

## Oppgaver for kapittel 0

### 0.1.1

a) Deriver funksjonen  $f(x) = 4x^5$ .

b) Finn det bestemte integralet  $\int_0^2 20x^4 dx$ .

### 0.1.2

Relasjonen mellom en funksjon  $F(x)$  og  $f(x)$  er at  $F'(x) = f(x)$ . Videre er  $F(1) = 1$  og  $F(4) = 9$ .

Finn det bestemte integralet  $\int_1^4 f(x) dx$ .

### 0.1.3

a) Deriver funksjonen  $f(x) = e^{\cos^2 x}$ .

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int -\sin(2x) e^{\cos^2 x} dx$$

### 0.1.4

Vis at

a)  $\int x(x+2)e^x dx = x^2e^x + C$

b)  $\int -e^{x^2+\cos x}(-2x + \sin x) dx = e^{\cos x+x^2} + C$

### 0.2.1

Finn integralene:

a)  $\int \frac{3}{4x} dx$

b)  $\int -\frac{7}{\cos^2 t} dt$

c)  $-4x^5$

d)  $\int \cos(\pi x) dx$

e)  $\int 4e^{-4t} dt$

f)  $\int \left( 2x^4 dx - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx$

g)  $\int \sqrt{x^5} dx$

### 0.2.2

Regn ut de bestemte integralene.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 (4x^3 - x) dx \quad \text{b) } \int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$$

### 0.2.3

Gjennomsnittet av en funksjon  $f(x)$  over et intervall  $[a, b]$  kan vi skrive som

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Gitt et vilkårlig tall  $c$ , vis at gjennomsnittet av  $f(x) = \cos x + k$  over intervallet  $[c, c + 2\pi]$  er lik  $k$ .

### 0.2.4

Bevis (??)-(??) ved å bruke integrasjon ved substitusjon.

### 0.2.5

Finn integralene:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x e^{x^2} dx & \text{b) } \int_1^2 8x e^{2x^2-3} dx & \text{c) } \int \tan x dx \\ \text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx & \text{e) } \int \frac{4x+5}{2x^2+5x} dx & \text{f) } \int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3} dx \end{array}$$

### 0.2.6

Anvend to av de trigonometriske identitetene og bytte av variabel to ganger for å finne integralet

$$\int \sin(2x) e^{1-\cos^2 x} dx$$

### 0.2.7

Finn det bestemte/ubestemte integralet:

$$\text{a) } \int (x-1) \cos x dx \quad \text{b) } \int \sqrt{x} \ln x dx \quad \text{c) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}$$

### 0.2.8

Vis at

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

### 0.2.9

Finn det bestemte/ubestemte integralet:

$$\text{a) } \int_4^5 \frac{13 - 4x}{x^2 - 5x + 6} \, dx \qquad \text{b) } \int \frac{41 - 4x}{(x - 5)(x + 2)} \, dx$$

$$\text{c) } \int \frac{x^2 + 9x - 16}{(x - 2)(x^2 - 1)} \, dx \qquad \text{d) } \int \frac{3x^2 - 14x + 10}{x^3 - 3x^2 + 2x} \, dx$$

### 0.2.10

Finn det ubestemte integralet:

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 - 20x + 2}{x^2 - x - 6} \, dx$$

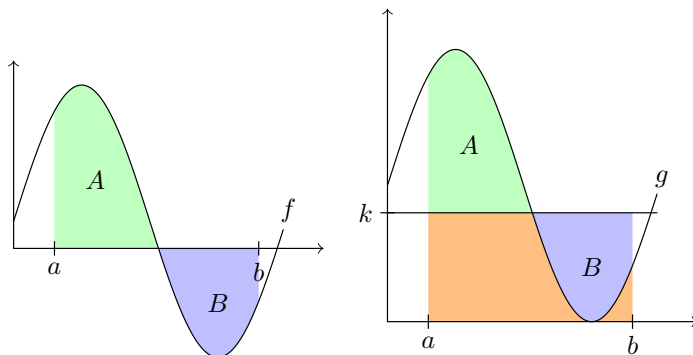
*Hint:* Bruk polynomdivisjon.

### 0.3.1

Relasjonen mellom to funksjoner  $f(x)$  og  $g(x)$  og en positiv konstant  $k$  er at

$$g = f + k$$

a) Ta det for gitt at  $f$  og  $g$  er som vist på figuren under.



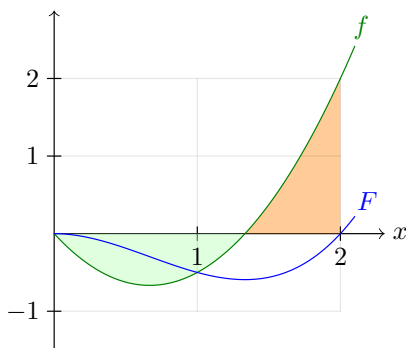
Forklar ut ifra en arealbetraktning hvorfor

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^b g \, dx - (b-a)k$$

b) Bekreft likheten i oppgave a) ved integrasjon.

### 0.3.2

Under vises grafen til  $F(x)$  og  $f(x)$ .  $F$  er en antiderivert av  $f$ .



Forklar hvorfor arealet av det oransje området er like stort som arealet av det grønne området.

### 0.4.1

La en kule med radius  $r$  være plassert i et koordinatsystem med variabelen  $x$  langs horisontalaksen. Kula er plassert slik at sentrum ligger i origo.

**a)** Lag en tegning og bestem kulas tverrsnitt  $A$  langs horisontalaksen, uttrykt ved  $r$  og  $x$ .

**b)** Finn volumet  $V$  av kula.

### 0.4.2

Finn volumet av omdreiningslegemene til funksjonene på intervallet  $[0, 1]$ :

**a)**  $f(x) = e^x$       **b)**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}$

### Gruble 1

(R2V23D1)

a) Vis at hvis  $f(x) = \tan x$ , så er  $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ .

b) Regn ut

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} dx$$

### Gruble 2

(R2H23D1)

Regn ut integralet

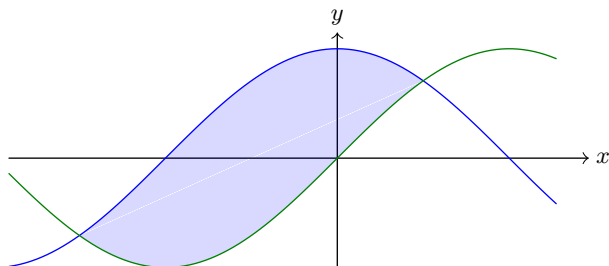
$$\int_{-1}^1 x^3 + 2x dx$$

Hva forteller svaret deg?

### Gruble 3

(R2H23D1)

Figuren viser grafene til funksjonene  $f(x) = \cos x$  og  $g(x) = \sin x$ .



Bestem arealet til det fargede området.

### Gruble 4

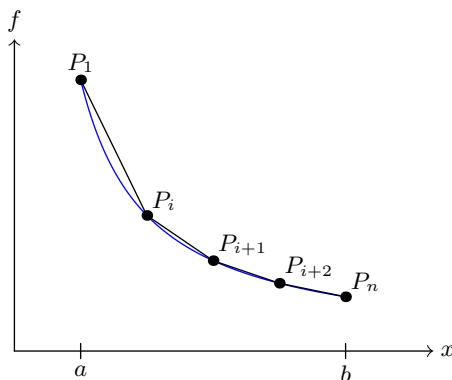
Gitt en funksjon  $f(x)$  integrerbar på intervallet  $[a, b]$ . Ta det for gitt at lengden  $l$  til grafen til  $f$  er gitt som

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i+1} - P_i|$$

For  $i, n \in \mathbb{N}$ , hvor  $P_i = (x_i, f(x_i))$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ , og  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = 0$ . Vis at vi da kan skrive

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + g^2} dx$$

hvor  $g(x) = f'(x)$ .



### Gruble 5

Bruk definisjonen fra (??) til å vise at

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$