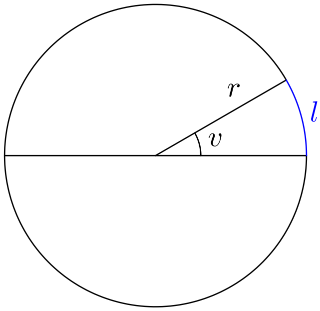
Oppgaver for kapittel 0

0.1.1

Utdanninsdirektoratet definerer størrelsen til en vinkel v mellom to linjestykker a og b, oppgitt i radianer, på følgende måte:

Forholdet mellom lengden på en bue mellom a og b og radiusen til buen.



I figuren over svarer dette til forholdet $\frac{l}{r}$.

Forklar hvorfor radianer ut ifra denne definisjonen også kan sees på som en buelengde langs enhetssirkelen.

0.1.2

Gjør om til radianer:

a) $60°$ **b)** $15°$

0.1.3

Gjør om til grader:

a) $\frac{11\pi}{12}$ **b)** $\frac{11\pi}{6}$

0.2.1

Bruk Pytagoras' setning og definisjonen av $\cos x$ og $\sin x$ til å vise at

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

0.2.2

Finn $\tan x$ når du vet at

a) $\sin x = 0$ og $\cos x = 1$ **b)** $\sin x = \frac{1}{2}$ og $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

0.2.3

Bruk $-$ og $+$ for å indikere henholdsvis negativ og positiv, og sett riktige markører i tabellen under.

	1. kvadrant	2. kvadrant	3. kvadrant	4. kvadrant
$\sin x$				
$\cos x$				
$\tan x$				

0.2.4

Bestem verdien til

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\cos\pi$ **c)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

0.2.5

Finn verdien til

a) $\operatorname{asin} 0$ **b)** $\operatorname{asin} \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{acos}(-1)$ **d)** $\operatorname{acos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\operatorname{atan} 1$ **f)** $\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

0.2.6

Bruk (**??**) til å vise at $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ når du vet at $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

0.2.7

a) Bruk én av de trigonometriske identitetene til å vise at

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

b) Gitt at $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Bruk dette og identiteten over til å vise at

$$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$$

0.2.8

Skriv om utrykket

$$\cos\left(3x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

til et sinusuttrykk.

0.2.9

Skriv om uttrykket

$$\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x)$$

til et sinusuttrykk.

0.3.1

Vis at alle løsninger av ligningen $\cos x = 0$ er gitt som

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

mens alle løsninger av ligningen $\sin x = 0$ er gitt som

$$x = \pi n$$

0.3.2

Løs ligningene:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 0 \quad , \quad x \in [0, 5]$

c) $2\sin(3x) = 1$

d) $\sin(2x - \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $2\sqrt{3}\tan\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$

0.3.3

Løs ligningene:

a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

c) $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

0.3.4

Løs ligningene:

a) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \sin\left(\frac{x}{2\pi}\right) = 1$

0.4.1
Løs ligningene:

a) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$

b) $\cos^2(3x) - 3\cos(3x) - 4 = 0$

c) $2\cos^2 x + \sqrt{8}\cos x + 1 = 0$

d) $\tan^2(\pi x) - \sqrt{12}\tan(\pi x) + 3 = 0$

e) $-\sin^2(3x) - 3\cos(3x) - 3 = 0$

0.4.2
Løs ligningene:

a) $-\cos^2 x + 15\sin^2 x = 3$

b) $\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right) - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$

0.5.1
Forklar hvorfor en cosinusfunksjon $f(x) = a\cos(kx + c) + d$ har

a) Maksimalverdier for $kx + c = 2\pi n$ og minimalverdier for $kx + c = \pi + 2\pi n$ når $a > 0$.

b) Maksimalverdier for $kx + c = \pi + 2\pi n$ og minimalverdier for $kx + c = 2\pi n$ når $a < 0$.

0.5.2
Gitt funksjonen

$$f(x) = -3\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) + 4$$

a) Finn perioden til f.

b) Hva er minimums- og maksimumsverdiene til f?

c) Finn alle x hvor f har minimums- og maksimumsverdier.

0.5.3

Forklar hvorfor en sinusfunksjon $f(x) = a\sin(kx + c) + d$ har

a) Maksimalverdier for $kx + c = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ og minimalverdier for $kx + c = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ når $a > 0$.

b) Maksimalverdier for $kx = \pi + 2\pi n$ og minimalverdier for $kx = 2\pi n$ når $a < 0$.

0.5.4

Gitt funksjonen

$$f(x) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \quad , \quad x \in [-5, 5]$$

a) Finn perioden til f.

b) Finn topppunktene til f.

c) Finn nullpunktene til f.

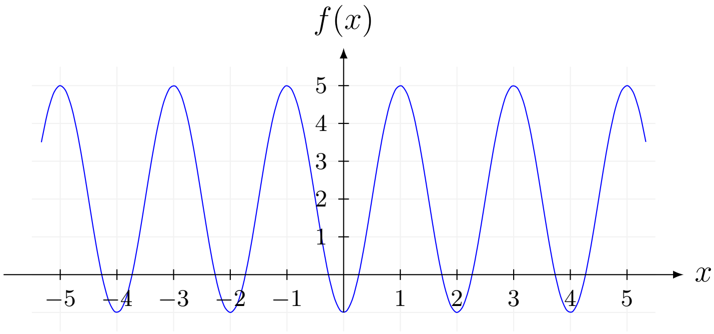
0.5.5

Om en cosinusfunksjon vet du følgende:

- likevektslinja til funksjonen er $y = 1$.
- (0,3) og $(2\pi, 3)$ er to naboliggende toppunkt.

Skisser grafen til funksjonen for $x \in [0, 3\pi]$.

0.5.6



a) Finn et cosinusuttrykk til grafen over.

b) Finn et sinusuttrykk til grafen over.

0.5.7

Forklar hvorfor alle funksjoner f på formen

$$f(x) = a\tan(kx + c) + d$$

har vertikale figr når

$$kx + c = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$$

0.5.8

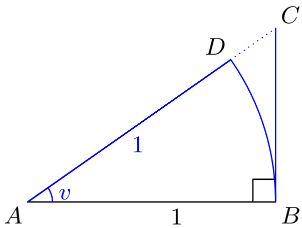
Finn den deriverte av funksjonen $f(x) = \frac{\cos x}{x^4}$.

Gruble 1

(R2V23D1)

I denne oppgaven skal du vise at $\lim_{v \to 0^+} \frac{\sin v}{v} = 1$.

I figuren nedenfor er $AB = AD = 1$, og buen mellom B og D er del av en sirkel med sentrum i A. Vi lar $\angle BAC = v$.



a) Bruk arealbetraktninger til å grunngi at

$$\frac{1}{2}\sin v < \frac{1}{2}v < \frac{1}{2}\tan v$$

b) Forklar at dette gir oss

$$1 < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$

c) bruk ulikhetene fra oppgave b) til å grunngi at $\lim_{v \to 0^+} \frac{\sin v}{v} = 1$.

Gruble 2

Gitt at

$$\tan x = \frac{a}{b}$$

Vis at $\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ og at $\cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Gruble 3

Gitt to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Forklar hvorfor

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = |u||v| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$