??

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [3-1, -2-(-1), 1-(-2)]\\ &= [2,1,3]\\ \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= [0-1, 5-(-1), 6-(-2)]\\ &= [-1,6,8]\\ \left|\overrightarrow{AC}\right| &= \sqrt{101}\end{aligned}$$

Siden $\sqrt{101} > \sqrt{14}$ er B nærmest A.

??

a)

$$\begin{aligned}|\vec{u}| &= \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2 + (bd)^2}\\ &= \sqrt{a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2}\\ &= \sqrt{d^2(a^2+b^2+c^2)}\\ &= d\sqrt{a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

b) Som i opg. a) kan vi også her skrive

$$|\vec{u}| = \sqrt{d^2(a^2+b^2+c^2)}$$

men siden d^2 er et positivt tall, mens d er negativ, har vi at:

$$d \neq \sqrt{d^2}$$

istedenfor er:

$$|d| = \sqrt{d^2}$$

derfor kan vi skrive:

$$|\vec{u}| = |d|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

??

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= [ad, bd, cd]\cdot[eh, fh, gh]\\ &= adeh + bdfh + cdgh\\ &= dh(ae+bf+cg)\end{aligned}$$

??

c)

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left[\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right]\cdot\vec{b} = [512,-128,64] \\
&= \frac{1}{5}[1,3,-1]\cdot 64[8,-2,1] \\
&= \frac{64}{5}(8-6-1) \\
&= \frac{64}{5}
\end{aligned}
$$

?? Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når:
a) $\vec{a} = [5,-5,2]$ og $\vec{b} = [3,-4,5]$

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{5^2+(-5)^2+2^2} \\
&= \sqrt{54} \\
&= \sqrt{9\cdot 6} \\
&= 3\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\vec{b}| &= \sqrt{3^2+(-4)^2+5^2} \\
&= \sqrt{50} \\
&= \sqrt{25\cdot 2} \\
&= 5\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= [5,-5,2]\cdot\vec{b} = [3,-4,5] \\
&= 15+20+10 \\
&= 45
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\
&= \frac{45}{3\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{2}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Dette betyr at $\theta = 30^\circ$.

??

a)

$$\begin{aligned}
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c}) + 3(\vec{a}+\vec{b})^2 &= \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c} + 3\vec{a}^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{b}^2 \\
&= 0 + 0 + 3\vec{a}^2 + 0 + 3\vec{b}^2 \\
&= 3\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 \\
&= 15
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 &= (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\
&= \vec{a}^{\,2} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}^{\,2} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b} + \vec{c}^{\,2} \\
&= 1^2 + 0 + \vec{a}\cdot\vec{c} + 0 + 2^2 + 0 + \vec{c}\cdot\vec{a} + 0 + 5^2 \\
&= 2(15 + \vec{a}\cdot\vec{c}) \\
&=
\end{aligned}$$

??

b) Vi krever at

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= 0 \\
[-5,-1,6]\cdot[t,t^2,1] &= 0 \\
-5t - t^2 + 6 &= 0 \\
t^2 + 5t - 6 &= 0
\end{aligned}$$

Da $(-1)\cdot 6 = -6$ og $-1+6=5$, kan vi skrive at

$$(t-6)(t+1) = 0$$

Kravet er dermed oppfylt hvis $t \in \{-1, 6\}$.

?? a) Vi regner fort ut at forholdet mellom både førstekomponentene og andrekomponenten er 2, men at forholdet mellom tredjekomponentene er $-\frac{1}{2}$. Vektorene er derfor ikke parallelle.

b) Vi observerer at:

$$\vec{b} = \frac{3}{7}[-3,5,2]$$

dermed er $\vec{b}$ et multiplum av $\vec{a}$ og da er $\vec{a}||\vec{b}$.

??

a) Vi bruker forholdet mellom første- og tredjekomponententene for å sette opp en ligning for t:

$$-\frac{t+3}{3} = -\frac{16}{8}$$
$$t+3 = 6$$
$$t = 3$$

Forholdet mellom andrekomponentene blir da:

$$\frac{1-3}{1} = -2$$

Forholdet er -2 for alle komponentene når $t = 3$ og da er $\vec{a}||\vec{b}$.
b) Også her bruker vi første- og tredjekomponententene for å sette opp en ligning for t, fordi vi da får isolert det kvadratiske leddet:

$$-\frac{t^2+2}{3} = -\frac{(5t^2+3)}{8}$$
$$8t^2 + 16 = 15t^2 + 9$$
$$7x^2 = 7$$
$$x = \pm 1$$

Når $t = 1$ er forholdet mellom både førstkomponentene og tredjekomponentene lik

$$-\frac{1^2+2}{3} = -1$$

Og forholdet mellom andrekomponentene er:

$$\frac{1}{1} = 1$$

For $t = 1$ er altså $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke parallelle. Vi ser derimot fort at forholdet mellom hver av komponentene blir -1 når $t = -1$, for dette valget av t er derfor $\vec{a}||\vec{b}$.

?? $\vec{u} = [4, 6+s, -(s+t)]$ og $\vec{v} = \left[\frac{12}{7}, \frac{2t-9s}{7}, \frac{3s-t}{7}\right]$ Vi starter med å observere at:

$$\vec{v} = \frac{1}{7}[12, 2t-9s, 3s-t]$$

Vi definerer $\vec{w} = [12, 2t-9s, 3s-t]$. Skal vi ha at $\vec{u}||\vec{v}$, må vi også hat at $\vec{u}||\vec{w}$. Siden forholdet mellom førstekomponentene til $\vec{u}$ og $\vec{w}$ er 3, krever vi at $\vec{u} = 3\vec{w}$. Da kan vi sette opp følgende ligningssystem:

$$2t - 9s = 3(6+s) \tag{I}$$

$$3s - t = -3(s+t) \tag{II}$$

Av II får vi at:

$$\begin{aligned}3s - t &= -3s - 3t\\2t &= -6s\\t &= -3s\end{aligned}$$

Setter vi $t = -3s$ inn i (II) får vi:

$$\begin{aligned}2(-3s) - 9s &= 18 + 3s\\-6s - 9s &= 18 + 3s\\-18s &= 18\\s &= -1\end{aligned}$$

Altså er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle hvis $s = -1$ og $t = -3s = 3$.

??

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}ae & be\\cf & df\end{vmatrix} &= aedf - becf\\&= ef(ad - bc)\\&= ef\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix} i\end{aligned}$$

??

b) Arelet er gitt som tallverdien til $\det(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}) &= \begin{vmatrix}-2 & 4\\24 & -16\end{vmatrix}\\&= 2 \cdot 8\begin{vmatrix}-1 & 2\\3 & -2\end{vmatrix}\\&= 16((-1)\cdot(-2) - 2\cdot 3)\\&= 16 \cdot (-4)\\&= -64\end{aligned}$$

Arealet er altså 64.

??

Hvis $\vec{u}||\vec{v}$ betyr dette at hvis vi skriver $\vec{u} = [a, b, c]$, så kan vi skrive

$\vec{v} = d[a, b, c]$. Vi får da at:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ da & db & dc \end{vmatrix} \\
&= d\vec{e}_x \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - d\vec{e}_y \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + d\vec{e}_x \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Resultatet fra **??** er her brukt i andre linje for å forenkle regningen av 2×2 determinantene.

??

a) Arealet til grunnflaten tilsvarer $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$. Vi har at

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= [(-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-3), -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 3), 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3] \\
&= [-2 + 3, -(2 - 3), -6 + 6] \\
&= [1, 1, 0]
\end{aligned}$$

Altså er

$$\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Av (??) vet vi at volumet V er gitt som:

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} &= [1, 1, 0] \cdot [2, -3, 2] \\
&= 2 - 3 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Og dermed er $V = \frac{1}{6}$.

??

a) Diagonalen til grunnflaten kan uttrykkes som vektoren $\vec{a} + \vec{b}$, og lengden blir da (husk at $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^{\,2}$):

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}| &= \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2} \\
&= \sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}} \\
&= \sqrt{3^2+0+4^2} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}
$$