

Tangeringslinja til en graf

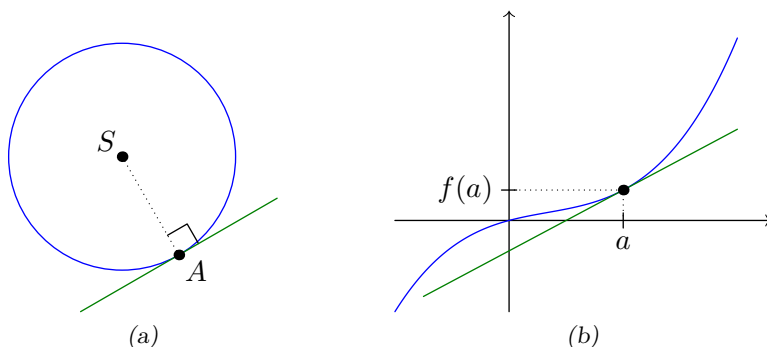
Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se figur 1a.)

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$. Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til f i punktet $(a, f(a))$* som linja som går gjennom $(a, f(a))$ og har stigningstall $f'(a)$ (Spivak, 1994). (Se Figur 1b.)



Figur 1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

Senteret til krumningen

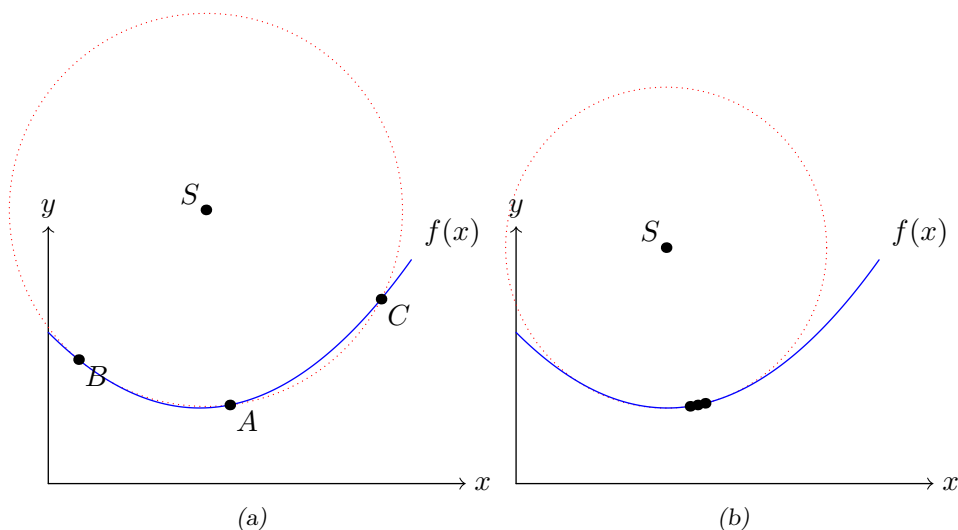
Gitt en funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig og to ganger deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, og hvor $f''(x) \neq 0$. For en gitt a lar vi $f_a = f(a)$, og definerer funksjonene

$$f_b(h) = f(a - h) \quad , \quad f_c(h) = f(a + h)$$

Vi innfører også punktene

$$A = (a, f_a) \quad , \quad B = (a - h, f_b) \quad , \quad C = (a + h, f_c)$$

Videre lar vi $S = (S_x, S_y)$ være sentrum i den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne *krumningen* i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ når h går mot 0.



Figur 2

Et likningssett for S

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [h, f_a - f_b] \quad , \quad \overrightarrow{AC} = [h, f_c - f_a]$$

La B_m og C_m være midtpunktene til henholdsvis (sekantene) AB og AC . Da er

$$B_m = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad , \quad C_m = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$[f_a - f_b, -h]$ er en normalvektor for \overrightarrow{BA} , dette betyr at midtnormalen l_1 til sekanten AB kan parameterisere som

$$l_1(t) = B_m + [f_a - f_b, -h]t \quad (1)$$

Tilsvarende er midtnormalen \mathbf{l}_2 til sekanten AC parameterisert ved

$$\mathbf{l}_2(q) = C_m + [f_c - f_a, -h]q$$

S sammenfaller med skjæringspunktet til \mathbf{l}_1 og \mathbf{l}_2 . Ved å kreve at $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$, får vi et lineært likningssett med to ukjente som gir

$$t = \frac{(f_a - f_c)(f_b - f_c) + 2h^2}{2h(f_b + f_c - 2f_a)} \quad (2)$$

S når h går mot 0

Vi definerer funksjonene \dot{f}_b , \dot{f}_c , \ddot{f}_b og \ddot{f}_c ut ifra de (respektive) deriverte og andrederiverte av f_b og f_c med hensyn på h :

$$-\dot{f}_b = (f_b)' = -f'(a - h)$$

$$\dot{f}_c = (f_c)' = f'(a + h)$$

$$\ddot{f}_b = (f_b)'' = f''(a - h)$$

$$\ddot{f}_c = (f_c)'' = f''(a + h)$$

Vi skal nå bruke disse funksjonene til å studere koordinatene til S når h går mot 0. Vi tar da med oss at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{h^2, h\} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f_b, f_c\} = f_a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\dot{f}_c, \dot{f}_b\} = f'_a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\ddot{f}_b, \ddot{f}_c\} = f''_a$$

hvor¹ $f'_a = f'(a)$ og $f''_a = f''(a)$.

For t uttrykt ved (2) er (se (1))

$$S_y = \frac{f_a + f_b + 2ht}{2} = \frac{f_a + f_b}{2} + ht$$

Vi har at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_a + f_b}{2} = f_a$$

Videre er

$$\begin{aligned} ht &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c) + 2h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} \\ &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{2(f_b + f_c - 2f_a)} + \frac{h^2}{f_b + f_c - 2f_a} \end{aligned} \quad (3)$$

¹Legg merke til at det her er snakk om f derivert med hensyn på x , og evaluert i a .

Når h går mot 0, er begge leddene i (3) «0 over 0» uttrykk. Vi bruker L'Hopitals regel på det siste leddet:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2)'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \quad \text{«0 over 0»} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \\
 &= \frac{1}{f''_a} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Ved å bruke L'Hopitals regel på det første leddet i (3) har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{f_b + f_c - 2f_a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((f_c - f_a)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'}$$

Av produktregelen ved derivasjon er

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((f_c - f_a)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \right]$$

Begge leddene over er «0 over 0» uttrykk. Vi undersøker dem hver for seg ved å anvende L'Hopitals regel:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\ddot{f}_c(f_b - f_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \\
 &= 0 + \frac{(f'_a)^2}{2f''_a} \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(-\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \\
 &= \frac{(f'_a)^2}{2f''_a} + 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

Av (3), (4), (5) og (6) har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} ht = \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

Dermed er

$$S_y = f_a + \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

Videre er (med t gitt av (2))

$$S_x = (f_b - f_a)t + a - \frac{1}{2}h$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} (f_b - f_a)t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot ht \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} ht \\ &= -f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}\end{aligned}$$

Altså er

$$S_x = a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

Avslutning

Linja som har stigningstall $f'(a)$, og som går gjennom $(a, f(a))$, er gitt ved funksjonen

$$g(x) = f'_a(x - a) + f_a$$

$\vec{r} = [1, f_a]$ er en retningsvektoren til denne linja. Av uttrykkene vi har funnet for S_x og S_y har vi at

$$S = \left(a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}, f_a + \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a} \right)$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''_a} \left[-f_a(1 + (f'_a)^2), 1 + (f'_a)^2 \right]$$

Siden $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$ og $g(a) = f(a)$, er grafen til g tangeringslinja til sirkelen med sentrum S når h går mot 0. Altså er g tangeringslinja til sirkelen som beskriver krumningen til f når $x = a$.

Litteratur

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press