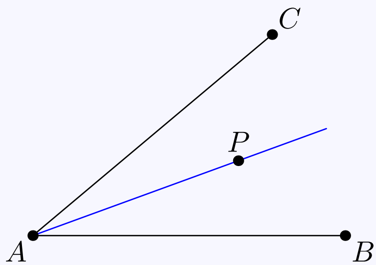
0.1 Definisjoner

0.1 Halveringslinje

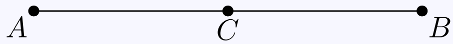
Gitt $\angle BAC$. For et punkt P som ligger på **halveringslinja** til vinkelen (blå linje i figuren), er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC \tag{1}$$



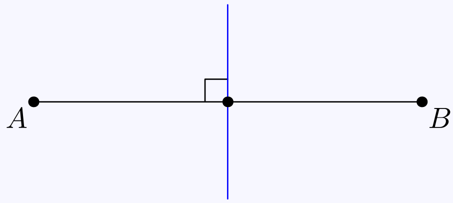
0.2 Midtpunkt

Midtpunktet C til AB er punktet på linjestykket slik at $AC = CB$.



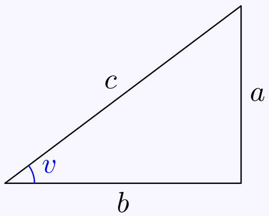
0.3 Midtnormal

Midtnormalen til AB (blå linje i figuren) står normalt på, og går gjennom midtpunktet til, AB.



0.4 sin, cos og tan

Gitt en rettvinklet trekant med katetene a og b, hypotenus c, og vinkel v, som vist i figuren under.



Da er

$$\sin v = \frac{a}{c} \tag{2}$$

$$\cos v = \frac{b}{c} \tag{3}$$

$$\tan v = \frac{a}{b} \tag{4}$$

Språkboksen

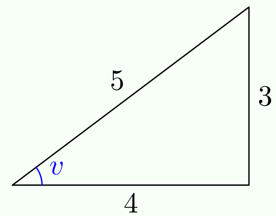
I figuren over blir a kalt den **motstående** kateten til vinkel v, og b den **hosliggende**.

sin, cos og tan er forkortelser for henholdsvis **sinus**, **cosinus** og **tangens**.

Eksaktverdier

De aller fleste sinus-, cosinus- og tangensverdier er irrasjonale tall, i praktiske anvendelser av verdiene er det derfor vanlig å benytte digitale hjelpemidler. Verdiene som er viktigst for teoretiske formål er gitt i vedlegg **??**.

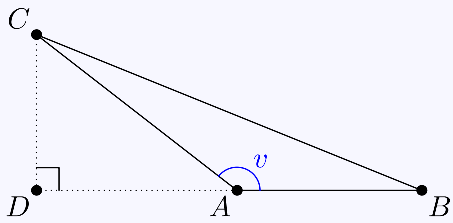
Eksempel



$$\sin v = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos v = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan v = \frac{3}{4}$$

0.5 Sinus, cosinus og tangens I

Gitt $\triangle ABC$, hvor $v = \angle BAC > 90°$, som vist i figuren under.



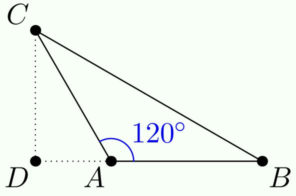
Da er

$$\sin v = \frac{CD}{AC} \tag{5}$$

$$\cos v = -\frac{AD}{AC} \tag{6}$$

$$\tan v = -\frac{CD}{AD} \tag{7}$$

Eksempel



I figuren over er $CD = \sqrt{3}$, $AD = 1$ og $AC = 2$. Da er

$$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \tan 120° = -\sqrt{3}$$

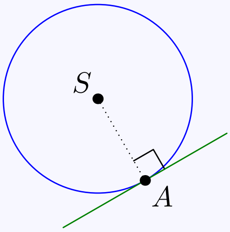
0.2 Egenskaper til sirkler

0.6 Tangent

En linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt, kalles en **tangent** til sirkelen.

La S være sentrum i en sirkel, og la A være skjæringspunktet til denne sirkelen og en linje. Da har vi at

$$\text{linja er en tangent til sirkelen} \iff \overrightarrow{AS} \text{ står vinkelrett på linja}$$



Språkboksen

Når to geometriske former skjærer hverandre i bare ett punkt, sier vi at de "tangerer hverandre".

0.7 Sentral- og periferivinkel

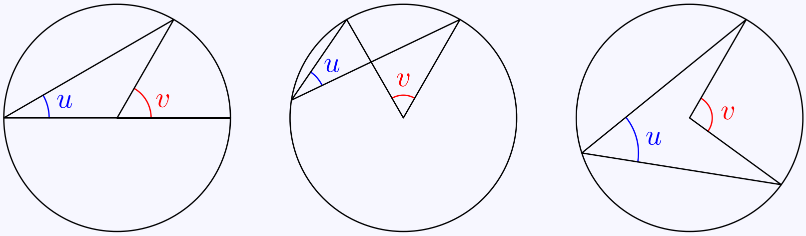
Både periferi- og sentralvinkler har vinkelbein som ligger (delvis) inni en sirkel.

En **sentralvinkel** har toppunkt i sentrum av en sirkel.

En **periferivinkel** har toppunkt på sirkelbuen.

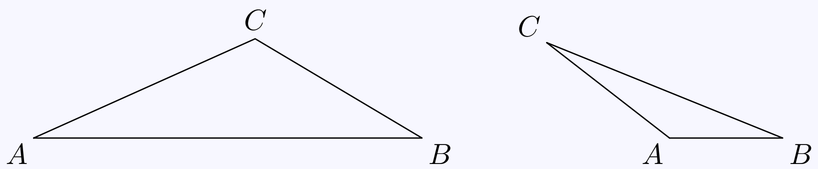
Gitt en periferivinkel u og en sentralvinkel v, som er innskrevet i samme sirkel og som spenner over samme sirkelbue. Da er

$$v = 2u \tag{8}$$



0.3 Egenskaper til trekanter

0.8 Arealsetningen

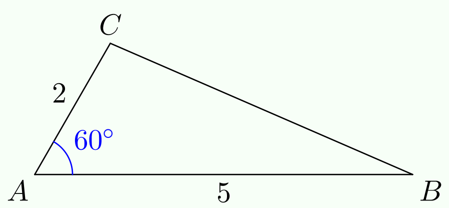


(a) (b)

Arealet T til $\triangle ABC$ er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A \tag{9}$$

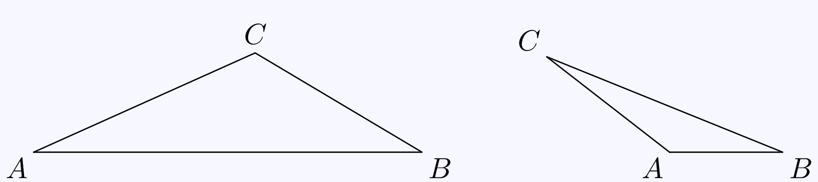
Eksempel



Da $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Arealet T til $\triangle ABC$ er

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

0.9 Sinussetningen

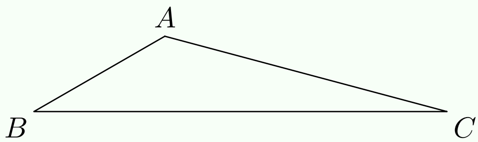


(a) (b)

$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle C}{AB} \tag{10}$$

Eksempel

$BC = \sqrt{2}$, $\angle A = 135°$, og $\angle B = 30°$. Finn lengden til AC.



Svar

Vi har at

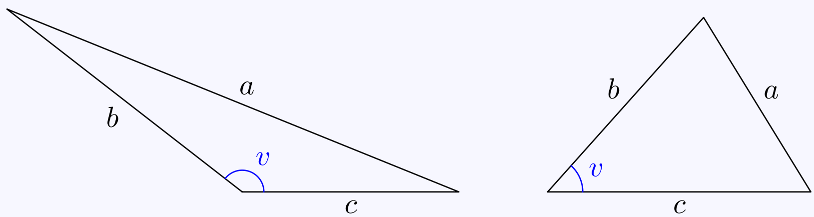
$$AC = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} BC$$

Da $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin 30° = \frac{1}{2}$, har vi at

$$AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

0.10 Cosinussetningen

Gitt en trekant med sidelengder a, b og c, og vinkel v, som vist i figurene under.



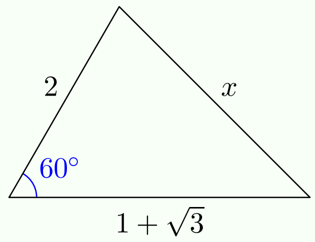
(a) (b)

Da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v \tag{11}$$

Eksempel

Finn verdien til x.



Svar

Vi har at

$$x^2 = 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2(1+\sqrt{3})\cos 60^\circ$$

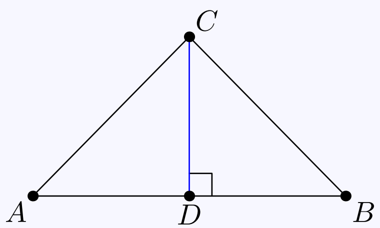
Da $\cos 60 = \frac{1}{2}$, har vi at

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Altså er $x = \sqrt{6}$.

0.11 Midtnormalen i en likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$, hvor $AC = BC$, som vist i figuren under.

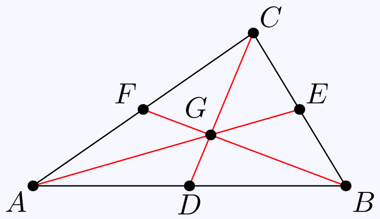


Høgda DC ligger da på midtnormalen til AB.

0.12 Median

En **median** er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.

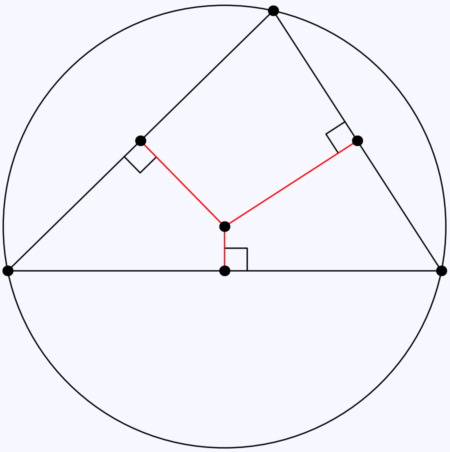


Gitt $\triangle ABC$ med medianer CD, BF og AE, som skjærer hverandre i G. Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

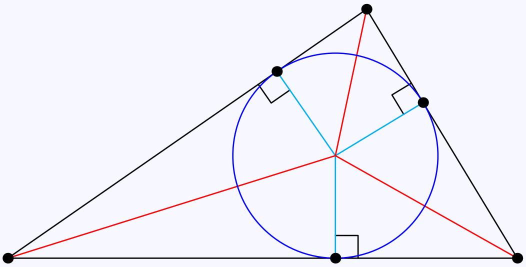
0.13 Midtnormal (i trekant)

Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den **omskrevne sirkelen** til trekanten, som har hjørnene til trekanten på sin bue.



0.14 Innskrevet sirkel

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i trekantens **innskrevne sirkel**, som tangerer hver av sidene til trekanten.



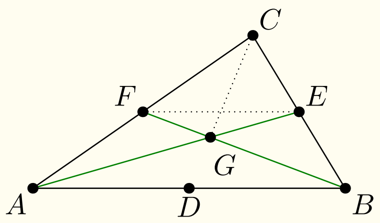
0.4 Forklaringer

0.11 Midtnormalen i en likebeint trekant (forklaring)

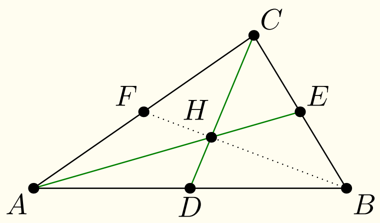
Da både $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ er rettvinklede og har CD som korteste katet, og $AC = BC$, følger det av Pytagoras' setning at $AD = BD$.

0.12 Median (forklaring)

Vi vil her skrive arealet til en trekant $\triangle ABC$ som ABC.



(a)



(b)

Vi lar G være skjæringspunktet til BF og AE, og tar det for gitt at dette ligger inne i $\triangle ABC$. Da $AF = \frac{1}{2}AC$ og $BE = \frac{1}{2}BC$, er $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$. Dermed har F og E lik avstand til AB, som betyr at $FE \parallel AB$. Videre har vi også at

$$\begin{aligned} ABG + AFG &= ABG + BGE \\ AFG &= BGE \end{aligned}$$

G har lik avstand til AF og FC, og $AF = FC$. Dermed er $AFG = GFC$. Tilsvarende er $BGE = GEC$. Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$\begin{aligned} AFG + GFC + GEC &= AEC \\ GEC &= \frac{1}{6}ABC \end{aligned}$$

La H være skjæringspunktet til AE og CD. Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både $\triangle GEC$ og $\triangle HEC$ har CE som side, likt areal, og både G og H ligger på AE, må $G = H$. Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

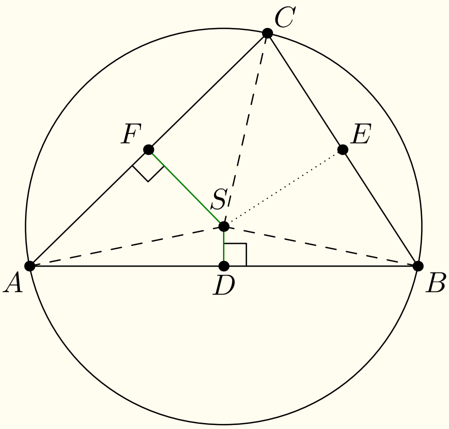
$\triangle ABG \sim \triangle EFG$ fordi $\angle EGF$ og $\angle AGB$ er toppvinkler og $AB \parallel FE$. Dermed er

$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

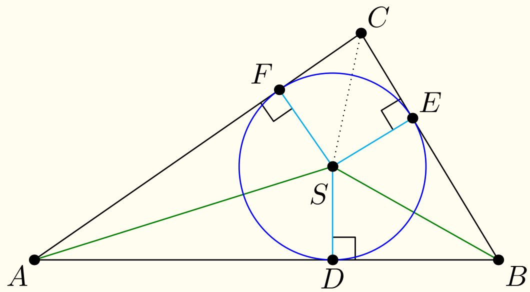
0.13 Midtnormal (i trekant) (forklaring)



Gitt $\triangle ABC$ med midtpunktene D, E og F. Vi lar S være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til AC og AB. $\triangle AFS \sim \triangle CFS$ fordi begge er rettvinklede, begge har FS som korteste katet, og $AF = FC$. Tilsvarende er $\triangle ADS \sim \triangle BDS$. Følgelig er $CS = AS = BS$. Dette betyr at

- $\triangle BSC$ er likebeint, og da går midtnormalen til BC gjennom S.
- A, B og C må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum S og radius $AS = BS = CS$

0.14 Innskrevet sirkel (forklaring)

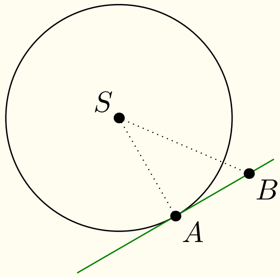


Gitt $\triangle ABC$. Vi lar S være skjæringspunktet til de respective halveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle CBA$. Videre plasserer vi D, E og F slik at $DS \perp AB$, $ES \perp BC$ og $FS \perp AC$. $\triangle ASD \cong \triangle ASF$ fordi begge er rettvinklede og har hypotenus AS, og $\angle DAS = \angle SAF$. Tilsvarende er $\triangle BSD \cong \triangle BSE$. Dermed er $SE = SD = SF$. Følgelig er F, C og E de respektive tangeringspunktene til AB, BC og AC og sirkelen med sentrum S og radius SE.

Videre har vi at $\triangle CSE \cong \triangle CSF$, fordi begge er rettvinklede og har hypotenus CS, og $SF = SE$. Altså er $\angle FCS = \angle ECS$, som betyr at CS ligger på halveringslinja til $\angle ACB$.

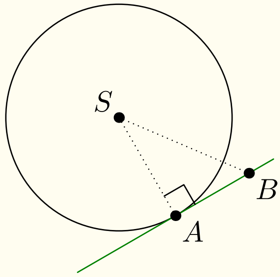
0.6 Tangent (forklaring)

Linja er en tangent til sirkelen $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Vi antar at vinkelen mellom linja og $\overrightarrow{AS}$ er ulik 90°. Da må det finnes et punkt B på linja slik at $\angle BAS = \angle SBA$, som betyr at $\triangle ASB$ er likebeint. Følgelig er $AS = BS$, og da AS er lik radien i sirkelen, må dette bety at B også ligger på sirkelen. Dette motsier det faktum at A er det eneste skjæringspunktet til sirkelen og linja, og dermed må vinkelen mellom linja og $\overrightarrow{AS}$ være 90°.

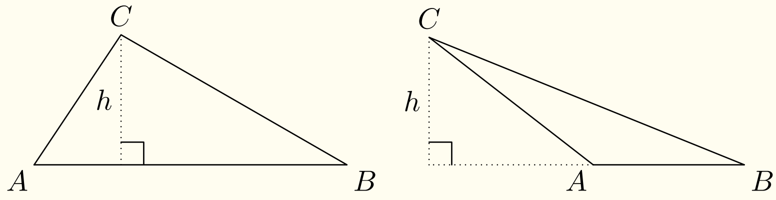
Linja er en tangent til sirkelen $\Longleftarrow$ $\overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Gitt et vilkårlig punkt B, som ikke samsvarer med A, på linja. Da er BS hypotenusen i $\triangle ABC$. Dette innebærer at BS er større enn radien til sirkelen ($BS > AS$), og da kan B umulig ligge på sirkelen. Altså er A det eneste punktet som ligger på både linja og sirkelen, og dermed er linja en tangent til sirkelen.

0.8 Arealsetningen (forklaring)

Gitt to tilfeller av $\triangle ABC$, som vist i figuren under. Det éne hvor $\angle BAC \in (0°, 90°]$, det andre hvor $\angle BAC \in (90°, 0°)$ og la h være høyden med grunnlinje AB.



(a) (b)

Arealet T til $\triangle ABC$ er i begge tilfeller

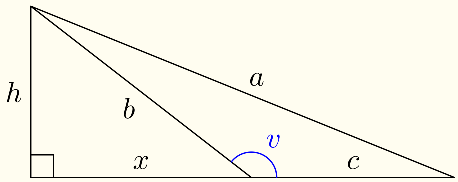
$$T = \frac{1}{2} AB \cdot h \tag{12}$$

Av henholdsvis (2) og (5) har vi at $h = AC \cdot \sin \angle BAC$, og da er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

0.10 Cosinussetningen (forklaring)

Tilfellet hvor $v \in (90°, 180°]$



Av Pytagoras' setning har vi at

$$x^2 = b^2 - h^2 \tag{13}$$

og at

$$a^2 = (x + c)^2 + h^2 \tag{14}$$
$$a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + h^2 \tag{15}$$

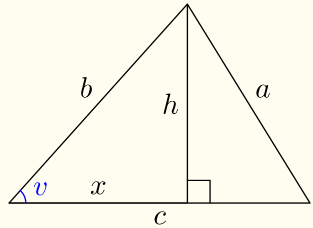
Ved å sette uttrykket for x^2 fra (13) inn i (15), får vi at

$$a^2 = b^2 - h^2 + 2xc + c^2 + h^2 \tag{16}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc \tag{17}$$

Av (6) har vi at $x = -b \cos v$, og da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

Tilfellet hvor $v \in [0°, 90°]$



Dette tilfellet skiller seg ut fra tilfellet hvor $v \in (90°, 180°]$ på to måter:

(i) I (14) får vi $(c - x)^2$ i steden for $(x + c)^2$. I (17) får vi da $-2xc$ i steden for $+2xc$.

(ii) Av (3) er $x = b \cos v$. Av punkt (i) følger det da at

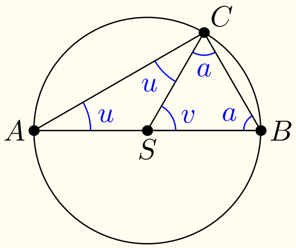
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

0.7 Sentral- og periferivinkel (forklaring)

Tilhørende periferi- og sentralvinkler kan deles inn i tre tilfeller.

(i) En diameter i sirkelen er høyre eller venstre vinkelbein i begge vinklene

I figuren under er S sentrum i sirkelen, $\angle BAC = u$ en periferivinkel og $\angle BSC = v$ den tilhørende sentralvinkelen. Vi setter $\angle SCB = a$. $\angle ACS = \angle SAC = u$ og $\angle CBS = \angle SCB = a$ fordi både $\triangle ASC$ og $\triangle SBC$ er likebeinte.



Vi har at

$$2a = 180° - v \tag{18}$$

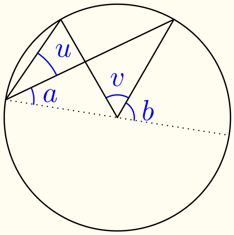
$$2u + 2a = 180° \tag{19}$$

Vi setter uttrykket for $2a$ fra (18) inn i (19):

$$2u + 180° - v = 180°$$
$$2u = v$$

(ii) Vinklene ligger innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I tillegg har vi tegnet inn en diameter, som er med på å danne vinklene a og b. Både u og v ligger i sin helhet på samme side av denne diameteren.



Ettersom $u + a$ er en periferivinkel, og $v + b$ den tilhørende sentralvinkelen, vet vi av tilfelle 1 at

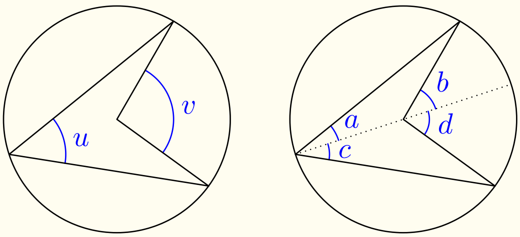
$$2(u + a) = v + b$$

Men ettersom a og b også er samhørende periferi- og sentralvinkler, er $2a = b$. Det betyr at

$$2u + b = v + b$$
$$2u = v$$

(iii) Vinklene ligger ikke innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I figuren til høyre har vi tegnet inn en diameter. Den deler u inn i vinklene a og c, og v inn i b og d.



a og c er begge periferivinkler, med henholdsvis b og d som tilhørende sentralvinkler. Av tilfelle i) har vi da at

$$2a = b$$

$$2c = d$$

Dermed er

$$2a + 2c = b + d$$
$$2(a + c) = v$$
$$2u = v$$