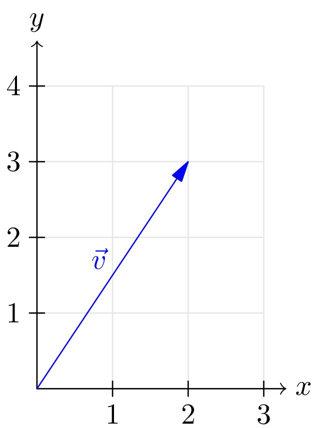
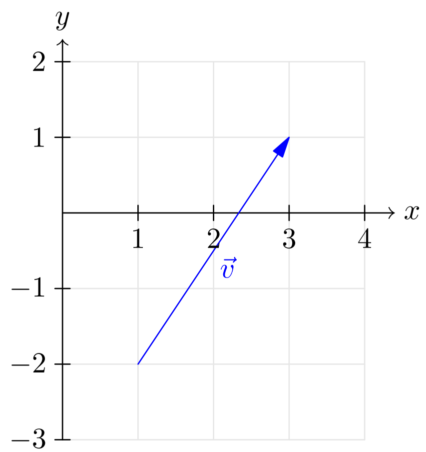
0.1 Introduksjon

En todimensjonal vektor angir en forflytning i et koordinatsystem med en x-akse og en y-akse. En vektor tegner vi som et linjestykke mellom to punkt, i tillegg til at vi lar en pil vise til hva som er endepunktet. Det betyr at forflytningen starter i punktet uten pil, og ender i punktet med pil.



(a)



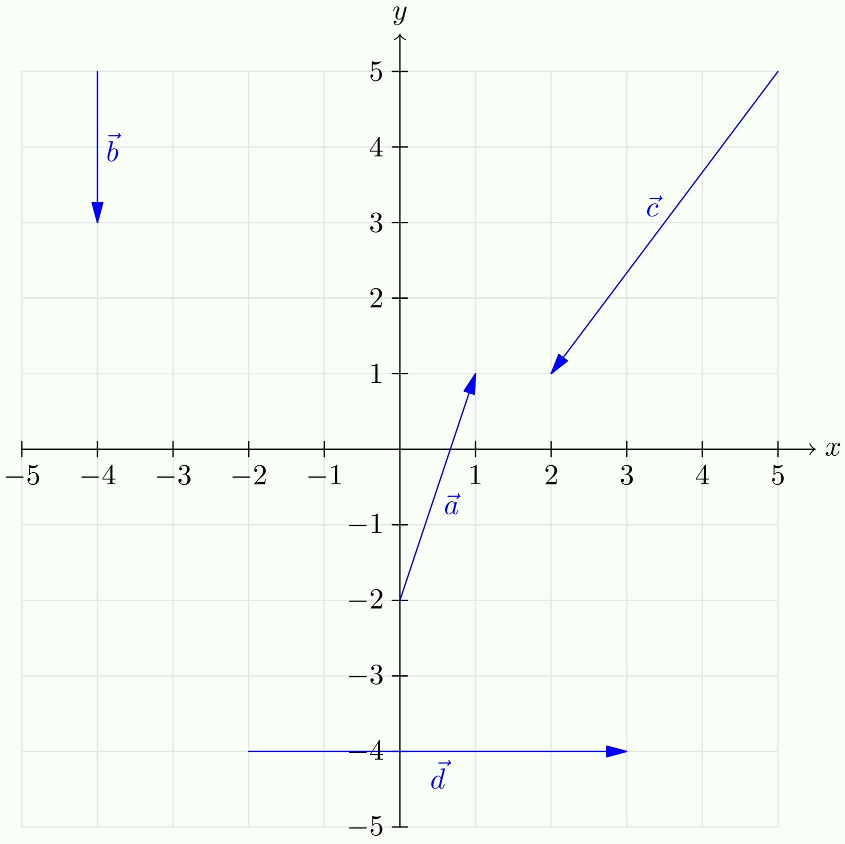
(b)

I figur *(a)* er vektoren $\vec{v}$ vist med startpunkt $(0, 0)$ og endepunkt (3,1). Når en vektor har startpunkt $(0, 0)$, sier vi at den er vist i grunn-stillingen. I figur *(b)* er $\vec{v}$ vist med startpunkt $(1, -2)$ og endepunkt $(3, 1)$. Forflytningen $\vec{v}$ viser til er å vandre 2 mot høgre langs x-aksen og 3 opp langs y-aksen. Dette skriver vi som $\vec{u} = [2, 3]$, som kalles $\vec{u}$ skrevet på komponentform.

Eksempel 1

$$\vec{a} = [1, 3] \qquad \vec{b} = [0, -2]$$

$$\vec{c} = [-3, -4] \qquad \vec{d} = [5, 0]$$



Regel 0.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor $\vec{v}$ med startpunkt (x_1, y_1) og endepunkt (x_2, y_2) er gitt som

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] \tag{1}$$

Eksempel 1

Skriv vektorene på komponentform.

- $\vec{a}$ har startpunkt $(1, 3)$ og endepunkt $(7, 5)$
- $\vec{b}$ har startpunkt $(0, 9)$ og endepunkt $(-3, 2)$
- $\vec{c}$ har startpunkt $(-3, 7)$ og endepunkt $(2, -4)$
- $\vec{d}$ har startpunkt $(-7, -5)$ og endepunkt $(3, 0)$

Svar

$$\vec{a} = [7 - 1, 5 - 3] = [6, 2]$$

$$\vec{b} = [-3 - 0, 2 - 9] = [-3, -7]$$

$$\vec{c} = [2 - (-3), -4 - 7] = [5, -11]$$

$$\vec{d} = [3 - (-7), 0 - (-5)] = [10, 5]$$

0.2 Regneregler

Regel 0.2 Regneregler for vektorer

Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, punktet $A = (x_0, y_0)$ og en konstant t. Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1) \tag{2}$$

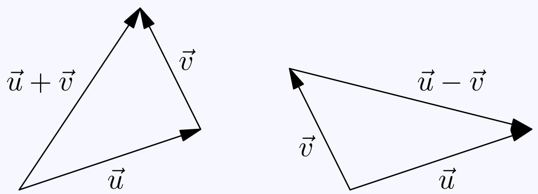
$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \tag{3}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \tag{4}$$

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \tag{5}$$

$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \tag{6}$$

Summen eller differansen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan vi tegne slik:



(a) (b)

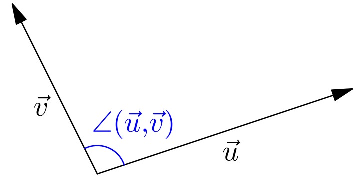
For en vektor $\vec{w}$ har vi videre at

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{7}$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \tag{8}$$

Vinkelen mellom to vektorer

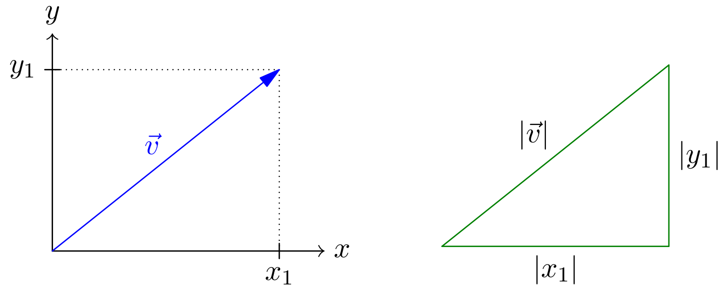
Vinkelen mellom to vektorer er (den minste) vinkelen som blir dannet når vektorene plasseres i samme startpunkt. For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skriver vi denne vinkelen som $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.



I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkler i grader, altså på intervallet $[0°, 180°]$.

0.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. *Lengden* til $\vec{v}$ er avstanden mellom startpunktet og endepunktet.



(a) *(b)*

Av enhver vektor kan vi danne en rettvinklet trekant hvor $|\vec{v}|$ er lengden til hypotenusen og $|x_1|$ og $|y_1|$ er de respektive lengdene til katetene. Dermed er $|\vec{v}|$ gitt av Pytagoras' setning.

Regel 0.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. Lengden $|\vec{v}|$ er da

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{9}$$

Eksempel 1

Finn lengden til vektorene $\vec{a} = [7, 4]$ og $\vec{b} = [-3, 2]$.

Svar

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

0.4 Skalarproduktet I

Regel 0.4 Skalarproduktet I

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, er *skalarproduktet* gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{10}$$

Språkboksen

Skalarproduktet kalles også *prikkproduktet* eller *indreproduktet*.

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{a} = [3, 2]$, $\vec{b} = [4{,}7]$ og $\vec{c} = [1, -9]$. Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

Svar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + 2(-9) = -15$$

Regel 0.5 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2} \tag{11}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \tag{12}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \tag{13}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} \tag{14}$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^{\,2}$$

når du vet at $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Svar

$$\begin{aligned}
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^2 &= \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 \\
&= \vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 \\
&= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2
\end{aligned}$$

Skalar??

0.5 Skalarproduktet II

Gitt vektoren $\vec{u}-\vec{v}$, hvor $\vec{u}=[x_1,y_1]$ og $\vec{v}=[x_2,y_2]$. Da er

$$\vec{u}-\vec{v}=[x_1-x_2,y_1-y_2]$$

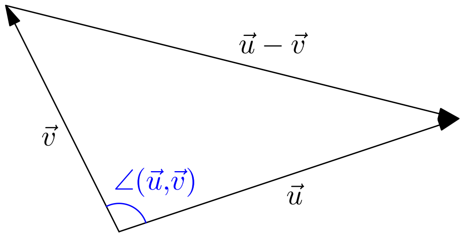
Av (**??**) har vi at

$$\begin{aligned}|\vec{u}-\vec{v}| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\ &= \sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2} \qquad (15)\end{aligned}$$

Ved hjelp av (10) og (11) kan vi skrive (15) som

$$|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{\vec{u}^{\,2}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}} \qquad (16)$$

Videre merker vi oss følgende figur:



. Av cosinussetningen[1] og (16) er

$$\begin{aligned}|(\vec{v}-\vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2+|\vec{u}|^2-2\vec{u}||\vec{v}|\cos\angle(\vec{u},\vec{v})\\ \vec{v}^{\,2}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}^{\,2} &= \vec{v}^{\,2}+\vec{u}^{\,2}-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\angle(\vec{u},\vec{v})\\ \vec{u}\cdot\vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}|\cos\angle(\vec{u},\vec{v})\end{aligned}$$

Regel 0.6 Skalarproduktet II

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) \qquad (17)$$

[1] Se ??

0.6 Vektorer vinkelrett på hverandre

Fra (17) kan vi gjøre en viktig observasjon; Hvis $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 90^\circ$, er $\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0$, og da blir

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Regel 0.7 Vinkelrette vektorer

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \tag{18}$$

Språkboksen

Det er mange måter å uttrykke at $\vec{u} \perp \vec{v}$ på. Blant annet kan vi si at

- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett på hverandre.
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står normalt på hverandre.
- $\vec{u}$ er en normalvektor til $\vec{v}$ (og omvendt).
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale.

Eksempel 1

Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5, -3]$, $\vec{b} = [6, -10]$ og $\vec{c} = [2, 7]$ er ortogonale.

Svar

Vi har at

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \cdot 6 + (-3)10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{a} \perp \vec{b}$. Videre er

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= 5 \cdot 2 + (-3)7 \cdot \\ &= 11 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{a}$ og $\vec{c}$ *ikke* ortogonale. Da $\vec{a} \perp \vec{b}$, kan heller ikke $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være ortogonale.

Nullvektoren

I forkant av *regel 0.7* har vi bare argumentert for at $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. For å rettferdiggjøre betingelsen som går begge veier i (18), må vi spørre: Kan vi få $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ om vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ *ikke* er $90°$?

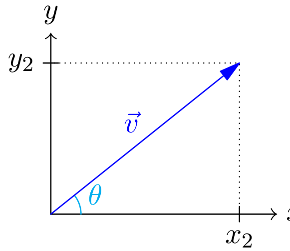
På intervallet $[0°, 180°]$ er det bare vinkelverdien $90°$ som resulterer i cosinusverdi 0. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av $\vec{u}$ eller $\vec{v}$ være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er *nullvektoren* $\vec{0} = [0, 0]$, som rett og slett ikke har noen retning[1]. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

[1]Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger!

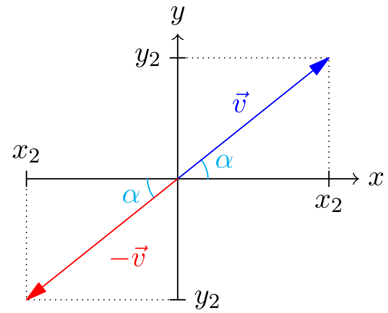
0.7 Parallelle vektorer

Definisjon 0.8 Parallelle vektorer

Hvis vinkelen mellom to vektorer er 0° eller 180°, er de parallelle.



(a)



(b)

Gitt to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. La θ og α være vinkelen mellom x-aksen og henholdsvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$, med x-aksen som høgre vinkelbein. Da er $\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$ og $\tan\alpha = \frac{y_2}{x_2}$. Hvis $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, er det to muligheter:

(i) $\theta = 0^\circ$ og $\alpha = 180^\circ$, eller omvendt.

(ii) $\theta = \alpha$

I begge tilfeller er $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ enten 0° eller 180°, og da er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle. Det omvendte gjelder også: Hvis punkt (i) eller (ii) gjelder, er $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Det er ofte praktisk å omskrive denne sammehengen til forholdet mellom samsvarende komponenter[1]:

[1] For vektorene $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$ er disse samsvarende komponenter:

- x_1 og x_2
- y_1 og y_2

Regel 0.9 Parallelle vektorer

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{19}$$

Alternativt, for et tall t har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{20}$$

Språkboksen

Når $\vec{u} = t\vec{v}$, sier vi at $\vec{u}$ er et *multiplum* av $\vec{v}$ (og omvendt). Vi sier også at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er *lineært uavhengige*.

Eksempel

Undersøk hvorvidt $\vec{a} = [2, -3]$ og $\vec{b} = [20, -45]$ er parallelle med $\vec{c} = [10, -15]$.

Svar

Vi har at

$$\vec{c} = 5[2, -4] = 5\vec{a}$$

Dermed er $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Da $\frac{20}{10} \neq \frac{-45}{15}$, er $\vec{b}$ og $\vec{c}$ *ikke* parallelle.

0.8 Vektorfunksjoner; parameterisering

Definisjon 0.10

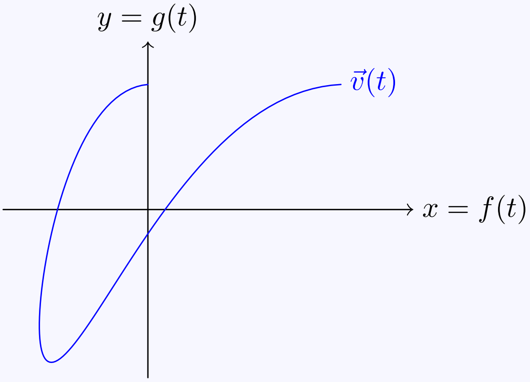
Gitt to funksjoner $f(t)$ og $g(t)$. En vektor $\vec{v}$ på formen

$$\vec{v}(t) = [f(t), g(t)]$$

er da en vektorfunksjon.

$\vec{v}$ kan skrives på parameterisert form som

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{21}$$

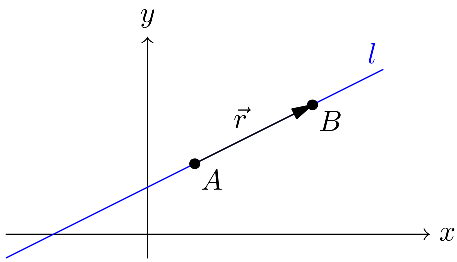


Merk

Visuelt sett er den største forskjellen mellom en funskjon $f(x)$ og en vektorfunksjon $\vec{v}(t)$ at grafen til f bare kan skjære et bestemt punkt én gang, mens grafen til $\vec{v}$ kan skjære et bestemt punkt uendelig mange ganger.

0.8.1 Vektorfunksjonen til ei linje

Gitt ei linje l, som vist i figuren under



Hvis en vektor $\vec{r}$ er parallell med l, kalles den en *retningsvektor* for linja. Si at $\vec{r} = [a, b]$ er en retningsvektor for l, og at $A = (x_0, y_0)$ er et punkt på l. Om vi starter i A og vandrer parallellt med $\vec{r}$, kan vi være sikre på at vi fortsatt befinner oss på linja. Dette må bety at vi for en variabel t kan nå et vilkårlig punkt $B = (x, y)$ på linja ved følgende utregning:

$$B = A + t\vec{r}$$

På koordinatform kan vi skrive dette som[1]

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Altså kan linja skrives som en vektorfunksjon:

Regel 0.11 Linje som vektorfunksjon

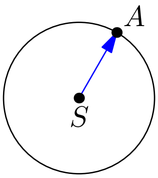
Ei linje $\vec{l}(t)$ som går gjennom punktet $A = (x_0, y_0,)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [a, b]$ er gitt som

$$\vec{l} = [x_0 + at, y_0 + bt]$$

[1] Se (2).

0.9 Sirkellikningen

Gitt en sirkel med sentrum $S = (x_0, y_0)$ og et punkt $A = (x, y)$, som ligger på buen til sirkelen.



Da er

$$\overrightarrow{SA} = [x - x_0, y - y_0]$$

Av (9) er da

$$\left|\overrightarrow{SA}\right|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Hvis vi lar r være radien til sirkelen, er $\left|\overrightarrow{SA}\right| = r$, og dermed kan vi uttrykke r ved koordinatene til S og A.

Regel 0.12 Sirkelligningen

Gitt en sirkel radius r og sentrum $S = (x_0, y_0)$. Hvis punktet $A = (x, y)$ ligger på buen til sirkelen, er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Eksempel

Finn sentrum og radien til sirkelen gitt av likningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0 \tag{22}$$

Svar

Vi starter med å lage fullstendige kvadrat:

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 2^2$$

$$y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 5^2$$

Altså kan vi skrive (22) som

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 - 2^2 - 5^2 - 20 = 0$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 7^2$$

Altså har sirkelen sentrum $(2, -5)$ og radius 7.

0.10 Determinanter

Regel 0.13 2×2 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v})$ av to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [b, c]$ er gitt som

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-1, 3]$ og $\vec{v} = [-2, 4]$. Bestem $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

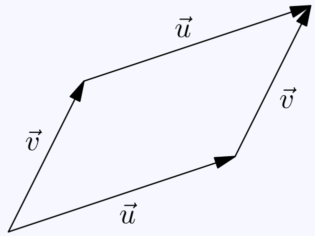
Svar

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Regel 0.14 Arealformler med determinanter

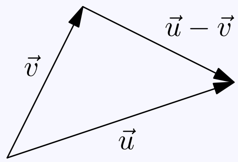
Arealet A til et parallellogram formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{23}$$



Arealet A til en trekant formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

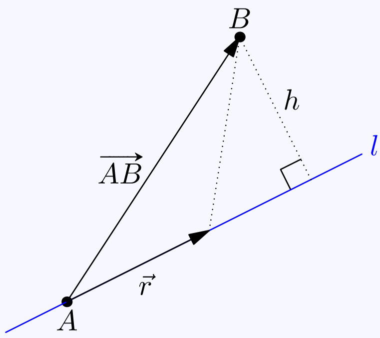
$$A = \frac{1}{2}|\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{24}$$



Regel 0.15 Avstand mellom punkt og linje

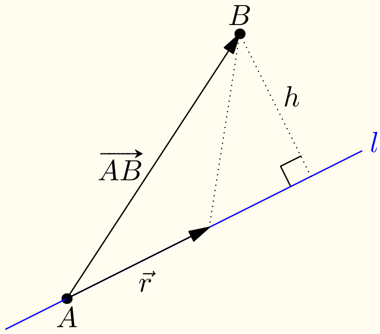
Avstanden h mellom et punkt B og en linje gitt av punktet A og retningsvektoren $\vec{r}$ er gitt som

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|} \tag{25}$$



(forklaring)

La en linje l i rommet være gitt av et punkt A og en retningsvektor $\vec{r}$. I tillegg ligger et punkt B utenfor linja, som vist i figuren under



Den korteste avstanden fra B til linja er høyden h i trekanten utspent av $\vec{r}$ og $\overrightarrow{AB}$. Arealet til denne trekanten er gitt ved (24):

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{r}\right)\right|$$

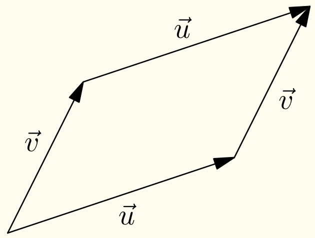
Av den klassiske arealformelen for en trekant har vi nå at

$$\frac{1}{2}|\vec{r}|h = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{r}\right)\right|$$

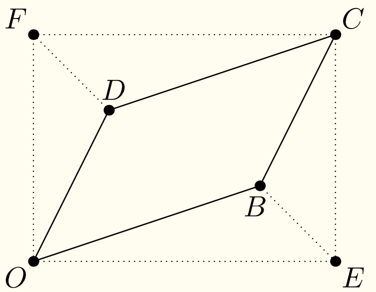
$$h = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{r}\right)\right|}{|\vec{r}|}$$

0.14 Arealformler med determinanter (forklaring)

Vi lar A_N betegne arealet til en geometrisk form N.



(a)



(b)

Gitt to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$, hvor $a, b, c, d > 0$, som vist i figur *(a)*. Plasserer vi vektorene i grunnstillingen er punktene vist i figur *(b)* gitt som

$$O = (0, 0) \qquad B = (a, b) \qquad C = (a + b, c + d)$$

$$D = (c, d) \qquad E = (a + c, 0) \qquad F = (0, b + d)$$

Med OE som grunnlinje har $\triangle OEB$ høgde b, altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$ og $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OBE} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

I figurene har vi antatt at (den minste) vinkelen mellom $\vec{v}$ og x-aksen er mindre enn vinkelen mellom $\vec{u}$ og x-aksen. I omvendt tilfelle ville vi fått at

$$A_{\square OECF} = bc - ad$$

Altså er

$$A_{\square OECF} = |ac - bd|$$

På lignende måte kan det vises at (23) gjelder for alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se oppgave **??**.