

## 0.1 Monotoniegenskaper

De fleste funksjonsverdier varierer. Beskrivelser av hvordan funksjonene varierer kaller vi beskrivelser av funksjonenes **monotoniegenskaper**.

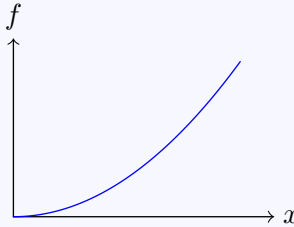
### 0.1 Voksende og avtagende funksjoner

Gitt en funksjon  $f(x)$ .

- $f$  er **voksende** på intervallet  $[a, b]$  hvis vi for alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (1)$$

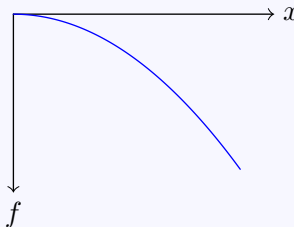
Hvis  $f(x_1) \leq f(x_2)$  kan erstattes med  $f(x_1) < f(x_2)$ , er  $f$  **strengt voksende** på intervallet.



- $f$  er **avtagende** på intervallet  $[a, b]$  hvis vi for alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (2)$$

Hvis  $f(x_1) \geq f(x_2)$  kan erstattes med  $f(x_1) > f(x_2)$ , er  $f$  **strengt avtagende** på intervallet.



## 0.2 Monotoniegenskaper og den deriverte

Gitt  $f(x)$  deriverbar på intervallet  $[a, b]$ .

- Hvis  $f' \geq 0$  for  $x \in (a, b)$ , er  $f$  voksende for  $x \in [a, b]$
- Hvis  $f' \leq 0$  for  $x \in (a, b)$ , er  $f$  avtagende for  $x \in [a, b]$

Hvis henholdsvis  $\geq$  og  $\leq$  kan erstattes med  $>$  og  $<$ , er  $f$  strengt voksende/avtagende.

### Eksempel

Avgjør på hvilke intervaller  $f$  er voksende/avtagende når

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \quad , \quad x \in [0, 8]$$

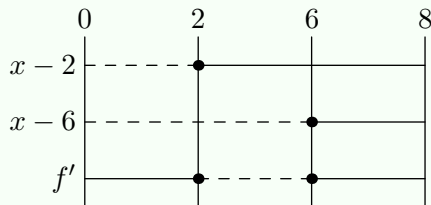
### Svar

Vi har at

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

For å tydeliggjøre når  $f'$  er positiv, negativ eller lik 0 gjør vi to ting; vi faktoreriserer uttrykket til  $f'$ , og tegner et fortegnsskjema:

$$f'(x) = (x - 2)(x - 6)$$



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket  $x - 2$  er negativt når  $x \in [0, 2)$ , lik 0 når  $x = 2$ , og positivt når  $x \in (2, 8]$ .
- Uttrykket  $x - 6$  er negativt når  $x \in [0, 6)$ , lik 0 når  $x = 6$ , og positivt når  $x \in (6, 8]$ .
- Siden  $f' = (x - 2)(x - 6)$ , er

$$f' \geq 0 \text{ når } x \in (0, 2) \cup (6, 8)$$

$$f' = 0 \text{ når } x \in \{2, 6\}$$

$$f' \leq 0 \text{ når } x \in (2, 6)$$

Dette betyr at

$f$  er voksende når  $x \in [0, 2] \cup [6, 8]$

$f$  er avtagende når  $x \in [2, 6]$

### 0.3 Definisjonsmengde på voksende/avtagende intervall

Gitt en kontinuerlig funksjon  $f(x)$  strengt voksende/avtagende for  $x \in [a, b]$ . Definisjonsmengden til  $f$  på dette intervallet er da  $[f(a), f(b))$ .

## 0.2 Ekstremalpunkt, vendepunkt og infleksjonspunkt

### 0.4 Maksimum og minimum

*Merk:* Et tall  $c$  kan omtales som et punkt i funksjonsdrøftinger, forstått at det er snakk om punktet  $(c, 0)$ .

Gitt en funksjon  $f(x)$  og et tall  $c$ .

- $f$  har **absolutt maksimum**  $f(c)$  hvis  $f(c) \geq f(x)$  for alle  $x \in D_f$ .
- $f$  har **absolutt minimum**  $f(c)$  hvis  $f(c) \leq f(x)$  for alle  $x \in D_f$ .
- $f$  har et **lokalt maksimum**  $f(c)$  hvis det finnes et åpent intervall  $I$  om  $c$  slik at  $f(c) \geq f(x)$  for  $x \in I$ .
- $f$  har et **lokalt minimum**  $f(c)$  hvis det finnes et åpent intervall  $I$  om  $c$  slik at  $f(c) \leq f(x)$  for  $x \in I$ .

### Språkboksen

Et maksimum/minimum blir også kalt en **maksimumsverdi/minimumsverdi**.

### 0.5 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon  $f(x)$  med maksimum/minimum  $f(c)$ . Da er

- $f(c)$  en **ekstremalverdi** for  $f$ .
- $c$  et **ekstremalpunkt** for  $f$ . Nærmere bestemt et maksimumspunkt/minimumspunkt for  $f$ .
- $(c, f(c))$  et **toppunkt/bunnpunkt** for  $f$ .

## 0.6 Kritiske punkt

Et tall  $c$  er et **kritisk punkt** for en funksjon  $f(x)$  hvis én av følgende gjelder:

- $f$  er ikke deriverbar i  $c$
- $f'(c) = 0$

## 0.7 $f' = 0$ for lokale ekstremalpunkt

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$  og  $c \in [a, b]$ .

- (i) Hvis  $c$  er et lokalt ekstremalpunkt for  $f$ , er  $f'(c) = 0$
- (ii) Hvis  $f' > 0$  for  $x \in (a, c)$  og  $f' < 0$  for  $x \in (c, b)$ , er  $c$  et lokalt maksimumspunkt for  $f$
- (iii) Hvis  $f' < 0$  for  $x \in (a, c)$  og  $f' > 0$  for  $x \in (c, b)$ , er  $c$  et lokalt minimumspunkt for  $f$

## Språkboksen

Det som blir beskrevet i punkt (ii) og (iii) omtales ofte som at ” $f$  skifter fortegn i  $c$ ”.

### Eksempel 1

Finn det lokale bunnpunktet og toppunktet til

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x$$

#### Svar

Vi starter med å finne  $f'$ :

$$\begin{aligned} f' &= 6x^2 + 18x - 60 \\ &= 6(x^2 + 3x - 10) \end{aligned}$$

Siden  $5(-2) = 10$  og  $5 - 2 = 3$ , har vi av [regel ??](#) at

$$f' = 6(x - 2)(x + 5)$$

$f' = 0$  for  $x = 2$  og  $x = -5$ . Vi har at

$$f(-5) = 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 = -68$$

$$f(2) = 5^3 + 9 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 = 275$$

Altså er  $(-5, 275)$  toppunktet til  $f$  og  $(2, -68)$  er bunnpunktet til  $f$ .

## 0.8 Andrederiverttesten

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$  og et tall  $c$ .

- Hvis  $f'(c) = 0$  og  $f''(c) < 0$ , er  $f(c)$  et lokalt maksimum.
- Hvis  $f'(c) = 0$  og  $f''(c) > 0$ , er  $f(c)$  et lokalt minimum.
- Hvis  $f'(c) = f''(c) = 0$ , kan man ikke ut ifra denne informasjonen alene si om  $f(c)$  er et lokalt maksimum eller minimum.

## 0.8 Andrederiverttesten (forklaring)

Av definisjonen for den deriverte har vi at

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

Når  $f'(c) = 0$ , er

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

Når  $f''(c) < 0$ , betyr dette at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

Altså må  $f'(c+h)$  være positiv når  $h$  går mot 0 fra venstre og negativ når  $h$  går mot 0 fra høyre. Dermed skifter  $f'$  fortegn i  $c$ , som da må være et maksimalpunkt for  $f$ . Tilsvarende må  $c$  være et minimumspunkt for  $f$  hvis  $f'(c) = 0$  og  $f''(c) < 0$ .

## 0.9 Infleksjonspunkt og vendepunkt

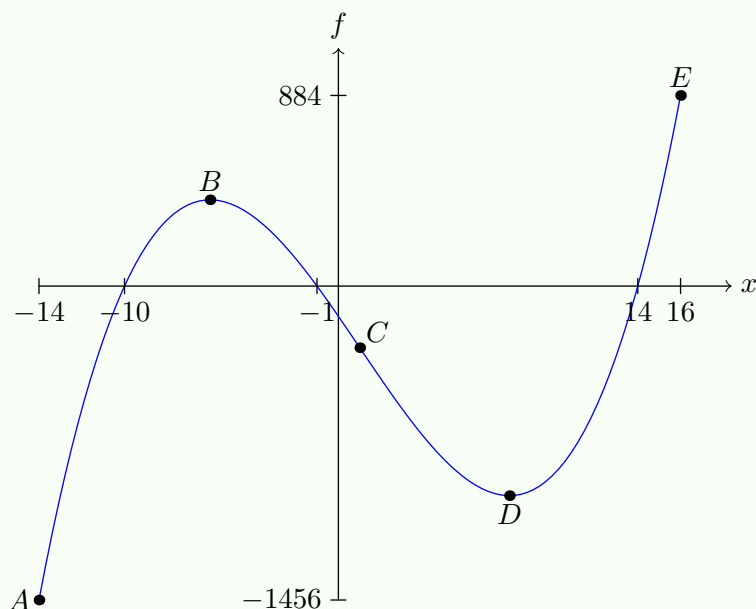
For en kontinuerlig funksjon  $f(x)$  har vi at

- Hvis  $f''(c) = 0$  og  $f''$  skifter fortegn i  $c$ , er  $c$  et **infleksjonspunkt** for  $f$ .
- Hvis  $c$  er et infleksjonspunkt for  $f$ , er  $(c, f(c))$  et **vendepunkt**.
- $f$  er konveks på intervall hvor  $f'' > 0$ , og konkav på intervall hvor  $f'' < 0$ . (Se [regel 0.12](#) angående konvekse og konkave funksjoner.)



## Eksempel

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140 \quad , \quad x \in [-14, 16]$$



punkt/verdi	type
$A = (-14, -1456)$	absolutt bunnpunkt
-14	ekstremalpunkt; absolutt minimum
-1456	absolutt minimum
$B = (-6, 400)$	lokalt toppunkt
-6	ekstremalpunkt; lokalt maksimalpunkt
400	lokalt maksimum
$C = (-1, -286)$	vendepunkt
-1	infleksjonspunkt
$D = (8, -972)$	lokalt bunnpunkt
8	ekstremalpunkt; lokalt minimumspunkt
-972	lokal minimum
$E = (16, 884)$	absolutt maksimum
16	ekstremalpunkt; absolutt maksimumspunkt
884	absolutt maksimum
-10, -1 og 14	nullpunkt

## 0.3 Asymptoter

### 0.10 Vertikale asymptoter

Gitt en funksjon  $f(x)$  og en konstant  $c$ .

- Hvis  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ , er  $c$  en **vertikal asymptote ovenfra** for  $f$ .
- Hvis  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ , er  $c$  en **vertikal asymptote nedenfra** for  $f$ .
- Hvis  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ , er  $c$  en **vertikal asymptote** for  $f$ .

### Eksempel

Finn den vertikale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

### Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{1}{x-3} + 2 \right] = \pm\infty$$

Altså er  $x = 3$  en vertikal asymptote for  $f$ .

### 0.11 Horisontale asymptoter

Gitt en funksjon  $f(x)$ . Da er  $y = c$  en **horizontal asymptote** for  $f$  hvis

$$\lim_{x \rightarrow |\infty|} f(x) = c$$

#### Eksempel

Finn den horisontale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

#### Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \rightarrow |\infty|} \left[ \frac{1}{x-3} + 2 \right] = 2$$

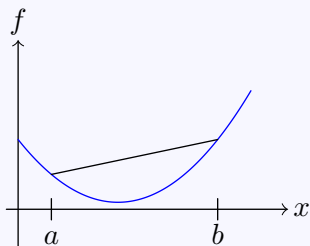
Altså er  $y = 2$  en horizontal asymptote for  $f$ .

## 0.4 Konvekse og konkave funksjoner

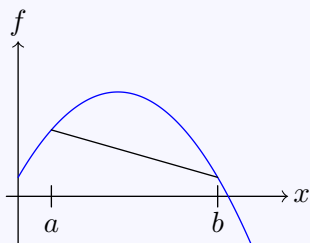
### 0.12 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon  $f(x)$ .

Hvis hele linja mellom  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$  ligger over grafen til  $f$  på intervallet  $[a, b]$ , er  $f$  **konveks** for  $x \in [a, b]$ .



Hvis hele linja mellom  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$  ligger under grafen til  $f$  på intervallet  $[a, b]$ , er  $f$  **konkav** for  $x \in [a, b]$ .



## 0.5 Injektive og omvendte funksjoner

### Injektive funksjoner

#### 0.13 Injektive funksjoner

Gitt en funksjon  $f(x)$ . Hvis alle verdier til  $f$  er unike på intervallet  $x \in [a, b]$ , er  $f$  **injektiv** på dette intervallet.

#### Språkboksen

Et annet ord for injektiv er **én-entydig**.

### Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen  $f(x) = 2x + 1$ , som åpenbart er injektiv for alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dette betyr at likningen  $f = 2x + 1$  bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på  $x$  eller  $f$ . Løser vi med hensyn på  $x$ , får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for  $f$  til det "omvendte", et uttrykk for  $x$ . Siden  $x$  og  $f$  begge er variabler, er  $x$  en funksjon av  $f$ , og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den **omvendte funksjonen** til  $f$ . Setter vi uttrykket til  $f$  inn i uttrykket til  $x(f)$ , får vi nødvendigvis  $x$ :

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle  $x$  som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både  $f$  og  $x$ , slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette  $y = f$  og  $g = x$ . Den omvendte funksjonen  $g$  til  $f$  er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

### 0.14 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner  $f(x)$  og  $g(y)$ . Hvis

$$g(f) = x$$

er  $f$  og  $g$  **omvendte** funksjoner.

#### Eksempel 1

Gitt funksjonen  $f(x) = 5x - 3$ .

- a) Finn den omvendte funksjonen  $g$  til  $f$ .
- b) Vis at  $g(f) = x$ .

#### Svar

- a) Vi setter  $y = f$ , og løser likningen med hensyn på  $x$ :

$$y = 5x - 3$$

$$x = \frac{y + 3}{5}$$

Da er  $g(y) = \frac{y+3}{5}$ .

- b) Når  $y = f$ , har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x - 3) \\ &= \frac{5x - 3 + 3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

**$f^{-1}$**

Hvis  $f$  og  $g$  er omvendte funksjoner, skrives  $g$  ofte som  $f^{-1}$ . Da er det viktig å merke seg at  $f^{-1}$  ikke er det samme som  $(f)^{-1}$ . For eksempel, gitt  $f(x) = x + 1$ . Da er

$$f^{-1} = x - 1 \quad , \quad (f)^{-1} = \frac{1}{x + 1}$$

I alle andre tilfeller enn ved  $n = -1$ , vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$

## Forklaringer

### 0.2 Monotoniegenskaper og den deriverte (forklaring)

Gitt  $f(x)$ , hvor  $f' \geq 0$  for  $x \in [a, b]$ . La  $x_1, x_2 \in (a, b)$  og  $x_2 > x_1$ . Av [middelverdisetningen](#) finnes det et tall  $c \in (x_1, x_2)$  slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da  $c \in [a, b]$ , er  $f'(x) \geq 0$ , og da er

$$0 \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Følgelig er  $f(x_2) \geq f(x_1)$ , og av [definisjon 0.1](#) er da  $f$  voksende på intervallet  $(a, b)$ .

### 0.3 Definisjonsmengde på voksende/avtagende intervall (forklaring)

Vi ønsker å vise at for et hvilket som helst tall  $c \in (f(a), f(b))$  finnes det et tall  $x_c$  slik at  $f(x_c) = c$ .

Vi lar  $f(x)$  være en strengt voksende funksjon og definerer  $P(c, n)$  gitt ved følgende prosedyre, beskrevet av en Python-funksjon (se [AM1](#) for en innføring i Python):

```
1 def P(c, n):
2     x1 = a
3     x2 = b
4     x3 = (a+b)/2
5     for i in range(n):
6         if f(x3) == c:
7             break
8         if c < f(x3):
9             x2 = x3
10        if c > f(x3):
11            x1 = x3
12        x3 = (x1 + x2)/2.0
13    return f(x3)
```



Da  $f$  er strengt voksende kan vi hele tiden være sikre på at  $f(x_1) \leq f(x_3) \leq f(x_2)$  og  $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$  ved starten av hver iterasjon. Når  $n \rightarrow \infty$  vil  $x_2 \rightarrow x_1$ , og da  $f$  er kontinuerlig vil  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1) = f(x_2)$ . Dette betyr at  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(c, n) \rightarrow c$ , og dermed må det finnes et tall  $x_c \in (a, b)$  som gir at  $f(x_c) = c$ .

## 0.7 $f' = 0$ for lokale ekstremalpunkt (forklaring)

### Punkt (i)

La  $c$  være et lokalt maksimumspunkt for  $f$ . For et tall  $h$  må vi da ha at  $c \geq x$  for  $x \in (c - |h|, c + |h|)$ . Da er

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Dette betyr at

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

og at

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Følgelig er

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Altså er  $f'(c) = 0$ , og  $f'$  skifter fortegn fra positiv til negativ i  $c$ . Med samme framgangsmåte kan det vises at dette også gjelder dersom  $c$  er et minimumspunkt, bare at da skifter  $f'$  fra negativ til positiv.

### Punkt (ii)

Hvis  $f' > 0$  på intervallet  $(a, c)$ , har vi av [regel 0.2](#) at  $f$  er sterkt voksende der. Hvis  $f' < 0$  på  $(c, b)$ , er  $f$  sterkt avtagende der. Dette må nødvendigvis bety at  $f(c) \geq f(x)$  for  $x \in (a, b)$ , og da er  $c$  et maksimumspunkt.

### Punkt (iii)

Tilsvarende resonnement som for punkt (ii).