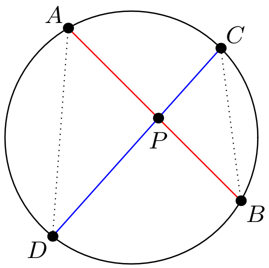
Oppgaver for kapittel 0

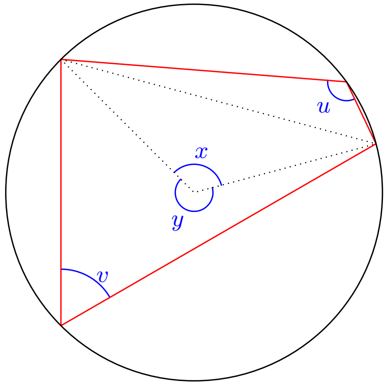
Gruble ??



Av regel **??** har vi at $\angle CBA = \angle CDA$. Da $\angle CPA = \angle DPB$ (de er toppvinkler), er dermed $\triangle PDA \sim \triangle PBC$. Altså har vi at

$$DP \cdot PC = AP \cdot PB$$

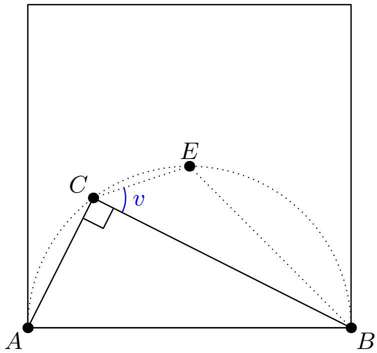
Gruble ??



Vi har at $y = 360 - x$. Da x og y er de tilhørende sentralvinklene til henholdsvis v og u, er

$$2u = 360^\circ - 2v$$
$$y = 180^\circ - v$$

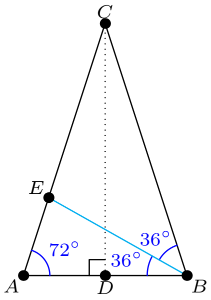
Gruble ??



Da $\triangle ABC$ er rettvinklet, er $\angle CBA = 90^\circ - \angle BAC$. Da $\angle BAC$ og $\angle CEB$ er periverivinkler som spenner over samme korde, er $CEB = 180^\circ - \angle BAC$. Da E er midtpunktet til kvadratet, er $\angle EBA = 45^\circ$, og dermed er

$$\begin{aligned} v &= 180^\circ - \angle CEB - \angle EBC \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle BAC) - (45^\circ - \angle BAC) \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

Gruble ??



Da $\angle BAC = \angle CBA = 72^\circ$, er $\triangle ABC$ likebeint ($AC = BC$) og $\angle ACB = 36^\circ$. Altså er også $\triangle BEC$ likebeint ($EB = EC$). $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ fordi de har $\angle BAC$ felles, og $\angle ACB = \angle EBD$. Vi setter $x = AB$ og $y = BC$, og får at

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{EA}{AB} \\ \frac{x}{y} &= \frac{y-x}{y} \\ xy + x^2 - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-y + \pm\sqrt{y^2 - 4y^2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} y \end{aligned}$$

Vi forkaster den negative løsningen for x, og får at

$$BD = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}y$$

Da $\sin 18^\circ = \frac{BD}{BC}$, er

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

??

a) Vi har at

$$AF = AD = c - r$$

$$FC = CE = a - r$$

Da $AF + FC = c$, er

$$\begin{aligned} c - r + a - r &= b \\ c + a - b &= 2r \end{aligned}$$

b) Med c som grunnlinje har $\triangle ABC$ høgde b. Av den klassiske arealformelen for en trekant (se MB) og formelen fra Oppgave **??** har vi da at

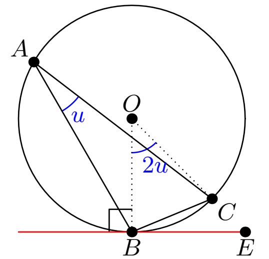
$$\begin{aligned} (a+b+c)r &= ac \\ r &= \frac{ac}{a+b+c} \end{aligned}$$

c) Av oppgave (a) og (b) er

$$\begin{aligned} c + a - b &= \frac{2ac}{a+b+c} \\ (c+a-b)(a+b+c) &= 2ac \\ (a+c)^2 - b^2 &= 2ac \\ a^2 + c^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Formelen kjenner vi igjen som Pytagoras' setning.

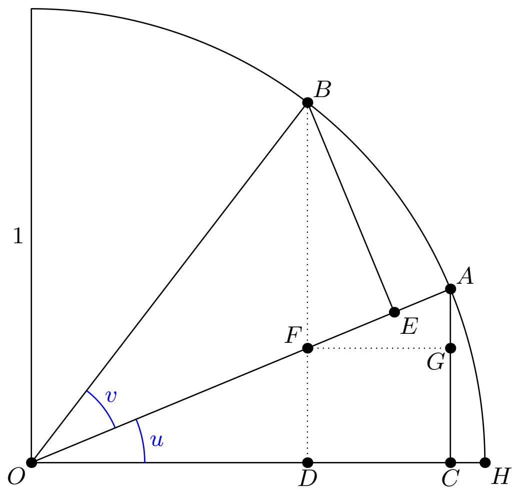
??



Vi setter $v = \angle BAC$. Da $\angle BAC$ er en periferivinkel, er $\angle BOC = 2v$. $\triangle BCO$ er likebeint, og derfor er $\angle CBO = 90^\circ - u$ (forklar for deg selv hvorfor). Nå har vi at

$$\angle EBC = 90^\circ - \angle CBO = u$$

Gruble ??



I figuren over merker vi oss at

$$EB = \sin v \qquad AC = \sin u$$

$$OE = \cos v \qquad OC = \cos u$$

Da $\triangle OCA \sim \triangle BEF$, har vi at

$$FE = \frac{BE}{OC} AC = \frac{\sin v}{\cos u} \sin u$$

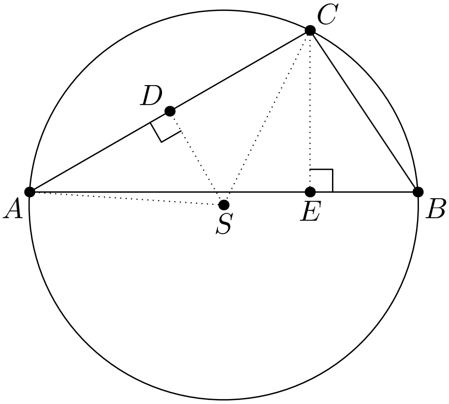
Videre har vi at $EA = OA - OE = 1 - \cos v$. Tilsvarende er $CH = 1 - \cos u$. I tillegg er

$$DC = FG = (FE + EA) \cos u = \left(\frac{\sin v}{\cos u} \sin u + 1 - \cos v \right) \cos u$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} OD &= OH - CH - DC \\ \cos(u+v) &= 1 - (1 - \cos u) - \left(\frac{\sin v}{\cos u} \sin u + 1 - \cos v \right) \cos u \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \end{aligned}$$

Gruble ??



Av regel **??** er $\angle CSA = 2\angle CBA$. Da $\triangle ASC$ er likesidet, er derfor $\angle DSA = \angle CBA$. Følgelig er $\triangle ASD \sim \triangle CBE$. Dette betyr at

$$\frac{a}{EC} = \frac{r}{\frac{1}{2}b}$$

$$r = \frac{ab}{2EC}$$

Da $2A_{\triangle ABC} = EC \cdot c$, er $EC = \frac{2A_{\triangle ABC}}{c}$, og dermed er

$$r = \frac{abc}{4A_{\triangle ABC}}$$

Gruble ??
Gitt $\triangle ABC$, hvor $\angle C = 90°$, $a = BC$, $b = AC$, og $c = AB$. Da er $4A_{\triangle ABC} = 2ab$. Av gruble **??** er da $r = \frac{c}{2}$. Altså er $c = 2r$, og er dermed en diameter i den omskrevne sirkelen.

Gruble ??
Vi setter $\angle ADC = u$. Av regel **??** er $\angle AOC = 2\angle ADC$. Da $\triangle AOC$ er likebeint ($AO = CO$), er dermed $\angle OAC = 90 - u$, og følgelig er $\angle BAC = u$. Dette betyr at $\triangle ABC$ og $\triangle BDA$ har to vinkler som er parvis like store, og dermed er de formlike. Altså er

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$

$$AB^2 = BC \cdot BD$$