0.1 Definisjoner

Gitt en funksjon $f(x)$ og to verdier x-verdier x_1 og x_2, hvor $x_1 < x_2$. Den gjennomsnittlige endringen til f fra x_1 til x_2 er da gitt som

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Uttrykket over forteller hvor mye funksjonsverdien endrer seg i forhold til hvor mye x-verdien endrer seg, og gir stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$.

$$figur$$

La oss finne den gjennomsnittlige endringen til $f(x) = x^2$ når $x = 2$ og $x = 3$.

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3^2 - 2^2}{1} = 5$$

Men vi kan jo så mye bedre enn dette. Det er ingenting som hindrer oss i å gjøre intervallet vi studerer mye mindre, og med dèt komme mye nærmere punktet vi er ute etter. Faktisk kan vi tenke oss en avstand mellom de to x-verdiene som er så nære 0 som overhodet mulig. Betegner vi denne avstanden som Δx så skriver vi $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, som indikerer at vi studerer tilfeller i grensen hvor Δx går mot 0.
Så om vi nå ser på gjennomsnittsstigningen til f mellom $x = 2$ og x i umiddelbar nærhet av 2, gir dette oss en uendelig god tilnærming til stignigstallet vi er ute etter. Resultatet kaller vi da *den deriverte av f med hensyn på x for $x = 2$*, som vi skriver som $f'(2)$:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

Så la oss nå prøve å regne ut $f'(2)$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^2 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\ &= 4 \end{aligned}$$

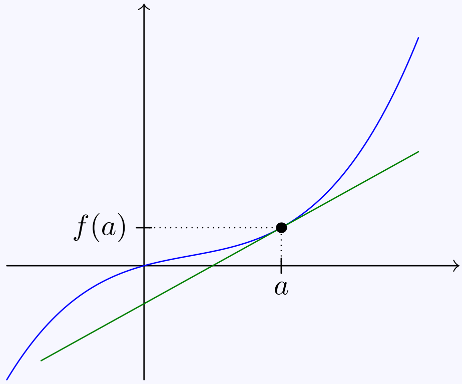
Metoden vi har brukt over kan brukes for en hvilken som helst kontinuerlig funksjon av x for et hvilket som helst valg av x.

R0.1 Definisjon av den deriverte

Gitt en funksjon $f(x)$. Den deriverte av f i $x = a$ er da gitt som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(x)}{h}$$

Linja som har stigingstall $f'(a)$, og som går gjennom punktet $(a, f(a))$, kalles *tangeringslinja* til f for $x = a$.



Eksempel

Gitt $f(x) = x^3$. Finn $f'(a)$.

Svar

Vi har at

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(3a^2 + 3ah + h^2\right) \\
&= 3a^2
\end{aligned}$$

Altså er $f'(a) = 3a^2$.

R0.2 Den deriverte som funksjon

Gitt en funksjon f. Den deriverte av f med hensyn på x er da[1] definert som

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

[1] Gitt at grenseverdien eksisterer.

Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon $f(x)$ og en variabel k. Siden $f'(a)$ angir stigningstallet til $f(a)$ for $x = a$, vil en tilnærming til $f(a+k)$ være (se figur ???)

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k$$

Det er ofte nyttig å vite differansen ε mellom en tilnærming og den faktiske verdien:

$$\varepsilon = f(a+k) - [f(a) + f'(a)k] \tag{2}$$

Vi legger merket til at[1] $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$, og skriver om (2) til en formel for $f(x+k)$:

R0.3 Linearisering av en funskjon

Gitt en funskjon $f(x)$ og en variabel k. Da finnes en funksjon ε slik at

$$f(a+k) = f(a) + f'(a)k + \varepsilon \tag{3}$$

hvor $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$.

Tilnærmingen

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(x)k$$

kalles **lineæarapproksimasjonen** av $f(x+k)$.

[1] Dette overlates til leseren å vise.

0.2 Derivasjonsregler

R0.4 Den deriverte av utvalgte funksjoner

$$
\begin{aligned}
(x^r)' &= rx^{r-1} \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
(\sin x)' &= \cos(x) \\
(\cos x)' &= -\sin(x) \\
(e^x)' &= e^x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x
\end{aligned}
$$

0.3 Kjerneregelen

Bevis for kjerneregelen
La oss se på tre funksjoner f og g som oppfyller likheten $f(x) = g(u(x))$. f beskrives direkte av x, mens g beskrives av indirekte av x som en funksjon av $u(x)$.

La oss bruke $f(x) = e^{x^2}$ som eksempel. Kjenner vi verdien til x, kan vi fort regne ut hva verdien til $f(x)$ er. For eksempel er:

$$f(2) = e^4$$

Men vi kan også skrive $g(u(x)) = e^{u(x)}$, hvor $u(x) = x^2$. Denne skrivemåten impliserer at når vi kjenner verdien til x, så regner vi først ut verdien til u, før vi til slutt finner verdien av g:

$$u(2) = 4 \qquad , \qquad g(u(2)) = e^{u(2)} = e^4$$

Så det vi har nå er fire unike størrelser: en varierende x, f som funksjon av x, u som funksjon av x og g som funksjon av u.

$$fig$$

Av derdef?? har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} \end{aligned}$$

Vi setter $k = u(x+h) - u(x)$. Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u+k\right] - g\left[u\right]}{h}$$

Av (3) har vi at

$$g(u) - g(u+k) = g'(u)k + \varepsilon_g$$

Altså er

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{g'(u)k + \varepsilon_g}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$, er $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$. Videre har vi at $\lim\limits_{h\to 0} \frac{k}{h} = u'(x)$. Altså har vi at

$$\lim_{h\to 0}\left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k}\right)\frac{k}{h} = g'(u)u'(x)$$

R0.5 Kjerneregelen

For en funksjon $f(x) = g(u(x))$ kan vi finne f derivert med hensyn på x som:

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

Eksempel

Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^{x^2+x+1}$
Svar: Vi setter $u = x^2 + x + 1$, og får:

$$\begin{aligned} g(u) &= e^u \\ g'(u) &= e^u \\ u'(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Altså blir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^{(x^2+x+1)}(2x+1) \end{aligned}$$

0.4 Produktregelen

Bevis for produktregelen

Si at vi har en funksjon f som består av to funksjoner u og v, som begge er avhengige av x:

$$f(x) = u(x)v(x)$$

For enhver kontinuerlig funksjon g er $g'(x)$ er definert som:

$$g' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$ kan vi derfor skrive som:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

La oss nå skrive $u(x)$ og $v(x)$ som u og v og $u(x + \Delta x)$ og $v(x + \Delta x)$ som $\tilde{u}$ og $\tilde{v}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{\Delta x}$$

Vi kan alltids legge til 0 i form av $\dfrac{u\tilde{v}}{\Delta x} - \dfrac{u\tilde{v}}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{\Delta x} + \frac{u\tilde{v}}{\Delta x} - \frac{u\tilde{v}}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(\tilde{u} - u)\tilde{v}}{\Delta x} + \frac{u(\tilde{v} - v)}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

Siden vi for enhver kontinuerlig funksjon g har at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \tilde{g} = g$ og at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{g} - g}{\Delta x} = g'$, får vi nå:

$$f' = u'v + uv'$$

R0.6 Produktregelen ved derivasjon

Gitt $f(x) = u(x)v(x)$ da er

$$f' = u'v + uv'$$

0.5 Divisjonsregelen

Dersom vi har uttrykket $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ kan vi bruke produktregelen og kjerneregelen:

$$\begin{aligned} f' &= \left(\frac{u}{v}\right)' \\ &= \left(uv^{-1}\right)' \\ &= u'v^{-1} - uv^{-2}v' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

R0.7 Divisjonsregelen ved derivasjon

Dersom vi har funksjonen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, kan vi finne $f'(x)$ ved:

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

L'hoptial (forklaring)

Siden $f(a) = g(a) = 0$, er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Vi setter $k = a - x$, da har vi av linaprx?? at

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(x+h) = -f'(x)k - \varepsilon_f$$

$$g(x) - g(a) = g(x) - g(x+h) = -g'(x)k - \varepsilon_g$$

Altså er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) + \frac{\varepsilon_f}{k}}{g'(x) + \frac{\varepsilon_g}{k}}$$

Da $\lim_{x \to a} k = 0$, har vi at $\lim_{x \to a} \frac{\varepsilon_f}{k} = \lim_{x \to a} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$ Altså er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'hopital 2 (forklaring)

Vi har at

$$\lim_{x\to a} \frac{g}{f} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}}$$

Da $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g = 0$, må $\lim_{x\to a} \frac{1}{f} = \lim_{x\to a} \frac{1}{g} = 0$. Av Lhopital1?? har vi da at

$$\lim_{x\to a} \frac{g}{f} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f^2} f'}{\frac{1}{g^2} g'}$$

Multipliserer vi begge sider med $\lim_{x\to a} \frac{f^2}{g^2}$, får vi at

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \lim_{x\to a} \frac{f'}{g'}$$