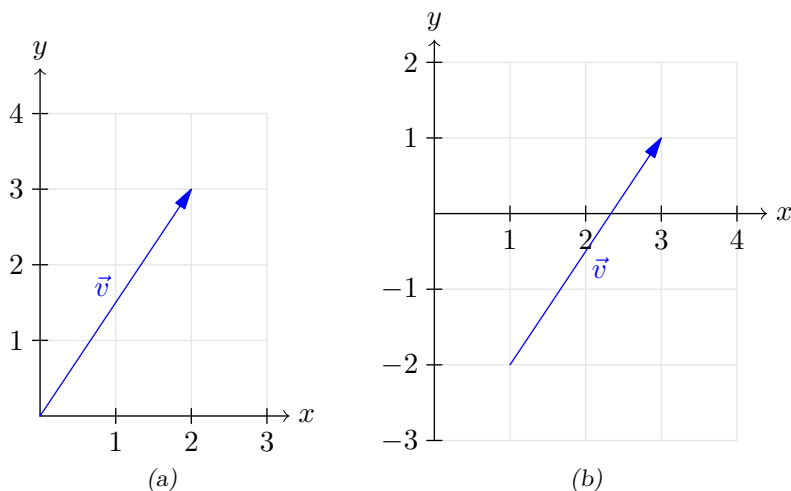


## 0.1 Introduksjon

En **todimensjonal vektor** angir en forflytning i et koordinatsystem med en  $x$ -akse og en  $y$ -akse. En vektor tegner vi som et linjestykke mellom to punkt, i tillegg til at vi lar en pil vise til hva som er endepunktet. Det betyr at forflytningen starter i punktet uten pil, og ender i punktet med pil.



I figur (a) er vektoren  $\vec{v}$  vist med startpunkt  $(0,0)$  og endepunkt  $(3,1)$ . Når en vektor har startpunkt  $(0,0)$ , sier vi at den er vist i **grunnstillingen**. I figur (b) er  $\vec{v}$  vist med startpunkt  $(1,-2)$  og endepunkt  $(3,1)$ . Forflytningen  $\vec{v}$  viser til er å vandre 2 mot høyre langs  $x$ -aksen og 3 opp langs  $y$ -aksen. Dette skriver vi som  $\vec{u} = [2,3]$ , som kalles  $\vec{u}$  skrevet på **komponentform**.

### Språkboksen

En todimensjonal vektor kalles også en **vektor i rommet**.

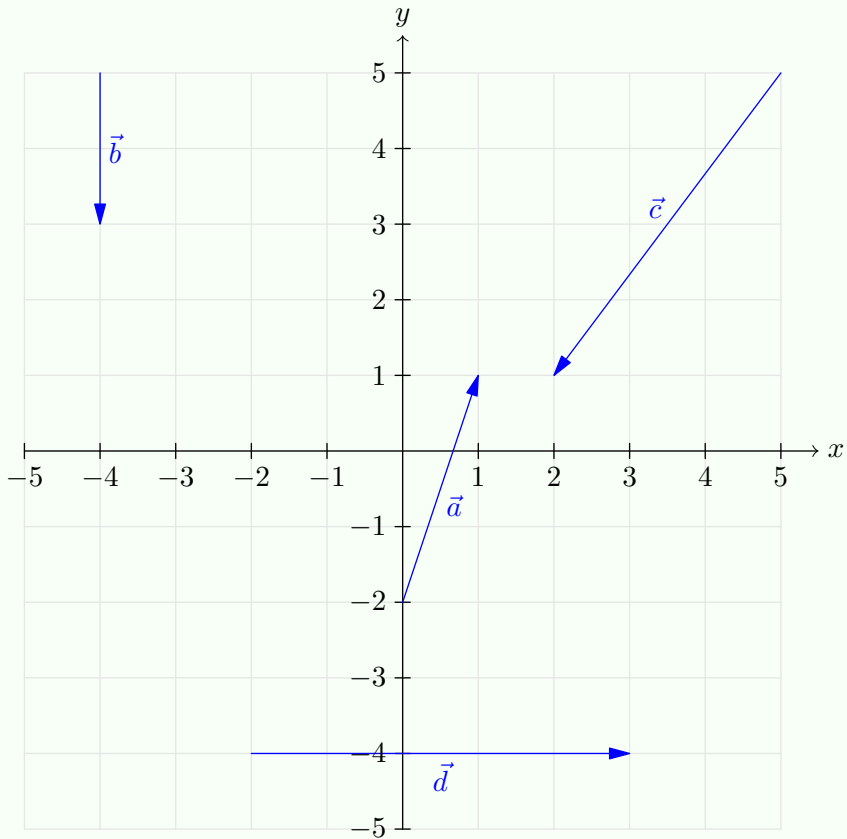
## Eksempel 1

$$\vec{a} = [1, 3]$$

$$\vec{b} = [0, -2]$$

$$\vec{c} = [-3, -4]$$

$$\vec{d} = [5, 0]$$



## 0.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor  $\vec{v}$  med startpunkt  $(x_1, y_1)$  og endepunkt  $(x_2, y_2)$  er gitt som

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] \quad (1)$$

### Eksempel 1

Skriv vektorene på komponentform.

- $\vec{a}$  har startpunkt  $(1, 3)$  og endepunkt  $(7, 5)$
- $\vec{b}$  har startpunkt  $(0, 9)$  og endepunkt  $(-3, 2)$
- $\vec{c}$  har startpunkt  $(-3, 7)$  og endepunkt  $(2, -4)$
- $\vec{d}$  har startpunkt  $(-7, -5)$  og endepunkt  $(3, 0)$

**Svar**

$$\vec{a} = [7 - 1, 5 - 3] = [6, 2]$$

$$\vec{b} = [-3 - 0, 2 - 9] = [-3, -7]$$

$$\vec{c} = [2 - (-3), -4 - 7] = [5, -11]$$

$$\vec{d} = [3 - (-7), 0 - (-5)] = [10, 5]$$

### Punkt eller vektor

Rent matematisk er det ingen forskjell på et punkt og en vektor; punktet  $(a, b)$  viser til akkurat samme plassering som vektoren  $[a, b]$ , og begge kan vise til den samme forflytningen. Ofte kan det likevel være greit å skille mellom når vi snakker om en plassering og når vi snakker om en forflytning, og til det bruker vi begrepene punkt (plassering) og vektorer (forflytning).

## 0.2 Regneregler for vektorer

### 0.2 Addisjon og subtraksjon av vektorer

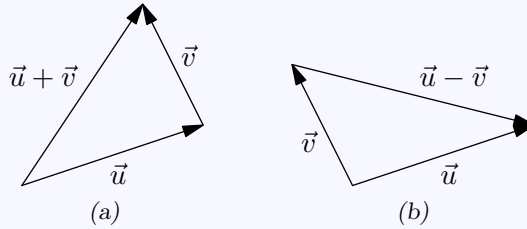
Gitt vektorene  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ , punktet  $A = (x_0, y_0)$ .  
Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1) \quad (2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \quad (3)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \quad (4)$$

Summen eller differansen av  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  kan vi tegne slik:



### 0.3 Regneregler for vektorer

For vektorene  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$ , og et tall  $t$ , har vi at

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \quad (5)$$

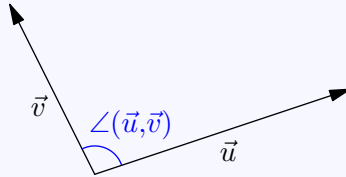
$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \quad (6)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad (7)$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad (8)$$

## 0.4 Vinkelen mellom to vektorer

Vinkelen mellom to vektorer er (den minste) vinkelen som blir dannet når vektorene plasseres i samme startpunkt. For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  skriver vi denne vinkelen som  $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ .

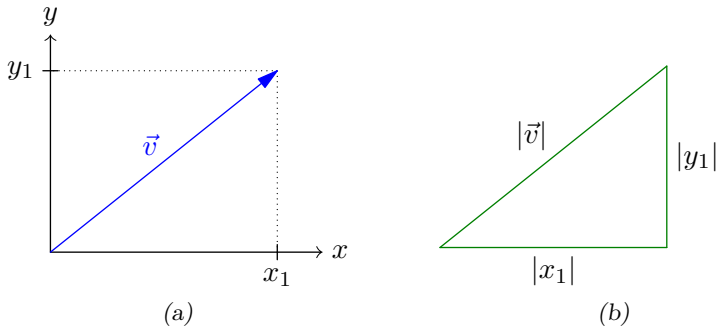


### Vinkelmål

I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkler i grader, altså på intervallet  $[0^\circ, 180^\circ]$ .

### 0.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor  $\vec{v} = [x_1, y_1]$ . **Lengden** til  $\vec{v}$  er avstanden mellom startpunktet og endepunktet.



Av enhver vektor kan vi danne en rettvinklet trekant hvor  $|\vec{v}|$  er lengden til hypotenusen, og  $|x_1|$  og  $|y_1|$  er de respektive lengdene til katetene. Dermed er  $|\vec{v}|$  gitt av Pytagoras' setning.

#### 0.5 Lengden til en vektor

Gitt en vektor  $\vec{v} = [x_1, y_1]$ . Lengden  $|\vec{v}|$  er da

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (9)$$

#### Eksempel 1

Finn lengden til vektorene  $\vec{a} = [7, 4]$  og  $\vec{b} = [-3, 2]$ .

**Svar**

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

## 0.4 Skalarproduktet I

### 0.6 Skalarproduktet I

For to vektorer  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ , er **skalarproduktet** gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 \quad (10)$$

### Språkboksen

Skalarproduktet kalles også **prikkproduktet** eller **indreproduktet**.

Ordet *skalar* viser til en éndimensjonal størrelse.

### Eksempel 1

Gitt vektorene  $\vec{a} = [3, 2]$ ,  $\vec{b} = [4, 7]$  og  $\vec{c} = [1, -9]$ . Regn ut  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  og  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ .

**Svar**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + 2(-9) = -15$$

## 0.7 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$  har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \quad (11)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (12)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (13)$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad (14)$$

### Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2$$

når du vet at  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ .

### Svar

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2 &= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= (\vec{a} + \vec{b})^2 \end{aligned}$$



## 0.5 Skalarproduktet II

Gitt vektoren  $\vec{u} - \vec{v}$ , hvor  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ . Da er

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

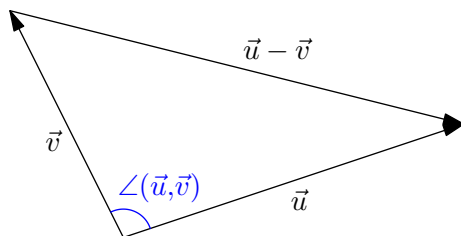
Av (9) har vi at

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Ved hjelp av (10) og (11) kan vi skrive (15) som

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2} \quad (16)$$

Videre merker vi oss følgende figur:



Av [cosinussetningen](#) og (16) er

$$\begin{aligned} |(\vec{v} - \vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}^2 &= \vec{v}^2 + \vec{u}^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

## 0.8 Skalarproduktet II

For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \quad (17)$$

## 0.6 Vektorer vinkelrett på hverandre

Fra (17) kan vi gjøre en viktig observasjon; hvis  $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ , er  $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , og da blir

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

### 0.9 Vinkelrette vektorer

For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \quad (18)$$

### Språkboksen

Det er mange måter å uttrykke at  $\vec{u} \perp \vec{v}$  på. Blant annet kan vi si at

- $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  står vinkelrett på hverandre.
- $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  står normalt på hverandre.
- $\vec{u}$  er en normalvektor til  $\vec{v}$  (og omvendt).
- $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er ortogonale.

### Eksempel 1

Sjekk om vektorene  $\vec{a} = [5, -3]$ ,  $\vec{b} = [6, -10]$  og  $\vec{c} = [2, 7]$  er ortogonale.

#### Svar

Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \cdot 6 + (-3)10 \\ &= 0\end{aligned}$$

Altså er  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Videre er

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= 5 \cdot 2 + (-3)7 \\ &= 11\end{aligned}$$

Altså er  $\vec{a}$  og  $\vec{c}$  ikke ortogonale. Da  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , kan heller ikke  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  være ortogonale.

## Nullvektoren

I forkant av [regel 0.9](#) har vi bare argumentert for at  $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . For å rettferdiggjøre vilkåret som går begge veier i (18), må vi spørre: Kan vi få  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  om vinkelen mellom  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  *ikke* er  $90^\circ$ ?

På intervallet  $[0^\circ, 180^\circ]$  er det bare vinkelverdien  $90^\circ$  som resulterer i cosinusverdi 0. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av  $\vec{u}$  eller  $\vec{v}$  være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er **nullvektoren**  $\vec{0} = [0, 0]$ , som rett og slett ikke har noen retning<sup>1</sup>. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

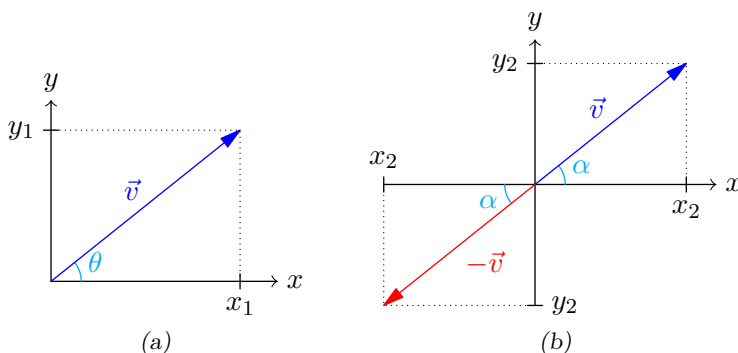
---

<sup>1</sup>Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger!

## 0.7 Parallele vektorer

### 0.10 Parallele vektorer

Hvis vinkelen mellom to vektorer er  $0^\circ$  eller  $180^\circ$ , er de parallelle.



Gitt vektorene  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ . La  $\theta$  og  $\alpha$  være vinkelen mellom  $x$ -aksen og henholdsvis  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ , med  $x$ -aksen som høyre vinkelbein. Da er  $\tan \theta = \frac{y_1}{x_1}$  og  $\tan \alpha = \frac{y_2}{x_2}$ . Hvis  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ , er det to muligheter:

(i)  $\theta = 0^\circ$  og  $\alpha = 180^\circ$ , eller omvendt.

(ii)  $\theta = \alpha$

I begge tilfeller er  $\angle(\vec{u}, \vec{v})$  enten  $0^\circ$  eller  $180^\circ$ , og da er  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  parallelle. Det omvendte gjelder også: Hvis punkt (i) eller (ii) gjelder, er  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ . Det er ofte praktisk å omskrive denne sammenhengen til forholdet mellom samsvarende komponenter<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>For vektorene  $[x_1, y_1]$  og  $[x_2, y_2]$  er disse samsvarende komponenter:

- $x_1$  og  $x_2$
- $y_1$  og  $y_2$

### 0.11 Parallele vektorer

For to vektorer  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$  har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \quad (19)$$

Alternativt, for et tall  $t$  har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \quad (20)$$

### Språkboksen

Når  $\vec{u} = t\vec{v}$ , sier vi at  $\vec{u}$  er et **multiplum** av  $\vec{v}$  (og omvendt). Vi sier også at  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er **lineært avhengige**.

Om to vektorer ikke er parallelle, sier vi at de er **lineært uavhengige**.

### Eksempel

Undersøk hvorvidt  $\vec{a} = [2, -3]$  og  $\vec{b} = [20, -45]$  er parallelle med  $\vec{c} = [10, -15]$ .

#### Svar

Vi har at

$$\vec{c} = 5[2, -4] = 5\vec{a}$$

Dermed er  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ . Da  $\frac{20}{10} \neq \frac{-45}{-15}$ , er  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  ikke parallelle.

## 0.8 Vektorfunksjoner; parameterisering

### 0.12

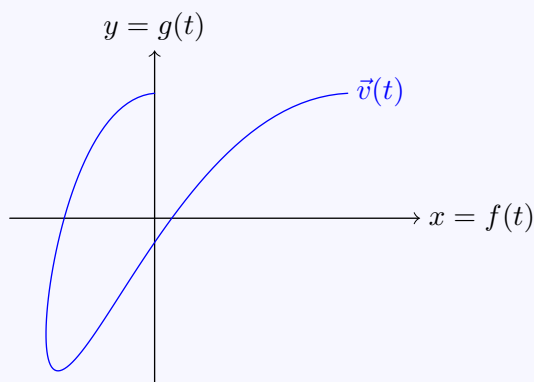
Gitt to funksjoner  $f(t)$  og  $g(t)$ . En vektor  $\vec{v}$  på formen

$$\vec{v}(t) = [f(t), g(t)]$$

er da en **vektorfunksjon**.

$\vec{v}$  kan skrives på **parameterisert form** som

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (21)$$

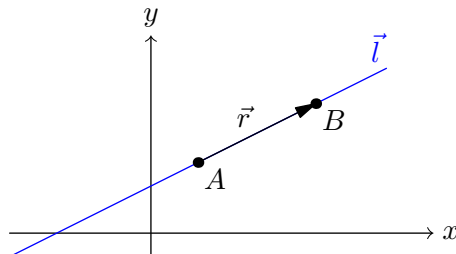


### Merk

Til forskjell fra grafen til en skalarfunksjon, kan grafen til en vektorfunksjon "begeve seg fritt" i koordinatsystemet.

### 0.8.1 Vektorfunksjonen til en linje

Gitt en linje  $\vec{l}(t)$ , som vist i figuren under



Hvis en vektor  $\vec{r}$  er parallell med  $\vec{l}$ , kalles den en **retningsvektor** for linja. Si at  $\vec{r} = [a, b]$  er en retningsvektor for  $\vec{l}$ , og at  $A = (x_0, y_0)$  er et punkt på  $\vec{l}$ . Om vi starter i  $A$  og vandrer parallellt med  $\vec{r}$ , kan vi være sikre på at vi fortsatt befinner oss på linja. Dette må bety at vi for en variabel  $t$  kan nå et vilkårlig punkt  $B = (x, y)$  på linja ved følgende utregning:

$$B = A + t\vec{r}$$

På koordinatform kan vi skrive dette som<sup>1</sup>

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Altså kan linja skrives som en vektorfunksjon:

### 0.13 Linje som vektorfunksjon

En linje  $\vec{l}(t)$  som går gjennom punktet  $A = (x_0, y_0)$  og har retningsvektor  $\vec{r} = [a, b]$  er gitt som

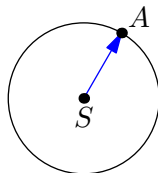
$$\vec{l} = [x_0 + at, y_0 + bt]$$

---

<sup>1</sup>Se (2).

## 0.9 Sirkellikningen

Gitt en sirkel med sentrum  $S = (x_0, y_0)$  og et punkt  $A = (x, y)$ , som ligger på buen til sirkelen.



Da er

$$\overrightarrow{SA} = [x - x_0, y - y_0]$$

Av (9) er da

$$|\overrightarrow{SA}|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Hvis vi lar  $r$  være radien til sirkelen, er  $|\overrightarrow{SA}| = r$ , og dermed kan vi uttrykke  $r$  ved koordinatene til  $S$  og  $A$ .

### 0.14 Sirkelligningen

Gitt en sirkel radius  $r$  og sentrum  $S = (x_0, y_0)$ . Hvis punktet  $A = (x, y)$  ligger på buen til sirkelen, er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

### Eksempel

Finn sentrum og radien til sirkelen gitt av likningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0 \quad (22)$$

### Svar

Vi starter med å lage fullstendige kvadrat:

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 2^2$$

$$y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 5^2$$

Altså kan vi skrive (22) som

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 - 2^2 - 5^2 - 20 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 7^2$$

Dermed har sirkelen sentrum  $(2, -5)$  og radius 7.



## 0.10 Determinanter

### 0.15 $2 \times 2$ determinanter

**Determinanten**  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  av to vektorer  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [b, c]$  er gitt som

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (23)$$

### Eksempel

Gitt vektorene  $\vec{u} = [-1, 3]$  og  $\vec{v} = [-2, 4]$ . Regn ut  $\det(\vec{u}, \vec{v})$ .

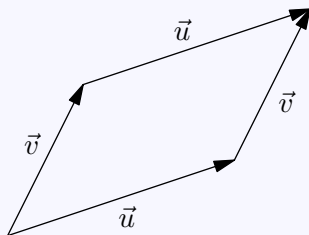
**Svar**

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

### 0.16 Arealformler med determinanter

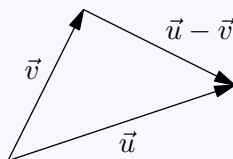
Arealet  $A$  til et parallelogram formet av to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er gitt ved

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \quad (24)$$



Arealet  $A$  til en trekant formet av to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er gitt ved

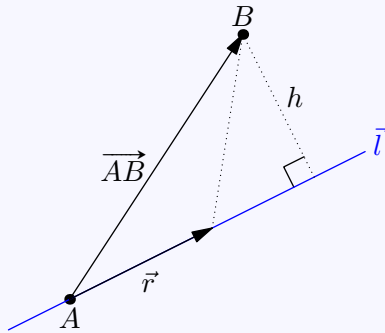
$$A = \frac{1}{2} |\det(\vec{u}, \vec{v})| \quad (25)$$



### 0.17 Avstand mellom punkt og linje

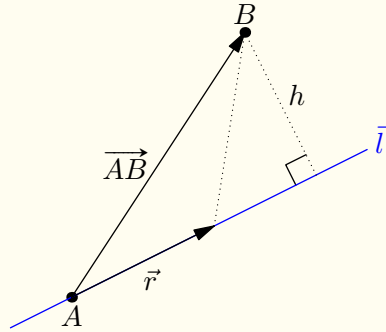
Avstanden  $h$  mellom et punkt  $B$  og en linje gitt av punktet  $A$  og retningsvektoren  $\vec{r}$  er gitt som

$$h = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{r})|}{|\vec{r}|} \quad (26)$$



### 0.17 Avstand mellom punkt og linje (forklaring)

La en linje  $\vec{l}(t)$  i rommet være gitt av et punkt  $A$  og en rettingsvektor  $\vec{r}$ . I tillegg ligger et punkt  $B$  utenfor linja, som vist i figuren under



Den korteste avstanden fra  $B$  til linja er høyden  $h$  i trekanten utspent av  $\vec{r}$  og  $\vec{AB}$ . Arealet til denne trekanten er gitt ved (25):

$$\frac{1}{2} \left| \det \left( \vec{AB}, \vec{r} \right) \right|$$

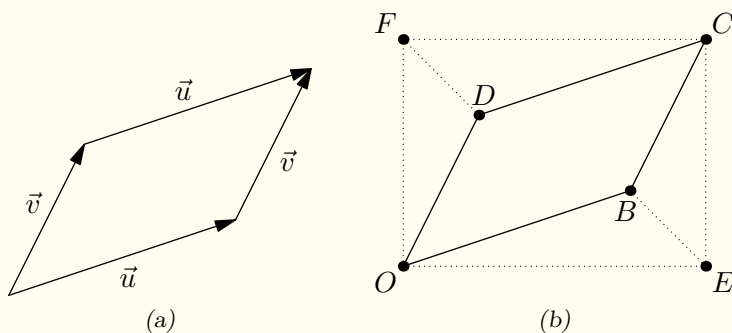
Av den klassiske arealformelen for en trekant (se [MB](#)) har vi nå at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{r}| h &= \frac{1}{2} \left| \det \left( \vec{AB}, \vec{r} \right) \right| \\ h &= \frac{\left| \det \left( \vec{AB}, \vec{r} \right) \right|}{|\vec{r}|} \end{aligned}$$

## Forklaringer

### 0.16 Arealformler med determinanter (forklaring)

Vi lar  $A_N$  betegne arealet til en geometrisk form  $N$ .



Gitt to vektorer  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [c, d]$ , hvor  $a, b, c, d > 0$ , som vist i figur (a). Plasserer vi vektorene i grunnstillingen er punktene vist i figur (b) gitt som

$$\begin{array}{lll} O = (0, 0) & B = (a, b) & C = (a + b, c + d) \\ D = (c, d) & E = (a + c, 0) & F = (0, b + d) \end{array}$$

Med  $OE$  som grunnlinje har  $\triangle OEB$  høyde  $b$ , altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da  $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$  og  $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$ , har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OEB} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

I figurene har vi antatt at (den minste) vinkelen mellom  $\vec{v}$  og  $x$ -aksen er mindre enn vinkelen mellom  $\vec{u}$  og  $x$ -aksen. I omvendt tilfelle ville vi fått at

$$A_{\square OECF} = bc - ad$$

Altså er

$$A_{\square OECF} = |ac - bd|$$

På lignende måte kan det vises at (24) gjelder for alle  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , se [oppgave ??](#).

*Merk:* (24) kan også vises veldig kortfattet ved å anvende trigonometri. Se oppgave ?? i [TM2](#) for dette.