Tangeringslinja til en graf

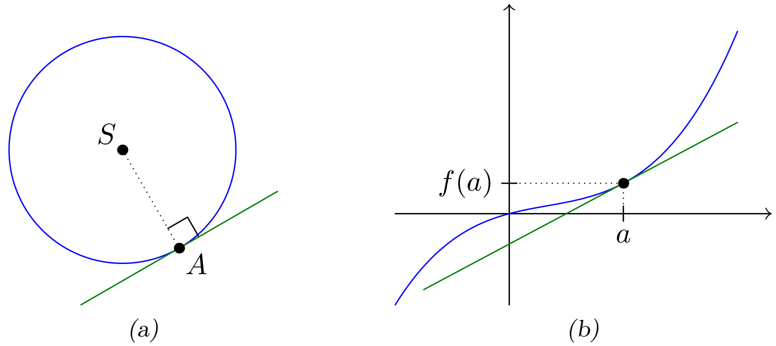
Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se *figur 1a*.)

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$. Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til* f *i punktet* $(a, f(a))$ som linja som går gjennom $(a, f(a))$ og har stigningstall $f'(a)$ (Spivak, 1994). (Se *Figur 1b*.)



Figur 1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

Senteret til krumningen

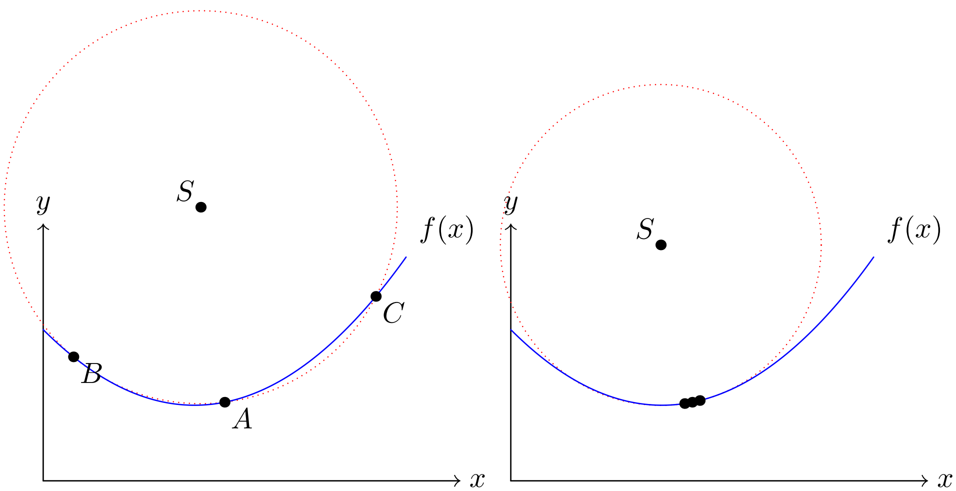
Gitt en funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig og to ganger deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, og hvor $f''(x) \neq 0$. For en gitt a lar vi $f_a = f(a)$, og definerer funksjonene

$$f_b(h) = f(a-h) \quad , \quad f_c(h) = f(a+h)$$

Vi innfører også punktene

$$A = (a, f_a) \quad , \quad B = (a - h, f_b) \quad , \quad C = (a + h, f_c)$$

Videre lar vi $S = (S_x, S_y)$ være sentrum i den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne *krumningen* i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ når h går mot 0.



(a) *(b)*

Figur 2

Et likningssett for S

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [h, f_a - f_b] \quad , \quad \overrightarrow{AC} = [h, f_c - f_a]$$

La B_m og C_m være midptunktene til henholdsvis (sekantene) AB og AC. Da er

$$B_m = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad , \qquad C_m = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$[f_a - f_b, -h]$ er en normalvektor for $\overrightarrow{BA}$, dette betyr at midtnormalen $\boldsymbol{l}_1$ til sekanten AB kan parameterisere som

$$\boldsymbol{l}_1(t) = B_m + [f_a - f_b, -h]t$$

Tilsvarende er midtnormalen $\boldsymbol{l}_2$ til sekanten AC parameterisert ved

$$\boldsymbol{l}_2(q) = C_m + [f_c - f_a, -h]q$$

S sammenfaller med skjæringspunktet til $\boldsymbol{l}_1$ og $\boldsymbol{l}_2$. Ved å kreve at $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2$, får vi et lineært likningssett med to ukjente som gir

$$t = \frac{(f_a - f_c)(f_b - f_c) + 2h^2}{2h(f_b + f_c - 2f_a)}$$

S når h går mot 0

Vi definerer funkjonene $\dot{f}_b$, $\dot{f}_c$, $\ddot{f}_b$ og $\ddot{f}_c$ ut ifra de (respektive) deriverte og andrederiverte av f_b og f_c med hensyn på h:

$$-\dot{f}_b = (f_b)' = -f'(a - h)$$

$$\dot{f}_c = (f_c)' = f'(a + h)$$

$$\ddot{f}_b = (f_b)'' = f''(a - h)$$

$$\ddot{f}_c = (f_c)'' = f''(a + h)$$

Vi skal nå bruke dise funsjonene til å studere koordinatene til S når h går mot 0. Vi tar da med oss at

$$\lim_{h\to 0} \left\{h^2, h\right\} = 0 \qquad \lim_{h\to 0} \{f_b, f_c\} = f_a$$

$$\lim_{h\to 0} \left\{\dot{f}_c, \dot{f}_b\right\} = f'_a \qquad \lim_{h\to 0} \left\{\ddot{f}_b, \ddot{f}_c\right\} = f''_a$$

hvor[1] $f'_a = f'(a)$ og $f''_a = f''(a)$.

For t uttrykt ved () er (se ())

$$S_y = \frac{f_a + f_b + 2ht}{2} = \frac{f_a + f_b}{2} + ht$$

Vi har at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_a + f_b}{2} = f_a$$

Videre er

$$\begin{aligned} ht &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c) + 2h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} \\ &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{2(f_b + f_c - 2f_a)} + \frac{h^2}{f_b + f_c - 2f_a} \end{aligned}$$

[1]Legg merke til at det her er snakk om f derivert med hensyn på x, og evaluert i a.

Når h går mot 0, er begge leddene i (1) «0 over 0» uttrykk. Vi bruker L'Hopitals regel på det siste leddet:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{2(f_b+f_c-2f_a)} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(h^2\right)'}{(f_b+f_c-2f_a)'} && (1)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} \qquad \text{«0 over 0»} && (2)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c} && (3)\\
&= \frac{1}{f''_a} && (4)
\end{aligned}$$

Ved å bruke L'Hopitals regel på det første leddet i (1) har vi at

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f_c-f_a)(f_b-f_c)}{f_b+f_c-2f_a} = \lim_{h\to 0}\frac{((f_c-f_a)(f_b-f_c))'}{(f_b+f_c-2f_a)'}$$

Av produktregelen ved derivasjon er

$$\lim_{h\to 0}\frac{((f_a-f_c)(f_b-f_c))'}{(f_b+f_c-2f_a)'} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\dot{f}_c(f_b-f_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c}+\frac{(f_c-f_a)(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c}\right]$$

Begge leddene over er «0 over 0» uttrykk. Vi undersøker dem hver for seg ved å anvende L'Hopitals regel:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\dot{f}_c(f_b-f_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\ddot{f}_c(f_b-f_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}+\frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}\right]\\
&= 0+\frac{(f'_a)^2}{2f''_a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(f_c-f_a)(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}+\frac{(f_c-f_a)(-\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}\right] && (5)\\
&= \frac{(f'_a)^2}{2f''_a}+0 && (6)
\end{aligned}$$

Av (1), (4), (5) og (6) har vi at

$$\lim_{h\to 0} ht = \frac{1+(f'_a)^2}{f''_a}$$

Dermed er

$$S_y = f_a+\frac{1+(f'_a)^2}{f''_a}$$

Videre er (med t gitt av ())

$$S_x = (f_b - f_a)t + a - \frac{1}{2}h$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(f_b - f_a)t &= \lim_{h\to 0}\frac{f_b - f_a}{h}\cdot ht \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f_b - f_a}{h}\cdot \lim_{h\to 0} ht \\
&= -f'_a\frac{1+(f'_a)^2}{f''_a}
\end{aligned}$$

Altså er

$$S_x = a - f'_a\frac{1+(f'_a)^2}{f''_a}$$

Avslutning

Linja som har stigningstall $f'(a)$, og som går gjennom $(a, f(a))$, er gitt ved funksjonen

$$g(x) = f'_a(x-a) + f_a$$

$\vec{r} = [1, f_a]$ er en retningsvektoren til denne linja. Av uttrykkene vi har funnet for S_x og S_y har vi at

$$S = \left(a - f'_a\frac{1+(f'_a)^2}{f''_a}, f_a + \frac{1+(f'_a)^2}{f''_a}\right)$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''_a}\left[-f_a(1+(f'_a)^2), 1+(f'_a)^2\right]$$

Siden $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AS} = 0$ og $g(a) = f(a)$, er grafen til g tangeringslinja til sirkelen med sentrum S når h går mot 0. Altså er g tangeringslinja til sirkelen som beskriver krumningen til f når $x = a$.