Vedlegg A: Eulers tall

Den deriverte som motivajon

Gitt funksjonen $f(x) = a^x$. Da har vi at

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}\end{aligned}$$

Da x er uavhengig av h, får vi at

$$(a^x)' = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Likningen over peker mot noe fantastisk; hvis det finnes et tall a som er slik at $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$, så vil funksjonen a^x være sin egen deriverte funksjon! Altså er da $(a^x)' = a^x$. Vi legger nå merke til at hvis

$$a = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

så er

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^h - 1}{h} \\ &= \frac{1 + h - 1}{h} \\ &= 1\end{aligned}$$

Hvis vi kan vise at grenseverdien $\lim\limits_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ eksisterer, har vi altså funnet akkurat det uttrykket for a som vi ønsker oss.

Undersøking av grenseverdien

Vi innfører følgende to funksjoner (motivasjonen for å innføre g vil komme fram senere):

$$f(h) = 1 + h \qquad , \qquad g(h) = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$$

Videre ønsker vi å undersøke for hvilke verdier f er mindre enn g. Når $f = g$, har vi at

$$1 + h = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h \tag{1}$$

Vi gjør nå følgende observasjon: Gitt to tall c og k, og funksjonen $p(h) = b^h$, hvor $k > 0$ og $0 < b < 1$. Da har vi at

$$p(c + k) - p(c) = b^{c+k} - b^c = b^c \left(b^k - 1\right)$$

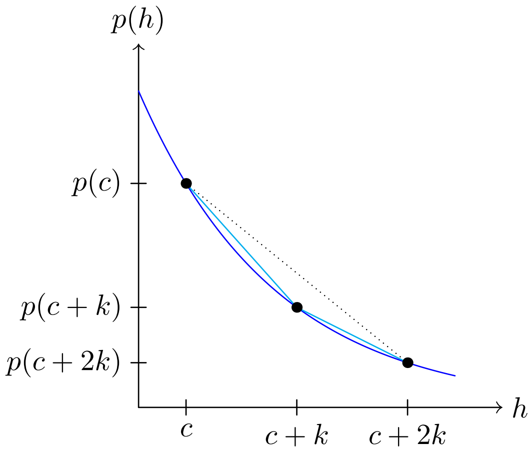
Tilsvarende er

$$p(c + 2k) - p(c + k) = b^{c+k} \left(b^k - 1\right)$$

Videre er $b^{c+k} < b^c$ og $b^k - 1 < 1$, som betyr at

$$\frac{p(c + k) - p(c)}{k} < \frac{p(c + 2k) - p(c + k)}{k}$$

Dermed må linja mellom $(c, p(c))$ og $(c + k, p(c + k))$ være brattere enn linja mellom $(c + k, p(c + k))$ og $(c + 2k, p(c + 2k))$, og da må $(c + k, p(c + k))$ ligge under linja mellom $(c, p(c))$ og $(c + 2k, p(c + 2k))$.



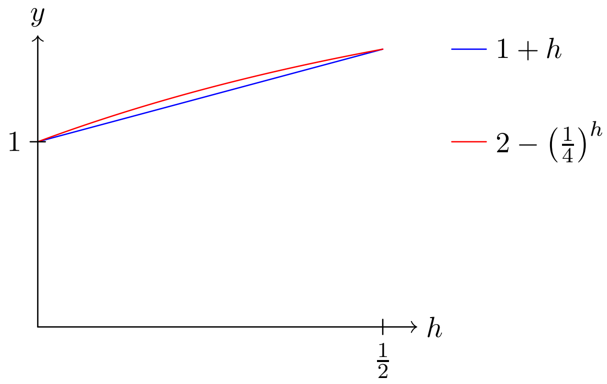
Da $p(h)$ ikke er en lineær funksjon, må én av disse tre påstandene være gyldig:

- p er konveks for alle h
- p er konkav for alle h
- p er skiftvis konkav/konveks

Men hvis p er konkav, må det finnes et intervall hvor $(c + k, p(c + k))$ ligger over linja mellom $(c, p(c))$ og $(c + 2k, p(c + 2k))$, og dette er selvmotsigende. Altså må p nødvendigvis være konveks for alle h.

Av det vi akkurat har funnet, kan vi konkludere med at funksjonen $2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$ er konkav for alle h, og da $1 + h$ er et lineært uttrykk, har (1) maksimalt to løsninger. Det er enkelt å vise at $h = 0$ og $h = \frac{1}{2}$ er løsningene til (1), og dette betyr at

$$1 + h \leq 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h \qquad , \qquad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \tag{2}$$



Vi setter $z = \frac{1}{h}$ for $h \neq 0$. Da er

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^h = \lim_{z \to \infty} = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z}}$$

Videre kan (2) omskrives til

$$1 + \frac{1}{z} \leq 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} \qquad , \qquad z \in [2, \infty] \tag{3}$$

For $z \to \infty$ kan vi derfor være sikre på at

$$1 + \frac{1}{z} < 1 + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} + \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^3 + \ldots$$

Høgresiden i ulikheten over kjenner vi igjen[1] som en uendelig geometrisk rekke hvor summen er gitt som

$$\frac{1}{1 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}} = 4^{\frac{1}{z}}$$

Altså er

$$\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \leq \lim_{z \to \infty} \left(4^{\frac{1}{z}}\right)^z = 4 \tag{4}$$

[1]Se om geometriske rekker i TM2.

Videre er det enkelt å vise at ligningen

$$1 + h = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

har løsningene $h = -1$ og $h = 0$, som betyr at

$$1 + h \geq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^h \qquad , \qquad h \in [0, \infty]$$

På tilsvarende måte som vi kom fram til en øvre grense, kan vi bruke dette til å slå fast at

$$\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \geq 2$$

Dermed vet vi at $\lim\limits_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ ligger et sted mellom 2 og 4. Da uttrykket inneholder utelukkende positive ledd for $z \to \infty$, kan vi også være sikre på at grenseverdien er endelig[1]. Det gir derfor mening å behandle grenseverdien som et tall, som vi kaller for e:

$$e = \lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

> **Merk**
>
> Den mest klassiske metoden for å finne en øvre og en nedre grense for $\lim\limits_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ er ved å bruke Binomialteoremet.

Et tilbakeblikk på den deriverte

Derivasjon av potensfunksjoner var det som motiverte oss til å undersøke tallet e. Av det vi har drøftet i de foregående avsnittene, følger det at

$$(e^x)' = e^x$$

Likningen over er rett og slett én av de viktigste likningene i matematikk.

[1] I motsetning til å være ubestemt. For eksempel vil $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ være ubestemt, fordi $\cos x$ svinger mellom -1 og 1.