a) Vi bruker den eksplisitte fomelen for en aritmetisk følge, og får:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + d(i-1) \\ 30 &= 3 + d(4-1) \\ 27 &= 3d \\ 9 &= d \end{aligned}$$

Altså er

$$a_i = 3 + 9(i-1)$$

c) Vi observerer at:

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 &= a_1 + d(5-1) - (a_1 + d(3-1)) \\ a_5 - a_3 &= 2d \\ 26 - 14 &= 2d \\ 6 &= d \end{aligned}$$

Videre har vi at:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ 14 &= a_1 + 12 \\ 2 &= a_1 \end{aligned}$$

Altså er

$$a_i = 2 + 6(i-1)$$

??

a) Vi har at:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

Dermed er det eksplisitte uttrykket gitt som:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{1-i} \end{aligned}$$

b) Vi vet at:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot k^{4-1} &= a_4 \\ 5 \cdot k^3 &= 40 \\ k^3 &= 8 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Altså får vi:

$$a_n = 5 \cdot 2^{i-1}$$

??

a) Vi observerer at rekka er en aritmetisk rekke med $a_1 = 7$ og $d = 6$. For å finne summen trenger vi verdien til a_{10}:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 7 + 6(10-1) \\ &= 61 \end{aligned}$$

Summen S_{10} blir da:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{7+61}{2} \\ &= 340 \end{aligned}$$

b) Se a.

??

Rekken er aritmetisk med $a_1 = 8$ og $d = 3$. Vi har at:

$$\begin{gathered} n\frac{8 + (8 + 3(n-1))}{2} = 435 \\ 3n^2 + 13n - 870 = 0 \end{gathered}$$

Vi bruker *abc*-formelen og får at $n \in \{15, -\frac{58}{3}\}$, hvorav $n = 15$ er eneste mulige svar.

?? Dette er den aritmetiske rekken fra eksempelet på side **??**. I formelen for S_n setter vi inn det eksplisitte uttrykket for a_n, og får at

$$\begin{aligned} S_n &= n\frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \\ 2 \cdot 903 &= n(3 + 3 + 4(n-1)) \\ 0 &= 6n + 4n^2 - 4n - 2 \cdot 903 \\ 0 &= 2n^2 + n - 903 \end{aligned}$$

Denne ligningen har løsningene $n \in \{21, -\frac{43}{2}\}$. Vi søker et positivt heltall, derfor er $n = 21$ eneste mulige løsning.

?? Dette er den geometriske rekken fra eksempelet på side **??**. Vi lar n være antall ledd, og får at

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} &= 93 \\ 2^n - 1 &= \frac{93}{3} \\ 2^n &= 31 + 1 \\ 2^n &= 2^5 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

??

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 3^n &= 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \ldots \cdot 3^n \\
&= 3^{1+2+\ldots+n} \\
&= 3^{n\frac{1+n}{2}} \\
&= 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}
\end{aligned}
$$

Som er det vi skulle vise.

??

Rekken er geometrisk, med $a_1 = 3$ og $k = 4$. For å finne summen må vi vite hvor mange ledd rekken består av:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 4^{n-1} &= 768 \\
4^{n-1} &= 256 \\
4^{n-1} &= 4^4 \\
n - 1 &= 4 \\
n &= 5
\end{aligned}
$$

??

a) Summen S_n er gitt som:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 2 \cdot \frac{1 - 3^k}{1 - 3} \\
&= 2 \cdot \frac{1 - 3^k}{-2} \\
&= 3^k - 1
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
S_3 &= 3^3 - 1 \\
&= 26
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
3^n - 1 &= 728 \\
3^n &= 729 \\
3^n &= 3^6 \\
n &= 6
\end{aligned}
$$

?? Dette er gen geometriske rekken fra eksempelet på side **??**.

a) Hvis rekka har en endelig sum $S_\infty = \frac{3}{2}$, er

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x-1} &= \frac{3}{2} \\
2x &= 3(x - 1) \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Summen av rekka er altså $\frac{3}{2}$ når $x = 3$.

b) Skal summen bli -1, må x oppfylle følgende ligning:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} &= -1 \\ x &= -(x-1) \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Men $x = \frac{1}{2}$ oppfyller ikke kravet om at rekka er konvergent (den er divergent) for dette valget av x. Altså er det ingen verdier for x som oppfyller ligningen.

??

a) Dette er en uendelig geometrisk rekke med $k = \frac{1}{4}$. Siden $|k| < 1$ er rekka konvergent.
b) Siden rekka er uendelig geometrisk og konvergent, har rekka en endelig sum S_∞ gitt ved:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

??

a) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$. Dette er en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{9}{10}$ og $k = 10^{-1}$. **b)** Fordi $|k| < 1$ er rekken konvergent. Den uendelige summen er derfor gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Summen av rekken blir 1, altså er 0.999... = 1 (!).

??

a) Vi observerer at $k = x - 2$. Skal rekka konvergere må altså $|x - 2| < 1$. Skal dette være sant må vi ha at:

$$\begin{aligned} -1 &< x - 2 \\ 1 &< x \end{aligned}$$

og videre at:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 1 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Derfor må vi ha at $1 < x < 3$.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3}}{1-(x-2)} &= \frac{2}{9} \\
\frac{1}{3(3-x)} &= \frac{2}{9} \\
\frac{2}{18-6x} &= \frac{2}{9} \\
18-6x &= 9 \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$x = \frac{3}{2}$ ligger i konvergensområdet, og er derfor et gyldig svar.

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3}}{1-(x-2)} &= \frac{1}{6} \\
\frac{1}{3(3-x)} &= \frac{1}{6} \\
3(3-x) &= 6 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Men $x = 1$ ligger ikke i konvergensområdet, og er derfor ikke et gyldig svar. $S_n = \frac{1}{6}$ har derfor ingen løsning.

??

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1(1+1)}{2} \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+(k+1) &= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} \\
\frac{k(k+1)}{2}+k+1 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} &= \\
\frac{(k+1)(k+2)}{2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.
b) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^n - 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k, får vi:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k+1-1} &= 2^{k+1} - 1 \\ 2^k - 1 + 2^k &= \\ 2 \cdot 2^k - 1 &= \\ 2^{k+1} - 1 &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.
c) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{4}{3}(4^1 - 1) \\ 4 &= \frac{4}{3} \cdot 3 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$\begin{aligned} 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{k+1} &= \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) \\ \frac{4}{3}(4^k - 1) + 4^{k+1} &= \\ \frac{4^{k+1} - 1 + 3 \cdot 4^{k+1}}{3} &= \\ \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) &= \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.
d) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1(2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k får vi:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^3 ... + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)((k+1)+1)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1) + 2k + 4k + 6)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+3) + 4k + 6)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+3) + 2(2k+3)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}
\end{aligned}
$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.
Merk: Faktorisering er en treningsak, men observer hvordan vi i overgangen mellom linje 5 og 6 framkalte leddet $2k + 3$. Hvis man ikke kommer i mål med ren faktorisering, kan man selvfølgelig etter linje 4 vise at $k(2k+1)+6(k+1) = (2k+3)(k+2)$ ved å skrive ut uttrykkene på begge sider.

??
Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1(1^2 + 2) = 1 \cdot 3$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer for $n = k$, får vi:

$$
\begin{aligned}
(k+1)((k+1)^2 + 2) &= (k+1)(k^2 + 2k + 3) \\
&= (k+1)(k(k+2) + 3)
\end{aligned}
$$

Antakelsen vår sier at $k(k + 2)$ er delelig med 3, noe tallet 3 også er. Faktoren $(k(k + 2) + 3)$ er derfor delelig med 3, mens $(k + 1)$ er et heltall. Uttrykket i ligningen over er derfor delelig med 3.

??

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\frac{(2 \cdot 1)!}{(2 \cdot 1 - 1)!} = 2^1 \cdot 1!$$
$$\frac{1 \cdot 2}{1} = 2$$
$$2 = 2$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k, får vi:

$$\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{(2(k+1))!}{(2(k+1)-1)!} = 2^{k+1}(k+1)!$$
$$2^k k! \frac{(2(k+1))!}{(2k+1)!} =$$
$$2^k k! \frac{(2k+1)!(2k+2)}{(2k+1)!} =$$
$$2^{k+1} k!(k+1) =$$
$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Venstresiden kan enklere skrives som:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(k+1)$$

For $n = 1$:

$$2 = 2^1 \cdot 1!$$
$$2 = 2$$

For $n = k + 1$:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(k+1) = 2^{k+1}(k+1)!$$
$$2^k k! \cdot 2(k+1) =$$
$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

Gruble ??

a) Da summen av den uendelige rekka er 8, og $a_1 = 4$, har vi av (**??**) at

$$8 = \frac{4}{1-k}$$

Altså er $k = \frac{1}{2}$, og dermed har vi av (**??**) at

$$S_4 = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{2}$$

b) Da $a_i = a_1 + d(i-1)$, har vi at

$$a_1 + a_4 + a_7 = a_1 + (a_1 + 3d) + (a_1 + 6d) = 3a_1 + 9d = 3(a_1 + 3d) = 3a_4$$

Altså er

$$3a_4 = 114$$
$$a_4 = 38$$

Gruble ??

a) Summen av de n første oddetallene tilsvarer n^2 (se f. eks **??**b), derfor kan vi skrive kvadratene som summer av oddetall.

b) Vi får n enere, $n-1$ treere, $n-2$ femmere og så videre. Den isolerte n-en på høyresiden representerer de n enerene, mens summen representerer bidragene fra alle de andre oddetallene (skriv opp hvis du syns det er vanskelig å se).

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n}(n-i)(2i+1) \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n}(2in + n - 2i^2 - i) \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n}((2n-1)i + n) \\
\sum_{i=1}^{n} 3i^2 &= n + n^2 + (2n-1)\sum_{i=1} i \\
\sum_{i=1}^{n} 3i^2 &= n + n^2 + (2n-1)\frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{2n(1+n) + (2n-1)n(n+1)}{6} \\
&= \frac{(2n + (2n-1)n)(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(2 + (2n-1))(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Gruble ??

Vi starter med å skrive opp noen ledd i følgen:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= ka_1 + d \\
a_3 &= k(ka_1 + d) + d = k^2 a_1 + d(1 + k) \\
a_4 &= k(k^2 a_1 + d(k + 1)) = k^3 a_1 + d(1 + k + k^2)
\end{aligned}
$$

Ut ifra dette finner vi at det første leddet i a_n kan skrives som

$$ka_1^{n-1}$$

Det andre lettet i a_n gjenkjenner vi som en geometrisk rekke med $n-1$ ledd, med sum lik

$$d\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$$

Altså er

$$a_n = k^{n-1} a_1 + d\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$$