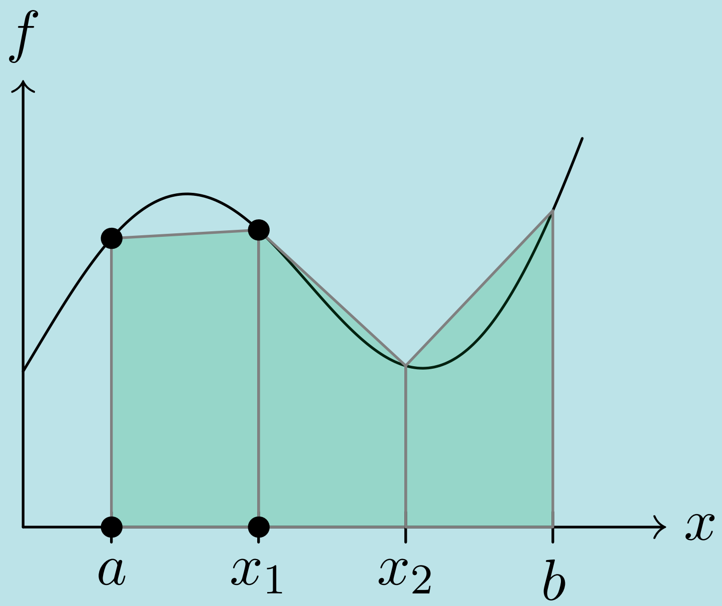
Anvendt matematikk 2
1T, R1 og R2



Sindre Sogge Heggen

Innhold

1 Digitale verktøy **2**
1.1 GeoGebra . . . 3
1.1.1 CAS . . . 3
1.1.2 Knapper og kommandoer . . . 7
1.2 Python . . . 13
1.2.1 NumPy . . . 13

2 Numeriske metoder **15**
2.1 Newtons metode . . . 16
2.2 Trapesmetoden . . . 18
Oppgaver . . . 20

3 Funksjoner **22**
3.1 Vekstfart, fart og akselerasjon . . . 23

4 Blandede oppgaver **26**
4.1 Oppgaver med tall og situasjoner fra virkeligheten . . . 27
4.2 Teoretiske utvidelser . . . 35
4.3 Praktiske oppgaver . . . 38
4.4 Eksamensoppgaver . . . 39

Kapittel 1

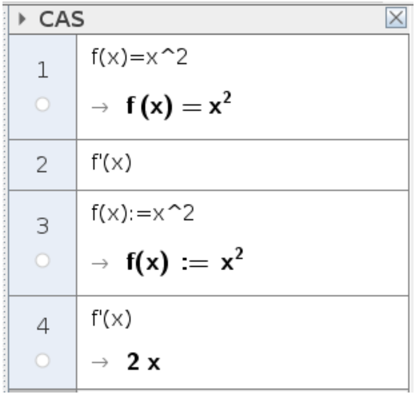
Digitale verktøy

1.1 GeoGebra

1.1.1 CAS

Definere variabler

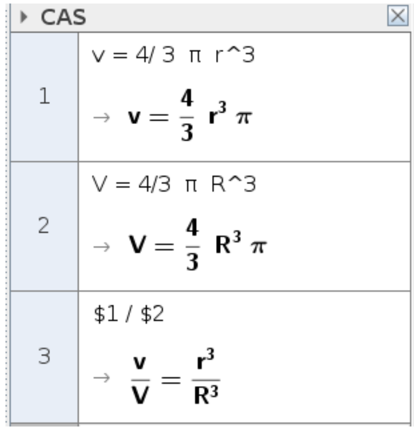
Hvis vi ønsker å definere variabler som vi skal bruke i andre celler, må vi skrive `:=` . I figuren under er forskjellen mellom `=` og `:=` demonstrert med et forsøk på å finne $f'(x)$ til funksjonen $f(x) = x^2$:



Av figuren legger vi også merke til at celle 3 og celle 4 er markert med en hvit runding. Dette indikerer at størrelsen vil vises i *Grafikkfelt* eller *Grafikkfelt 3D* hvis man trykker på markøren (den skal da bli blå).

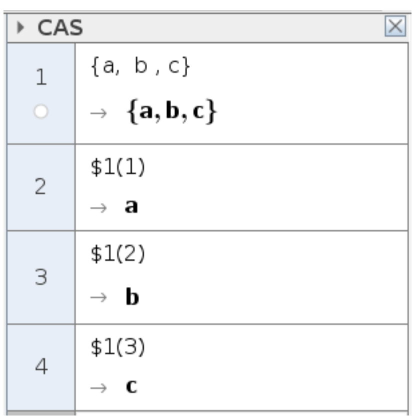
Celle-referanser

Ofte kommer vi ut for situasjoner der vi ønsker å bruke uttrykket vi har funnet i tidligere celler. Som eksempel har vi i celle 1 skrevet inn volumet v av en kule med radius r, mens i celle 2 har vi volumet V av en kule med radius R. Ønsker vi å finne forholdet mellom disse, kan vi bruke cellereferanser som hjelpemiddel. For å referere til celle 1 skriver vi `$1` og for celle 2 skriver vi `$2`. Forholdet $\frac{v}{V}$ kan vi da skriver som `$1/$2`:

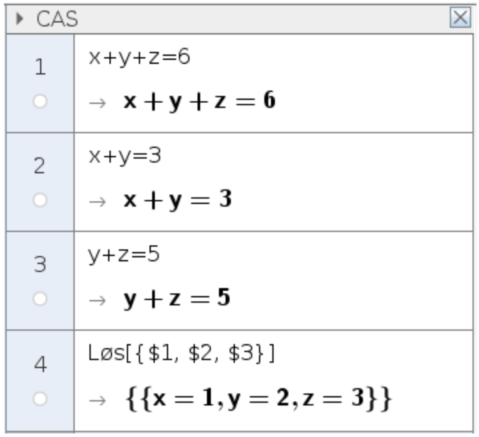


Lister

Når et uttrykk står inni sløyfeparanteser {}, betyr det at det er laget en liste. En liste inneholder flere elementer som vi kan hente ut. Dette gjør vi ved å skrive paranteser bak listen, hvor vi angir nummeret til elementet i listen.

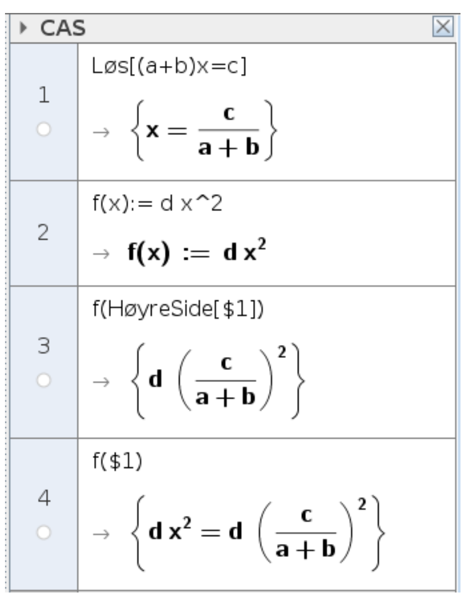


Lister bruker vi også når vi skal løse liginger med flere ukjente:



Høyre- og venstresiden

De fleste uttrykkene vi jobber med i CAS inneholder et $=$ tegn. Disse uttrykkene er en ligning med en venstre- og høyreside. Ofte ønsker vi å bruke uttrykket på bare én av disse sidene, og oftest høyresiden. Som eksempel har vi løst ligningen $(a + b)x = c$ og definert funksjonen $f(x) = dx^2$. Vi ønsker så å sette løsningen av ligningen inn i funksjonen. Dette gjør vi ved hjelp av `HøyreSide`-kommandoen (resulatet uten bruken av denne er vist i celle 4).

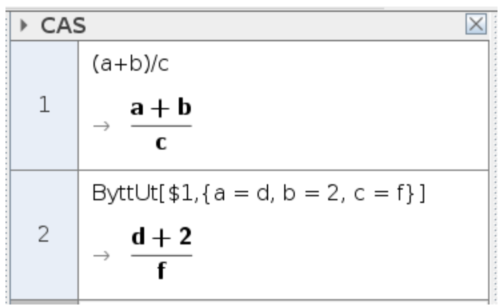


ByttUt

Noen ganger ønsker vi å endre en variabel i et utrykk. For å gjøre dette kan vi anvende ByzttUt<Uttrykk>, <Liste med forandringer>. La oss se på uttrykket

$$\frac{a+b}{c}$$

Vi ønsker nå å sette $a = d$, $b = 2$ og $c = f$. Dette kan vi gjør ved å skrive følgende:



1.1.2 Knapper og kommandoer

Grafikkfelt

Knappene velges fra rullemenyer på verktøylinjen. Nummereringen av menyene er fra venstre.

Lager et nytt punkt. (Meny nr. 1)

 Lager linje mellom to punkt. (Meny nr. 2)

 Finner topp- og bunnpunkt til en funksjon. (Meny nr. 2)

 Finner nullpunktene til en funksjon. (Meny nr. 2)

 Finner skjæringspunkt mellom to objekt. (Meny nr. 3)

 Lager vektoren mellom to punkt (Meny nr. 3)

Lager en tekstboks. (Meny nr. 10)

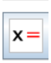
 Flytter grafikkfeltet. Endrer verdiavstanden hvis man peker på aksene. (Meny nr. 10)

CAS

 Gjengir uttrykket som er inntastet, ofte i forkortet form.

 Gjengir uttrykket som er inntastet.

 Gir tilnærmet verdi av et uttrykk (som desimaltall).

 Gir eksaktløsningen av en ligning.

 Gir tilnærmet løsning av en ligning som desimaltall.

Hurtigtaster

	Beskrivelse	**PC**	**Mac**
$\surd$	kvadratrot	`alt + r`	`alt + r`
π	pi	`alt + p`	`alt + p`
∞	uendelig	`alt + u`	`alt + ,`
$\otimes$	kryssprodukt	`alt + shift + 8`	`ctrl + shift + 8`
e	eulers tall	`alt + e`	`alt + e`
$^\circ$	gradtegnet ($\frac{\pi}{180}$)	`alt + o`	`alt + o`

Kommandoliste

- abs(<x>)
  Finner lengden til et objekt x.

- acos(<x>)
  I algebrafelt: Gir vinkelen på intervallet $[0°, 180°]$ som har cosinus-verdi x.

  I CAS: Gir vinkelen på intervallet $[0, \pi]$ som har cosinus-verdi x.

- asin(<x>)
  I algebrafelt: Gir vinkelen på intervallet $[-90°, 90°]$ som har sinus-verdi x.

  I CAS: Gir vinkelen på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ som har sinus-verdi x.

- atan(<x>)
  I algebrafelt: Gir vinkelen på intervallet $[-90°, 90°]$ som har tangens-verdi x.

  I CAS: Gir vinkelen på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ som har sinus-verdi x.

- Asymptote(<Funksjon>)
  Finner asymptotene til en funksjon.

- Avstand(<Punkt>, <Objekt>)
  Gir avstanden fra et punkt til et objekt.

- ByttUt(<Uttrykk>, <Liste med forandringer>)
  Viser et gitt uttrykk etter endring av variabler, gitt i en liste.

- Deriverte(<Funksjon>)
  Gir den deriverte av en funksjon.
  Merk: For en definert funksjon $f(x)$, kan man like gjerne skrive f'(x).

- Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)
  Finner lokale ekstremalpunkt og ekstremalverdier for en funksjon f på et gitt intervall.

- Ekstremalpunkt(<Polynom>)
  Finner lokale ekstremalpunkt og ekstremalverdier til et polynom.

- Funksjon (<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)
  Tegner en funksjon på et gitt intervall.

- `Høyde( <Objekt> )`
  Gir avstanden fra toppunkt til grunnflate i et objekt.
  Merk: Avstanden har retning, og derfor kan den noen ganger være negativ. Tallverdien er den geometriske høyden.

- `HøyreSide ( <Likning> )`
  Gir høyresiden til en likning.

- `HøyreSide ( <Liste med likninger> )`
  Gir en liste med høyresidene i en liste med ligninger.

- `Integral ( <Funksjon> )`
  Gir uttrykket til det ubestemte integralet av en funksjon.
  Merk: Hvis kommandoen skrives i inntastingsfeltet, blir konstantleddet utelatt

- `Integral( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Gir det bestemte integralet av en funksjon på et intervall.

- `Integral( <Variabel> )`
  Gir uttrykket til det ubestemte integralet til en funksjon av gitt variabel. (Brukes dersom man ønsker å integrere funksjoner avhengig av en annen variabel enn x).

- `Kule( <Punkt>, <Radius> )`
  Viser en kule i Grafikkfelt 3D med sentrum i et gitt punkt og med en gitt radius.

- `Kurve( <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt> )`
  Viser parameteriseringen av en kurve i Grafikkfelt 3D på et gitt intervall. Uttrykkene er henholdsvis uttrykkene for x, y og z-koordinatene, bestemt av en gitt parametervariabel.
  Merk: Med mindre et bestemt intervall av kurven er ønsket, er det bedre å skrive parameteriseringen direkte inn i inntastingsfeltet som `A+t*u`, hvor A er et punkt på linja og u er en retningsvektor.

- `Linje ( <Punkt>, <Punkt> )`
  Gir uttrykket til en linje mellom to punkt. Hvis punktene har tre koordinater besår uttrykket av et punkt på linja og en fri variabel $\}lambda$ mulitplisert med en retningsvektor.

- `Løs ( <Likning med x> )`
  Løser en likning med x som ukjent.

- `Løs( <Liste med likninger>, <Liste med variabler> )`
  Finner alle løsninger av en liste med ligninger med gitte variabel som ukjente.

- `Løs( <Likning>, <Variabel> )`
  Finner alle løsninger av en gitt likning med en gitt variabel som ukjent.

- `Maks( <Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi> )`
  Finner absolutt maksimum og maskimalpunkt for en funksjon f på et gitt intervall.

- `Min`
  (<Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi>) Finner absolutt minimum og minimumspunkt for en funksjon f på et gitt intervall.

- `Nullpunkt( <Polynom> )`
  Finner alle nullpunkter til et polynom.

- `NullpunktIntervall( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Finner alle nullpunkter på et gitt intervall til en hvilken som helst funksjon.

- `Plan( <Punkt>, <Punkt>, <Punkt> )`
  Viser et plan i Grafikkfelt 3D, utspent av to av vektorene mellom tre gitte punkt.

- `Prisme( <Punkt>, <Punkt>, ... )`
  Framstiller en prisme i Grafikkfelt 3D. `Prisme[A,B,C,D]` lager en prisme med grunnflate ABC og tak DEF, `Prisme[A,B,C,D,E]` har grunnflate $ABCD$ og tak EFG. F, G og eventelt E blir konstruert av GeoGebra slik at hver sideflate er et parallellogram. Under kategorien *Prisme* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

- `Punkt( <Liste> )`
  Lager et punkt med koordinater gitt som liste.
  Merk: For å lage punktet (x, y), kan man liksågodt skrive `(x,y)` i inntastingsfeltet. Skriver man `(x,y)` i CAS lager man vektoren $[x, y]$.

- `Pyramide( <Punkt>, <Punkt>, ... )`
  Framstiller en pyramide i Grafikkfelt 3D. `Pyramide[A,B,C,D]` lager en pyramide med grunnflate A, B, C og toppunkt D, mens `Pyramide[A,B,C,D, E]` har grunnflate A, B, C, D og toppunkt

E. Under kategorien *Pyramide* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

- `RegLin( <Liste> )`
  Bruker regresjon med en rett linje for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `RegEksp( <Liste> )`
  Bruker regresjon med en eksponentialfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `RegPoly( <Liste>, <Grad> )`
  Bruker regresjon med et polynom av gitt grad for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `RegPot( <Liste> )`
  Bruker regresjon med en potensfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `RegSin( <Liste> )`
  Bruker regresjon med en sinusfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `Skalarprodukt( <Vektor>, <Vektor> )`
  Finner skalarproduktet av to vektorer.
  Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive `u*v`.

- `Skjæring( <Objekt>, <Objekt> )`
  Finner skjæringspunktene mellom to objekter.

- `Skjæring( <Funksjon>, <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Finner skjæringspunktene mellom to funksjoner på et gitt intervall.

- `Sum( <Uttrykk>, <Variabel>, <Start>, <Slutt> )`
  Finner summen av en rekke med en løpende variabel på et intervall.

- `TrigKombiner( <Funksjon> )`
  Skriver om et uttrykk på formen $a\sin(kx) + b\cos(kx)$ til et kombinert uttrykk på formen $r\cos(kx - c)$.

- `TrigKombiner( <Funksjon>, sin(x) )`
  Skriver om en funksjon på formen $a\sin(kx) + b\cos(kx)$ til et kombinert uttrykk på formen $r\sin(kx + c)$.

- Vektor(<Punkt>)
  Lager vektoren fra origo til et gitt punkt.
  Merk: I CAS kan man lage vektoren $[x, y]$ ved å skrive (x,y), dette anbefales.

- Vektorprodukt(<Vektor>, <Vektor>)
  Finner vektorproduktet av to vektorer.
  Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive u⊗v.

- Vendepunkt(<Polynom>)
  Finner vendepunktene til et polynom.

- VenstreSide(<Likning>)
  Gir venstresiden til en likning.

- VenstreSide(<Liste med likninger>)
  Gir en liste med venstresidene i en liste med ligninger.

- Vinkel(<Vektor>, <Vektor>)
  Gir vinkelen mellom to vektorer. Kan også brukes for vinkel mellom plan/linjer, plan/plan og linje/linje

1.2 Python

Merk: Denne teksten bygger på teksten om Python i AM1.

1.2.1 NumPy

I Python kan man importere det som kalles **bibliotek** for å få tilgang til enda flere typer objekter, funksjoner og liknende. NumPy er et bibliotek som inneholder typen `numpy.ndarray`. Denne typen har mange fellestrekk med en liste, men skiller seg ut ved at den inneholder et bestemt antall elemener. Dette gjør blant annet at prossesser som bruker NumPy-arrays istedenfor lister går raskere, og at NumPy-arrays egner seg bedre til regneoperasjoner.

For å lage NumPy-arrays må vi importere NumPy-biblioteket:

```
import numpy as np

a = np.array([1, 2]) # lager array fra en liste
b = np.arange(4) # samme som å skrive np.array(range(4))
c = np.zeros(3) # array med 3 elementer lik 0
d = np.linspace(2,11,4) # array med 4 elementer. d[0] = 2 og d[3] = 11. Naboelement har lik differanse

print(a)
print(b)
print(c)
print(d)
```

Utdata

```
[1 2]
[0 1 2 3]
[0. 0. 0.]
[ 2. 5. 8. 11.]
```

Merk

Til forskjell fra lister, er elementene skilt bare med mellomrom når de printes.

Klassisek regnearter

Regneoperasjoner mellom NumPy-arrays blir utført elementvis:

```
import numpy as np

a = np.array([10, 20])
b = np.array([2, 4])

print(a+b) # [10+2 20+4]
print(a*b) # [10*2 20*4]
```

Utdata

```
[12 24]
[20 80]
```

Vektoroperasjoner

NumPy-arrays fungerer ypperlig til å representere vektorer, og har innebygde metoder for å finne skalarprodukt, kryssprodukt og determinanter:

```
import numpy as np

a = np.array([2, -7])
b = np.array([1, 5])
c = np.array([2, -7, 1])
d = np.array([1, 5, 0])

print(a.dot(b)) # skalarprodukt av a og b
print(np.cross(c, d)) # kryssproduktet av c og d

ab = np.array([a, b])
print(np.linalg.det(ab)) # det(a,b)
```

Utdata

```
-33
[-5 1 17]
17.0
```

Kapittel 2

Numeriske metoder

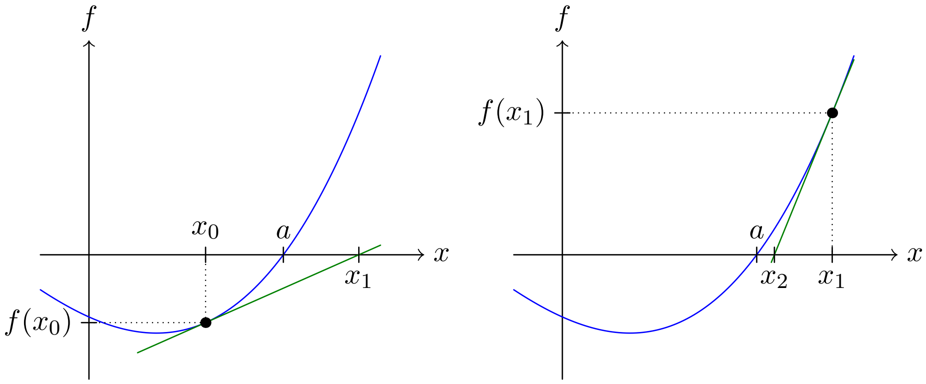
2.1 Newtons metode

Gitt en funskjon $f(x)$ si at vi ønsker å finne et tall a slik at $f(a) = 0$. Ved **Newtons metode** gjør vi denne antakelsen for å en tilnærming a:

> La x_1 være skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_0. Vi antar da at $|x_1 - a| < |x_0 - a|$. Sagt med ord antar vi at x_1 gir en bedre tilnærming for a enn det x_0 gjør.

Siden x_1 er skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_0, har vi at[1]

$$
\begin{aligned}
f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) &= 0 \\
f'(x_0)x_1 &= f'(x_0)x_0 - f(x_0) \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}
$$



(a) (b)

La x_2 være skjæringspunktet mellom x-aksen og tangenten til f i x_1. Ved å gjenta prosedyren vi brukte for å finne x_1, kan vi finne x_2, som vi antar er en enda bedre tilnærming for a enn x_1. Prosedyren kan vi gjenta fram til vi har funnet en x-verdi som gir en tilstrekkelig[2] tilnærming til a.

[1]Se oppgave??

[2]Hva som er en *tilstrekkelig tilnærming* er det opp til oss selv å bestemme.

2.1 Newtons metode

Gitt en funskjon $f(x)$ si at vi ønsker å finne et tall a slik at $f(a) = 0$. Gitt x-verdiene x_n og x_{n+1} for $n \in \mathbb{N}$. Ved å bruke formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

antas det at x_{n+1} gir en bedre tilnærming for a enn x_n.

Språkboksen

Newtons metode kalles også **Newton-Rhapsos metode**.

Når er tilmærmingen god nok?

Newtons metode beskriver en iterasjonsprossess som man håper at nærmer seg en verdi. Hvis meotden lykkes, vil x_{n+1} og x_n etterhvert være veldig like, og slik kan en grense for hvor liten $|x_{n+1} - x_n|$ kan være fungere som et godt mål for når iterasjonsprossessen skal stoppe.

2.2 Trapesmetoden

Gitt en funksjone $f(x)$. Integralet $\int_a^b f\,dx$ kan vi tilnærme ved å

1. Dele intervallet $[a, b]$ inn i mindre intervall. Disse kaller vi **delintervall**.

2. Finne en tilnærmet verdi for integralet av f på hvert delintervall.

3. Summere verdiene fra punkt 2.

I *figur 2.1a* har vi 3 like store delintervaller. Hvis vi setter $a = x_0$ og $\Delta x = \frac{b-a}{3}$, betyr dette at

$$x_1 = x_0 + \Delta x \qquad x_2 = x_0 + 2\Delta x \qquad x_3 = x_3 + 3\Delta x = b$$

En tilnæret verdi for $\int_a^{x_1} f\,dx$ får vi ved å finne arealet til trapeset med hjørner (husk at $x_0 = a$)

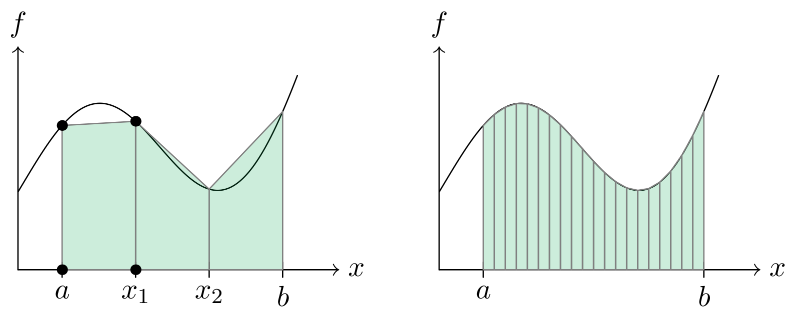
$$(x_0, 0) \qquad (x_1, 0) \qquad (x_1, f(x_1)) \qquad (x_0, f(a))$$

Dette arealet er gitt ved uttrykket

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_0)\left[f(x_0) + f(x_1)\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) - f(x_1)\right]$$

Ved å tilnærme integralet for hvert delintervall på denne måten, kan vi skrive

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$



(a) Tilnærming med 3 delintervaller.

(b) Tilnærming med 20 delintervaller

Figur 2.1

2.2 Trapesmetoden

Gitt en integrerbar funksjon f. En tilnærmet verdi for $\int_a^b f\,dx$ er da gitt som

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \tag{2.1}$$

hvor

$$n \in \hat{\mathbb{N}}$$

$$a = x_0$$

$$b = x_n$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n+1}$$

$$x_{n+1} = x_n + i\Delta x$$

Merk

Slik regel 2.2 er formulert, vil $[a, b]$ være delt inn i $n+1$ delintervaller.

Oppgaver for kapittel 2

2.2.1

Gitt likningen

$$x^3 + 4x^2 - 5 = 0$$

a) Hvorfor vil ikke Newtons metode fungere viss du starter med $x_0 = 0$?

b) Lag et skript som finner tilnærminger for de tre løsningene av likningen. Stopp søket når $|x_{n+1} - x_1| < 10^{-6}$.

2.3.1

Forklar hvorfor (2.1) også kan skrives som

$$\int_a^b f\,dx \approx \Delta x \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right)$$

2.3.2

I TM2 har vi sett at det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{2.2}$$

hvor $x_i = a + (i-1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. La I_n være tilnærmingen av I gitt ved å la n være et gitt tall. Implementer I_n i et skript, og bruk integralet $\int\limits_0^1 3x^2\,dx$ til å sjekke at du får output som forventet.

2.3.3

Hvis funksjonen du skal integrere er konkav, vil trapesmetoden gi et overestimat eller et underestimat?

Gruble 1

Trapesmetoden kan også implementeres slik at delintervallene ikke nødvendigvis har samme bredde. Forklar hvorfor (2.1) da kan skrives som

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]$$

Gitt funksjonen

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sin(\pi x) \qquad x \in [0,2]$$

a) Bruk (for eksempel) GeoGebra til å tegne grafen til f.

b) Du skal bruke trapesmetoden for å tilnærme $\int\limits_0^2 f\,dx$, men får bare lov til å dele $[0,2]$ inn i tre delintervaller. Det er naturlig at $x=0$ og $x=2$ er med i hvert sitt delintervall. Forklar hvorfor de to x-verdiene som løser likningen

$$x + \pi\cos(\pi x) = 0$$

også er gode kandidater til å være med i delintervallene.

c) Bruk Newtons metode til å finne x-verdiene du ønsker. Stopp søket når $|x_n - x_{n+1}| \leq 10^{-6}$.

Gruble 2

Gitt integralet

$$I = \int\limits_0^2 x^3 - 5x + 6\,dx$$

La I_n være intgralet tilnærmet ved trapesmetoden med n delintervaller.

a) Beregn I_{10} og I_{100} og I_{1000}

b) La $E_n = I - I_n$

c) Bruk regresjon til å finne den best tilpassede polynomfunksjonen for punktene $\left(\frac{1}{n}, E_n\right)$, $n \in [10, 100, 1000]$.

Kapittel 3

Funksjoner

3.1 Vekstfart, fart og akselerasjon

3.1 Gjennomsnittlig og momentan vekstfart

Gitt en funksjon $f(x)$. Da har vi at

- stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ kalles den **gjennomsnittlige vekstfarten** til f på intervallet $[a, b]$.
- $f'(a)$ kalles den **momentane vekstfarten** til f i a.

En praktisk tolkning av begrepene

I MB har vi sett at stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ er gitt ved uttrykket

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Hvis vi antar at dette forholdet er konstant for $x \in [a, b]$, antar vi at f og x representerer proporsjonale størrelser[1] på intervallet.

Hvis vi ser tilbake til (den alternative) definisjonen av den deriverte i TM1, innser vi at $f'(a)$ er den gjennomsnittlige vekstfaktoren til f på intervallet $[a, b]$ når $b \to a$. Da går $[a, b]$ mot å innheholde bare ett element, som er a.

---

[1] Se AM1.

Eksempel

Se for deg at vi slipper en ball fra 60 meter over bakken, og lar den falle fritt nedover. Når vi slipper ballen, starter vi også en stoppeklokke. Antall meter h ballen er over bakken etter t sekunder kan da tilnærmes ved funksjonen

$$h(t) = 5\left(10 - t^2\right) \quad , \quad x \in \left[0, \sqrt{10}\right]$$

a) Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til h på intervallet $t \in [1, 3]$. Gi en praktisk tolkning av denne verdien.

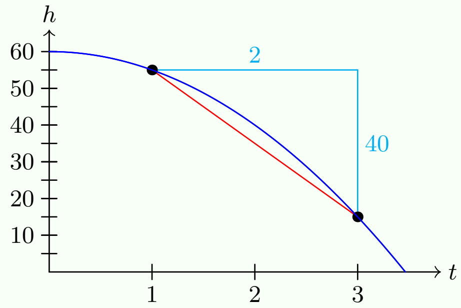
b) Finn den momentane vekstfarten til h i 3. Gi en praktisk tolkning av denne verdien.

Svar

a) $h(1) = 5\,(10 - 1) = 45$ og $h(3) = 5\left(10 - 3^2\right) = 5$. Det betyr at stigningstallet til linja mellom $(1, f(1))$ og $(3, f(3))$ er

$$\frac{5 - 45}{3 - 1} = -20$$

Altså er vekstfarten til h på intervallet $[1, 3]$ lik -20. Siden h representerer antall meter, og t representerer antall sekunder, representerer vekstfarten en størrelse med enheten 'm/s'. Dette er en enhet for fart. Hvis ballen skulle falt 40 meter *nedover* i løpet av 2 sekunder med konstant fart, måtte denne farten vært 20 m/s.



b) Siden $h'(t) = -10t$, er $h'(3) = -30$. Dette betyr at etter å ha falt i 3 sekunder, har ballen oppnådd farten 30 m/s, i retning *nedover*.

3.2 Farts- og akselerasjonsvektor

Gitt en vektorfunksjon $\vec{r}(t)$, hvor $\vec{r}$ representerer en posisjon og t representerer tid. Da har vi at

- $\vec{r}\,'(t)$ kalles **fartsvektoren** og $|\vec{r}\,'(t)|$ kalles **banefarten**.
- $\vec{r}\,''(t)$ kalles **akselerasjonsvektoren** og $|\vec{r}\,''(t)|$ kalles **baneakselerasjonen**.

3.2 Farts- og akselerasjonsvektor (forklaring)

Hvis $\vec{r}(t)$ representerer en posisjon (altså en relativ lengde fra et referansepunkt), og t en tid, vil $\vec{r}\,'(t)$ innebære en lengde delt på en tid. Da vil $\vec{r}\,'(t)$ representere en størrelse med en enhet for fart. $\vec{r}\,''(t)$ vil innebære en fart delt på en tid, som da vil representere en akselerasjon.

Kapittel 4

Blandede oppgaver

4.1 Oppgaver med tall og situasjoner fra virkeligheten

Se også oppgaver på ekte.data.uib.no

4.1.1

#rekker #øknomi

Du ønsker å spare penger i en bank som gir 2 % månedlig rente. Du sparer ved å gjøre et innskudd på 1000 kr hver måned.

a) Skriv rekken som viser hvor mye penger du har i banken når du starter på 5. måned med sparing. Innskuddet i 5. måned skal tas med.

b) Sett opp et uttrykk $P(n)$ som viser hvor mye penger du har i banken når du starter på n-te måned med sparing. Innskuddet i n-te måned skal tas med.

4.1.2

#rekker #øknonomi # programmering

Si at du låner 1 500 000 kroner av en bank. Lånet er et annuitetslån (se AM1) med 3% årlig rente, og lånet skal betales ned i løpet av 20 år med årlige fradrag og renter.

a) Finn verdien til terminbeløpet x.

b) Lag et script som printer terminbeløp, avdrag og renter for hele nedbetalingstiden, og som bekrefter at svaret ditt fra a) er rett.

c) Sammenlign svaret ditt med en lånekalkulator[1] på internett. (Sett alle gebyrer lik 0).

[1] laanekalkulator.no er ryddig og fin, men obs!, inneholder annonser.

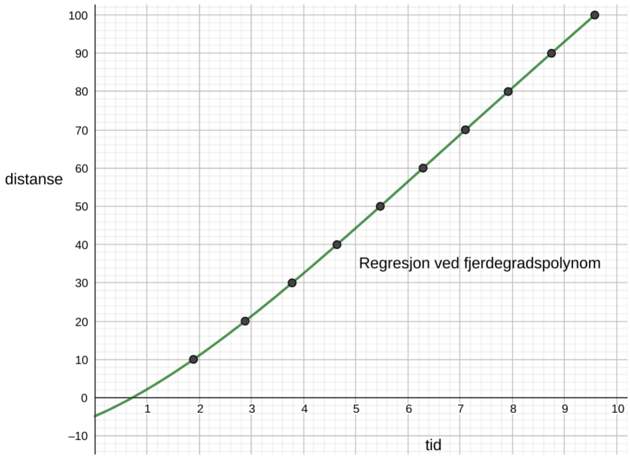
4.1.3

#regresjon #funksjonsdrøfting #omgjøring av enheter

Usain Bolt har verdensrekorden for 100 m sprint. I tabellen under ser du hva tidtakeren viste ved hver 10. meter under dette rekordløpet.

meter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
sekunder	1.89	2.88	3.78	4.64	5.47	6.29	7.1	7.92	8.75	9.58

a) I figuren under har vi brukt datasettet fra tabellen til å utføre regresjon med et fjerdegradspolynom. Hva er det som er helt feil med denne tilnærmingen?



b) I datasettet kan vi legge til et punkt som vil hjelpe med å korrigere feilen poengtert i a). Hvilket punkt er dette?

c) Bruk regresjon med et fjerdegradspolynom på datasettet fra b).

d) Ut ifra funksjonen du fant i c), hva var toppfarten til Bolt under dette løpet?

e) Bruk datasettet fra b) til å finne gjennomsnittsfarten til Bolt for $t \in [0, 1.89]$ og for $t \in [1.89, 9.58]$. Sammenlikn disse hastighetene med svaret fra oppgave d), og drøft årsaken til ulikhetene/likhetene.

4.1.4

#funksjoner #regresjon #derivasjon #vektorer i planet

På side 26 i dokumentet Premisser for geometrisk utforming av veger (utformet av Statens vegvesen) er minste **horisontalkurveradius** $R_{h,\min}$ gitt ved formelen

$$R_{h,\min} = \frac{V^2}{127(\mathrm{e}_{\text{maks}} + f_k)}$$

hvor

$$V = \text{fartsgrense}$$
$$\mathrm{e}_{\text{maks}} = \text{maksimal overhøyde}$$
$$f_k = \text{dimensjonerende sidefriksjonsfaktor}$$

Si at en veibane er beskrevet av grafen en funksjon $f(x)$. I vedlegg ?? i TM1 introduserte vi sirkelen som beksriver krumningen til f. Vektoren mellom sentrum S i denne sirkelen og et punkt $A = (x, f(x))$ på grafen til f er gitt som

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''}\left[-f \cdot (1 + (f')^2), 1 + (f')^2\right]$$

La r være radien til sirkelen som beskriver krumningen til f. Statens vegvesens krav tilsier at

$$r < R_{h,\min}$$

Bruk et digitalt kart og regresjon til å finne en polynomfunksjon som gir en god tilnærming for utvalgte veistykker hvor fartsgrensen er kjent. Sett $\mathrm{e}_{\text{maks}} = 0$, og bruk tabellen[1] under for å velge verdien til f_k. Undersøk om krumningen til veistykket oppfyller kravet til Statens vegvesen i alle punkt.

Tabell 2.7: Sidefriksjon for ulike fartsgrenser og sikkerhetsfaktorer

Sikker-	Fartsgrense [km/t]							
hetsfaktor	40	50	60	70	80	90	100	110
1,00	0,249	0,224	0,195	0,182	0,157	0,131	0,108	0,079
1,10	0,226	0,204	0,178	0,165	0,143	0,119	0,098	0,072

[1]Hentet fra side 22 fra nevnte dokument.

4.1.5

modellering # areal # derivasjon

Gitt et rektangel med omkrets O, og la x være den éne sidelengden.

a) Finn uttrykket til funksjonen $A(x)$, som viser aralet til rektangelet.

b) Hvilken form har rektangelet når arealet er størst?

4.1.6

#logaritmer #overslag

Momentmagnitudeskalaen er en skala som brukes til å representere styrken på jordskjelv. Hvis S er det målte **seismiske momentet** til jordskjelvet, er massemagnituden M_w gitt som[1]

$$M_w = \frac{2}{3}\log S - 10.7$$

Energien som jordskjelvet utløser er tilnærmet proporsjonal med S.

Gitt to jordskjelv, jordskjelv A og jordskjelv B, med henholdsvis seismisk moment S_A og S_B. Si videre at proporsjonalitetskonstanten for energi utløst av det seismiske momentet er likt for begge jordskjelvene. Hvis jordskjelv A er målt til 1 mer enn jordskjelv B på momentmagnitudeskalaen, hva er da forholdet mellom energi utløst av jordskjelv A og energi utløst av jordskjelv B?

[1] Kilde: Wikipedia.

4.1.7

Du skal prøve å kaste en ball så langt som mulig langs et flatt strekke. Posisjonen ballen har idét den forlater handen din setter du til $(0, 0)$. Ved å anta at tyngdekraften deretter er den eneste kraften som virker på ballen, er posisjonen til ballen godt tilnærmet ved uttrykket

$$\vec{p}_g(t) = \vec{v}t - [0, 5t^2]$$

hvor $\vec{v} = [v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta]$ er hastighetsvektoren til ballen idét den forlot handen, og t er antall tidsenheter etter at ballen har forlatt handen. Idét ballen forlater handen din har den farten v_0, $\vec{v}$ danner vinkelen θ med horisontallinjen.

Ut ifra $\vec{p}_g$, hvilken verdi må θ ha for at kastet skal bli lengst mulig?

4.1.8

integrasjon # derivasjon

La funksjonen $s(t)$ beskrive hvor langt et objekt har bevegd seg etter tiden t. Hvi objektet har konstant akselerasjon a, har vi at

$$s''(t) = a$$

a) Integrer $s''(t)$ to ganger slik at du ender opp med et uttrykk for $s(t)$.

b) Bestem uttrykkene for $s(t)$ og $s'(t)$ når du vet at $s(t) = 0$ og $s'(t) = v_0$.

c) Hvilken fysisk størrelse representerer $s'(t)$?

d) Undersøk begrepet ”bevegelsesligninger”[1] (også kalt ”veiformler”) i en fysikkbok eller på internett. Sammenlign uttrykkene du finner med uttrykket du fant for $s(t)$.

[1] ”Eqautions of motion på engelsk.

4.1.9

#vektorer i planet #derivasjon

Posisjonen $\vec{s}$ til et objekt som beveger seg i en sirkelbane kan uttrykkes som

$$\vec{s} = r[\cos(2\pi f t), \sin(2\pi f t)]$$

hvor r er radien til sirkelbanen, t er tiden og f er frekvensen.

a) f beskriver antall runder objektet fullfører per tidsenhet[1]. Forklar hvorfor $2\pi f$ kalles **vinkelfarten** til objektet.

b) Finn $\vec{s}'(t)$.

c) Hva er vinkelen mellom $\vec{s}(t)$ og $\vec{s}'(t)$?

d) Bestem lengden til $\vec{s}'(t)$

e) Finn $\vec{s}''(t)$.

f) Bestem lengden til $\vec{s}''(t)$

g) Hva er vinkelen mellom $\vec{s}(t)$ og $\vec{s}''(t)$? Peker $\vec{s}''(t)$ innover i sirkelbanen eller ut fra sirkelbanen?

h) Bruk en fysikkbok eller internett til å undersøke begrepet **sentripetalakselerasjon**. Sammenlign funnene dine i denne oppgaven med informasjonen du finner.

[1] Hvis tidsenheten er 'sekund', har f benevningen '1/sekund'.

4.1.10

trigonometri

En tilnærming for høy- og lavvann i Molde er gitt ved funksjonen

$$f(x) = 128 + 80\cos\left(\frac{3\pi}{37}x\right)$$

hvor f angir cm over sjøkartnull[1] t timer etter et gitt referansetidspunkt. Referansetidspunktet er valgt slik at det ved $t = 0$ var høyvann (flo).

a) Hva er vannstanden i Molde når det er lavvann (fjøre)?

b) Hvor lang tid er det mellom flo og fjøre?

Merk: Denne oppgaven kan med fordel løses uten digitale hjelpemidler.

[1] Sjøkartnull er som regel satt til den laveste vannstanden som kan oppnås ut ifra astronomiske betingelser (flo og fjære er i stor grad betinget av hvordan jorda, sola og månen står i forhold til hverandre).

4.2 Teoretiske utvidelser

4.2.1

#programmering #lengden til en graf

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

a) Finn $g(x) = f'(x)$.

b) I TM2 er formelen for lengden l til en graf gitt. Forklar hvilket tall l representerer når f og g er som gitt i denne oppgaven, $a = -1$ og $b = 1$.

c) Bruk en numerisk metode til for å finne en tilnærming for l. Drøft på forhånd hvilke hensyn som må tas for å unngå at skriptet feiler ved kjøring.

4.2.2

#følger og rekker #annuitetslån

Gitt et annuitetslån (se AM1) med lånebeløp L_0, årlig rente $r\%$, og nedbetalingstid t. Lånet skal nedbetales med et årlig terminbeløp T.

a) La L_n være resterende lånebeløp etter n-te nedbetaling. Forklar hvorfor
$$L_n = (1+r)L_{n-1} - T$$

b) Finn en formel for terminbeløpet T, uttrykt ved L_0, t og r.

Annuitetslån blir ofte forklart med utgangspunkt i det vi her skal kalle *spareperspektivet* og *realverdiperspektivet*:

Spareperspektivet
Vi tenker oss at utlåner oppretter en sparekonto med $r\%$ årlig rente. I t år tilføres sparekontoen et årlig innskudd T. Dette skal gi samme resultat som hvis L_0 hadde blitt satt på sparekonto umiddelbart og forrentet i t år.

Nåverdiperspektivet
Året før nedbetalingen starter setter vi som basisår, og vi tenker at kroneverdien har økt, og vil øke, med $r\%$ hvert år etter basisåret. Summen av realverdiene til alle terminbeløp skal da tilsvare L_0.

c) Ta utgangspunkt i likningen merket med (*) i løsningsforslaget, og forklar hva de to sidene i likningen beskriver ut ifra spareperspektivet.

d) Ta utgangspunkt i likningen merket med (*) i løsningsforslaget, og lag en likning som beskriver nåverdiperspektivet.

4.2.3

#rasjonale funksjoner #funksjonsdrøfting #digital graftegning

Definer funksjonen

$$\frac{ax-b}{x-c}$$

i en digital graftegner (GeoGebra). Beskriv hva som skjer med grafen til f når du øker/minker én av a, b og c på intervallet $[-3, 3]$.

4.3 Praktiske oppgaver

4.3.1

#regresjon #derivasjon # funksjonsdrøfting

- Sett opp 11 kjegler med 10 meters avstand.
- Ta video av at du springer 100-meteren så fort du kan.
- Bruk videoen og regresjon til å finne en funksjon som gir en god beskrivelse av 100-meteren din.
- Hva var gjennomsnittsfarten din?
- Hva var toppfarten din?
- På hvilket tidspunkt hadde du størst akselerasjon?

4.3.2

#trigonometri

Sett en gjenstand på enden av en planke, og vipp enden varsomt oppover fram til gjenstanden starter å renne nedover planken. Vinkelen hvor bevegelsen starter kalles **friksjonsvinkelen**. Finn friksjonsvinkelen for tre forskjellige gjenstander. Undersøk om friksjonsvinkelen endres hvis gjenstandene og/eller planken vætes. Friksjonsvinkelen skal du finne bare ved å måle hvor høyt planken er vippet, og lengden til planken.

4.3.3

#integrasjon #regresjon #omdreiningslegemer

Finn forskjellige gjenstander det går an å helle vann i. Bruk regresjon og teorien om omdreiningslegemer til å finne en tilnærming for volumet til gjenstanden. Undersøk hvor godt tilnærmingen svarer til virkeligheten.

4.4 Eksamensoppgaver

4.4.1 (R1V23D1)

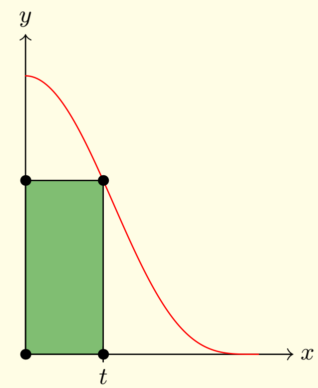
En elev har fått følgende oppgave:

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x^2 - 9)^4 \qquad , \qquad x \in (0, 3)$$

Et rektangel R har hjørne i $(0, 0)$, $(t, 0)$, $(t, f(t))$ og $(0, f(t))$.

Bestem den verdien av t som gjør at R har størst areal.



For å løse oppgaven har eleven lagd følgende program:

```
def A(x):
  return x*(x**2-9)**4

t = 0
d = 0.01

while A(t) < A(t+d):
  t = t + d

print(t)
```

a) Forklar strategien eleven har brukt.

b) Løs oppgaven eleven har fått.

4.4.2 (R2V23D1)

En elev har skrevet følgende kode:

```
1 a=3
2 d=4
3
4 N = 10
5 S = 0
6
7 for i in range(N):
8     S = S + a
9     a = a + d
10
11 print(S)
```

a) Forklar hva eleven vil regne ut.

b) Hva blir resultatet når man kjører programmet, hvis N settes til 100 i linje 4?

4.4.3 (R1H23D1)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2$$

Egil ønsker å lage et program som regner ut koordinatane til bunnpunktet på grafen til f. Han har skrevet koden nedenfor.

```
def f(x):
  return x**2 - 9x - 2

def df(x, h):
  return (f(x+h)-f(x))/h

h = 0.001
a = 0

while df(a, h) < 0:
  a = a + 1

print("Bunnpunktet er", (a, f(a)))
```

Utdata

```
Bunnpunktet er (3, -11)
```

a) Forklar hvilken strategi Egil har brukt.

Svaret han får er ikke rett.

a) Foreslå en endring i koden som vil gi Egil et riktigere svar.