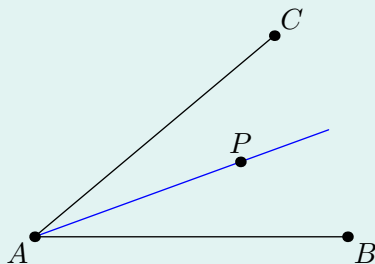


0.1 Definisjoner

0.1 Halveringslinje

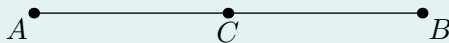
Gitt $\angle BAC$. For et punkt P som ligger på **halveringslinja** (blå linje i figuren) til vinkelen, er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC \quad (1)$$



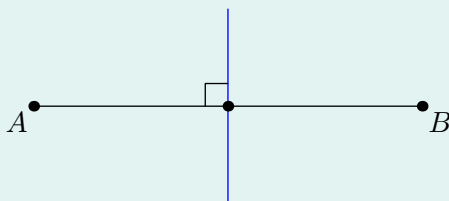
0.2 Midtpunkt

Midtpunktet C til AB er punktet på linjestykket slik at $AC = CB$.



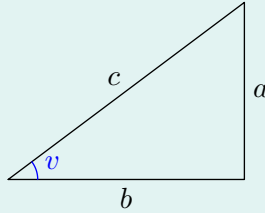
0.3 Midtnormal

Midtnormalen (blå linje i figuren) til AB står normalt på, og går gjennom midtpunktet til, AB .



0.4 sin, cos og tan

Gitt en rettvinklet trekant med katetene a og b , hypotenus c , og vinkel v , som vist i figuren under.



Da er

$$\sin v = \frac{a}{c} \quad (2)$$

$$\cos v = \frac{b}{c} \quad (3)$$

$$\tan v = \frac{a}{b} \quad (4)$$

Språkboksen

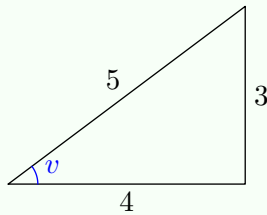
I figuren over blir a kalt den **motstående** kateten til vinkel v , og b den **hosliggende**.

sin, cos og tan er forkortelser for henholdsvis **sinus**, **cosinus** og **tangens**.

Eksaktverdier

De aller fleste sinus-, cosinus- og tangensverdier er irrasjonale tall, i praktiske anvendelser av verdiene er det derfor vanlig å benytte digitale hjelpemidler. Verdiene som er viktigst for teoretiske formål er gitt i **vedlegg ??**.

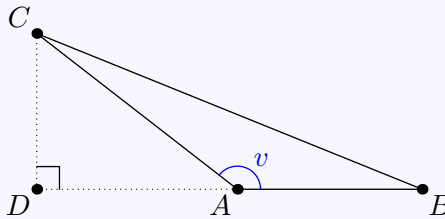
Eksempel



$$\sin v = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos v = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan v = \frac{3}{4}$$

0.5 Sinus, cosinus og tangens I

Gitt $\triangle ABC$, hvor $v = \angle BAC > 90^\circ$, som vist i figuren under.



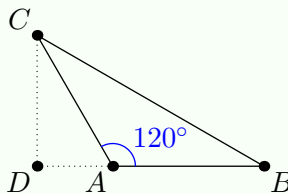
Da er

$$\sin v = \frac{CD}{AC} \tag{5}$$

$$\cos v = -\frac{AD}{AC} \tag{6}$$

$$\tan v = -\frac{CD}{AD} \tag{7}$$

Eksempel

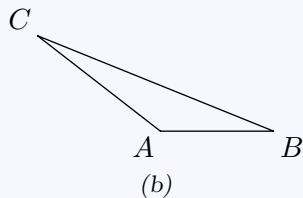
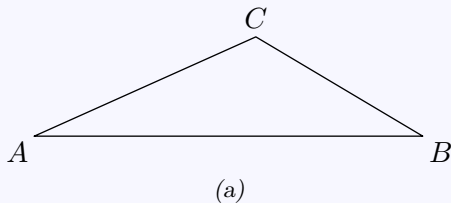


I figuren over er $CD = \sqrt{3}$, $AD = 1$ og $AC = 2$. Da er

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad , \quad \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

0.2 Egenskaper til trekanter

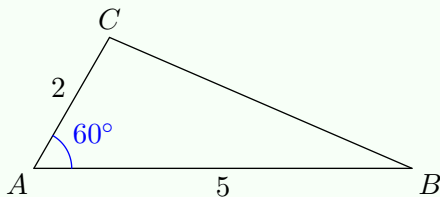
0.6 Arealsetningen



Arealet T til $\triangle ABC$ er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A \quad (8)$$

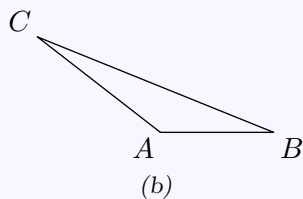
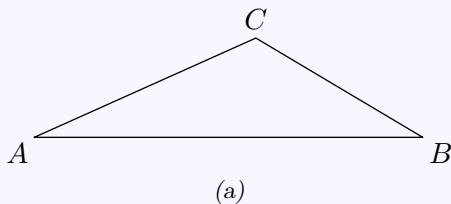
Eksempel



Da $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Arealet T til $\triangle ABC$ er

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

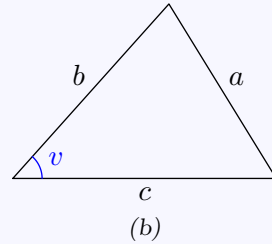
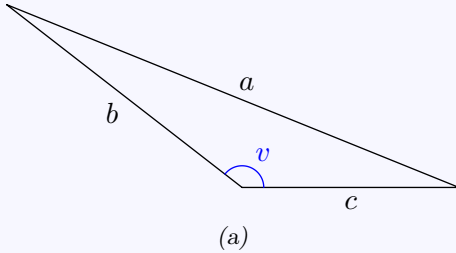
0.7 Sinussetningen



$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle C}{AB} \quad (9)$$

0.8 Cosinussetningen

Gitt en trekant med sidelengder a , b og c , og vinkel v , som vist i figurene under.

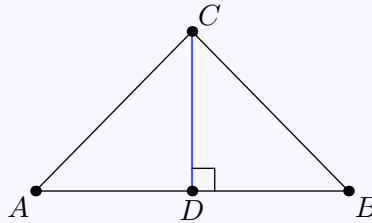


Da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - ab \cos v \quad (10)$$

0.9 Midtnormalen i en likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$, hvor $AC = BC$, som vist i figuren under.

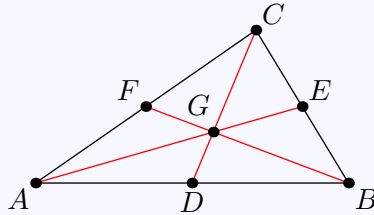


Høgda DC ligger da på midtnormalen til AB .

0.10 Medianer i trekanter

En **median** er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.

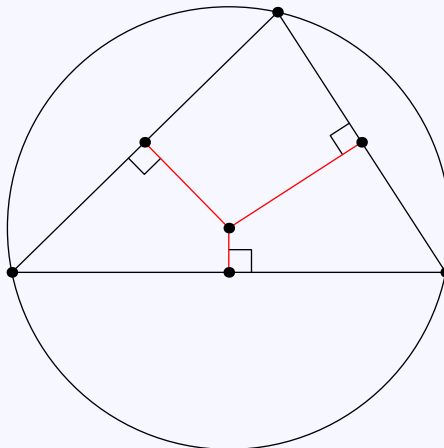


Gitt $\triangle ABC$ med medianer CD , BF og AE , som skjærer hverandre i G . Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

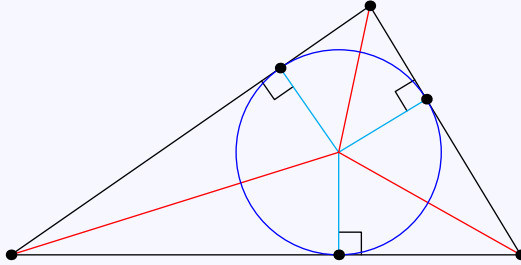
0.11 Midtnormaler i trekanter

Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den **omskrevne sirkelen** til trekantne, som har hjørnene til trekanten på sin bue.



0.12 Innskrevet sirkel i trekanter

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den **innskrevne sirkelen** til trekanten, som tangerer hver av sidene til trekanten.



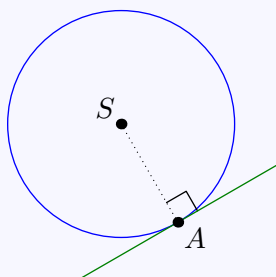
0.3 Egenskaper til sirkler

0.13 Tangent

En linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt, kalles en **tangent** til sirkelen.

La S være sentrum i en sirkel, og la A være skjæringspunktet til denne sirkelen og ei linje. Da har vi at

linja er en tangent til sirkelen $\iff \overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



0.14 Sentral- og periferivinkel

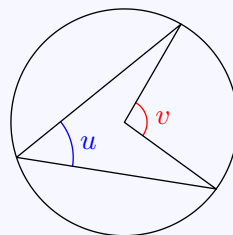
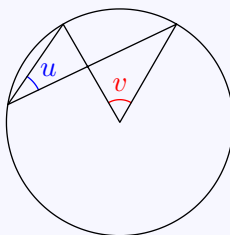
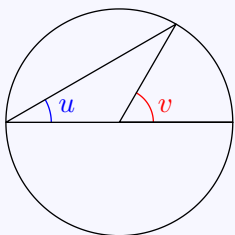
Både periferi- og sentralvinkler har vinkelbein som ligger (delvis) inni en sirkel.

En **sentralvinkel** har toppunkt i sentrum av en sirkel.

En **periferivinkel** har toppunkt på sirkelbuen.

Gitt en periferivinkel u og en sentralvinkel v , som er innskrevet i samme sirkel og som spenner over samme sirkelbue. Da er

$$v = 2u \quad (11)$$

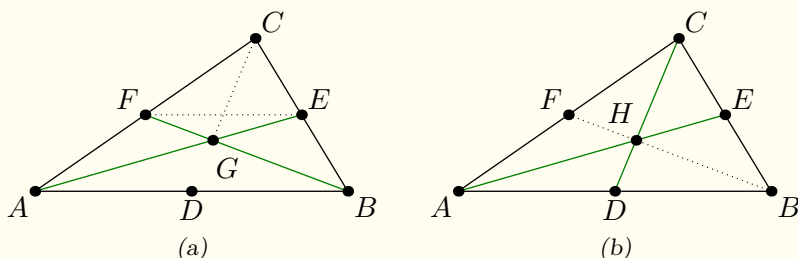


0.4 Forklaringer

0.9 Midtnormalen i en likebeint trekant (forklaring)

Da både $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ er rettvinklede, har CD som korteste katet, og $AC = BC$, følger det av Pytagoras' setning at $AD = BD$.

0.10 Medianer i trekanter (forklaring)



Vi lar G være skjæringspunktet til BF og AE , og tar det for gitt at dette ligger inne i $\triangle ABC$. Da $AF = \frac{1}{2}AC$ og $BE = \frac{1}{2}BC$, er $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$. Dermed har F og E lik avstand til AB , som betyr at $FE \parallel AB$. Videre har vi også at

$$ABG + AFG = ABG + BGE$$

$$AFG = BGE$$

G har lik avstand til AF og FC , og $AF = FC$. Dermed er $AFG = GFC$. Tilsvarende er $BGE = GEC$. Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$AFG + GFC + GEC = AEC$$

$$GEC = \frac{1}{6}ABC$$

La H være skjæringspunktet til AE og CD . Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både $\triangle GEC$ og $\triangle HEC$ har CE som side, likt areal, og både G og H ligger på AE , må $G = H$. Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

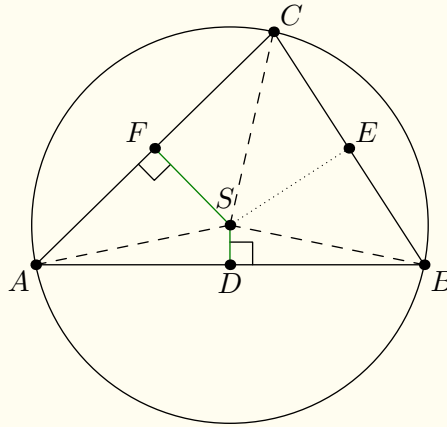
$\triangle ABG \sim \triangle EFG$ fordi $\angle EGF$ og $\angle AGB$ er toppvinkler og $AB \parallel FE$. Dermed er

$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

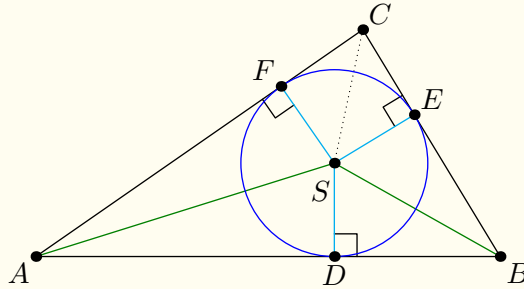
0.11 Midtnormaler i trekanter (forklaring)



Gitt $\triangle ABC$ med midtpunktene D , E og F . Vi lar S være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til AC og AB . $\triangle AFS \sim \triangle CFS$ fordi begge er rettvinklede, begge har FS som korteste katet, og $AF = FC$. Tilsvarende er $\triangle ADS \sim \triangle BDS$. Følgelig er $CS = AS = BS$. Dette betyr at

- $\triangle BSC$ er likebeint, og da går midtnormalen til BC gjennom S .
- A , B og C må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum S og radius $AS = BS = CS$

0.12 Innskrevet sirkel i trekanter (forklaring)

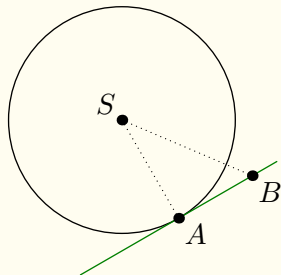


Gitt $\triangle ABC$. Vi lar S være skjæringspunktet til de respektive halveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle CBA$. Videre plasserer vi D , E og F slik at $DS \perp AB$, $ES \perp BC$ og $FS \perp AC$. $\triangle ASD \cong \triangle ASF$ fordi begge er rettvinklede og har hypotenus AS , og $\angle DAS = \angle SAF$. Tilsvarende er $\triangle BSD \cong \triangle BSE$. Dermed er $SE = SD = SF$. Følgelig er F , C og E de respektive tangeringspunktene til AB , BC og AC og sirkelen med sentrum S og radius SE .

Videre har vi at $\triangle CSE \cong \triangle CSF$, fordi begge er rettvinklede og har hypotenus CS , og $SF = SE$. Altså er $\angle FCS = \angle ECS$, som betyr at CS ligger på halveringslinja til $\angle ACB$.

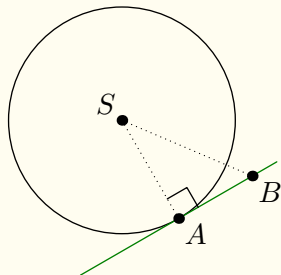
0.13 Tangent (forklaring)

Linja er en tangent til sirkelen $\Rightarrow \overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Vi antar at vinkelen mellom linja og \overrightarrow{AS} er ulik 90° . Da må det finnes et punkt B på linja slik at $\angle BAS = \angle SBA$, som betyr at $\triangle ASB$ er likebeint. Følgelig er $AS = BS$, og da AS er lik radien i sirkelen, må dette bety at B også ligger på sirkelen. Dette motsier det faktum at A er det eneste skjæringspunktet til sirkelen og linja, og dermed må vinkelen mellom linja og \overrightarrow{AS} være 90° .

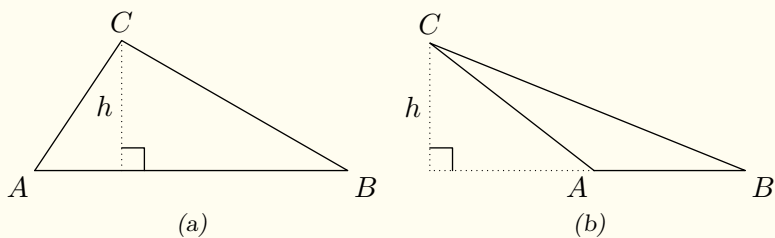
Linja er en tangent til sirkelen $\Leftarrow \overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Gitt et vilkårlig punkt B , som ikke samsvarer med A , på linja. Da er BS hypotenusen i $\triangle ABC$. Dette innebærer at BS er større enn radien til sirkelen ($BS > AS$), og da kan B umulig ligge på sirkelen. Altså er A det eneste punktet som ligger på både linja og sirkelen, og dermed er linja en tangent til sirkelen.

0.6 Arealsetningen (forklaring)

Gitt to tilfeller av $\triangle ABC$, som vist i figuren under. Det éne hvor $\angle BAC \in (0^\circ, 90^\circ]$, det andre hvor $\angle BAC \in (90^\circ, 0^\circ)$ og la h være høyden med grunnlinje AB .



Arealet T til $\triangle ABC$ er i begge tilfeller

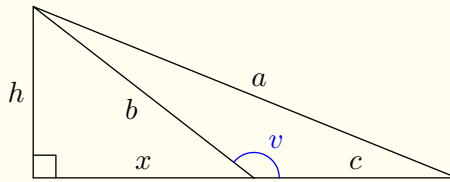
$$T = \frac{1}{2}AB \cdot h \quad (12)$$

Av henholdsvis (2) og (5) har vi at $h = AC \cdot \sin \angle BAC$, og da er

$$T = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

0.8 Cosinussetningen (forklaring)

$v \in (90^\circ, 180^\circ)$



Av Pytagoras' setning har vi at

$$x^2 = b^2 - h^2 \quad (13)$$

og at

$$a^2 = (x + c)^2 + h^2 \quad (14)$$

$$a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + h^2 \quad (15)$$

Ved å sette uttrykket for x^2 fra (13) inn i (15), får vi at

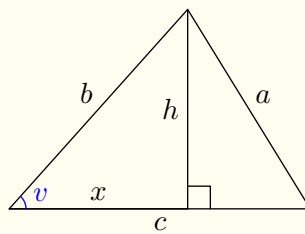
$$a^2 = b^2 - h^2 + 2xc + c^2 + h^2 \quad (16)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc \quad (17)$$

Av (6) har vi at $x = -b \cos v$, og da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

$v \in [(0^\circ, 90^\circ]$



Dette tilfellet skiller seg ut fra tilfellet hvor $v \in (90^\circ, 180^\circ]$ på to måter:

(i) I (14) får vi $(c - x)^2$ i stedet for $(x + c)^2$. I (17) får vi da $-2xc$ i stedet for $+2xc$.

(ii) Av (3) er $x = b \cos v$. Av punkt (ii) følger det da at

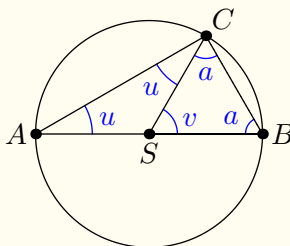
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

0.14 Sentral- og periferivinkel (forklaring)

Tilhørende periferi- og sentralvinkler kan deles inn i tre tilfeller.

i) En diameter i sirkelen er høyre eller venstre vinkelbein i begge vinklene

I figuren under er S sentrum i sirkelen, $\angle BAC = u$ en periferivinkel og $\angle BSC = v$ den tilhørende sentralvinkelen. Vi setter $\angle SCB = a$. $\angle ACS = \angle SAC = u$ og $\angle CBS = \angle SCB = a$ fordi både $\triangle ASC$ og $\triangle SBC$ er likebeinte.



Vi har at

$$2a = 180^\circ - v \quad (18)$$

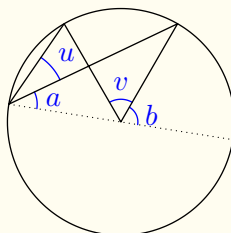
$$2u + 2a = 180^\circ \quad (19)$$

Vi setter uttrykket for $2a$ fra (18) inn i (19):

$$\begin{aligned} 2u + 180^\circ - v &= 180^\circ \\ 2u &= v \end{aligned}$$

ii) Vinklene ligger innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I tillegg har vi tegnet inn en diameter, som er med på å danne vinklene a og b . Både u og v ligger i sin helhet på samme side av denne diameteren.



Ettersom $u + a$ er en periferivinkel, og $v + b$ den tilhørende sentralvinkelen, vet vi av tilfelle 1 at

$$2(u + a) = v + b$$

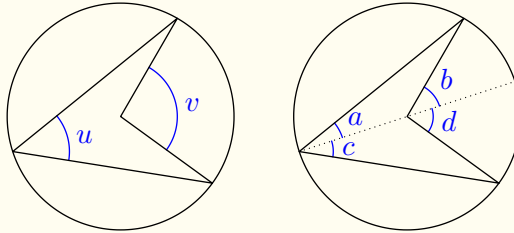
Men ettersom a og b også er samhørende periferi- og sentralvinkler, er $2a = b$. Det betyr at

$$2u + b = v + b$$

$$2u = v$$

iii) Vinklene ligger ikke innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I figuren til høyre har vi tegnet inn en diameter. Den deler u inn i vinklene a og c , og v inn i b og d .



a og c er begge periferivinkler, med henholdsvis b og d som tilhørende sentralvinkler. Av tilfelle i) har vi da at

$$2a = b$$

$$2c = d$$

Dermed er

$$2a + 2c = b + d$$

$$2(a + c) = v$$

$$2u = v$$