

?? a) $f'(x) = 20x^4$ b) $f(2) - f(0) = 128$

?? $F(4) - F(1) = 8$

??

a) Vi bruker kjerneregelen to ganger. Først setter vi $u(x) = \cos^2 x$ og $g(u) = e^u$. Deretter setter vi $h(x) = \cos x$ og $i(h) = h^2$. Vi får da at:

$$\begin{aligned} u'(x) &= i'(h)h'(x) \\ &= 2h \cdot (-\sin x) \\ &= -2 \cos x \sin x \end{aligned}$$

Videre har vi da at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u \cdot (-2 \cos x \sin x) \\ &= -2 \cos x \sin x e^{\cos^2 x} \end{aligned}$$

b) Av (??) har vi at $2 \cos x \sin x = \sin(2x)$, og derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int -\sin(2x) e^{\cos^2 x} dx &= \int -2 \cos x \sin x e^{\cos^2 x} dx \\ &= \int f'(x) dx \\ &= f(x) + C \\ &= e^{\cos^2 x} + C \end{aligned}$$

Overgangen mellom andre og tredje linje følger av definisjonen av det ubestemte integralet.

??

a) Vi må vise at $(x^2 e^x)'$ tilsvarer uttrykket i integranden.

$$\begin{aligned} (x^2 e^x)' &= 2x e^x + x^2 e^x \\ &= x e^x (2 + x) \end{aligned}$$

b) Vi må vise at $(e^{\cos x + x^2})'$ tilsvarer uttrykket i integranden:

$$\begin{aligned} (e^{\cos x + x^2})' &= e^{\cos x + x^2} \cdot (\cos x + x^2)' \\ &= e^{\cos x + x^2} (-\sin x + 2x) \\ &= -e^{\cos x + x^2} (\sin x - 2x) \end{aligned}$$

?? Av (??) vet vi at perioden $\cos x$ er 2π . Dette betyr at hvis vi for en konstant c har at $a = c$, så er $b = a + 2\pi$. Integralet blir da:

$$\begin{aligned}\int_c^{c+2\pi} (\cos x + d) dx &= \left[\sin x + dx \right]_c^{c+2\pi} \\ &= \left[\sin(c + 2\pi) + d(c + 2\pi) - (\sin c + dc) \right] \\ &= 2d\pi\end{aligned}$$

Mellom andre og tredje linje har vi brukt det faktum at $\sin(c + 2\pi) = \sin c$. Gjennomsnittet kan altså skrives som:

$$\frac{1}{(c + 2\pi) - c} \cdot 2d\pi = d$$

??

a) Vi setter $u = x^2$ og $g(u) = e^u$. Siden $u' = 2x$ får vi:

$$\begin{aligned}\int x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int u' e^u dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} + C\end{aligned}$$

b) Vi starter med å finne det ubestemte integralet ved å bruke bytte av variabel. Vi setter $u = 2x^2 - 3$ og $g(u) = e^u$, siden $u' = 4x$ får vi:

$$\begin{aligned}\int 8x e^{2x^2-3} dx &= 2 \int 4x e^{2x^2-3} dx \\ &= 2 \int u' e^u dx \\ &= 2 \int e^u du \\ &= 2e^u + C\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir derfor:

$$\begin{aligned}\left[2e^{2x^2-3} \right]_1^2 &= 2 \left[e^{2 \cdot 2^2-3} - e^{2 \cdot 1^2-3} \right] \\ &= 2 \left[e^5 - e^{-1} \right]\end{aligned}$$

c) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = u$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= - \int \frac{u'}{u} dx \\ &= - \int \frac{1}{u} du \\ &= -\ln u + C \\ &= -\ln(\cos x) + C\end{aligned}$$

d) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = \frac{1}{u^3}$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{-u'}{u^3} dx \\ &= - \int u^{-3} dx \\ &= \frac{1}{2}u^{-2} + C\end{aligned}$$

Siden $u(0) = \cos 0 = 1$ og $u(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 2^{-1}$ blir det bestemte integralet:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^{2^{-1}} &= \frac{1}{2}[(2^{-1})^{-2} - 1^{-2}] \\ &= \frac{1}{2}[4 - 1] \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

e) Vi setter $u = 2x^2 + 5x$ og $g(u) = \frac{1}{u}$. Da er

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+5}{2x^2+5x} dx &= \int \frac{u'}{u} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(2x^2 + 5x) + C\end{aligned}$$

f) Vi setter $u = 3x^2 + 4x + 3$ og $g(u) = \frac{1}{u}$, og får da:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{6x+4}{3x^2+4x+3} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{u'}{u} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln u \\ &= \frac{1}{2} \ln (3x^2 + 4x + 3)\end{aligned}$$

??

Av (??) og (??) kan vi skrive:

$$\int \sin(2x) e^{1-\cos^2 x} dx = \int 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x}$$

Vi setter så $u = \sin x$ og $g(u) = 2ue^{u^2}$. Siden $u' = \cos x$ kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\int 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} dx &= 2 \int uu' e^{u^2} dx \\ &= 2 \int ue^{u^2} dx\end{aligned}$$

Vi setter nå $v = u^2$ og $h(v) = e^v$. Siden $v' = 2u$ får vi:

$$\begin{aligned}2 \int ue^{u^2} dx &= \int v' e^v dx \\ &= \int e^v dv \\ &= e^v + C \\ &= e^{u^2} + C \\ &= e^{\sin^2 x} + C\end{aligned}$$

??

b) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{\frac{1}{2}}$ og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \int uv' \, dx \\ &= uv - \int u'v \, dx \\ &= \ln x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int x^{-1} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C\end{aligned}$$

c) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{-2}$, og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = -x^{-1}$.

$$\begin{aligned}\int \ln x \, x^{-2} \, dx &= \int uv' \, dx \\ &= uv - \int u'v \, dx \\ &= \ln x (-x^{-1}) - \int x^{-1}(-x)^{-1} \, dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \, dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}\left[-\frac{1}{x}(\ln |x| + 1)\right]_1^e &= -\left[\frac{1}{e}(\ln e + 1) - \frac{1}{1}(\ln 1 + 1)\right] \\ &= -\left[\frac{2}{e} - 1\right] \\ &= 1 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

?? Vi setter $u = \sin x$ og $v' = \sin x$, og får da at $u' = \cos x$ og $v =$

$-\cos x$:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx \\ \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\end{aligned}$$

?? a) Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Altså kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\frac{13 - 4x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \\ 13 - 4x &= A(x - 3) + B(x - 2)\end{aligned}$$

Når $x = 3$ får vi:

$$\begin{aligned}13 - 4 \cdot 3 &= B(3 - 2) \\ 1 &= B\end{aligned}$$

Og når $x = 2$ får vi:

$$\begin{aligned}12 - 4 \cdot 2 &= A(2 - 3) \\ 5 &= -A \\ -5 &= A\end{aligned}$$

Det ubestemte integralet vi ønsker å løse kan derfor skrives som:

$$\int \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{5}{x - 2} \right) dx = \ln(x - 3) - 5 \ln(x - 2) + C$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}\left[\ln|x - 3| - 5 \ln|x - 2| \right]_4^5 &= \ln|5 - 3| - 5 \ln|5 - 2| - (\ln|4 - 3| - 5 \ln|4 - 2|) \\ &= \ln 2 - 5 \ln 3 - \ln 1 + 5 \ln 2 \\ &= 6 \ln 2 - 5 \ln 3\end{aligned}$$

?? Se eksempel på side ??

??

a) Tverrsnittet langs x -aksen blir en sirkel med høyde $\sqrt{r^2 - x^2}$. Tverrsnittsarealet blir derfor

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi \sqrt{r^2 - x^2}^2 \\ &= \pi(r^2 - x^2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[xr^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{\pi}{3} (3rr^2 - r^3 - (3(-r)r^2 - (-r)^3)) \\ &= \frac{\pi}{3} (3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$

?? a)

Volumet V er gitt ved ligningen:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 f^2 dx \\ &= \int_0^1 (e^x)^2 dx \\ &= \int_0^1 e^{2x} dx \end{aligned}$$

Vi setter $u = 2x$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 2$:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u' e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C \end{aligned}$$

Siden $u(0) = 0$ og $u(1) = 2$ blir det bestemte integralet:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^2 &= \frac{1}{2} [e^2 - e^0] \\ &= \frac{1}{2} [e^2 - 1]\end{aligned}$$

Gruble ??

Vi har at

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx$$

Vi setter $u = \sin x$ og $v' = \sin x$. Da er

$$u' = \cos x \qquad v = -\cos x$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx + \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Ettersom $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, følger det at

$$\begin{aligned} 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + x \\ \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$