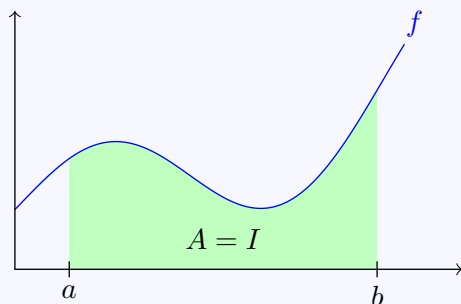


## 0.1 Bestemt og ubestemt integral

### 0.1 Integral som areal

Gitt en funksjon  $f(x)$  som er positiv og kontinuerlig for alle  $x \in [a, b]$ . **Integralet**  $I$  til  $f$  på intervallet  $x \in [a, b]$  tilsvarer da arealet avgrenset av  $x$ -aksen, linjene  $x = a$  og  $x = b$ , og grafen til  $f$ .



Gitt en funksjon  $f(x)$ , som vist i *figur 1*. Vi ønsker nå å finne en tilnærming for integralet  $I$  til  $f$  på intervallet  $[a, b]$ .

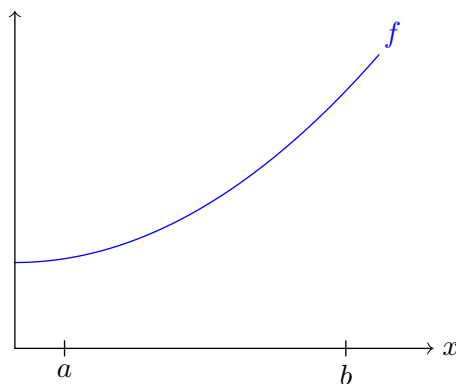


Figure 1

Vi starter med å dele  $[a, b]$  inn i tre delintervaller, som da får bredden  $\Delta x = \frac{b-a}{3}$ . Videre bruker vi  $f(x)$  i starten av hvert delintervall som høyden i et rektangel.  $x$ -verdiene dette gjelder kaller vi  $x_1 = a$ ,  $x_2$  og  $x_3$ . Vi kan nå tilnærme  $I$  som summen av tre areal,  $s_1$ ,  $s_2$  og  $s_3$ :

$$\begin{aligned} I &\approx s_1 + s_2 + s_3 \\ &\approx f(a)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \\ &\approx [f(a) + f(x_2) + f(x_3)] \Delta x \end{aligned}$$

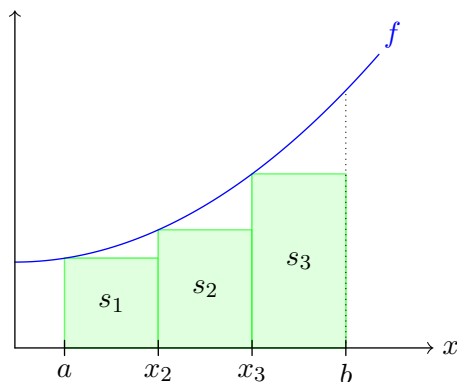


Figure 2

Intuitivt vil vi tenke at jo mindre intervaller vi bruker, jo bedre må tilnærmingen være.

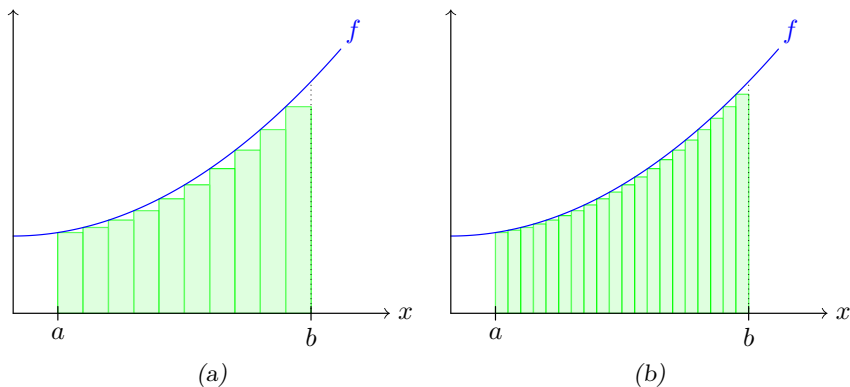


Figure 3: a) 10 intervaller b) 20 intervaller

Lar vi  $n$  være antall delintervaller, og  $n \rightarrow \infty$ , får vi at

$$\begin{aligned}
 I &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \Delta x \\
 &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x
 \end{aligned} \tag{1}$$

hvor  $x_i = a + (i - 1)\Delta x$  og  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  (legg merke til at  $x_1 = a$ ). Det kan vises at grenseverdien i (1) er lik  $I$ , og det fører oss til følgende definisjon:

## 0.2 Bestemt integral I

**Det bestemte integralet**  $I$  av en funksjon  $f(x)$  over intervallet  $[a, b]$  er gitt som

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (2)$$

hvor  $x_i = a + (i - 1)\Delta x$  og  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

### Eksempel

Finne det bestemte integralet av  $f(x) = x$  på intervallet  $x \in [0, 4]$ .

### Svar

Vi har her at  $f(x_i) = x_i = (i - 1)\Delta x$ , hvor  $\Delta x = \frac{4}{n}$ . Setter vi dette inn i (2), får vi at

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i - 1) \left( \frac{4}{n} \right)^2 \\ &= 4^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= 4^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{n^2 + n}{2} - n \right) \\ &= 16 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

*Merk:* I overgangen mellom første og andre linje i ligningen over har vi brukt summen av en aritmetisk rekke.

I kommende seksjoner skal vi finne integraler på en helt annen måte enn i eksempelet over. Læresetningen som sørger for dette er så viktig at den rett og slett kalles **analysens fundamentalteorem**<sup>1</sup>. Da teoremet gir oss en metode som omgår utregning av summer, lønner det seg å skrive integralet på en mer kompakt form:

### 0.3 Bestemt integral II

Det bestemte integralet  $I$  av en funksjon  $f(x)$  over intervallet  $[a, b]$  skrives som

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

#### Omskriving

I overgangen mellom (2) og (3) har vi erstattet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n$  med  $\int_a^b$ ,  $\Delta x$  med  $dx$ , og i tillegg fjernet alle indekser.

#### 0.1.1 Den antideriverte

Vi skal nå se på en definisjon som kan virke veldig triviell, men som viser seg å være svært viktig i neste delseksjon.

La oss starte med å se på funksjonen  $f(x) = x^2$ . Å derivere  $f$  mhp.  $x$  byr på få problemer:

$$f' = 2x$$

Hva nå med den deriverte av  $g(x) = x^2 + 1$ ? Svaret blir det samme som for  $f'$ :

$$g' = 2x$$

Allerede nå innser vi at det finnes en haug av funksjoner, rett og slett uendelig mange, som har  $2x$  som sin deriverte. Tiden er derfor inne for å lage en samlebetegnelse for alle funksjoner med samme deriverte:

### 0.4 Den antideriverte

Hvis  $F(x)$  er en deriverbar funksjon og  $F'(x) = f(x)$ , da er  $F$  en antiderivert av  $f$ .

---

<sup>1</sup>Analyse i matematisk sammenheng kan, kort oppsummert, sies å være studien av funksjoner. Et teorem er en læresetning som kan bevises.

## Eksempel

Undersøk om følgende funksjoner er en antiderivert til  $f(x) = 2x + e^x$ :

$$g(x) = x^2 + e^x$$

$$h(x) = x^2 + e^{2x}$$

$$k(x) = x^2 + e^x + 4$$

## Svar

Vi finner de deriverte av  $g$ ,  $h$  og  $k$ :

$$g'(x) = 2x + e^x$$

$$h'(x) = 2x + 2e^{2x}$$

$$k'(x) = 2x + e^x$$

Siden  $g'(x) = k'(x) = f(x)$ , mens  $h'(x) \neq f(x)$ , er bare  $g(x)$  og  $k(x)$  en antiderivert til  $f$ .

## 0.1.2 Analysens fundamentalteorem

### 0.5 Analysens fundamentalteorem

Gitt en funksjon  $f(x)$  definert på intervallet  $[a, b]$ . Hvis  $F$  er en antiderivert til  $f$ , er

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

### Eksempel

Gitt funksjonen  $f(x) = e^{\sin x}$ . Finn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx$ .

### Svar

Siden  $f$  er en antiderivert til  $f'(x)$ , har vi at

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \\ &= e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^{\sin 0} \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

## 0.1.3 Ubestemte integral

Vi har hittil sett på det **bestemte integralet**, som har sitt navn fordi integralet er over et intervall der start- og sluttverdien er gitt. Det *ubestemte* integralet til en funksjon  $f(x)$  skriver vi derimot som

$$\int_c^x f(t) dt$$

Navnet ubestemt kommer av at  $c$  er en vilkårlig konstant og at  $x$  er en varierende verdi<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Det kan kanskje se litt rart ut at vi har skrevet  $f(t)$  i integralet når vi snakker om  $f(x)$ , men dette gjøres bare for å skille mellom de to varierende verdiene  $x$  og  $t$ .  $x$  kan være en hvilken som helst verdi, men for det ubestemte integralet ser vi på  $f$  for verdiene  $t \in [a, x]$ , altså  $f(t)$ . Og da er det ikke  $x$  som varierer, men  $t$ , derav  $dt$ .

Hvis vi lar  $F$  være en antiderivert til  $f$ , har vi fra (4) at:

$$\int_c^x f(t) dt = F(x) - F(c)$$

Siden  $c$  er en konstant, må  $-F(c)$  også være det. Denne kalles **integrasjonskonstanten**, og omdøpes gjerne til  $C$ . Det er også vanlig å forenkle skrivemåten til det ubestemte integralet ved å fjerne grensene og bare skrive  $f(x) dx$  etter integraltegnet.

## 0.6 Ubestemt integral

Det ubestemte integralet av  $f(x)$  er gitt som

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (5)$$

Hvor  $F$  er en antiderivert til  $f$  og  $C$  er en vilkårlig konstant.

## Merk

Når ikke annet er nevnt, tar vi det heretter for gitt at størrelser skrevet som store bokstaver er vilkårlige konstanter som resultat av integrasjon.

## Eksempel 1

Ved derivasjon vet vi at  $(x^2)' = 2x$ . Bruk dette til å finne  $\int 2x dx$ .

## Svar

Fra derivasjonen ser vi at  $x^2$  er en antiderivert til  $2x$ . Vi kan dermed skrive

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

## Eksempel 2

Ved derivasjon vet vi at  $(x^2 + 3)' = 2x$ . Bruk dette til å finne  $\int 2x \, dx$ .

### Svar

Fra derivasjonen ser vi at  $x^2 + 3$  er en antiderivert til  $2x$ . Vi kan dermed skrive

$$\int 2x \, dx = x^2 + 3 + C$$

Men siden  $C$  er en vilkårlig konstant, kan vi liksågodt lage oss en ny konstant  $D = C + 3$ , og får da at

$$\int 2x \, dx = x^2 + D$$

*Merk:* Siden integrasjonskonstanter er vilkårlige, kan vi tillate oss å komprimere flere konstanter til én. I utregningen over kunne vi skrevet  $C$  opp igen, underforstått at 3 var ”trekt inn” i denne konstanten:

$$\int 2x \, dx = x^2 + 3 + C = x^2 + C$$



## 0.2 Integralregning

Å finne bestemte og ubestemte integraler er et stort og viktig felt innenfor matematikken. Analysens fundamentalteorem forteller oss at nøkkelen er å finne en antiderivert til funksjonen vi ønsker å integrere.

### 0.2.1 Integralet av utvalgte funksjoner

Vi skal etterhvert se at å finne integraler ofte krever spesielle metoder, men noen grunnleggende relasjoner bør vi huske:

#### 0.7 Ubestemte integraler

For to funksjoner  $f(x)$  og  $g(x)$ , og to konstanter  $k$  og  $C$ , er

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (6)$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (7)$$

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C \quad (k \neq -1) \quad (8)$$

$$\int \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) + C \quad (9)$$

$$\int \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \sin(kx) + C \quad (10)$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x+k} dx = \ln|x+k| + C \quad (13)$$

## Eksempel 1

Finn det bestemte integralet  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{1 - \sin^2 x} dx$ .

### Svar

Vi starter med å observere at  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ . I tillegg vet vi fra (7) at konstanten 8 kan trekkes utenfor integralet. Vi kan derfor skrive integralet vårt som

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Fra (12) vet vi at  $\tan x$  er en antiderivert til  $\frac{1}{\cos^2 x}$ . Når vi har funnet en antiderivert fører vi gjerne slik<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx &= 8 [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 8 \left[ \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right] \\ &= 8[1 - 0] \\ &= 8 \end{aligned}$$

*Merk:* Bruken av klammeparantes er bare en annen måte å skrive (4) på.

---

<sup>1</sup>Forklar for deg selv hvorfor vi ikke trenger å ta hensyn til konstanten når vi skal finne et bestemt integral.

## Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet  $\int \left( \frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx$ .

### Svar

Vi utnytter at  $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$  og at  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ . Ved (6) og (8) kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx &= \int \left( x^{-4} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx \\ &= \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= -\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C \end{aligned}$$

### 0.2.1 Integralet av utvalgte funksjoner (forklaring)

(6) og (7) følger direkte av (??) og (??).

Ut ifra definisjonen av det ubestemte integralet (se (5)) har vi at

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

hvis  $F' = f$ . For alle ubestemte integraler gitt i (8)-(12) kan dette sjekkes via enkle derivasjonoperasjoner og er derfor overlatt til leseren.

## 0.2.2 Bytte av variabel

Vi skal nå se på en metode som kalles *bytte av variabel*<sup>1</sup> (også kalt *substutisjon*). Med denne kan vi ofte forenkle integralregningen betraktelig.

### 0.8 Bytte av variabel

Gitt funksjonene  $f(x)$ ,  $u(x)$  og  $g(u)$ . Hvis  $\int f(x) dx$  kan skrives om til  $\int g(u)u' dx$ , kan integralet løses med  $u$  som variabel:

$$\int g(u)u' dx = \int g(u) du \quad (14)$$

### Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int 8x \sin(4x^2) dx$$

#### Svar

Vi setter  $u(x) = 4x^2$  og  $g(u) = \sin u$ . Dermed blir  $u' = 8x$ , og da er

$$\begin{aligned} \int 8x \sin(4x^2) dx &= \int u' g(u) dx \\ &= \int g(u) du \\ &= \int \sin u du \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos(4x^2) + C \end{aligned}$$

**Merk:** Når integralet vi skal finne er mhp.  $x$ , er det viktig at sluttuttrykket har  $x$  som eneste variabel.

---

<sup>1</sup>Det er flere framgangsmåter for denne metoden. Den vi her presenterer er, etter forfatterens mening, den raskeste for integraler som er pensum i R2. For mer avanserte integraler bør man kjenne til framgangsmåten presentert i [vedlegg ??](#).

## Eksempel 2

Finn det bestemte integralet

$$\int_0^2 x^2 e^{2x^3} dx$$

### Svar

Vi setter  $u(x) = 2x^3$  og  $g(u) = e^u$ , da blir  $u' = 6x^2$ . I integralet vi skal løse mangler vi altså faktoren 6 for å kunne anvende oss av (14). Men vi kan alltid gange integralet vårt med 1, skrevet som  $\frac{6}{6}$ . Da kan vi trekke 6-tallet vi ønsker inn i integralet, og la resten av brøken forbli utenfor:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 e^{2x^3} dx &= \frac{6}{6} \int_0^2 x^2 e^{2x^3} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 6x^2 e^{2x^3} dx \end{aligned}$$

Nå ligger alt til rette for å bytte variabel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \int_0^2 6x^2 e^{2x^3} dx &= \frac{1}{6} \int_0^2 u' g(u) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 g(u) du \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 e^u du \\ &= \frac{1}{6} [e^u]_0^2 \\ &= \frac{1}{6} [e^{2x^3}]_0^2 \\ &= \frac{1}{6} (e^2 \cdot 2^3 - e^{2 \cdot 0^2}) \\ &= \frac{1}{6} (e^{16} - 1) \end{aligned}$$

Det finnes også en alternativ måte for å regne ut bestemte integral ved bytte av variabel, se [vedlegg ??](#) for denne.

### Eksempel 3

Buelengden til grafen til en funksjon  $f(x)$  på intervallet  $[a, b]$  er gitt som

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx \quad (\text{I})$$

Finn lengden til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad x \in [0, 5]$$

### Svar

Vi har at

$$f' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Og videre at

$$(f')^2 = \frac{1}{4}x$$

Det ubestemte integralet i (I) blir da

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{4}x} dx$$

Vi setter  $u = 1 + \frac{1}{4}x$  og  $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$ . Da er  $u' = \frac{1}{4}$ . Nå har vi at

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{1}{4}x} dx &= 4 \int u^{\frac{1}{2}} u' dx \\ &= 4 \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\int_0^5 \sqrt{1 + (f')^2} dx &= \frac{8}{3} \left[ \left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\&= \frac{8}{3} \left( \left(1 + \frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \\&= \frac{8}{3} \left( \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \\&= \frac{8}{3} \left( \frac{27}{8} - 1 \right) \\&= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

*Merk:* En litt lettere utrekning kunne vi fått ved å observere at

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x}$$

Med denne omskrivingen kunne vi valgt substitusjonen  $u = 4 + x$ , og dermed fått at  $u' = 1$ .

### 0.2.3 Delvis integrasjon

Hvis vi ikke finner et passende bytte av variabel for å løse et integral, kan vi isteden prøve med *delvis integrasjon*. Vi starter med å utlede ligningen som legger grunnlaget for metoden.

Gitt produktet av to funksjoner  $u(x)$  og  $v(x)$ , altså  $uv$ . Av produktregelen ved derivasjon (se [TM1](#)) har vi at

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Videre integrerer<sup>1</sup> vi begge sider av ligningen over mhp.  $x$ :

$$\begin{aligned}\int (uv)' dx &= \int (u'v + uv') dx \\ uv &= \int (u'v + uv') dx \\ uv - \int u'v dx &= \int uv' dx\end{aligned}$$

## 0.9 Delvis integrasjon

For to funksjoner  $u(x)$  og  $v(x)$  har vi at

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \quad (15)$$

### Eksempel 1

Integrer funksjonen  $f(x) = x \ln x$ .

#### Svar

Vi observerer at  $f(x)$  er sammensatt av  $x$  og  $\ln x$ . Trikset bak delvis integrasjon er å sette én av disse til å være funksjonen  $u(x)$  og den andre til å være den deriverte av  $v(x)$ , altså  $v'(x)$ . Da har vi en ligning som i (15) og kan (forhåpentligvis) bruke denne til å finne integralet vi søker.

Vi må integrere  $v'$  for å finne  $v$  og derivere  $u$  for å finne  $u'$ . Siden  $\ln x$  er lett å derivere, men vanskelig å integrere, setter vi

$$\begin{aligned}u &= \ln x \\ v' &= x\end{aligned}$$

Da må vi ha at<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}u' &= \frac{1}{x} \\ v &= \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Altså kan vi skrive (rekkefølgen på  $v'$  og  $u$  har selvsagt ingent-

---

<sup>1</sup>Når vi har flere ubestemte itegraler, trenger vi bare ta med integrasjonskonstanten for én av dem. Derfor er ikke konstanten fra integrasjonen av  $(uv)'$  tatt med.



ing å si i (15))

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int v' u \, dx \\&= uv - \int u' v \, dx \\&= \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x \, dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Hvorfor ikke  $v = \frac{1}{2}x^2 + C$ ? Vi hadde jo da fått samme  $v'$ .

Hvis vi lar  $V$  betegne en antiderivert til  $v'$ , kan vi skrive  $v = V + C$ . Av (15) har vi da at

$$\begin{aligned}\int uv' \, dx &= u(V + C) - \int u'(V + C) \, dx \\&= u(V + C) - \int u'V \, dx - \int Cu' \, dx \\&= uV + Cu - \int u'V \, dx - Cu \\&= uV - \int u'V \, dx\end{aligned}$$

Vi har endt opp med et uttrykk hvor  $C$  ikke lenger deltar. Vi får altså det samme svaret uansett hva verdien til  $C$  er, og da velger vi selvsagt fra starten av at  $C = 0$ .

## Eksempel 2

Integrer funksjonen  $f(x) = \ln x$ .

### Svar

Vi starter med å skrive  $f(x) = \ln x \cdot 1$ , og setter

$$u = \ln x$$

$$v' = 1$$

Vi får da at

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$v = x$$

$\int f \, dx$  finner vi nå ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}\int \ln x \cdot 1 \, dx &= \int uv' \, dx \\ &= uv - \int u'v \, dx \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

## 0.2.4 Delbrøksoppspaltning

Gitt integralet

$$\int \frac{4x + 5}{(x + 1)(x + 2)} \, dx$$

Etter litt testing vil vi finne at både delvis integrasjon og bytte av variabel kommer til kort i vår søken etter en antiderivert. Hva vi heller kan gjøre, er å ta i bruk *delbrøksoppspaltning*.

Vi merker oss da at integranden<sup>1</sup> er en brøk med nevneren  $(x + 1)(x + 2)$ . Dette betyr at den kan skrives som to separate brøker med  $(x + 1)$  og  $(x + 2)$  som nevnerne:

$$\frac{4x + 5}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} \quad (16)$$

---

<sup>1</sup>For  $\int f(x) \, dx$  sier vi at  $f$  er *integranden*.

$A$  og  $B$  er to konstanter, vår oppgave blir nå å bestemme verdien til disse.

Vi starter med å gange begge sider av (16) med fellesnevneren:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}(x+1)(x+2) = \left( \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \right) (x+1)(x+2)$$

$$4x+5 = A(x+2) + B(x+1)$$

For det rette valget av  $A$  og  $B$  er uttrykkene over like for alle verdier av  $x$ . Når  $x = -1$ , har vi bare  $A$  som ukjent:

$$4 \cdot (-1) + 5 = A(-1+2) + B(-1+1)$$

$$1 = A$$

Og ved å sette  $x = -2$ , finner vi  $B$ :

$$4 \cdot (-2) + 5 = A(-2+2) + B(-2+1)$$

$$-3 = -B$$

$$3 = B$$

Nå kan vi altså skrive

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Dette er to brøker vi kan å integrere<sup>1</sup> (se (13)):

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left( \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x+1| + 3\ln|x+2|$$

---

<sup>1</sup>Obs! I søken etter  $A$  og  $B$  valgte vi verdiene  $x = -1$  og  $x = -2$ . I ligningene hvor vi satte inn disse verdiene var dette helt uskyldig, men i integralet må vi være observante. Vi får nemlig 0 i nevner hvis én av disse verdiene ligger i intervallet vi skal integere over. Er det snakk om et bestemt integral må vi derfor passe på at dette ikke er tilfelle.

## 0.10 Integrasjon ved delbrøksoppspaltning

For integraler på formen

$$\int \frac{a + bx + cx^2 + \dots}{(x - d)(x - e)(x - f)\dots} dx$$

hvor  $a, b, c, \dots$  er konstanter, skriver vi om integranden til

$$\frac{A}{(x - d)} + \frac{B}{(x - e)} + \frac{C}{(x - f)} + \dots$$

og finner så de ukjente konstantene  $A, B, C, \dots$

### Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} dx$$

#### Svar

Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden, og får at

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x + 1)(x - 1)}$$

Denne brøken ønsker vi å skrive som

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

For å finne  $A, B$  og  $C$ , omskriver vi ligningen ved å gange med fellesnevneren  $x(x + 1)(x - 1)$ :

$$3x^2 + 3x + 2 = A(x + 1)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 1)$$

Ligningen må holde for alle verdier av  $x$ . Vi setter først  $x = 0$ , og får at

$$\begin{aligned} 2 &= A \cdot (-1) \\ -2 &= A \end{aligned}$$

Videre setter vi  $x = -1$ :

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1)^2 + 3(-1) + 2 &= B \cdot (-1)(-1 - 1) \\ 1 &= B \end{aligned}$$

Til slutt setter vi  $x = 1$ :

$$\begin{aligned}3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 &= C(1 + 1) \\4 &= C\end{aligned}$$

Integralet vi skal finne kan vi derfor skrive som

$$\int \left( -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-1} \right) dx = -2 \ln |x| + \ln |x+1| + 4 \ln |x-1| + D$$

## Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + x - 4}{x^2 + x - 2} dx$$

### Svar

Hvis telleren har potenser av høyere orden<sup>1</sup> enn nevneren, må vi starte med en polynomdivisjon:

$$\begin{aligned}(x^3 + 5x^2 + x - 4) : (x^2 + x - 2) &= x + 4 + \frac{-x + 4}{x^2 + x - 2} \\&\quad - \frac{(x^3 + x^2 - 2x)}{4x^2 + 3x - 4} \\&\quad - \frac{(4x^2 + 4x - 8)}{-x + 4}\end{aligned}$$

Vi observerer videre at nevneren i brøken kan omskrives til  $(x - 1)(x + 2)$ , for to konstanter  $A$  og  $B$  har vi altså at

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{-x+4}{x^2+x-2}$$

$$A(x+2) + B(x-1) = -x+4$$

Når  $x = -2$ , får vi at

$$\begin{aligned}B(-2-1) &= -(-2) + 4 \\B &= -2\end{aligned}$$

Og når  $x = 1$ , er

$$\begin{aligned}A(1+2) &= -1 + 4 \\A &= 1\end{aligned}$$

Integralet blir derfor

$$\int \left( x + 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

---

<sup>1</sup>Her har telleren tre som høyeste orden, mens nevneren har to.

## 0.3 Areal og volum

### 0.3.1 Avgrenset areal

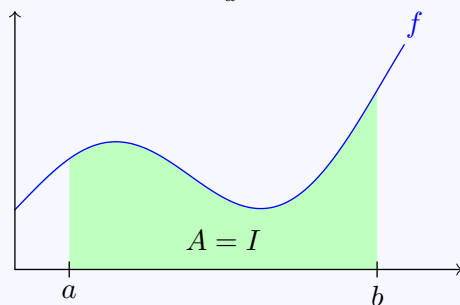
Arealet avgrenset av grafen til  $f$ ,  $x$ -aksen, og linjene  $x = a$  og  $x = b$  skal vi for enkelhetsskyld kalle **arealet avgrenset av  $f$  for  $x \in [a, b]$** . I [seksjon 0.1](#) har vi sett at det er en sterk sammenheng mellom dette arealet og det bestemte integralet av  $f$ :

#### 0.11 Integral som areal I

Gitt en kontinuerlig funksjon  $f(x)$  og to tall  $a$  og  $b$  der  $a < b$ .

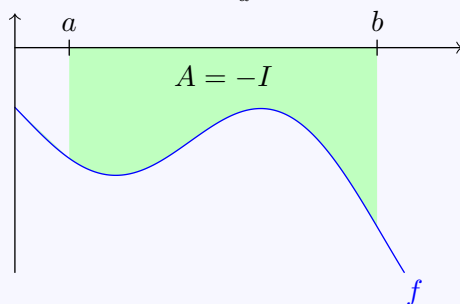
Hvis  $f \geq 0$  for  $x \in [a, b]$ , er arealet  $A$  avgrenset av  $f$  på dette intervallet gitt som

$$A = \int_a^b f \, dx$$



Hvis  $f \leq 0$  for  $x \in [a, b]$ , er arealet  $A$  avgrenset av  $f$  på dette intervallet gitt som

$$A = - \int_a^b f \, dx$$



## Areal avgrenset av to funksjoner

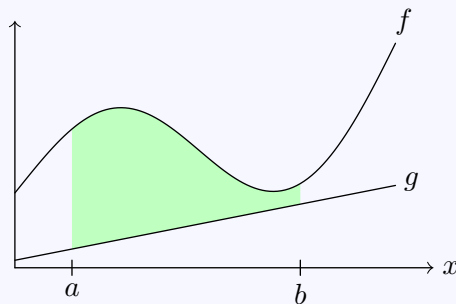
Noen ganger ønsker vi også å finne arealet avgrenset av to funksjoner. Da må vi sørge for at vi har tilstrekkelig med informasjon om disse før vi utfører integrasjonen:

### 0.12 Integral som areal II

Gitt to kontinuerlige funksjoner  $f(x)$  og  $g(x)$  og tre tall  $a$ ,  $b$  og  $c$  der  $a < c < b$ .

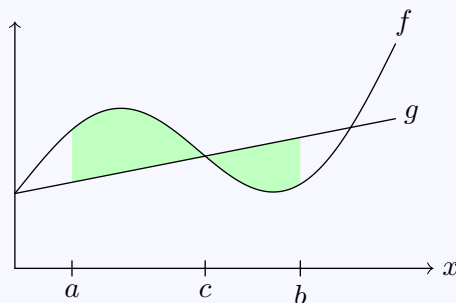
Hvis  $f > g$  for  $x \in [a, b]$ , er arealet  $A$  avgrenset mellom  $f$  og  $g$  på dette intervallet gitt ved

$$A = \int_a^b (f - g) dx \quad (17)$$



Hvis  $f \geq g$  for  $x \in [a, c]$  og  $g \geq f$  for  $x \in [c, b]$ , er arealet  $A$  avgrenset mellom  $f$  og  $g$  for  $x \in [a, b]$  gitt ved

$$A = \int_a^c (f - g) dx + \int_c^b (g - f) dx \quad (18)$$





## Eksempel

Gitt funksjonene  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  og  $g(x) = 2x - 1$ . Vi har da at  $f \geq g$  for  $x \leq 1$  og at  $g \geq f$  for  $x \geq 1$ . Finn arealet  $A$  avgrenset av  $f$  og  $g$  for  $x \in [0, 2]$ .

## Svar

Ut ifra informasjonen over er arealet gitt ved ligningen

$$A = \int_0^1 (f - g) dx + \int_1^2 (g - f) dx$$

Vi starter med å regne ut de to integralene hver for seg:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f - g) dx &= \left[ -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x^2 - x) \right]_0^1 \\ &= - \left[ \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x^2 - x \right]_0^1 \\ &= - \left[ \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) + 1^2 - 1 \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) + 0^2 - 0 \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (g - f) dx &= \left[ x^2 - x + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_1^2 \\ &= 2^2 - 2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) \\ &\quad - \left( 1^2 - 1 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) \right) \\ &= 2 - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

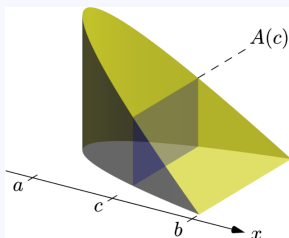
Summen av disse to integralene er 2, som altså er arealet.

### 0.3.2 Volumet av en figur

Vi har sett hvordan integraler kan brukes til å finne arealer, men de kan også brukes til å finne volumer:

#### 0.13 Integral som volum

Gitt en tredimensjonal figur plassert i et koordinatsystem, med endepunktene satt til verdiene  $a$  og  $b$  langs  $x$ -aksen.



La videre  $A(x)$  være tverrsnittsarealet av figuren for verdien  $x$ . Volumet  $V$  av figuren er da gitt som

$$V = \int_a^b A dx \quad (19)$$

#### Eksempel

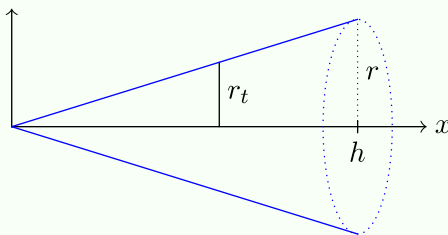
Vis at volumet  $V$  av ei rett kjegle er gitt som

$$V = \frac{1}{3} \pi h r^2$$

hvor  $r$  er radiusen til grunnflata og  $h$  er høyden til kjegla.

#### Svar

Vi plasserer kjegla inn i et koordinatsystem med høyden langs  $x$ -aksen og spissen plassert i origo.



Radiusen  $r_t(x)$  kan beskrives som en rett linje med stigningstall  $\frac{r}{h}$ :

$$r_t(x) = \frac{r}{h}x$$

Arealet  $A(x)$  av tverrsnittet blir da

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi r_t^2 \\ &= \pi \left( \frac{r}{h} \right)^2 x^2 \end{aligned}$$

Altså er volumet av kjegla gitt som

$$\begin{aligned} \int_0^h A \, dx &= \int_0^h \pi \left( \frac{r}{h} \right)^2 x^2 \, dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi h r^2 \end{aligned}$$

### 0.3.3 Volum av omdreiningslegemer

Si vi har en funksjon  $f(x)$  gitt på intervallet  $[a, b]$ , med en graf som vist i figur 4a. Tenk nå at vi dreier linjestykket  $360^\circ$  om  $x$ -aksen. Formen vi da har "skjært" ut, vist i figur 4b, er det vi kaller *omdreiningslegemet* til  $f(x)$  på intervallet  $[a, b]$ .

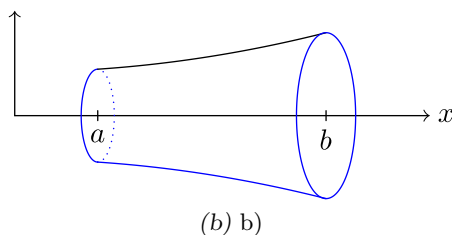
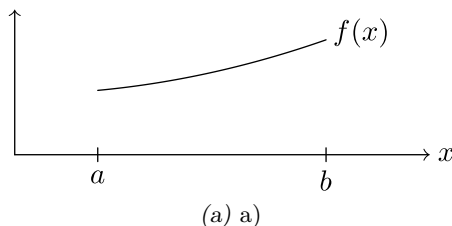


Figure 4: a) Grafen til  $f$ . b) Omdreiningslegemet til  $f$ .

Tverrsnittet (langs  $x$ -aksen) til en slik figur er alltid sirkelformet, tverrsnittsarealet er derfor  $\pi r^2$ , hvor  $r(x)$  er radiusen til tverrsnittet. Men siden radiusen tilsvarer høyden fra  $x$ -aksen opp til  $f$ , er  $r = f$ . Av (19) kan vi da skrive

$$V = \int_a^b A \, dx = \int_a^b \pi f^2 \, dx = \pi \int_a^b f^2 \, dx$$

#### 0.14 Volum av omdreiningslegemer

Volumet  $V$  av omdreiningslegemet til  $f(x)$  på intervallet  $[a, b]$  er gitt som

$$V = \pi \int_a^b f^2 \, dx \quad (20)$$

## Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

finn volumet av omdreiningsleget til  $f$  på intervallet  $[1, 3]$ .

## Svar

Volumet vi søker er gitt som

$$\begin{aligned}\pi \int_1^3 f^2 dx &= \pi \int_1^3 (\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 x dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{\pi}{2} [9 - 1] \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

# Forklaringer

## 0.2 Bestemt integral I (forklaring)

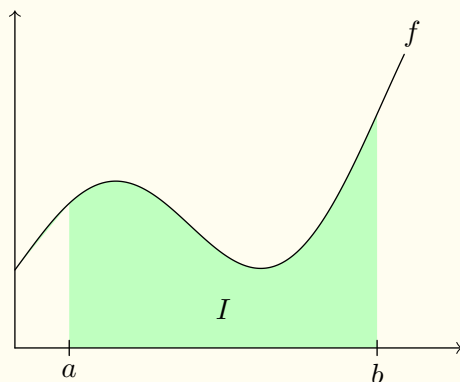


Figure 5: Integralet  $I$  tilsvarende det avgrensede arealet i grønt.

La oss ta utgangspunkt i funksjonen  $f(x)$ , med en graf som vist i figur 5. Vårt mål er nå å finne  $I$ .

Vi starter med å splitte  $[a, b]$  inn i  $n$  mindre delintervaller, alle med bredden  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . I tillegg lar vi  $x_i$  for  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  betegne den  $x$ -verdien som er slik at  $f(x_i)$  er den laveste verdien til  $f$  på delintervall nr.  $i$ .

Arealet avgrenset av delintervallet og  $f$  tilnærmer vi som  $s_i = f(x_i)\Delta x$ , da har vi at (se figur 6)

$$I \geq s_1 + s_2 + \dots + s_i$$

$$I \geq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$I \geq \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

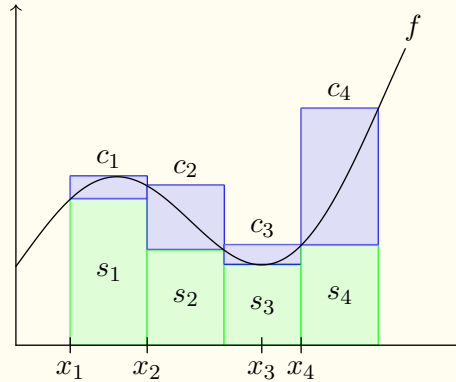


Figure 6: Arealene av  $s_i$  markert som grønne søyler og arealene av  $c_i$  markert som blå søyler. Bredden til hver søyle er  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  (her er  $n = 4$ ).

Videre må det finnes et tall  $h_i \in [0, 1)$  som er slik at  $f(x_i + h_i \Delta x)$  er den høyeste verdien til  $f$  på delintervallet. Vi lar  $c_i$  betegne arealet til søylen med  $\Delta x$  som bredde og  $f(x_i + h_i \Delta x) - f(x_i)$  som høyde:

$$c_i = (f(x_i + h_i \Delta x) - f(x_i)) \Delta x$$

Hvis vi legger til alle  $c_i$  i det første estimatet vårt, får vi en tilnærming som må være større eller lik det egentlige arealet. Derfor kan vi skrive

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \leq I \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n c_i$$

Én av  $c$ -verdiene må være større eller lik alle andre  $c$ -verdier. Vi lar  $m$  betegne indeksen til nettopp denne  $c$ -verdien. Da må vi ha at

$$0 \leq \sum_{i=1}^n c_i \leq n c_m$$

Men når  $n \rightarrow \infty$ , går summen  $n c_m$  mot 0:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n c_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m)) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m)) \frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m))(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_m) - f(x_m))(b-a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Følgelig er  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i = 0$ , og da er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \leq I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n c_i \right) \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \leq I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (22)$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (23)$$

Det vi har kommet fram til nå er vel og bra, men skal vi regne ut et integral blir det slitsomt å inspisere  $f(x)$  på uendelig mange delintervaller for å finne de laveste funksjonsverdiene i hver av dem! Vi merker oss derfor at venstresiden i (21), i vårt tilfelle, representerer det kraftigste underestimatet av  $I$ , mens høyresiden er det kraftigste overestimatet. I (21)-(23) har vi vist at begge disse estimatene går mot  $I$  når  $n \rightarrow \infty$ , dette betyr at vi for andre valg av  $x_i$  på hvert intervall også kommer fram til ønsket resultat. Regneteknisk vil det ofte være lurt å velge  $x_i = a + (i - 1) \Delta x$  for  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , slik som i (2).

### Integral som areal for negative funksjoner

Hva nå om vi isteden skulle finne arealet avgrenset av  $x$ -aksen, linjene  $x = a$  og  $x = b$  og grafen til  $g(x) = -f(x)$ ?

Grafene til  $f$  og  $g$  er fullstendig symmetriske om  $x$ -aksen, dette må bety at arealet  $A$  de avgrenser på et intervall må være helt likt. Og vi vet at

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n -g(x_i) \Delta x \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \end{aligned}$$

Av dette kan vi utvide den geometriske definisjonen av integralet:

*Gitt en funksjon  $f(x)$  som er negativ og kontinuerlig for alle  $x \in [a, b]$ . Integralet  $I$  multiplisert med  $-1$  tilsvarer arealet avgrenset av  $x$ -aksen, linjene  $x = a$  og  $x = b$  og grafen til  $f$ .*



### 0.1.2 Analysens fundamentalteorem (forklaring)

Vi ønsker å vise at integralet  $I$  av en funksjon  $f(x)$  på intervallet  $[a, b]$  er gitt som

$$I = F(b) - F(a)$$

hvor  $F$  er en antiderivert til  $f$ . For å vise dette skal vi anvende oss av (2). Spesielt verdt å merke seg er at  $x_1 = a$  og at  $x_{n+1} = b$ .

Fra tidligere vet vi at den deriverte av en funksjon  $f(x)$  er gitt som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Med vår  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  kan vi omskrive grensen:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La  $F(x)$  være en antiderivert til  $f(x)$ , da er

$$F'(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Vi erstatter  $f$  i (2) med uttrykket over, og får at

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \Delta x$$

Fordi  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ , har vi videre at

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots + F(x_{n+1}) - F(x_n)) \end{aligned}$$

Av dette legger vi merke til at alle  $F(x_i)$  kansellerer hverandre, bortsett fra i endepunktene. Vi sitter altså igjen med summen

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-F(x_1) + F(x_{n+1})) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

## 0.8 Bytte av variabel (forklaring)

Gitt en funksjon  $F(x)$  som vil anta samme verdier som  $G(u(x))$ :

$$F(x) = G(u) \quad (24)$$

La oss nå skrive  $F'(x)$  som  $f(x)$  og  $G'(u)$  som  $g(u)$ . For to konstanter  $C$  og  $D$  må vi ha at

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

og

$$\int g(u) du = G(u) + D$$

Det må derfor finnes en konstant  $E$  som er slik at

$$\int f(x) dx + E = \int g(u) du$$

Men av kjerneregelen (se [TM1](#)) har vi følgende relasjon:

$$f(x) = g(u)u'$$

Vi kan derfor skrive

$$\int g(u)u' dx + E = \int g(u) du$$

Når vi utfører integrasjonen på enten venstre eller høyre side, får vi en ny konstant som vi kan slå sammen med  $E$ . I praksis kan vi derfor utelate  $E$ , noe som er gjort i (0.8).

### 0.13 Integral som volum (forklaring)

Vi setter geometrien vår inn i et koordinatsystem, og tar for gitt at vi har en funksjon  $A(x)$  som gir oss tverrsnittsarealet for alle gyldige  $x$ .

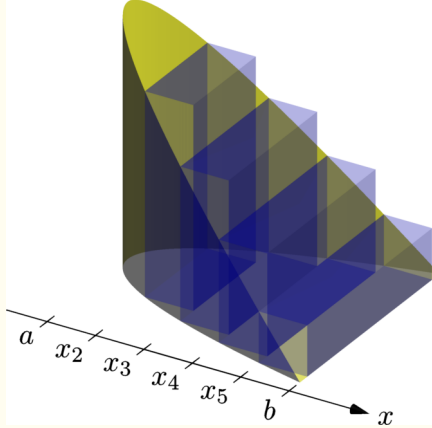


Figure 7: Volumet av geometrien (gul) tilnærmes ved summen av hver  $A(x_i)\Delta x$  (blå).

Vi deler  $[a, b]$  inn i  $n$  delintervaller, der hvert intervall har lengden  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  og startverdi  $x_i = a + (i-1)\Delta x$  for  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Vi tilnærmer volumet til geometrien ved å legge sammen volumene på formen  $A(x_i)\Delta x$ . Når vi lar  $n$  gå mot uendelig vil summen gå mot volumet til gjenstanden<sup>1</sup>, dette kan vi skrive som

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A(x_0)\Delta x + A(x_1)\Delta x + \dots + A(x_n)\Delta x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A(x_0) + A(x_1) + \dots + A(x_n)) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

Uttrykket over er analogt til definisjonen av det bestemte integralet fra ligning (2).

---

<sup>1</sup>Argumentasjonen for denne påstanden blir identisk med den gitt i forklaringen for det bestemte integralet (se side 30).