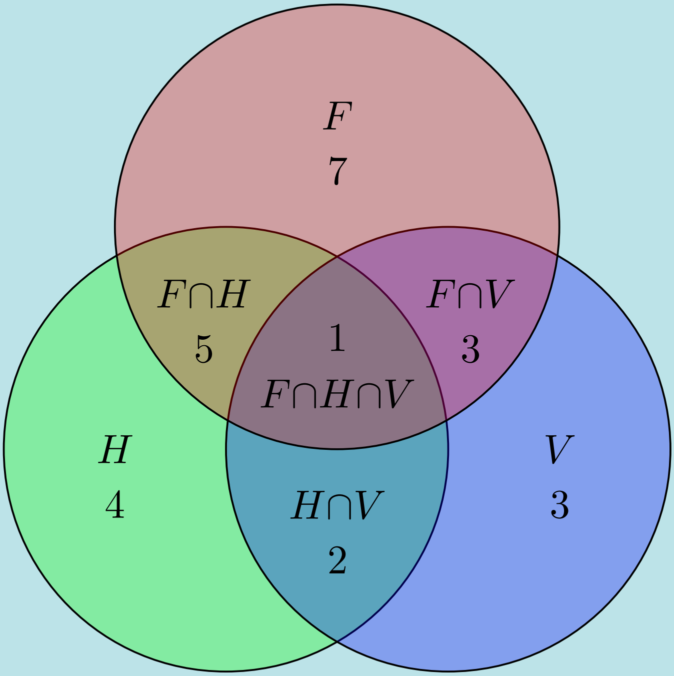
Anvend matematikk for grunnskule og VGS



Sindre Sogge Heggen

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt"*

*"Det er ikkje å vite, men å lære,
ikkje å eige, men å eigne til seg,
ikkje å vere til stades, men å komme dit,
som gjev den største gleda."*

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laga av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skriven i LaTeX og figurane er lagd vha. Asymptote.

04.11.2023

Kjære lesar.

Denne boka er i utgangspunktet gratis å bruke, men eg håper du forstår kor mykje tid og ressursar eg har brukt på å lage ho. Viss du ender opp med å like boka, håper eg derfor du kan donere 50 kr via Vipps til 90559730 eller via PayPal. Ver venleg å markere donasjonen med "Mattebok" ved bruk av Vipps. Pengane vil bli brukt til å fortsette arbeidet med å lage lærebøker som er med på å gjere matematikk lett tilgjengeleg for alle. På førehand takk!

Boka blir oppdatert så snart som råd når skrivefeil og liknande blir oppdaga, eg vil derfor råde alle til å laste ned ein ny versjon i ny og ne ved å følgje denne linken.

Bokmålsversjonen av boka finner du her.

For spørsmål, ta kontakt på mail: sindre.heggen@gmail.com

Forord

Bokas bruksområde

I lag med Matematikken sine byggesteinar (MB) dekker denne boka matematikk for 5.-10. klassse og for VGS-faga 1P og 2P. Mens MB tek for seg dei teoretiske grunnprinsippa matte er bygd på, er denne boka menit for å vise korleis matte kan anvendast i det daglege. Det er likevel med ein viss ambivalens eg bruker ordet "anvendt". Eg er hellig overbevist om at dei aller fleste har behov å bruke matematikk i konkrete, praktiske situasjonar for å få opplevinga av at matematikk blir anvendt. Eg håper derfor desse gratis-bøkene kan frigi midlar for skular, som da kan investere i utstyr som gjer at elevar (og lærarar) får måle, estimere, kalkulere og vurdere ut i frå reelle situasjoner.

Boka si disponering

Da boka gapar over matematikk for 5. klasse og heilt til VGS, vil kanskje mange meine at språket er noko avansert, spesielt for dei yngste. Men forenklingar fører ofte til at ein stadig må vende tilbake til tema for å kommentere utvidingar og/eller unntak, og da dannast det fort eit unødig kronglete og innvikla bilde av matematikken si oppbygging. Eg trur ein i lengda er tent med å presentere temaa så utfyllande som mogleg, og heller bruke god tid på å forstå dei éin gong for alle.

Nokon vil kanskje også reagere på at eksempla er veldig enkle, at dei viser få samansatte problem. Éin av grunnane til dette er at slik vil det faktisk vere for dei aller fleste etter endt skulegong; det handlar om å bruke formlar direkte. Ein annen grunn er at eg meiner det å meistre likningar er den overlegent beste måten å løyse sammensette problem på, og derfor handlar nesten helie kapittel 6 om problemløysing.

Tilbakemeldingar og eventuelle endringer

Eg håper å høre frå deg med tilbakemeldinger om boka. Merk likevel at alle har sine tankar om korleis ei lærebok ideelt sett bør utformast, så ikkje tolk det som utakksemd viss tilbakemeldingar ikkje blir tatt til etterretning. Husk at kodekilden til både denne boka og MB ligg open for alle på GitHub; med litt kunnskapar om Git og LaTeX kan du enkelt gjere endringar slik det passer deg og klassen din!

Gjøreliste

Prosjektet som denne boka er ein viktig del av er under stadig utvikling. Her er ei liste med komande gjereremål, i prioritert rekkefølge:

- Korrigere skrivefeil. Dette gjerast kontinuerleg, gir du beskjed om feil funne til `sindre.heggen@gmail.com`, vil korrigering som oftast bli utført samme dag.
- Legge til fleire oppgåver både i denne boka og i MB.
- Legge til fasit
- Legge til forklaring av delingsalgoritmen.
- Lage ei pensumoversikt for denne boka og MB sett opp mot kompetansemålene f.o.m. 5. klasse og t.o.m. 2P.
- Vidareutvikle nettside med læringsvideoar, undervisningsopplegg og meir.

..

Innhold

Kapittel 1

Storleikar og einingar

1.1 Størrelsar, einingar og prefiks

Det vi kan måle og uttrykke med tall, kaller vi *størrelsar*. Ein størrelse består gjerne av både ein verdi og ei *eining*, og i denne seksjonen skal vi sjå på desse tre einingane:

eining	**forkorting**	**eining for**
meter	m	lengde
gram	g	masse
liter	L	volum

Nokre gongar har vi veldig store eller veldig små størrelsar, for eksempel er det ca. 40 075 000 m rundt ekvator! For så store tall er det vanleg å bruke ein *prefiks*. Da kan vi skrive at det er ca. 40 075 km rundt ekvator. Her står 'km' for 'kilometer', og 'kilo' betyr '1 000'. Så 1 000 meter er altså 1 kilometer . Her er prefiksane ein oftast[1] møter på i kvardagen:

prefiks	**forkortelse**	**verdi**
kilo	k	1 000
hekto	h	100
deka	da	10
desi	d	0,1
centi	c	0,01
milli	m	0,001

Bruker vi denne tabellen i kombinasjon med einingane kan vi for eksempel sjå at

$$1000\,\text{g} = 1\,\text{kg}$$
$$0{,}1\,\text{m} = 1\,\text{dm}$$
$$0{,}01\,\text{L} = 1\,\text{cL}$$

Enda ryddigare kan vi få det viss vi lager ein vannrett tabell (se neste side) med meter, gram eller liter lagt til i midten[2].

[1]Unntaket er 'deka', som er ein veldig lite brukt prefiks, men vi har tatt den med fordi den kompletterer tallmønsteret.

[2]Legg merke til at 'meter', 'gram' og 'liter' er *einingar*, mens 'kilo', 'hekto' osv. er *tal*. Det kan derfor verke litt rart å sette dei opp i samme tabell, men for vårt formål fungerer det heilt fint.

1.1 Omgjering av prefiks

Når vi skal endre prefiksar kan vi bruke denne tabellen:

kilo	hekto	deka	m/g/L	desi	centi	milli

Komma må flyttast like mange gongar som antal ruter vi må flytte oss frå opprinnelig prefiks til ny prefiks.

For lengde brukes også eininga 'mil' (1 mil = 10 000 m). Denne kan leggast på til venstre for 'kilo'.

Eksempel 1

Skriv om 23,4 mL til antall 'L'.

Svar

Vi skriv tabellen vår med L i midten, og legg merke til at vi må *tre ruter til venstre* for å komme oss fra 'mL' til 'L':

kilo	hekto	deka	L	desi	centi	milli

Det betyr at vi må flytte kommaet vårt tre plassar til venstre for å gjere om mL til L:

$$23{,}4\,\text{mL} = 0{,}0234\,\text{L}$$

Eksempel 2

Skriv om 30 hg til antall 'cg'.

Svar

Vi skriv tabellen vår med 'g' i midten og legg merke til at vi må *fire ruter til høyre* for å komme oss fra 'hg' til 'cg':

kilo	hekto	deka	g	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fire plassar til høyre for å gjere om 'hg' til 'cg':

$$30\,\text{mg} = 300\,000\,\text{cg}$$

Eksempel 3

Gjør om 12 500 dm til antall 'mil'.

Svar

Vi skriv tabellen vår med m i midten, legg til 'mil', og merker oss at vi må *fem ruter til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

mil	kilo	hekto	deka	m	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fem plassar til høyre for å gjere om 'mil' til 'dm':

$$12\,500\,\mathrm{dm} = 0{,}125\,\mathrm{mil}$$

1.1 Omgjering av prefiks (forklaring)

Omgjering av prefikser handlar om å gange/dele med 10, 100 osv. (se seksjon **??** og seksjon **??**)

La oss som første eksempel skrive om $3{,}452\,\mathrm{km}$ til antall 'meter'. Vi har at

$$\begin{aligned} 3{,}452\,\mathrm{km} &= 3{,}452 \cdot 1000\,\mathrm{m} \\ &= 3\,452\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

La oss som andre eksempel skrive om 47 mm til antall 'meter'. Vi har at

$$\begin{aligned} 47\,\mathrm{mm} &= 47 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} \\ &= (47 : 1000)\,\mathrm{m} \\ &= 0{,}047\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

1.2 Regning med forskjellige nemningar

En (eventuell) prefiks og ei eining utgjer ei *nemning*. For eksempel, $9\,\mathrm{km}$ har nemninga 'km', mens $9\,\mathrm{m}$ har nemninga 'm'. Når vi skal utføre rekneoperasjoner med størrelsar som har nemning, er det heilt avgjerande at vi passar på at nemningane som er involvert er dei same.

Eksempel 1

Regn ut $5\,\mathrm{km} + 4\,000\,\mathrm{m}$.

Svar

Her må vi enten gjere om $5\,\mathrm{km}$ til antall m eller $4\,000\,\mathrm{m}$ til antall km før vi kan legge sammen verdiene. Vi velger å gjere om $5\,\mathrm{km}$ til antall m:

$$5\,\mathrm{km} = 5\,000\,\mathrm{m}$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} 5\,\mathrm{km} + 4\,000\,\mathrm{m} &= 5\,000\,\mathrm{m} + 4\,000\,\mathrm{m} \\ &= 9\,000\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Tips

I mange utregninger kan eininger føre til at uttrykkene blir litt rotete. Hvis du er helt sikker på at alle benevningene er like, kan du med fordel skrive utregninger uten benevning. I *Eksempel 1* over kunne vi da regnet ut

$$5\,000 + 4\,000 = 9\,000$$

Men merk at i et endelig svar *må* vi ha med benevning:

$$5\,\mathrm{km} + 4\,000\,\mathrm{m} = 9\,000\,\mathrm{m}$$

Eksempel 2

Hvis du kjører med konstant fart, er strekningen du har kjørt etter ein viss tid gitt ved formelen

$$\text{strekning} = \text{fart} \cdot \text{tid}$$

a) Hvor langt kjører ein bil som holder farten 50 $\mathrm{km/h}$ i 3 timer?

b) Hvor langt kjører ein bil som holder farten 90 $\mathrm{km/h}$ i 45 minutt?

Svar

a) I formelen er nå farten 50 og tiden 3, og da er

$$\text{strekning} = 50 \cdot 3 = 150$$

Altså har bilen kjørt 150 km

b) Her har vi to forskjellige eininger for tid involvert; timer og minutt. Da må vi enten gjere om farten til km/min eller tiden til timer. Vi velger å gjere om minutt til timer:

$$\begin{aligned} 45\,\text{minutt} &= \frac{45}{60}\,\text{timer} \\ &= \frac{3}{4}\,\text{timer} \end{aligned}$$

I formelen er nå farten 90 og tiden $\frac{3}{4}$, og da er

$$\text{strekning} = 90 \cdot \frac{3}{4} = 67.5$$

Altså har bilen kjørt 67.5 km.

Eksempel 3

Kiloprisen til ein vare er hva ein vare koster per kg. Kilopris er gitt ved formelen

$$\text{kilopris} = \frac{\text{pris}}{\text{vekt}}$$

a) $10\,\mathrm{kg}$ tomater koster $35\,\mathrm{kr}$. Hva er kiloprisen til tomatene?

b) Safran går for å være verdens dyreste krydder, $5\,\mathrm{g}$ kan koste $600\,\mathrm{kr}$. Hva er da kiloprisen på safran?

Svar

a) I formelen er nå prisen 35 og vekten 10, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

Altså er kiloprisen på tomater 3,5 $\mathrm{kr/kg}$

b) Her har vi to forskjellige eininger for vekt involvert; kg og gram. Vi gjør om antall g til antall kg (se ??):

$$5\,\mathrm{g} = 0{,}005\,\mathrm{kg}$$

I formelen vår er nå prisen 600 og vekten 0,005, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{600}{0{,}005} = 120\,000$$

Altså koster safran 120 000 $\mathrm{kr/kg}$.

Oppgaver for kapittel 1

1.1.1

Gjør om til antall meter.

a) $484\,\mathrm{km}$ b) $91\,\mathrm{km}$ c) $2\,402\,\mathrm{km}$

1.1.2

Gjør om til antall gram.

a) $484\,\mathrm{kg}$ b) $91\,\mathrm{hg}$ c) $2\,402\,\mathrm{hg}$

1.1.3

Gjør om til antall liter

a) $480\,\mathrm{dl}$ b) $9100\,\mathrm{cl}$ c) $24\,000\,\mathrm{cl}$

1.1.4

Gjør om

a) $12{,}4\,\mathrm{m}$ til antall km.

b) $42\,\mathrm{dm}$ til antall m.

c) $58{,}15\,\mathrm{cm}$ til antall mm.

d) $0{,}0074\,\mathrm{km}$ til antall m.

e) $0{,}15\,\mathrm{m}$ til antall cm.

f) $9{,}7\,\mathrm{g}$ til antall hg.

g) $0{,}15\,\mathrm{mg}$ til antall g.

h) $1{,}419\,\mathrm{hg}$ til antall mg.

i) $31\,\mathrm{mg}$ til antall hg.

j) $64\,039\,\mathrm{mg}$ til antall kg.

k) $89\,\mathrm{dl}$ til antall l.

l) $691{,}4\,\mathrm{l}$ til antall cl.

m) $15\,\mathrm{l}$ til antall ml.

n) $918\,\mathrm{cl}$ til antall l.

o) $0{,}55\,\mathrm{dl}$ til antall ml.

1.2.1

En prisme har lengde $9\,\mathrm{cm}$, bredde $10\,\mathrm{cm}$ og høgde $8\,\mathrm{cm}$.

Finn volumet til prismen.

1.2.2

En kjegle har radius $6\,\mathrm{dm}$ og høgde $4\,\mathrm{dm}$.

a) Finn volumet til kjeglen.

b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

1.2.3

En firkantet pyramide har lengde $4\,\mathrm{cm}$, bredde $9\,\mathrm{cm}$ og høgde $10\,\mathrm{cm}$.

a) Finn volumet til kjeglen.

b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

1.3.1

Usain Bolt har verdensrekorden for $100\,\mathrm{m}$ sprint. I tabellen under ser du hva tidtakeren viste ved hver 10. meter under dette rekordløpet.

meter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
sekunder	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,1	7,92	8,75	9,58

a) Hvis Bolts fart hadde vært den samme under hele løpet, hva hadde farten hans vært da?

b) Hvorfor er det *ikke* rimelig å anta at Bolt hadde den samme farten under hele løpet?

c) Anta at Bolt under dette løpet nådde den høgste farten et menneske har sprunget. Finn en tilnærming til denne farten.

1.4.1

Gjør om svarene fra oppgåve 1.3.1 a) og c) til hastigheter oppgitt i '$\mathrm{km/h}$'.

1.4.2

Skriv ned eksempel på et dyr, et insekt, en gjenstand eller annet som veier mellom 1-100 mg, cg, dg, g, dag, hg og kg.

Kapittel 2

Statistikk

2.1 Introduksjon

I ei *undersøking* hentar vi inn informasjon. Denne informasjonen kan gjerne være tal eller ord, og kallast *data*. Ei samling av innhenta data kallast eit *datasett*.

For eksempel, tenk at du spør to mennesker om de iliker kaviar. Den eine svarer "ja", den andre "nei". Da er "ja" og "nei" dataa (svara) du har samla inn, og {"ja", "nei"} er datasettet ditt.

Statistikk handler grovt sett om to ting; *å presentere* og *å tolke* innsamla data. For begge desse formåla har vi nokre verktøy som vi i komande seksjonar skal studere ved hjelp av nokre forskjellige eksempel på undersøkingar. Desse finn du på side 18.

Det er ikkje nokre fullstendige fasitsvar på korleis ein presenterer eller tolker data, men to retningslinjer bør du alltid ha med deg:

- La det alltid komme tydeleg fram kva du har undersøkt, og kva data som er innhenta.
- Tenk alltid over kva metodar du bruker for å tolke dataa.

Språkboksen

Personar som deltek i ei undersøking der ein skal svare på noko, kallast *respondentar*.

Undersøking 1

10 personar testa kor mange sekund dei kunne halde pusten. Resultata blei desse:

$$47 \quad 124 \quad 61 \quad 38 \quad 97 \quad 84 \quad 101 \quad 79 \quad 56 \quad 40$$

Undersøking 2

15 personar blei spurd kor mange epler dei et i løpet av ei veke. Svara blei desse:

$$7 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 8 \quad 1 \quad 6 \quad 8 \quad 0 \quad 14$$

Undersøking 3

300 personar ble spurd kva deira favorittdyr er.

- 46 personer svarte tiger
- 23 personer svarte løve
- 17 personer svarte krokodille
- 91 personer svarte hund
- 72 personer svarte katt
- 51 personer svarte andre dyr

Undersøking 4

Mobiltelefonar med smartfunksjonar (app-baserte) kom på det norske markedet i 2009. Tabellen[1] under viser det totale salget mobiltelefonar i tidsperioden 2009-2014, og andelen med og utan smartfunkskjonar.

År	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
totalt	2 365	2 500	2 250	2 200	2 400	2 100
u. sm.f.	1 665	1 250	790	300	240	147
m. sm.f.	700	1 250	1 460	1 900	2 160	1 953

[1]Tala er henta frå medienorge.uib.no.

2.2 Presentasjonsmetoder

Skal vi presentere våre undersøkingar, bør vi vise datasetta slik at det er lett for andre å sjå kva vi har funne. Dette kan vi gjere blant anna ved hjelp av *frekvenstabellar*, *søylediagram*, *sektordiagram* eller *linjediagram*.

2.2.1 Frekvenstabell

I ein frekvenstabell sett ein opp dataa i ein tabell som viser kor mange gongar kvart unike svar dukkar opp. Dette antalet kallast *frekvensen*.

Undersøking 2

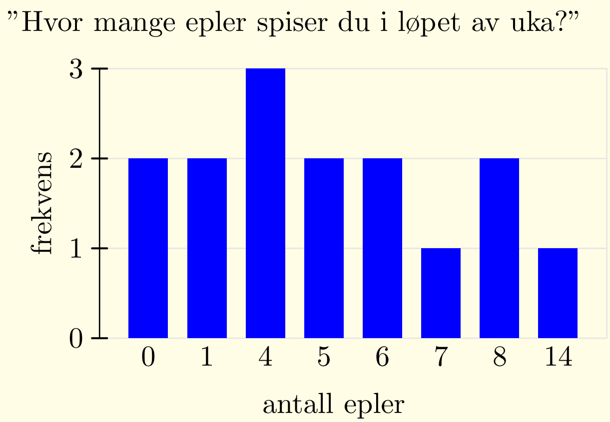
I vår undersøking har vi to 0, to 1, tre 4, to 5, to 6, én 7, to 8 og én 14. I ein frekvenstabell skriv vi da

antall epler	frekvens
0	2
1	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	2
14	1

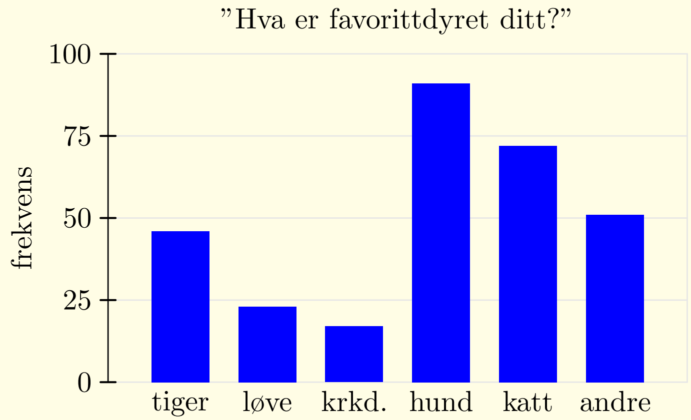
2.2.2 Søylediagram (stolpediagram)

Med eit søylediagram presenterer vi dataa med søyler som viser frekvensen.

Undersøking 2



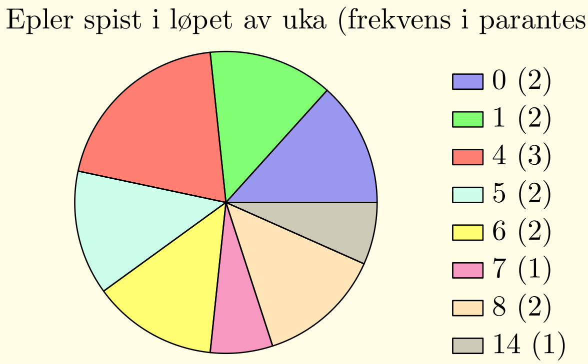
Undersøking 3



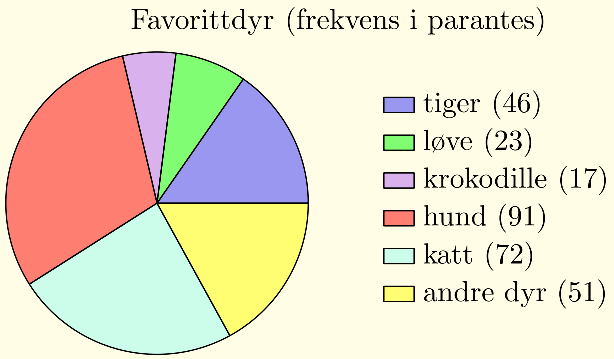
2.2.3 Sektordiagram (kakediagram)

I eit sektordiagram visast frekvensane som sektorar av ein sirkel.

Undersøking 2



Undersøking 3



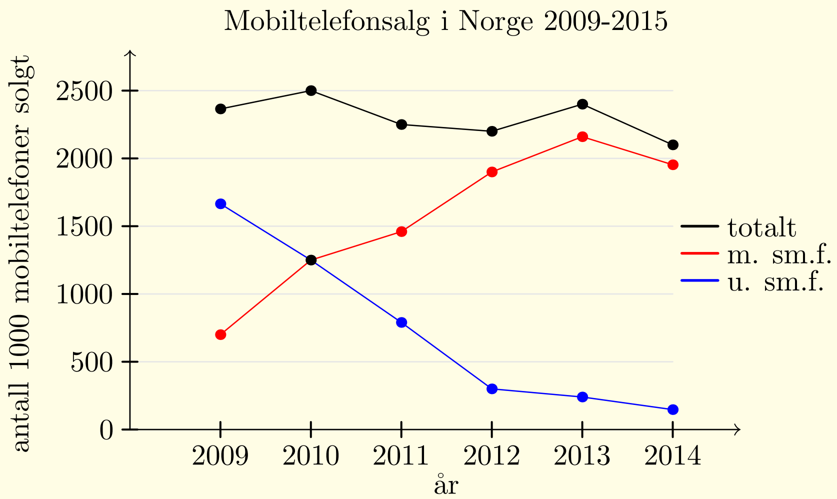
Å lage et sektordiagram for hand

Skal du sjølv teikne eit sektordiagram, treng du kunnskapar om vinklar og om brøkandelar. Sjå seksjon 3.1, MB, s. 76 og oppgåve **??**.

2.2.4 Linjediagram

I eit linjediagram legg vi inn dataa som punkt i eit koordinatsystem, og trekk ei linje mellom dei. Linjediagram brukast oftast når det er snakk om ei form for utvikling.

Undersøking 4



2.3 Tolking av tendenser; sentralmål

I eit datasett er det gjerne svar som er heilt eller tilnærma like, og som gjentar seg. Dette betyr at vi kan seie noko om hva som gjelder for mange; ein **tendens**. Dei matematiske omgrepa som fortel noko om dette kallast **sentralmål**. Dei vanlegaste sentralmåla er *typetal*, **gjennnomsnitt** og *median*.

2.3.1 Typetal

2.1 Typetal

Typetalet er verdien det er flest eksemplar av i datasettet.

Undersøking 2

I datasettet er det verdien 4 som opptrer flest (tre) gongar. 4 er altså typetallet.

Fleire typetal

Hvis fleire verdiar opptrer oftast i eit datasett, har datasettet fleire typetal.

2.3.2 Gjennomsnitt

Når eit datasett består av svar i form av tal, kan vi finne summen av svara. Når vi spør kva gjennomsnittet er, spør vi om dette:

"Vis alle svara var like, og summen den same, kva verdi måtte alle svarene da ha hatt?"

Dette er jo ingenting anna enn divisjon[1]:

2.2 Gjennomsnitt

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{summen av verdiane frå datasettet}}{\text{antall verdier}}$$

Undersøking 1

Vi summerer verdiane frå datasettet, og deler med antall verdiar:

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{47 + 124 + 61 + 38 + 97 + 84 + 101 + 79 + 56 + 40}{10} \\ &= \frac{727}{10} \\ &= 72{,}7\end{aligned}$$

Altså, i gjennomsnitt heldt dei 10 deltakarane pusten i 72,7 sekund.

[1] sjå MB, s. 23.

Undersøking 2

Metode 1

$$
\begin{aligned}
\text{gjennomsnitt} &= \frac{7+4+5+4+1+0+6+5+4+8+1+6+8+0+14}{15} \\
&= \frac{73}{15} \\
&\approx 4.87
\end{aligned}
$$

Metode 2

Vi utvidar frekvenstabellen frå side 19 for å finne summen av verdiene frå datasettet (vi har også tatt med summen av frekvensane):

Antall epler	Frekvens	antall · frekvens
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	2	$1 \cdot 2 = 2$
4	3	$4 \cdot 3 = 12$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$
6	2	$6 \cdot 2 = 12$
7	1	$7 \cdot 1 = 14$
8	1	$8 \cdot 2 = 16$
14	1	$14 \cdot 1 = 14$
sum	15	73

No har vi at

$$
\begin{aligned}
\text{gjennomsnitt} &= \frac{73}{15} \\
&\approx 4{,}87
\end{aligned}
$$

Altså, i gjennomsnitt et dei 15 respondentane 4,87 epler i veka.

Undersøking 4

(Utrekning utelatt. Verdiane er runda ned til næraste éinar).

- Gjennomsnitt for totalt salg av mobilar: 2302
- Gjennomsnitt for salg av mobilar uten smartfunksjon: 732
- Gjennomsnitt for salg av mobilar med smartfunksjon: 1570

2.3.3 Median

2.3 Median

Medianen er talet som ender opp i midten av datasettet når det rangerast frå talet med lågast til høgst verdi.

Hvis datasettet har partalls antal verdiar, er medianen gjennomsnittet av de to verdiane i midten (etter rangering).

Undersøking 1

Vi rangerer datasettet frå lågast til høgst verdi:

$$38 \quad 40 \quad 47 \quad 56 \quad 61 \quad 79 \quad 84 \quad 97 \quad 101 \quad 124$$

Dei to tallene i midten er 61 og 79. Gjennomsnittet av desse er

$$\frac{61+79}{2} = 70$$

Altså er medianen 70.

Undersøking 2

Vi rangerer datasettet frå lågast til høgst verdi:

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 14$$

Tallet i midten er 5, altså er medianen 5.

Undersøking 4

(Utrekning utelatt. Verdiane er runda ned til næraste éner).

- Median for totalt salg av mobilar: 2307
- Median for salg av mobilar utan smartfunksjon: 545
- Median for salg av mobilar med smartfunksjon: 1570

2.4 Tolking av forskjellar; spreiingsmål

Ofte vil det også vere store forskjellar (stor spreiing) mellom dataa som er samla inn. Dei vanlegaste matematiska omgrepa som forteljer noko om dette er *variasjonsbredde*, *kvartilbredde*, *varians* og *standardavvik*.

2.4.1 Variasjonsbredde

2.4 Variasjonsbredde

Differansen mellom svara med høvesvis høgst og lågast verdi.

Undersøking 1

Svaret med høvesvis høgst og lågast verdi er 124 og 38. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 124 - 38 = 86$$

Undersøking 2

Svaret med henholdsvis høgst og lågast verdi er 14 og 0. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 14 - 0 = 14$$

Undersøking 4

- Variasjonsbredde for mobilar totalt:

$$2\,500 - 2\,100 = 400$$

- Variasjonsbredde for mobilar uten smartfunksjoner:

$$1\,665 - 147 = 518$$

- Variasjonsbredde for mobilar med smartfunksjoner:

$$2\,160 - 700 = 1460$$

2.4.2 Kvartilbredde

2.5 Kvartilbredde og øvre og nedre kvartil

Kvartilbredden til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Ranger datasettet frå høgst til lågast verdi.
2. Skil det rangerte datasettet på midten, slik at to nye sett oppstår. (Viss det er oddetalls antal verdiar i datasettet, utelatast medianen).
3. Finn dei respektive medianane i dei to nye setta.
4. Finn differansen mellom medianane frå punkt 3.

Om medianene frå punkt 3: Den med høgst verdi kallast *øvre kvartil* og den med lågast verdi kallast *nedre kvartil*.

Undersøking 1

1. $38 \quad 40 \quad 47 \quad 56 \quad 61 \quad 79 \quad 84 \quad 97 \quad 101 \quad 124$
2. $\color{blue}{38 \quad 40 \quad 47 \quad 56 \quad 61} \quad \color{red}{79 \quad 84 \quad 97 \quad 101 \quad 124}$
3. Medianen i det blå settet er 47 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 97 (øvre kvartil).

$$\color{blue}{38 \quad 40} \quad \color{black}{47} \quad \color{blue}{56 \quad 61} \qquad \color{red}{79 \quad 84} \quad \color{black}{97} \quad \color{red}{101 \quad 124}$$

4. Kvartilbredde $= 97 - 47 = 50$

Undersøking 2

1. $0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 14$
2. $\color{blue}{0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4} \quad \color{black}{5} \quad \color{red}{5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 14}$
3. Medianen i det blå settet er 1 (nedre kvartil) og medianen i det raude settet er 7 (øvre kvartil).

$$\color{blue}{0 \quad 0 \quad 1} \quad \color{black}{1} \quad \color{blue}{4 \quad 4 \quad 4} \qquad \color{red}{5 \quad 6 \quad 6} \quad \color{black}{7} \quad \color{red}{8 \quad 8 \quad 14}$$

4. Kvartilbredde $= 7 - 1 = 6$

Undersøking 4

(Utrekning utelatt)

- For mobilar totalt er kvartilbredden: 200
- For mobilar uten smartfunksjoner er kvartilbredden: 1010
- For mobilar med smartfunksjoner er kvartilbredden: 703

Språkboksen

Nedre kvartil, medianen og øvre kvartil blir også kalla høvesvis *1. kvartil*, *2. kvartil* og *3. kvartil*.

2.4.3 Avvik, varians og standardavvik

2.6 Varians

Differansen mellom ein verdi og gjennomsnittet i eit datasett kallast *avviket* til verdien.

Variansen til eit datasett kan bli funnen på følgande måte:

1. Kvadrer avviket til kvar verdi i datasettet, og summer desse.
2. Divider med antal verdiar i datasettet.

Standardavviket er kvadratrota av variansen.

Eksempel

Gitt datasettet

$$2 \quad 5 \quad 9 \quad 7 \quad 7$$

Da har vi at

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{2+5+9+7+7}{5} = 6$$

Og vidare er

$$\text{variansen} = \frac{(2-6)^2+(5-6)^2+(9-6)^2+(7-6)^2+(7-6)^2}{5}$$
$$= 5$$

Da er standardavviket $= \sqrt{5} \approx 2{,}23$.

Undersøking 1

(Utrekning utelatt)

Variansen er 754,01. Standardavviket er $\sqrt{754{,}01} \approx 27{,}46$

Undersøking 2

Gjennomsnittet fant vi på side 25. Vi utvidar frekvenstabellen vår frå side 19:

antall epler	frekvens	frekvens · kvadrert avvik
0	2	$2 \cdot \left(0 - \frac{73}{15}\right)^2$
1	2	$2 \cdot \left(1 - \frac{73}{15}\right)^2$
4	3	$3 \cdot \left(4 - \frac{73}{15}\right)^2$
5	2	$2 \cdot \left(5 - \frac{73}{15}\right)^2$
6	2	$2 \cdot \left(6 - \frac{73}{15}\right)^2$
7	1	$1 \cdot \left(7 - \frac{73}{15}\right)^2$
8	2	$2 \cdot \left(8 - \frac{73}{15}\right)^2$
14	1	$1 \cdot \left(9 - \frac{73}{15}\right)^2$
sum	15	$189{,}7\bar{3}$

Altså er variansen

$$\frac{189{,}7\bar{3}}{15} \approx 12{,}65$$

Da er standardavviket $\sqrt{12{,}65} \approx 3.57$

Undersøking 4

(Utrekning utelatt)

- For mobilar totalt er variansen 17 781,25 og standardavviket ca. $133{,}4$.
- For mobilar uten smartfunksjoner er variansen $318\,848.\bar{3}$ og standardavviket ca. $17{,}87$
- For mobilar med smartfunksjoner er variansen $245\,847.91\bar{6}$ og standardavviket ca. 495,83.

Kvifor inneber variansen kvadrering?

La oss sjå kva som skjer viss vi gjentek utrekninga frå *Eksempel 1* på side 31, men utan å kvadrere:

$$\frac{(2-6)+(5-6)+(9-6)+(7-6)+(7-6)}{5} = \frac{2+5+9+7+7}{5} - 6 \quad (2.1)$$

Men brøken $\frac{2+5+9+7+7}{5}$ er jo per definisjon gjennomsnittet til datasettet, og dermed blir uttrykket over lik 0. Dette vil gjelde for alle datasett, så i denne samanhengen gir ikkje tallet 0 noko ytterligare informasjon. Om vi derimot kvadrerer avvika, unngår vi eit uttrykk som alltid blir lik 0.

Oppgaver for kapittel 2

2.3.1

Gitt datasettet

$$2 \quad 12 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 11$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.2

Gitt datasettet

$$9 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 5 \quad 8 \quad 4 \quad 10 \quad 8 \quad 6$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.3

Gitt datasettet

$$11 \quad 7 \quad 16 \quad 0 \quad 8 \quad 9 \quad 8 \quad 5 \quad 16 \quad 5$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.4

Gitt datasettet

$$6 \quad 11 \quad 14 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad 8 \quad 5 \quad 11 \quad 5 \quad 11 \quad 17$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.5

Du ønsker å finne ut hva nordmenn flest har i formue[1], og bestemmer deg for å finne ut av dette ved å spørre fem tilfeldige personer du møter i gata. De fire første svarene (i kr) er disse:

$3{,}2$ millioner $2{,}9$ millioner $1{,}8$ millioner $4{,}2$ millioner

Den siste personen du tilfeldigvis møter er personen i Norge med høyest formue. Hens svar er dette[2]:

$$20\,915{,}3 \text{ millioner}$$

a) Finn medianen i datasettet.

b) Finn gjennomsnittet i datasettet.

c) Er det medianen eller gjennomsnittet som trolig best representerer hva nordmenn flest har i formue?

2.3.6

Lag en frekvenstabell for datasettet under. (La tittelen til venstre kolonne være "frukt".)

banan eple eple eple pære banan eple pære appelsin
eple pære pære

2.3.7

Lag en frekvenstabell for datasettet fra oppgåve 2.3.4. (La tittelen til venstre kolonne være "tall".)

2.3.8

a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgåve 2.3.6.

b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgåve 2.3.7.

2.3.9

a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgåve 2.3.6.

b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgåve 2.3.7.

[1]Enkelt sagt er formue summen av penger du har i banken, verdier av hus, bil etc., fratrekt gjeld o.l.

[2]Tallet er basert på personen i Norge med høyest formue ut ifra ligningstallene for 2019.

2.3.10

Av de fire undersøkelsene på side 18, hvorfor har vi

a) vist frekvenstabell bare for undersøkelse 2?

b) vist søylediagram bare for undersøkelse 2 og 3?

c) vist sektordiagram bare for undersøkelse 2 og ?

d) vist linjediagram bare for undersøkelse 4?

2.3.11

Hvis datasettet har partalls antall svar kan man også finne medianen slik:

1. Finn de to tallene i midten.
2. Finn differansen mellom tallene, og del denne med 2.
3. Legg resultatet fra punkt 2 til det laveste av de to tallene i midten.

Prøv metoden på datasettet fra oppgåve 2.3.3.

2.3.12

Tenk deg at noen i 2014 kom med følgende opplysning:

> "Mellom 2006 og 2014 ble det i gjennomsnitt solgt flere mobiltelefoner uten smartfunksjon enn med."

Hvorfor ville denne opplysningen være lite til hjelp hvis man skulle spå framtidige salg av mobiltelefoner med og uten smartfunksjoner?

2.3.13

Av de fire undersøkelsene på side 18, hvorfor har vi ikke funnet sentral- og spredningsmål for undersøkelse 3?

Gruble 1

Finn minst fem datasett som har følgende egenskaper:

- de består av fem positive heltall
- gjennomsnittet er 4
- medianen er 3
- typetallet er 3

Gruble 2

(GV23D1)

Tabellen nedenfor viser hastigheter målt i en fartskontroll. Alle hastighetene er mål i km/h.

62	20	62	18	55	62	65	54	62	60

a) Avgjør gjennomsnitt, median og typetall.

b) Begrunn hvilket av sentralmålene du ville valgt for å beskrive bilenes hastighet.

Gruble 3

(GV23D1)

Tabellen nedenfor viser hvor mange elever som bruker skoleskyss fordelt på fylke.

Fylker	Antall elever	Andel i prosent
Viken	26988	17,2%
Oslo	3991	5,8%
Innlandet	14889	37,7%
Vestfold og Telemark	10281	21,2%
Agder	9920	25,3%
Rogaland	8190	12,7%
Vestland	20265	26,4%
Møre og Romsdal	8852	28,2%
Trøndelag	15374	28,1%
Nordland	7017	26,3%
Troms og Finmark	8293	31,4%

Vurder om påstandene nedenfor er sanne eller usanne:

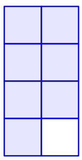
- Flere enn tre ganger så mange elever bruker skoleskyss i Innlandet som i Oslo.
- Gjennomsnittlig er det 5000 elever som bruker skoleskyss per fylke.
- I mer enn halvparten av fylkene er det under 25 som bruker skoleskyss.
- Viken har den største prosentandelen av elever som bruker skoleskyss.

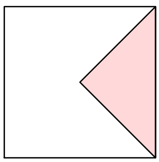
Kapittel 3

Brøkrekning

3.1 Brøkdelar av heiler

I MB (s. 35 - 47) har vi sett korleis brøkar er definert ut ifrå ei inndeling av 1. I kvardagen bruker vi også brøkar for å snakke om inn-delingar av ei heile:


(a)


(b)


(c)

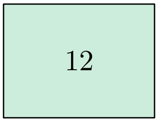
(a) Heila er 8 ruter. $\frac{7}{8}$ av rutene er blå.

(b) Heila er eit kvadrat. $\frac{1}{4}$ av kvadratet er rødt.

(c) Heila er 5 kuler. $\frac{3}{5}$ av kulene er svarte.

Brøkdeler av tall

Sei at rektangelet under har verdien 12.



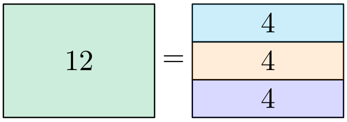
Når vi seier "$\frac{2}{3}$ av 12", meiner vi at vi skal

a) dele 12 inn i 3 like grupper.

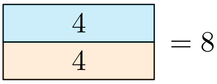
b) finne ut kor mykje 2 av desse gruppene utgjer til sammen.

Vi har at

a) 12 delt inn i 3 grupper er lik $12 : 3 = 4$.



b) 2 grupper som begge har verdi 4 blir til sammen $2 \cdot 4 = 8$.



Altså er

$$\frac{2}{3} \text{ av } 12 = 8$$

For å finne $\frac{2}{3}$ av 12, delte vi 12 med 3, og gonga kvotienten med 2. Dette er det same som å gonge 12 med $\frac{2}{3}$ (sjå MB, s. 45 og 50).

3.1 Brøkdelen av eit tal

For å finne brøkdelen av eit tal, gongar vi brøken med talet.

$$\frac{a}{b} \text{ av } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

Eksempel 1

Finn $\frac{2}{5}$ av 15.

Svar

$$\frac{2}{5} \text{ av } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

Eksempel 2

Finn $\frac{7}{9}$ av $\frac{5}{6}$.

Svar

$$\frac{7}{9} \text{ av } \frac{5}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$$

Språkboksen

Delar av ei heile blir også kalla *andelar*.

3.2 Prosent

Brøkar er ypperlege til å oppgi andelar av ei heile fordi dei gir eit raskt bilde av kor mykje det er snakk om. For eksempel er det lett å sjå (omtrent) Kor mykje $\frac{3}{5}$ eller $\frac{7}{12}$ av ei kake er. Men ofte er det ønskeleg å raskt avgjere kva andelar som utgjer *mest*, og da er det best om brøkane har samme nemnar.

Når andelar blir oppgitt i det daglege, er det vanleg å bruke brøkar med 100 i nemar. Brøkar med denne nemaren er så mykje brukt at dei har fått sitt eige namn og symbol.

3.2 Prosenttal

$$a\% = \frac{a}{100}$$

Språkboksen

% uttalast *prosent*. Ordet kjem av det latinske *per centum*, som betyr *per hundre*.

Eksempel 1

$$43\% = \frac{43}{100}$$

Eksempel 2

$$12{,}7\% = \frac{12{,}7}{100}$$

Merk: Det er kanskje litt uvant, men ikkje noko gale med å ha eit desimaltal i tellar (eller nemar).

Eksempel 3

Finn verdien til

a) 12% b) 19,6% c) 149%

Svar

(Sjå MB for korleis dele tal med 100)

a) $12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$

b) $19{,}6\% = \frac{19{,}6}{100} = 0{,}196$

c) $149\% = \frac{149}{100} = 1{,}49$

Eksempel 4

Gjer om brøkane til prosenttal.

a) $\frac{34}{100}$

b) $\frac{203}{100}$

Svar

a) $\frac{34}{100} = 34\%$

b) $\frac{203}{100} = 203\%$

Eksempel 5

Finn 50% av 800.

Svar

Av regel 3.1 og regel 3.2 har vi at

$$50\% \text{ av } 800 = \frac{50}{100} \cdot 800 = 400$$

Eksempel 6

Finn 2% av 7,4.

Svar

$$2\% \text{ av } 7{,}4 = \frac{2}{100} \cdot 7{,}4 = 0{,}148$$

Tips

Å dele med 100 er såpass enkelt, at vi gjerne kan uttrykke prosenttal som desimaltal når vi gjer utrekningar. I *Eksempel 6* over kunne vi ha rekna slik:

$$2\% \text{ av } 7{,}4 = 0{,}02 \cdot 7{,}4 = 0{,}148$$

Prosentdelar

Kor mange prosent utgjer 15 av 20?

15 er det same som $\frac{15}{20}$ av 20, så svaret på spørsmålet får vi ved å gjere om $\frac{15}{20}$ til ein brøk med 100 i nemnar. Sidan $20 \cdot \frac{100}{20} = 100$, utvidar vi brøken vår med $\frac{100}{20} = 5$:

$$\frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100}$$

15 utgjer altså 75% av 20. Vi kunne fått 75 direkte ved utrekninga

$$15 \cdot \frac{100}{20} = 75$$

3.3 Antal prosent a utgjer av b

$$\text{antal prosent } a \text{ utgjer av } b = a \cdot \frac{100}{b} \tag{3.1}$$

Eksempel 1

Kor mange prosent utgjer 340 av 400?

Svar

$$340 \cdot \frac{100}{400} = 85$$

340 utgjer 85% av 400.

Eksempel 2

Kor mange prosent utgjer 119 av 500?

Svar

$$119 \cdot \frac{100}{500} = 23{,}8$$

119 utgjer 23,8% av 500.

Tips

Å gonge med 100 er såpass enkelt å ta i hodet at ein kan ta det vekk frå sjølve utrekninga. *Eksempel 2* over kunne vi da rekna slik:

$$\frac{119}{500} = 0{,}238$$

119 utgjer altså 23,8% av 500. (Her rekner ein i hodet at $0{,}238 \cdot 100 = 23{,}8$.)

3.2.1 Prosentvis endring; auke eller redusering

Auke

Med utsegnet "200 auka med 30%" meiner ein dette:

Start med 200, og legg til 30% av 200.

Altså er

$$\begin{aligned}\text{200 auka med 30\%} &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 + 60 \\ &= 260\end{aligned}$$

I uttrykket over kan vi legge merke til at 200 er å finne i begge ledd, dette kan vi utnytte til å skrive

$$\begin{aligned}\text{200 auka med 30\%} &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 \cdot (1 + 30\%) \\ &= 200 \cdot (100\% + 30\%) \\ &= 200 \cdot 130\%\end{aligned}$$

Dette betyr at $\quad$ 200 auka med 30% = 130% av 200

Redusering

Med utsegnet "Reduser 200 med 60%" meiner ein dette:

Start med 200, og trekk ifrå 60% av 200

Altså er

$$\begin{aligned}\text{200 redusert med 60\%} &= 200 - 200 \cdot 60\% \\ &= 200 - 120 \\ &= 80\end{aligned}$$

Også her legg vi merke til at 200 opptrer i begge ledd i utrekninga:

$$\begin{aligned}
\text{200 redusert med 30\%} &= 200 - 200 \cdot 60\% \\
&= 200 \cdot (1 - 60\%) \\
&= 200 \cdot 40\%
\end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\text{200 redusert med 60\%} = \text{40\% av 200}$$

Prosentvis endring oppsummert

3.4 Prosentvis endring

- Når ein størrelse reduserast med $a\%$, ender vi opp med $(100\% - a\%)$ av størrelsen.
- Når ein størrelse auker med $a\%$, ender vi opp med $(100\% + a\%)$ av størrelsen.

Eksempel 1

Kva er 210 redusert med 70%?

Svar

$100\% - 70\% = 30\%$, altså er

$$\begin{aligned}
210 \text{ redusert med } 70\% &= 30\% \text{ av } 210 \\
&= \frac{30}{100} \cdot 210 \\
&= 63
\end{aligned}$$

Eksempel 2

Kva er 208,9 auka med 124,5%?

Svar

$100\% + 124{,}5\% = 224{,}5\%$, altså er

$$\begin{aligned}
208{,}9 \text{ auka med } 124{,}5 &= 224{,}5\% \text{ av } 208{,}9 \\
&= \frac{224{,}5}{100} \cdot 208{,}9
\end{aligned}$$

Språkboksen

Rabatt er ein pengesum som skal trekkast ifrå ein pris når det blir gitt eit tilbud. Dette kallast også eit *avslag* på prisen. Rabatt blir gitt enten i antal kroner eller som prosentdel av prisen.

Meirverdiavgiften (mva.) er ei avgift som leggast til prisen på dei aller fleste varer som selgast. Meirverdiavgift blir som regel gitt som prosentdel av prisen.

Eksempel 3

I ein butikk kosta ei skjorte først 500 kr , men selgast no med 40% rabatt.

Kva er den nye prisen på skjorta?

Svar

(Vi tar ikkje med kr i utrekningane)

Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale $100\% - 40\% = 60\%$ av 500:

$$\begin{aligned}\text{60\% av 500} &= \frac{60}{100} \cdot 500 \\ &= 300\end{aligned}$$

Med rabatt kostar altså skjorta 300 kr.

Eksempel 4

På bildet står det at prisen på øreklokkene er 999,20 kr *ekskludert* mva. og 1 249 *inkludert* mva. For øreklokker er mva. 25% av prisen.

Undersøk om prisen der mva. er inkludert er rett.

Svar

(Vi tar ikke med 'kr' i utrekningene)

Når vi inkluderer mva., må vi betale $100\% + 25\%$ av 999,20:

$$\begin{aligned} 125\% \text{ av } 999{,}20 &= \frac{125}{100} \cdot 999{,}20 \\ &= 1249 \end{aligned}$$

Altså 1249 kr, som også er opplyst på bildet.

3.2.2 Vekstfaktor

På side 46 auka vi 200 med 30%, og endte da opp med 130% av 200. Vi seier da at *vekstfaktoren* er 1,3. På side 46 reduserte vi 200 med 60%, og endte da opp med 40% av 200. Da er vekstfaktoren 0,40.

Mange stussar over at ordet vekstfaktor blir brukt sjølv om ein størrelse *synk*, men slik er det. Kanskje eit bedre ord ville vere *endringsfaktor*?

3.5 Vekstfaktor I

Når ein størrelse endrast med $a\%$, er vekstfaktoren verdien til $100\% \pm a\%$.

Ved auke skal $+$ brukast, ved redusering skal $-$ brukast.

Eksempel 1

Ein størrelse aukast med 15%. Kva er vekstfaktoren?

Svar

$100\% + 15\% = 115\%$, altså er vekstfaktoren 1,15.

Eksempel 2

Ein størrelse blir redusert med 19,7%. Kva er vekstfaktoren?

Svar

$100\% - 19{,}7\% = 80{,}3\%$, altså er vekstfaktoren 0,803

La oss sjå tilbake til *Eksempel 1* på side 47, der 210 blei redusert med 70%. Da er vekstfaktoren 0,3. Vidare er

$$0{,}3 \cdot 210 = 63$$

Altså, for å finne ut kor mykje 210 redusert med 70% er, kan vi gange 210 med vekstfaktoren (forklar for deg sjølv hvorfor!).

3.6 Prosentvis endring med vekstfaktor

$$\text{endra originalverdi} = \text{vekstfaktor} \cdot \text{originalverdi}$$

Eksempel 1

Ei vare verd $1\,000\,\text{kr}$ er rabattert med 20%.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Finn den nye prisen.

Svar

a) Sidan det er 20% rabbatt, må vi betale $100\% - 20\% = 80\%$ av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.

b) Vi har at

$$0{,}8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså $800\,\text{kr}$.

Eksempel 2

Ein sjokolade kostar 9,80 kr, ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

a) Kva er vekstfaktoren for prisen på sjokoladen med mva. inkludert?

b) Kva kostar sjokoladen inkludert mva.?

Svar

a) Med 15% i tillegg må vi betale $100\% + 15\% = 115\%$ av prisen eksludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.

b)
$$1{,}15 \cdot 9.90 = 12{,}25$$
Sjokoladen kostar 12,25 kr inkludert mva.

Vi kan også omksrive likninga[1] frå regel 3.6 for å få eit uttrykk for vekstfaktoren:

3.7 Vekstfaktor II

$$\text{vekstfaktor} = \frac{\text{endra originalverdi}}{\text{originalverdi}}$$

Å finne den prosentvise endringa

Når ein skal finne ei prosentvis endring, er det viktig å vere klar over at det er snakk om prosent *av ei heile*, som er sjølve utgangspunktet for utrekningane. Denne heila er den originale verdien.

La oss som eit eksempel seie at Jakob tente 10 000 kr i 2019, og 12 000 kr i 2020. Vi kan da stille spørsmålet "Kor mykje endra lønnen til Jakob seg med frå 2019 til 2020, i prosent?".

Spørsmålet tek utgangspunkt i lønna frå 2019, dette betyr at 10 000 er vår originale verdi. To måtar å finne den prosentvise endringa på er desse (vi tar ikkje med 'kr' i utrekningane):

[1] Sjå kapittel ?? for korleis skrive om likningar.

- Lønna til Jakob endra seg frå 10 000 til 12 000, ei forandring på $12\,000 - 10\,000 = 2\,000$. Vidare er (se regel 3.3)

$$\begin{aligned}\text{antal prosent 2 000 utgjer av 10 000} &= 2\,000 \cdot \frac{100}{10\,000} \\ &= 20\end{aligned}$$

Frå 2019 til 2020 auka altså lønna til Jakob med 20%.

- Vi har at

$$\frac{12\,000}{10\,000} = 1{,}2$$

Fra 2019 til 2020 auka altså lønna til Jakob med ein vekstfaktor lik 1,2 (se regel 3.6). Denne vekstfaktoren tilsvarar ei endring lik 20% (se regel 3.5). Det betyr at lønna auka med 20%.

3.8 Prosentvis endring I

$$\text{prosentvis endring} = \frac{\text{endra originalverdi} - \text{originalverdi}}{\text{originalverdi}} \cdot 100$$

Vsis 'prosentvis endring' er eit positivt/negativt tall, er det snakk om ein prosentvis auke/reduksjon.

Kommentar

regel 3.8 kan sjå litt voldsom ut, og er ikkje nødvendigvis så lett å huske. Viss du verkeleg har forstått delseksjon 3.2.1, kan du utan å bruke regel 3.8 finne prosentvise endringer trinnvis. I påfølgande eksempel viser vi både ein trinnvis løsningsmetode og ein metode ved bruk av formel.

Eksempel 1

I 2019 hadde eit fotballag 20 medlemmar. I 2020 hadde laget 12 medlemmar. Kor mange prosent av medlemmane frå 2019 hadde slutta i 2020?

Svar

Vi startar med å merke oss at det er medlemstalet frå 2019 som er originalverdien vår.

Metode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk frå å ha 20 til 12 medlemmer, altså var det $20 - 12 = 8$ som slutta. Vi har at

$$\text{antal prosent 4 utgjer av 20} = 8 \cdot \frac{100}{20} = 40$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmane frå 2019 slutta.

Metode 2; formel

Vi har at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= \frac{12 - 20}{20} \cdot 100 \\ &= -\frac{8}{20} \cdot 100 \\ &= -40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmane frå 2019 slutta.

Merk: At medlemmar sluttar, inneber ein *reduksjon* i medlemstal. Vi forventa derfor at 'prosentvis endring' skulle vere eit negativt tall.

3.9 Prosentvis endring II

$$\text{prosentvis endring} = 100\,(\text{vekstfaktor} - 1)$$

Merk

regel 3.8 og regel 3.9 gir begge formlar som kan brukast til å finne prosentvise endringar. Her er det opp til ein sjølv å velge kven ein liker best.

Eksempel 1

I 2019 tente du $12\,000\,\mathrm{kr}$ og i 2020 tente du $10\,000\,\mathrm{kr}$. Beskriv den prosentvise endringa i inntekta di, med inntekta i 2019 som utganspunkt.

Svar

Her er 12 000 vår originalverdi. Av regel 3.7 har vi da at

$$\begin{aligned}\text{vekstfaktor} &= \frac{10\,000}{12\,000} \\ &= 0{,}8\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= 100(0{,}8-1) \\ &= 100(-0{,}2) \\ &= -20\end{aligned}$$

Altså er lønna *redusert* med 20% i 2020 sammenliknet med lønnen i 2019.

3.2.3 Prosentpoeng

Ofte snakkar vi om mange størrelsar samtidig, og når ein da bruker prosent-ordet kan setningar bli veldig lange og knotete viss ein også snakkar om forskjellige originalverdier (utgangspunkt). For å forenkle setningane, har vi omgrepet *prosentpoeng*.

Tenk at eit par solbriller først blei solgt med 30% rabatt av originalprisen, og etter det med 80% rabatt av originalprisen. Da seier vi at rabatten har auka med 50 *prosentpoeng*.

$$80\% - 30\% = 50\%$$

Kvifor kan vi ikkje seie at rabatten har auka med 50%?

Tenk at solbrillene hadde originalpris $1\,000\,\mathrm{kr}$. 30% rabatt på $1\,000\,\mathrm{kr}$ tilsvarar $300\,\mathrm{kr}$ i rabatt. 80% rabatt på $1000\,\mathrm{kr}$ tilsvarar $800\,\mathrm{kr}$ i rabatt. Men viss vi auker 300 med 50%, får vi $300 \cdot 1{,}5 = 450$, og det er ikkje det same som 800! Saka er at vi har to forskjellige originalverdiar som utgangspunkt:

"Rabatten var først 30%, så auka rabatten med 50 prosentpoeng. Da blei rabatten 80%."

Forklaring: 'Rabatten' er ein størrelse vi reknar ut ifrå orignalprisen til solbrillene. Når vi seier "prosentpoeng", viser vi til at **originalprisen fortsatt er utgangspunktet** for den komande prosentrekninga. Når prisen er $1\,000\,\mathrm{kr}$, startar vi med $1\,000\,\mathrm{kr} \cdot 0{,}3 = 300\,\mathrm{kr}$ i rabatt. Når vi legg til 50 *prosentpoeng*, legg vi til 50% av originalprisen, altså $1\,000\,\mathrm{kr} \cdot 0{,}5 = 500\,\mathrm{kr}$. Totalt blir det 800 kr i rabatt, som utgjer 80% av originalprisen.

"Rabatten var først 30%, så auka rabatten med 50%. Da blei rabatten 45%."

Forklaring: 'Rabatten' er ein størrelse vi reknar ut ifrå orignalprisen til solbrillene, men her viser vi til at **rabatten er utgangspunktet** for den kommande prosentrekninga. Når prisen er 1 000 kr, startar vi med 300 kr i rabatt. Vidare er

$$300\,\mathrm{kr}\ \text{auka med}\ 50\% = 300\,\mathrm{kr} \cdot 1{,}5 = 450\,\mathrm{kr}$$

og

$$\text{antal prosent 450 utgjer av 1 000} = \frac{450}{100} = 45$$

Altså er den nye rabatten 45%.

I dei to (gule) tekstboksane over rekna vi ut den auka rabatten via originalprisen på solbrillene (1 000 kr). Dette er strengt tatt ikkje nødvendig:

- Rabatten var først 30%, så auka rabatten med 50 prosentpoeng. Da blei rabatten
$$30\% + 50\% = 80\%$$

- Rabatten var først 30%, så auka rabatten med 50%. Da blei rabatten
$$30\% \cdot 1{,}5 = 45\%$$

3.10 Prosentpoeng

$a\%$ auka/redusert med b prosentpoeng $= a\% \pm b\%$.

$a\%$ auka/redusert med $b\% = a\% \cdot (1 \pm b\%)$

Merk

Andre linje i regel 3.10 er eigentleg identisk med regel 3.6.

Eksempel

I skule- og jobbsamanheng viser *fråværet* til kor mange elevar/ansatte som ikkje er til stades.

Ein dag var 5% av elevane på ein skule ikkje til stades. Dagen etter var 7,5% av elevane ikkje til stades.

a) Kor mange prosentpoeng auka fråværet med?

b) Kor mange prosent auka fraværet med?

Svar

a) $7{,}5\% - 5\% = 2{,}5\%$, derfor har fråværet auka med 2,5 prosentpoeng.

b) Her må vi svare på kor mykje endringa, altså 2,5%, utgjer av 5%. Av regel 3.3 har vi at

$$\begin{aligned}\text{antal prosent 2,5\% utgjer av 5\%} &= 2{,}5\% \cdot \frac{100}{5\%} \\ &= 50\end{aligned}$$

Altså har fraværet auka med 50%.

Merk

Å i *Eksempel 1* over stille spørsmålet "Kor mange prosentpoeng auka fråværet med?", er det same som å stille spørsmålet "Kor mange prosent av det totale elevantalet auka fråværet med?".

3.2.4 Gjentatt prosentvis endring

Kva om vi utfører ei prosentvis endring gjentatte gongar? La oss som eit eksempel starte med 2000, og utføre 10% økning 3 påfølgande gongar (sjå regel 3.6):

$$\text{verdi etter 1. endring} = \overbrace{2000}^{\text{originalverdi}} \cdot 1{,}10 = 2\,200$$

$$\text{verdi etter 2. endring} = \overbrace{2\,000 \cdot 1{,}10}^{2\,200} \cdot 1{,}10 = 2\,420$$

$$\text{verdi etter 3. endring} = \overbrace{2\,420 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10}^{2\,420} \cdot 1{,}10 = 2\,662$$

Mellomrekninga vi gjor over kan kanskje virke unødvendig, men utnyttar vi skrivemåten for potensar[1] kjem eit mønster til syne:

$$\begin{aligned}\text{verdi etter 1. endring} &= 2\,000 \cdot 1{,}10^1 = 2\,200\\ \text{verdi etter 2. endring} &= 2\,000 \cdot 1{,}10^2 = 2\,420\\ \text{verdi etter 3. endring} &= 2\,000 \cdot 1{,}10^3 = 2\,662\end{aligned}$$

3.11 Gjentatt vekst eller nedgang

$$\text{ny verdi} = \text{originalverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^{\text{antall endringer}}$$

Eksempel 1

Finn den nye verdien når 20% auke blir utført 6 påfølgande gonger med 10 000 som originalverdi.

Svar

Vekstfaktoren er $1{,}2$, og da er

$$\begin{aligned}\text{ny verdi} &= 10\,000 \cdot 1{,}2^6\\ &= 29\,859{,}84\end{aligned}$$

[1]Se MB, s.101

Eksempel 2

Marion har kjøpt seg ein ny bil til ein verdi av 300 000 kr, og ho forventar at verdien vil synke med 12% kvart år dei neste fire åra. Kva er bilen da verd om fire år?

Svar

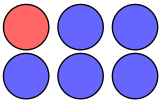
Sidan den årlige nedgangen er 12%, blir vekstfaktoren 0,88. Starverdien er 300 000, og tida er 4:

$$300\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 179\,908$$

Marion forventar altså at bilen er verdt ca. 179 908 kr om fire år.

3.3 Forhold

Med *forholdet* mellom to størrelsar meiner vi den eine størrelsen delt på den andre. Har vi for eksempel 1 rød kule og 5 blå kuler, seier vi at



$$\text{forholdet mellom antall raude kuler og antall blå kuler} = \frac{1}{5}$$

Forholdet kan vi også skrive som $1 : 5$. Verdien til dette reknestykket er

$$1 : 5 = 0{,}2$$

Om vi skriv forholdet som brøk eller som delestykke vil avhenge litt av oppgåvene vi skal løyse.

I denne samanhengen kallast 0,2 *forholdstallet*.

3.12 Forhold

$$\text{forholdet mellom } a \text{ og } b = \frac{a}{b}$$

Verdien til brøken kallast forholdstallet.

Eksempel 1

I ein klasse er det 10 handballspelarar og 5 fotballspelarar.

a) Kva er forholdet mellom antal handballspelarar og fotballspelarar?

b) Kva er forholdet mellom antal fotballspelarar og handballspelarar?

Svar

a) Forholdet mellom antal handballspelarar og fotballspelarar er

$$\frac{5}{10} = 0{,}5$$

b) Forholdet mellom antal fotballspelarar og handballspelarar er

$$\frac{10}{5} = 2$$

3.3.1 Målestokk

I MB (s.145 - 149) har vi sett på formlike trekantar. Prinsippet om at forholdet mellom samsvarande sider er det same, kan utvidast til å gjelde dei fleste andre former, som f. eks. firkantar, sirklar, prismer, kuler osv. Dette er eit fantastisk prinsipp som gjer at små teikningar eller figurar (modellar) kan gi oss informasjon om størrelsane til verkelege gjenstandar. Talet som gir oss denne informasjonen kallast **målestokken**.

3.13 Målestokk

$$\text{målestokk} = \frac{\text{ei lengde i ein modell}}{\text{den samsvarande lengda i virkelegheita}}$$

Eksempel 1

På ei teikning av eit hus er ein vegg $6\,\mathrm{cm}$. I verkelegheita er denne veggen $12\,\mathrm{m}$.

Kva er målestokken på teininga?

Svar

Først må vi passe på at lengdene har same nemning[1]. Vi gjer om $12\,\mathrm{m}$ til antal cm:

$$12\,\mathrm{m} = 1200\,\mathrm{cm}$$

No har vi at

$$\begin{aligned}\text{målestokk} &= \frac{6\,\mathrm{cm}}{12\,\mathrm{cm}} \\ &= \frac{6}{12}\end{aligned}$$

Vi bør også prøve å forkorte brøken så mykje som mogleg:

$$\text{målestokk} = \frac{1}{6}$$

[1]Sjå seksjon **??**.

Tips

Målestokk på kart er omtrent alltid gitt som ein brøk med tellar lik 1. Dette gjer at ein kan lage seg desse reglane:

$$\text{lengde i verkelegheita} = \text{lengde på kart} \cdot \text{nemnar til målestokk}$$

$$\text{lengde i verkelegheita} = \frac{\text{lengde på kart}}{\text{nemnar til målestokk}}$$

Eksempel 2

Kartet under har målestokk $1 : 25\,000$.

a) Luftlinja (den blå) mellom Helland og Vike er 10,4 cm på kartet. Kor langt er det mellom Helland og Vike i verkelegheit?

b) Tresfjordbrua er ca 1300 m i verkelegheita. Kor lang er Tresfjordbrua på kartet?

Svar

a) Verkeleg avstand mellom Helland og Vike $= 10{,}4\,\text{cm} \cdot 25\,000$
$$= 260\,000\,\text{cm}$$

b) Lengde til Tresfjordbrua på kart $= \frac{1\,300\,\text{m}}{25\,000} = 0{,}052\,\text{m}$

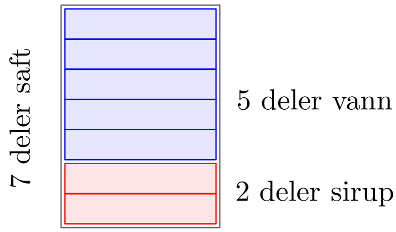
3.3.2 Blandingsforhold

I mange samanhengar skal vi blande to sortar i rett forhold.

På ei flaske med solbærsirup kan du for eksempel lese symbolet "2 + 5", som betyr at ein skal blande sirup og vatn i forholdet $2 : 5$. Heller vi 2 dL sirup i ei kanne, må vi fylle på med 5 dL vatn for å lage safta i rett forhold.

Blandar du solbærsirup og vatn, får du solbærsaft :-)

Nokon gongar bryr vi oss ikkje om *Kor mykje* vi blandar, så lenge forholdet er rett. For eksempel kan vi blande to fulle bøtter med solbærsirup med fem fulle bøtter vatn, og fortsatt vere sikre på at forholdet er rettt, sjølv om vi ikkje veit kor mange liter bøtta rommer. Når vi bare bryr oss om forholdet, bruker vi ordet *del*. "2 + 5" på sirupflaska les vi da som "2 delar sirup på 5 delar vatn". Dette betyr at safta vår i alt inneheld $2 + 5 = 7$ delar:



Dette betyr at 1 del utgjer $\frac{1}{7}$ av blanding, sirupen utgjer $\frac{2}{7}$ av blandinga, og vatnet utgjer $\frac{5}{7}$ av blandinga.

3.14 Deler i eit forhold

Ei blanding med forholdet $a:b$ har til saman $a+b$ deler.

- 1 del utgjer $\frac{1}{a+b}$ av blandinga.
- a utgjer $\frac{a}{a+b}$ av blandinga.
- b utgjer $\frac{b}{a+b}$ av blandinga.

Eksempel 1

Ei kanne som rommer 21 dL er fylt med ei saft der sirup og vatn er blanda i forholdet $2:5$.

a) Kor mykje vatn er det i kanna?

b) Kor mykje sirup er det i kanna?

Svar

a) Til saman består safta av $2+5=7$ delar. Da 5 av desse er vatn, må vi ha at

$$\begin{aligned}\text{mengde vatn} &= \frac{5}{7}\text{ av 21 dL} \\ &= \frac{5\cdot 21}{7}\,\mathrm{dL} \\ &= 15\,\mathrm{dL}\end{aligned}$$

b) Vi kan løyse denne oppgåva på same måte som oppgave a), men det er raskare å merke seg at viss vi har 15 dL vatn av i alt 21 dL, må vi ha $(21-15)\,\mathrm{dL} = 6\,\mathrm{dL}$ sirup.

Eksempel 2

I eit malarspann er grøn og raud maling blanda i forholdet $3:7$, og det er 5 L av denne blandinga. Du ønsker å gjere om forholdet til $3:11$.

Kor mykje raud maling må du helle oppi spannet?

Svar

I spannet har vi $3+7=10$ delar. Sidan det er 5 L i alt, må vi ha at

$$\begin{aligned}\text{1 del} &= \frac{1}{10} \text{ av } 5\,\text{L} \\ &= \frac{1\cdot 5}{10}\,\text{L} \\ &= 0{,}5\,\mathrm{L}\end{aligned}$$

Når vi har 7 delar raudmaling, men ønsker 11, må vi blande oppi 4 delar til. Da treng vi

$$4\cdot 0{,}5\,\mathrm{L} = 2\,\mathrm{L}$$

Vi må helle oppi 2 L raudmaling for å få forholdet $3:11$.

Eksempel 3

I ei ferdig blandeta saft er forholdet mellom sirup og vatn $3:5$.

Kor mange delar saft og/eller vatn må du legge til for at forholdet skal bli $1:4$?

Svar

Brøken vi ønsker, $\frac{1}{4}$, kan vi skrive om til ein brøk med same tellar som brøken vi har (altså $\frac{3}{5}$):

$$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{3}{12}$$

I vårt opprinnelege forhold har vi 3 delar sirup og 5 delar vatn. Skal dette gjerast om til 3 delar sirup og 12 delar vatn, må vi legge til 7 delar vatn.

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

Finn

a) $\frac{2}{3}$ av 9. b) $\frac{5}{8}$ av 24. c) $\frac{7}{2}$ av 12. d) $\frac{10}{4}$ av 32.

3.1.2

a) Finn $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$.

b) Finn $\frac{6}{7}$ av $\frac{8}{11}$.

c) Finn $\frac{9}{10}$ av $\frac{2}{13}$.

3.1.3

Du har startet et firma i lag med en venn, og dere har blitt enige om at du skal få $\frac{3}{5}$ av det firmaet tjener. Hvis firmaet tjener 600 000 kr, hvor mange kroner får du?

3.2.1

Skriv om brøkene til prosenttall

a) $\frac{78}{100}$ b) $\frac{91{,}2}{100}$ c) $\frac{0{,}7}{100}$ d) $\frac{193{,}54}{100}$

3.2.2

Skriv verdien til

a) 57% b) 98,1% c) 219% d) 0,3%

3.2.3

Skriv om brøken til prosenttall

a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{11}{50}$ c) $\frac{9}{25}$ d) $\frac{29}{20}$

3.2.4

Finn

a) 20% av 500. b) 25% av 1000. c) 70% av 90.

c) 80% av 700. d) 15% av 200.

3.2.5

Hvor mange prosent utgjør

a) 4 av 10? b) 6 av 24? c) 21 av 49? d) 18 av 81?

3.2.6

Se tilbake til *Undersøkelse 2* på s. 18 og 21.

a) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "tiger"?

b) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "løve"?

c) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "krokodille"?

d) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "hund"?

3.2.7

a) Hva er 40 økt med 10%?

b) Hva er 250 økt med 30%?

c) Hva er 560 økt med 80%?

d) Hva er 320 økt med 100%?

e) Hva er 800 økt med 150%?

3.2.8

a) Hva er 40 senket med 10%?

b) Hva er 250 senket med 30%?

c) Hva er 560 senket med 80%?

3.2.9

Du kjøper en kryptovaluta for $20\,000\,\mathrm{kr}$, og håper at verdien til denne vil stige med 8% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

3.2.10

Du kjøper en ny gaming-PC til $20\,000\,\mathrm{kr}$, og regner med at verdien til denne vil synke med 12% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

3.2.11

Si at originalprisen på en bukse er 500 kr. Først ble det gitt 20% rabatt på originalprisen, men etter en stund ble det gitt 30% rabatt på originalprisen. Avgjør hvilke av utsagnene under som er sann/ikke sann

(i) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, ble originalprisen redusert med 10%.

(ii) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, økte rabatten med 10%.

(iii) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, økte rabatten med 10 prosentpoeng.

3.2.12 (1PV21D1)

Marko har kjøpt en sjokoladeplate i en butikk. Den kostet 20 kroner.

Mari har kjøpt en sjokoladeplate på ein bensinstasjon. Den kostet 50 kroner.

Hans: "Jeg har regnet og funnet ut at sjokoladeplaten er 150 % dyrere på bensinstasjonen enn i butikken."

Mari: "Jg har regnet og funnet ut at sjokoladeplaten er 60 % billigere i butikken enn på bensinstasjonen."

Marko: "Kan vi ha regnet rett? Hvorfor får vi ulike prosenter? Det var rart."

Gjør beregningar og svar på Marko sine spørsmål.

3.3.1

a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7a).

b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7b).

c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7c).

3.3.2

a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8a).

b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8b).

c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8c).

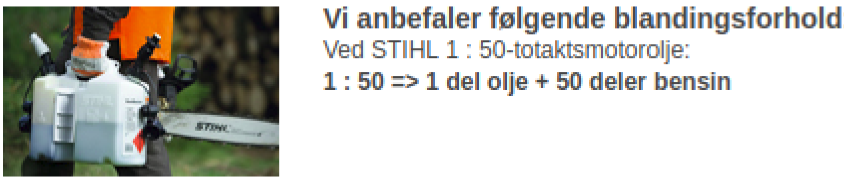
3.3.3

Finn forholdet og forholdstallet mellom antall hester og antall griser når vi har:

a) 5 hester og 2 griser. **b)** 12 griser og 4 hester.

3.3.4

Totaktsmotorer krever som regel bensin som er tilsatt en viss mengde motorolje. STHIL er en produsent av motorsager drevet av slike motorer, på deres hjemmesider kan vi lese dette:



Si at vi skal fylle på 2,5 l bensin på motorsagen vår, hvor mye olje må vi da tilsette?

3.3.5

Du skal lage et lotteri der forholdet mellom antall vinnerlodd og taperlodd er $\frac{1}{8}$. Hvor mange taperlodd må du lage hvis du skal ha 160 vinnerlodd?

3.3.6

De fleste brus inneholder ca 10 g karbohydrater per 100 g. En type saftsirup inneholder 44 g karbohydrater per 100 g. Saften skal lages med 2 deler sirup og 9 deler vann.

Hvor mange karbohydrater per 100 g inneholder ferdig utblandet saft?

Merk: I denne oppgaven går vi ut ifra at både 1 dl vann og 1 dl saftsirup veier 100 g.

Gruble 4

Bruk regel 3.7 og regel 3.8 til å utlede formelen i regel 3.9.

Kapittel 4

Økonomi

4.1 Indeksregning

4.1.1 Introduksjon

Innan økonomi er *indeksar* forholdstall som fortel kor mykje størrelsar har forandra seg. For eksempel kosta kroneisen ca 0,75 kr (!) da den blei lansert i 1953, mens den i 2021 kosta ca 27 kr. Forholdet mellom prisen i 2021 og i 1953 er da

$$\frac{\text{pris 2021}}{\text{pris 1953}} = \frac{27}{0{,}75} = 36$$

I denne samanhengen er talet 36 ein indeks for prisendringa på kroneis mellom 1953 og 2021.

4.1.2 Konsumprisindeks og basisår

Konsumprisindeksen (KPI) er ein indeks som skildrar eit samanliknbart prisnivå på varer og tenester som ein typisk husstand i Norge brukar pengar på i løpet av eit år. Desse varene er

- Matvarer og alkoholfrie drikkevarer
- Alkoholholdige drikkevarer og tobakk
- Klede og skotøy
- Bolig, lys og brensel
- Møblar, hushaldningsartiklar og vedlikehold av innbo
- Helsepleie
- Transport
- Post- og teletenester
- Kultur og fritid
- Utdanning
- Hotell- og restauranttenester
- Andre varer og tenester

For å samanlikne noe må ein alltid ha eit utgangspunkt, og konsumprisindeksen tek utgangspunkt i prisnivået på dei nevnte varene/tenestene i året 2015. 2015 kallast da *basisåret*[1], og i dette året er indeksen satt til 100.

[1]Kva år som er basisår forandrar seg med tiden. Før 2015 blei basisår var 1998 det.

4.1 Basisår

I eit basisår er verdien til indeksen 100. For konsumprisindeksen er 2015 basisåret.

Tabellen under viser samla KPI for dei 10 siste åra:

År	KPI
2020	112,2
2019	110,8
2018	112,2
2017	105,5
2016	103,6
2015	100
2014	97,9
2013	95,9
2012	93,9
2011	93,3

Table 4.1: Kunsumprisindeksen for åra 2010-2021. Tal henta frå SSB.

Ut ifrå tabellen kan vi for eksempel lese dette:

- Da KPI for 2017 er 105,5 , har prisane stege med 5,5% sidan 2015.
- Da KPI i 2011 er 93,3 , var prisane 7,7% lavare i 2011 enn i 2015.

4.2 Prosentvis endring frå basisår

$$\text{indeks} - 100 = \text{prosentvis endring fra basisår}$$

Eksempel 1

I juli 2021 var KPI for matvarer 109,4. Hvor mye har prisen på matvarer endret seg sammenlignet med basisåret?

Svar

$109{,}4 - 100 = 9{,}4$. Prisen på matvarer har altså økt med 9,4% sammenlignet med basisåret.

Eksempel 2

I juli 2021 var KPI for sko 98,0. Hvor mye har prisen på sko endret seg sammenlignet med basisåret?

Svar

$98{,}0 - 100 = -2$. Prisen på sko har altså blitt redusert med 2% sammenlignet med basisåret.

4.1.3 Kroneverdi

Vi har nemnd at en kroneis kosta 0,75 kr i 1953 og 27 kr i 2021. Når vi ved to tidspunkt må betale *forskjellig* pris på den *same* vara skuldast det ofte at *kroneverdien* har forandra seg; *1 kr i 1957 var meir verd enn 1 kr i 2021.*

Kroneverdien for eit gitt år reknast ut ifrå KPI til basisåret (100):

4.3 Kroneverdi

$$\text{kroneverdi} = \frac{100}{\text{KPI}}$$

Merk: Kroneverdien for basisåret (2015) er 1.

Eksempel 1

KPI i 2012 var 93,9. Rekn ut kroneverdien i 2012.

Svar

$$\begin{aligned} \text{kroneverdi i 2012} &= \frac{100}{93{,}9} \\ &\approx 1{,}06 \end{aligned}$$

Dette betyr at 1 kr i 2012 tilsvarar 1,06 kr i basisåret.

Obs!

Ordet *kroneverdi* brukast også når ein samanlikner verdien av 1 kr opp mot verdien av utenlandsk valuta. Kroneverdi ut ifrå eit basisår og kroneverdi ut ifrå ein valuta er ikkje det same.

4.4 Realverdi

Realverdien til en pengesum er kor mykje ein pengesum ville ha vore verd i basisåret.

$$\text{realverdi} = \text{opprinneleg verdi} \cdot \text{kroneverdi}$$

Eksempel

I 1928 var KPI 3,2 og i 2020 var KPI 112,2. Kva hadde størst realverdi, 10 000 kr i 1928 eller 350 000 kr i 2020?

Svar

Vi har at

$$\text{kroneverdi i 1928} = \frac{100}{3{,}2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av 10 000 kr fra 1928 i basisår} &= 10\,000\,\mathrm{kr} \cdot \frac{100}{3{,}2} \\ &= 312\,500\,\mathrm{kr}\end{aligned}$$

Videre er

$$\text{kroneverdi i 2012} = \frac{100}{112{,}2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av 350 000 kr fra 1928 i basisår} &= 350\,000 \cdot \frac{100}{112{,}2} \\ &\approx 311\,943\,\mathrm{kr}\end{aligned}$$

Altså var 10 000 kr meir verd i 1928 enn det 350 000 kr var verd i 2020.

4.1.4 Reallønn og nominell lønn

Kvor god *råd* vi har avheng av kvor mykje vi tener og kva prisnivået er. Tenk at du hadde ei årsløn på 500 000 kr i både 2020 og i 2019. *Tabell 4.1* fortell oss da at du hadde du best råd i 2019, fordi da var prisnivået (KPI) lavare enn i 2020.

At prisnivået har blitt høgre er det same som at kroneverdien har blitt lavare. Dette betyr igjen at viss løna di var den same i 2019 og 2020, er *realverdien* til løna din høgre i 2019 enn i 2020. Den opprinnelege løna og realverdien til løna er så mykje brukt i statistikk at dei har fått eigne namn:

4.5 Realløn og nominell løn

Nominell løn er løn mottat eit gitt år.

Realløna er realverdien til den nominelle løna.

Eksempel

I 2016 tente Per 450 000 kr, mens i 2012 tente han 420 000 kr. I 2016 var KPI $= 103{,}6$, mens i 2012 var KPI $= 93{,}9$. I kven av desse åra hadde Per best råd?

Svar

For å finne ut kven av åra Per hadde best råd i, sjekkar vi kva år han hadde høgst reallønn[1] (se regel 4.4):

$$\begin{aligned}\text{realløn i 2016} &= 450\,000 \cdot \frac{100}{103{,}6}\,\text{kr} \\ &\approx 434\,363\,\text{kr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{realløn i 2012} &= 420\,000 \cdot \frac{100}{93{,}9} \\ &\approx 447\,284\,\text{kr}\end{aligned}$$

Reallønna til Per var altså høgst i 2012, derfor hadde han betre råd da enn i 2016.

[1] KPI-verdiene i utrekninga hentar vi frå *Tabell 1*.

4.6 Verdi som følger indeks

Ein verdi er sagt å ha *fulgt indeks* viss verdi og indeks ved to tidspunkt er like.

$$\frac{\text{verdi ved tidspunkt 1}}{\text{indeks ved tidspunkt 1}} = \frac{\text{verdi ved tidspunkt 2}}{\text{indeks ved tidspunkt 2}}$$

Eksempel 1

Tabellen under viser ei oversikt over prisen registrert i ein butikk på to varer ved to forskjellige tidspunkt.

	2010	**2020**
sjokolade	11,00 kr	13,40 kr
brus	12,50 kr	19,00 kr

I 2010 var KPI 92,1 og i 2020 var KPI 12,2. Har prisen på nokon av varene fulgt indeks?

Svar

Vi har at

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2010}}{\text{KPI i 2010}} = \frac{11}{92{,}1} \approx 0{,}119$$

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2020}}{\text{KPI i 2020}} = \frac{13{,}40}{112{,}1} \approx 0{,}119$$

Vidare er

$$\frac{\text{pris på brus i 2010}}{\text{KPI i 2010}} = \frac{12{,}5}{92{,}1} \approx 0{,}136$$

$$\frac{\text{pris på brus i 2020}}{\text{KPI i 2020}} = \frac{19}{112{,}1} \approx 0{,}169$$

Altså er det rimeleg å seie at prisen for sjokolade har fulgt indeks, mens prisen for brus ikkje har gjort det.

4.2 Lån og sparing

4.2.1 Lån

Nokre gongar har vi ikkje nok penger til å kjøpe det vi ønsker oss, og må derfor ta opp eit lån frå ein bank. Banken gir oss da ein viss *lånesum* mot at vi betaler tilbake denne, og *renter*, i løpet av ei bestemt tid. Det vanlegaste er at vi undervegs betaler banken det som kallast *terminbeløp*, som på si side består av *avdrag* og renter. Det vi til ei kvar tid skulder banken kallar vi *gjelda*.

Sei at ein bank låner oss 100 000 kr, som da er lånesummen. Lånet skal vere tilbakebetalt i løpet av 5 år, med eitt terminbeløp kvart år, og renta er 10%. Det fins forskjellige måtar å betale tilbake eit lån på, men følgande vil som regel gjelde:

- **Summen av alle avdraga skal tilsvare lånesummen**.

  For å gjere det enkelt i vårt eksempel, bestemmer vi oss for å betale tilbake lånet med like avdrag kvart år. Sidan 100 000 kr skal fordelast likt over 5 år, må det årlege avdraget bli $\frac{100\,000}{5}\,\text{kr} = 20\,000\,\text{kr}$.

- **Det ein betaler i avdrag skal trekkast frå gjelda.**

  Startgjelda er 100 000 kr, men det første året betaler vi 20 000 kr i avdrag, og da blir gjelda $100\,000\,\text{kr} - 20\,000\,\text{kr} = 80\,000\,\text{kr}$. Det andre året betaler vi nye 20 000 kr, og da blir gjelda $80\,000\,\text{kr} - 20\,000\,\text{kr} = 60\,000\,\text{kr}$. Og slik fortset det dei neste tre åra.

- **Renter skal reknast av gjelda.**

  Sidan gjelda det første året er 100 000 kr, må vi betale $100\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}1 = 10\,000\,\text{kr}$ i renter. Sidan gjelda det andre året er 80 000 kr må vi betale $80\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}1 = 8\,000\,\text{kr}$ i renter. Og slik fortset det dei neste tre åra.

- **Terminbeløpet er summen av avdraget og rentene**.

  Av første og tredje punkt får vi at

	1. år	2. år
Terminbeløp	$20\,000\,\text{kr} + 10\,000\,\text{kr} = 30\,000\,\text{kr}$	$20\,000\,\text{kr} + 80\,000\,\text{kr} = 28\,000\,\text{kr}$

  Og slik fortset det dei neste tre åra.

- **Lånet er fullført når gjelda er lik 0 kr og alle renter er betalt.**

Hvis vi har betalt avdrag lik 20 000 kr i 5 år, er gjelda 0 kr. Har vi da betalt alle rentene også, er lånet fullført.

Merk: Du har alltid rett til å betale større avdrag enn det som først er avtalt. Betaler du heile gjelda vil lånet avsluttast så lenge eventuelle renter også er betalt.

Serielån og annuitetslån

To vanlege typer lån er *serielån* og *annuitetslån*. Lånet fra eksempelet vi akkurat har sett på er eit serielån fordi avdraga er like store. Hvis terminbeløpa hadde vore like store, ville det i staden vore eit annuitetslån. Vis lånesum, rente og nedbetalingstid er lik, vil eit serielån alltid medføre minst utgifter totalt sett. For privatpersonar er det likevel veldig populært å velge annuitetslån på grunn av at det er lettare å planlegge økonomien når ein betaler det same beløpet kvar gong.

Kredittkort

Kredittkort er eit betalingskort som er slik at viss du f.eks. bruker kortet for å betale 10 000 kr, så låner du pengane fra banken. Etter ei tid som er avtalt med banken vil den kreve renter av gjelda din. Til kva tid du betaler denne gjelden er delvis opp til deg sjølv, men generelt har kredittkort veldig høge renter, så det luraste er å betale før rentekravet har starta!

4.7 Lån

lånesum	Beløpet vi låner av banken.
gjeld	Det vi til ei kvar tid skulder banken.
rente	Prosentandel av gjeld som skal betalast.
avdrag	Det vi betaler ned på gjelda.
	Summen av avdraga tilsvarer lånesummen.
	ny gjeld $=$ gammel gjeld $-$ avdrag
renter	gjeld $\cdot$ rente
terminbeløp	avdrag $+$ renter
serielån	Lån der avdraga er like store.
annuitetslån	Lån der terminbeløpa er like store.
kredittkort	Betalingskort som opprettar eit lån frå banken.

Eksempel 1

Frå ein bank låner du $300\,000\,\mathrm{kr}$ med 3% årlig rente. Lånet skal betalast tilbake som eit serielån med 5 årlege terminbeløp.

a) Kva blir det årlege avdraget?

b) Kva er gjelda di etter at du har betalt tredje terminbeløp?

c) Kor mye må du betale i renter ved fjerde terminbeløp?

d) Kor stort blir det fjerde terminbeløpet?

Svar

a) Sidan 300 000 kr skal betalast over 5 år, blir det årlege avdraget

$$\frac{300\,000\,\mathrm{kr}}{5} = 60\,000\,\mathrm{kr}$$

b) Når tredje terminbeløp er betalt, har du betalt tre avdrag. Det betyr at gjelda di er

$$\begin{aligned} 300\,000 - 60\,000 \cdot 3 &= 300\,000 - 180\,000 \\ &= 120\,000 \end{aligned}$$

Altså 120 000 kr.

c) Ut ifrå oppgave b) veit vi at gjelda er 180 000 kr når fjerde terminbeløp skal betalast. 3% av gjelda blir da

$$180\,000 \cdot 0{,}03 = 5\,400$$

Altså 5 400 kr.

d) Terminbeløpet tilsvarar avdrag pluss renter. Ut ifrå oppgåve a) og c) veit vi da at det fjerde terminbeløpet blir

$$60\,000\,\mathrm{kr} + 5\,400\,\mathrm{kr} = 65\,400\,\mathrm{kr}$$

Eksempel 2

Frå ein bank låner du 100 000 kr med 6,4% årleg rente. Lånet skal betalast tilbake som eit annuitetslån over 5 år, og banken har da rekna ut at terminbeløpet blir 24 000 kr.

Rekn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

Svar

Det første året er gjelda 100 000 kr, i renter må du betale 6,4% av denne:

$$100\,000 \cdot 0{,}064 = 6\,400$$

Altså må du betale 6 400 kr i renter det første året.

Vi har at

$$\text{terminbeløp} = \text{avdrag} + \text{renter}$$

Dermed er

$$\text{avdrag} = \text{terminbeløp} - \text{avdrag}$$

$$= 24\,000 - 6400 = 17\,600$$

Altså må du betale 17 600 kr i avdrag det første året.

4.2.2 Sparing; innskuddsrente og forventa avkastning

Innskuddsrente

Vi har sett at vi må betale renter når vi låner pengar av ein bank, men viss vi i staden sett pengar (gjer eit innskudd) i ein bank *får* vi renter:

4.8 Innskuddsrente

Innskuddsrente er ei prosentvis auke av pengene du har i banken, gjentatt over faste tidsintervall (månedleg, årleg o.l.)

Eksempel 1

Du sett inn 20 000 kr i ein bank som gir 2% årleg sparerente. Kor mykje pengar har du i banken etter 8 år?

Svar

For å berekne innskuddsrenter kan vi anvende regel 3.11. Sidan renta er 2%, er vekstfaktoren 1,02. Originalverdien er 20 000 og antall endringar (tiden) er 8:

$$20\,000 \cdot 1{,}02^8 \approx 23\,433$$

Du har altså ca. 23 433 kr i banken etter 8 år med sparing.

Forventet avkastning

Ein anna måte å spare pengar på, er å investere i eit aksjefond. Da vil ein snakke om *forventa avkastning*:

4.9 Forventa avkastning

Forventa avkastning angir ei *forventa* prosentvis auke av ei investering, gjentatt over faste tidsintervall.

Eksempel 1

Du investerer 15 000 i et aksjefond som forventar 5% årleg avkastning. Kor mykje er investeringa verd etter 8 år ved ei slik avkastning?

Svar

Også for forventa avkastning kan vi bruke regel 3.11. Vekstfaktoren er 1,05, originalverdien er 15 000 og antall endringar (tiden) er 8:

$$15\,000 \cdot 1{,}05^8 \approx 22\,162$$

Etter 8 år er det forventa at investeringa er verd 22 162 kr.

Spare med innskuddsrente eller aksjefond?

Som regel er forventa avkastning på eit aksjefond høgare enn innskudsrenta du får i en bank, men ulempa er at forventa avkastning ikkje gir nokre garantier. Forventa avkastning oppgir berre auka eksperter antar vil skje. Er du heldig blir auka høgare, er du uheldig blir den lågare, og kan til og med føre til ein *reduksjon* av investeringa din. I verste fall, rett nok i ekstremt sjeldne tilfeller, kan heile investeringa din ende opp med å bli verd 0 kr.

Innskuddsrenten kan også forandre seg noko med tida, men den kan aldri føre til ein reduksjon av investeringen din.

4.3 Skatt

Om du har ei inntekt, må du som regel betale ein del av desse pengane til staten. Desse pengane kallast *skatt* (og nokre gongar *avgift*). Hensikta med skatt er at staten skal ha råd til å gi innbyggerane tilbod som skule, helsetenester og mykje meir. I dag blir blir skatten i stor grad berekna av datasystem, men det er ditt ansvar å sjekke at berekningane er rette – og da er det viktig å forstå korleis skattesystemet fungerer.

Obs!

I eksamensoppgåver og i virkeligheita vil du fort oppdage at skattesystem er presentert på ein litt anna måte enn i denne boka. Dette er blant anna fordi skattereglane kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi tatt utgangspunkt i skattereglane for 2018. Det viktigaste er ikkje at du husker spesifikt desse reglene, men at du lærer deg kva som meinast med omgrepa *bruttoløn, frådrag, skattegrunnlag, trygdeavgift* og *nettoløn*.

4.3.1 Bruttolønn, frådrag og skattegrunnlag

Dei fleste må betale 23% av det som kallast *skattegrunnlaget*, som er *bruttolønna* minus *frådrag*. Bruttolønna er lønna du mottek frå arbeidsgiver, mens frådrag kan vere mykje forskjellig. *Personfrådrag* og *minstefrådrag* er noko alle skattebetalerar får, i tillegg kan ein blant anna få frådrag viss ein betaler *fagforeningskontigent* eller har gitt pengar til veldedige føremål.

Skattegrunnlag kalles noen ganger *trekkgrunnlag*.

Fagforeiningskontigent er det du betaler for å være med i ei fagforeining.

4.10 Bruttoløn, frådrag og skattegrunnlag

$$\begin{array}{lr} & \text{bruttolønn} \\ - & \text{frådrag} \\ \hline = & \text{skattegrunnlag} \\ \hline \end{array}$$

Eksempel

Bruttoløna til Magnus er 500 000 kr. Han får 56 000 kr i personfrådrag 97 600 kr i minstefrådrag, i tilleg betaler han 1 000 kr for årleg medlemskap i fagforeininga *Tekna*.

Kva må Magnus betale hvis han skattar 23% av skattegrunnlaget?

Svar

Vi startar med å rekne ut skattegrunnlaget, som er bruttoløna minus frådraga:

	500 000	bruttolønn
−	56 000	personfrådrag
−	97 600	minstefrådrag
−	1 000	fagforeningskontigent
=	345 400	skattegrunnlag

4.3.2 Trygdeavgift

Alle lønnsmottakarar må også betale *trygdeavgift*. Dette er ei inntekt staten bruker til å dekke Folketrygda. Kva ein må betale i trygdeavgift kjem an på kor gammal du er og kva type inntekt du har, men her skal vi berre bry oss om det ein må betale for løn frå ein arbeidsgiver. Da er trygdeavgifta avhengig av alderen:

4.11 Trygdeavgift

alder	trygdeavgift
17-69 år	8,2 %
under 17 år eller over 69 år	5,1%

Trygdeavgifta skal bereknast av bruttoløna.

Eksempel

Jonas og bestemora hans, Line, har begge 150 000 kr i løn. Jonas er 18 år og Line er 71 år.

a) Kva må Jonas betale i trygdeavgift?

b) Kva må Line betale i trygdeavgift?

Svar

a) Sidan Jonas er mellom 17 år og 69 år, skal han betale 8,2% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}082 = 12\,300$$

Altså skal Jonas betale 12 300 kr i trygdeavgift. Sidan Line er over 69 år, skal ho betale 5,1% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}051 = 7\,650$$

Altså skal Line betale 7 650 kr i trygdeavgift.

4.3.3 Trinnskatt

Av løna di må du også betale ein viss prosent av forskjellege intervall, dette kallast *trinnskatt*:

4.12 Trinnskatt

	Intervall	Skatt
Trinn 1	169 000 - 237 900 kr	1,4%
Trinn 2	237 900 - 598 050 kr	3,3%
Trinn 3	598 050 - 962 050 kr	12,4%
Trinn 4	Over 962 050 kr	15,4%

Trinnskatt bereknast av bruttoløna.

Eksempel

Hvis du tener 550 000 blir utregningen av trinnskatt slik:

Trinn 1	Da heile løna er over 237 900 kr, må du betale skatt av $(237\,900 - 169\,000)\,\text{kr} = 68\,900\,\text{kr}$. Skatt for trinn 1 blir da $68\,900\,\text{kr} \cdot 0{,}014 \approx 965\,\text{kr}$.
Trinn 2	Da 550 000 kr er over 237 900 kr, men under 598 050 kr, må du betale skatt av $(550\,000 - 237\,900)\,\text{kr} = 312\,100\,\text{kr}$. Skatt for trinn 2 blir da $312\,100\,\text{kr} \cdot 0{,}033 \approx 10\,299\,\text{kr}$.
Totalt	Totalt må du betale $965\,\text{kr} + 10\,299\,\text{kr} = 11\,264\,\text{kr}$ i trinnskatt.

4.3.4 Nettolønn

Det du sit igjen med etter å ha betalt skatt, trygdeavgift og fagforeiningskontigent kallast *nettoløna*. Med tanke på dei tre tidlegare delseksjonane kan vi sette opp eit reknestykke som dette:

4.13 Nettoløn

	Bruttoløn
$-$	Fagforeningskontigent
$-$	23% skatt
$-$	Trygdeavgift
$-$	Trinnskatt
$=$	Nettoløn

Eksempel

Emblas bruttoløn er 550 000 kr. Ho betaler 1500 kr i året for medlemskap i *LO* (Norges største fagforeining) og har 409 900 kr som skattegrunnlag. Embla er 28 år.

Kva er nettoløna til Embla?

Svar

	550 000	Bruttoløn
$-$	1 500	frådrag for fagforening
$-$	93 127	23% av skattegrunnlaget
$-$	45 100	8,2% av bruttoløn
$-$	11 264	Total skatt for trinn 1 og 2
$=$	399 009	Nettoløn

(Den totale trinnskatten har vi henta fra utrekninga i *Eksempel 1* fra *delseksjon 4.3.3.*)

Embla har altså 399 009 kr i nettolønn.

4.4 Budsjett og regnskap

4.4.1 Budsjett

Når ein skal planlegge økonomien sin, kan det vere lurt å sette opp ei oversikt over det ein forventar av inntekter og utgifter. Ei slik oversikt kallast eit *budsjett*. Når ein reknar ut kva inntekter minus utgifter er, finn ein eit *resultat*. Er talet positivt går ein med *overskudd*, er tallet negativt går ein med *underskudd*.

Eksempel

Lisa vil lage ei oversikt over sine månedlege inntekter og utgifter, og kjem fram til dette:

- Ho tek på seg kveldsvakter på ein gamleheim. Av dette forventar ho ca. 4 000 kr i nettolønn.
- Ho bruker ca. 4 500 kr i månaden på mat.
- Ho får 4 360 kr i borteboarstipend.
- Ho bruker ca. 1 200 kr på klede, fritidsaktivitetar o.l.

Sett opp eit månadsbudsjett for Lisa.

Svar

Inntekter	Budsjett
Løn	4 000
Stipend	4 360
Sum	8 360
Utgifter	
Mat	4 500
Klær, fritid o.l.	1 200
Sum	5 700
Resultat	2 660

Budsjettet viser at Lisa forventar 2 660 kr i overskudd.

4.4.2 Regnskap

I eit budsjett fører ein opp *forventa* inntekter og utgifter, mens i eit *reknskap* fører ein opp *faktiske* innteker og utgifter. Forskjellen mellom budsjett og reknskap kallast *avviket*. For avviket er det vanleg at ein for inntekter og resultat rekner ut 'reknskap − budsjett', mens ein for utgifter rekner ut 'budsjett − reknskap'. Dette fordi vi ønsker positive tal viss inntekta er større enn forventa, og negative tal viss utgiftene er større enn forventa.

Eksempel

I eksempelet fra forrige delseksjon (4.4.1) satt vi opp eit månadsbudsjett for Lisa. I mars viste det seg at dette blei dei faktiske inntektene og utgiftene hennar:

- Ho fekk ikkje jobba så mykje som ho hadde tenkt. Nettoløna blei 3 500 kr.
- Ho brukte 4 200 kr i månaden på mat.
- Ho fekk 4 360 i borteboerstipend.
- I bursdagsgave fekk ho i alt 2 000 kr.
- Ho brukte ca. 3 600 på klede, fritidsaktivitetar o.l.

Sett opp eit reknskap for Lisas mars månad.

Svar

Inntekter	Budsjett	Regnskap	Avvik
løn	4 000	3 500	−500
Stipend	4 360	4 360	0
Bursdagsgave	0	2 000	2 000
Sum	8 360	9 860	2 000
Utgifter			
Mat	4 500	4 200	300
Klær, fritid o.l.	1 200	3 600	−2 400
Sum	5 700	7 800	1 900
Resultat	2 660	2 060	−600

Lisa gjekk altså med 2 060 kr i overskudd, men 600 kr mindre enn forventa ut ifrå budsjettet.

Oppgaver for kapittel 4

Konsumprisinder[1]

År	KPI		
2020	112,2	2008	88
2019	110,8	2007	84.8
2018	112,2	2006	84.2
2017	105,5	2005	82.3
2016	103,6	2004	81
2015	100	2003	80.7
2014	97,9	2002	78.7
2013	95,9	2001	77.7
2012	93,9	2000	75.5
2011	93,3	1999	73.2
2010	92.1	1998	71.5
2009	89.9	1997	69.9

[1] Hentet fra ssb.no.

4.1.1

Regn ut kroneverdien i årene:

a) 1998 **b)** 2014 **c)** 2017

4.1.2

I 2017 tjente Else 490 000 kr, mens hun i 2012 tjente 410 000 kr. I 2017 var KPI = 105,5, mens i 2012 var KPI = 93,9.

a) Finn reallønnen til Else i 2017 og i 2012.

b) I hvilket av disse årene hadde Else best råd?

4.2.1

Fra en bank låner du 200 000 kr med 2% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 10 årlige terminbeløp.

a) Hva blir det årlige avdraget?

b) Hva er gjelden din etter at du har betalt sjette terminbeløp?

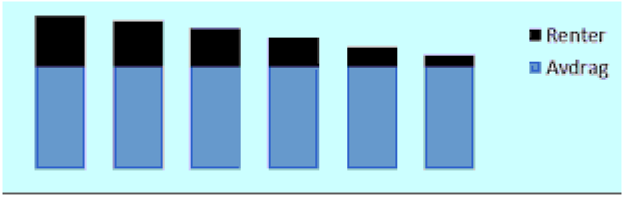
c) Hvor mye må du betale i renter det sjuende terminbeløpet?

d) Hvor stort blir det sjuende terminbeløpet?

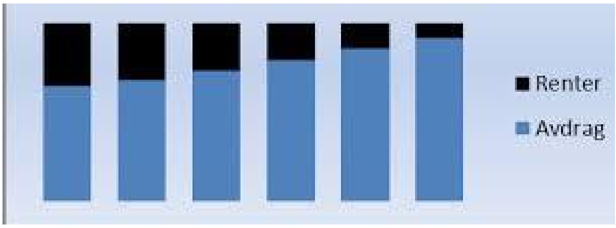
4.2.2
Fra en bank låner du 100 000 kr med 2% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 15 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 7 783.

Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

4.2.3
Hvilken av figurene skisserer et serielån og hvilken skisserer et annuitetslån? Forklar hvorfor.



(a)



(b)

4.2.4
Du oppretter en sparekonto i en bank som gir 2,3% årlig rente og setter inn 45 000 kr. Hvor mye har du på kontoen etter 15 år?

4.2.5 (1PV22D1)
Renten på et lån steg fra 2,0% til 2,2%.

a) Hvor mange prosentpoeng steg renta med?

b) Hvor mange prosent steg renta med?

4.2.6

Tenk at kredittkortet ditt har 45 dagers lån uten renter, og 10% månedlig rente etter dette. Du kjøper en scooter for 50 000 kr med kredittkortet. (Regn en måned som 30 dager.)

a) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 75 dager?

b) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 105 dager?

c) Hvor mye skylder du banken etter 75 dager hvis du betalte 20 000 kr innen de første 45 dagene?

4.3.1

Børge har 350 000 kr i lønn. Børge er pensjonist, og skal da ha 56 000 kr i personfradrag og 83 000 kr i minstefradrag. I tillegg betaler han 700 kr i fagforeningskontigent.

a) Beregn skattegrunnlaget til Børge.

b) Av skattegrunnlaget betaler Børge 23% skatt. Finn hvor mye dette er.

4.3.2

Mira er 19 år og tjener 200 000 i året, mens 74 år gamle Børge tjener 350 000 i året.

Bestem hvor mye Mira og Børge hver for seg betaler i trygdeavgift.

4.3.3

Beregn trinnskatten til Børge (nevnt i oppgåve 4.3.1 og oppgåve 4.3.2).

4.3.4

Beregn nettolønnen til Børge (nevnt i oppgave oppgåve 4.3.1 og oppgåve 4.3.3).

4.4.1

I februar antok Nora at dette ville bli hennes utgifter og inntekter:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel

- 4 500 kr på mat
- 1 500 kr på andre utgifter

a) Sett opp et budsjett for Noras inntekter og utgifter i februar.

b) Det viste seg at de *faktiske* utgiftene og inntektene ble disse:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 5 500 på mat
- Kjøp av fire FLAX-lodd som kostet 25 kr hver.
- Gevinst på 1 000 kr fra FLAX-loddene
- 1 800 på andre utgifter.

Sett opp et regnskap for Nora. Gikk hun med overskudd eller underskudd i februar? Ble overskuddet/underskuddet større eller mindre enn i budsjettet?

Kapittel 5

Sannsyn

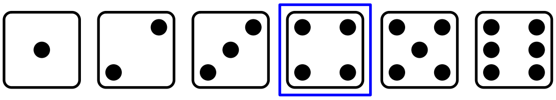
5.1 Grunnprinnsippet

Sjølve prinsippet bak sannsynsregning er at vi spør kor mange *gunstige utfall* vi har i eit utvalg av *moglege utfall*. sannsynat for ei *hending* er da gitt som eit forholdstal mellom desse.

5.1 Sannsynet for ei hending

$$\text{sannsynet for ei hending} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall moglege utfall}}$$

Når vi kastar ein terning, kallar vi 'å få ein firar' ei hending. Og da ein terning har seks forskjellige sider, er det seks moglege utfall.



Viss vi ønsker 'å få ein firar', er det bare 1 av desse 6 utfalla som gir oss det vi ønsker, altså er

$$\text{sannsyn for å få ein firar} = \frac{1}{6}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi gjerne enkeltbokstavar for å indikere ei hending.
I staden for å skrive 'å få ein firar', kan vi bruke bokstaven *F*, og for å indikere at vi snakkar om sannsynet for ei hending, bruker vi bokstaven *P*.

P kommer av det engelske ordet for sannsyn, *probability*.

Når vi skriv $P(S)$ betyr dette 'sannsynet for å få ein firar':

$$P(S) = \frac{1}{6}$$

Kva med det motsatte, altså sannsynet for å *ikke* å få ein firar? For å uttrykke at noko er motsett av ei hending, sett vi ein strek over namnet. Hendinga 'å *ikkje* få eun firar' skriv vi altså som $\bar{F}$. Det 'å *ikkje* få ein firar' er det same som 'å få *enten* ein einar, ein toar, ein trear, ein femmar *eller* ein seksar', derfor har denne hendinga 5 gunstige utfall. Det betyr at

$$P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$$

5.2 Symboler for sannsyn

$P(A)$ er sannsynet for at hending A skjer.

A og $\bar{A}$ er motsette hendingr.

$P(\bar{A})$ er sannsynet for at A *ikkje* skjer, og omvend.

Obs!

Som regel er det ei god vane å forkorte brøkar når det let seg gjere, men i sannsynsrekning vil det ofte lønne seg å la vere. Du vil derfor oppdage at mange brøkar i komande seksjonar kunne vore forkorta.

5.2 Hendingar med og utan felles utfall

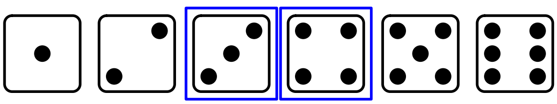
5.2.1 Hendingar utan felles utfall

La oss kalle hendinga 'å få ein trear' (på ein terning) for T. Hendinga 'å få ein trear *eller* ein firar' skriv vi da som $T \cup F$.

Symbolet $\cup$ kallast *union*.

Det er 2 av 6 sider på ein terning som er tre *eller* fire, sannsynet for 'å få ein trear *eller* ein firar' er derfor $\frac{2}{6}$:

$$P(F \cup S) = \frac{2}{6}$$



Det same svaret får vi ved å legge saman $P(F)$ og $P(S)$:

$$P(T \cup F) = P(T) + P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne $P(T \cup F)$ ved å summere $P(T)$ og $P(F)$ kan vi gjere da T og F ikkje har nokon *felles utfall*. Dette fordi ingen sider på trekanten viser *både* en trear og en firar.

5.3 Hendingar utan felles utfall

For to hendingar A og B utan felles utfall, er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eksempel

Du trekk opp ei kule frå ein bolle der det ligg éin raud, to blå og éi grøn kule. Hva er sannsynet for at du trekk opp ei raud *eller* ei blå kule?

Svar

Vi kaller hendinga 'å få ei raud kule' for R og hendinga 'å få ei blå kule' for B.

- Det er i alt 4 moglege utfall (kuler).
- Sidan alle kulene berre har éi farge, er det ingen av hendingane R og B som har felles utfall.
- Sannsynet for å trekke ei raud kule er

$$P(R) = \frac{1}{4}$$

- Sannsynet for å trekke ei blå kule er

$$P(B) = \frac{2}{4}$$

Sannsynet for å få ei raud *eller* ei blå kule er dermed

$$\begin{aligned} P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5.2.2 Summen av alle sannsyn er 1

Tenk at vi kastar ein terning og at vi held både 'å få ein firar' og 'å ikkje få ein firar' for gunstige hendingar . Vi har tidlegare sett at $P(F) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{F}) = \frac{5}{6}$, og at F og $\bar{F}$ ikkje har felles utfall. Av regel 5.3 har vi da at

$$\begin{aligned} P(F \cup \bar{F}) &= P(F) + P(\bar{F}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Enten så skjer F, eller så skjer den ikkje. Og skjer den ikkje, så skjer $\bar{F}$. Viss vi sier at *både* F og $\bar{F}$ er gunstige hendingr, seier vi altså at alle moglege utfall er gunstige, og da gir regel 5.1 eit sannsyn lik 1.

5.4 Summen av alle sannsyner

Summen av sannsyna for alle moglege hendingar er alltid lik 1.

Ei hending A og den motsette hendinga $\bar{A}$ vil til saman alltid utgjere alle hendingar. Av regel 5.4 har vi da at

$$\begin{aligned} P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \end{aligned}$$

5.5 Motsatte hendingar

For ei hending A er

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Eksempel

I ein klasse med 25 elevar er det 12 jenter og 13 gutar. Ein elev skal tilfeldig trekkast ut til å vere med i ein matematikkonkurranse.

a) Kva er sannsynet for at ein gut blir trukke?

b) Kva er sannsynet for at ein gut *ikkje* blir trukke?

Svar

Vi kallar hendinga 'ein gutt blir trukke' for G.

a) Sannsynet for at ein gut blir trekt er

$$P(G) = \frac{13}{25}$$

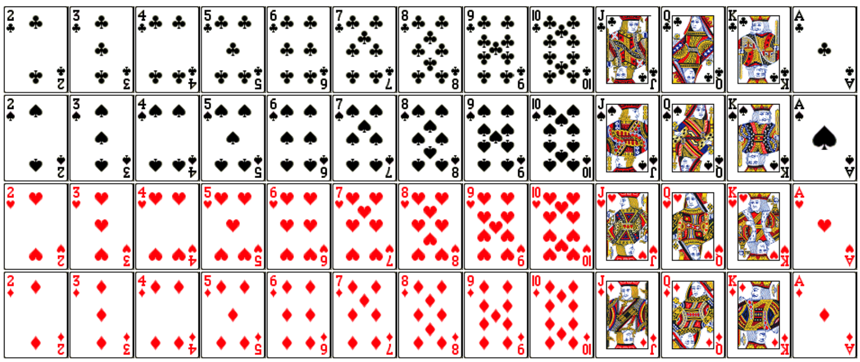
b) Sannsynet for at ein gut *ikke* blir trekt er

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\ &= 1 - \frac{13}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Merk: At ein gut *ikkje* blir trekt er det same som at ei jente blir trukke.

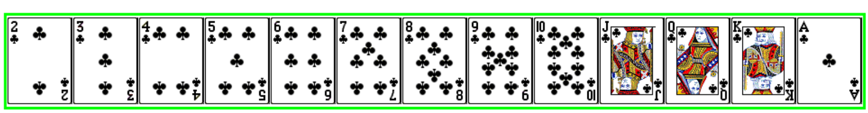
5.2.3 Felles utfall

Nokon gongar er det slik at to hendingar kan ha *felles utfall*. La oss sjå på ein vanleg kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typane spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av sorten knekt, dame, kong eller ess kallast *honnørkort*.

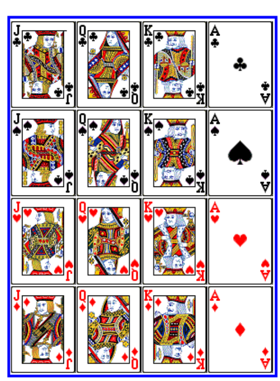


Tenk at vi trekk opp eit kort frå ein blanda kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynet for 'å trekke kløverkort *eller* honnørkort'. Vi startar med å telle opp dei gunstige utfalla for kløverkort, og finn at antalet er 13.

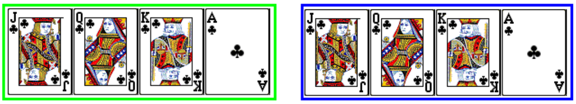
Eit kort som kløver kong er eit kløverkort, men det er også eit honnørkort, og derfor er det begge deler; *både* kløverkort *og* honnørkor.



Etterpå tell vi opp gunstige utfall for honnørkort, og finn at antalet er 16.

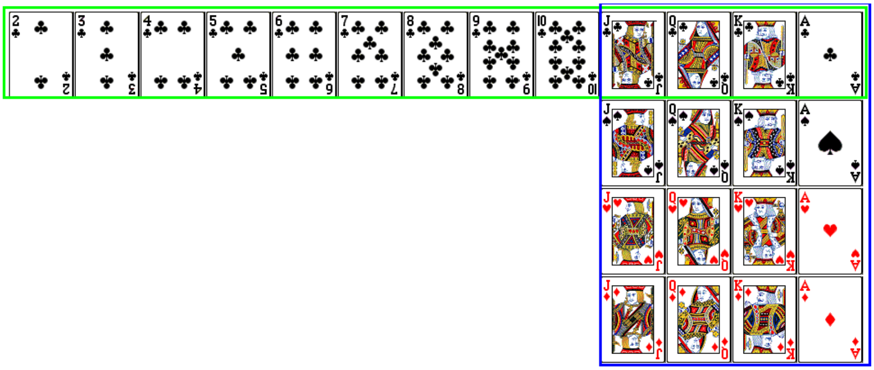


Til saman har vi telt $13 + 16 = 29$ gunstige utfall, men no støter vi på eit problem. For da vi fann alle kløverkort, telte vi blant anna kløver knekt, dame, kong og ess. Desse fire korta telte vi også da vi fann alle honnørkort, noko som betyr at vi har telt dei same korta to gongar!



Det finst no for eksempel ikkje to kløver ess i ein kortstokk, så skal vi rekne ut kvor mange kort som oppfyller kravet om å vere kløver *eller* honnør, så må vi trekke ifrå antalet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La *K* vere hendinga 'å trekke eit kløverkort' og *H* være hendinga 'å trekke eit honnørkort'. Sidan det er 25 kort som er kløverkort *eller* honnørkort av i alt 52 kort, har vi at

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Sidan vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi vidare at

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er *både* kløver *og* honnørkort, dette skriv vi som

Symbolet $\cap$ kallast *snitt*.

$$K \cap H = 4$$

Vi seier da at *K* og *H* har 4 *felles utfall*. Vidare er

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

No som vi har funne $P(K), P(H)$ og $P(K \cup H)$ kan vi igjen finne $P(K \cap H)$ på følgande måte:

$$
\begin{aligned}
P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\
&= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\
&= \frac{25}{52}
\end{aligned}
$$

5.6 Hendingar med felles utfall

For to hendingar A og B er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Merk

Viss ein anvender regel 5.6 på to hendingar uten felles utfall, ender ein opp med regel 5.3.

Eksempel

I ein klasse på 20 personar spelar 7 personar fotball og 10 personar spelar handball. Av desse er det 4 som spelar både fotball og handball. Om ein trekk ut éin person frå klassen, kva er sannsynet for at denne personen spelar fotball *eller* handball?

Svar

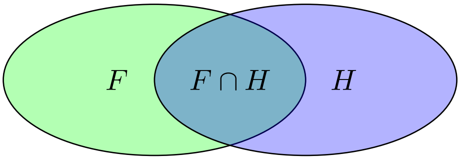
Vi lar F være hendinga 'spelar fotball' og H vere hendinga 'spelar handball'.

- Sannsynet for at ein person spelar fotball er
$$P(F) = \frac{7}{20}$$
- Sannsynet for at ein person spelar handball er
$$P(H) = \frac{10}{20}$$
- Sannsynet for at ein person spelar *både* fotball og handball er
$$P(F \cap H) = \frac{4}{20}$$

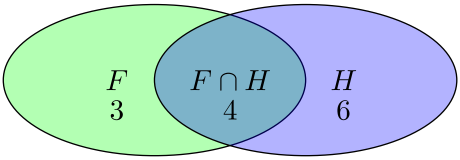
Sannsynet for at ein person spelar fotball *eller* handball er derfor
$$\begin{aligned} P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

5.2.4 Venndiagram

Målet med eit venndiagram er å lage ein figur som illustrerer antalet av dei *særskilde* utfalla og dei *felles* utfalla. La oss bruke eksempelet på side 107 til å lage ein slik figur. For klassen der nokon spelar fotball, nokon handball og nokon begge deler, kan vi lage eit venndiagram som vist under.



Den grøne ellipsa[1] representerer dei som spelar fotball (F) og den blå dei som spelar handball (H). Da nokre spelar *begge* sportane ($F \cap H$), har vi teikna ellipsane litt over i kvarandre. Videre veit vi at 7 spelar fotball, 10 spelar handball og 4 av disse gjer *begge* deler. Dette illustrerast slik:



Diagrammet fortel no at 3 personar spelar *berre* fotball og 6 spelar *berre* handball. I tilleg spelar 4 personar *både* fotball og handball. (Til saman er det derfor 7 som spelar fotball og 10 som spelar handball.)

[1] Ei ellipse er ein "strekt" sirkel.

Eksempel 1

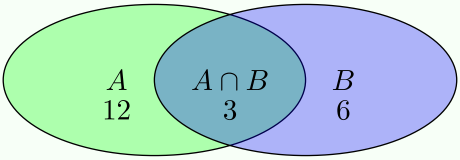
I en skuleklasse er det 31 elevar. I denne klassen er det 15 elevar som tek buss til skulen og 9 elever som ter båt. Av desse er det 3 stykker som ter både buss og båt.

a) Sett opp eit venndiagram som illustrerer gitt informasjon.

b) Éin person trekkast tilfeldig ut av klassen. Kva er sannsynet for at denne personen tar buss *eller* båt til skulen?

Svar

a) Sidan 3 elevar tek *både* buss og båt, er det $15 - 3 = 12$ som *berre* tek buss og $9 - 3 = 6$ som *berre* tek båt. Vi let A bety 'tar buss' og B bety 'tar båt', venndiagrammet vårt blir da sjåande slik ut:



b) Sannsynet for at ein person tek buss *eller* båt kan vi skrive som $P(A \cup B)$. Sidan 15 elevar tek buss, 9 ter båt og 3 tek begge deler, er det i alt $15 + 9 - 3 = 21$ elever som tek buss *eller* båt. Da det er 31 elevar i alt å velge mellom, er

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

Eksempel 2

Om ein klasse med 29 elevar veit vi følgande:

- 16 elevar speler fotball
- 12 elevar speler handball
- 7 elevar speler volleyball
- 5 elevar speler både fotball og handball, men ikkje volleyball
- 3 elevar speler både fotball og volleyball, men ikkje handball
- 2 elevar speler både handball og volleyball, men ikkje fotball.
- 1 elev speler alle tre sportane.

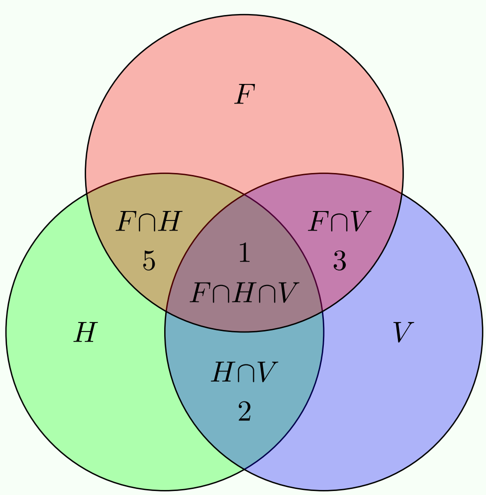
a) Sett opp eit venndiagram som skildrar fordelinga av dei tre sportane i klassen.

b) Én person blir tilfeldig trekt ut av klassen. Kva er sannsynet for at denne personen speler enten fotball, handball eller volleyball?

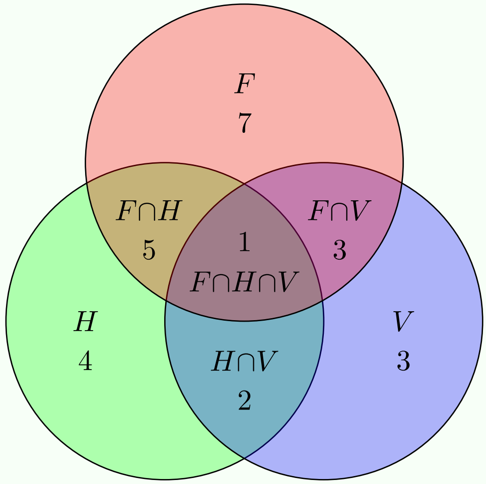
c) Personen som blir trekt ut viser seg å spele fotball. Kva er sjansen for at denne personen også speler handball?

Svar

a) La F bety 'speler fotball', H bety 'speler handball' og V bety 'speler volleyball'. Når vi skal lage eit venndiagram, er det lurt å skrive inn dei felles utfalla først. Ut ifrå fjerde til sjuande punkt kan vi teikne dette:



Da ser vi videre at $16 - 5 - 1 - 3 = 7$ elevar speler *berre* fotball, $12 - 5 - 1 - 2 = 4$ speler *berre* handball og $9 - 3 - 1 - 2 = 3$ speler *berre* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er $8 + 5 + 1 + 3 + 4 + 2 + 3 = 26$ unike elevar som speler éin eller fleire av sportene. Sjansen for å trekke ein av desse 26 i ein klasse med 29 elever er $\frac{17}{29}$.

c) Vi les av diagrammet at av dei totalt 16 som speler fotball, er det $5 + 1 = 6$ som også speler handball. Sjansen for at personen som er trekt ut speler handball er derfor $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

5.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendingar, kan vi også sette opp ein *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Sei at det på ein skule med 300 elevar blir delt ut mjølk og epler til dei elevane som ønsker det i lunsjen. Sei vidare at 220 av elevane får mjølk, mens 250 får eple. Av desse er det 180 som får både mjølk og eple. Viss vi lar M bety *får mjølk* og E bety *får eple*, vil krysstabellen vår først sjå slik ut:

	M	$\bar{M}$	sum
E			
$\bar{E}$			
sum			

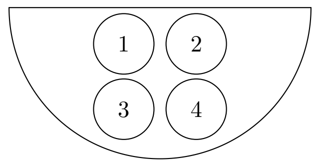
Så fyller vi inn tabellen ut ifrå infoen vi har:

- får *både* mjølk og eple: $M \cap E = 180$
- får mjølk, men ikkje eple: $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$
- får eple, men ikkje mjølk: $E \cap M = 250 - 180 = 70$
- får verken mjølk eller eple: $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

	M	$\bar{M}$	sum
E	180	70	250
$\bar{E}$	40	10	50
sum	220	80	300

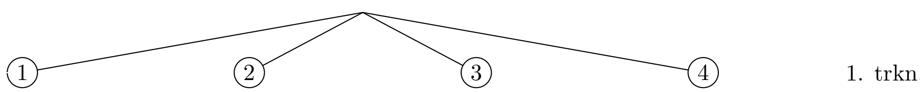
5.3 Gjentatte trekk

5.3.1 Permutasjoner

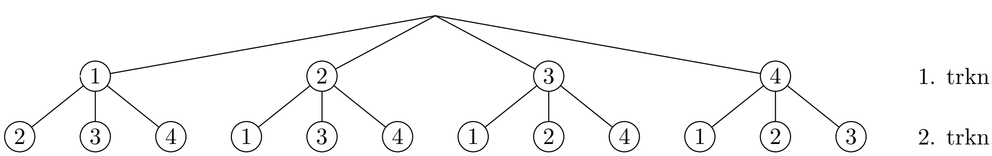


Sei vi har en bolle med fire kuler som er nummererte frå 1 til 4. I eit forsøk trekk vi opp ei og ei kule fram til vi har trekt opp tre kuler. Viss vi for eksempel først trekk kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi *permutasjonen* $2\ 4\ 3$.

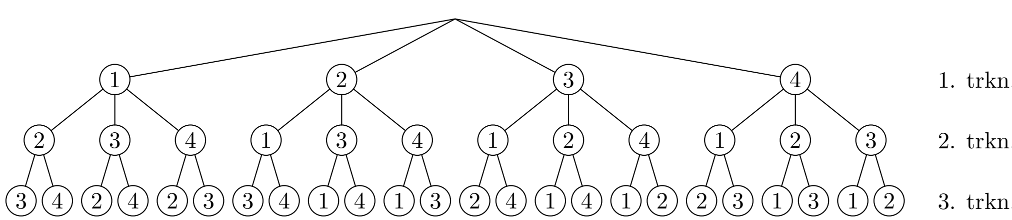
Kor mange forskjellige permutasjoner kan vi få? La oss lage ein figur som hjelper oss med å finne svaret. Ved første trekning er det 4 kuler å plukke av, vi kan derfor seie at vi har 4 vegar å gå. Enten trekk vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



Kula vi trekk opp, legg vi ut av bollen, og trekk så for andre gang. For kvar av de 4 vegane vi kunne gå i første trekning får vi no 3 nye vegar å gå. Altså har vi nå $3 \cdot 4 = 12$ vegar vi kan gå.



Den andre kula vi trekk opp legg vi også ut av bollen, så for kvar av dei 12 vegane fra 2. trekning, får vi no to nye moglege vegar å gå. Totalt antall vegar (permutasjoner) blir derfor $12 \cdot 2 = 24$.



Denne utrekninga kunne vi også ha skrive slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

5.7 Produktregelen for permutasjonar

Når vi gjer fleire trekningar etter kvarandre, finn vi alle moglege permutasjonar ved å gonge saman antall moglege utfall i kvar trekning.

Eksempel

Av dei 29 bokstavene i alfabetet ønsker vi å lage eit ord som består av 3 bokstavar. Vi godkjenner ord som ikkje har noko tyding, men ein bokstav kan berre brukast éin gang i ordet.

Kor mange ord kan vi lage?

Svar

Først har vi 29 bokstavar å trekke fra, deretter 28 bokstavar, og til slutt 27 bokstavar. Dermed er antall permutasjonar gitt som

$$\underbrace{29}_{\substack{\text{moglege utfall} \\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{28}_{\substack{\text{moglege utfall} \\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{27}_{\substack{\text{moglege utfall} \\ \text{3. trekning}}} = 21\,924$$

Vi kan altså lage 21 924 forskjellige ord.

Eksempel 2

Vi kastar om krone eller mynt fire gongar etter kvarandre. Kor mange permutasjoner har vi da?

Svar

Kvar gong vi kaster om krone eller mynt, har vi to moglege utfall. Antall permutasjoner er derfor gitt som

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Kombinasjonar

I dagligtale blir ofte ordet *kombinasjonar* brukt i staden for permutasjonar, men innan sannsynsrekning har kombinasjonar og permutasjonar forskjellig tyding. Den store forskjellen er at permutasjonar tar hensyn til rekkefølge, mens kombinasjonar ikkje gjer det.

Sei vi ønsker å danne eit ord med to bokstaver ved hjelp av med bokstavene A, B og C, og at vi godtar gjenbruk av bokstav. Da har vi 9 moglege permutasjonar:

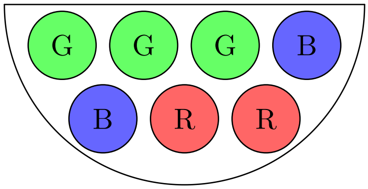
$$AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA, CB$$

Kombinasjonar derimot viser til ei unik samansetting når rekkefølge ikkje blir teke hensyn til, for eksempel er AB og BA den samme kombinasjonen. I dette tilfellet har vi altså 6 kombinasjonar

$$AA, AB, AC, BB, BC, CC$$

5.3.2 Sannsyn ved gjentatte trekk

Tenk at vi har ein med bolle sju kuler. Tre av dei er grøne, to er blå og to er raude. Sei at vi tar opp først éi kule av bollen, og deretter éi til. Kva er sannsynet for at vi trekker opp to grøne kuler?



Viss vi lar G bety 'å trekke ei grøn kule', kan vi skrive dette sannsynet som $P(GG)$. For å komme fram til eit svar, startar vi med å finne ut kor mange *gunstige* permutasjoner vi har. Sidan vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi $3 \cdot 2 = 6$ gunstige permutasjonar. Totalt velg vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antal *moglege* permutasjonar er derfor $7 \cdot 6 = 42$. Sannsynet for å få to grøne kuler blir da

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \tag{5.1}$$

La oss også finne sannsynet for å få ei grøn kule for kvar trekning isolert sett. I første trekning har vi 3 grøne av i alt 7 kuler, altså er

$$P(G) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning blir det tatt for gitt at ei grønn kule er plukka opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grøne:

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Symbolet $|$ betyr *gitt at ... har skjedd*. $P(G|G)$ er derfor en forkortelse for 'sannsynet for å trekke en grøn kule, *gitt* at ei grøn kule er trukke'.

Viss vi gongar sannsynet fra første trekning med sannsynet frå andre trekning, blir reknestykket det same som i likning (5.1):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

5.8 Sannsyn ved gjentatte trekk

Sannsynet for at A vil skje, *gitt* at B har skjedd, skrivast som $P(A|B)$.

Sannsynet for at A skjer først, deretter B, deretter C, og så vidare (...) er

$$P(ABC...) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot ...$$

Eksempel

I ein bolle ligg to blå og to raude kuler. Vi trekk éi og éi kule opp av bollen, fram til vi har henta opp tre kuler. Kva er sannsynet for at vi først trekk ei blå, deretter in raud, og til slutt ei blå kule?

Svar

Vi lar B bety 'å trekke blå kule' og R bety 'å trekke raud kule'. Sannsynet for først ei blå, så ei raud, og så ei blå kule, skriv vi da som $P(BRB)$.

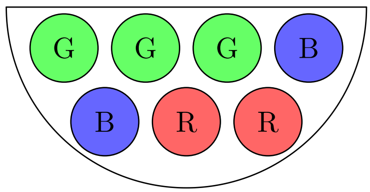
- Sannsynet for *B* i første trekning er $P(B) = \frac{2}{4}$.
- Sannsynet for *R* i andre trekning, *gitt B* i første er
$$P(R|B) = \frac{2}{3}$$
- Sannsynet for *B* i tredje trekning, *gitt B* i første og *R* i andre er
$$P(B|RB) = \frac{1}{2}$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned}
P(BRB) &= P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\
&= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{24} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

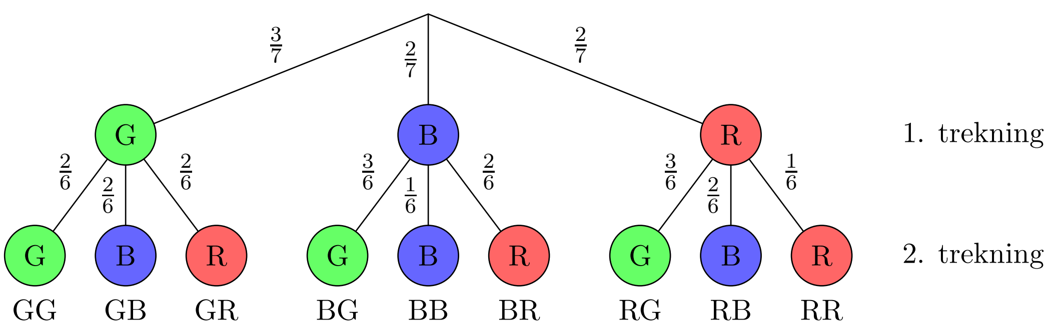
5.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte regel 5.8 for å lage ei hjelpeteikning når vi har å gjere med gjentatte trekk. Teikninga vi her skal ende opp med kallast eit *valgtre*. Vi teikner da ei lignende figur som vi gjor i delkapittel 5.3, men langs alle vegar skriv vi på sannsynet for utfallet vegen leder oss til.



La oss igjen sjå på bollen med de sju kulene. Trekk av grøn, blå eller raud kule tegnsett vi høvesvis med bokstavene *G*, *B* og *R*.

Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule $\frac{3}{7}$, derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til *G*. Gitt at vi har trekt en grønn kule, er sannsynet for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik $\frac{2}{6}$. Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra *G* til *G*. Og sånn fortset vi til vi har ført opp alle sannsyna til kvar veg. For å få ei rask oversikt over dei forskjellige permutasjonane vegane fører til, kan det være lurt å skrive opp desse under kvar ende av treet.



La oss no bruke valgtreet over til å finne sannsynet for å trekke éi grøn og éni blå kule. *GB* og *BG* er da dei gunstige permutasjonane. Ved å gonge saman sannsyna langs vegen til *GB*, finn vi at

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne *P(BG)*:

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$

Sannsynet for at '*GB eller BG*' inntreff er (sjå regel 5.6):

$$\begin{aligned} P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\ &= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\ &= \frac{12}{42} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

5.9 Permutasjonar på eit valgtre

For å finne sannsynet til ein permutasjon på eit valgtre, gongar vi saman sannsyna langs vegen vi må følgje for å kome til permutasjonen.

Eksempel

I ein bolle med 10 kuler er tre kuler grøne, to er blå og fem er raude. Du trekk to kuler ut av bollen. La G, B og R høvesvis bety 'å trekke ei blå kule', 'å trekke ei grøn kule' og 'å trekke ei raud kule'.

a) Teikn eit valgtre som skisserer permutasjonane av B, G og R du kan få.

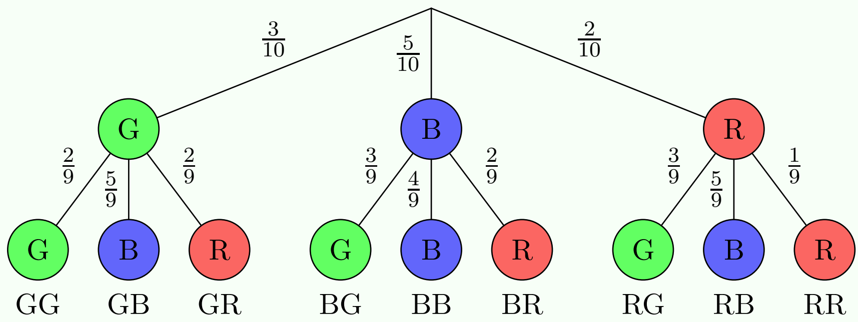
b) Kva er sannsynet for at du trekk to raude kuler?

c) Kva er sannsynet for at du trekk éi blå og éi grøn kule?

d) Kva er sannsynet for at du trekk *minst* éi blå *eller minst* éi grønn kule?

Svar

a)



b) Av valgtreet vårt ser vi at

$$\begin{aligned} P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{90} \\ &= \frac{1}{45} \end{aligned}$$

c) Både permutasjonen GB og BG gir oss éi blå og éi grønn kule. Sannsynet for kvar av dei er

$$\begin{aligned} P(GB) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \\ &= \frac{15}{90} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(BG) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Sannsynet for GB *eller* BG er summen av $P(GB)$ og $P(BG)$:

$$\begin{aligned} P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d) For å svare på denne oppgåva kan vi sjølvsagt legge saman sannsynet for permutasjonane GG, GB, GR, BG, BB, BR, RG og RB, men vi sparer oss veldig mykje arbeid viss vi merker oss dette: Å få *minst* én blå *eller minst* én grønn kule er det motsatte av å *berre* få raude kuler. Sannsynet for dette, å få to raude kuler, fant vi i oppgave b). Av regel 5.5 har vi at

$$\begin{aligned} P(\bar{R}) &= 1 - P(R) \\ &= 1 - \frac{1}{45} \\ &= \frac{45}{45} - \frac{1}{45} \\ &= \frac{44}{45} \end{aligned}$$

Sannsynet for å få *minst* én blå *eller minst* éi grøn kule er altså $\frac{44}{45}$.

Oppgaver for kapittel 5

5.2.1

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort?

b) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort eller et sparkort?

c) Hva er sannsynligheten for at kortet ikke er er kløverkort? Bruk to forskjellige regnemåter for å finne svaret.

5.2.2

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort?

b) Hva er sannsynligheten for at du trekker et hjerterkort?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort eller et hjerterkort?

d) Hva er sannsynligheten for at kortet du trekker hverken er et 8-kort eller et hjerterkort?

5.2.3 (1PV21D2)

Scott har 6 hvite og 10 røde drops i en krukke. Han trekker tilfeldig to drops.

Vis at det er like stor sannsynlighet for at han trekker to drops av samme farge, som at han trekker to drops med ulik farge.

5.2.4 (1PV20D1)

Maria finner en gammel hengelås. Koden på hengelåsen består av tre tall. Hvert tall kan velges blant de hele tallene fra og med 0 til og med 9.

Bestem sannsynligheten for at koden begynner med 2 4 eller 4 2

5.2.5 (1PV17D1)

Ved en skole leser 80 % av elevene aviser på nett, 50% les erpapiraviser, og 2% leser ikke aviser.

a) Systematiser opplysningene gitt i teksten over i et venndiagram eller i en krysstabell.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen leser både aviser på nett og papiraviser.

En elev ved skolen leser aviser på nett.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven ikke leser papiraviser.

Kapittel 6

Ligninger, formler og funksjoner

6.1 Å finne størrelser

Ligninger, formler og funksjoner er begrep som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. De fleste regelboksene i denne boka inneholder en formel. For eksempel inneholder regel 3.13 en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, er det bare snakk om å sette disse inn i formelen for å finne 'målestokk'. Slik kan vi si at vi da finner 'målestokk' *direkte*. Har man gjort oppgaver tilknytt de tidlegere kapitlene, har man allerede øvd rikelig på det å finne størrelser *direkte*.

I denne seksjonen skal vi se på å det å finne størrelser *indirekte*. Med det mener vi at minst én av følgende gjelder:

- Vi må løse en likning for å finne den ukjente størrelsen.
- Vi må ut ifra en situasjonsbeskrivelse sette opp en formel som inneholder den ukjente størrelsen.

Merk

I denne seksjonen er det bare gitt eksempler, og ingen regler. Det er fordi vi bruker regler vi har sett på i kapitlene om ligninger og funksjoner i MB. Forskjellen er bare at vi her ser på størrelser med benevning.

Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
- I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.

a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.

b) Hva koster en taxitur på 17 km?

Svar

a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

Eksempel 2

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løs likningen.

Svar

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

$$\text{penger allerede skaffet} + \text{antall lodd} \cdot \text{penger per lodd} = \text{prisen på turen}$$

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatter[1] *antall lodd* med x, og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$
\begin{aligned}
25x &= 11\,000 - 2\,000 \\
25x &= 9\,000 \\
\frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\
x &= 360
\end{aligned}
$$

[1] Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 3

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U, og lag en formel for U.

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter P med 20, og får

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{50\,000}{20} \\
&= 2\,500
\end{aligned}
$$

Utgiften per person er altså $2\,500\,\mathrm{kr}$.

Eksempel 4

Et sportsklubb planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

  Klassen betaler 10 000 kr uansett, og $10\,\mathrm{kr}$ per km.

- **Busselskap 2**

  Klassen betaler 4 000 kr uansett, og $30\,\mathrm{kr}$ per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

Svar

Vi innfører følgende variabler:

- $x =$ antall kilometer kjørt
- $f(x) =$ pris for Busselskap 1
- $g(x) =$ pris for Busselskap 2

Da er

$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Busselskapene har samme pris når

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\ 4\,000 &= 20x \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis sportsklubben skal kjøre $200\,\mathrm{km}$.

Eksempel 5

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for R.

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

Svar

a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\
I \cdot R &= U \\
\frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\
R &= \frac{U}{I}
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$\begin{aligned}
R &= \frac{U}{I} \\
&= \frac{12}{2} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 6

Gitt en temperatur T_C målt i antall grader Celsius (°C). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit (°F) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for T_C.

b) Hvis en temperatur er målt til 59°F, hva er da temperaturen målt i °C?

Svar

a) Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at

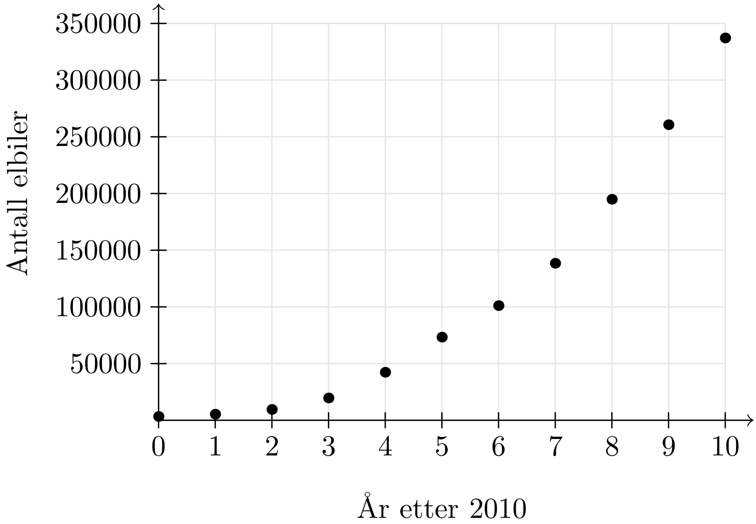
$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

59° F er altså det samme som 15° C.

6.2 Regresjon

Å forsøke å beskrive hvordan noe vil *utvikle* seg er en av de viktigste anvendelsene for funksjoner. Hvis vi har et datasett som beskriver tidligere hendelser, kan vi prøve å finne den funksjonen som passer best til datasettet. Dette kalles å utføre **regresjon**.

Grafen under viser[1] antall elbiler i Norge etter år 2010.



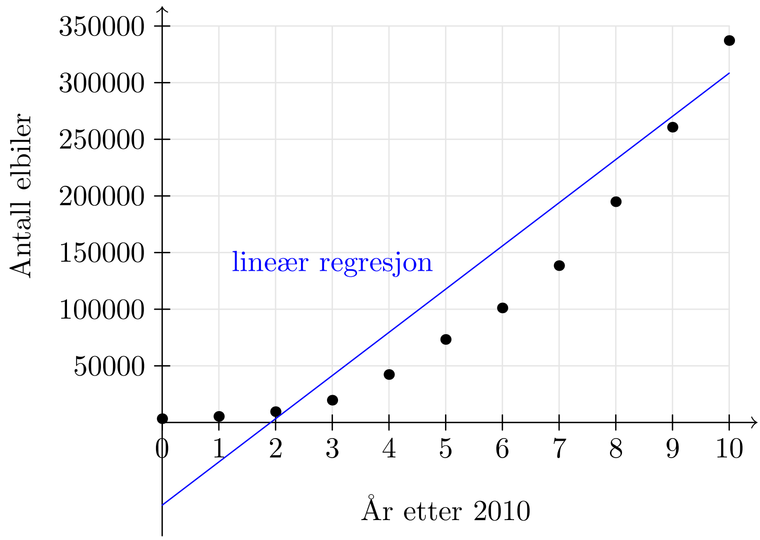
Vi ønsker nå å finne en funksjon som

(i) så godt som mulig skjærer hvert punkt.

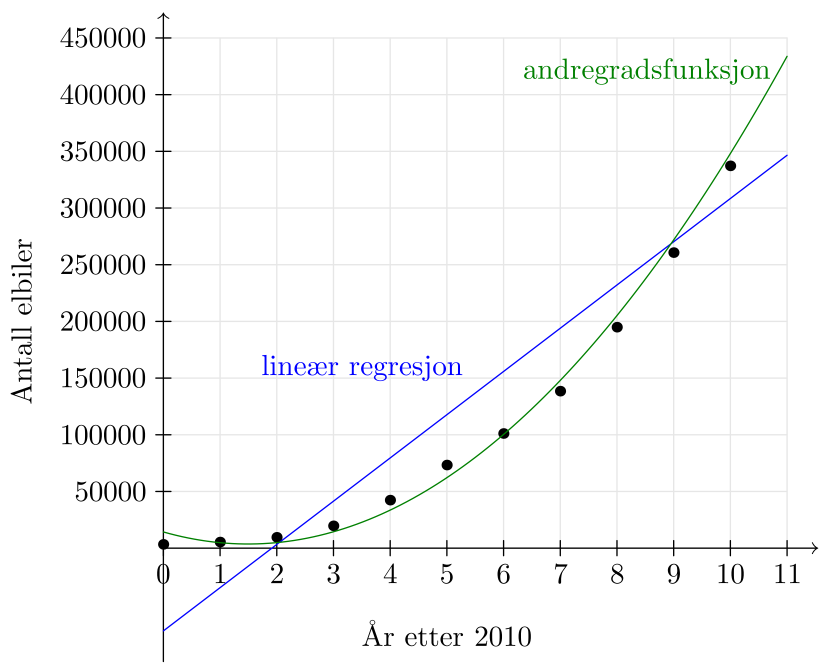
(ii) har en graf som passer til situasjonen vi modellerer.

Hvis vi utfører regresjon med en lineær funksjon i GeoGebra (se side **??**), får vi denne grafen:

[1]Tall hentet fra elbil.no



Utfører vi regresjon også med en andregradsfunksjon, får vi følgende resultat:

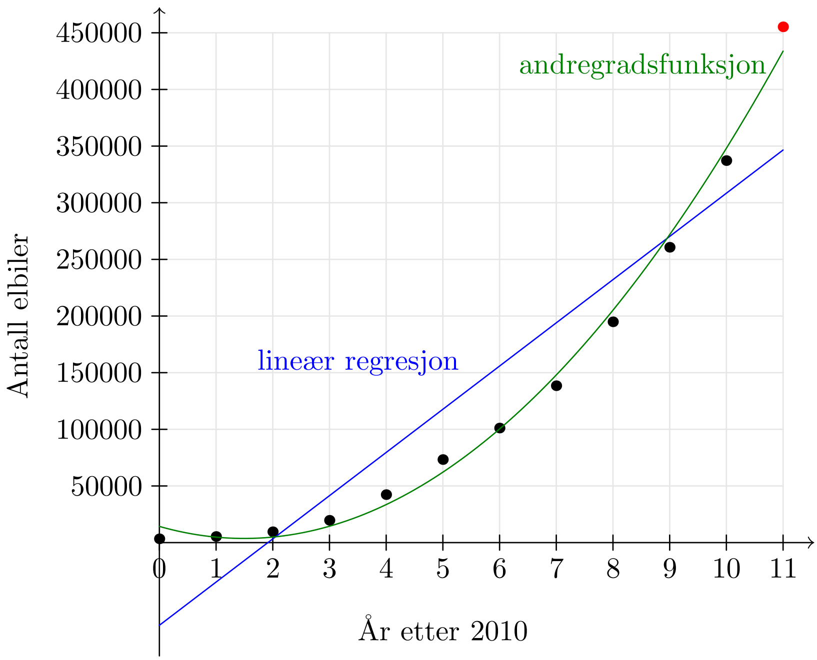


I figuren over kan vi merke oss at

- begge modellene (funksjonene) "oppfører" seg feilaktig i starten. Den lineære funksjonen starter med et negativt antall biler, mens den kvadratiske funksjonen starter med at antallet synker fra år 0 til år 1.

- Grafen til den kvadratiske passer punktene mye bedre enn grafen til den lineære funksjonen.

Hvis vi hadde antatt at den lineære funksjonen ga en god beskrivelse av antallet elbiler fremover i tid, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var ca. 350 000. Hadde vi i stedet antatt det samme om den kvadratiske funksjonen, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var litt over 425 000. Fasit er at antall elbiler i 2021 var 455 271.



Oppgaver for kapittel 6

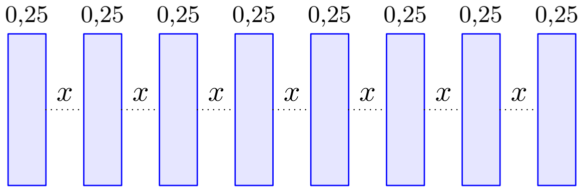
6.1.1

Ola og Kari tilbyr et kurs i svømming. For kurset tjener de til sammen 12 000 kr. Ola er assistenten til Kari, og Kari skal ha dobbelt så mye av inntekten som Ola.

Hvor mye tjener Ola og hvor mye tjener Kari for kurset?

6.1.2

Du skal snekre et gjerde som er 3,4 m langt. For å lage gjerdet skal du bruke 8 planker som er 0,25 m breie, som vist i figuren under. Det skal være den samme avstanden mellom alle plankene.



a) Sett opp en ligning ut ifra beskrivelsen over. La x være avstanden mellom plankene. b) Løs ligningen fra a).

6.1.3

a) Skriv dette som en ligning: "Volumet til en firkantet prisme med bredde 4, lengde 7 og høgde x er 252."

b) Løs ligningen fra oppgave a).

6.1.4

a) Skriv dette som en ligning: "25% av x er lik 845".

b) Løs ligningen fra oppgave a).

6.1.5

Det gis 360 kr rabatt på en vare, og dette tilsvarer 20% av originalprisen.

a) La x være originalprisen på varen. Sett opp en ligning som beskriver informasjonen gitt over.

b) Finn originalprisen til varen.

6.1.6 (GV23D1)

Marco kjøpte et headset til 779 kr. Før rabatten på 200 kroner, kostet headsettet 979 kroner.

Omtrent hvor mange prosent rabatt fikk Marco?

6.1.7 (GV2023D1)

To slikkepinner og to sjokolader koster 32 kr.
Fire slikkepinner og to sjokolader koster 44 kr.

Hvor mye koster en slikkepinne?

6.1.8 (E22)

Arne har 120 kr, mens de fem søsknene hans har 30 kr hver. Arne og søsknene skal fordele pengene slik at alle har like mye. Hvor mange kroner må Arne gi til hver av søsknene sine?

6.1.9

Effekten P (målt i Watt) i en elektrisk krets er gitt ved formelen:

$$P = R \cdot I^2$$

hvor R er motstanden og I er strømmen i kretsen.

a) Hvis $R = 5\,\Omega$ og $I = 10\,A$, hva er da effekten?

b) Skriv om formelen til en formel for I^2.

6.1.10

Skriv om arealformelen for et trapes (se MB, s. 143) til en formel for høgden.

6.1.11

På klikk.no finner man disse formelene for å regne ut hvor høy et barn kommer til å bli:

For jenter:

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Trekk fra 13 cm
3. Del med 2.

For gutter:

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Legg til $13\,\mathrm{cm}$
3. Del med 2.

Kall barnets (fremtidige) høyde for B, mors høyde for M, og fars høde for F.

a) Lag en formel for B når barnet er ei jente.

b) Lag en formel for B når barnet er en gutt.

c) Gjør om formelen fra a) til en formel for F.

d) Ei jente har en mor som er 165 cm. Formelen fra oppgave a) sier at jenta vil bli 171 cm høy. Hvor høy er faren til jenta?

6.1.12

I 2005 kostet en sykkel 1 500 kr, mens den i 2014 ville kostet 1 784 kr om prisen hadde fulgt konsumprisindeksen.

I 2005 var KPI 82,3, hva var den i 2014?

6.1.13

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 3x - 7$$

$$g(x) = x + 5$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

6.1.14

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = -2x - 3$$

$$g(x) = 4x + 9$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

6.1.15

Si at du kan velge mellom disse to månedsabonnementene for mobil:

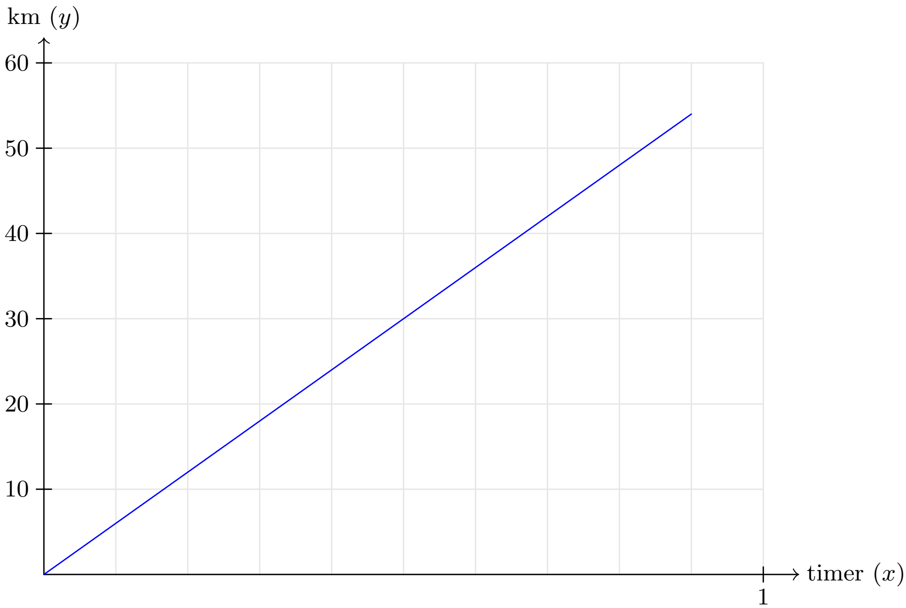
- **Abonnement A**
  300 kr i fast pris og 50 kr per GB data brukt.
- **Abonnement B**
  Fast pris på 500 kr og 10 kr per GB data brukt.

a) For hvilket databruk vil abonnementene koste det samme?

b) Hvis du bruker ca. 7 GB data i måneden, hvilket abonnement bør du da velge?

6.1.16 (GV23D1)

Jenny kjørte fra hjemmet sitt til hytta. Nedenfor er en grafisk framstilling av sammenhengen mellom tiden (timer) og strekningen (km) for turen til Jenny.



Bestem stigningstallet til funksjonen, og forklar sammenhengen mellom stigningstallet og Jennys gjennomsnittsfart.

6.1.17 (1PV23D1)
Tabellen nedenfor viser høgda til Klara noen år fra hun var 4 år, til hun var 10 år.

Alder (år)	4	5	8	10
Høgde (cm)	100	107	128	142

a) Lag en modell som viser sammenhengen mellom høgda og alderen til Klara basert på tallene i tabellen.

b) Hvor høg vil Klara være når hun fyller 19 år, ifølge modellen?

Klara var 50 cm høg då ho blei fødd.

c) Gjør beregninger og vurder gyldighetsområdet[1] til modellen du fant i oppgave a).

[1] Se

Vedlegg A: funk

for ordbeskrivelse

6.1.18 (1PV22D1)
Siri har et stykke papp og vil lage en eske. Hun har satt opp en modell som viser volumet $V(x)$ cm^3 av esken dersom hun lager den x cm høy

$$4x^3 - 100x^2 + 600x \quad , \quad 0 < x < 10$$

a) Hvor stort volum får esken dersom Siri lager den 5 cm høy?

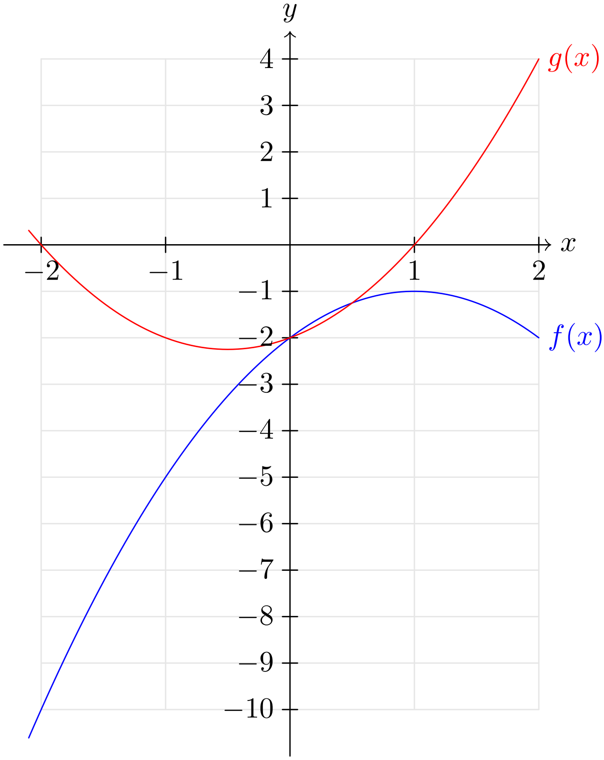
b) Hva finner Siri ut dersom hun løser ligningen $V(x) = 500$?

6.1.19 (1PV22D1)
Et rektangel er tre ganger så langt som det er bredt. Arealet av rektangelet er 432 cm^2 .

Hvor bredt er rektangelet?

6.1.20

I denne oppgaven kan du anta at punkt på grafen som *ser* ut til å ha heltalls koordinater har det.



a) Finn koordinatene til toppunktet til $f(x)$.

b) Finn koordinatene til minst ett av skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$.

c) Finn nullpunktene til $g(x)$.

6.1.21

Løs ligningssettet

$$3b - 2a = 15$$

$$5a - b = 8$$

6.1.22

Løs ligningssettet

$$8x - 3y = 4x - 3$$
$$x + 8y = y - 2x$$

6.1.23 (GEV22)

To sjokolader og én vannflaske koster 40 kr.
Fire sjokolader og tre vannflasker koster 98 kr.

Gruble 5

Orinigalprisen på en vare er først senket med 20%, og så er den nye prisen senket med 50%. Etter dette koster varen 400 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

Gruble 6

La a og b være de to midterste verdiene i et datasett med partalls antall verdier. Vis at metoden for å finne medianen slik den er beskrevet i regel **??** er likegyldig med metoden som er beskrevet i oppgåve 2.3.11.

Kapittel 7

Digitale verktøy

7.1 Programmering

Programmering handlar om å gi instruksar til ei datamaskin. Slik kan datamaskiner utføre utrekningar, framstille bilder, animasjonar, spel, og mykje meir. For å gi instrukser bruker vi forskjellige *programmeringsspråk*, og det er eit hav av forskjellige språk å velge i. I norsk skule er dei mest brukte språka Scratch, Python og JavaScript[2]. Da det fins eit stort utvalg av gratis ressursar for å lære seg programmeringsspråk, vil vi i denne boka nøye oss[3] med å referere til desse:

- code.org (koding generelt)
- microbit.org (koding med micro:bit)
- espensklasserom.co (Koding i Sracht, micro:bit m.m.)
- kidsakoder.no (koding i Scratch, micro:bit, Python m.m)

Har du allerede nådd et høyt nivå som programmerer, og føler du har god kontroll på data-typar, funksjonar, klassar o.l.? Da anbefalast språket Rust. Mange held dette for å være arvtakaren til C++ og liknande språk.

[2]Rett nok i blokkbasert utgave ved koding av micro:bit.

[3]Enn så lenge. Programmering er eit forholdsvis nytt tema i norsk skole, forslag om kva ei lærebok bør innehalde om programmering blir motteke med glede på mail `sindre.heggen@gmail.com`.

7.2 Introduksjon til Python

Python er et programmeringsspråk for **tekstbasert koding**. Dette innebærer at handlingene vi ønsker utført, må kodes som tekst. Filen som inneholder hele koden kaller vi et **skript**. Det synlige resultatet av å kjøre skriptet, kaller vi **utdata**[1]. Det er mange måter å få kjørt skriptet sitt på, blant annet kan man bruke en online compiler som programmiz.com.

7.2.1 Objekt, type, funksjon og uttrykk

Vårt første skript består av bare én kodelinje:

```python
print("Hello world!")
```

Utdata

```
Hello world!
```

I kommende avsnitt vil begrepene **objekt**, **type**, **funksjon** og **uttrykk** stadig dukke opp.

- Det aller meste i Python er objekter. I skriptet over er både `print()` og `"Hello world"` objekter.
- Objekter vil være av forskjellige typer. `print()` er av typen `function`, mens `"Hello world"` er av typen `str`[2]. Hvilke handlinger som kan utføres med forskjellige objekter avhenger av hvilke typer de er.
- Funksjoner kan ta imot **argumenter**, for så å utføre handlinger. I skriptet over tar `print()`-funksjonen imot argumentet `"Hello world"`, og printer teksten til utdata.
- Uttrykk har sterke likehetstrekk med funksjoner, men tar ikke imot argumenter.

[1]**Output** på engelsk.

[2]'str' er en forkortelse for det engelske ordet 'string'.

Tilvising og utregning

Tekst og tall kan vi se på som noen av de minste byggesteinene (objektene). Python har én type for tekst, og to typer for reelle tall:

str	tekst
int	heltall
float	desimaltall

Det er som regel nyttig å gi objektene våre navn. Dette gjør vi ved å skrive navnet etterfulgt av = og objektet. **Kommentarer** er tekst som ikke blir behandlet som kode. Kommentarer kan vi skrive ved å starte setningen med #.

```
hei = "hei" # hei er av typen str. Legg merke til "
              ved start og slutt
a = 3 # a er av typen int
b = 2.8 # b er av typen float
c = 2. # c=2.0, og er av typen float
d = .7 # d=0.7, og er av typen float
e = -5 # e er av typen int
f = -0.01 # f er av typen float
```

Med Python kan vi selvsagt utføre klassiske regneoperasjoner:

```
a = 5
b = 2

print("a+b = ", a+b);
print("a-b = ", a-b);
print ("a*b = " ,a*b);
print ("a/b = " ,a/b);
print("a**b = " ,a**b); # potens med grunntall a og
                          eksponent b
print ("a//b = ", a//b); # a/b rundet ned til nærmeste
                          heltall
print ("a%b = ", a%b); # resten til a//b
```

Utdata

```
a+b = 7
a-b = 3
a*b = 10
a/b = 2.5
a**b = 25
a//b = 2
a%b = 1
```

Funksjonene `str()`, `int()` og `float()` kan vi bruke til å gjøre om objekter til typene `int` eller `float`:

```
s = "2"
b = 3
c = 2.0

b_s = str(b) # b omgjort til str
c_s = str(c) # c omgjort til str
print(b_s+c_s)

s_i = int(s)
print(s_i*b)

s_f = float(s)
print(s_f*b)
```

Utdata

```
32.0
6
6.0
```

En viktig ting å være klar over er at = i Python *ikke* betyr det samme som $=$ i matematikk. Mens $=$ kan oversettes til "er lik", kan vi si at = kan oversettes til 'er'.

```
a = 5 # a ER nå 5
print(a)
a = a+1 # a ER nå det a VAR, + 1
print(a)
```

Utdata

```
5
6
```

At et objekt legger til seg selv og en annen verdi er så vanlig i programmering at Python har en egen operator for det:

```python
a = 5 # a ER nå 5
a+= 1 # Samme som å skrive a = a+1
print(a)
```

Utdata

```
5
6
```

Selv om datamaskiner er ekstremt raske til å utføre utregninger, har de en begrensning det er viktig å være klar over; avrundingsfeil. En av grunnene til dette er at datamaskiner bare kan bruke et visst antall desimaler for å representere tall. En annen grunn er at datamaskiner anvender totallssystemet. Det er mange verdier vi kan skrive eksakt i titallssystemet som ikke lar seg skrive eksakt i totallssystemet. For å bøte på dette kan vi bruke funksjonen `round()`:

```python
a = 8.3/10
print(a) # avrundingsfeil, da vi skulle hatt a = 0.83

a = round(a, 2) # runder av a til tall med to
    desimaler
print(a)
```

Utdata

```
0.8300000000000001
0.83
```

7.2.2 Egne funksjoner

Ved å bruke metoden `def` kan man lage sine egne funksjoner. En funksjon kan utføre handlinger, og den kan **returnere** (return på engelsk) ett eller flere objekt. Den kan også ta imot argumenter. Koden vi skriver inni en funksjon blir bare utført hvis vi **kaller** (call på engelsk) på funksjonen.

```python
# a er en funksjon som ikke tar noen argumenter.
# Legg merke til 'def' først og ':' til slutt.
# Kodelinjene som hører til funksjonen må stå med innrykk
def a():
  print("Hei, noen kalte visst på funksjon a?")


# b er en funksjon som tar argumentet 'test'
def b(tekst):
  print("Hei. Noen kalte på funksjon b. Argumentet som ble gitt var: ", tekst)

# c er er funksjon som tar argmunentene a og b
# c returnerer et objekt
def c(a, b):
  return a+b

b("Hello!") # vi kaller på b med argumentet "hello"

d = c(2,3) # Vi kaller på a med argumentene 2 og 3

print(d)

# merk at teksten gitt i a ikke blir printet, fordi vi ikke har kalt på a.
```

Utdata

```
Hei. Noen kalte på funksjon b. Argumentet som ble gitt var:
Hello!
5
```

7.2.3 Boolske verdier og vilkår

Verdiene `True` og `False` kalles **boolske verdier**. Disse vil være resultatet når vi sjekker om objekter er like eller ulike. For å sjekke dette har vi de **sammenlignende operatorene**:

operator	betydning
==	er lik
!=	er *ikke* lik
>	er større enn
>=	er større enn, eller lik
<	er mindre enn
<=	er mindre enn, eller lik

```
a = 5
b = 4

print(a == b)
print(a != b)
print(a > b)
print(a < b)
```

Utdata

```
False
True
True
False
```

I tillegg til de sammenlignende operatorene kan vi bruke de **logiske operatorene** `and`, `or` og `not`

```
a = 5
b = 4
c = 9

print(a == b and c > a)
print(a == b or c > a)
print(not a == b)
```

Utdata

```
False
True
True
```

Språkboksen

Sjekker som bruker de sammenlignende og de logiske operatorene, skal vi heretter kalle **vilkår**.

7.2.4 Uttrykkene `if`, `else` og `elif`

Når vi ønsker å utføre handlinger bare *hvis* et vilkår er sant (`True`), bruker vi uttrykket `if` foran vilkåret. Koden vi skriver med innrykk under `if`-linjen, vil bare bli utført hvis vilkåret gir `True`.

```python
a = 5
b = 4
c = 9

if c > b: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Jepp, c er større enn b")

if a > c: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Denne teksten kommer ikke i output, siden
    vilkåret er False")
```

Utdata

```
Jepp, c er større enn b
```

Hvis man først vil sjekke om et vilkår er sant, og så utføre handlinger hvis det *ikke* er det, kan vi bruke uttrykket `else`:

```python
a = 5
c = 9

if a > c: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Denne teksten kommer ikke i output, siden
    vilkåret er False")

else: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Men denne kommer, fordi vilkåret i if-linja
    over var False")
```

Utdata

```
Men denne kommer, fordi vilkåret i if-linja over var False
```

Uttrykket `else` tar bare hensyn til (og gir ikke mening uten) `if`-uttrykket like over seg. Hvis vi vil at handlinger skal utføres *bare* hvis ingen tidligere `if` uttrykk ga noe utslag, må vi bruke[1] uttrykket `elif`. Dette er et `if`-uttrykk som slår inn hvis `if`-uttrykket over *ikke* ga utslag.

```python
a = 2

if a > 3:
  print("Denne linja printes ikke, vilkåret er False")

elif a < 1: #Siden if uttrykket over ikke ga utslag, sjekkes vilkåret b < 1
  print("Denne linja printes ikke, vilkåret er False")

else:
  print("Nå er vi sikre på at 1 < b < 3")
```

Utdata

```
Nå er vi sikre på at 1 < b < 3
```

Merk

Når du jobber med tall, kan noen vilkår du forventer skal være `True` vise seg å være `False`. Dette handler ofte om avrundingsfeil, som vi har omtalt på side 147.

[1] `elif` er en forkortelse for `else if`, som også kan brukes.

7.2.5 Lister

Lister kan vi bruke for å samle objekter. Objektene som er i listen kalles **elementene** til listen.

```
strings = ["98", "99", "100"]
floats = [1.7, 1.2]
ints = [96, 97, 98, 99, 100]
mixed = [1.7, 96, "100"]
empty = []
```

Elementene i lister er **indekserte**. Første objekt har indeks 0, andre objekt har indeks 1 og så videre:

```
strings = ["98", "99", "100"]
floats = [1.7, 1.2]
ints = [96, 97, 98, 99, 100]
mixed = [1.7, 96, "100"]
empty = []
```

Utdata

96
99
98

Med den innebygde funksjonen `append()` kan vi legge til et objekt i enden av listen. Dette er en **innebygd funksjon**[1], som vi skriver i enden av navnet på listen, med et punktum foran.

```
min_liste = []
print(min_liste)

min_liste.append(3)
print(min_liste)

min_liste.append(7)
print(min_liste)
```

Utdata

```
[]
[3]
[3, 7]
```

[1] Kort fortalt betyr det at det bare er noen typer objekter som kan bruke denne funksjonen.

Med funksjonen pop() kan vi hente ut et objekt fra listen

```python
min_liste = [6, 10, 15, 19]

a = min_liste.pop() # a = det siste elementet i listen
print("a =",a)
print("min_liste =",min_liste)

a = min_liste.pop(1) # a = elementet med indeks 1
print("a =",a)
print("min_liste =",min_liste)
```

Utdata

```
a = 19
min_liste = [6, 10, 15]
a = 10
min_liste = [6, 15]
```

Forklar for deg selv

Hva er forskjellen på å skive `a = min_liste[1]` og å skrive `a = min_liste.pop(1)`?

Med funksjonen sort() kan vi sortere elementene i listen.

```python
heltall =  [9, 0, 8, 3, 1, 7, 4]
bokstaver = ['c', 'a', 'b', 'e', 'd']

heltall.sort()
bokstaver.sort()

print(heltall)
print(bokstaver)
```

Utdata

```
[0, 1, 3, 4, 7, 8, 9]
['a', 'b', 'c', 'd', 'e']
```

Med funksjonene `count()` kan vi telle gjentatte elementer i listen.

```
heltall =  [2, 7, 2, 2, 2]
frukt = ['banan', 'eple', 'banan']

antall_toere = heltall.count(2)
antall_sjuere = heltall.count(7)
antall_bananer = frukt.count('banan')
antall_appelsiner = frukt.count('appelsin')

print(antall_toere)
print(antall_sjuere)
print(antall_bananer)
print(antall_appelsiner)
```

Utdata
4
1
2
0

Med funksjonen `len()` kan vi finne antall elementer i en liste, og med funksjonen `sum()` kan vi finne summen av lister med tall som elementer.

```
heltall =  [2, 7, 2, 2, 2]
frukt = ['banan', 'eple', 'banan']

print(len(heltall))
print(len(frukt))
print(sum(heltall))
```

Utdata
5
3
15

Med uttrykket `in` kan vi sjekke om et element er i en liste.

```python
heltall = [1, 2, 3]

print(1 in heltall)
print(0 in heltall)
```

Utdata

```
True
False
```

7.2.6 Looper; `for` og `while`

`for` loop

For objekter som inneholder flere elementer, kan vi bruke `for`-looper til å utføre handlinger for hvert element. Handlingene må vi skrive med et innrykk etter `for`-uttrykket:

```python
min_liste = [5, 10, 15]

for number in min_liste:
  print(number)
  print(number*10)
  print("\n") # lager et blankt mellomrom
```

Utdata

```
5
50

10
100

15
150
```

Språkboksen

Å gå gjennom hvert element i (for eksempel) en liste kalles "å iterere over listen".

Ofte er det ønskelig å iterere over heltallene $0, 1, 2$ og så videre. Til dette kan vi bruke `range()`:

```python
ints = range(3)

for i in ints:
  print(i)
```

Utdata

```
0
1
2
```

while loop

Hvis vi ønsker at handlinger skal utføres fram til et vilkår er sant, kan vi bruke en while - loop:

```python
a = 1

while a < 5:
  print(a)
  a += 1
```

Utdata

```
1
2
3
4
```

7.2.7 input()

Vi kan bruke funksjonen input() til å skrive inn tekst mens skriptet kjører:

```python
1 innskrevet_tekst = input("Skriv inn her: ")
2 print(innskrevet_tekst)
```

Teksten vi har skrevet inni input() i skriptet over er teksten vi ønsker vist foran teksten som ønskes innskrevet. Linje 2 i denne koden vil ikke kjøres før en tekst er innskrevet.

```python
1 innskrevet_tekst = input("Skriv inn her: ")
2 print(innskrevet_tekst)
```

Utdata

```
Skriv inn tekst her: OK
OK
```

Objektet gitt av en `input()`-funksjon vil alltid være av typen `str`. Man må alltid passe på å gjøre om objekter til rett type:

```python
print("La oss regne ut a*b")
a_str = input("a = ")
b_str = input("b = ")
a = float(a_str)
b = float(b_str)
print("a*b = ", a*b)
```

Utdata

```
La oss regne ut a*b
a = 3.7
b = 4
a*b = 14.8
```

7.2.8 Feilmeldinger

Påstand: Alle programmerere vil erfare at skriptet ikke kjører fordi vi ikke har skrevet koden på rett måte. Dette kalles en **syntax error**. Ved syntax error vil man få beskjed om på hvilken linje feilen befinner seg, og hva som er feil. De vanligste feilene er

- **Å glemme innrykk når man bruker metoder som `def`, `for`, `while`, og `if`**

```python
1 a = 472
2 b = 98
3
4 if a*b > 48000:
5 print("a*b er større enn 48000")
```

Utdata

```
line 5, in <module>
print("a*b er større enn 48000")
^
IndentationError: expected an indented block after
'if' statement on line 4
```

- **Å utføre operasjoner på typer det ikke gir mening for**

```python
b = "98"
b_opphøyd_i_andre = b**2
```

Utdata

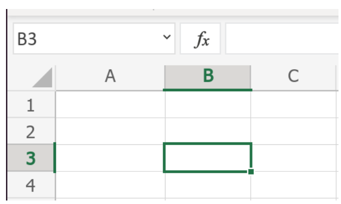
```
line 2, in <module>
b_opphøyd_i_andre = b**2
TypeError: unsupported operand type(s) for ** or
pow(): 'str' and 'int'
```

7.3 Regneark

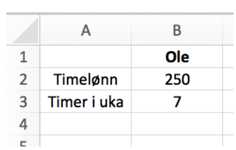
I denne boka tar vi utgangspunkt i Mircrosofts programvare Excel. Det finnes andre gode regneark på markedet, for eksempel Google Sheets og Libre Office Calc. Disse tre nevnte regnearkene ligner hverandre mye både i utforming og i funksjoner de har å tilby.

7.3.1 Introduksjon

Når du åpner et regneark vil du få opp en tabell hvor *radene* er nummerert med tall (1, 2 3 osv), mens *kolonnene* er indeksert med bokstaver (A, B, C osv.). Hvordan radene og kolonnene brukes er avgjørende for å forstå Excel. I figuren under har vi markert det vi kaller *celle B3*. Dette er altså cellen hvor *rad 3 og kolonne B krysser hverandre*. (Legg også merke til at B3 er markert oppe til venstre i figuren).



I hver celle kan vi skrive inn både tall og tekst. Si at Ole har en jobb med 250 kr i timelønn, og at han jobber 7 timer i uka. Denne informasjonen kan vi skrive inn i Excel slik:



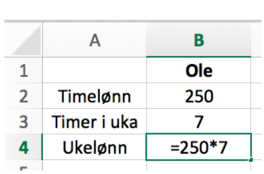
	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4		

7.3.2 Utregninger

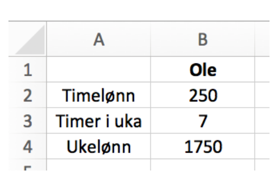
Vi ønsker nå å finne ukelønnen til Ole. Ukelønnen er gitt ved formelen

$$\text{ukelønn} = \text{timelønn} \cdot \text{timer i uka}$$

For å foreta en utregning i regneark, starter man med å skrive = i cellen. I celle B4 finner vi ukelønnen til Ole ved å skrive =250*7.

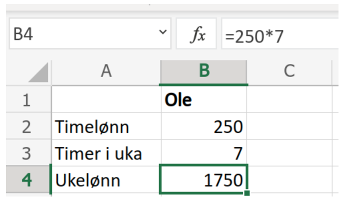


	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=250*7



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Når vi trykket enter-tasten, er det resultatet, 1750, som vises i cellen. Ønsker vi å se formelen vi har brukt, kan vi dobbeltklikke på cellen, eller se i *inntastingsfeltet* (oppe til høyre i figuren under.)



B4 | =250*7

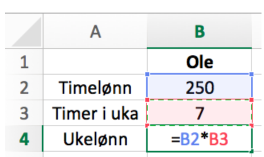
	A	B	C
1		**Ole**	
2	Timelønn	250	
3	Timer i uka	7	
4	Ukelønn	1750	

Merk: Inntastingsfeltet kan også brukes til å taste inn tall og tekst i cellen.

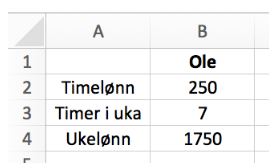
7.3.3 Cellereferanser

Excels kanskje viktigste egenskap er *cellereferanser*. Dette betyr kort sagt at vi bruker celler istedenfor tall når vi skal gjøre utregninger. I forrige seksjon regnet vi lønnen til Ole ved å gange 250 (timelønnen) med 7 (timer i uka). Ved å bruke cellereferanser kunne vi isteden gjort dette:

Tallet tilhørende timelønnen (250) står i celle B2, mens tallet tilhørende timer (35) står i celle B3. For å gange tallene i disse cellene kan vi skrive =B2*B3:

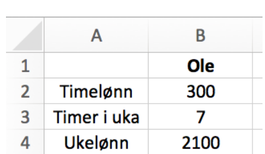


	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=B2*B3



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Én av fordelene med å bruke cellereferanser er at det blir mye lettere å rette opp i feil som har blitt gjort. Si f.eks. at det skulle stått 300 istedenfor 250 i B3. Om vi derfor endrer B3, vil resultatet i B4 endre seg deretter:



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	300
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	2100

Merk: Du kan også trykke på cellene du ønsker å bruke i formlene dine, slik som vist her.

7.3.4 Kopiering og låsing av celler

Kopiering av cellene er en metode som hindrer deg i å skrive de samme formlene om og om igjen. Vi ønsker nå å lage at ark som passer til følgende informasjon:

- Timelønnen til Ole, Dole og Doffen er henholdsvis 300 kr, 200 kr og 500 kr.
- Alle tre jobber 7 dager i uka.
- Vi ønsker å regne ut hvor mange timer de jobber til sammen og hvor mye ukelønn de har til sammen.

Vi starter med å sette opp dette regnearket:

	A	B	C	D
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**
2	Timelønn	300	200	500
3	Timer i uka			
4	Ukelønn			

Her har vi bare fylt inne informasjonen som er *unik* for Ole, Dole og Doffen, nettopp fordi de andre cellene enten inneholder de samme tallene eller den samme regnemåten. For cellene som ikke er unike bør vi bruke kopieringsmulighetene, og dette vises i denne videoen. Her er en liten beskrivelse av hva som blir gjort:

1. Siden alle tre jobber i 7 timer, skriver vi 7 i celle B4. Etterpå kopierer vi ved å trykke musepekeren helt nede i høyre hjørne av B4 og drar *bortover* til C2 og D2.
2. Siden regnemåten av ukelønn er den samme for alle tre, skriver vi den (med cellereferanser) inn i B4, og kopierer den *bortover* til celle C4 og D4.
3. Regnemåten for summen av timene og summen av ukelønnene er også den samme, vi skriver den derfor inn i celle E3 og kopierer den *nedover* til E4.

Resultatet ble dette:

	A	B	C	D	E
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
2	Timelønn	300	200	500	**Sum**
3	Timer i uka	7	7	7	21
4	Ukelønn	2100	1400	3500	7000

	A	B	C	D	E
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
2	Timelønn	300	200	500	**Sum**
3	Timer i uka	=7	=7	=7	=B3+C3+D3
4	Ukelønn	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=B4+C4+D4

Av det vi har sett i videoen og figurene over kan vi ta med oss to generelle regler:

1. Hver gang man kopierer en formel én celle *bortover*, vil kolonnene i formelen øke med én bokstav i alfabetet. (A blir til B, B blir til C osv.)

2. Hver gang man kopierer en formel én celle *nedover*, vil radene i formelen øke med 1 (1 blir 2 B, 2 blir til 3 osv.).

Låsing av celler

Når man kopierer celler, er det viktig å se opp for celler man ønsker å bruke i alle kopiene, for disse cellen må *låses*. Si for eksempel at Ole, Dole og Doffen alle jobber 48 arbeidsuker i året. For å finne årslønnen deres må vi altså gange ukeslønnen til hver av dem med 48.

Igjen merker vi oss at regnemetoden for å finne årslønnen er den samme for alle tre, men hvis vi bruker celle B8 i en formel, og kopierer slik vi har gjort hittil, vil bokstaven B endre seg i formlene. For å unngå dette skriver vi $ foran `B` i formelen – dette gjør at kolonnebokstaven ikke endrer seg, selv om vi kopierer formelen. Dette er vist i denne videoen, og resultatet ser vi her:

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
4	Timelønn	300	200	500	**Sum**
5	Timer i uka	7	7	7	21
6	Ukelønn	2100	1400	3500	7000
7	Årslønn	100800	67200	168000	

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
4	Timelønn	300	200	500	**Sum**
5	Timer i uka	=7	=7	=7	=B5+C5+D5
6	Ukelønn	=B4*B5	=C4*C5	=D4*D5	=B6+C6+D6
7	Årslønn	=$B1*B6	=$B1*C6	=$B1*D6	

Skal vi låse en celle *nedover* må vi sette dollaren foran radnummeret, for eksempel `B$1`.

7.3.5 Andre nyttige funksjoner

Videoer

- Sum bort og sum ned
- Justere bredde på kolonne
- Sette inn rad
- Formelvisning
- Gjøre om til prosenttall
- Endre antall desimaler
- Sorter i stigende/synkende rekkefølge
- Lage søylediagram
- Lage sektordiagram
- Lage linjediagram

Kommandoer (skrives med = foran).

- `SUM(celle1:celle2)`

  Summerer alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

- `AVERAGE(celle1:celle2)`

  Finner gjennomsnittet for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

- `MEDIAN(celle1:celle2)`

  Finner medianen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

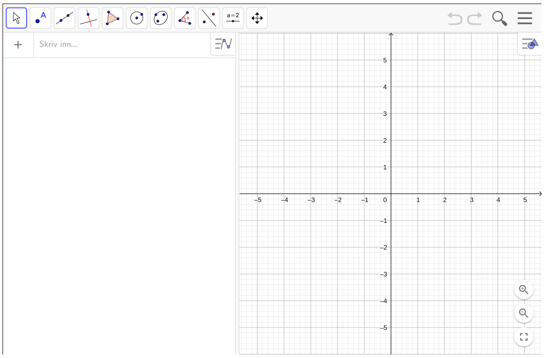
- `VAR.P(celle1:celle2)`

  Finner variansen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

7.4 GeoGebra

7.4.1 Introduksjon

Når du åpner GeoGebra får du et bilde som dette:



Feltet hvor det står "Skriv inn" kalles *inntastingsfeltet*. Dette feltet og det blanke feltet under utgjør *algebrafeltet*. Koordinatsystemet til høyre kalles *grafikkfeltet*.

7.4.2 Å skrive inn punkt, funksjoner og linjer

Punkt

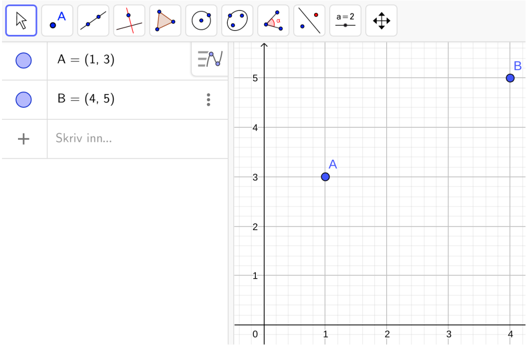
Si at vi ønsker å få punktene $(1{,}3)$ og $(4{,}5)$ til å vises i grafikkfeltet. I inntastingsfeltet skriver vi da

```
(1,3)
```

og

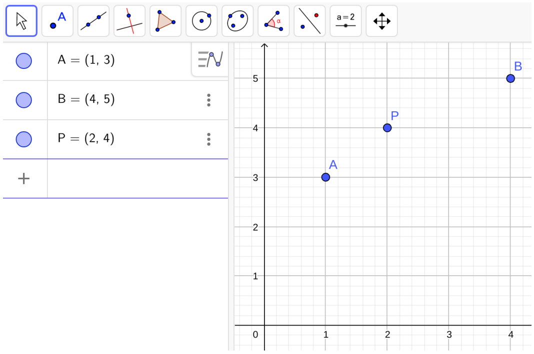
```
(4,5)
```

GeoGebra kaller da punktene A og B, og tegner dem inn i grafikfeltet:



Ønsker vi å selv et punkts navn kan vi f. eks skrive

```
P=(2,4)
```



Funksjoner

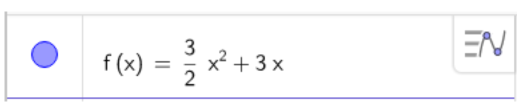
Si vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

For å bruke $f(x)$ i GeoGebra, skriver vi:

```
3/2*x^2+3x
```

Når vi ikke gir funksjonen noen navn, vil GeoGebra automatisk gi funksjonen navnet f. I algebrafeltet får vi derfor



I grafikkfeltet får vi grafen til f.

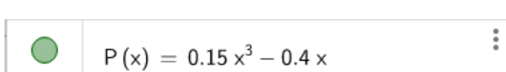
Hvis vi isteden har funksjonen

$$P(x) = 0{,}15x^3 - 0{,}4x$$

er det to ting vi må passe på. Det første er at *alle desimaltall må skrives med punktum istedenfor komma* i GeoGebra . Det andre er at vi ønsker å gi funksjonen navnet $P(x)$. Vi skriver da

```
P(x) = 0.15x^3 - 0.4x
```

og får



Obs!

Man kan aldri gi funksjoner navnet $y(x)$ i GeoGebra. y kan bare brukes når man skriver inn uttrykk for en rett linje, altså $y = ax + b$, hvor a og b er to valgfrie tall.

Vannette og loddrette linjer

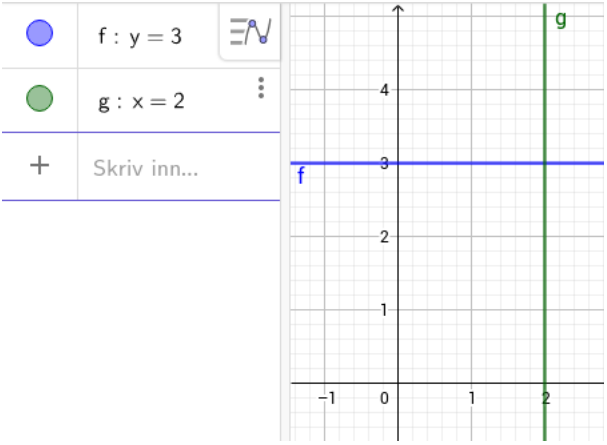
Ønser vi å lage ei linje som går vannrett gjennom verdien 3 på y-aksen og ei linje som går loddrett gjennom verdien 2 på x-aksen skriver vi:

```
y = 3
```

og

```
x = 2
```

Da får vi denne figuren:



7.4.3 Å finne verdien til funksjoner og linjer

Funksjoner

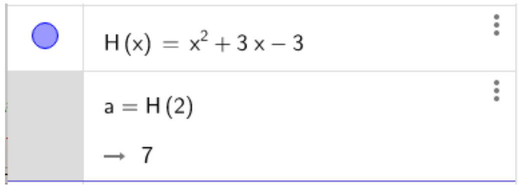
Si vi har funksjonen

$$H(x) = x^2 + 3x - 3$$

Hvis vi ønsker å vite hva $H(2)$ er, skriver vi

```
H(2)
```

som resulterer i dette



Da vet vi at $H(2) = 7$.

Linjer

Det anbefales på det sterkeste at du bruker funksjonsuttrykk når du behandler linjer i GeoGebra, men i noen tilfeller kommer man ikke utenom linjer på former $y = ax + b$.

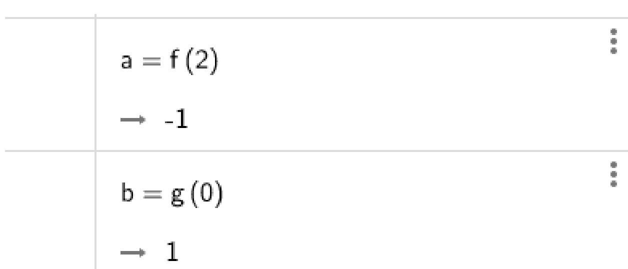
La oss se på de to linjene

$$y = x - 3$$

$$y = -2x + 1$$

Vi skriver disse inn i GeoGebra, og får

Ønsker vi nå å finne hva verdien til $y = x - 3$ er når $x = 2$, må vi legge merke til at GeoGebra har kalt denne linja for f. Svaret vi søker får vi da ved å skrive $f(2)$. Ønsker vi samtidig å vite hva $y = -2x + 1$ er når $x = 0$, må vi skrive $g(0)$:



7.4.4 Knapper og kommandoer

Grafikkfelt

Knappene velges fra rullemenyer på verktøylinjen. Nummereringen av menyene er fra venstre.

 Lager et nytt punkt. (Meny nr. 1)

 Lager linje mellom to punkt. (Meny nr. 2)

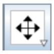
 Finner topp- og bunnpunkt til en funksjon. (Meny nr. 2)

 Finner nullpunktene til en funksjon. (Meny nr. 2)

 Finner skjæringspunkt mellom to objekt. (Meny nr. 3)

 Lager vektoren mellom to punkt (Meny nr. 3)

Lager en tekstboks. (Meny nr. 10)

 Flytter grafikkfeltet. Endrer verdiavstanden hvis man peker på aksene. (Meny nr. 10)

Hurtigtaster

	Beskrivelse	PC	Mac
$\sqrt{}$	kvadratrot	`alt + r`	`alt + r`
π	pi	`alt + p`	`alt + p`
∞	uendelig	`alt + u`	`alt + ,`
$\otimes$	kryssprodukt	`alt + shift + 8`	`ctrl + shift + 8`
e	eulers tall	`alt + e`	`alt + e`
$^\circ$	gradtegnet ($\frac{\pi}{180}$)	`alt + o`	`alt + o`

Videoer

- Finne nullpunktene til en graf
- Finne lokale bunnpunkt (eller toppunkt) til en graf
- Finne skjæringspunktene til to funksjoner
- Justere akser
- Endre tykkelse, farge o.l på graf
- Tegne graf på gitt intervall
  I videoen tegner vi $f(x) = x^2 - 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 5$.
- Lage linje mellom to punkt
  Legg merke til hva som gjøres mot slutten av videoen for å få det vante uttrykket $y = ax + b$.
- Utføre regresjon
  I videoen har vi på forhånd skrevet inn tallene i tabellen under, som viser elbilsalget i Norge antall år etter 2010. Disse tallene ble også brukt i seksjon 6.2.

  Det utføres regresjon med en linje, en kvadratisk funksjon og en 4. grads funksjon.

antall år	elbiler
0	3347
1	5381
2	9565
3	19678
4	42356
5	73312
6	101126
7	138477
8	194900
9	260688
10	337201
11	455271

Kommandoliste

Merk: Mange av kommandoene har egne knapper, som blant annet vist i videoene over.

- `abs( <x> )`
  Gir lengden til x (et tall, et linjestykke o.l.). Alternativt kan man skrive `|x|`.

- `Linje( <Punkt>, <Punkt> )`
  Gir linjen mellom to punkt.

- `Ekstremalpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Finner lokale topp- og bunnpunkt for en funksjon på et gitt intervall.

- `Funksjon( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Tegner en funksjon innenfor et gitt intervall.

- `Mangekant( <Punkt>, ..., <Punkt> )`
  Tegner mangekanten mellom gitte punkt.

- `Nullpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Gir nullpunktene til en funksjon innenfor et gitt intervall

- `RegLin( <Liste> )`
  Bruker regresjon med en rett linje for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `RegEksp( <Liste> )`
  Bruker regresjon med en eksponentialfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `RegPoly( <Liste>, <Grad> )`
  Bruker regresjon med et polynom av gitt grad for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `RegPot( <Liste> )`
  Bruker regresjon med en potensfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- `Skjæring( <Objekt>, <Objekt> )`
  Finner skjæringspunktene til to objekt (funksjoner, linjer o.l.)

Oppgaver for kapittel 7

7.1.1
Lag et skript som fra en liste med oddetalls antall tall finner

a) gjennomsnittet.

b) medianen.

Bruk gjerne datasettet fra oppgåve 2.3.2 som et utgangspunkt.

7.1.2
Lag et skript som fra en liste med partalls antall tall finner

a) gjennomsnittet.

b) medianen.

Bruk gjerne datasettet fra oppgåve 2.3.4 som utgangspunkt.

7.2.1
a) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgåve 2.3.6.

b) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgave oppgåve 2.3.7.

7.2.2
Løs oppgåve 4.3.4 og oppgåve 4.4.1.

7.2.3
a) Sett opp et serielån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt? (Summen av alle terminbeløpene.)

7.2.4

a) Sett opp et annuitetslån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp, som er 23 523 kr.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt?

c) Sammenlign svaret du fikk i oppgave b) med svaret fra oppgave 7.2.3b, hvilket lån koster mest penger?

7.2.5

Sjekk at du i oppgave oppgåve 7.2.3 og oppgåve 7.2.4 har fått samme svar som nettsiden laanekalkulator.no. (Velg *Tinglysning: Ingen* og sett alle gebyrer til 0).

7.3.1

a) Skriv den lineære funksjonen $f(x) = 2x + 4$ og linja $y = 2x + 2$ inn i GeoGebra. Lag $f(x)$ blå og y grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?

b) Finn verdien til $f(x)$ når $x = 4$.

c) Finn verdien til y når $x = -3$.

7.3.2

a) Tegn punktene $(-1{,}2)$ og $(2{,}8)$.

b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

7.3.3

a) Skriv inn funksjonen $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) Finn $f(4)$.

c) Finn nullpunktene til $f(x)$.

d) Finn bunnpunktet til $f(x)$.

e) Finn skjæringspunktet mellom $f(x)$ og linja $y = 5$.

Gruble 7

Lag et skript som fra en liste med tall finner

a) gjennomsnittet.

b) medianen.

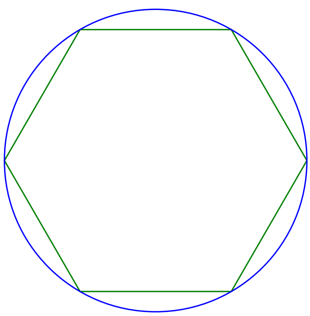
c) typetallet.

Undersøk svarene fra oppgave 2.3.1 - 2.3.4 med sriptet.

Gruble 8

I MB har vi vist at[1] hvis s_n er sidelengden til en regulær mangekant med n sider, innskrevet i en sirkel med radius 1, har vi at

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$



Lag et skript som finner sidelengden til en regulær 768-kant når du vet at $s_6 = 1$. Bruk s_{768} til å finne en tilnærmet verdi for omkretsen til en sirkel med radius 1.

[1]Se forklaringen av omkretsen til en sirkel.

Kapittel 8

Blanda oppgåver

8.1 Oppgaver med tall og situasjoner fra virkelig-heten

Se også oppgaver på ekte.data.uib.no

8.1.1

Vanlig gåfart regnes for å være ca. 1,5 $\mathrm{m/s}$. Hvor langt kommer man med denne farten

a) etter 25 min?

b) etter 3 timer?

8.1.2

#overslag #proporsjonalitet

Når det er lyn og torden kan du bruke følgende metode for å finne ut omtrent hvor langt unna du er uværet:

> Start med å telle sekunder straks du ser et lyn. Stopp tellingen når du hører torden. Gang antall sekunder med 300, da har du et overslag på hvor mange meter du er unna uværet.

Bruk internett til undersøke hastigheten til lys (lyn) og lyd (torden) i luft, og forklar hva denne metoden baserer seg på.

8.1.3

#prosent #negative tall

Statens vegvesen definerer **stigningsgrad** slik:

> Stigningsgrad er definert som høydeforskjell dividert med horisontal avstand i vegens lengderetning. Stigningsgraden uttrykkes vanligvis i %. Den er positiv i stigning og negativ i fall sett i profileringsretningen.

Si at stigningen på en veistrekke starter 0 meter over havet, og ender opp 8 meter over havet, og at veistrekket er 100 meter langt. Ved bratte veistrekker som dette bruker det å stå skilt som varsler om veiens stigningsgrad.

a) Hvilken stigningsgrad vil være oppgitt i dette tilfellet?

b) Hva menes med at stigningsgraden er "negativ i fall sett i profileringsretningen"?

8.1.4

modellering # areal

Gitt et rektangel med omkrets 4, og la x være den éne sidelengden.

a) Finn uttrykket til funksjonen $A(x)$, som viser aralet til rektangelet.

b) Hva er x når rektangelet har størst areal? Hvilken form har rektangelet da?

Merk: I !!amto finner du en *generalisert* utgave av denne oppgaven. Med andre ord kan det vises at formen du finner i oppgave b) alltid vil være den formen et rektangel må ha for å ha et størst mulig areal i forhold til omkretsen.

8.1.5

#programmering #primtall

Skriv et skript som lykkes i å finne alle primtall på intervallet 1-100.

8.1.6

omgjøring av enheter # standardform # proporsjonale størrelser

Lysets hastighet i vakuum er tilnærmet lik $3 \cdot 10^8\,\mathrm{km/s}$.

a) Et **lysår** angir distansen et objekt vil reise hvis det beveger seg med lysets hastighet i ett år. Hvor langt er et lysår?

b) Lys bruker ca. 8 minutt på å bevege seg fra Sola til Jorda. Hvor langt er det mellom Sola og Jorda?

8.1.7

omgjøring av enheter # standardform # proporsjonale størrelser

Det har blitt populært å regne ut hva det koster å ta seg en dusj. Til et slikt reknestykke kan man gjøre følgende antakelser:

- Energien som kreves er energien som må til for å varme opp vannet som gikk med til dusjingen fra 7° til $35°$.
- For å øke temperaturen til 1 liter vann med 1°, kreves det $4{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$.

Ifølge vg.no er 645,26 øre/kWh den høyeste (gjennomsnittlige) strømprisen registrert i Oslo.

a) Regn ut hva en dusj på 10 minutter ville kostet med denne prisen.

b) Bruk internett til å finne strømprisene for din region i dag. Sjekk hva en 10 minutters dusj vil koste deg.

*Obs! I denne oppgaven ser vi bort ifra **nettleie**. Alle strømforbrukere må betale nettleie for frakt av strøm, og jo mer strøm man forbruker, jo høyere vil nettleien være, men strømprisen vil ha mest å si for hvor mye en dusj koster.*

8.1.8

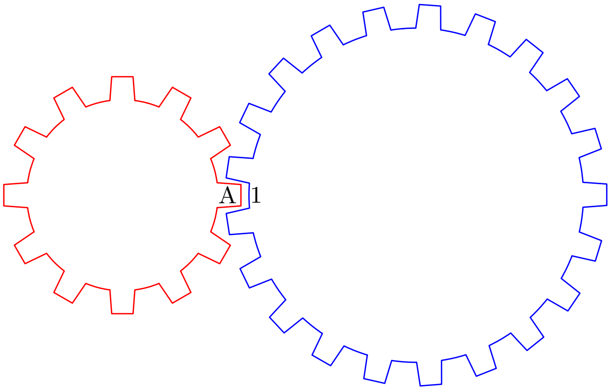
#faktorisering #primtall

I et system hvor to tannhjul virker sammen, er det ønskelig at en tann og et kammer møtes så sjeldent som mulig. Dette for å unngå slitasje.

a) Et tannhjul med 12 tenner er koblet til et tannhjul med 21 tenner, som vist i figuren under. Hvor mange omdreininger må det røde tannhjulet ta for at tann A og kammer 1 skal møtes igjen?

b) Gjenta spørsmålet fra oppgave a), men hvor det blå tannhjulet er erstattet med et tannhjul som har 11 tenner?[1].

c) Hvis to tall ikke har noen annen felles faktor enn 1, sier vi at de er **relativt primiske**. Hvorfor er systemer med tannhjul helst innrettet slik at antall tenner på de forskjellige tannhjulene er relativt primiske?



[1]Legg merke til at antall tenner og antall kammer alltid vil være like

Hvis en størrelse har veldig høy verdi, kan det være lettere å forestille seg omfanget til størrelsen ved å sammenligne den med en konkret størrelse (i motsetning til å bruke SI-enhetene gram, meter og lignende). Oppgave 8.1.9 - 8.1.11 handler om slike sammenligninger.

8.1.9

#enheter #regning #

Ifølge WWF kan en blåhval veie opp til 200 tonn, og ifølge geno.no kan en norsk NRF-ku veie opp til 650 kg. Hvor mange NRF-kyr tilsvarer vekten av én blåhval?

8.1.10

#proporsjonale størrelser #volum #overslag

Vannføringen i en elv viser til volumet vann en elv frakter per tidsenhet. I en Wikipedia-artikkel om verdens største elver kan man lese følgende:

> (...) The average flow rate at the mouth of the Amazon is sufficient to fill more than 83 such pools each second.
>
> ***Norsk oversettelse***
> *(...) Den gjennomsnittlige vannføringen i munningen av Amazonas-elven er nok til å fylle mer enn 83 slike per sekund.*

Gjengi utregningene som er brukt for å finne de to tallene i teksten over, når du vet at artikkelen har brukt følgende som utgangspunkt:

- Bassenget det er snakk om er et olympisk svømmebasseng, som har har lengde 50 m, bredde 25 m og dybde 2 m.
- Den gjennomsnittlige vannføringen i Amazonas-elven er 209 000 m^3/s.

8.1.11

#enheter #areal #overslag #proporsjonale størrelser

I en nyhetssak skrevet av CNN i 2020 står følgende[1]:

> The world lost 3.8 million hectares of tropical primary forest in 2019 – equivalent to a football pitch every six seconds – according to a new report published Tuesday.

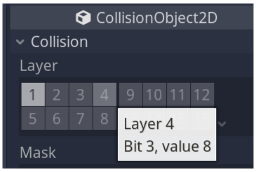
Ta utgangspunkt i tallet "3.8 million", undersøk størrelsene "hectares" og "foobtall pitch", og avgjør om denne påstanden er riktig.

[1] Rapporten det vises til er en rapport fra Global Forest Watch

8.1.12

#programmering #potenser

I spillmotoren Godot har noen objekter egenskapen "Layer". Dette brukes til å bestemme hvilke objekter som skal/ikke skal kollidere med hverandre.



Layers kan bestemmes i editoren, men det er også ønskelig å bruke kode for å endre på disse underveis i et spill. Hvert layer er representert ved en "Bit", som viser til en potens med 2 som grunntall og "Bit" som eksponent. Verdien til "Bit" er alltid 1 mindre enn verdien til "Layer". For eksempel, "Layer 4" har "Bit 3" og "value 8" (fordi $2^3 = 8$).

a) Hvilken "value" har "Layer 8"?

b) For å kode hvilke layers et objekt skal ha, brukes funksjonen `set_collisio` hvor `value` er summen av verdiene til hvert layer som ønskes valgt.

   Hva må `value` settes til dersom du ønsker at et objekt skal ha "Layer 1", "Layer 3" og "Layer 7"?

c) Hvis `value = 320`, hvilke layers har objektet da?

8.1.13

#algebra #modellering #andregradsfunksjon #omgjøring av enheter #proporsjonalitet

La F være summen av kreftene som virker i motsatt retning av en bils kjøreretning. Ifølge en rapport[1] fra SINTEF kan[2] F tilnærmes som

$$F(v) = mgC_r + \frac{1}{2}\rho v^2 D_m \qquad , \qquad v \geq 10$$

	betydning	**verdi**	**enhet**
v	bilens hastighet	variabel	m/s
m	bilens masse[3]	1409	kg
g	tyngdeakselerasjonen	9.81	m/s^2
C_r	koeffisient for bilens rullemotstand	0.015	
ρ	tettheten til luft	1.25	kg/m^3
D_m	koeffisient for bilens luftmotstandsareal[4]	0.74	

a) Tegn digitalt grafen til F for $v \in [10, 35]$

b) På intervallet gitt i oppgave a, for hvilken hastighet er det at

- rullemotstanden gir det største bidraget til F?
- luftmotstanden gir det største bidraget til F?

Oppgi svarene rundet av til nærmeste heltall og målt i km/h.

c) Med "energiforbruk"[5] mener vi her den energien som må til for å motvirke F over en viss kjørelengde. Ved konstant hastighet er energiforbruket etter kjørt lengde proporsjonal med F. På norske motorveier er 90 km/h og 110 km/h vanlige fartsgrenser. Hvor stor økning i energiforbruk vil en økning fra 90 km/h til 110 km/h innebære?

d) Lag en funksjon F_1 som gir F ut ifra bilens hastighet målt i km/h.

---

[1] https://sintef.brage.unit.no/sintef-xmlui/handle/11250/2468761

[2] Det er er her forutsatt flatt strekke, og sett vekk ifra motstand ved akselerasjon.

[3] Det er tatt ugangspunkt i gjennomsnittsvekten til en norsk personbil.

[4] Verdien er hentet fra en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficient#Drag_area

[5] Den totale energimengden en bil bruker på en kjørelengde vil være høyere enn det vi har kalt "energiforbruket". Som regel vil den totale energimengden som kreves for å kjøre en strekning være høyere jo høyere hastighet man har. Slik kan man anta at differansen i energiforbruk vi finner i denne oppgaven er et minimum for den reelle differansen i total energimengde.

8.2 Praktiske oppgaver

Se også oppgaver på mattelist.no

8.2.1

#prosentregning

Bruk internett til å finne fem varer hvor du har oppgitt følgende:

- En original pris og en prosentvis rabatt av denne prisen.
- Den nye prisen etter at rabatt er trekt ifra.

Undersøk om den nye og den originale prisen samsvarer med rabatten for disse fem varene.

8.2.2

Utfør fem stille lengde hopp[1]. Finn gjennomstnittslengden og medianlengden for hoppene dine.

8.2.3

Finn en 20 cm linjal og og noen små viskelær med lik størrelse. Legg linjalen på et bord slik at 10 cm av linjalen ligger utenfor kanten av bordet.

a) Legg et viskelær på linjalmerket for 5 cm. Hvor langt ut på linjalen kan du plassere et annet viskelær før linjalen bikker over kanten?

b) Stable 2 viskelær på linjalmerket for 5 cm. Hvor langt ut på linjalen kan du plassere et annet viskelær før linjalen bikker over kanten?

c) Stable 8 viskelær på linjalmerket for 2 cm. Hvor langt ut på linjalen kan du plassere et annet viskelær før linjalen bikker over kanten? Prøv å svare på spørsmålet før du sjekker svaret i praksis.

[1] Stille lengde btyr at man skal hoppe med samlede bein, og uten å ta springfart først.

8.2.4

#prosent #geometri #algebra #gjennomsnitt

a) Beskriv en metode for hvordan du ved hjelp av en vater og et målband/linjal kan bestemme stigningen på et strekke i en bakke.

For en bakke som har jevn stigning kan man anslå stigningen på følgende måte

1. Lag et merke 5 meter nedenfor et annet merke i bakken. (De 5 metrene måles langs bakken.)

2. Mål tiden en fotball bruker på å rulle fra det øverste til det nederste merket. Passs på å la ballen trille uten å gi den ekstra fart ved skubbing.

3. Regn ut gjennomsnittsfarten til ballen mellom de to merkene.

4. Høgdeforskjellen h mellom de to merkene kan nå tilnærmes ved formelen
$$h = \frac{v^2}{19}$$
hvor v er gjennomsnittsfarten fra punkt 3. ganget med 2.

5. La l være den horisontale (vannrette) avstanden mellom de to punktene. Da er
$$l = \sqrt{5^2 - h^2}$$

6. Den tilnærmede verdien til stigningen er gitt ved brøken $\frac{h}{l}$.

b) Forklar formelen for l fra punkt 5.

c) Finn en bakke og sammenlign resultatene fra metoden med en vater og metoden med en fotball.

8.2.5

Makspuls er et mål på hvor mange hjerteslag hjertet maksimalt kan slå i løpet av et minutt. På siden trening.no kan man lese dette:

> "Den tradisjonelle metoden å estimere maksimalpuls er å ta utgangspunkt i 220 og deretter trekke fra alderen."

a) Kall "maksimalpuls" for m og "alder" for a og lag en formel for m ut i fra sitatet over.

b) Bruk formelen fra a) til å regne ut makspulsen din.

På den samme siden kan vi lese at en ny og bedre metode er slik:

"Ta din alder og multipliser dette med 0,64. Deretter trekker du dette fra 211."

c) Lag en formel for m ut ifra sitatet over.

d) Bruk formelen fra c) til å regne ut makspulsen din.

For å fysisk måle makspulsen din kan du gjøre dette:

> 1. Hopp opp og ned i ca. 30 sekunder (så fort og så høyt du greier).
> 2. Tell hjerteslag i 15 sekunder umiddelbart etter hoppingen.

e) Kall "antall hjerteslag i løpet av 15 sekunder" for A og lag en formel for m.

f) Bruk formelen fra e) til å regne ut makspulsen din.

g) Sammenlign resultatene fra b), d) og f).

8.2.6

I matbutikker er som regel både pris og kilopris oppgitt for en vare. Vekten til varen finner man på forpakningen til varen. Gå i din lokale matbutikk og velg ut fem varer. Sjekk om kiloprisen som butikken oppgir er rett for disse varene.

8.2.7

På nettsiden viivilla.no får vi vite at dette er formelen for å lage en perfekt trapp:

> "2 ganger opptrinn (trinnhøyde) pluss 1 gang inntrinn (trinndybde) bør bli 62 centimeter (med et slingringsmonn på et par centimeter)."

a) Kall "trinnhøyden" for h og "trinndybden" for d og skriv opp formelen i sitatet (uten slingringsmonn).

b) Sjekk trappene på skolen/i huset ditt, er formelen oppfylt eller ikke?

c) Hvis ikke: Hva måtte trinnhøyden vært for at formelen skulle blitt oppfylt?

d) Skriv om formelen til en formel for h.

8.3 Eksamensoppgaver

Dette er opppgaver som har blitt gitt ved sentralt utformet eksamen i Norge. Oppgavene er laget av Utdanningsdirektoratet. Forkortelser i parantes viser til følgende:

E	Eksempeloppgave
V/H	Eksamen fra vårsemesteret/høstsemesteret
G/1P/1T/R1/R2	Fag
XX	År 20XX
D1/D2	Del 1/Del 2

Tekst og innhold kan her være noe endret i forhold til originalen.

8.3.1 (GE22)

#regning #omgjøring av enheter

Snorre skal kjøpe ny mobiltelefon. Ved betaling får han to alternativer:

- Alternativ 1: Betal 12 000 kr med en gang
- Alternativ 2: Betal 550 kr per måned i to år.

Snorre velger alternativ 2.

Hvor mye dyrere blir mobiltelefonen med *alternativ 2* enn med *alternativ 1*?

8.3.2 (GV21D1)

#regnerekkefølge #potenser

Regn ut $3(2+5)-3^2$

8.3.3 (GV21D1)

pi #rottuttrykk #desimaltall #brøk

Sorter tallene fra størst til minst

$$3{,}1 \qquad \sqrt{9} \qquad 2{,}9 \qquad \pi \qquad \frac{32}{10}$$

8.3.4 (GV21D1)

#kobinasjonsregning #logikk

Det er 29 bokstaver i alfabetet vårt, og tallsystemet vi vanligvis bruker, har 10 siffer. Du skal lage en kode med seks tegn. De to første skal være bokstaver, og de fire neste skal være siffer. En slik kode kan for eksempel være YA6505.

Hvilket av tallene under gir antall ulike koder det er mulig å lage?

a) 290 b) 2320 c) 4 092 480 d) 8 410 000

8.3.5 (GV21D1)

#ligninger #formler

Sett $n = 120$, og bestem verdien av p i formelen nedenfor.

$$n = 12p + 48$$

8.3.6 (GV21D1)

#enheter #regning

En løpebane på en friidrettsbane er 400 meter. Cornelia løper 6 runder. Hvor langt løper Cornelia?

Merk: I eksamenssettet er dette den første av to deloppgaver. Den andre deloppgaven er altså utelatt her.

8.3.7 (1PV22D1)

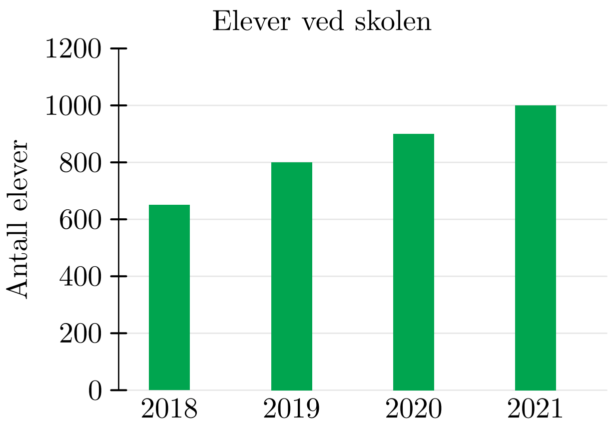
#programmering #prosentregning

```python
startverdi = 2000
verdi = startverdi
vekstfaktor = 1.05
år = 0

while verdi < startverdi*2:
  verdi = verdi*vekstfaktor
  år = år + 1

print(verdi)
print(år)
```

En elev har skrevet programkoden ovenfor. Hva ønsker eleven å finne ut? Forklar hva som skjer når programmet kjøres.

8.3.8 (1PV22D1)

#prosentregning #statistikk #tallforståelse



Diagrammet viser antall elever ved en videregående skole de fire siste årene.

Når var det størst prosentvis økning i antall elever fra et år til det neste?

8.3.9 (1PV23D1)

#standardform

Tall fra FN viser at folketallet på jorda nå har passert 8 milliarder.

Forskere har kommet fram til at det er omtrent 2,5 millioner ganger så mange maur som mennesker på jorda.

Omtrent hvor mange maur er det på jorden? Skriv svaret på standardform.

8.3.10 (1PV23D1)

a) Gi et eksempel på en praktisk situasjon der to størrelser er proporsjonale. Grunngi at størrelsene er proporsjonale. Tegn en graf som viser sammenhengen mellom størrelsene.

b) Gi et eksempel på en praktisk situasjon der to størrelser er omvendt proporsjonale. Grunngi at størrelsene er omvendt proporsjonale. Tegn en graf som viser sammenhengen mellom størrelsene.

Vedlegg

Vedlegg B: Funksjoner

8.1 Definisjonsmengde

Definisjonsmengden til en funskjon $f(x)$ er x-verdiene $f(x)$ er gyldige for.

8.2 Verdimengde

Verdimengden til en funskjon $f(x)$ er alle verdiene $f(x)$ kan ha. Verdimengden er bestemt av funksjonsuttrykket og funksjonens definisjonsmengde.

8.3 Proporsjonale størrelser

Gitt en konstant a og to variabler x og y. Hvis

$$a = \frac{x}{y}$$

er x og y **proporsjonale** størrelser.

8.4 Omvendt proporsjonale størrelser

Gitt en konstant a og to variabler x og y. Hvis

$$a = xy$$

er x og y **omvendt proporsjonale** størrelser.

8.5 Polynomfuksjoner

En polynomfunksjon er en funksjon som består av en sum av potenser med positive eksponenter og en variabel som grunntal.

Polynomfunksjoner har undertitler som bestemmes av den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene a, b, c og d, og en variabel x, har vi at

funksjonsuttyrykk	**funksjonsnavn**
$ax + b$	1. gradsfunksjon (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. gradsfuksjon (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. gradsfunksjon (kubisk)

Språkboksen

Gyldighetsområdet til en funksjon oppgir for hvilke x-verdier funksjonen gir mening ut ifra den praktiske situasjonen den brukes i.

Vedlegg C: Tekster om anvendt matematikk

Størrelser og enheter	Reknefeil på sjukehus
Statistikk	SSB skole Derfor må du kunne statistikk
Økonomi	Dobbelt renteheving!
Digitale verktøy	Regnefeil på over 100 milliarder
Andre tema	Eratosthenes of Cyrene (engelsk)

Fasit

Kapittel 1

1.1.1 a) 484 000 m b) 91 000 m c) 2 402 000 m

1.1.2 a) 484 000 g b) 9 100 g c) 240 200 g

1.1.3 a) 48 l b) 91 l c) 240 cl

1.1.4

a) 0,0124 km	f) 0,097 hg	k) 8,9 l
b) 4,2 m	g) 0,00015 g	l) 69 140 cl
c) 581,5 mm	h) 141 900 mg	m) 15000 ml
d) 7,4 m	i) 0,00031 hg	n) 9,18 l
e) 15 cm	j) 0,064039 kg	o) 55 ml

1.2.1 $720\,\mathrm{cm}^3$

1.2.2 a) $32\,\mathrm{dm}^3$ b) $32\,\mathrm{l}$

1.2.3 a) $120\,\mathrm{cm}^3$ b) $0{,}12\,\mathrm{l}$

1.3.1 a) Ca. $10{,}19\,\mathrm{m/s}$ b) Han startet med $0\,\mathrm{m/s}$ som fart, og trengte de første metrene til å akselerere. c) Ca. $12{,}35\,\mathrm{m/s}$.

1.4.1 Ca. $36{,}68\,\mathrm{m/s}$ og ca. $44.46\,\mathrm{m/s}$

1.4.2 Skriv ned eksempel på et dyr, et insekt, en gjenstand eller annet som veier mellom 1-100 mg, cg, dg, g, dag, hg og kg.

Kapittel 2

2.3.1 a) 2 b) 3 c) 5

2.3.2 a) 8 b) 6 c) $\frac{67}{11}$

2.3.3 a) 5, 8 og 16 b) 8 c) $8{,}5$

2.3.4 a) 5 og 11 b) 8.5 c) 9

2.3.5 a) 3,2 b) 4185.48 c) Medianen

2.3.6 Sjå løsningsforslag.

2.3.7 Sjå løsningsforslag.

2.3.8

2.3.9

2.3.10

a) I undersøkelse 1 har hver verdi frekvens lik 1, og da er det unødvendig å lage en frekvenstabell. Punktene i undersøkelse 3 gir samme informasjon som en frekvenstabell. Informasjonen gitt i undersøkelse 4 er allerede gitt i form av en frekvenstabell.

b) vist søylediagram bare for undersøkelse 2 og 3?

c) vist sektordiagram bare for undersøkelse 2 og ?

d) vist linjediagram bare for undersøkelse 4?

2.3.13 Spredningsmål gir bare mening for tallverdier.

Kapittel 3

3.1.1 a) 6 b) 15 c) 42 d) 80

3.1.2 a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{48}{77}$ c) $\frac{9}{65}$

3.1.3 320 000 kr

3.2.1 a) 78% b) $91{,}2\%$ c) $0{,}7\%$ d) $193{,}54\%$

3.2.2 a) 0,57 b) 0,981 c) 2,19 d) 0,003

3.2.1 a) 70% b) 22% c) 36% d) 145%

3.2.4 a) 100 b) 250 c) 63 d) 560 e) 30

3.2.5 a) 40% b) 25% c) ca 42,86% d) ca 22,22%

3.2.6

3.2.7 a) 44 b) 325 c) 1008 d) 649 e) 200

3.2.8 a) 36 b) 175 c) 112

3.2.9 21 600 kr

3.2.10 17 600 kr

3.2.11 (iii)

3.3.1 a) 1,1 b) 1,3 c) 2

3.3.2 a) 0,9 b) 0,7 c) 0,2

3.3.3 a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{4}{12}$ *Merk*: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

3.3.3 5 cl

3.3.5 20

3.3.6 Ca. 18 g

Kapittel 4

4.1.1 a) ca. 1,4 b) ca. 1,021 c) ca. 0,945

4.1.2 a) 2017: 464 454 kr, 2012: 436 635 kr b) 2017

4.2.1 a) 20 000 kr b) 120 000 kr c) 2 400 kr d) 22 400 kr

4.2.2 Renter: 2 000 kr, avdrag: 5 783 kr

4.2.3 Figur (a) skisserer et serielån fordi avdragene er like. Figur (b) skisserer et annuitetslån fordi terminbeløpene er like.

4.2.4 63 000 kr

4.2.5 0,2 prosentpoeng og 10%.

4.2.6 a) 55 000 kr b) 60 500 kr c) 33 000 kr

4.3.1 a) 210 300 kr b) 48 369 kr

4.3.2 Mira: 16 200 kr, Børge: 17 850 kr

4.3.3 Trinn 1: ca. 965 kr, Trinn 2: ca 3699 kr (totalt ca. 4664 kr)

4.3.4 279 117 kr

4.4.1

a)

Inntekter	Budsjett
Nettolønn	23 000
Sum	23 000

Utgifter	
Leia av hybel	6 000
Mat	4 500
Annet	1 500
Sum	12 000

Resultat	11 000

b)

Inntekter	Budsjett	Regnskap	Avvik
Lønn	23 000	23 000	0
FLAX-gevinst	0	1 000	1 000
Sum	23 000	24 00	1 000

Utgifter			
Leia av hybel	6 000	6 000	0
Mat	4 500	5 500	$-1\,000$
Annet.	1 500	1 800	-300
FLAX-lodd	0	100	-100
Sum	12 000	13 400	$-1\,400$

Resultat	11 000	11 600	-400

11 600 kr i overskudd. Overskuddet 400 kr *mindre* enn budsjettert.

Kapittel 5

5.2.1 a) $\frac{13}{52}$ b) $\frac{26}{52}$ c) $\frac{52}{52}-\frac{13}{52}=\frac{39}{52}$, $\frac{13}{52}+\frac{13}{52}+\frac{13}{52}=\frac{39}{52}$

5.2.2 a) $\frac{4}{52}$ b) $\frac{13}{52}$ c) $\frac{16}{52}$ d) $\frac{36}{52}$

Kapittel 6

6.1.1 Ola: 40 000 kr, Kari: 80 000 kr

6.1.2 a) $7x+2=3{,}4$ b) $x=0{,}2$

6.1.3 a) $28x=252$ b) $x=9$

6.1.4 a) $\frac{25}{100}x=845$ (eller $\frac{1}{4}x=845$) b) $x=3380$

6.1.5 a) $\frac{20}{100}x=360$ (eller $\frac{1}{5}x=360$) b) 1800 kr

6.1.8 $15\,\mathrm{kr}$

6.1.9 a) $500\,\mathrm{W}$ b) $I^2 = \frac{P}{R}$

6.1.10 $h = \frac{2A}{a+b}$

6.1.11

a) $B = \frac{M+F-13}{2}$

b) $B = \frac{M+F+13}{2}$

c) $F = 2B - M + 13$

d) $190\,\mathrm{cm}$

6.1.12 $97{,}9$

6.1.13 $(6, 11)$

6.1.14 $(-2, 1)$

6.1.15 a) $5GB$ b) Abonnement B

6.1.18 a) $1\,000\,\mathrm{cm}^3$ b) Hun finner hvilke høyder hun kan velge for at volumet skal bli $500\,\mathrm{cm}^3$

6.1.19 $12\,\mathrm{cm}$

6.1.20 a) $(-1, 1)$ b) $(-2, 0)$

6.1.21 $a = 3, b = 7$

6.1.22 $x = -\frac{21}{37}, y = \frac{9}{37}$

6.1.23 $11\,\mathrm{kr}$

Gruble 5 $1000\,\mathrm{kr}$

Gruble 6 Sjå løsningsforslag.