høyre- og venstresiden](#))

I celle 1 lager vi oss en ny funksjon $k(x, y, z)$ med et uttrykk tilsvarende venstresiden til kuleligningen. For at linjen skal skjære kulen, må parameteriseringen til linjen oppfylle kuleligningen. I celle 2 setter vi derfor

uttrykkene for x, y og z fra parameteriseringen inn i k , og krever at dette uttrykket skal bli lik 3^2 . Vi trykker så på **Løs**-knappen og får to svar for t . I celle 3 og 4 finner vi punktene for disse valgene av t .

`Plan(<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>)`

Viser et plan i Grafikkfelt 3D, utspent av to av vektorene mellom tre gitte punkt.

5 Derivasjon og funksjonsdrøfting

`Deriverte(<Funksjon>)`

Gir den deriverte av en funksjon.

Merk: For en definert funksjon $f(x)$, kan man like gjerne skrive $f'(x)$.

Eksempel

CAS	
1	$f(x) := x^2$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := x^2$
2	Derivert[f]
<input type="radio"/>	$\rightarrow 2x$
3	$f'(x)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 2x$

`Vendepunkt(<Polynom>)`

Finner vendepunktene til et polynom.

Eksempel

CAS	
1	$f(x) := 3x^4 - 2x^2$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := 3x^4 - 2x^2$
2	Vendepunkt[f]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left\{ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{27} \right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27} \right) \right\}$

Maks(<Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi>)

Finner absolutt maksimum og maskimalpunkt for en funksjon f på et gitt intervall.

Min(<Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi>)

Finner absolutt minimum og minimumspunkt for en funksjon f på et gitt intervall.

Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)

Finner alle lokale ekstremalpunkt og ekstremalverdier for en funksjon f på et gitt intervall.

6 Integrasjon

Integral(<Funksjon>)

Gir uttrykket til det ubestemte integralet av en funksjon. (Merk: Hvis kommandoen skrives i inntastingsfeltet, blir konstantleddet utelatt).

Eksempel

c_1 er en vilkårlig konstant.

Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)

Gir det bestemte integralet av en funksjon på et intervall.

Eksempel 1

Eksempel 2

Finn volumet av omdreiningslegemet til $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$.

Svar:

I celle 1 definerer vi $f(x)$. Volumet er gitt som $\pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$, som vi finner i celle 2.

7 Differensialligninger

LøsODE(<Likning>) (CAS)

Finner generell løsning av en gitt differensialligning av første eller andre orden.

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$y' + 2y = 2$$

Svar:

c_1 er en vilkårlig konstant.

Eksempel 2

Løs ligningen:

$$y' + 5y^2 = 0$$

Svar:

c_1 er en vilkårlig konstant.

Eksempel 3

Løs ligningen:

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Svar:

c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

LøsODE(<Likning>, <Punkt på f>, <Punkt på f'>) (CAS)

Finner løsningen av en gitt differensialligning av første eller andre orden, for randverdier gitt som punkter.

Eksempel 1

Finn løsningen av ligningen

$$y' - 3y = 0$$

med randbetingelsen $y(0) = 5$.

Svar:

Randbetingelsen gir oss punktet $(x_0, y(x_0)) = (0, 5)$:

Eksempel 2

Løs ligningen:

$$y'' + y - 6 = 0 \quad , \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$$

Svar:

Punktet på y er $(0, -1)$ og punktet på y' er $(0,0)$. Løsningen kan vi da finne via CAS:

`Retningsdiagram(f(x,y))` (Inntastingsfelt)

Lager et retningsdiagram for en differensialligning hvor $f(x,y) = y'$.

Eksempel

Gitt differensialligningen

$$y' + xy = x$$

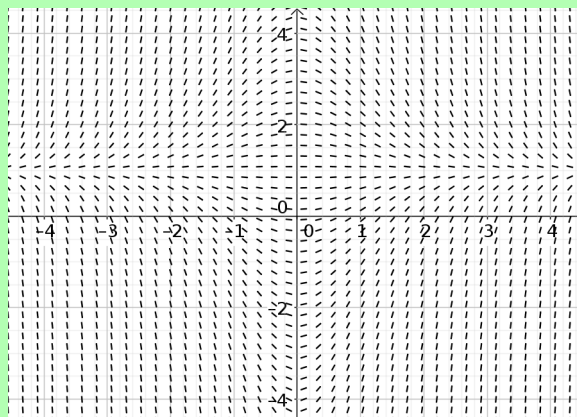
- a) Tegn et retningsdiagram for løsningene av ligningen.
- b) Tegn integralkurven for løsningen som krysser vertikalaksen når $y = 2$.

Svar:

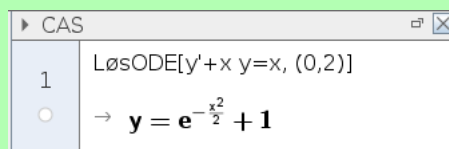
- a) Vi starter med å finne y' :

$$y' = x - xy$$

I inntastingsfeltet skriver vi så `Retningsdiagram[x-x y]` og får dette bildet i grafikkfeltet (*Obs!* x og y må skilles med mellomrom eller gangetegn):



b) Vi starter med å løse ligningen for punktet (0,2):



Trykker vi på den hvite markøren (som blir blå) i celle 1, vil en funksjon bli definert og vist i grafikkfeltet:

