0.1 Å finne størrelser

Likninger, formler og funksjoner (og utttrykk) er begrep som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. Når alle størrelsene utenom den éne er kjent, kan vi finne denne enten direkte eller indirekte.

0.1.1 Å finne størrelser direkte

Mange av regelboksene i boka inneholder en formel. Når en størrelse står alene på én side av formelen, sier vi at det er en formel for *den* størrelsen. For eksempel inneholder *regel* **??** en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, er det snakk om å sette verdiene inn i formelen og regne ut for å finne den ukjente, 'målestokk'.

Men ofte har vi bare en beskrivelse av en situasjon, og da må vi selv lage formlene. Da gjelder det å først identifisere hvilke størrelser som er til stede, og så finne relasjonen mellom dem.

Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
- I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.

a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.

b) Hva koster en taxitur på 17 km?

Svar

a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

0.1.2 Å finne størrelser indirekte

Når formlene er kjente

Eksempel 1

Vi har sett at strekningen s vi har kjørt, farten f vi har holdt, og tiden t vi har brukt kan settes i sammenheng via formelen[1]:

$$s = f \cdot t$$

Dette er altså en formel for s. Ønsker vi i stedet en formel for f, kan vi gjøre om formelen ved å følge prinsippene for likninger[2]:

$$s = f \cdot t$$
$$\frac{s}{t} = \frac{f \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}$$
$$\frac{s}{t} = f$$

[1]strekning = fart · tid

[2]Se MB, s. 121.

Eksempel 2

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for R.

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er $2\,\text{A}$ og spenningen $12\,\text{V}$, hva er da resistansen?

Svar

a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\ I \cdot R &= U \\ \frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\ R &= \frac{U}{I} \end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} \\ &= \frac{12}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 3

Gitt en temperatur T_C målt i antall grader Celsius ($°C$). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit ($°F$) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for T_C.

b) Hvis en temperatur er målt til $59°F$, hva er da temperaturen målt i $°C$?

Svar

a) Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at

$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

Når formlene er ukjente

Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løs likningen.

Svar

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

$$\text{penger allerede skaffet} + \text{antall lodd} \cdot \text{penger per lodd} = \text{prisen på turen}$$

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatter[1] *antall lodd* med x, og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$\begin{aligned} 25x &= 11\,000 - 2\,000 \\ 25x &= 9\,000 \\ \frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\ x &= 360 \end{aligned}$$

[1]Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U, og lag en formel for U.

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter P med 20, og får

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

0.2 Funksjoners egenskaper

Denne seksjonen tar utgangspunkt i at leseren er kjent med funksjoner, se MB, kapittel 9.

0.2.1 Funksjoner med samme verdi; skjæringspunkt

Regel 0.1 Skjæringspunkt til grafer

Et punkt hvor to funksjoner har samme verdi kalles et *skjæringspunkt* til funksjonene.

Eksempel 1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x + 4$$

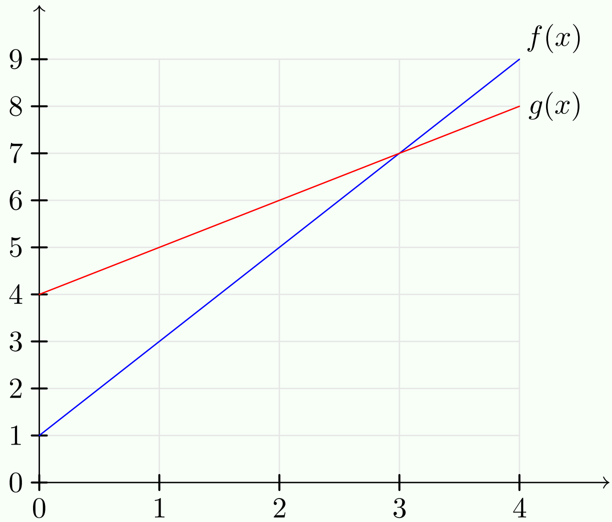
Finn skjæringspunktet til $f(x)$ og $g(x)$.

Svar

Vi kan finne skjæringspunktet både ved en *grafisk* og en *algebraisk* metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i det samme koordinatsystemet:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 3$, og da har begge funksjonene verdien 7. Altså er skjæringspunktet $(3, 7)$.

Algebraisk metode

At $f(x)$ og $g(x)$ har samme verdi gir likningen

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x + 1 &= x + 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Videre har vi at

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$g(3) = 3 + 4 = 7$$

Altså er $(3, 7)$ skjæringspunktet til grafene.

Merk: Det hadde selvsagt holdt å bare finne én av $f(3)$ og $g(3)$.

Eksempel 2

En klasse planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

  Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

  Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

Svar

Vi innfører følgende variabler:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1
- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

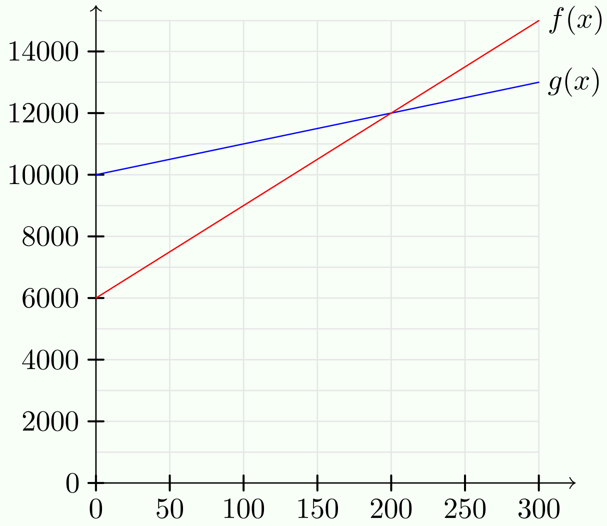
$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Videre løser vi nå oppgaven både med en grafisk og en algebraisk metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i samme koordinatsystem:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 200$. Dette betyr at busselskapene tilbyr samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

Algebraisk metode

Busselskapene har samme pris når

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\ 4\,000 &= 20x \\ x &= 200 \end{aligned}$$

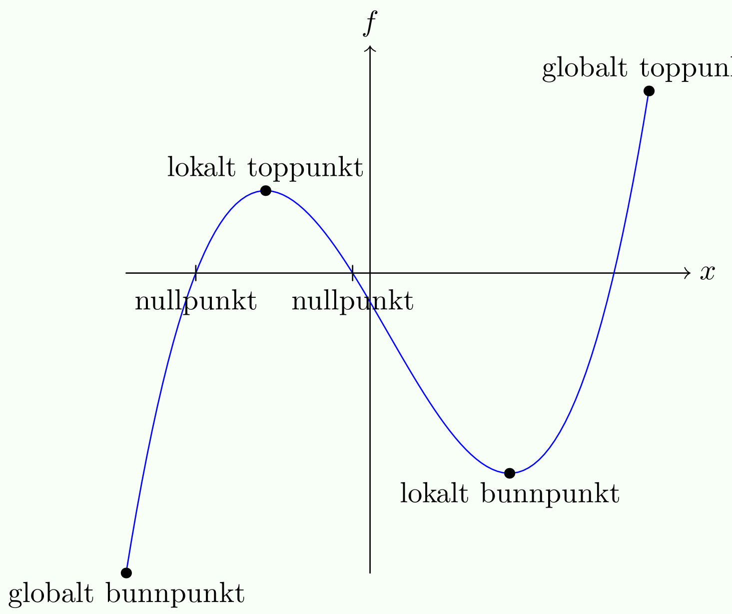
Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

0.2.2 Null-, bunn- og toppunkt

Regel 0.2 Null-, bunn- og toppunkt

- **Nullpunkt**
  En x-verdi som gir funksjonsverdi 0.
- **Lokalt bunnpunkt**
  Punkt der funksjonen (fra venstre) går fra å synke i verdi til å stige i verdi.
- **Lokalt toppunkt**
  Punkt der funksjonen (fra venstre) går fra å stige i verdi til å synke i verdi
- **Globalt bunnpunkt**
  Punkt der funksjonen har sin laveste verdi.
- **Globalt toppunkt**
  Punkt der funksjonen har sin høyeste verdi.

Eksempel



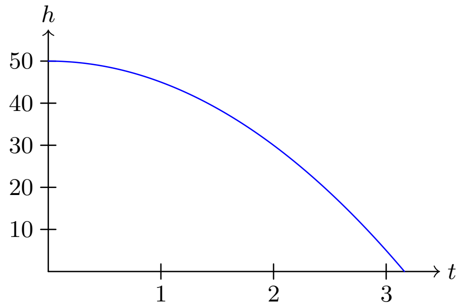
Hvorfor er nullpunkt en verdi?

Det kan kanskje virke litt rart at vi kaller x-verdier for nullpunkt, punkt har jo både en x-verdi og en y-verdi. Men når det er snakk om nullpunkt, er det underforstått at $y = 0$, og da er det tilstrekkelig å vite x-verdien for å avgjøre hvilket punkt det er snakk om.

0.3 Endringen mellom to punkt

Se for deg at vi slipper en ball fra 45 meter over bakken, og lar den falle fritt nedover. Når vi slipper ballen, starter vi også en stoppeklokke. Antall meter h ballen er over bakken etter t sekunder kan da tilnærmes ved funksjonen

$$h(t) = 50 - 5t^2$$



Det er åpenbart at ballen ikke har konstant[1] fart, men i mange sammenhenger er det nyttig å undersøke hva farten hadde vært hvis den var det. Vi har at

$$h(0) = 50 \qquad , \qquad h(1) = 50 - 5 \cdot 1^2 = 45$$

Dette betyr at i løpet av det første sekundet har ballen bevegd seg $50 - 45 = 5$ meter nedover. Hvis farten var konstant ville den derfor vært

$$\frac{5\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m/s}$$

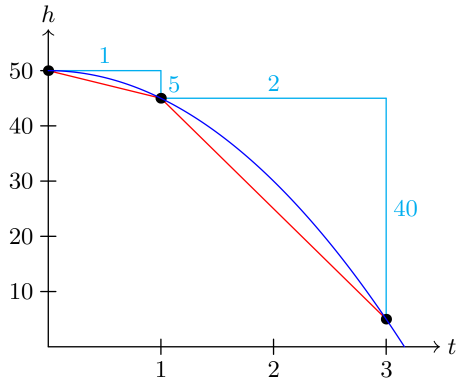
Videre har vi at

$$h(3) = 50 - 5 \cdot 3^2 = 5$$

Dette betyr at mellom $t = 1$ og $t = 3$ har ballen gått fra å være 45 meter over bakken til 5 meter over bakken. Altså har ballen bevegd seg $45 - 5 = 40$ meter i løpet av $3 - 1 = 2$ sekunder. Hvis farten var konstant ville den derfor vært

$$\frac{40\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}$$

[1]Se ??


h
t
50
40
30
20
10
1
2
3
1
5
2
40

0.4 Likningssett

Vi har så langt sett på likninger med ett ukjent tall, men det kan også være to eller flere tall som er ukjente. Som regel er det slik at

- er det to ukjente, trengs minst to likninger for å finne løsninger som er konstanter.
- er det tre ukjente, trengs minst tre likninger for å finne løsninger som er konstanter.

Og slik fortsetter det. Likningene som gir oss den nødvendige informasjonen om de ukjente, kalles et *likningssett*. I denne boka skal vi konsentrere oss om *lineære likninger med to ukjente*, som betyr at likningssettet består av uttrykk for lineære funksjoner.

0.4.1 Innsettingsmetoden

Regel 0.3 Innsettingsmetoden

Et lineært likningssett bestående av to ukjente, x og y, kan løses ved å

1. bruke den éne likningen til å finne et uttrykk for x.
2. sette uttrykket fra punkt 1 inn i den andre likningen, og løse denne med hensyn på y.
3. sette løsningen for y inn i uttrykket for x.

Merk: I punktene over kan selvsagt x og y bytte roller.

Eksempel 1

Løs likningssettet, og sett prøve på svaret.

$$x - y = 5 \qquad \text{(I)}$$

$$x + y = 9 \qquad \text{(II)}$$

Svar

Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x &= 5 + y \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i (II):

$$\begin{aligned} 5 + y + y &= 9 \\ 2y &= 9 - 5 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 5 + y \\ &= 5 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Altså er $x = 7$ og $y = 2$.

Vi setter prøve på svaret:

$$x - y = 7 - 2 = 5$$

$$x + y = 7 + 2 = 9$$

Eksempel 2

Løs likningssettet

$$7x - 5y = -8 \tag{I}$$

$$5x - 2y = 4x - 5 \tag{II}$$

Svar

Ved innsettingsmetoden kan man ofte spare seg for en del utregning ved å velge likningen og den ukjente som gir det fineste uttrykket innledningsvis. Vi observerer at (II) gir et fint uttrykk for x:

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -6 \\ x &= 2y - 5 \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i (I):

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -8 \\ 7(2y - 5) - 5y &= -8 \\ 14y - 35 - 5y &= -8 \\ 9y &= 27 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Altså er $x = 1$ og $y = 3$.

Eksempel 3

Løs likningssettet

$$3x - 4y = -2 \tag{I}$$

$$9y - 5x = 6x + y \tag{II}$$

Svar

Vi velger her å bruke (I) til å finne et uttrykk for y:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -2 \\ 3x + 2 &= 4y \\ \frac{3x+2}{4} &= y \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for y inn i (II):

$$\begin{aligned} 9y - 5x &= 6x + y \\ 9 \cdot \frac{3x+2}{4} - 5x &= 6x + \frac{3x+2}{4} \\ 9(3x+2) - 20x &= 24x + 3x + 2 \\ 27x + 18 - 20x &= 24x + 3x + 2 \\ -20x &= -16 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for x inn i uttrykket for y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+2}{4} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{4}{5} + 2}{4} \\ &= \frac{\frac{22}{5}}{4} \\ &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

Altså er $x = \frac{4}{5}$ og $y = \frac{11}{10}$.

Eksempel 4

"Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?".

Svar

"Broren min er dobbelt så gammel som meg." betyr at

$$\text{brors alder} = 2 \cdot \text{min alder}$$

"Til sammen er vi 9 år gamle." betyr at

$$\text{brors alder} + \text{min alder} = 9$$

Erstatter vi 'brors alder' med "2 · min alder", får vi

$$2 \cdot \text{min alder} + \text{min alder} = 9$$

Altså er

$$\begin{aligned} 3 \cdot \text{min alder} &= 9 \\ \frac{\cancel{3} \cdot \text{min alder}}{\cancel{3}} &= \frac{9}{3} \\ \text{min alder} &= 3 \end{aligned}$$

"Jeg" er altså 3 år gammel.

0.4.2 Grafisk metode

Regel 0.4 Grafisk løsning av likningssett

Et lineært likningssett bestående av to ukjente, x og y, kan løses ved å

1. omskrive de to likningene til uttrykk for to linjer.

2. finne skjæringspunktet til linjene.

Eksempel 1

Løs likningsettet

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

Svar

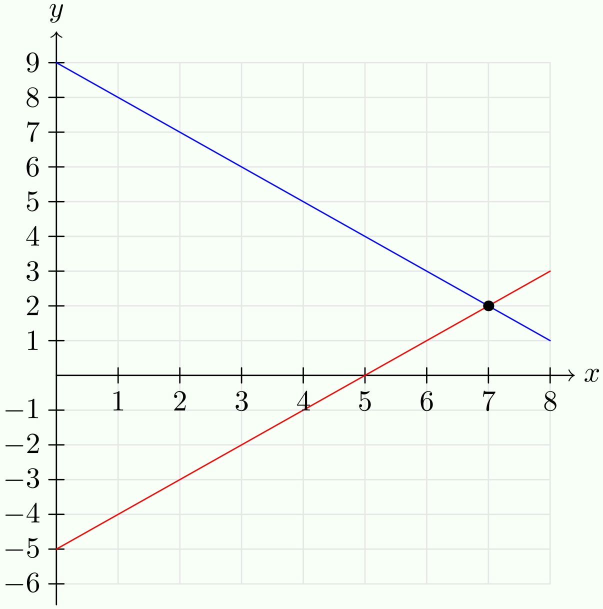
Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ y &= x - 5 \end{aligned}$$

Av (II) har vi at

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y &= 9 - x \end{aligned}$$

Vi tegner disse to linjene inn i et koordinatsystem:



Altså er $x = 7$ og $y = 2$.