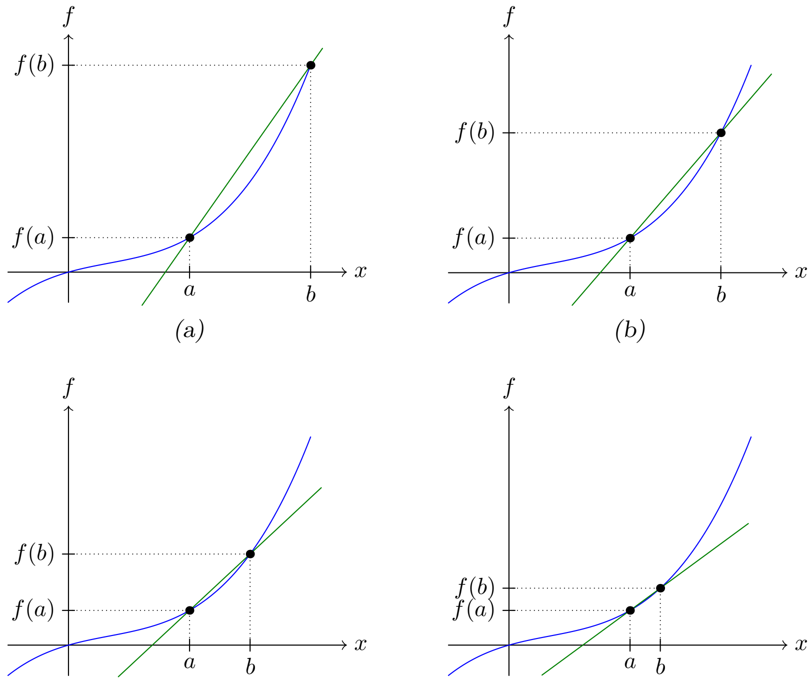
0.1 Definisjoner

Gitt en funksjon $f(x)$ og to x-verdier a og b, hvor $a < b$. Endringen til f relativ til endringen til x for disse verdiene er gitt som

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

I MB har vi sett at uttrykket over gir stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. I en matematisk sammenheng er det ekstra interessant å undersøke (1) når b nærmer seg a.



(a) (b) (c) (d)

Ved å sette $b = a + h$, hvor $h > 0$, kan vi skrive (1) som

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

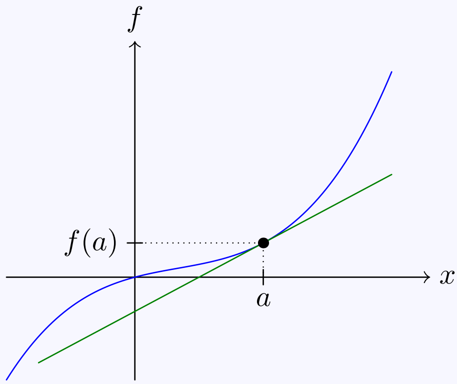
Å derivere innebærer å undersøke grenseverdien til denne brøken når h går mot 0.

Definisjon 0.1 Den deriverte

Gitt en funksjon $f(x)$. Den deriverte av f i $x = a$ er da gitt som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

Linja som har stigningstall $f'(a)$, og som går gjennom punktet $(a, f(a))$, kalles tangeringslinja til f for $x = a$.



Eksempel 1

Gitt $f(x) = x^2$. Finn $f'(2)$.

Svar

Vi har at

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2^2 + 4h + (h)^2 - 2^2}{h} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Gitt $f(x) = x^3$. Finn $f'(a)$.

Svar

Vi har at

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(3a^2 + 3ah + h^2\right) \\
&= 3a^2
\end{aligned}
$$

Altså er $f'(a) = 3a^2$.

Alternativ definisjon

En ekvivalent utgave av (2) er

$$
f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3}
$$

Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon $f(x)$ og en variabel k. Siden $f'(a)$ angir stigningstallet til $f(a)$ for $x = a$, vil en tilnærming til $f(a+k)$ være (se figur ???)

$$
f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k
$$

Det er ofte nyttig å vite differansen ε mellom en tilnærming og den faktiske verdien:

$$
\varepsilon = f(a+k) - \left[f(a) + f'(a)k\right] \tag{4}
$$

Vi legger merket til at[1] $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$, og skriver om (4) til en formel for $f(x+k)$:

[1] Dette overlates til leseren å vise.

Regel 0.2 Linearisering av en funskjon

Gitt en funskjon $f(x)$ og en variabel k. Da finnes en funksjon ε slik at

$$f(a+k) = f(a) + f'(a)k + \varepsilon \tag{5}$$

hvor $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$.

Tilnærmingen

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(x)k \tag{6}$$

kalles lineæarapproksimasjonen av $f(a+k)$.

0.2 Derivasjonsregler

0.2.1 Den deriverte

Eksempel 2 på side 3 belyser noe viktig; hvis grenseverdien i (2) eksisterer, vil $f'(a)$ være uttrykt ved a. Og selv om a betraktes som en konstant langs veien som fører til dette uttrykket, er det ingenting som hindrer oss i å etterpå behandle a som en variabel. Hvis $f'(a)$ er et resultat av derivasjon av funksjonen $f(x)$ er det også hendig å omdøpe a til x:

Regel 0.3 Den deriverte funksjonen

Gitt en funksjon $f(x)$. Den deriverte av f er funksjonen som fremkommer ved å erstatte a i (2) med x. Denne funksjonen skriver vi som $f'(x)$.

Eksempel

Gitt $f(x) = x^3$. Siden[1] $f'(a) = 3a^2$, er $f'(x) = 3x^2$.

[1] Se Eksempel 2, side 3.

Alternative skrivemåter

Alternative skrivemåter for f' er $(f)'$ og $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$.

Derivert med hensyn på

Derivasjon som vi har sett på så langt har vært en brøk med en differanse av x-verdier i nevner og den tilknyttede differansen av f-verdier i teller. Da sier vi at f er derivert med hensyn på x. I denne bokserien skal vi i all hovedsak se på funksjoner som bare er avhengige av én variabel. Gitt en funksjon $f(x)$, er det da underforstått at f' symboliserer f derivert med hensyn på x.

Samtidig er det greit å være klar over at en funksjon gjerne kan være avhengig av flere variabler. For eksempel er funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

en flervariabel funksjon, avhengig av både x og y. I dette tilfellet kan vi bruke skrive $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ for å indikere derivasjon med hensyn på x, og $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ for å indikere derivasjon med hensyn på y. Leseren må gjerne forklare for seg selv hvorfor følgende stemmer:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = 2x \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f = 3y^2,$$

0.2.2 Den deriverte av elementære funksjoner

Regel 0.4 Den deriverte av elementære funksjoner

For $x, r \in \mathbb{R}$ og

$$(e^x)' = e^x \tag{7}$$

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{8}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{9}$$

$$(\sin x)' = \cos(x) \tag{10}$$

$$(\cos x)' = -\sin(x) \tag{11}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{12}$$

Regel 0.5 Den deriverte av sammensatte funksjoner

Gitt $c \in \mathbb{R}$ og funksjonene $f(x)$ og $g(x)$. Da er

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

Definisjon 0.6 Den deriverte av en vektorfunksjon

Gitt funksjonene $f(t)$, $g(t)$ og $v(t) = [f(t), g(t)]$. Da er

$$v'(t) = [f'(t), g'(t)] \tag{13}$$

0.2.3 Kjerneregelen

La oss se på tre funksjoner f, g og u, hvor

$$f(x) = g\left[u(x)\right]$$

f beskrives direkte av x, mens g beskrives indirekte av x, via $u(x)$.

La oss bruke $f(x) = e^{x^2}$ som eksempel. Kjenner vi verdien til x, kan vi fort regne ut hva verdien til $f(x)$ er. For eksempel er

$$f(2) = e^4$$

Men vi kan også skrive $g\left[u(x)\right] = e^{u(x)}$, hvor $u(x) = x^2$. Denne skrivemåten impliserer at når vi kjenner verdien til x, regner vi først ut verdien til u, før vi så finner verdien av g:

$$u(2) = 4 \qquad , \qquad g\left[u(2)\right] = e^{u(2)} = e^4$$

Av derdef?? har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} \end{aligned}$$

Vi setter $k = u(x+h) - u(x)$. Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h}$$

Av (5) har vi at

$$g(u) - g(u+k) = g'(u)k + \varepsilon_g$$

Altså er

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{g'(u)k + \varepsilon_g}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k}\right)\frac{k}{h} \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$, er $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$. Videre har vi at $\lim\limits_{h\to 0} \frac{k}{h} = u'(x)$. Altså har vi at

$$\lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k}\right)\frac{k}{h} = g'(u)u'(x)$$

Regel 0.7 Kjerneregelen

For en funksjon $f(x) = g\left[u(x)\right]$, har vi at

$$f'(x) = g'(u)u'(x) \tag{14}$$

Eksempel

Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^{x^2+x+1}$.

Svar

Vi setter $u = x^2 + x + 1$, og får at

$$g(u) = e^u$$

$$g'(u) = e^u$$

$$u'(x) = 2x + 1$$

Altså er

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u(2x+1) \\ &= e^{x^2+x+1}(2x+1) \end{aligned}$$

0.2.4 Produkt- og divisjonsregelen

Gitt funksjonene f, u og v, hvor

$$f(x) = u(x)v(x)$$

Av defref?? er da

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

La oss nå skrive $u(x)$ og $v(x)$ som henholdsvis u og v, og $u(x+h)$ og $v(x+h)$ som henholdsvis $\tilde{u}$ og $\tilde{v}$:

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h}$$

Vi kan alltids legge til 0 i form av $\dfrac{u\tilde{v}}{h} - \dfrac{u\tilde{v}}{h}$:

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h} + \frac{u\tilde{v}}{h} - \frac{u\tilde{v}}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{(\tilde{u} - u)\tilde{v}}{h} + \frac{u(\tilde{v} - v)}{h} \right] \end{aligned}$$

Siden vi for enhver kontinuerlig funksjon g har at $\lim\limits_{h\to 0} \tilde{g} = g$ og

$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+k)-g(x)}{h} = g'$, er

$$f' = u'v + uv'$$

Regel 0.8 Produktregelen ved derivasjon

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $v(x)$, hvor $f = uv$ da er

$$f' = u'v + uv'$$

Eksempel 1

Finn den deriverte av funksjonen $f(x) = x^2 e^x$.

Svar

Vi setter $u(x) = x^2$ og $v(x) = e^x$, da er

$$f = uv \qquad u' = 2x \qquad v' = e^x$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= xe^x(2+x) \end{aligned}$$

Regel 0.9 Divisjonsregelen ved derivasjon

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $v(x)$, hvor $f = \dfrac{u}{v}$. Da er

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{15}$$

Eksempel

Finn den deriverte av funksjonen $f(x) = \frac{\cos x}{x^4}$.

Svar

Vi setter $u(x) = \cos x$ og $v(x) = x$, da er

$$f = uv \qquad u' = -\sin x \qquad v' = 4x^3$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= \frac{-\sin x \cdot x^4 - \cos x \cdot 4x^3}{x^8} \\ &= -\frac{x \sin x + 4\cos x}{x^5} \end{aligned}$$

Merk: Vi kan også finne f' ved å sette $u(x) = \cos x$ og $v(x) = x^{-4}$, for så å bruke produktregelen.

Regel 0.10 L'Hopitals regel I

Gitt to deriverbare funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, hvor

$$f(a) = g(a) = 0$$

eller hvor

$$\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g = \infty$$

Da er

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \lim_{x\to a} \frac{f'}{g'}$$

Eksempel

Finn grenseverdien til $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Svar

Vi setter $f(x) = e^x - 1$ og $g(x) = x$, og merker oss at $f(0) = g(0) = 0$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{f}{g} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f'}{g'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

0.3 Forklaringer

L'hoptial (forklaring)

Siden $f(a) = g(a) = 0$, er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Vi setter $k = a - x$, da har vi av linaprx?? at

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(x+h) = -f'(x)k - \varepsilon_f$$

$$g(x) - g(a) = g(x) - g(x+h) = -g'(x)k - \varepsilon_g$$

Altså er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) + \frac{\varepsilon_f}{k}}{g'(x) + \frac{\varepsilon_g}{k}}$$

Da $\lim\limits_{x\to a} k = 0$, har vi at $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varepsilon_f}{k} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$ Altså er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'hopital 2 (forklaring)

Vi har at

$$\lim_{x\to a} \frac{g}{f} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}}$$

Da $\lim\limits_{x\to a} f = \lim\limits_{x\to a} g = \infty$, må $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g} = 0$. Av Lhopital1?? har vi da at

$$\lim_{x\to a} \frac{g}{f} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f^2} f'}{\frac{1}{g^2} g'}$$

Multipliserer vi begge sider med $\lim\limits_{x\to a} \frac{f^2}{g^2}$, får vi at

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \lim_{x\to a} \frac{f'}{g'}$$

(forklaring)

Vi har at

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \left(uv^{-1}\right)'$$

Av produktregelen og kjerneregelen er da

$$\begin{aligned} f' &= u'v^{-1} - uv^{-2}v' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

(forklaring)

Likning (8)

Vi starter med å merke oss at

$$\begin{aligned} (\ln x^r)' &= (r \ln x)' \\ &= \frac{r}{x} \end{aligned}$$

Vi setter $u = x^r$. Av kjerneregelen har vi da at

$$\begin{aligned} \frac{r}{x} &= (\ln u)' \\ &= \frac{1}{u}u' \\ &= \frac{1}{x^r}(x^r)' \end{aligned}$$

Altså er

$$(x^r)' = \frac{r}{x}x^r = rx^{r-1}$$

Likning (9)

Vi har at $x = e^{\ln x}$. Vi setter $u = \ln x$ og $g(u) = e^u$. Da har vi at $x = g(u)$, og at

$$\begin{aligned} g'(u) &= e^u = e^{\ln x} = x \\ u'(x) &= (\ln x)' \end{aligned}$$

Av kjerneregelen har vi at

$$\begin{aligned} (x)' &= g'(u)u'(x) \\ &= x\,(\ln x)' \end{aligned}$$

Da[1] $(x)' = 1$, har vi at

$$1 = x\,(\ln x)'$$

Altså er

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Vi skal her anvende de to ligningene (se vedlegg??)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{I}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \tag{II}$$

Av (2) har vi at

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Ved (**??**) kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[\cos h - 1]\cos x - \sin x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cos x - \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \sin x \\
&= 0 - 1 \cdot \sin x \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Mellom tredje og fjerde linje i likningen over brukte vi (I) og (II).

Likning (11)
Av (**??**), (**??**) og (**??**) har vi at

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Bruker vi det faktum at $(\cos x)' = -\sin x$, i kombinasjon med kjerneregelen, får vi at

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)' \\
&= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

Likning (12)
Av kjerneregelen og (15) har vi at

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \cos x \cos^{-1} x + \sin x \left(\cos^{-1}\right)' \\
&= 1 + \sin x(-\cos^{-2} x)(-\sin x) \\
&= 1 + \tan^2 x \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

---

[1]Se oppgave ??.