0.1 Monotoniegenskaper

0.2 Injektive funksjoner

0.1 Injektive funksoner

Gitt en funksjon $f(x)$. Hvis alle verdier til f er unike på intervallet $x \in [a, b]$, er f *injektiv* på dette intervallet.

Språkboksen

Et annet ord for injektiv er *én-entydig*.

0.3 Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 1$, som åpenbart er injektiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette betyr at likningen $f = 2x + 1$ bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på x eller f. Løser vi med hensyn på x, får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for f til, det "omvendte", et uttrykk for x. Siden x og f begge er variabler, er x en funksjon av f, og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den *omvendte* til f. Setter vi uttrykket til f inn i uttrykket til $x(f)$, får vi nødvendigvis x:

$$\begin{aligned} x\,(2x + 1) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle x som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både f og x, slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette $y = f$ og $g = x$. Den omvendte funksjonen g til f er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

0.2 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner $f(x)$ og $g(y)$. Hvis

$$g\,[f] = x$$

er f og g *omvendte* funksjoner.

Eksempel 1

Gitt funksjonen $f(x) = 5x - 3$.

a) Finn den omvendte funksjonen g til f.

b) Vis at $g\left[f(x)\right] = x$.

Svar

a) Vi setter $y = f$, og løser likningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= 5x - 3 \\ x &= \frac{y+3}{5} \end{aligned}$$

Da er $g(y) = \frac{y+3}{5}$.

b) Når $y = f$, har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x-3) \\ &= \frac{5x-3+3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

$\boldsymbol{f^{-1}}$

Hvis f og g er omvendte funksjoner, skrives g ofte som f^{-1}. Da er det veldig viktig å merke seg at f^{-1} ikke er det samme som $(f)^{-1}$. For eksempel, gitt $f(x) = x + 1$. Da er

$$f^{-1} = x - 1 \qquad , \qquad (f)^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

I alle andre tilfeller enn ved $n = -1$, vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$

0.4 Ekstremalpunkt

Merk: Et tall c kan omtales som et punkt i funskjonsdrøftinger.

0.3 Maksimum og minimum

Gitt en funksjon $f(x)$:

Absolutt maksimum og absolutt minimum:

- f har absolutt maksimum $f(c)$ hvis $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har absolutt minimum $f(c)$ hvis $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.

Lokalt maksimum og absolutt minimum:

- f har et lokalt maksimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in I$.
- f har et lokalt minimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \leq f(x)$ for $x \in I$.

0.4 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon $f(x)$ med maksimum/minimum $f(c)$. Da er

- $f(c)$ en ekstremalverdi for f.
- c et ekstremalpunkt for f. Nærmere bestemt et maksimalpunkt/minimumspunkt for f.
- $(c, f(c))$ et toppunkt/bunnpunkt for f.

0.5 Infleksjonspunkt og vendepunkt

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ har vi at

- Hvis $f''(c) = 0$ og f'' skifter fortegn i c, er c et *infleksjonspunkt* for f.
- Hvis c er er infleksjonspunkt for f, er $(c, f(x))$ et *vendepunkt*.
- Hvis f'' går fra positiv til negativ, går f fra konveks til konkav (og omvendt).

Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [-2, 4]$$

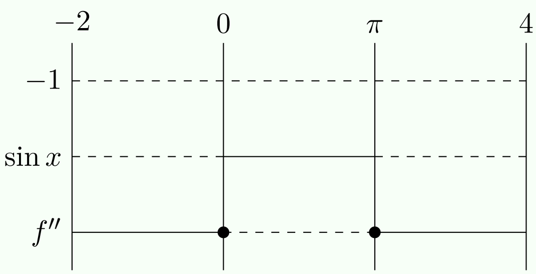
a) Finn infleksjonspunktene til f.
b) Finn vendepunktene til f.

Svar

a) Infleksjonspunktene finner vi der hvor $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (\sin x)'' &= 0 \\ -\sin x &= 0 \end{aligned}$$

Av $x \in D_f$ er det $x = 0$ og $x = \pi$ som oppfyller kravet fra ligningen over. For å finne ut om f'' skifter fortegn i disse punktene, setter vi opp et fortegnsskjema:



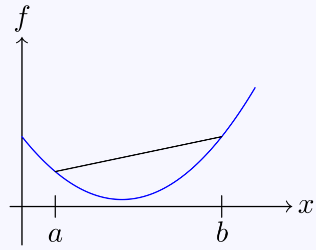
f'' går altså fra positiv til negativ i $x = 0$ og fra negativ til positiv i $x = \pi$. Dette betyr at f går fra konveks til konkav i $x = 0$ og fra konkav til konveks i $x = \pi$.

0.5 Konvekse og konkave funksjoner

0.6 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$.

Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger over grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konveks for $x \in [a, b]$.



Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger under grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konkav for $x \in [a, b]$.