0.1 Å finne størrelser

Ligninger, formler og funksjoner er begrep som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. De fleste regelboksene i denne boka inneholder en formel. For eksempel inneholder *regel* **??** en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, er det bare snakk om å sette disse inn i formelen for å finne 'målestokk'. Slik kan vi si at vi da finner 'målestokk' *direkte*. Har man gjort oppgaver tilknytt de tidlegere kapitlene, har man allerede øvd rikelig på det å finne størrelser *direkte*.

I denne seksjonen skal vi se på å det å finne størrelser *indirekte*. Med det mener vi at minst én av følgende gjelder:

- Vi må løse en likning for å finne den ukjente størrelsen.
- Vi må ut ifra en situasjonsbeskrivelse sette opp en formel som inneholder den ukjente størrelsen.

Merk

I denne seksjonen er det bare gitt eksempler, og ingen regler. Det er fordi vi bruker regler vi har sett på i kapitlene om ligninger og funksjoner i MB. Forskjellen er bare at vi her ser på størrelser med benevning.

Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
- I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.

a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.

b) Hva koster en taxitur på 17 km?

Svar

a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

Eksempel 2

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løs likningen.

Svar

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

$$\text{penger allerede skaffet} + \text{antall lodd} \cdot \text{penger per lodd} = \text{prisen på turen}$$

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatter[1] *antall lodd* med x, og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$
\begin{aligned}
25x &= 11\,000 - 2\,000 \\
25x &= 9\,000 \\
\frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\
x &= 360
\end{aligned}
$$

[1]Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 3

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U, og lag en formel for U.

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$
U = \frac{50\,000}{P}
$$

b) Vi erstatter P med 20, og får

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{50\,000}{20} \\
&= 2\,500
\end{aligned}
$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

Eksempel 4

Et sportsklubb planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

  Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

  Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

Svar

Vi innfører følgende variabler:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1
- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Busselskapene har samme pris når

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\ 4\,000 &= 20x \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis sportsklubben skal kjøre 200 km.

Eksempel 5

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for R.

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er $2\,\text{A}$ og spenningen $12\,\text{V}$, hva er da resistansen?

Svar

a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetstegnet:

$$
\begin{aligned}
I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\
I \cdot R &= U \\
\frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\
R &= \frac{U}{I}
\end{aligned}
$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{U}{I} \\
&= \frac{12}{2} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 6

Gitt en temperatur T_C målt i antall grader Celsius (°C). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit (°F) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for T_C.

b) Hvis en temperatur er målt til $59°F$, hva er da temperaturen målt i $°C$?

Svar

a) Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at

$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

59° F er altså det samme som 15° C.

Eksempel 4

"Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?".

Svar

"Broren min er dobbelt så gammel som meg." betyr at

$$\text{brors alder} = 2 \cdot \text{min alder}$$

"Til sammen er vi 9 år gamle." betyr at

$$\text{brors alder} + \text{min alder} = 9$$

Erstatter vi 'brors alder' med "$2 \cdot$ min alder", får vi

$$2 \cdot \text{min alder} + \text{min alder} = 9$$

Altså er

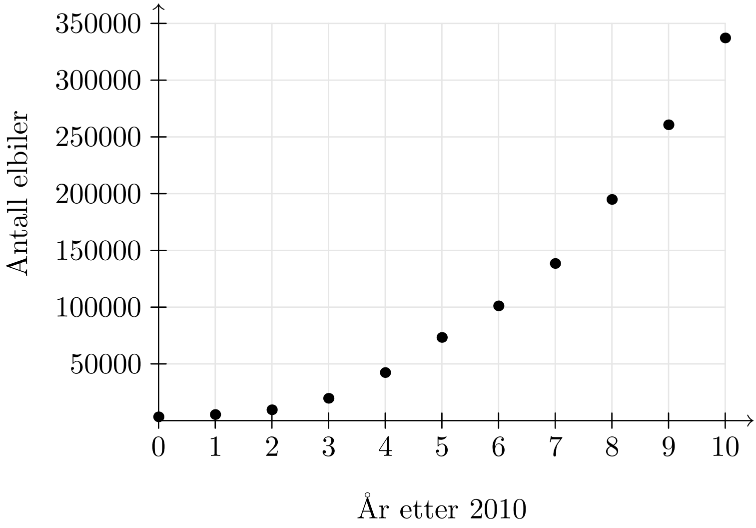
$$\begin{aligned} 3 \cdot \text{min alder} &= 9 \\ \frac{\cancel{3} \cdot \text{min alder}}{\cancel{3}} &= \frac{9}{3} \\ \text{min alder} &= 3 \end{aligned}$$

"Jeg" er altså 3 år gammel.

0.2 Regresjon

Å forsøke å beskrive hvordan noe vil *utvikle* seg er en av de viktigste anvendelsene for funksjoner. Hvis vi har et datasett som beskriver tidligere hendelser, kan vi prøve å finne den funksjonen som passer best til datasettet. Dette kalles å utføre **regresjon**.

Grafen under viser[1] antall elbiler i Norge etter år 2010.



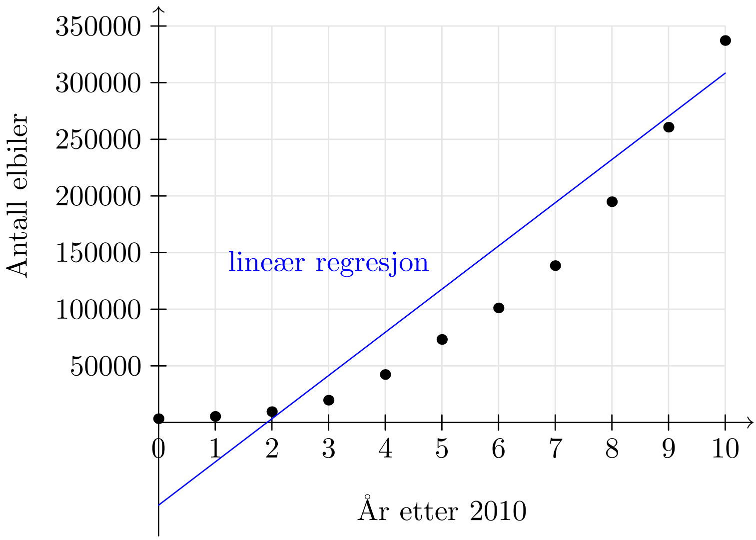
Vi ønsker nå å finne en funksjon som

(i) så godt som mulig skjærer hvert punkt.

(ii) har en graf som passer til situasjonen vi modellerer.

Hvis vi utfører regresjon med en lineær funksjon i GeoGebra (se side **??**), får vi denne grafen:

[1] Tall hentet fra elbil.no



Utfører vi regresjon også med en andregradsfunksjon, får vi følgende resultat:

I figuren over kan vi merke oss at

- begge modellene (funksjonene) "oppfører" seg feilaktig i starten. Den lineære funksjonen starter med et negativt antall biler, mens den kvadratiske funksjonen starter med at antallet synker fra år 0 til år 1.

- Grafen til den kvadratiske passer punktene mye bedre enn grafen til den lineære funksjonen.

Hvis vi hadde antatt at den lineære funksjonen ga en god beskrivelse av antallet elbiler fremover i tid, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var ca. 350 000. Hadde vi i stedet antatt det samme om den kvadratiske funksjonen, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var litt over 425 000. Fasit er at antall elbiler i 2021 var 455 271.