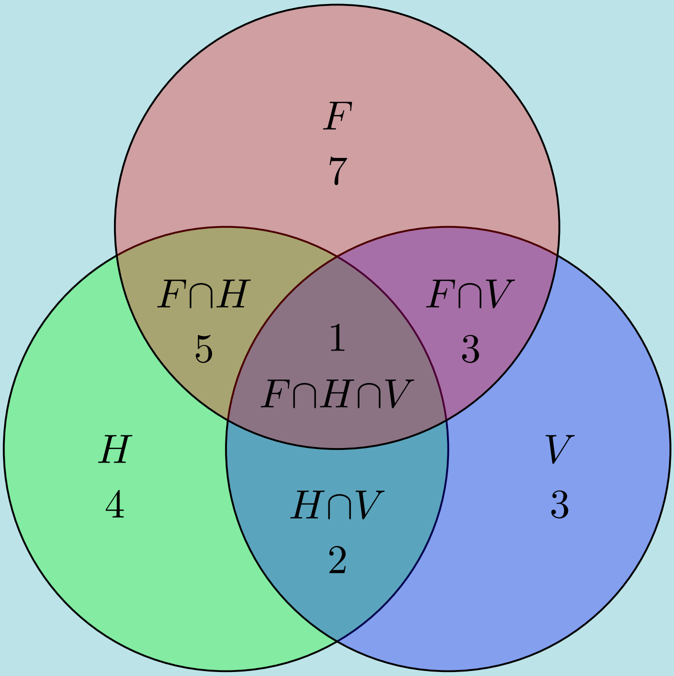
Anvendt matematikk for grunnskole og VGS



Sindre Sogge Heggen

"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt"

"Det er ikke å vite, men å lære,
ikke å eie, men å tilegne seg,
ikke å være til stede, men å komme dit,
som gir den største gleden."

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laget av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i LaTeX og figurene er lagd vha. Asymptote.

07.06.2022

Kjære leser.

Denne boka er i utgangspunktet gratis å bruke, men jeg håper du forstår hvor mye tid og ressurser jeg har brukt på å lage den. Hvis du ender opp med å like boka, håper jeg derfor du kan donere 50 kr via Vipps til 90559730 eller via PayPal. Vær vennlig å markere donasjonen med "Mattebok" ved bruk av Vipps. Pengene vil bli brukt til å fortsette arbeidet med å lage lærebøker som er med på å gjøre matematikk lett tilgjengelig for alle. På forhand takk!

Boka blir oppdatert så snart som råd når skrivefeil og lignende blir oppdaget, jeg vil derfor råde alle til å laste ned en ny versjon i ny og ne ved å følge denne linken.

Nynorskversjonen av boka finner du her.

For spørsmål, ta kontakt på mail: `sindre.heggen@gmail.com`

Forord til lærere

Bokas bruksområde

Sammen med Matematikkens byggesteiner (MB) dekker denne boka matematikk for 5.-10. klassse og for VGS-fagen 1P og 2P. Mens MB tar for seg de teoretiske grunnprinsippene matte er bygd på, er denne boka ment for å vise hvordan matte kan anvendes i det daglige. Det er likevel med en viss ambivalens jeg bruker ordet "anvendt". Jeg er hellig overbevist om at de aller fleste har behov å bruke matematikk i konkrete, praktiske situasjoner for å få opplevelsen av at matematikk blir anvendt. Jeg håper derfor disse gratis-bøkene kan frigi midler for skuler, som da kan investere i utstyr som gjør at elever (og lærere) får måle, estimere, kalkulere og vurdere ut i fra reelle situasjonar.

Bokas disponering

Da boka gaper over matematikk for 5. klasse og helt til VGS, vil kanskje mange mene at språket er noe avansert, spesielt for de yngste. Men forenklinger fører ofte til at man stadig må vende tilbake til tema for å kommentere nye utvidelser og/eller unntak, og da dannes det fort et unødig kronglete og innviklet bilde av matematikkens struktur. Jeg tror man i lengden er tjent med å presentere temaene så utfyllende som mulig, og heller bruke god tid på å forstå dem én gang for alle.

Noen vil kanskje også reagere på at eksemplene er veldig enkle, at de viser få sammensatte problemer. Én av grunnene til dette er at slik vil det faktisk være for de aller fleste etter endt skolegang; det handler om å bruke formler direkte. En annen grunn er at jeg mener det å mestre likninger er den overlegent beste måten å løse sammensatte problemer på, og derfor handler nesten hele kapittel 6 om problemløsing.

Tilbakemeldinger og eventuelle endringer

Jeg håper å høre fra deg med tilbakemeldinger om boka. Merk likevel at alle har sine tanker om hvordan ei lærebok ideelt sett bør utformes, så ikke tolk det som utakknemlighet hvis tilbakemeldinger ikke tas til etterretning. Husk at kodekilden til både denne boka og MB ligger åpen for alle på GitHub; med litt kunnskaper om Git og LaTeX kan du enkelt gjøre endringer slik det passer deg og din klasse!

Gjøreliste
Prosjektet som denne boka er en viktig del av er under stadig utvikling. Her er en liste med kommende gjøremål, i prioritert rekkefølge:

- Korrigere skrivefeil. Dette gjøres kontinuerlig, gir du beskjed om feil funnet til `sindre.heggen@gmail.com`, vil korrigering som oftest bli utført samme dag.
- Legge til flere oppgaver både i denne boka og i MB.
- Legge til fasit
- Lage en pensumoversikt for denne boka og MB sett opp mot kompetansemålene f.o.m. 5. klasse og t.o.m. 2P.
- Videreutvikle nettside med læringsvideoer, undervisningsopplegg og mer.

Contents

Kapittel 1

Størrelser og enheter

1.1 Størrelser, enheter og prefikser

Det vi kan måle og uttrykke med tall, kaller vi *størrelser*. En størrelse består gjerne av både en verdi og en *enhet*, og i denne seksjonen skal vi se på disse fire enhetene:

enhet	**forkortelse**	**enhet for**
meter	m	lengde
gram	g	masse
sekund	s	tid
liter	L	volum

Noen ganger har vi veldig store eller veldig små størrelser, for eksempel er det ca 40 075 000 m rundt ekvator! For så store tall er det vanlig å bruke en *prefiks*. Da kan vi skrive at det er ca 40 075 km rundt ekvator. Her står 'km' for 'kilometer', og 'kilo' betyr '1 000'. Så 1 000 meter er altså 1 kilometer . Her er prefiksene man oftest[1] møter på i hverdagen:

prefiks	**forkortelse**	**verdi**
kilo	k	1 000
hekto	h	100
deka	da	10
desi	d	0,1
centi	c	0,01
milli	m	0,001

Bruker vi denne tabellen i kombinasjon med enhetene kan vi for eksempel se at

$$\begin{aligned} 1000\,\text{g} &= 1\,\text{kg} \\ 0{,}1\,\text{m} &= 1\,\text{dm} \\ 1\,\text{s} &= 1000\,\text{ms} \\ 0{,}01\,\text{L} &= 1\,\text{cL} \end{aligned}$$

Enda ryddigere kan vi få det hvis vi lager en vannrett tabell (se neste side) med meter, gram eller liter lagt til i midten[2].

[1] Unntaket er 'deka', som er en veldig lite brukt prefiks, men vi har tatt den med fordi den kompletterer tallmønsteret.

[2] Legg merke til at 'meter', 'gram', 'sekund' og 'liter' er *enheter*, mens 'kilo', 'hekto' osv. er *tall*. Det kan derfor virke litt rart å sette dem opp i samme tabell, men for vårt formål fungerer det helt fint.

R 1.1 Omgjøring av prefikser

Når vi skal endre prefikser kan vi bruke denne tabellen:

| kilo | hekto | deka | m/g/L | desi | centi | milli |

Komma må flyttes like mange ganger som antall ruter vi må flytte oss fra opprinnelig prefiks til ny prefiks.

For lengde brukes også enheten 'mil' (1 mil = 10 000 m). Denne kan legges på til venstre for 'kilo'.

Språkboksen

En (eventuell) **prefiks** og en **enhet** utgjør en **benevning**. For eksempel har 9 km benevningen 'km', mens 9 m har benevningen 'm'. Disse størrelsene har forskjellige benevning, men begge har 'm' som enhet.

Eksempel 1

Skriv om 23,4 mL til antall L.

Svar

Vi skriver tabellen vår med L i midten, og legger merke til at vi må *tre ruter til venstre* for å komme oss fra mL til L:

| kilo | hekto | deka | L | desi | centi | milli |

Det betyr at vi må flytte kommaet vårt tre plasser til venstre for å gjøre om mL til L:

$$23{,}4\,\text{mL} = 0{,}0234\,\text{L}$$

Eksempel 2

Skriv om 30 hg til antall cg.

Svar

Vi skriver tabellen vår med 'g' i midten, og legger merke til at vi må **fire ruter til høyre** for å komme oss fra hg til cg:

| kilo | hekto | deka | g | desi | centi | milli |

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fire plasser til høyre for å gjøre om 'hg' til 'cg':

$$30\,\text{mg} = 300\,000\,\text{cg}$$

Eksempel 2

Skriv om 2,7 s til antall ms.

Svar

Vi skriver tabellen vår med 's' i midten, og legger merke til at vi må **tre ruter til høgre** for å komme oss fra s til ms:

kilo	hekto	deka	s	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt tre plasser til høgre for å gjøre om 's' til 'ms':

$$2{,}7\,\text{s} = 2\,700\,\text{ms}$$

Eksempel 3

Gjør om 12 500 dm til antall mil.

Svar

Vi skriver tabellen vår med m i midten, legger til 'mil', og merker oss at vi må *fem ruter til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

mil	kilo	hekto	deka	m	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fem plasser til høyre for å gjøre om mil til dm:

$$12\,500\,\text{dm} = 0{,}125\,\text{mil}$$

1.1 Omgjøring av prefikser (forklaring)

Omgjøring av prefikser handler om å gange/dele med 10, 100 osv. (se *seksjon* **??** og *seksjon* **??**)

La oss som første eksempel skrive om 3,452 km til antall meter. Vi har at

$$\begin{aligned} 3{,}452\,\text{km} &= 3{,}452 \cdot 1000\,\text{m} \\ &= 3\,452\,\text{m} \end{aligned}$$

La oss som andre eksempel skrive om 47 mm til antall meter. Vi har at

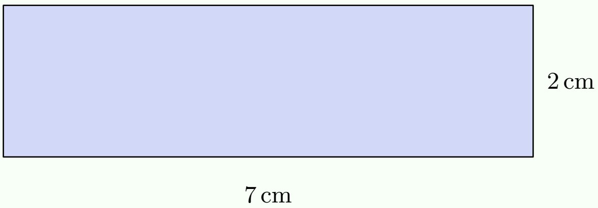
$$\begin{aligned} 47\,\text{mm} &= 47 \cdot \frac{1}{1000}\,\text{m} \\ &= (47 : 1000)\,\text{m} \\ &= 0{,}047\,\text{m} \end{aligned}$$

1.2 Regning med størrelser

Merk: I eksemplene til denne seksjonen bruker vi areal- og volumformler som du finner i MB.

I utregninger behandler vi benevninger på samme måte som vi behandler variabler i algebra[1]. På samme måte som at $a + a = 2a$, er altså $1\,\text{cm} + 1\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$ og på samme måte som at $2a \cdot 3a = 6a^2$, er $2\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$.

Eksempel 1



a) Finn omkretsen til rektangelet.

b) Finn arealet til rektangelet.

Svar

a) Omkretsen til rektangelet er

$$7\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 7\,\text{cm} + 2\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$$

b) Arealet til rektangelet er

$$7\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 14\,\text{cm}^2$$

Eksempel 3

En sylinder har radius 4 m og høgde 2 m. Finn volumet til sylinderen.

Svar

$$\text{grunnflaten til sylinderen} = \pi \cdot (4\,\text{cm})^2 = 16\pi\,\text{cm}^2$$

$$\text{volumet til sylinderen} = 16\pi\,\text{cm}^2 \cdot 2\,\text{cm} = 32\pi\,\text{cm}^3$$

[1]Se kapitlet om algebra i MB.

1.3 Proporsjonale størrelser

Si at det koster 10 kr for 0,5 kg poteter. Hvis det er slik at denne prisen gjelder også hvis vi ønsker å kjøpe 0,5 kg poteter mer, koster det 20 kr for 1 kg poteter. Hvis prisen gjelder også hvis vi ønsker å kjøpe 0,5 kg poteter mer enn dette, koster det 30 kr for 1,5 kg poteter. Antall kroner og antall kilogram poteter for hver av tilfellene kan vi sette opp i en tabell:

kr	10	20	30
kg	0,5	1	1,5

La oss videre dele prisen med vekten for hvert av tilfellene:

$$\frac{10\,\text{kr}}{0{,}5\,\text{kg}} = 20\,\text{kr}/\text{kg} \qquad \frac{20\,\text{kr}}{1\,\text{kg}} = 20\,\text{kr}/\text{kg} \qquad \frac{30\,\text{kr}}{1{,}5} = 20\,\text{kr}/\text{kg}$$

Vi ser nå at forholdet mellom prisen og vekten er det samme for alle tilfellene. Da sier vi at prisen og vekten er[1] **proporsjonale størrelser**. Av disse to størrelsene har vi også ”lagd” en ny størrelse, med benevning[2] 'kr/kg'. Dette uttaler vi ”kroner per kilogram”, og denne størrelsen blir gjerne kalt **kiloprisen**. I dette tilfellet er kiloprisen 20 kr/kg. Da kiloprisen er forholdet mellom to proporsjonale størrelser, kalles den en **proporsjonalitetskonstant.**

D 1.2 Proporsjonale størrelser

$$\text{proporsjonalitetskonstant} = \frac{\text{en størrelse}}{\text{en annen størrelse}} \tag{1.1}$$

Anvendt matematikk er full av størrelser som er proporsjonalitetskonstanter, og i definisjonsboksene under finner du et utvalg av disse. Legg merke til at formlene som vises matematisk sett er de samme som (1.1), det er bare navnene på størrelsene og enhetene som er forskjellige.

[1] Se også vedlegg?? i MB.

[2] Vi kunne også skrevet $\frac{\text{kr}}{\text{kg}}$, men i dette tilfellet er det vanligst å bruke / som divisjonstegn.

D 1.3 Kilopris

Kilopris gir forholdet mellom en pris (i kr) og en vekt (i kilogram)

$$\text{kilopris} = \frac{\text{pris}}{\text{vekt}} \tag{1.2}$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{pris} = \text{kilopris} \cdot \text{vekt} \tag{1.3}$$

Benevningen for kilopris er 'kr/kg'.

D 1.4 Literpris

Literpris gir forholdet mellom en pris (i kr) og et volum (i liter)

$$\text{litepris} = \frac{\text{pris}}{\text{volum}} \tag{1.4}$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{pris} = \text{literpris} \cdot \text{volum} \tag{1.5}$$

Benevningen for literpris er 'kr/L'.

D 1.5 Fart

Fart gir forholdet mellom en lengde og en tid.

$$\text{fart} = \frac{\text{lengde}}{\text{tid}} \tag{1.6}$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{lengde} = \text{fart} \cdot \text{tid} \tag{1.7}$$

Vanlige benevninger for fart er[1] 'km/h' og 'm/s'

[1] 'h' står for 'time' ('hour' på engelsk).

D 1.6 Tetthet

En **tetthet** gir forholdet mellom en vekt og et volum.

$$\text{tetthet} = \frac{\text{vekt}}{\text{volum}} \tag{1.8}$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{vekt} = \text{tetthet} \cdot \text{volum} \tag{1.9}$$

Vanlige benevninger for tetthet er er 'kg/m^3' og 'g/cm^3'

D 1.7 Effekt

Effekt gir forholdet mellom energi og tid

$$\text{effekt} = \frac{\text{energi}}{\text{tid}} \tag{1.10}$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{energi} = \text{effekt} \cdot \text{tid} \tag{1.11}$$

Vanlige benevninger for effekt er 'J/s' og 'kWh/s'. 'J' står for energieneheten 'Joule'. 'J/s' er det samme som 'W', som står for 'Watt'. I 'kWh' står 'k' for 'kilo', 'W' for 'Watt' og 'h' for 'time'.

Merk

I (1.2) - (1.8) er det antatt at størrelsene på venstre side av likningen er *konstant*, men det er ikke alltid slik. Lar du en stein falle fra en høgde, vil den åpenbart ikke ha den samme farten hele tiden. Ved å dele lengden den har falt med tiden det tok, vil du finne *hvilken fart ballen ville hatt dersom den skulle kommet seg like langt på den samme tiden, dersom farten var den samme hele tiden.*

1.4 Regning med forskjellige benevninger

Når vi skal utføre regneoperasjoner med størrelser som har benevning, er det helt avgjørende at vi passer på at benevningene som er involvert er de samme.

Eksempel 1

Regn ut $5\,\text{km} + 4\,000\,\text{m}$.

Svar

Her må vi enten gjøre om $5\,\text{km}$ til antall m eller $4\,000\,\text{m}$ til antall km før vi kan legge sammen verdiene. Vi velger å gjøre om $5\,\text{km}$ til antall m:

$$5\,\text{km}=5\,000\,\text{m}$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} 5\,\text{km} + 4\,000\,\text{m} &= 5\,000\,\text{m} + 4\,000\,\text{m} \\ &= 9\,000\,\text{m} \end{aligned}$$

Tips

I mange utregninger kan enheter føre til at uttrykkene blir litt rotete. Hvis du er helt sikker på at alle benevningene er like, kan du med fordel skrive utregninger uten benevning. I *Eksempel 1* over kunne vi da regnet ut

$$5\,000 + 4\,000 = 9\,000$$

Men merk at i et endelig svar *må* vi ha med benevning:

$$5\,\text{km} + 4\,000\,\text{m} = 9\,000\,\text{m}$$

Eksempel 2

Bruk ligning (1.7) til å svare på spørsmålene.

a) Hvor langt kjører en bil som holder farten 50 km/h i 3 timer?

b) Hvor langt kjører en bil som holder farten 90 km/h i 45 minutt?

Svar

a) I ligning (1.7) er nå farten 50 og tiden 3, og da er

$$\text{strekning} = 50 \cdot 3 = 150$$

Altså har bilen kjørt 150 km

b) Her har vi to forskjellige enheter for tid involvert; 'timer' ('h') og 'minutt' ('min'). Da må vi enten gjøre om farten til antall 'km/min' eller tiden til antall 'h'. Vi velger å gjøre om antall 'min' til antall 'h'[1]:

$$\begin{aligned} 45\,\text{minutt} &= \frac{45}{60}\,\text{timer} \\ &= \frac{3}{4}\,\text{timer} \end{aligned}$$

I ligning (1.7) er nå farten 90 og tiden $\frac{3}{4}$, og da er

$$\text{strekning} = 90 \cdot \frac{3}{4} = 67.5$$

Altså har bilen kjørt 67.5 km.

[1] Husk at 60 min = 1 h.

Eksempel 3

Bruk ligning (1.2) til å svare på spørsmålene.

a) 10 kg tomater koster 35 kr. Hva er kiloprisen til tomatene?

b) Safran går for å være verdens dyreste krydder, 5 g kan koste 600 kr. Hva er da kiloprisen på safran?

Svar

a) I ligning (1.2) er nå prisen 35 og vekten 10, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

Altså er kiloprisen på tomater 3,5 kr/kg

b) Her har vi to forskjellige enheter for vekt involvert; kg og gram. Vi gjør om antall g til antall kg (se *regel 1.1*):

$$5\,\text{g} = 0{,}005\,\text{kg}$$

I ligning (1.2) er nå prisen 600 og vekten 0,005, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{600}{0{,}005} = 120\,000$$

Altså koster safran 120 000 kr/kg.

Oppgaver for kapittel 1

1.1.1

Gjør om til antall meter.

a) 484 km b) 91 km c) 2 402 km

1.1.2

Gjør om til antall gram.

a) 484 kg b) 91 hg c) 2 402 hg

1.1.3

Gjør om til antall liter

a) 480 dl b) 9100 cl c) 24 000 cl

1.1.4

Gjør om

a) 12,4 m
til antall km.

b) 42 dm
til antall m.

c) 58,15 cm
til antall mm.

d) 0,0074 km
til antall m.

e) 0,15 m
til antall cm.

f) 9,7 g
til antall hg.

g) 0,15 mg
til antall g.

h) 1,419 hg
til antall mg.

i) 31 mg
til antall hg.

j) 64 039 mg
til antall kg.

k) 89 dL
til antall L.

l) 691,4 L
til antall cL.

m) 15 L
til antall mL.

n) 918 cL
til antall L.

o) 0,55 dL
til antall mL.

1.2.1

En prisme har lengde 9, bredde 10 og høgde 8.

a) Finn grunnflaten til prismen.

b) Finn volumet til prismen.

1.2.2

En prisme har lengde 9 cm, bredde 10 cm og høgde 8 cm.

Finn volumet til prismen.

1.2.3

En kjegle har radius 10 dm og høgde 4 dm.

a) Finn volumet til kjeglen.

b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

1.2.4

En firkantet pyramide har lengde 4 cm, bredde 9 cm og høgde 10 cm.

a) Finn volumet til kjeglen.

b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

1.3.1

I matbutikker er som regel både pris og kilopris oppgitt for en vare. Vekten til varen finner man på forpakningen til varen. Gå i din lokale matbutikk og velg ut fem varer. Sjekk om kiloprisen som butikken oppgir er rett for disse varene.

1.3.2

Usain Bolt har verdensrekorden for 100 m sprint. I tabellen under ser du hva tidtakeren viste ved hver 10. meter under dette rekordløpet.

meter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
sekunder	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,1	7,92	8,75	9,58

a) Hvis Bolts fart hadde vært den samme under hele løpet, hva hadde farten hans vært da?

b) Hvorfor er det *ikke* rimelig å anta at Bolt hadde den samme farten under hele løpet?

c) Anta at Bolt under dette løpet nådde den høgste farten et menneske har sprunget. Finn en tilnærming til denne farten.

1.4.1

Gjør om svarene fra Oppgave 1.3.2 a) og b) til hastigheter oppgitt i 'km/h'.

Kapittel 2

Statistikk

2.1 Introduksjon

I en *undersøkelse* henter vi inn informasjon. Denne informasjonen kan gjerne være tall eller ord, og kalles *data*. En samling av innhentet data kalles et *datasett*.

For eksempel, tenk at du spør to mennesker om de liker kaviar. Den ene svarer "ja", den andre "nei". Da er "ja" og "nei" dataene (svarene) du har samlet inn, og $\{\text{"ja"}, \text{"nei"}\}$ er datasettet ditt.

Statistikk handler grovt sett om to ting; *å presentere* og *å tolke* innsamlet data. For begge disse formålene har vi noen verktøy som vi i kommende seksjoner skal studere ved hjelp av noen forskjellige eksempler på undersøkelser. Disse finner du på side 24.

Det er ikke noen fullstendige fasitsvar på hvordan en presenterer eller tolker data, men to retningslinjer bør du alltid ha med deg:

- La det alltid komme tydelig fram hva du har undersøkt, og hvilke data som er innhentet.
- Tenk alltid over hvilke metoder du bruker for å tolke dataene.

Språkboksen

Personer som deltar i en undersøkelse der man skal svare på noe, kalles *respondenter*.

Undersøkelse 1

10 personer testet hvor mange sekunder de kunne holde pusten. Resultatene ble disse:

47 124 61 38 97 84 101 79 56 40

Undersøkelse 2

15 personer ble spurt hvor mange epler de spiser i løpet av en uke. Svarene ble disse:

7 4 5 4 1 0 6 5 4 8 1 6 8 0 14

Undersøkelse 3

300 personer ble spurt hva deres favorittdyr er.

- 46 personer svarte tiger
- 23 personer svarte løve
- 17 personer svarte krokodille
- 91 personer svarte hund
- 72 personer svarte katt
- 51 personer svarte andre dyr

Undersøkelse 4

Mobiltelefoner med smartfunksjoner (app-baserte) kom på det norske markedet i 2009. Tabellen[1] under viser det totale salget mobiltelefoner i tidsperioden 2009-2014, og andelen med og uten smartfunkskjoner. Salgstallene oppgir antall 1 000 telefoner.

År	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
totalt	2 365	2 500	2 250	2 200	2 400	2 100
u. sm.f.	1 665	1 250	790	300	240	147
m. sm.f.	700	1 250	1 460	1 900	2 160	1 953

[1] Tallene er hentet fra medienorge.uib.no.

2.2 Presentasjonsmetoder

Skal vi presentere våre undersøkelser, bør vi vise datasettene slik at det er lett for andre å se hva vi har funnet. Dette kan vi gjøre blant annet ved hjelp av *frekvenstabeller*, *søylediagram*, *sektordiagram* eller *linjediagram*.

2.2.1 Frekvenstabell

I en frekvenstabell setter man opp dataene i en tabell som viser hvor mange ganger hvert unike svar dukker opp. Dette antallet kalles *frekvensen*.

Undersøkelse 2

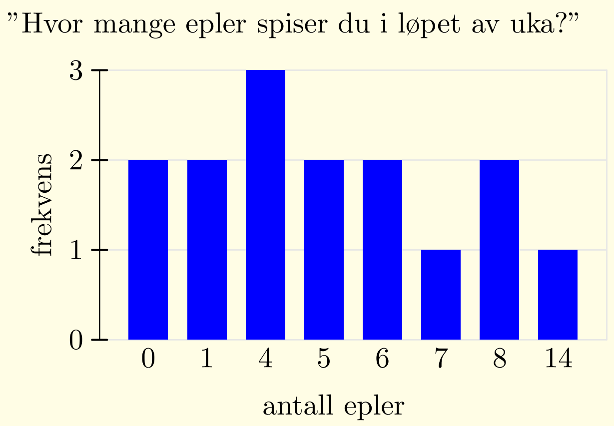
I vår undersøkelse har vi to 0, to 1, tre 4, to 5, to 6, én 7, to 8 og én 14. I en frekvenstabell skriver vi da

antall epler	frekvens
0	2
1	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	2
14	1

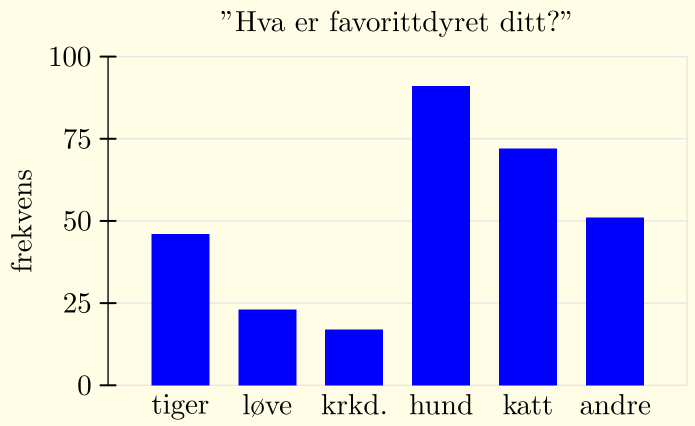
2.2.2 Søylediagram (stolpediagram)

Med et søylediagram presenterer vi dataene med søyler som viser frekvensen.

Undersøkelse 2



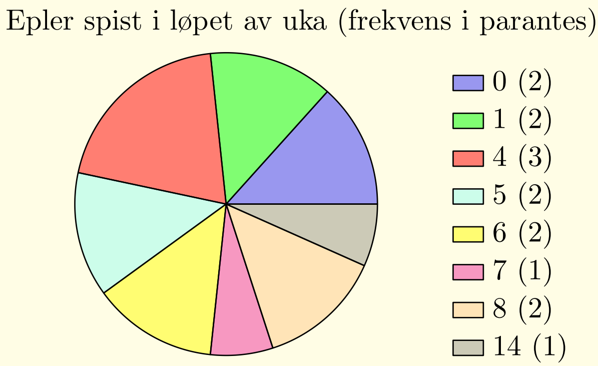
Undersøkelse 3



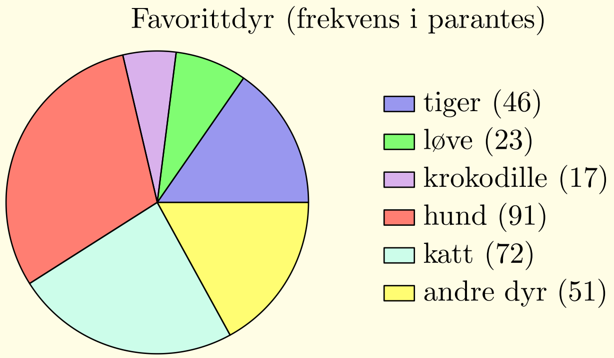
2.2.3 Sektordiagram (kakediagram)

I et sektordiagram vises frekvensene som sektorer av en sirkel.

Undersøkelse 2



Undersøkelse 3



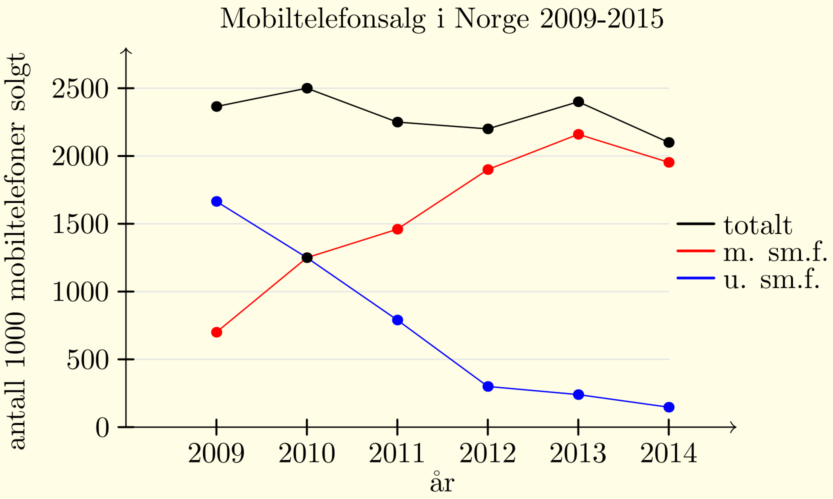
Å lage et sektordiagram for hand

Skal du selv tegne et sektordiagram, trenger du kunnskaper om vinkler og om brøkandeler. Se *seksjon 3.1*, MB, s. 76 og oppgave **??**.

2.2.4 Linjediagram

I et linjediagram legger vi inn dataene som punkt i et koordinatsystem, og trekker en linje mellom dem. Linjediagram brukes oftest når det er snakk om en form for utvikling.

Undersøkelse 4



2.3 Tolking av tendenser; sentralmål

I et datasett er det gjerne svar som er helt eller tilnærmet like, og som gjentar seg. Dette betyr at vi kan si noe om hva som gjelder for mange; en *tendens*. De matematiske begrepene som forteller noe om dette kalles *sentralmål*. De vanligste sentralmålene er *typetall*, *gjennnomsnitt* og *median*.

2.3.1 Typetall

R 2.1 Typetall

Typetallet er verdien det er flest eksemplarer av i datasettet.

Undersøkelse 2

I datasettet er det verdien 4 som opptrer flest (tre) ganger. (Dette kan vi se fra selve datasett på s. 24, fra frekvenstabellen på s. 25, fra søylediagrammet på s. 26 eller sektordiagrammet på s. 27.)

4 er altså typetallet.

2.3.2 Gjennomsnitt

Når et datasett består av svar i form av tall kan vi finne summen av svarene. Når vi spør hva gjennomsnittet er, spør vi om dette:

"Hvis alle svarene var like, og summen den samme, hvilken verdi måtte alle svarene da ha hatt?"

Dette er jo ingenting annet enn divisjon[1]:

R 2.2 Gjennomsnitt

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{summen av verdiene fra datasettet}}{\text{antall verdier}}$$

Undersøkelse 1

Vi summerer verdiene fra datasettet, og deler med antall verdier:

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{47+124+61+38+97+84+101+79+56+40}{10}\\ &= \frac{727}{10}\\ &= 72{,}7\end{aligned}$$

Altså, i gjennomsnitt holdt de 10 deltakerne pusten i 72,7 sekunder.

[1] se MB, side 23.

Undersøkelse 2

Metode 1

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{7+4+5+4+1+0+6+5+4+8+1+6+8+0+14}{15} \\ &= \frac{73}{15} \\ &\approx 4.87\end{aligned}$$

Metode 2

Vi utvider frekvenstabellen fra side 25 for å finne summen av verdiene fra datasettet (vi har også tatt med summen av frekvensene):

Antall epler	Frekvens	antall · frekvens
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	2	$1 \cdot 2 = 2$
4	3	$4 \cdot 3 = 12$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$
6	2	$6 \cdot 2 = 12$
7	1	$7 \cdot 1 = 14$
8	1	$8 \cdot 2 = 16$
14	1	$14 \cdot 1 = 14$
sum	15	73

Nå har vi at

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{73}{15} \\ &\approx 4{,}87\end{aligned}$$

Altså, i gjennomsnitt spiser de 15 respondentene 4,87 epler i uka.

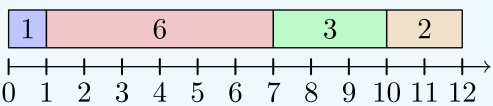
Undersøkelse 4

(Utregning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

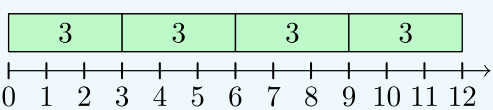
- Gjennomsnitt for totalt salg av mobiler: 2302
- Gjennomsnitt for salg av mobiler uten smartfunksjon: 732
- Gjennomsnitt for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

Lik fordeling

Legg merke til at gjennomsnitt handler om lik fordeling. Hvis vi har 4 rektangler med respektive lengder 1, 6, 3 og 2, blir den samlede lengden $1 + 6 + 3 + 2 = 12$.



Dette betyr at gjennomsnittslengden er $\frac{12}{4} = 3$. Hvis vi kunne omformet rektanglene slik at de ble like lange, ville altså hver av dem hatt lengde 3.



Gjennomsnittlig endring per enhet

Tenk deg at du på en løpetur gjør tre målinger av farten din. Datasettet du ender opp med er

$$10\,\text{m/s} \qquad 10\,\text{m/s} \qquad 10\,\text{m/s}$$

Gjennomsnittsfarten din var da

$$\frac{10 + 10 + 10}{3}\,\text{m/s} = 10\,\text{m/s}$$

Siden alle målinger av farten din hadde samme verdi, kan det være rimelig å anta at farten din var konstant. Og hvis den virkelig var det, ville alle målinger av farten din hatt samme verdi, uansett hvor mange målinger du tok. Dette gjør at en konstant fart fra *Definisjon 1.5* i dagligtale også kalles **gjennomsnittsfart**. Sagt på en annen måte er dette den gjennomsnittlige endringen i antall meter per sekund.

D 2.3 Gjennomsnittlig endring per enhet

Hvis vi *antar* at to størrelser er proporsjonale, kaller vi proporsjonalitetskonstanten fra (**??**) den **gjennomsnittlige endringen per enhet**.

Undersøkelse 4

- For årene 2009 og 2010 er differansen mellom smarttelefoner solgt delt på differansen mellom år gått lik

$$\frac{1\,260 - 700}{2010 - 2009} = \frac{550}{1} = 550$$

  Mellom 2009 og 2010 har altså salget av smarttelefoner i gjennomsnitt *økt* med 550 000 smarttelefoner per år.

- For årene 20010 og 2014 er differansen mellom smarttelefoner solgt delt på differansen mellom år gått lik

$$\frac{1\,953 - 1\,250}{2014 - 2010} = \frac{703}{4} = 175{,}75$$

  Mellom 2010 og 2014 har altså salget av smarttelefoner i gjennomsnitt *økt* med ca. 176 smarttelefoner per år.

- For årene 2013 og 2014 er differansen mellom smarttelefoner solgt delt på differansen mellom år gått lik

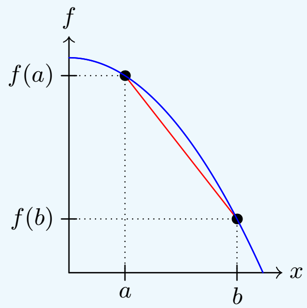
$$\frac{1\,953 - 2\,160}{2014 - 2013} = \frac{-207}{1} = -207$$

  Mellom 20013 og 2014 har altså salget av smarttelefoner *sunket* med ca. 207 000 smarttelefoner per år.

Stignistallet til linja mellom to punkt

Gitt en funksjon $f(x)$. I MB har vi sett at stigningstallet til linja mellom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ er gitt som

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Sammenlikner vi dette uttrykket med utregningene fra side 33, ser vi at utrekningene er identiske. Stigningstallet mellom to punkt på en graf gir oss dermed den gjennomsnittlige endringen per enhet.

2.3.3 Median

R 2.4 Median

Medianen er tallet som ender opp i midten av datasettet når det rangeres fra tallet med lavest til høgest verdi.

Hvis datasettet har partalls antall verdier, er medianen gjennomsnittet av de to verdiene i midten (etter rangering).

Undersøkelse 1

Vi rangerer datasettet fra lavest til høgest verdi:

38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

De to tallene i midten er 61 og 79. Gjennomsnittet av disse er

$$\frac{61 + 79}{2} = 70$$

Altså er medianen 70.

Undersøkelse 2

Vi rangerer datasettet fra lavest til høgest verdi:

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad {\color{red}5} \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 14$$

Tallet i midten er 5, altså er medianen 5.

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

- Median for totalt salg av mobiler: 2307
- Median for salg av mobiler uten smartfunksjon: 545
- Median for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

2.4 Tolking av forskjeller; spredningsmål

Ofte vil det også være store forskjeller (stor spredning) mellom dataene som er samlet inn. De vanligste matematiske begrepene som forteller noe om dette er *variasjonsbredde*, *kvartilbredde*, *varians* og *standard-avvik*.

2.4.1 Variasjonsbredde

R 2.5 Variasjonsbredde

Differansen mellom svarene med henholdsvis høgest og lavest verdi.

Undersøkelse 1

Svaret med henholdsvis høgest og lavest verdi er 124 og 38. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 124 - 38 = 86$$

Undersøkelse 2

Svaret med henholdsvis høgest og lavest verdi er 14 og 0. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 14 - 0 = 14$$

Undersøkelse 4

- Variasjonsbredde for mobiler totalt:

$$2\,500 - 2\,100 = 400$$

- Variasjonsbredde for mobiler uten smartfunksjoner:

$$1\,665 - 147 = 518$$

- Variasjonsbredde for mobiler med smartfunksjoner:

$$2\,160 - 700 = 1460$$

2.4.2 Kvartilbredde

R 2.6 Kvartilbredde og øvre og nedre kvartil

Kvartilbredden til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Ranger datasettet fra høgest til lavest verdi.
2. Skill det rangerte datasettet på midten, slik at to nye sett oppstår. (Viss det er oddetalls antall verdier i datasettet, utelates medianen).
3. Finn de respektive medianene i de to nye settene.
4. Finn differansen mellom medianene fra punkt 3.

Om medianene fra punkt 3: Den med høgest verdi kalles *øvre kvartil* og den med lavest verdi kalles *nedre kvartil*.

Undersøkelse 1

1. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124
2. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124
3. Medianen i det blå settet er 47 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 97 (øvre kvartil).

   38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

4. Kvartilbredde $= 97 - 47 = 50$

Undersøkelse 2

1. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14
2. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14
3. Medianen i det blå settet er 1 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 7 (øvre kvartil).

   0 0 1 1 4 4 4 5 6 6 7 8 8 14

4. Kvartilbredde $= 7 - 1 = 6$

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt)

- For mobiler totalt er kvartilbredden: 200
- For mobiler uten smartfunksjoner er kvartilbredden: 1010
- For mobiler med smartfunksjoner er kvartilbredden: 703

Språkboksen

Nedre kvartil, medianen og øvre kvartil blir også kalt henholdsvis *1. kvartil*, *2. kvartil* og *3. kvartil*.

2.4.3 Avvik, varians og standardavvik

R 2.7 Varians

Differansen mellom en verdi og gjennomsnittet i et datasett kalles *avviket* til verdien.

Variansen til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Kvadrer avviket til hver verdi i datasettet, og summer disse.

2. Divider med antall verdier i datasettet.

Standardavviket er kvadratroten av variansen.

Eksempel

Gitt datasettet

$$2 \quad 5 \quad 9 \quad 7 \quad 7$$

Da har vi at

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{2+5+9+7+7}{5} = 6$$

Og videre er

$$\begin{aligned}\text{variansen} &= \frac{(2-6)^2+(5-6)^2+(9-6)^2+(7-6)^2+(7-6)^2}{5} \\ &= 5\end{aligned}$$

Da er standardavviket $= \sqrt{5} \approx 2{,}23$.

Undersøkelse 1

(Utregning utelatt)

Variansen er 754,01. Standardavviket er $\sqrt{754{,}01} \approx 27{,}46$

Undersøkelse 2

Gjennomsnittet fant vi på side 31. Vi utvider frekvenstabellen vår fra side 25:

antall epler	frekvens	frekvens · kvadrert avvik
0	2	$2 \cdot \left(0 - \frac{73}{15}\right)^2$
1	2	$2 \cdot \left(1 - \frac{73}{15}\right)^2$
4	3	$3 \cdot \left(4 - \frac{73}{15}\right)^2$
5	2	$2 \cdot \left(5 - \frac{73}{15}\right)^2$
6	2	$2 \cdot \left(6 - \frac{73}{15}\right)^2$
7	1	$1 \cdot \left(7 - \frac{73}{15}\right)^2$
8	2	$2 \cdot \left(8 - \frac{73}{15}\right)^2$
14	1	$1 \cdot \left(9 - \frac{73}{15}\right)^2$
sum	15	$189{,}7\overline{3}$

Altså er variansen

$$\frac{189{,}7\overline{3}}{15} \approx 12{,}65$$

Da er standardavviket $\sqrt{12{,}65} \approx 3.57$

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt)

- For mobiler totalt er variansen 17 781,25 og standardavviket ca. 133,4.
- For mobiler uten smartfunksjoner er variansen $318\,848.\overline{3}$ og standardavviket ca. 17,87
- For mobiler med smartfunksjoner er variansen $245\,847.91\overline{6}$ og standardavviket ca. 495,83.

Hvorfor innebærer variansen kvadrering?

La oss se hva som skjer hvis vi gjentar utregningen fra *Eksempel 1* på side 40, men uten å kvadrere:

$$\frac{(2-6)+(5-6)+(9-6)+(7-6)+(7-6)}{5} = \frac{2+5+9+7+7}{5} - 6 \quad (2.1)$$

Men brøken $\frac{2+5+9+7+7}{5}$ er jo per definisjon gjennomsnittet til datasettet, og dermed blir uttrykket over lik 0. Dette vil gjelde for alle datasett, så i denne sammenhengen gir ikke tallet 0 noen ytterligere informasjon. Om vi derimot kvadrerer avvikene, unngår vi et uttrykk som alltid blir lik 0.

Oppgaver for kapittel 2

2.2.1

Gitt datasettet

$$2 \quad 12 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 10$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.2

Gitt datasettet

$$9 \quad 12 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 5 \quad 8 \quad 4 \quad 10 \quad 5 \quad 6$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.3

Gitt datasettet

$$11 \quad 7 \quad 16 \quad 0 \quad 8 \quad 9 \quad 8 \quad 5 \quad 16 \quad 5$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.4

Gitt datasettet

$$6 \quad 11 \quad 14 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad 8 \quad 5 \quad 11 \quad 5 \quad 11 \quad 17$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.5

Du ønsker å finne ut hva nordmenn flest har i formue[1], og bestemmer deg for å finne ut av dette ved å spørre fem tilfeldige personer du møter i gata. De fire første svarene (i kr) er disse:

3,2 millioner 2,9 millioner 1,8 millioner 4,2 millioner

Den siste personen du tilfeldigvis møter er mannen i Norge med høyest formue[2], Gustav Magnar Witzøe. Hans svar er dette:

20 915,3 millioner

a) Finn medianen i datasettet.

b) Finn gjennomsnittet i datasettet.

c) Er det medianen eller gjennomsnittet som trolig best representerer hva nordmenn flest har i formue?

2.2.6

Lag en frekvenstabell for datasettet under. (La tittelen til venstre kolonne være "frukt".)

banan eple eple eple pære banan eple pære
appelsin eple pære pære

2.2.7

Lag en frekvenstabell for datasettet fra oppgave 2.2.4. (La tittelen til venstre kolonne være "tall".)

2.2.8

a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.6.

b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.7.

2.2.9

a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.6.

b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.7.

---

[1] Enkelt sagt er formue summen av penger du har i banken, verdier av hus, bil etc., fratrekt gjeld o.l.

[2] Ifølge ligningstallene for 2019.

2.2.10

Av de fire undersøkelsene på side 24, hvorfor har vi

a) vist frekvenstabell bare for undersøkelse 2?

b) vist søylediagram bare for undersøkelse 2 og 3?

c) vist sektordiagram bare for undersøkelse 2 og ?

d) vist linjediagram bare for undersøkelse 4?

2.2.11

Hvis datasettet har partalls antall svar kan man også finne medianen slik:

1. Finn de to tallene i midten.
2. Finn differansen mellom tallene, og del denne med 2.
3. Legg resultatet fra punkt 2 til det laveste av de to tallene i midten.

a) Prøv metoden på datasettet fra oppgave 2.2.3.

2.2.12

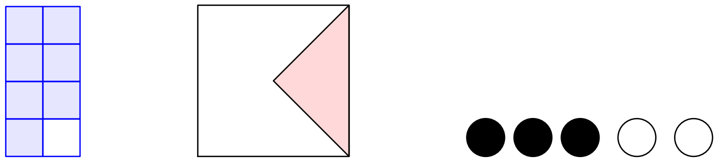
Av de fire undersøkelsene på side 24, hvorfor har vi ikke funnet sentral- og spredningsmål for undersøkelse 3?

Kapittel 3

Brøkregning

3.1 Brøkdeler av helheter

I MB (s. 35 - 47) har vi sett hvordan brøker er definert ut ifra en inndeling av 1. I hverdagen bruker vi også brøker for å snakke om inndelinger av en helhet:



(a) (b) (c)

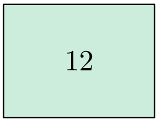
(a) Helheten er 8 ruter. $\frac{7}{8}$ av rutene er blå.

(b) Helheten er et kvadrat. $\frac{1}{4}$ av kvadratet er rødt.

(c) Helheten er 5 kuler. $\frac{3}{5}$ av kulene er svarte.

Brøkdeler av tall

Si at rektangelet under har verdien 12.



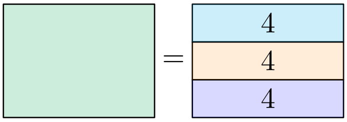
Når vi sier "$\frac{2}{3}$ av 12" mener vi at vi skal

a) dele 12 inn i 3 like grupper.

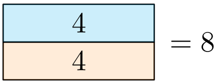
b) finne ut hvor mye 2 av disse gruppene utgjør til sammen.

Vi har at

a) 12 delt inn i 3 grupper er lik $12 : 3 = 4$.



b) 2 grupper som begge har verdi 4 blir til sammen $2 \cdot 4 = 8$.



Altså er

$$\frac{2}{3} \text{ av } 12 = 8$$

For å finne $\frac{2}{3}$ av 12, delte vi 12 med 3, og ganget kvotienten med 2. Dette er det samme som å gange 12 med $\frac{2}{3}$ (se MB, s. 45 og 50).

R 3.1 Brøkdelen av et tall

For å finne brøkdelen av et tall, ganger vi brøken med tallet.

$$\frac{a}{b} \text{ av } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

Eksempel 1

Finn $\frac{2}{5}$ av 15.

Svar

$$\frac{2}{5} \text{ av } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

Eksempel 2

Finn $\frac{7}{9}$ av $\frac{5}{6}$.

Svar

$$\frac{7}{9} \text{ av } \frac{5}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$$

Språkboksen

Deler av en helhet blir også kalt *andeler*.

3.2 Prosent

Brøker er ypperlige til å oppgi andeler av en helhet fordi de gir et raskt bilde av hvor mye det er snakk om. For eksempel er det lett å se (omtrent) hvor mye $\frac{3}{5}$ eller $\frac{7}{12}$ av en kake er. Men ofte er det ønskelig å raskt avgjøre hvilke andeler som utgjør *mest*, og da er det best om brøkene har samme nevner.

Når andeler oppgis i det daglige, er det vanlig å bruke brøker med 100 i nevner. Brøker med denne nevneren er så mye brukt at de har fått sitt eget navn og symbol.

R 3.2 Prosenttall

$$a\% = \frac{a}{100}$$

Språkboksen

% uttales *prosent*. Ordet kommer av det latinske *per centum*, som betyr *per hundre*.

Eksempel 1

$$43\% = \frac{43}{100}$$

Eksempel 2

$$12{,}7\% = \frac{12{,}7}{100}$$

Merk: Det er kanskje litt uvant, men ikke noe galt med å ha et desimaltall i teller (eller nevner).

Eksempel 3

Finn verdien til

a) 12%   b) 19,6%   c) 149%

Svar

(Se *regel* **??**)

a) $12\% = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$

b) $19{,}6\% = \dfrac{19{,}6}{100} = 0{,}196$

c) $149\% = \dfrac{149}{100} = 1{,}49$

Eksempel 4

Gjør om brøkene til prosenttall.

a) $\dfrac{34}{100}$

b) $\dfrac{203}{100}$

Svar

a) $\dfrac{34}{100} = 34\%$

b) $\dfrac{203}{100} = 203\%$

Eksempel 5

Finn 50% av 800. Av *regel 3.1* og *regel 3.2* har vi at

Svar

$$50\% \text{ av } 800 = \frac{50}{100} \cdot 800 = 400$$

Eksempel 6

Finn 2% av 7,4.

Svar

$$2\% \text{ av } 7{,}4 = \frac{2}{100} \cdot 7{,}4 = 0{,}148$$

Tips

Å dele med 100 er såpass enkelt, at vi gjerne kan uttrykke prosenttall som desimaltall når vi gjør utregninger. I *Eksempel 5* over kunne vi har regnet slik:

$$2\% \text{ av } 7{,}4 = 0{,}02 \cdot 7{,}4 = 0{,}148$$

Prosentdeler

Hvor mange prosent utgjør 15 av 20?

15 er det samme som $\frac{15}{20}$ av 20, så svaret på spørsmålet får vi ved å gjøre om $\frac{15}{20}$ til en brøk med 100 i nevner. Siden $20 \cdot \frac{100}{20} = 100$, utvider vi brøken vår med $\frac{100}{20} = 5$:

$$\frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100}$$

15 utgjør altså 75% av 20. Vi kunne fått 75 direkte ved utregningen

$$15 \cdot \frac{100}{20} = 75$$

R 3.3 Antall prosent *a* utgjør av *b*

$$\text{Antall prosent } a \text{ utgjør av } b = a \cdot \frac{100}{b} \tag{3.1}$$

Eksempel 1

Hvor mange prosent utgjør 340 av 400?

Svar

$$340 \cdot \frac{100}{400} = 85$$

340 utgjør 85% av 400.

Eksempel 2

Hvor mange prosent utgjør 119 av 500?

Svar

$$119 \cdot \frac{100}{500} = 23{,}8$$

119 utgjør 23,8% av 500.

Tips

Å gange med 100 er såpass enkelt å ta i hodet at man kan ta det bort fra selve utregningen. *Eksempel 2* over kunne vi da regnet slik:

$$\frac{119}{500} = 0{,}238$$

119 utgjør altså 23,8% av 500. (Her regner man i hodet at $0{,}238 \cdot 100 = 23{,}8$.)

3.2.1 Prosentvis endring; økning eller redusering

Økning

Med utsagnet "200 økt med 30%" menes dette:

Start med 200, og legg til 30% av 200.

Altså er

$$\begin{aligned} \text{200 økt med 30\%} &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 + 60 \\ &= 260 \end{aligned}$$

I uttrykket over kan vi legge merke til at 200 er å finne i begge ledd, dette kan vi utnytte til å skrive

$$\begin{aligned} \text{200 økt med 30\%} &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 \cdot (1 + 30\%) \\ &= 200 \cdot (100\% + 30\%) \\ &= 200 \cdot 130\% \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\text{200 økt med 30\%} = \text{130\% av 200}$$

Redusering

Med utsagnet "Reduser 200 med 60%" menes dette:

Start med 200, og trekk ifra 60% av 200

Altså er

$$\begin{aligned} \text{200 redusert med 60\%} &= 200 - 200 \cdot 60\% \\ &= 200 - 120 \\ &= 80 \end{aligned}$$

Også her legger vi merke til at 200 opptrer i begge ledd i utregningen:

$$
\begin{aligned}
200 \text{ økt med } 30\% &= 200 - 200 \cdot 60\% \\
&= 200 \cdot (1 - 60\%) \\
&= 200 \cdot 40\%
\end{aligned}
$$

Dette betyr at

$$200 \text{ redusert med } 60\% = 40\% \text{ av } 200$$

Prosentvis endring oppsummert

R 3.4 Prosentvis endring

- Når en størrelse reduseres med $a\%$, ender vi opp med $(100\% - a\%)$ av størrelsen.
- Når en størrelse øker med $a\%$, ender vi opp med $(100\% + a\%)$ av størrelsen.

Eksempel 1

Hva er 210 redusert med 70%?

Svar

$100\% - 70\% = 30\%$, altså er

$$
\begin{aligned}
210 \text{ redusert med } 70\% &= 30\% \text{ av } 210 \\
&= \frac{30}{100} \cdot 210 \\
&= 63
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Hva er 208,9 økt med 124,5%?

Svar

$100\% + 124{,}5\% = 224{,}5\%$, altså er

$$
\begin{aligned}
208{,}9 \text{ økt med } 124{,}5 &= 224{,}5\% \text{ av } 208{,}9 \\
&= \frac{224{,}5}{100} \cdot 208{,}9
\end{aligned}
$$

Språkboksen

Rabatt er en pengesum som skal trekkes ifra en pris når det gis tilbud. Dette kalles også et *avslag* på prisen. Rabatt oppgis enten i antall kroner eller som prosentdel av prisen.

Merverdiavgiften (mva.) er en avgift som legges til prisen på de aller fleste varer som selges. Merverdiavgift oppgis som regel som prosentdel av prisen.

Eksempel 3

I en butikk kostet en skjorte først 500 kr , men selges nå med 40% *rabatt.*

Hva er den nye prisen på skjorta?

Svar

(Vi tar ikke med kr i utregningene)

Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale 100% − 40% = 60% av 500:

$$
\begin{aligned}
60\% \text{ av } 500 &= \frac{60}{100} \cdot 500 \\
&= 300
\end{aligned}
$$

Med rabatt koster altså skjorta 300 kr.

Eksempel 4

På bildet står det at prisen på øreklokkene er 999,20 kr *ekskludert* mva. og 1 249 *inkludert* mva. For øreklokker er mva. 25% av prisen.

Undersøk om prisen der mva. er inkludert er rett.

Svar

(Vi tar ikke med 'kr' i utregningene)

Når vi inkluderer mva., må vi betale 100% + 25% av 999,20:

$$
\begin{aligned}
125\% \text{ av } 999{,}20 &= \frac{125}{100} \cdot 999{,}20 \\
&= 1249
\end{aligned}
$$

Altså 1249 kr, som også er opplyst på bildet.

3.2.2 Vekstfaktor

På side 53 økte vi 200 med 30%, og endte da opp med 130% av 200. Vi sier da at *vekstfaktoren* er 1,3. På side 53 reduserte vi 200 med 60%, og endte da opp med 40% av 200. Da er vekstfaktoren 0,40.

Mange stusser over at ordet vekstfaktor brukes selv om en størrelse *synker*, men slik er det. Kanskje et bedre ord ville være *endringsfaktor*?

R 3.5 Vekstfaktor I

Når en størrelse endres med $a\%$, er vekstfaktoren verdien til $100\% \pm a\%$.

Ved økning skal $+$ brukes, ved redusering skal $-$ brukes.

Eksempel 1

En størrelse økes med 15%. Hva er vekstfaktoren?

Svar

$100\% + 15\% = 115\%$, altså er vekstfaktoren 1,15.

Eksempel 2

En størrelse reduseres med 19,7%. Hva er vekstfaktoren?

Svar

$100\% - 19{,}7\% = 80{,}3\%$, altså er vekstfaktoren 0,803

La oss se tilbake til *Eksempel 1* på side 54, hvor 210 ble redusert med 70%. Da er vekstfaktoren 0,3. Videre er

$$0{,}3 \cdot 210 = 63$$

Altså, for å finne ut hvor mye 210 redusert med 70% er, kan vi gange 210 med vekstfaktoren (forklar for deg selv hvorfor!).

R 3.6 Prosentvis endring med vekstfaktor

$$\text{endret originalverdi} = \text{vekstfaktor} \cdot \text{originalverdi}$$

Eksempel 1

En vare verd 1 000 kr er rabattert med 20%.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Finn den nye prisen.

Svar

a) Siden det er 20% rabbatt, må vi betale $100\% - 20\% = 80\%$ av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.

b) Vi har at

$$0{,}8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså 800 kr .

Eksempel 2

En sjokolade koster 9,80 kr , ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Hva koster sjokoladen inkludert mva.?

Svar

a) Med 15% i tillegg må vi betale 100%+15% = 115% av prisen eksludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.

b)
$$1{,}15 \cdot 9.90 = 12{,}25$$
Sjokoladen koster 12,25 kr inkludert mva.

Vi kan også omksrive likningen[1] fra *regel 3.6* for å få et uttrykk for vekstfaktoren:

R 3.7 Vekstfaktor II

$$\text{vekstfaktor} = \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$$

Å finne den prosentvise endringen

Når man skal finne en prosentvis endring, er det viktig å være klar over at det er snakk om prosent *av* en helhet. Denne helheten man har som utgangspunkt er den originale verdien.

La oss som et eksempel si at Jakob tjente 10 000 kr i 2019 og 12 000 kr i 2020. Vi kan da stille spørsmålet ”Hvor mye endret lønnen til Jakob seg med fra 2019 til 2020, i prosent?”.

Spørsmålet tar utgangspunkt i lønnen fra 2019, dette betyr at 10 000 er vår originale verdi. To måter å finne den prosentvise endringen på er disse (vi tar ikke med ’kr’ i utregningene):

[1]Se *kapittel 4* for hvordan skrive om likninger.

- Lønnen til Jakob endret seg fra 10 000 til 12 000, en forandring på $12\,000 - 10\,000 = 2\,000$. Videre er (se *regel 3.3*)

$$\begin{aligned}\text{antall prosent } 2\,000 \text{ utgjør av } 10\,000 &= 2\,000 \cdot \frac{100}{10\,000} \\ &= 20\end{aligned}$$

  Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med 20%.

- Vi har at

$$\frac{12\,000}{10\,000} = 1{,}2$$

  Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med en vekstfaktor lik 1,2 (se *regel 3.6*). Denne vekstfaktoren tilsvarer en endring lik 20% (se *regel 3.5*). Det betyr at lønnen økte med 20%.

R 3.8 Prosentvis endring I

$$\text{prosentvis endring} = \frac{\text{endret originalverdi} - \text{originalverdi}}{\text{originalverdi}} \cdot 100$$

Hvis 'prosentvis endring' er et positivt/negativt tall, er det snakk om en prosentvis økning/reduksjon.

Kommentar

regel 3.8 kan se litt voldsom ut, og er ikke nødvendigvis så lett å huske. Hvis du virkelig har forstått *delseksjon 3.2.1*, kan du uten å bruke *regel 3.8* finne prosentvise endringer trinnvis. I påfølgende eksempel viser vi både en trinnvis løsningsmetode og en metode ved bruk av formel.

Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

Svar

Vi starter med å merke oss at det er medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

Metode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, altså var det $20-12=8$ som sluttet. Vi har at

$$\text{antall prosent 4 utgjør av } 20 = 8\cdot\frac{100}{20} = 40$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Metode 2; formel

Vi har at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= \frac{12-20}{20}\cdot 100\\ &= -\frac{8}{20}\cdot 100\\ &= -40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Merk: At medlemmer slutter, innebærer en *reduksjon* i medlemstall. Vi forventet derfor at 'prosentvis endring' skulle være et negativt tall.

R 3.9 Prosentvis endring II

$$\text{prosentvis endring} = 100\,(\text{vekstfaktor}-1)$$

Merk

regel 3.8 og *regel 3.9* gir begge formler som kan brukes til å finne prosentvise endringer. Her er det opp til en selv å velge hvilken man liker best.

Eksempel 1

I 2019 tjente du 12 000 kr og i 2020 tjente du 10 000 kr. Beskriv endringen i din inntekt, med inntekten i 2019 som utganspunkt.

Svar

Her er 12 000 vår originalveri. Av *regel 3.7* har vi da at

$$\begin{aligned}\text{vekstfaktor} &= \frac{10\,000}{12\,000}\\ &= 0{,}8\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= 100(0{,}8-1)\\ &= 100(-0{,}2)\\ &= -20\end{aligned}$$

Altså er lønnen *redusert* med 20% i 2020 sammenliknet med lønnen i 2019.

3.2.3 Prosentpoeng

Ofte snakker vi om mange størrelser samtidig, og når man da bruker prosent-ordet kan setninger bli veldig lange og knotete hvis man også snakker om forskjellige originalverdier (utgangspunkt). For å forenkle setningene, har vi begrepet *prosentpoeng*.

Tenk at et par solbriller først ble solgt med 30% rabatt av originalprisen, og etter det med 80% rabatt av originalprisen. Da sier vi at rabatten har økt med 50 *prosentpoeng*.

80% − 30% = 50%

Hvorfor kan vi ikke si at rabatten har økt med 50%?

Tenk at solbrillene hadde originalpris 1 000 kr. 30% rabatt på 1 000 kr tilsvarer 300 kr i rabatt. 80% rabatt på 1000 kr tilsvarer 800 kr i rabatt. Men hvis vi øker 300 med 50%, får vi $300 \cdot 1{,}5 = 450$, og det er ikke det samme som 800! Saken er at vi har to forskjellige originalverdier som utgangspunkt:

"Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten 80%."

Forklaring: "Rabatten" er en størrelse vi regner ut ifra orignalprisen til solbrillene. Når vi sier "prosentpoeng" viser vi til at **originalprisen fortsatt er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med $1\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}3 = 300\,\text{kr}$ i rabatt. Når vi legger til 50 *prosentpoeng*, legger vi til 50% av originalprisen, altså $1\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}5 = 500\,\text{kr}$. Totalt blir det 800 kr i rabatt, som utgjør 80% av originalprisen.

"Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten 45%."

Forklaring: "Rabatten" er en størrelse vi regner ut ifra orignalprisen til solbrillene, men her viser vi til at **rabatten er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med 300 kr i rabatt. Videre er

$$300\,\text{kr økt med } 50\% = 300\,\text{kr} \cdot 1{,}5 = 450\,\text{kr}$$

og

$$\text{antall prosent 450 utgjør av } 1\,000 = \frac{450}{100} = 45$$

Altså er den nye rabatten 45%.

I de to (gule) tekstboksene over regnet vi ut den økte rabatten via originalprisen på solbrillene (1 000 kr). Dette er strengt tatt ikke nødvendig:

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten
$$30\% + 50\% = 80\%$$
- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten
$$30\% \cdot 1{,}5 = 45\%$$

R 3.10 Prosentpoeng

$a\%$ økt/redusert med b prosentpoeng $= a\% \pm b\%$.

$a\%$ økt/redusert med $b\% = a\% \cdot (1 \pm b\%)$

Merk

Andre linje i *regel 3.10* er egentlig identisk med *regel 3.6*.

Eksempel

En dag var 5% av elevene på en skole borte. Dagen etter var 7,5% av elevene borte.

a) Hvor mange prosentpoeng økte fraværet med?

b) Hvor mange prosent økte fraværet med?

Svar

a) $7{,}5\% - 5\% = 2{,}5\%$, derfor har fraværet økt med 2,5 prosentpoeng.

b) Her må vi svare på hvor mye endringen, altså 2,5%, utgjør av 5%. Av *regel 3.3* har vi at

$$\begin{aligned}\text{antall prosent } 2{,}5\% \text{ utgjør av } 5\% &= 2{,}5\% \cdot \frac{100}{5\%} \\ &= 50\end{aligned}$$

Altså har fraværet økt med 50%.

Merk

Å i *Eksempel 1* over stille spørsmålet "Hvor mange prosentpoeng økte fraværet med?", er det samme som å stille spørsmålet "Hvor mange prosent av det totale elevantallet økte fraværet med?".

3.2.4 Gjentatt prosentvis endring

Hva om vi foretar en prosentvis endring gjentatte ganger? La oss som et eksempel starte med 2000, og utføre 10% økning 3 påfølgende ganger (se *regel 3.6*):

$$\text{verdi etter 1. endring} = \overbrace{2000}^{\text{originalverdi}} \cdot 1{,}10 = 2\,200$$

$$\text{verdi etter 2. endring} = \overbrace{2\,000 \cdot 1{,}10}^{2\,200} \cdot 1{,}10 = 2\,420$$

$$\text{verdi etter 3. endring} = \overbrace{2\,420 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10}^{2\,420} \cdot 1{,}10 = 2\,662$$

Mellomregningen vi gjorde over kan kanskje virke unødvendig, men utnytter vi skrivemåten for potenser[1] kommer et mønster til syne:

$$\text{verdi etter 1. endring} = 2\,000 \cdot 1{,}10^1 = 2\,200$$
$$\text{verdi etter 2. endring} = 2\,000 \cdot 1{,}10^2 = 2\,420$$
$$\text{verdi etter 3. endring} = 2\,000 \cdot 1{,}10^3 = 2\,662$$

R 3.11 Gjentatt vekst eller nedgang

$$\text{ny verdi} = \text{originalverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^{\text{antall endringer}}$$

Eksempel 1

Finn den nye verdien når 20% økning utføres 6 påfølgende ganger med 10 000 som originalverdi.

Svar

Vekstfaktoren er 1,2, og da er

$$\begin{aligned}\text{ny verdi} &= 10\,000 \cdot 1{,}2^6 \\ &= 29\,859{,}84\end{aligned}$$

[1]Se MB, s.101

Eksempel 2

Marion har kjøpt seg en ny bil til en verdi av 300 000 kr, og hun forventer at verdien vil synke med 12% hvert år de neste fire årene. Hva er bilen da verd om fire år?

Svar

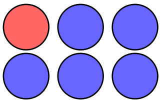
Siden den årlige nedgangen er 12%, blir vekstfaktoren 0,88. Starverdien er 300 000, og tiden er 4:

$$300\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 179\,908$$

Marion forventer altså at bilen er verdt ca. 179 908 kr om fire år.

3.3 Forhold

Med *forholdet* mellom to størrelser mener vi den ene størrelsen delt på den andre. Har vi for eksempel 1 rød kule og 5 blå kuler, sier vi at



$$\text{forholdet mellom antall røde kuler og antall blå kuler} = \frac{1}{5}$$

Forholdet kan vi også skrive som $1:5$. Verdien til dette regnestykket er

$$1:5 = 0{,}2$$

Om vi skriver forholdet som brøk eller som delestykke vil avhenge litt av oppgavene vi skal løse.

I denne sammenhengen kalles 0,2 *forholdstallet*.

R 3.12 Forhold

$$\text{forholdet mellom } a \text{ og } b = \frac{a}{b}$$

Verdien til brøken kalles forholdstallet.

Eksempel 1

I en klasse er det 10 handballspillere og 5 fotballspillere.

a) Hva er forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere?

b) Hva er forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere?

Svar

a) Forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere er

$$\frac{10}{5} = 2$$

b) Forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere er

$$\frac{5}{10} = 0{,}5$$

3.3.1 Målestokk

I MB (s.145 - 149) har vi sett på formlike trekantar. Prinsippet om at forholdet mellom samsvarende sider er det samme, kan utvides til å gjelde de fleste andre former, som f. eks. firkanter, sirkler, prismer, kuler osv. Dette er et fantastisk prinsipp som gjør at små tegninger eller figurer (modeller) kan gi oss informasjon om størrelsene til virkelige gjenstander.

R 3.13 Målestokk

En målestokk er forholdet mellom en lengde på en modell av en gjenstand og den samsvarende lengden på den virkelige gjenstanden.

$$\text{målestokk} = \frac{\text{en lengde i en modell}}{\text{den samsvarende lengden i virkeligheten}}$$

Eksempel 1

På en tegning av et hus er en vegg 6 cm. I virkeligheten er denne veggen 12 m.

Hva er målestokken på tegningen?

Svar

Først må vi passe på at lengdene har samme benevning[1]. Vi gjør om 12 m til antall cm:

$$12\,\text{m} = 1200\,\text{cm}$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned}\text{målestokk} &= \frac{6\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} \\ &= \frac{6}{12}\end{aligned}$$

Vi bør også prøve å forkorte brøken så mye som mulig:

$$\text{målestokk} = \frac{1}{6}$$

[1]Se *seksjon 1.4*.

Tips

Målestokk på kart er omtrent alltid gitt som en brøk med teller lik 1. Dette gjør at man kan lage seg disse reglene:

$$\text{lengde i virkelighet} = \text{lengde på kart} \cdot \text{nevner til målestokk}$$

$$\text{lengde i virkelighet} = \frac{\text{lengde på kart}}{\text{nevner til målestokk}}$$

Eksempel 2

Kartet under har målestokk $1 : 25\,000$.

a) Luftlinjen (den blå) mellom Helland og Vike er $10{,}4\,\text{cm}$ på kartet. Hvor langt er det mellom Helland og Vike i virkeligheten?

b) Tresfjordbrua er ca 1300 m i virkeligheten. Hvor lang er Tresfjordbrua på kartet?

../fig/vikves **Svar**

a) $$\begin{aligned}\text{Virkelig avstand mellom Helland og Vike} &= 10{,}4\,\text{cm} \cdot 25\,000 \\ &= 260\,000\,\text{cm}\end{aligned}$$

b) Lengde til Tresfjordbrua på kart $= \frac{1\,300\,\text{m}}{25\,000} = 0{,}0052\,\text{m}$

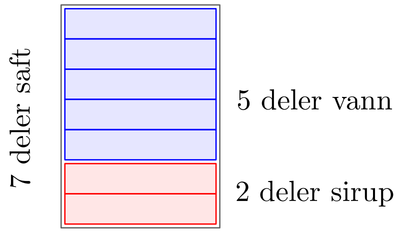
3.3.2 Blandingsforhold

I mange sammenhenger skal vi blande to sorter i riktig forhold.

På en flaske med solbærsirup kan du for eksempel lese symbolet "2 +5", som betyr at man skal blande sirup og vann i forholdet 2 : 5. Heller vi 2 dL sirup i en kanne, må vi fylle på med 5 dL vann for å lage saften i rett forhold.

Blander du solbærsirup og vann, får du solbærsaft :-)

Noen ganger bryr vi oss ikke om *hvor mye* vi blander, så lenge forholdet er rikitig. For eksempel kan vi blande to fulle bøtter med solbærsirup med fem fulle bøtter vann, og fortsatt være sikre på at forholdet er riktig, selv om vi ikke vet hvor mange liter bøtta rommer. Når vi bare bryr oss om forholdet, bruker vi ordet *del*. "2 + 5" på sirupflasken leser vi da som "2 deler sirup på 5 deler vann". Dette betyr at saften vår i alt inneholder $2 + 5 = 7$ deler:



Dette betyr at 1 del utgjør $\frac{1}{7}$ av blandingen, sirupen utgjør $\frac{2}{7}$ av blandingen, og vannet utgjør $\frac{5}{7}$ av blandingen.

R 3.14 Deler i et forhold

En blanding med forholdet $a : b$ har til sammen $a + b$ deler.

- 1 del utgjør $\frac{1}{a+b}$ av blandingen.
- a utgjør $\frac{a}{a+b}$ av blandingen.
- b utgjør $\frac{b}{a+b}$ av blandingen.

Eksempel 1

Ei kanne som rommer 21 dL er fylt med en saft der sirup og vann er blandet i forholdet $2 : 5$.

a) Hvor mye vann er det i kanna?

b) Hvor mye sirup er det i kanna?

Svar

a) Til sammen består saften av $2 + 5 = 7$ deler. Da 5 av disse er vann, må vi ha at

$$\begin{aligned} \text{mengde vann} &= \frac{5}{7} \text{ av } 21\,\text{dL} \\ &= \frac{5 \cdot 21}{7}\,\text{dL} \\ &= 15\,\text{dL} \end{aligned}$$

b) Vi kan løse denne oppgaven på samme måte som oppgave a), men det er raskere å merke seg at hvis vi har 15 dL vann av i alt 21 dL, må vi ha $(21 - 15)\,\text{dL} = 6\,\text{dL}$ sirup.

Eksempel 2

I et malerspann er grønn og rød maling blandet i forholdet $3:7$, og det er $5\,\mathrm{L}$ av denne blandingen. Du ønsker å gjøre om forholdet til $3:11$.

Hvor mye rød maling må du helle oppi spannet?

Svar

I spannet har vi $3+7=10$ deler. Siden det er $5\,\mathrm{L}$ i alt, må vi ha at

$$\begin{aligned} 1 \text{ del} &= \frac{1}{10} \text{ av } 5\,\mathrm{L} \\ &= \frac{1\cdot 5}{10}\,\mathrm{L} \\ &= 0{,}5\,\mathrm{L} \end{aligned}$$

Når vi har 7 deler rødmaling, men ønsker 11, må vi blande oppi 4 deler til. Da trenger vi

$$4\cdot 0{,}5\,\mathrm{L} = 2\,\mathrm{L}$$

Vi må helle oppi $2\,\mathrm{L}$ rødmaling for å få forholdet $3:11$.

Eksempel 3

I en ferdig blandet saft er forholdet mellom sirup og vann $3:5$.

Hvor mange deler saft og/eller vann må du legge til for at forholdet skal bli $1:4$?

Svar

Brøken vi ønsker, $\frac{1}{4}$, kan vi skrive om til en brøk med samme teller som brøken vi har (altså $\frac{3}{5}$):

$$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{3}{12}$$

I vårt opprinnelige forhold har vi 3 deler sirup og 5 deler vann. Skal dette gjøres om til 3 deler sirup og 12 deler vann, må vi legge til 7 deler vann.

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1
Finn

a) $\frac{2}{3}$ av 9. b) $\frac{5}{8}$ av 24. c) $\frac{7}{2}$ av 12. d) $\frac{10}{4}$ av 32.

3.1.2

a) Finn $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$.

b) Finn $\frac{6}{7}$ av $\frac{8}{11}$.

c) Finn $\frac{9}{10}$ av $\frac{2}{13}$.

3.1.3
Du har startet et firma i lag med en venn, og dere har blitt enige om at du skal få $\frac{3}{5}$ av det firmaet tjener. Hvis firmaet tjener 600 000 kr, hvor mange kroner får du?

3.2.1
Skriv om brøkene til prosenttall

a) $\dfrac{78}{100}$ b) $\dfrac{91{,}2}{100}$ c) $\dfrac{0{,}7}{100}$ d) $\dfrac{193{,}54}{100}$

3.2.2
Skriv verdien til

a) 57% b) 98,1% c) 219% d) 0,3%

3.2.3
Skriv om brøken til prosenttall

a) $\dfrac{7}{10}$ b) $\dfrac{11}{50}$ c) $\dfrac{9}{25}$ d) $\dfrac{29}{20}$

3.2.4
Finn

a) 20% av 500. b) 25% av 1000. c) 70% av 90.

c) 80% av 700. d) 15% av 200.

3.2.5

Hvor mange prosent utgjør

a) 4 av 10? b) 6 av 24? c) 21 av 49? d) 18 av 81?

3.2.6

Se tilbake til *Undersøkelse 2* på s. 24 og 27.

a) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart ”tiger”?

b) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart ”løve”?

c) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer ”krokodille”?

d) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer ”hund”?

3.2.7

a) Hva er 40 økt med 10%?

b) Hva er 250 økt med 30%?

c) Hva er 560 økt med 80%?

d) Hva er 320 økt med 100%?

e) Hva er 800 økt med 150%?

3.2.8

a) Hva er 40 senket med 10%?

b) Hva er 250 senket med 30%?

c) Hva er 560 senket med 80%?

3.2.9

Du kjøper en hest for 20 000 kr, og håper at verdien til hesten vil stige med 8% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

3.2.10

Du kjøper en ny gaming-PC til 20 000 kr, og regner med at verdien til PCen vil synke med 12% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

3.2.11

Si at originalprisen på en bukse er 500 kr. Først ble det gitt 20% rabatt på denne prisen, men etter en stund ble det gitt 30% rabatt. Avgjør hvilke av utsagnene under som er sann/ikke sann

(i) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, ble originalprisen redusert med 10%.

(ii) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, økte rabatten med 10%.

(iii) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, økte rabatten med 10 prosentpoeng.

3.3.1

a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7a).

b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7b).

c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7c).

3.3.2

a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8a).

b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8b).

c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8c).

3.3.3

Finn forholdet og forholdstallet mellom antall hester og griser når vi har:

a) 5 hester og 2 griser. **b)** 12 griser og 4 hester.

3.3.4

Totaktsmotorer krever som regel bensin som er tilsatt en viss mengde motorolje. STHIL er en produsent av motorsager drevet av slike motorer, på deres hjemmesider kan vi lese dette:

Vi anbefaler følgende blandingsforhold:
Ved STIHL 1 : 50-totaktsmotorolje:
1 : 50 => 1 del olje + 50 deler bensin

Si at vi skal fylle på 2,5 L bensin på motorsagen vår, hvor mye olje må vi da tilsette?

3.3.5

De fleste brus inneholder ca 10 g karbohydrater per 100 g. En type saftsirup inneholder 44 g karbohydrater per 100 g. Saften skal lages med 2 deler sirup og 9 deler vann.

Inneholder saften mer eller mindre karbohydrater per 100 g enn en brus? (I denne oppgaven går vi ut ifra at både 1 dL vann og 1 dL saftsirup veier 100 g.)

Kapittel 4

Likninger, formler og funksjoner

4.1 Å finne størrelser

Ligninger, formler og funksjoner er begrep som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. De fleste regelboksene i denne boka inneholder en formel. For eksempel inneholder *regel 3.13* en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, er det bare snakk om å sette disse inn i formelen for å finne 'målestokk'. Slik kan vi si at vi da finner 'målestokk' *direkte*. Har man gjort oppgaver tilknytt de tidlegere kapitlene, har man allerede øvd rikelig på det å finne størrelser *direkte*.

I denne seksjonen skal vi se på å det å finne størrelser *indirekte*. Med det mener vi at minst én av følgende gjelder:

- Vi må løse en likning for å finne den ukjente størrelsen.
- Vi må ut ifra en situasjonsbeskrivelse sette opp en formel som inneholder den ukjente størrelsen.

Merk

I denne seksjonen er det bare gitt eksempler, og ingen regler. Det er fordi vi bruker regler vi har sett på i kapitlene om ligninger og funksjoner i MB. Forskjellen er bare at vi her ser på størrelser med benevning.

Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
- I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.

a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.

b) Hva koster en taxitur på 17 km?

Svar

a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

Eksempel 2

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løs likningen.

Svar

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

$$\text{penger allerede skaffet} + \text{antall lodd} \cdot \text{penger per lodd} = \text{prisen på turen}$$

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatter[1] *antall lodd* med x, og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$
\begin{aligned}
25x &= 11\,000 - 2\,000 \\
25x &= 9\,000 \\
\frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\
x &= 360
\end{aligned}
$$

[1] Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 3

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U, og lag en formel for U.

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$
U = \frac{50\,000}{P}
$$

b) Vi erstatter P med 20, og får

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{50\,000}{20} \\
&= 2\,500
\end{aligned}
$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

Eksempel 4

Et sportsklubb planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

  Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

  Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

Svar

Vi innfører følgende variabler:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1
- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Busselskapene har samme pris når

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\ 4\,000 &= 20x \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis sportsklubben skal kjøre 200 km.

Eksempel 5

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for R.

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er $2\,\text{A}$ og spenningen $12\,\text{V}$, hva er da resistansen?

Svar

a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetstegnet:

$$
\begin{aligned}
I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\
I \cdot R &= U \\
\frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\
R &= \frac{U}{I}
\end{aligned}
$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{U}{I} \\
&= \frac{12}{2} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 6

Gitt en temperatur T_C målt i antall grader Celsius (°C). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit (°F) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for T_C.

b) Hvis en temperatur er målt til $59°F$, hva er da temperaturen målt i $°C$?

Svar

a) Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at

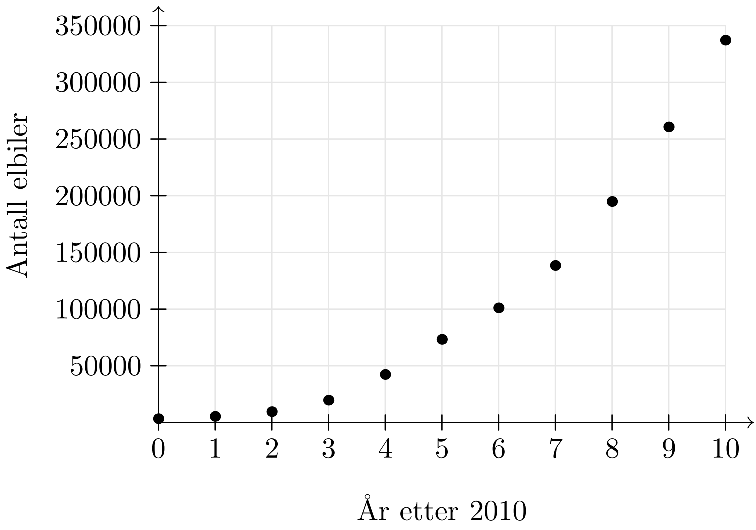
$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

59° F er altså det samme som 15° C.

4.2 Regresjon

Å forsøke å beskrive hvordan noe vil *utvikle* seg er en av de viktigste anvendelsene for funksjoner. Hvis vi har et datasett som beskriver tidligere hendelser, kan vi prøve å finne den funksjonen som passer best til datasettet. Dette kalles å utføre **regresjon**.

Grafen under viser[1] antall elbiler i Norge etter år 2010.



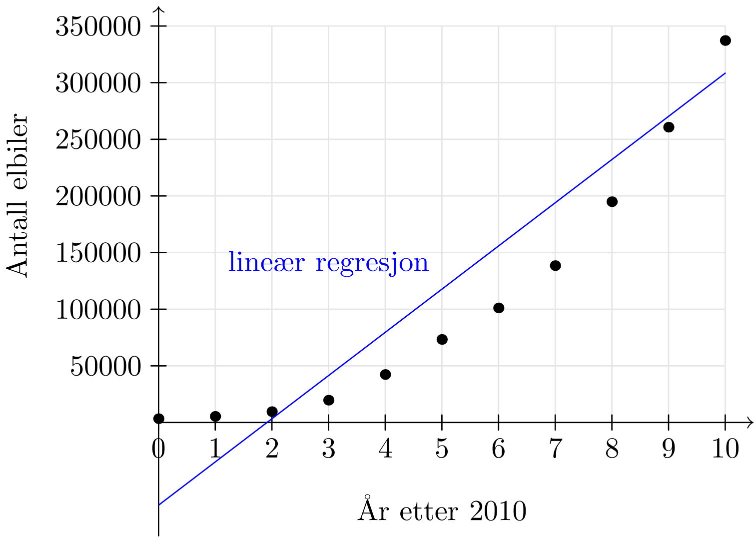
Vi ønsker nå å finne en funksjon som

(i) så godt som mulig skjærer hvert punkt.

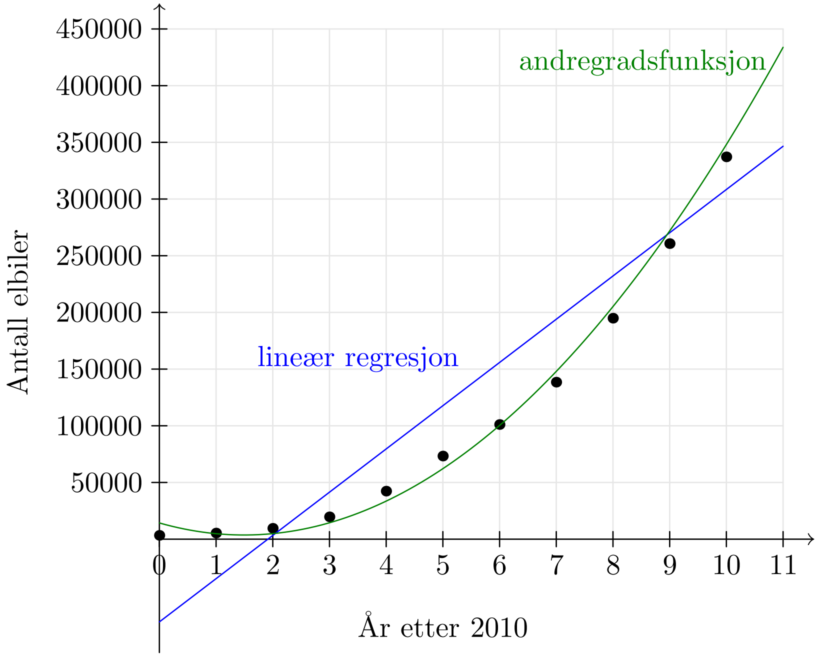
(ii) har en graf som passer til situasjonen vi modellerer.

Hvis vi utfører regresjon med en lineær funksjon i GeoGebra (se side **??**), får vi denne grafen:

[1]Tall hentet fra elbil.no



Utfører vi regresjon også med en andregradsfunksjon, får vi følgende resultat:

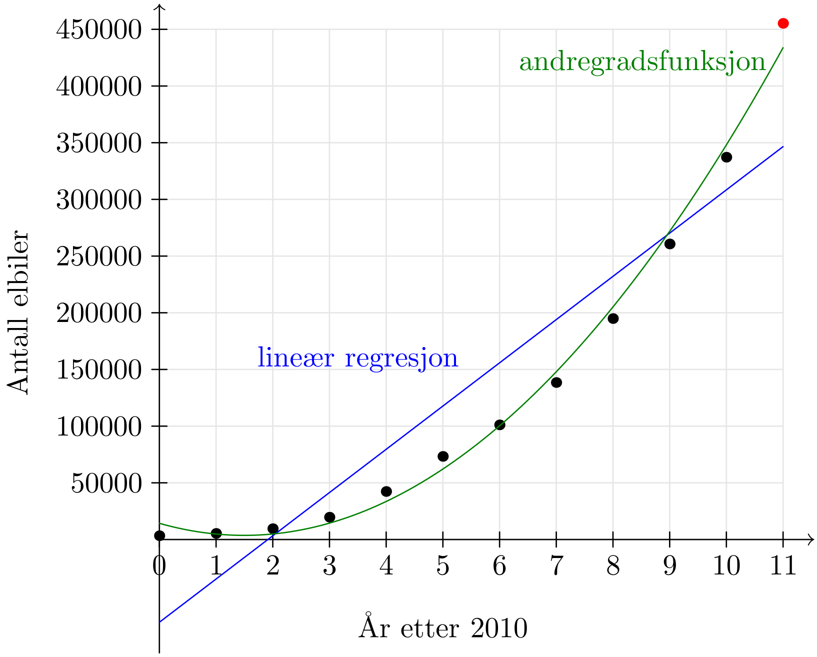


I figuren over kan vi merke oss at

- begge modellene (funksjonene) "oppfører" seg feilaktig i starten. Den lineære funksjonen starter med et negativt antall biler, mens den kvadratiske funksjonen starter med at antallet synker fra år 0 til år 1.

- Grafen til den kvadratiske passer punktene mye bedre enn grafen til den lineære funksjonen.

Hvis vi hadde antatt at den lineære funksjonen ga en god beskrivelse av antallet elbiler fremover i tid, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var ca. 350 000. Hadde vi i stedet antatt det samme om den kvadratiske funksjonen, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var litt over 425 000. Fasit er at antall elbiler i 2021 var 455 271.



Oppgaver for kapittel 4

4.2.1

Vanlig gåfart regnes for å være ca. 1,5 m/s. Hvor langt har man da gått

a) etter 25 min?

b) etter 3 timer?

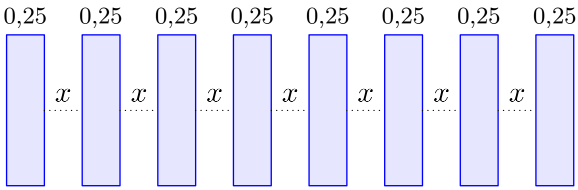
4.2.2

Ola og Kari tilbyr et kurs i svømming. For kurset tjener de til sammen 12 000 kr. Ola er assistenten til Kari, og Kari skal ha dobbelt så mye av inntekten som Ola.

Hvor mye tjener Ola og hvor mye tjener Kari for kurset?

4.2.3

Du skal snekre et gjerde som er 3,4 m langt. For å lage gjerdet skal du bruke 8 planker som er 0,25 m breie, som vist i figuren under:



Det skal være den samme avstanden mellom alle plankene. Hvor lang er denne avstanden?

4.2.4

a) Skriv dette som en likning: "Volumet til en firkantet prisme med bredde 4, lengde 7 og høgde x er 252."

b) Løs likningen fra oppgave a).

4.2.5

a) Skriv dette som en likning: "35% av x er lik 845".

b) Løs likningen fra oppgave a).

4.2.6

Det gis 360 kr rabatt på en vare, og dette tilsvarer 20% av prisen.

a) La x være prisen på varen. Sett opp en likning som beskriver informasjonen gitt over.

b) Finn prisen på varen.

4.2.7

Prisen på en vare er først senket med 20%, og så er den nye prisen senket med 50%. Etter dette koster varen 400 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

4.2.8

Du skal lage et lotteri der forholdet mellom antall vinnerlodd og taperlodd er $\frac{1}{8}$. Hvor mange taperlodd må du lage hvis du skal ha 160 vinnerlodd?

4.2.9

Makspuls er et mål på hvor mange hjerteslag hjertet maksimalt kan slå i løpet av et minutt. På siden trening.no kan man lese dette:

> ”Den tradisjonelle metoden å estimere maksimalpuls er å ta utgangspunkt i 220 og deretter trekke fra alderen.”

a) Kall ”maksimalpuls” for m og ”alder” for a og lag en formel for m ut i fra sitatet over.

b) Bruk formelen fra a) til å regne ut makspulsen din.

På den samme siden kan vi lese at en ny og bedre metode er slik:

”Ta din alder og multipliser dette med 0,64. Deretter trekker du dette fra 211.”

c) Lag en formel for m ut ifra sitatet over.

d) Bruk formelen fra c) til å regne ut makspulsen din.

For å fysisk måle makspulsen din kan du gjøre dette:

> 1. Hopp opp og ned i ca. 30 sekunder (så fort og så høyt

du greier).

2. Tell hjerteslag i 15 sekunder umiddelbart etter hoppingen.

e) Kall "antall hjerteslag i løpet av 15 sekunder" for A og lag en formel for m.

f) Bruk formelen fra e) til å regne ut makspulsen din.

g) Sammenlign resultatene fra b), d) og f).

4.3.1

På nettsiden viivilla.no får vi vite at dette er formelen for å lage en perfekt trapp:

> "2 ganger opptrinn (trinnhøyde) pluss 1 gang inntrinn (trinndybde) bør bli 62 centimeter (med et slingringsmonn på et par centimeter)."

a) Kall "trinnhøyden" for h og "trinndybden" for d og skriv opp formelen i sitatet (uten slingringsmonn).

b) Sjekk trappene på skolen, er formelen oppfylt eller ikke?

c) Hvis ikke: Hva måtte trinnhøyden vært for at formelen skulle blitt oppfylt?

d) Skriv om formelen til en formel for h.

4.3.2 (GE22)

Snorre skal kjøpe ny mobiltelefon. Ved betaling får han to alternativer:

- Alternativ 1: Betal 12 000 kr med en gang
- Alternativ 2: Betal 550 kr per måned i to år.

Snorre velger alternativ 2.

Hvor mye dyrere blir mobiltelefonen med **alternativ 2** enn med **alternativ 1**?

4.3.3 (E22)

Arne har 120 kr, mens de fem søsknene hans har 30 kr hver. Arne og søsknene skal fordele pengene slik at alle har like mye. Hvor mange kroner må Arne gi til hver av søsknene sine?

4.3.4

Effekten P (målt i Watt) i en elektrisk krets er gitt ved formelen:

$$P = R \cdot I^2$$

hvor R er motstanden og I er strømmen i kretsen.

a) Hvis $R = 5\,\Omega$ og $I = 10\,A$, hva er da effekten?

b) Skriv om formelen til en formel for I^2.

4.3.5

Skriv om arealformelen for et trapes (se MB, s. 143) til en formel for høgden.

4.3.6

På klikk.no finner man disse formelene for å regne ut hvor høy et barn kommer til å bli:

For jenter:

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Trekk fra 13 cm
3. Del med 2.

For gutter:

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Legg til 13 cm
3. Del med 2.

Kall barnets (fremtidige) høyde for B, mors høyde for M og fars høde for F.

a) Lag en formel for B når barnet er ei jente.

b) Lag en formel for B når barnet er en gutt.

c) Gjør om formelen fra a) til en formel for F.

d) Ei jente har en mor som er 165 cm. Formelen fra oppgave a) sier at jenta vil bli 171 cm høy. Hvor høy er faren til jenta?

4.3.7

I 2005 kostet en sykkel 1 500 kr, mens den i 2014 ville kostet 1 784 kr om prisen hadde fulgt konsumprisindeksen.

I 2005 var KPI 82,3, hva var den i 2014?

4.4.1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 3x - 7$$

$$g(x) = x + 5$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

4.4.2

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = -2x - 3$$

$$g(x) = 4x + 9$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

4.4.3

Si at du kan velge mellom disse to månedsabonnementene for mobil:

- **Abonnement A**
  300 kr i fast pris og 50 kr per GB data brukt.
- **Abonnement B**
  Fast pris på 500 kr og 10 kr per GB data brukt.

a) For hvilket databruk har vil abonnementene koste det samme?

b) Hvis du bruker ca. 7 GB data i måneden, hvilket abonnement bør du da velge?

4.4.4 (1PV22D1)

Siri har et stykke papp og vil lage en eske. Hun har satt opp en modell som viser volumet $V(x)$ cm^3 av esken dersom hun lager den x cm høy

$$4x^3 - 100x^2 + 600x \quad , \quad 0 < x < 10$$

a) Hvor stort volum får esken dersom Siri lager den 5 cm høy?

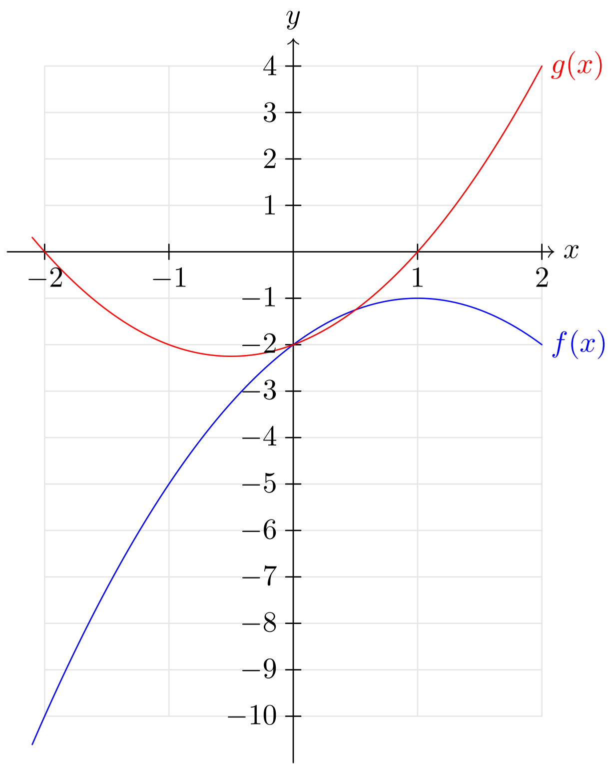
b) Hva finner Siri ut dersom hun løser likningen $V(x) = 500$?

4.4.5 (1PV22D1)

Et rektangel er tre ganger så langt som det er bredt. Arealet av rektangelet er $432\,\text{cm}^2$.

Hvor bredt er rektangelet?

4.4.6



a) Finn koordinatene til toppunktet til $f(x)$.

b) Finn koordinatene til minst ett av skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$.

c) Finn nullpunktene til $g(x)$.

4.5.1

Løs likningssettet

$$3b - 2a = 15$$

$$5a - b = 8$$

4.5.2

Løs likningssettet

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 4x - 3 \\ x + 8y &= y - 2x \end{aligned}$$

Kapittel 5

Økonomi

5.1 Indeksregning

5.1.1 Introduksjon

Innen økonomi er *indekser* forholdstall som forteller hvor mye størrelser har forandret seg. For eksempel kostet kroneisen ca 0,75 kr (!) da den ble lansert i 1953, mens den i 2021 kostet ca 27 kr. Forholdet mellom prisen i 2053 og i 2021 er da

$$\frac{\text{pris 2021}}{\text{pris 1953}} = \frac{27}{0{,}75} = 36$$

I denne sammenhengen er tallet 36 en indeks for prisforskjellen på kroneis i 1953 og 2021.

5.1.2 Konsumprisindeks og basisår

Konsumprisindeksen (KPI) er en indeks som beskriver prisnivået på varer og tjenester som en typisk husstand i Norge bruker penger på i løpet av et år. Disse varene er

- Matvarer og alkoholfrie drikkevarer
- Alkoholholdige drikkevarer og tobakk
- Klær og skotøy
- Bolig, lys og brensel
- Møbler, husholdningsartikler og vedlikehold av innbo
- Helsepleie
- Transport
- Post- og teletjenester
- Kultur og fritid
- Utdanning
- Hotell- og restauranttjenester
- Andre varer og tjenester

For å sammenligne noe må man alltid ha et utgangspunkt, og konsumprisindeksen tar utgangspunkt i prisnivået på de nevnte varene/tjenestene i året 2015. 2015 kalles da *basisåret*[1], og i dette året er indeksen satt til 100.

[1]Hvilket år som er basisår forandrer seg med tiden. Før 2015 ble basisår var 1998 det.

R 5.1 Basisår

I et basisår er verdien til indeksen 100. For konsumprisindeksen er 2015 basisåret.

Tabellen under viser samlet KPI for de 10 siste årene:

År	KPI
2020	112,2
2019	110,8
2018	112,2
2017	105,5
2016	103,6
2015	100
2014	97,9
2013	95,9
2012	93,9
2011	93,3

Table 5.1: Kunsumprisindeksen for årene 2010-2021. Tall hentet fra SSB.

Ut ifra tabellen kan vi for eksempel lese dette:

- Da KPI for 2017 er 105,5 , har prisene steget med 5,5% siden 2015.
- Da KPI i 2011 er 93,3 , var prisene 7,7% lavere i 2011 enn i 2015.

R 5.2 Prosentvis endring fra basisår

$$\text{indeks} - 100 = \text{prosentvis endring fra basisår}$$

Eksempel 1

I juli 2021 var KPI for matvarer 109,4. Hvor mye har prisen på matvarer endret seg sammenlignet med basisåret?

Svar

$109{,}4 - 100 = 9{,}4$. Prisen på matvarer har altså økt med 9,4% sammenlignet med basisåret.

Eksempel 2

I juli 2021 var KPI for sko 98,0. Hvor mye har prisen på sko endret seg sammenlignet med basisåret?

Svar

$98{,}0 - 100 = -2$. Prisen på sko har altså blitt redusert med 2% sammenlignet med basisåret.

5.1.3 Kroneverdi

Vi har nevnt at en kroneis kostet 0,75 kr i 1953 og 27 kr i 2021. Når vi ved to tidspunkt må betale *forskjellig* pris på den *samme* varen skyldes det ofte at *kroneverdien* har forandret seg; *1 kr i 1957 var mer verd enn 1 kr i 2021.*

Kroneverdien for et gitt år regnes ut ifra KPI til basisåret (100):

R 5.3 Kroneverdi

$$\text{kroneverdi} = \frac{100}{\text{KPI}}$$

Merk: Kroneverdien for basisåret (2015) er 1.

Eksempel 1

KPI i 2012 var 93,9. Regn ut kroneverdien i 2012.

Svar

$$\begin{aligned}\text{kroneverdi i 2012} &= \frac{100}{93{,}9} \\ &\approx 1{,}06\end{aligned}$$

Dette betyr at 1 kr i 2012 tilsvarer 1,06 kr i basisåret.

Obs!

Ordet *kroneverdi* brukes også når man sammenlikner verdien av 1 kr opp mot verdien av utenlandsk valuta. Kroneverdi ut ifra et basisår og kroneverdi ut ifra en valuta er ikke det samme.

R 5.4 Realverdi

Realverdien til en pengesum er hvor mye en pengesum ville vært verd i basisåret.

$$\text{realverdi} = \text{opprinnelig verdi} \cdot \text{kroneverdi}$$

Eksempel

I 1928 var KPI 3,2 og i 2020 var KPI 112,2. Hva hadde størst realverdi, 10 000 kr i 1928 eller 350 000 kr i 2020?

Svar

Vi har at

$$\text{kroneverdi i 1928} = \frac{100}{3{,}2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av } 10\,000\,\text{kr fra 1928 i basisår} &= 10\,000\,\text{kr} \cdot \frac{100}{3{,}2}\\ &= 312\,500\,\text{kr}\end{aligned}$$

Videre er

$$\text{kroneverdi i 2012} = \frac{100}{112{,}2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av } 350\,000\,\text{kr fra 1928 i basisår} &= 350\,000 \cdot \frac{100}{112{,}2}\\ &\approx 311\,943\,\text{kr}\end{aligned}$$

Altså var 10 000 kr mer verd i 1928 enn det 350 000 kr var verd i 2020.

5.1.4 Reallønn og nominell lønn

Hvor god *råd* vi har avhenger av hvor mye vi tjener og hva prisnivået er. Tenk at du hadde en årslønn på 500 000 kr i både 2020 og i 2019. *Tabell 5.1* forteller oss da at du hadde du best råd i 2019, fordi da var prisnivået (KPI) lavere enn i 2020.

At prisnivået har blitt høgere er det samme som at kroneverdien har blitt lavere. Dette betyr igjen at hvis lønnen din var den samme i 2019 og 2020, er *realverdien* til lønnen din høgere i 2019 enn i 2020. Den opprinnelige lønnen og realverdien til lønnen er så mye brukt i statistikk at de har fått egne navn:

R 5.5 Reallønn og nominell lønn

Nominell lønn er lønn mottat et gitt år.

Reallønnen er realverdien til den nominelle lønnen.

Eksempel

I 2016 tjente Per 450 000 kr, mens i 2012 tjente han 420 000 kr. I 2016 var KPI = 103,6, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Per best råd?

Svar

For å finne ut hvilket av årene Per hadde best råd i, sjekker vi hvilket år han hadde høgest reallønn[1] (se *regel 5.4*):

$$
\begin{aligned}
\text{reallønn i 2016} &= 450\,000 \cdot \frac{100}{103{,}6}\,\text{kr} \\
&\approx 434\,363\,\text{kr}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{reallønn i 2012} &= 420\,000 \cdot \frac{100}{93{,}9} \\
&\approx 447\,284\,\text{kr}
\end{aligned}
$$

Reallønnen til Per var altså høgest i 2012, derfor hadde han bedre råd da enn i 2016.

[1]KPI-verdiene i utregningen henter vi fra *Tabell 1*.

R 5.6 Verdi som følger indeks

En verdi er sagt å ha *fulgt indeks* hvis verdi og indeks ved to tidspunkt er like.

$$\frac{\text{verdi ved tidspunkt 1}}{\text{indeks ved tidspunkt 1}} = \frac{\text{verdi ved tidspunkt 2}}{\text{indeks ved tidspunkt 2}}$$

Eksempel 1

Tabellen under viser en oversikt over prisen registrert i en butikk på to varer ved to forskjellige tidspunkt.

	2010	**2020**
sjokolade	11,00 kr	13,40 kr
brus	12,50 kr	19,00 kr

I 2010 var KPI 92,1 og i 2020 var KPI 12,2. Har prisen på noen av varene fulgt indeks?

Svar

Vi har at

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2010}}{\text{KPI i 2010}} = \frac{11}{92{,}1} \approx 0{,}119$$

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2020}}{\text{KPI i 2020}} = \frac{13{,}40}{112{,}1} \approx 0{,}119$$

Videre er

$$\frac{\text{pris på brus i 2010}}{\text{KPI i 2010}} = \frac{12{,}5}{92{,}1} \approx 0{,}136$$

$$\frac{\text{pris på brus i 2020}}{\text{KPI i 2020}} = \frac{19}{112{,}1} \approx 0{,}169$$

Altså er det rimelig å si at prisen for sjokolade har fulgt indeks, mens prisen for brus ikke har gjort det.

5.2 Lån og sparing

5.2.1 Lån

Noen ganger har vi ikke nok penger til å kjøpe det vi ønsker oss, og må derfor ta opp et lån fra en bank. Banken gir oss da en viss *lånesum* mot at vi betaler tilbake denne, og *renter*, i løpet av en bestemt tid. Det vanligste er at vi underveis betaler banken det som kalles *terminbeløp*, som på sin side består av *avdrag* og renter. Det vi til enhver tid skylder banken kaller vi *gjelden*.

Si at en bank låner oss 100 000 kr, som da er lånesummen. Lånet skal tilbakebetales i løpet av 5 år, med ett terminbeløp hvert år, og renten er 10%. Det finnes forskjellige måter å betale tilbake et lån på, men følgende vil som regel gjelde:

- **Summen av alle avdragene skal tilsvare lånesummen**.

  For å gjøre det enkelt i vårt eksempel, bestemmer vi oss for å betale tilbake lånet med like avdrag hvert år. Siden 100 000 kr skal fordeles likt over 5 år, må det årlige avdraget bli $\frac{100\,000}{5}$ kr $=$ 20 000 kr.

- **Det man betaler i avdrag skal trekkes fra gjelden.**

  Startgjelden er 100 000 kr, men det første året betaler vi 20 000 kr i avdrag, og da blir gjelden 100 000 kr $-$ 20 000 kr $=$ 80 000 kr. Det andre året betaler vi nye 20 000 kr, og da blir gjelden 80 000 kr $-$ 20 000 kr $=$ 60 000 kr. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Renter skal beregnes av gjelden.**

  Siden gjelden det første året er 100 000 kr, må vi betale 100 000 kr $\cdot$ 0,1 $=$ 10 000 kr i renter. Siden gjelden det andre året er 80 000 kr må vi betale 80 000 kr $\cdot$ 0,1 $=$ 8 000 kr i renter. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Terminbeløpet er summen av avdraget og rentene**.

  Av første og tredje punkt får vi at

	1. år	2. år
Terminbeløp	20 000 kr + 10 000 kr = 30 000 kr	20 000 kr + 80 000 kr = 28 000 kr

  Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Lånet er fullført når gjelden er lik 0 kr og alle renter er betalt.**

  Hvis vi har betalt avdrag lik 20 000 kr i 5 år, er gjelden 0 kr. Har vi da betalt alle rentene også, er lånet fullført.

  Merk: Du har alltid rett til å betale større avdrag enn det som først er avtalt. Betaler du hele gjelden vil lånet avsluttes så lenge eventuelle renter også er betalt.

Serielån og annuitetslån

To vanlige typer lån er *serielån* og *annuitetslån*. Lånet fra eksempelet vi akkurat har sett på er et serielån fordi avdragene er like store. Hvis terminbeløpene hadde vært like store, ville det isteden vært et annuitetslån. Hvis lånesum, rente og nedbetalingstid er lik, vil et serielån alltid medføre minst utgifter totalt sett. For privatpersoner er det likevel veldig populært å velge annuitetslån på grunn av at det er lettere å planlegge økonomien når man betaler det samme beløpet hver gang.

Kredittkort

Kredittkort er et betalingskort som er slik at hvis du f.eks. bruker kortet for å betale 10 000 kr, så låner du pengene fra banken. Etter en tid som er avtalt med banken vil den kreve renter av gjelden din. Til hvilken tid du betaler denne gjelden er delvis opp til deg selv, men generelt har kredittkort veldig høge renter, så det lureste er å betale før rentekravet har startet!

R 5.7 Lån

lånesum	Beløpet vi låner av banken.
gjeld	Det vi til enhver tid skylder banken.
rente	Prosentandel av gjeld som skal betales.
avdrag	Det vi betaler ned på gjelden.
	Summen av avdragene tilsvarer lånesummen.
	ny gjeld = gammel gjeld − avdrag
renter	gjeld · rente
terminbeløp	avdrag + renter
serielån	Lån hvor avdragene er like store.
annuitetslån	Lån hvor terminbeløpene er like store.
kredittkort	Betalingskort som oppretter et lån fra banken.

Eksempel 1

Fra en bank låner du 300 000 kr med 3% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 5 årlige terminbeløp.

a) Hva blir det årlige avdraget?

b) Hva er gjelden din etter at du har betalt tredje terminbeløp?

c) Hvor mye må du betale i renter ved fjerde terminbeløp?

d) Hvor stort blir det fjerde terminbeløpet?

Svar

a) Siden 300 000 kr skal betales over 5 år, blir det årlige avdraget

$$\frac{300\,000\,\text{kr}}{5} = 60\,000\,\text{kr}$$

b) Når tredje terminbeløp er betalt, har du betalt tre avdrag. Det betyr at gjelden din er

$$\begin{aligned} 300\,000 - 60\,000 \cdot 3 &= 300\,000 - 180\,000 \\ &= 120\,000 \end{aligned}$$

Altså 120 000 kr.

c) Ut ifra oppgave b) vet vi at gjelden er 180 000 kr når fjerde terminbeløp skal betales. 3% av gjelden blir da

$$180\,000 \cdot 0{,}03 = 5\,400$$

Altså 5 400 kr.

d) Terminbeløpet tilsvarer avdrag pluss renter. Ut ifra oppgave a) og c) vet vi da at det fjerde terminbeløpet blir

$$60\,000\,\text{kr} + 5\,400\,\text{kr} = 65\,400\,\text{kr}$$

Eksempel 2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 6,4% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 5 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 24 000 kr.

Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

Svar

Det første året er gjelden 100 000 kr, i renter må du betale 6,4% av denne:

$$100\,000 \cdot 0{,}064 = 6\,400$$

Altså må du betale 6 400 kr i renter det første året.

Vi har at

$$\text{terminbeløp} = \text{avdrag} + \text{renter}$$

Dermed er

$$\text{avdrag} = \text{terminbeløp} - \text{avdrag}$$

$$= 24\,000 - 6400 = 17\,600$$

Altså må du betale 17 600 kr i avdrag det første året.

5.2.2 Sparing; innskuddsrente og forventet avkastning

Innskuddsrente

Vi har sett at vi må betale renter når vi låner penger av en bank, men hvis vi i steden setter penger (gjør et innskudd) i en bank *får* vi renter:

R 5.8 Innskuddsrente

Innskuddsrente er en prosentvis økning av pengene du har i banken, gjentatt over faste tidsintervaller (månedlig, årlig o.l.)

Eksempel 1

Du setter inn 20 000 kr i en bank som gir 2% årlig sparerente. Hvor mye penger har du i banken etter 8 år?

Svar

For å beregne innskuddsrenter kan vi anvende *regel 3.11*. Siden renten er 2%, er vekstfaktoren 1,02. Originalverdien er 20 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$20\,000 \cdot 1{,}02^8 \approx 23\,433$$

Du har altså ca. 23 433 kr i banken etter 8 år med sparing.

Forventet avkastning

En annen måte å spare penger på, er å investere i et aksjefond. Da vil man snakke om *forventet avkastning*:

R 5.9 Forventet avkastning

Forventet avkastning angir en *forventet* prosentvis økning av en investering, gjentatt over faste tidsintervaller.

Eksempel 1

Du investerer 15 000 i et aksjefond som forventer 5% årlig avkastning. Hvor mye penger er investeringen verd etter 8 år ved en slik avkastning?

Svar

Også for forventet avkastning kan vi bruke *regel 3.11*. Vekstfaktoren er 1,05, originalverdien er 15 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$15\,000 \cdot 1{,}05^8 \approx 22\,162$$

Etter 8 år er det forventet at investeringen er verdt 22 162 kr.

Spare med innskuddsrente eller aksjefond?

Som regel er forventet avkastning på et aksjefond høgere enn innskudsrenten du får i en bank, men ulempen er at forventet avkastning ikke gir noen garantier. Forventet avkastning oppgir bare økningen eksperter antar vil skje. Er du heldig blir økningen høgere, er du uheldig blir den lavere, og kan til og med føre til en *reduksjon* av investeringen din. I verste fall, rett nok i ekstremt sjeldne tilfeller, kan hele investeringen din ende opp med å bli verd 0 kr.

Innskuddsrenten kan også forandre seg noe med tiden, men den kan aldri føre til en reduksjon av investeringen din.

5.3 Skatt

Om du har en inntekt, må du som regel betale en del av disse pengene til staten. Disse pengene kalles *skatt* (og noen ganger *avgift*). Hensikten med skatt er at staten skal ha råd til å gi innbyggerne tilbud som skole, helsetjenester og mye mer. I dag blir blir skatten i stor grad beregnet av datasystemer, men det er ditt ansvar å sjekke at beregningene er riktige – og da er det viktig å forstå hvordan skattesystemet fungerer.

Obs!

I eksamensoppgaver og i virkeligheten vil du fort oppdage at skattesystemer er presentert på en litt annen måte enn i denne boka. Dette er blant annet fordi skattereglene kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi tatt utgangspunkt i skattereglene for 2018. Det viktigste er ikke at du husker spesifikt disse reglene, men at du lærer deg hva som menes med begrepene *bruttolønn, fradrag, skattegrunnlag, trygdeavgift* og *nettolønn.*

5.3.1 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

De fleste må betale 23% av det som kalles *skattegrunnlaget*, som er *bruttolønnen* minus *fradrag*. Bruttolønnen er lønnen du mottar fra arbeidsgiver, mens fradrag kan være mye forskjellig. *Personfradrag* og *minstefradrag* er noe alle skattebetalere får, i tillegg kan man blant annet få fradrag hvis man betaler *fagforeningskontigent* eller har gitt penger til veldedige formål.

Skattegrunnlag kalles noen ganger *trekkgrunnlag*.

Fagforeningskontigent er det du betaler for å være med i en fagforening.

R 5.10 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

	bruttolønn
−	fradrag
=	skattegrunnlag

Eksempel

Bruttolønnen til Magnus er 500 000 kr. Han får 56 000 kr i personfradrag 97 600 kr i minstefradrag, i tilleg betaler han 1 000 kr for årlig medlemskap i fagforeningen *Tekna*.

Hva må Magnus betale hvis han skatter 23% av skattegrunnlaget?

Svar

Vi starter med å regne ut skattegrunnlaget, som er bruttolønnen minus fradragene:

	500 000	bruttolønn
−	56 000	personfradrag
−	97 600	minstefradrag
−	1 000	fagforeningskontigent
=	345 400	skattegrunnlag

5.3.2 Trygdeavgift

Alle lønnsmottakere må også betale *trygdeavgift*. Dette er en inntekt staten bruker til å dekke Folketrygden. Hva man må betale i trygdeavgift kommer an på hvor gammel du er og hvilken type inntekt du har, men her skal vi bare bry oss om det man må betale for lønn fra en arbeidsgiver. Da er trygdeavgiften avhengig av alderen:

R 5.11 Trygdeavgift

alder	trygdeavgift
17-69 år	8,2 %
under 17 år eller over 69 år	5,1%

Trygdeavgiften skal beregnes av bruttolønnen.

Eksempel

Jonas og bestemoren hans, Line, har begge 150 000 kr i lønn. Jonas er 18 år og Line er 71 år.

a) Hva må Jonas betale i trygdeavgift?

b) Hva må Line betale i trygdeavgift?

Svar

a) Siden Jonas er mellom 17 år og 69 år, skal han betale 8,2% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}082 = 12\,300$$

Altså skal Jonas betale 12 300 kr i trygdeavgift. Sidan Line er over 69 år, skal hun betale 5,1% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}051 = 7\,650$$

Altså skal Line betale 7 650 kr i trygdeavgift.

5.3.3 Trinnskatt

Av lønnen din må du også betale en viss prosent av forskjellige intervall, dette kalles *trinnskatt*:

R 5.12 Trinnskatt

	Intervall	Skatt
Trinn 1	169 000 - 237 900 kr	1,4%
Trinn 2	237 900 - 598 050 kr	3,3%
Trinn 3	598 050 - 962 050 kr	12,4%
Trinn 4	Over 962 050 kr	15,4%

Trinnskatt beregnes av bruttolønnen.

Eksempel

Hvis du tjener 550 000 blir utregningen av trinnskatt slik:

Trinn 1	Da hele lønnen er over 237 900 kr, må du betale skatt av $(237\,900 - 169\,000)$ kr $= 68\,900$ kr. Skatt for trinn 1 blir da $68\,900\,\text{kr} \cdot 0{,}014 \approx 965\,\text{kr}$.
Trinn 2	Da 550 000 kr er over 237 900 kr, men under 598 050 kr, må du betale skatt av $(550\,000 - 237\,900)$ kr $= 312\,100$ kr. Skatt for trinn 2 blir da $312\,100\,\text{kr} \cdot 0{,}033 \approx 10\,299\,\text{kr}$.
Totalt	Totalt må du betale $965\,\text{kr} + 10\,299\,\text{kr} = 11\,264\,\text{kr}$ i trinnskatt.

5.3.4 Nettolønn

Det du sitter igjen med etter å ha betalt skatt, trygdeavgift og fagforeningskontigent kalles *nettolønnen*. Med tanke på de tre tidligere delseksjonene kan vi sett opp et regnestykke som dette:

R 5.13 Nettolønn

	Bruttolønn
−	Fagforeningskontigent
−	23% skatt
−	Trygdeavgift
−	Trinnskatt
=	Nettolønn

Eksempel

Emblas bruttolønn er 550 000 kr. Hun betaler 1500 kr i året for medlemskap i *LO* (Norges største fagforening) og har 409 900 kr som skattegrunnlag. Embla er 28 år.

Hva er nettolønnen til Embla?

Svar

	550 000	Bruttolønn
−	1 500	Fradrag for fagforening
−	93 127	23% av skattegrunnlaget
−	45 100	8,2% av bruttolønn
−	11 264	Total skatt for trinn 1 og 2
=	399 009	Nettolønn

(Den totale trinnskatten har vi hentet fra utregningen i *Eksempel 1* fra *delseksjon 5.3.3.*)

Embla har altså 399 009 kr i nettolønn.

5.4 Budsjett og regnskap

5.4.1 Budsjett

Når man skal planlegge økonomien sin, kan det være lurt å sette opp en oversikt over det man forventer av inntekter og utgifter. En slik oversikt kalles et *budsjett*. Når man regner ut hva inntekter minus utgifter er, finner man et *resultat*. Er tallet positivt går man med *overskudd*, er tallet negativt går man med *underskudd*.

Eksempel

Lisa vil lage en oversikt over sine månedlige inntekter og utgifter, og kommer fram til dette:

- Hun tar på seg kveldsvakter på en gamlehjem. Av dette forventer hun ca. 4 000 arg1 i nettolønn.
- Hun bruker ca. 4 500 kr i måneden på mat.
- Hun får 4 360 kr i borteboerstipend.
- Hun bruker ca. 1 200 kr på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et månedsbudsjett for Lisa.

Svar

Inntekter	Budsjett
Lønn	4 000
Stipend	4 360
Sum	8 360
Utgifter	
Mat	4 500
Klær, fritid o.l.	1 200
Sum	5 700
Resultat	2 660

Budsjettet viser at Lisa forventer 2 660 kr i overskudd.

5.4.2 Regnskap

I et budsjett fører man opp *forventede* inntekter og utgifter, mens i et *regnskap* fører man opp *faktiske* innteker og utgifter. Forskjellen mellom budsjett og regnskap kalles *avviket*. For avviket er det vanlig at man for inntekter og resultat regner ut 'regnskap – budsjett', mens man for utgifter regner ut 'budsjett – regnskap'. Dette fordi vi ønsker positive tall hvis inntektene er større enn forventet, og negative tall hvis utgiftene er større enn forventet.

Eksempel

I eksempelet fra forrige delseksjon (5.4.1) satt vi opp et månedsbudsjett for Lisa. I mars viste det seg at dette ble de faktiske inntektene og utgiftene hennes:

- Hun fikk ikke jobbet så mye som hun hadde tenkt. Nettolønnen ble 3 500 kr.
- Hun brukte 4 200 kr i måneden på mat.
- Hun fikk 4 360 i borteboerstipend.
- I bursdagsgave fikk hun i alt 2 000 kr.
- Hun brukte ca. 3 600 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et regnskap for Lisas mars måned.

Svar

Inntekter	Budsjett	Regnskap	Avvik
Lønn	4 000	3 500	–500
Stipend	4 360	4 360	0
Bursdagsgave	0	2 000	2 000
Sum	8 360	9 860	2 000
Utgifter			
Mat	4 500	4 200	300
Klær, fritid o.l.	1 200	3 600	–2 400
Sum	5 700	7 800	1 900
Resultat	2 660	2 060	–600

Lisa gikk altså med 2 060 kr i overskudd, men 600 kr mindre enn forventet ut ifra budsjettet.

Oppgaver for kapittel 5

Konsumprisinder[1]

År	KPI		
2020	112,2	2008	88
2019	110,8	2007	84.8
2018	112,2	2006	84.2
2017	105,5	2005	82.3
2016	103,6	2004	81
2015	100	2003	80.7
2014	97,9	2002	78.7
2013	95,9	2001	77.7
2012	93,9	2000	75.5
2011	93,3	1999	73.2
2010	92.1	1998	71.5
2009	89.9	1997	69.9

[1]Hentet fra ssb.no.

5.1.1
Regn ut kroneverdien i årene:

a) 1998 **b)** 2014 **c)** 2017

5.1.2
I 2016 var KPI 103,6. Hvor mye høyere var prisnivået i 2016 enn i 2015?

5.1.3
I 2017 tjente Else 490 000 kr, mens hun i 2012 tjente 410 000 kr. I 2017 var KPI = 105,5, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Else best råd?

5.2.1
Fra en bank låner du 200 000 kr med 2% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 10 årlige terminbeløp.

a) Hva blir det årlige avdraget?

b) Hva er gjelden din etter at du har betalt sjette terminbeløp?

c) Hvor mye må du betale i renter det sjuende terminbeløp?

d) Hvor stort blir det sjuende terminbeløpet?

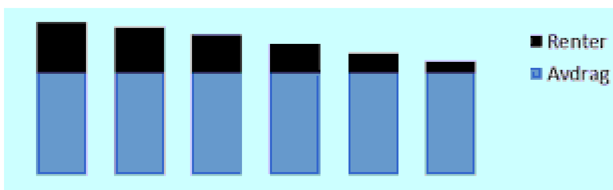
5.2.2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 2% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 15 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 7 783.

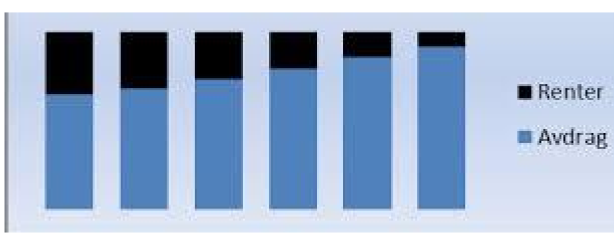
Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

5.2.3

Hvilken av figurene skisserer et serielån og hvilken skisserer et annuitetslån? Forklar hvorfor.



(a)



(b)

5.2.4

Du oppretter en sparekonto i en bank som gir 2,3% årlig rente og setter inn 45 000 kr. Hvor mye har du på kontoen etter 15 år?

5.2.5 (1PV22D1)

Renten på et lån steg fra 2,0% til 2,2%.

a) Hvor mange prosentpoeng steg renta med?

b) Hvor mange prosent steg renta med?

5.2.6

Tenk at kredittkortet ditt har 45 dagers lån uten renter, og 10% månedlig rente etter dette. Du kjøper en scooter for 50 000 kr med kredittkortet. (Regn måneder som 30 dager).

a) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 75 dager?

b) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 105 dager?

c) Hvor mye skylder du banken etter 75 dager hvis du betalte 20 000 kr innen de første 45 dagene?

5.3.1

Børge har 350 000 kr i lønn. Børge er pensjonist, og skal da ha 56 000 kr i personfradrag og 83 000 kr i minstefradrag. I tillegg betaler han 700 kr i fagforeningskontigent.

a) Beregn skattegrunnlaget til Børge.

b) Av skattegrunnlaget betaler Børge 23% skatt. Finn hvor mye dette er.

5.3.2

Mira er 19 år og tjener 200 000 i året, mens 74 år gamle Børge tjener 350 000 i året.

Hvem av de to betaler mest trygdeavgift (i antall kroner)?

5.3.3

Beregn trinnskatten til Børge (nevnt i oppgave 5.3.1 og 5.3.2).

5.3.4

Beregn nettolønnen til Børge (nevnt i oppgave 5.3.1-5.3.3).

5.4.1

I februar antok Nora at dette ville bli hennes utgifter og inntekter:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 4 500 kr på mat

- 1 500 kr på andre utgifter

a) Sett opp et budsjett for Noras inntekter og utgifter i februar.

b) Det viste seg at de *faktiske* utgiftene og inntektene ble disse:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 5 500 på mat
- Kjøp av fire FLAX-lodd som kostet 25 kr hver.
- Gevinst på 1 000 kr fra FLAX-loddene
- 1 800 på andre utgifter.

Sett opp et regnskap for Nora. Gikk hun med overskudd eller underskudd i februar? Ble overskuddet/underskuddet større eller mindre enn i budsjettet?

Kapittel 6

Sannsynlighet

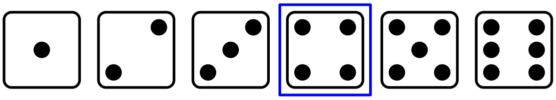
6.1 Grunnprinnsippet

Selve prinsippet bak sannsynlighetsregning er at vi spør hvor mange *gunstige utfall* vi har i et utvalg av *mulige utfall*. Sannsynligheten for en *hendelse* er da gitt som et forholdstall mellom disse.

R 6.1 Sannsynligheten for en hendelse

$$\text{sannsynligheten for en hendelse} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Når vi kaster en terning, kaller vi 'å få en firer' en hendelse. Og da en terning har seks forskjellige sider, er det seks mulige utfall.



Hvis vi ønsker 'å få en firer', er det bare 1 av disse 6 utfallene som gir oss det vi ønsker, altså er

$$\text{sannsynlighet for å få en firer} = \frac{1}{6}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi gjerne enkeltbokstaver for å indikere en hendelse. Istedenfor å skrive 'å få en firer', kan vi bruke bokstaven F, og for å indikere at vi snakker om sannsynligheten for en hendelse, bruker vi bokstaven P.

P kommer av det engelske ordet for sannsynlighet, *probability*.

Når vi skriver $P(S)$ betyr dette 'sannsynligheten for å få en firer':

$$P(S) = \frac{1}{6}$$

Hva med det motsatte, altså sannsynligheten for å *ikke* å få en firer? For å uttrykke at noe er motsatt av en hendelse, setter vi en strek over navnet. Hendelsen 'å *ikke* få en firer' skriver vi altså som $\bar{F}$. Det 'å *ikke* få en firer' er det samme som 'å få *enten* en ener, en toer, en treer, en femmer *eller* en sekser', derfor har denne hendelsen 5 gunstige utfall. Det betyr at

$$P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$$

R 6.2 Symboler for sannsynlighet

$P(A)$ er sannsynligheten for at hendelsen A skjer.

A og $\bar{A}$ er motsatte hendelser.

$P(\bar{A})$ er sannsynligheten for at A *ikke* skjer, og omvendt.

Obs!

Som regel er det en god vane å forkorte brøker når det lar seg gjøre, men i sannsynlighetsregning vil det ofte lønne seg å la være. Du vil derfor oppdage at mange brøker i kommende seksjoner kunne vært forkortet.

6.2 Hendelser med og uten felles utfall

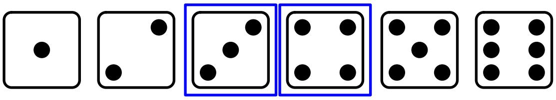
6.2.1 Hendelser uten felles utfall

Symbolet $\cup$ kalles *union*.

La oss kalle hendelsen 'å få en treer' (på en terning) for T. Hendelsen 'å få en treer *eller* en firer' skriver vi da som $T \cup F$.

Det er 2 av 6 sider på en terning som er tre *eller* fire, sannsynligheten for 'å få en treer *eller* en firer' er derfor $\frac{2}{6}$:

$$P(F \cup S) = \frac{2}{6}$$



Det samme svaret får vi ved å legge sammen $P(F)$ og $P(S)$:

$$P(T \cup F) = P(T) + P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne $P(T \cup F)$ ved å summere $P(T)$ og $P(F)$ kan vi gjøre da T og F ikke har noen *felles utfall*. Dette fordi ingen sider på trekanten viser *både* en treer og en firer.

R 6.3 Hendelser uten felles utfall

For to hendelser A og B uten felles utfall, er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eksempel

Du trekker opp en kule fra en bolle hvor det ligger én rød, to blå og én grønn kule. Hva er sannsynligheten for at du trekker opp en rød *eller* en blå kule?

Svar

Vi kaller hendelsene 'å få en rød kule' for R og hendelsen 'å få en blå kule' for B.

- Det er i alt 4 mulige utfall (kuler).
- Siden alle kulene bare har én farge, er det ingen av hendelsene R og B som har felles utfall.
- Sannsynligheten for å trekke en rød kule er
$$P(R) = \frac{1}{4}$$
- Sannsynligheten for å trekke en blå kule er
$$P(B) = \frac{2}{4}$$

Sannsynligheten for å få en rød *eller* en blå kule er dermed

$$\begin{aligned} P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

6.2.2 Summen av alle sannsynligheter er 1

Tenk at vi kaster en terning og at vi holder både 'å få en firer' og 'å ikke få en firer' for gunstige hendelser . Vi har tidligere sett at $P(F) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{F}) = \frac{5}{6}$, og at F og $\bar{F}$ ikke har felles utfall. Av *regel 6.3* har vi da at

$$\begin{aligned} P(F \cup \bar{F}) &= P(F) + P(\bar{F}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Enten så skjer F, eller så skjer den ikke. Og skjer den ikke, så skjer $\bar{F}$. Hvis vi sier at *både* F og $\bar{F}$ er gunstige hendelser, sier vi altså at alle mulige utfall er gunstige, og da gir *regel 6.1* en sannsynlighet lik 1.

R 6.4 Summen av alle sannsynligheter

Summen av sannsynlighetene for alle mulige hendelser er alltid lik 1.

En hendelse A og den motsatte hendelsen $\bar{A}$ vil til sammen alltid utgjøre alle hendelser. Av *regel 6.4* har vi da at

$$\begin{aligned} P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \end{aligned}$$

R 6.5 Motsatte hendelser

For en hendelse A er

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Eksempel

I en klasse med 25 elever er det 12 jenter og 13 gutter. Èn elev skal tilfeldig trekkes ut til å være med i en matematikkonkurranse.

a) Hva er sannsynligheten for at en gutt blir trukket?

b) Hva er sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket?

Svar

Vi kaller hendelsen 'en gutt blir trukket' for G.

a) Sannsynligheten for at en gutt blir trukket er

$$P(G) = \frac{13}{25}$$

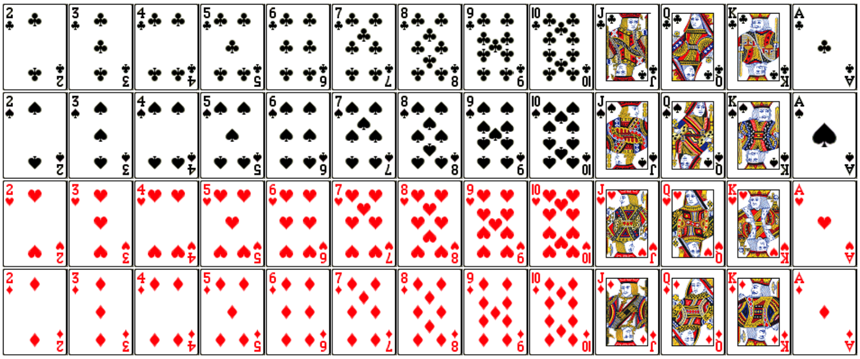
b) Sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket er

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\ &= 1 - \frac{13}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Merk: At en gutt *ikke* blir trukket er det samme som at en jente blir trukket.

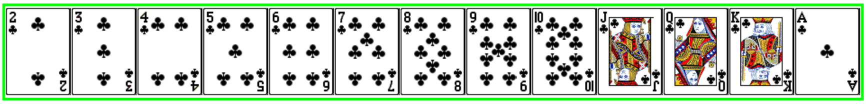
6.2.3 Felles utfall

Noen ganger er det slik at to hendelser kan ha *felles utfall*. La oss se på en vanlig kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typene spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av sorten knekt, dame, kong eller ess kalles *honnørkort*.

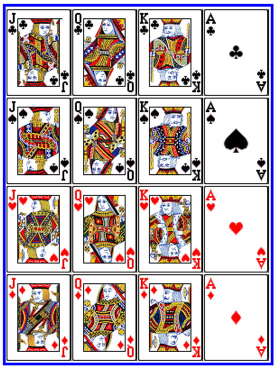


Tenk at vi trekker opp et kort fra en blandet kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynligheten for 'å trekke kløverkort *eller* honnørkort'. Vi starter med å telle opp de gunstige utfallene for kløverkort, og finner at antallet er 13.

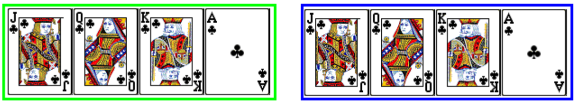
Et kort som kløver kong er et kløverkort, men det er også et honnørkort, og derfor er det begge deler; *både* kløverkort *og* honnørkor.



Etterpå teller vi opp gunstige utfall for honnørkort, og finner at antallet er 16.

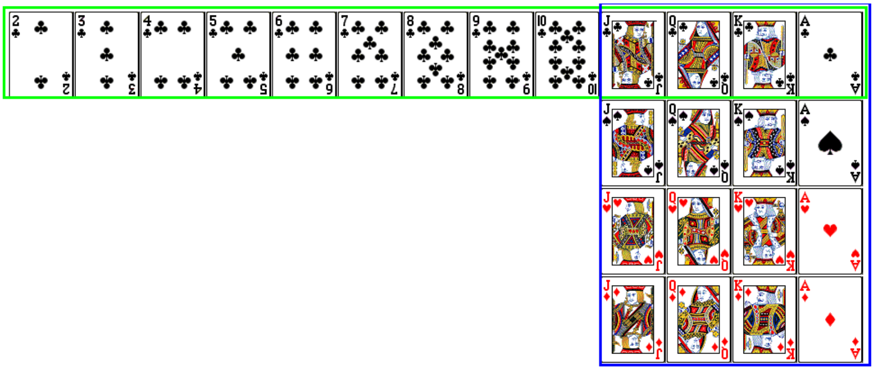


Til sammen har vi telt $13 + 16 = 29$ gunstige utfall, men nå støter vi på et problem. For da vi fant alle kløverkort, telte vi blant andre kløver knekt, dame, kong og ess. Disse fire kortene telte vi også da vi fant alle honnørkort, noe som betyr at vi har telt de samme kortene to ganger!



Det finnes jo for eksempel ikke to kløver ess i en kortstokk, så skal vi regne ut hvor mange kort som oppfyller kravet om å være kløver *eller* honnør, så må vi trekke ifra antallet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La K være hendelsen 'å trekke et kløverkort' og H være hendelsen 'å trekke et honnørkort'. Siden det er 25 kort som er kløverkort *eller* honnørkort av i alt 52 kort, har vi at

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Siden vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi videre at

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er *både* kløver *og* honnørkort, dette skriver vi som

Symbolet $\cap$ kalles *snitt.*

$$K \cap H = 4$$

Vi sier da at K og H har 4 *felles utfall*. Videre er

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

Nå som vi har funnet $P(K), P(H)$ og $P(K \cup H)$ kan vi igjen finne $P(K \cap H)$ på følgende måte:

$$\begin{aligned} P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{25}{52} \end{aligned}$$

R 6.6 Hendelser med felles utfall

For to hendelser A og B er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Merk

Hvis man anvender *regel 6.6* på to hendelser uten felles utfall, ender man opp med *regel 6.3*.

Eksempel

I en klasse på 20 personer spiller 7 personer fotball og 10 personer spiller handball. Av disse er det 4 som spiller både fotball og handball. Om man trekker ut én person fra klassen, hva er sannsynligheten for at denne personen spiller fotball *eller* handball?

Svar

Vi lar F være hendelsen 'spiller fotball' og H være hendelsen 'spiller handball'.

- Sannsynligheten for at en person spiller fotball er

$$P(F) = \frac{7}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller handball er

$$P(H) = \frac{10}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller *både* fotball og handball er

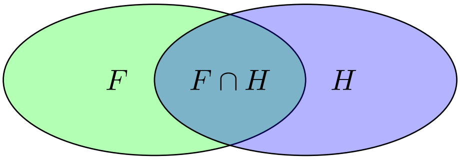
$$P(F \cap H) = \frac{4}{20}$$

Sannsynligheten for at en person spiller fotball *eller* handball er derfor

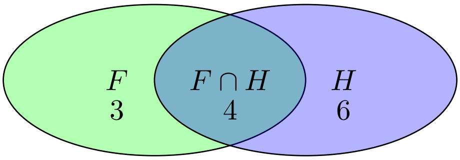
$$\begin{aligned} P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

6.2.4 Venndiagram

Målet med et venndiagram er å lage en figur som illustrerer antallet av de *særskilte* utfallene og de *felles* utfallene. La oss bruke eksempelet på side 130 til å lage en slik figur. For klassen der noen spiller fotball, noen handball og noen begge deler, kan vi lage et venndiagram som vist under.



Den grønne ellipsen[1] representerer de som spiller fotball (F) og den blå de som spiller handball (H). Da noen spiller *begge* sportene ($F \cap H$), har vi tegnet ellipsene litt over i hverandre. Videre vet vi at 7 spiller fotball, 10 spiller handball og 4 av disse gjør *begge* deler. Dette illustreres slik:



Diagrammet forteller nå at 3 personer spiller *bare* fotball og 6 spiller *bare* handball. I tillegg spiller 4 personer *både* fotball og handball. (Til sammen er det derfor 7 som spiller fotball og 10 som spiller handball.)

[1]En ellipse er en "strekt" sirkel.

Eksempel 1

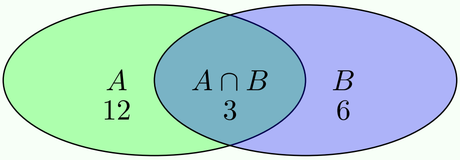
I en skoleklasse er det 31 elever. I denne klassen er det 15 elever som tar buss til skolen og 9 elever som tar båt. Av disse er det 3 stykker som tar både buss og båt.

a) Sett opp et venndiagram som illustrerer gitt informasjon.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen tar buss *eller* båt til skolen?

Svar

a) Siden 3 elever tar *både* buss og båt, er det $15 - 3 = 12$ som *bare* tar buss og $9 - 3 = 6$ som *bare* tar båt. Vi lar A bety 'tar buss' og B bety 'tar båt', venndiagrammet vårt blir da seende slik ut:



b) Sannsynligheten for at en person tar buss *eller* båt kan vi skrive som $P(A \cup B)$. Siden 15 elever tar buss, 9 tar båt og 3 tar begge deler, er det i alt $15 + 9 - 3 = 21$ elever som tar buss *eller* båt. Da det er 31 elever i alt å velge mellom, er

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

Eksempel 2

Om en klasse med 29 elever vet vi følgende:

- 16 elever spiller fotball
- 12 elever spiller handball
- 7 elever spiller volleyball
- 5 elever spiller både fotball og handball, men ikke volleyball
- 3 elever spiller både fotball og volleyball, men ikke handball
- 2 elever spiller både handball og volleyball, men ikke fotball.
- 1 elev spiller alle tre sportene.

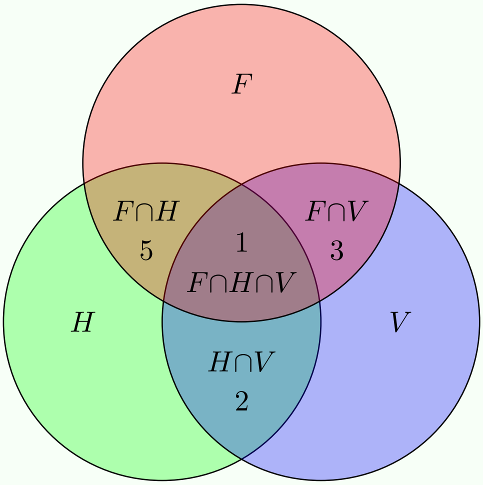
a) Sett opp et venndiagram som beskriver fordelingen av de tre sportene i klassen.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen spiller enten fotball, handball eller volleyball?

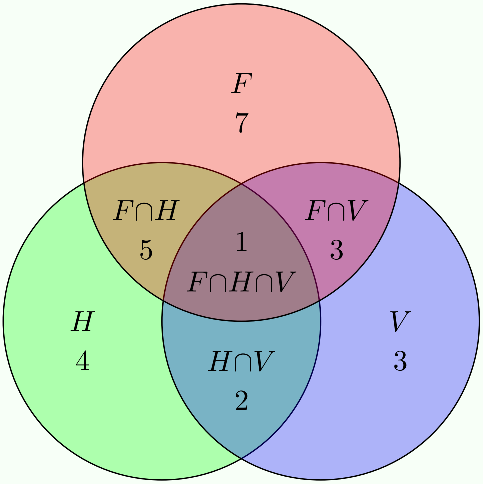
c) Personen som trekkes ut viser seg å spille fotball. Hva er sjansen for at denne personen også spiller handball?

Svar

La F bety 'spiller fobtall', H bety 'spiller handball' og V bety 'spiller volleyball'. Når vi skal lage et venndiagram, er det lurt å skrive inn de felles utfallene først. Ut ifra fjerde til syvende punkt kan vi tegne dette:



Da ser vi videre at $16 - 5 - 1 - 3 = 7$ elever spiller *bare* fotball, $12 - 5 - 1 - 2 = 4$ spiller *bare* handball og $9 - 3 - 1 - 2 = 3$ spiller *bare* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er $8 + 5 + 1 + 3 + 4 + 2 + 3 = 26$ unike elever som spiller én eller flere av sportene. Sjansen for å trekke en av disse 26 i en klasse med 29 elever er $\frac{26}{29}$.

c) Vi leser av diagrammet at av de totalt 16 som spiller fotball, er det $5 + 1 = 6$ som også spiller handball. Sjansen for at personen som er trukket ut spiller handball er derfor $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

6.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendelser, kan vi også sette opp en *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Si at det på en skole med 300 elever deles ut melk og epler til de elevene som ønsker det i lunsjen. Si videre at 220 av elevene får melk, mens 250 får eple. Av disse er det 180 som får både melk og eple. Hvis vi lar M bety *får melk* og E bety *får eple*, vil krysstabellen vår først se slik ut:

	M	$\bar{M}$	sum
E			
$\bar{E}$			
sum			

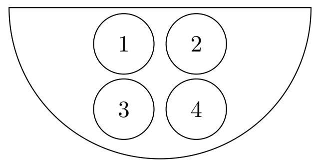
Så fyller vi inn tabellen ut ifra infoen vi har:

- får *både* melk og eple: $M \cap E = 180$
- får melk, men ikke eple: $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$
- får eple, men ikke melk: $E \cap M = 250 - 180 = 70$
- får hverken melk eller eple: $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

	M	$\bar{M}$	sum
E	180	70	250
$\bar{E}$	40	10	50
sum	220	80	300

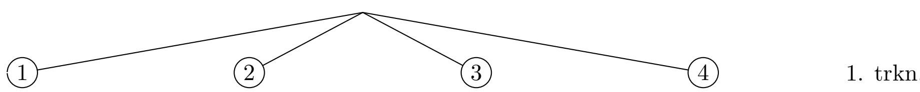
6.3 Gjentatte trekk

6.3.1 Permutasjoner

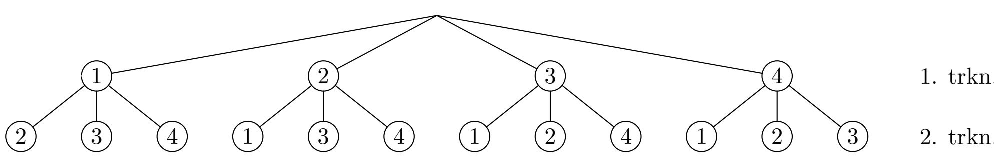


Si vi har en bolle med fire kuler som er nummererte fra 1 til 4. I et forsøk trekker vi opp en og en kule fram til vi har trukket opp tre kuler. Hvis vi for eksempel først trekker kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi *permutasjonen* 2 4 3.

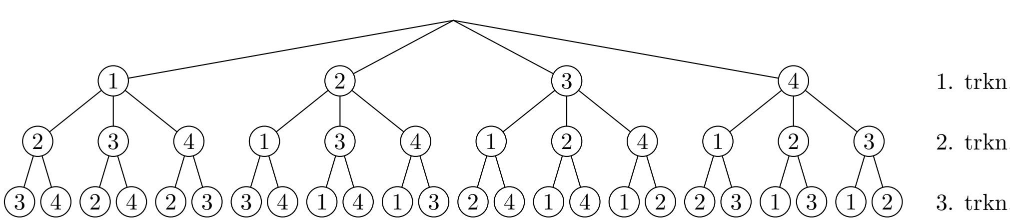
Hvor mange forskjellige permutasjoner kan vi få? La oss lage en figur som hjelper oss med å finne svaret. Ved første trekning er det 4 kuler å plukke av, vi kan derfor si at vi har 4 veier å gå. Enten trekker vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



Kula vi trekker opp, legger vi ut av bollen, og trekker så for andre gang. For hver av de 4 veiene vi kunne gå i første trekning får vi nå 3 nye veier å gå. Altså har vi nå $3 \cdot 4 = 12$ veier vi kan gå.



Den andre kula vi trekker opp legger vi også ut av bollen, så for hver av de 12 veiene fra 2. trekning, får vi nå to nye mulige veier å gå. Totalt antall veier (permutasjoner) blir derfor $12 \cdot 2 = 24$.



Denne utregningen kunne vi også ha skrevet slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

R 6.7 Produktregelen for permutasjoner

Når vi foretar flere trekninger etter hverandre, finner vi alle mulige permutasjoner ved å gange sammen antall mulige utfall i hver trekning.

Eksempel

Av de 29 bokstavene i alfabetet ønsker vi å lage et ord som består av 3 bokstaver. Vi godkjenner ord som ikke har noen betydning, men en bokstav kan bare brukes én gang i ordet.

Hvor mange ord kan vi lage?

Svar

Først har vi 29 bokstaver å trekke fra, deretter 28 bokstaver, og til slutt 27 bokstaver. Dermed er antall permutasjoner gitt som

$$\underbrace{29}_{\substack{\text{mulige utfall}\\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{28}_{\substack{\text{mulige utfall}\\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{27}_{\substack{\text{mulige utfall}\\ \text{3. trekning}}} = 21\,924$$

Vi kan altså lage 21 924 forskjellige ord.

Eksempel 2

Vi kaster om krone eller mynt fire ganger etter hverandre. Hvor mange permutasjoner har vi da?

Svar

Hver gang vi kaster om krone eller mynt, har vi to mulige utfall. Antall permutasjoner er derfor gitt som

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Kombinasjoner

I dagligtale blir ofte ordet *kombinasjoner* brukt istedenfor permutasjoner, men innenfor sannsynlighetsregning har kombinasjoner og permutasjoner forskjellig betydning. Den store forskjellen er at permutasjoner tar hensyn til rekkefølge, mens kombinasjoner ikke gjør det.

Si vi ønsker å danne et ord med to bokstaver ved hjelp av med bokstavene A, B og C, og at vi godtar gjenbruk av bokstav. Da har vi 9 mulige permutasjoner:

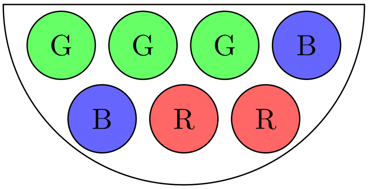
$$AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA, CB$$

Kombinasjoner derimot viser til en unik sammensetting når rekkefølge ikke tas hensyn til, for eksempel er AB og BA den samme kombinasjonen. I dette tilfellet har vi altså 6 kombinasjoner

$$AA, AB, AC, BB, BC, CC$$

6.3.2 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Tenk at vi har en med bolle sju kuler. Tre av dem er grønne, to er blå og to er røde. Si at vi tar opp først én kule av bollen, og deretter én til. Hva er sannsynligheten for at vi trekker opp to grønne kuler?



Hvis vi lar G bety 'å trekke en grønn kule', kan vi skrive denne sannsynligheten som $P(GG)$. For å komme fram til et svar, starter vi med å finne ut hvor mange *gunstige* permutasjoner vi har. Siden vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi $3 \cdot 2 = 6$ gunstige permutasjoner. Totalt velger vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antall *mulige* permutasjoner er derfor $7 \cdot 6 = 42$. Sannsynligheten for å få to grønne kuler blir da

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \tag{6.1}$$

La oss også finne sannsynligheten for å få en grønn kule for hver trekning isolert sett. I første trekning har vi 3 grønne av i alt 7 kuler, altså er

$$P(G) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning tas det for gitt at en grønn kule er plukket opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grønne:

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Symbolet $|$ betyr *gitt at ... har skjedd*. $P(G|G)$ er derfor en forkortelse for 'sannsynligheten for å trekke en grønn kule, *gitt* at en grønn kule er trukket'.

Hvis vi ganger sannsynligheten fra første trekning med sannsynligheten fra andre trekning, blir regnestykket det samme som i ligning (6.1):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

R 6.8 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Sannsynligheten for at A vil skje, *gitt* at B har skjedd, skrives som $P(A|B)$.

Sannsynligheten for at A skjer først, deretter B, deretter C, og så videre (...) er

$$P(ABC...) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot ...$$

Eksempel

I en bolle ligger to blå og to røde kuler. Vi trekker én og én kule opp av bollen, fram til vi har hentet opp tre kuler. Hva er sannsynligheten for at vi først trekker en blå, deretter en rød, og til slutt en blå kule?

Svar

Vi lar B bety 'å trekke blå kule' og R bety 'å trekke rød kule'. Sannsynligheten for først en blå, så en rød, og så en blå kule, skriver vi da som $P(BRB)$.

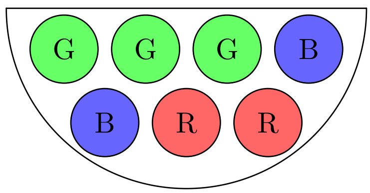
- Sannsynligheten for B i første trekning er $P(B) = \frac{2}{4}$.
- Sannsynligheten for R i andre trekning, *gitt* B i første er
$$P(R|B) = \frac{2}{3}$$
- Sannsynligheten for B i tredje trekning, *gitt* B i første og R i andre er
$$P(B|RB) = \frac{1}{2}$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned} P(BRB) &= P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{24} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

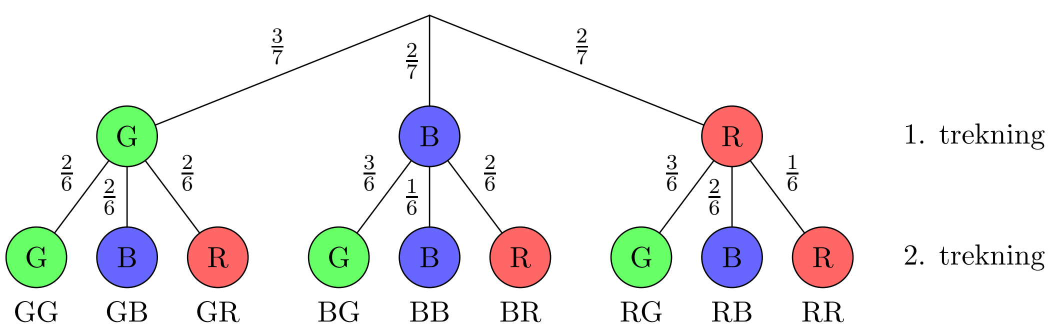
6.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte *regel 6.8* for å lage en hjelpetegning når vi har å gjøre med gjentatte trekk. Tegningen vi her skal ende opp med kalles et *valgtre*. Vi tegner da en lignende figur som vi gjorde i delkapittel 6.3, men langs alle veier skriver vi på sannsynligheten for utfallet veien leder oss til.



La oss igjen se på bollen med de syv kulene. Trekk av grønn, blå eller rød kule betegner vi henholdsvis med bokstavene G, B og R.

Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule $\frac{3}{7}$, derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til G. Gitt at vi har trukket en grønn kule, er sannsynligheten for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik $\frac{2}{6}$. Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra G til G. Og sånn fortsetter vi til vi har ført opp alle sannsynlighetene til hver vei. For å få en rask oversikt over de forskjellige permutasjonene veiene fører til, kan det være lurt å skrive opp disse under hver ende av treet.



La oss nå bruke valgtreet over til å finne sannsynligheten for å trekke én grønn og én blå kule. GB og BG er da de gunstige permutasjonene. Ved å gange sammen sannsynlighetene langs veien til GB, finner vi at

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne *P(BG)*:

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$

Sannsynligheten for at '*GB eller BG*' inntreffer er (se *regel 6.6*):

$$\begin{aligned} P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\ &= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\ &= \frac{12}{42} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

R 6.9 Permutasjoner på et valgtre

For å finne sannsynlighetene til en permutasjon på et valgtre, ganger vi sammen sannsynlighetene langs veien vi må følge for å komme til permutasjonen.

Eksempel

I en bolle med 10 kuler er tre kuler grønne, to er blå og fem er røde. Du trekker to kuler ut av bollen. La G, B og R henholdsvis bety 'å trekke en blå kule', 'å trekke en grønn kule' og 'å trekke en rød kule'.

a) Tegn et valgtre som skisserer permutasjonene av B, G og R du kan få.

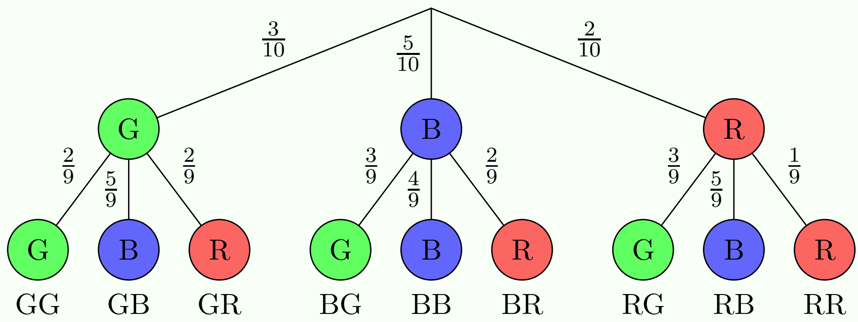
b) Hva er sannsynligheten for at du trekker to røde kuler?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker én blå og én grønn kule?

d) Hva er sannsynligheten for at du trekker *minst* én blå *eller* *minst* én grønn kule?

Svar

a)



b) Av valgtreet vårt ser vi at

$$
\begin{aligned}
P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\
&= \frac{2}{90} \\
&= \frac{1}{45}
\end{aligned}
$$

c) Både permutasjonen GB og BG gir oss én blå og én grønn kule. Sannsynligheten for hver av dem er

$$
\begin{aligned}
P(GB) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \\
&= \frac{15}{90} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(BG) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Sannsynligheten for GB *eller* BG er summen av $P(GB)$ og $P(BG)$:

$$
\begin{aligned}
P(GB \cup BG) = P(GB) + P(BG) \\
= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
= \frac{2}{6} \\
= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

d) For å svare på denne oppgaven kan vi selvsagt legge sammen sannsynligheten for permutasjonene GG, GB, GR, BG, BB, BR, RG og RB, men vi sparer oss veldig mye arbeid hvis vi merker oss dette: Å få *minst* én blå eller én grønn kule er det motsatte av å *bare* få røde kuler. Sannsynligheten for dette, å få to røde kuler, fant vi i oppgave b). Av *regel 6.5* har vi at

$$\begin{aligned} P(\bar{R}) &= 1 - P(R) \\ &= 1 - \frac{1}{45} \\ &= \frac{45}{45} - \frac{1}{45} \\ &= \frac{44}{45} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for å få *minst* én blå *eller minst* én grønn kule er altså $\frac{44}{45}$.

Oppgaver for kapittel 6

6.2.1

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort?

b) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort eller et sparkort?

c) Hva er sannsynligheten for at kortet ikke er er kløverkort? Bruk to forskjellige regnemåter for å finne svaret.

6.2.2

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort?

b) Hva er sannsynligheten for at du trekker et hjerterkort?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort eller et hjerterkort?

d) Hva er sannsynligheten for at kortet du trekker hverken er et 8-kort eller et hjerterkort?

Kapittel 7

Digitale verktøy

En viktig del av å beherske digitale verktøy, er å forstå grunnleggende **programmering**. Programmering handler om å gi instrukser til en datamaskin. Slik kan datamaskiner utføre utregninger, framstille bilder, animasjoner, spill, og mye mer. For å gi instrukser bruker vi forskjellige **programmeringsspråk**, og det er et hav av forskjellige språk å velge i. I norsk skole er de de mest brukte språkene Scratch, Python og JavaScript[2]. Det finnes et stort utvalg av gratis ressurser for å lære seg programmeringsspråk, blant andre

- code.org (koding generelt)
- w3schools.com (koding generelt)
- scratch.mit.edu (Scratch)
- microbit.org (koding med micro:bit)
- espensklasserom.co (Koding i Sracht, micro:bit m.m.)
- kidsakoder.no (koding i Scratch, micro:bit, Python m.m)

Har du allerede nådd et høyt nivå som programmerer, og føler du har god kontroll på data-typer, funksjoner, klasser o.l.? Da anbefales språket Rust. Mange holder dette for å være arvtakeren til C++ og liknende språk.

[2]Rett nok i blokkbasert utgave ved koding av micro:bit.

7.1 Introduksjon til Python

Python er et programmeringsspråk for **tekstbasert koding**. Dette innebærer at handlingene vi ønsker utført, må kodes som tekst. Filen som inneholder hele koden kaller vi et **skript**. Det synlige resultatet av å kjøre skriptet, kaller vi **utdata**[1].

7.1.1 Objekt, type, funksjon og uttrykk

Vårt første skript består av bare én kodelinje:

```python
print("Hello world!")
```

Utdata

```
Hello world!
```

I kommende avsnitt vil begrepene **objekt**, **type**, **funksjon** og **uttrykk** stadig dukke opp.

- Det aller meste i Python er objekter. I skriptet over er både `print()` og `"Hello world"` objekter.
- Objekter vil være av forskjellige typer. `print()` er av typen `function`, mens `"Hello world"` er av typen `str`[2]. Hvilke handlinger som kan utføres med forskjellige objekter avhenger av hvilke typer de er.
- Funksjoner kan ta imot **argumenter**, for så å utføre handlinger. I skriptet over tar `print()`-funksjonen imot argumentet `"Hello world"`, og printer teksten til utdata.
- Uttrykk har sterke likehetstrekk med funksjoner, men tar ikke imot argumenter.

Tilvising

Tekst og tall kan vi se på som noen av de minste byggesteinene (objektene). Python har én type for tekst, og to typer for reelle tall:

`str`	tekst
`int`	heltall
`float`	desimaltall

[1] **Output** på engelsk.

[2] 'str' er en forkortelse for det engelske ordet 'string'.

Det er som regel nyttig å gi objektene våre navn. Dette gjør vi ved å skrive navnet etterfulgt av = og objektet. **Kommentarer** er tekst som ikke blir behandlet som kode. Kommentarer kan vi skrive ved å starte setningen med #.

```
hei = "hei" # hei er av typen str. Legg merke til " ved start og slutt
a = 3 # a er av typen int
b = 2.8 # b er av typen float
c = 2. # c=2.0, og er av typen float
d = .7 # d=0.7, og er av typen float
e = -5 # e er av typen int
f = -0.01 # f er av typen float
```

Med Python kan vi selvsagt utføre klassiske regneoperasjoner:

```
a = 5
b = 2

print("a+b = ", a+b);
print("a-b = ", a-b);
print ("a*b = " ,a*b);
print ("a/b = " ,a/b);
print("a**b = " ,a**b); # potens med grunntall a og eksponent b
print ("a//b = ", a//b); # a/b rundet ned til nærmeste heltall
print ("a%b = ", a%b); # resten til a//b
```

Utdata

```
a+b = 7
a-b = 3
a*b = 10
a/b = 2.5
a**b = 25
a//b = 2
a%b = 1
```

Funksjonene `str()`, `int()` og `float()` kan vi bruke til å gjøre om objekter til typene `int` eller `float`:

```
s = "2"
b = 3
c = 2.0

b_s = str(b) # b omgjort til str
c_s = str(c) # c omgjort til str
print(b_s+c_s)

s_i = int(s)
print(s_i*b)

s_f = float(s)
print(s_f*b)
```

Utdata

```
32.0
6
6.0
```

En viktig ting å være klar over er at `=` i Python *ikke* betyr det samme som $=$ i matematikk. Mens $=$ kan oversettes til "er lik", kan vi si at `=` kan oversettes til 'er'.

```
a = 5 # a ER nå 5
print(a)
a = a+1 # a ER nå det a VAR, + 1
print(a)
```

Utdata

```
5
6
```

At et objekt legger til seg selv og en annen verdi er så vanlig i programmering at Python har en egen operator for det:

```
a = 5 # a ER nå 5
a+= 1 # Samme som å skrive a = a+1
print(a)
```

Utdata

```
5
6
```

7.1.2 Egne funksjoner

I Pyton kan man enkelt lage sine egne funksjoner. En funksjon kan utføre handlinger, og den kan **returnere** (return på engelsk) ett eller flere objekt. Den kan også ta imot argumenter. Koden vi skriver inni en funksjon blir bare utført hvis vi **kaller** (call på engelsk) på funsjonen.

```python
# a er en funksjon som ikke tar noen argumenter.
# Legg merke til 'def' først og ':' til slutt.
# Kodelinjene som hører til funksjonen må stå med innrykk
def a():
  print("Hei, noen kalte visst på funksjon a?")


# b er en funksjon som tar argumentet 'test'
def b(tekst):
  print("Hei. Noen kalte på funksjon b. Argumentet som ble gitt var: ", tekst)

# c er er funksjon som tar argmunentene a og b
# c returnerer et objekt
def c(a, b):
  return a+b

b("Hello!") # vi kaller på b med argumentet "hello"

d = c(2,3) # Vi kaller på a med argumentene 2 og 3

print(d)

# merk at teksten gitt i a ikke blir printet, fordi vi ikke har kalt på a.
```

Utdata

```
Hei. Noen kalte på funksjon b. Argumentet som ble gitt var:
Hello!
5
```

7.1.3 Boolske verdier og vilkår

Verdiene `True` og `False` kalles **boolske verdier**. Disse vil være resultatet når vi sjekker om objekter er like eller ulike. For å sjekke dette har vi de **sammenlignende operatorene**:

operator	betydning
`==`	er lik
`!=`	er *ikke* lik
`>`	er større enn
`>=`	er større enn, eller lik
`<`	er mindre enn
`<=`	er mindre enn, eller lik

```python
a = 5
b = 4

print(a == b)
print(a != b)
print(a > b)
print(a < b)
```

Utdata

```
False
True
True
False
```

I tillegg til de sammenlignende operatorene kan vi bruke de **logiske operatorene** `and`, `or` og `not`

```python
a = 5
b = 4
c = 9

print(a == b and c > a)
print(a == b or c > a)
print(not a == b)
```

Utdata

```
False
True
True
```

Språkboksen

Sjekker som bruker de sammenlignende og de logiske operatorene, skal vi heretter kalle **vilkår**.

7.1.4 if, else og elif uttrykkene

Når vi ønsker å utføre handlinger bare *hvis* et vilkår er sant (True), bruker vi if uttrykket foran vilkåret. Koden vi skriver med innrykk under if-linjen, vil bare bli utført hvis vilkåret gir True.

```
a = 5
b = 4
c = 9

if c > b: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Jepp, c er større enn b")

if a > c: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Denne teksten kommer ikke i output, siden
    vilkåret er False")
```

Utdata

```
Jepp, c er større enn b
```

Hvis man først vil sjekke om et vilkår er sant, og så utføre handlinger hvis det *ikke* er det, kan vi bruke else uttrykket:

```
a = 5
c = 9

if a > c: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Denne teksten kommer ikke i output, siden
    vilkåret er False")

else: # legg merke til kolon (:) til slutt
  print("Men denne kommer, fordi vilkåret i if-linja
    over var False")
```

Utdata

```
Men denne kommer, fordi vilkåret i if-linja over var False
```

else uttrykket tar bare hensyn til (og gir ikke mening uten) if uttrykket like over seg. Hvis vi vil at handlinger skal utføres *bare* hvis ingen tidligere `if` uttrykk ga noe utslag, må vi bruke[1] `elif` uttrykket. Dette er et `if` uttrykk som slår inn hvis `if` uttrykket over *ikke* ga utslag.

```python
a = 2

if a > 3:
  print("Denne linja printes ikke, vilkåret er False")

elif a < 1: #Siden if uttrykket over ikke ga utslag, sjekkes vilkåret b < 1
  print("Denne linja printes ikke, vilkåret er False")

else:
  print("Nå er vi sikre på at 1 < b < 3")
```

Utdata

```
Nå er vi sikre på at 1 < b < 3
```

7.1.5 Lister

Lister kan vi bruke for å samle objekter. Objektene som er i listen kalles **elementene** til listen.

```python
strings = ["98", "99", "100"]
floats = [1.7, 1.2]
ints = [96, 97, 98, 99, 100]
mixed = [1.7, 96, "100"]
empty = []
```

Elementene i lister er **indekserte**. Første objekt har indeks 0, andre objekt har indeks 1 og så videre:

[1] `elif` er en forkortelse for `else if`, som også kan brukes.

```
strings = ["98", "99", "100"]
floats = [1.7, 1.2]
ints = [96, 97, 98, 99, 100]
mixed = [1.7, 96, "100"]
empty = []
```

Utdata

```
96
99
98
```

Med den innebygde funksjonen `append()` kan vi legge til et objekt i enden av listen. Dette er en **innebygd funksjon**[1], som vi skriver i enden av navnet på listen, med et punktum foran.

```
min_liste = []
print(min_liste)

min_liste.append(3)
print(min_liste)

min_liste.append(7)
print(min_liste)
```

Utdata

```
[]
[3]
[3, 7]
```

[1] Kort fortalt betyr det at det bare er noen typer objekter som kan bruke denne funksjonen.

Med funksjonen `pop()` kan vi hente ut et objekt fra listen

```python
min_liste = [6, 10, 15, 19]

a = min_liste.pop() # a = det siste elementet i listen
print("a =",a)
print("min_liste =",min_liste)

a = min_liste.pop(1) # a = elementet med indeks 1
print("a =",a)
print("min_liste =",min_liste)
```

Utdata

```
a = 19
min_liste = [6, 10, 15]
a = 10
min_liste = [6, 15]
```

Forklar for deg selv

Hva er forskjellen på å skive `a = min_liste[1]` og å skrive `a = min_liste.pop(1)`?

7.1.6 Looper; `for` og `while`

`for` loop

For objekter som inneholder flere elementer, kan vi bruke `for`-looper til å utføre handlinger for hvert element. Handlingene må vi skrive med et innrykk etter `for`-uttrykket:

```
min_liste = [5, 10, 15]

for number in min_liste:
  print(number)
  print(number*10)
  print("\n") # lager et blankt mellomrom

```

Utdata

```
5
50

10
100

15
150
```

Språkboksen

Å gå gjennom hvert element i (for eksempel) en liste kalles **å iterere over listen**.

Ofte er det ønskelig å iterere over heltallene $0, 1, 2$ og så videre. Til dette kan vi bruke `range()`:

```
ints = range(3)

for i in ints:
  print(i)

```

Utdata

```
0
1
2
```

`while` loop

Hvis vi ønsker at handlinger skal utføres fram til et vilkår er sant, kan vi bruke `while` metoden:

```python
a = 1

while a < 5:
  print(a)
  a += 1
```

Utdata

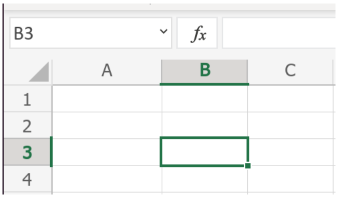
```
1
2
3
4
```

7.2 Regneark

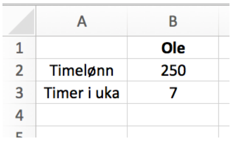
I denne boka tar vi utgangspunkt i Mircrosofts programvare Excel. Det finnes andre gode regneark på markedet, for eksempel Google Sheets og Libre Office Calc. Disse tre nevnte regnearkene ligner hverandre mye både i utforming og i funksjoner de har å tilby.

7.2.1 Introduksjon

Når du åpner et regne-ark vil du få opp en tabell hvor *radene* er nummerert med tall (1, 2 3 osv), mens *kolonnene* er indeksert med bokstaver (A, B, C osv.). Hvordan radene og kolonnene brukes er avgjørende for å forstå Excel. I figuren under har vi markert det vi kaller *celle B3*. Dette er altså cellen hvor *rad 3 og kolonne B krysser hverandre*. (Legg også merke til at B3 er markert oppe til venstre i figuren).



I hver celle kan vi skrive inn både tall og tekst. Si at Ole har en jobb med 250 kr i timelønn, og at han jobber 7 timer i uka. Denne informasjonen kan vi skrive inn i Excel slik:



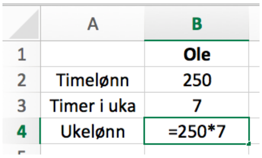
	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4		

7.2.2 Utregninger

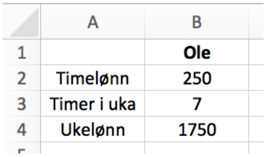
Vi ønsker nå å finne ukelønnen til Ole. Ukelønnen er gitt ved formelen

$$\text{ukelønn} = \text{timelønn} \cdot \text{timer i uka}$$

For å foreta en utregning i regneark, starter man med å skrive `=` i cellen. I celle B4 finner vi ukelønnen til Ole ved å skrive `=250*7`.



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=250*7



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Når vi trykket enter-tasten, er det resultatet, 1750, som vises i cellen. Ønsker vi å se formelen vi har brukt, kan vi dobbeltklikke på cellen, eller se i *inntastingsfeltet* (oppe til høyre i figuren under.)

B4 | fx | =250*7

	A	B	C
1		**Ole**	
2	Timelønn	250	
3	Timer i uka	7	
4	Ukelønn	1750	

Merk: Inntastingsfeltet kan også brukes til å taste inn tall og tekst i cellen.

7.2.3 Cellereferanser

Excels kanskje viktigste egenskap er *cellereferanser*. Dette betyr kort sagt at vi bruker celler istedenfor tall når vi skal gjøre utregninger. I forrige seksjon regnet vi lønnen til Ole ved å gange 250 (timelønnen) med 7 (timer i uka). Ved å bruke cellereferanser kunne vi isteden gjort dette:

Tallet tilhørende timelønnen (250) står i celle B2, mens tallet tilhørende timer (35) står i celle B3. For å gange tallene i disse cellene kan vi skrive `=B2*B3`:

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=B2*B3

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Én av fordelene med å bruke cellereferanser er at det blir mye lettere å rette opp i feil som har blitt gjort. Si f.eks. at det skulle stått 300 istedenfor 250 i B3. Om vi derfor endrer B3, vil resultatet i B4 endre seg deretter:

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	300
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	2100

Merk: Du kan også trykke på cellene du ønsker å bruke i formlene dine, slik som vist her.

7.2.4 Kopiering og låsing av celler

Kopiering av cellene er en metode som hindrer deg i å skrive de samme formlene om og om igjen. Vi ønsker nå å lage at ark som passer til følgende informasjon:

- Timelønnen til Ole, Dole og Doffen er henholdsvis 300 kr, 200 kr og 500 kr.
- Alle tre jobber 7 dager i uka.
- Vi ønsker å regne ut hvor mange timer de jobber til sammen og hvor mye ukelønn de har til sammen.

Vi starter med å sette opp dette regnearket:

	A	B	C	D
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**
2	Timelønn	300	200	500
3	Timer i uka			
4	Ukelønn			

Her har vi bare fylt inne informasjonen som er *unik* for Ole, Dole og Doffen, nettopp fordi de andre cellene enten inneholder de samme tallene eller den samme regnemåten. For cellene som ikke er unike bør vi bruke kopieringsmulighetene, og dette vises i denne videoen. Her er en liten beskrivelse av hva som blir gjort:

1. Siden alle tre jobber i 7 timer, skriver vi 7 i celle B4. Etterpå kopierer vi ved å trykke musepekeren helt nede i høyre hjørne av B4 og drar *bortover* til C2 og D2.
2. Siden regnemåten av ukelønn er den samme for alle tre, skriver vi den (med cellereferanser) inn i B4, og kopierer den *bortover* til celle C4 og D4.
3. Regnemåten for summen av timene og summen av ukelønnene er også den samme, vi skriver den derfor inn i celle E3 og kopierer den *nedover* til E4.

Resultatet ble dette:

	A	B	C	D	E
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
2	Timelønn	300	200	500	**Sum**
3	Timer i uka	7	7	7	21
4	Ukelønn	2100	1400	3500	7000

	A	B	C	D	E
1		Ole	Dole	Doffen	
2	Timelønn	300	200	500	Sum
3	Timer i uka	=7	=7	=7	=B3+C3+D3
4	Ukelønn	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=B4+C4+D4

Av det vi har sett i videoen og figurene over kan vi ta med oss to generelle regler:

1. Hver gang man kopierer en formel én celle *bortover*, vil kolonnene i formelen øke med én bokstav i alfabetet. (A blir til B, B blir til C osv.)

2. Hver gang man kopierer en formel én celle *nedover*, vil radene i formelen øke med 1 (1 blir 2 B, 2 blir til 3 osv.).

Låsing av celler

Når man kopierer celler, er det viktig å se opp for celler man ønsker å bruke i alle kopiene, for disse cellen må *låses*. Si for eksempel at Ole, Dole og Doffen alle jobber 48 arbeidsuker i året. For å finne årslønnen deres må vi altså gange ukeslønnen til hver av dem med 48.

Igjen merker vi oss at regnemetoden for å finne årslønnen er den samme for alle tre, men hvis vi bruker celle B8 i en formel, og kopierer slik vi har gjort hittil, vil bokstaven B endre seg i formlene. For å unngå dette skriver vi `$` foran `B` i formelen – dette gjør at kolonnebokstaven ikke endrer seg, selv om vi kopierer formelen. Dette er vist i denne videoen, og resultatet ser vi her:

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		Ole	Dole	Doffen	
4	Timelønn	300	200	500	Sum
5	Timer i uka	7	7	7	21
6	Ukelønn	2100	1400	3500	7000
7	Årslønn	100800	67200	168000	

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		Ole	Dole	Doffen	
4	Timelønn	300	200	500	Sum
5	Timer i uka	=7	=7	=7	=B5+C5+D5
6	Ukelønn	=B4*B5	=C4*C5	=D4*D5	=B6+C6+D6
7	Årslønn	=$B1*B6	=$B1*C6	=$B1*D6	

Skal vi låse en celle *nedover* må vi sette dollaren foran radnummeret, for eksempel `B$1`.

7.2.5 Andre nyttige funksjoner

Videoer

- Sum bort og sum ned
- Justere bredde på kolonne
- Sette inn rad
- Formelvisning
- Gjøre om til prosenttall
- Endre antall desimaler
- Sorter i stigende/synkende rekkefølge
- Lage søylediagram
- Lage sektordiagram
- Lage linjediagram

Kommandoer (skrives med `=` foran).

- `SUM(celle1:celle2)`

  Summerer alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

- `AVERAGE(celle1:celle2)`

  Finner gjennomsnittet for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

- `MEDIAN(celle1:celle2)`

  Finner medianen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

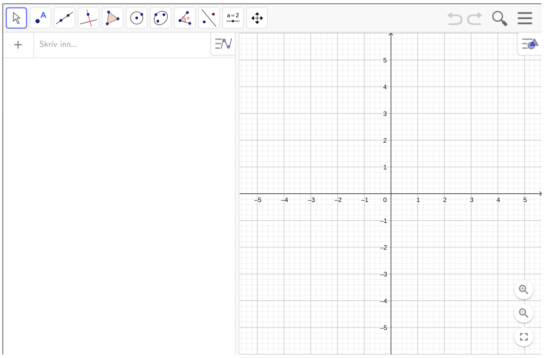
- `VAR.P(celle1:celle2)`

  Finner variansen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

7.3 GeoGebra

7.3.1 Introduksjon

Når du åpner GeoGebra får du et bilde som dette:



Feltet hvor det står "Skriv inn" kalles *inntastingsfeltet*. Dette feltet og det blanke feltet under utgjør *algebrafeltet*. Koordinatsystemet til høyre kalles *grafikkfeltet*.

7.3.2 Å skrive inn punkt, funksjoner og linjer

Punkt

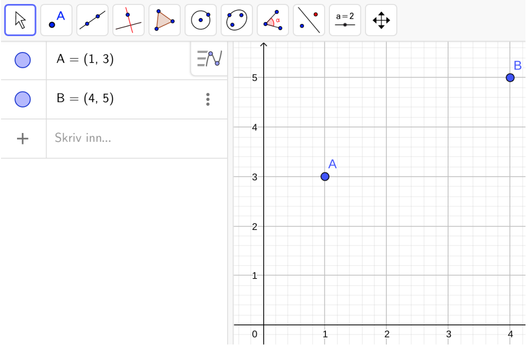
Si at vi ønsker å få punktene (1,3) og (4,5) til å vises i grafikkfeltet. I inntastingsfeltet skriver vi da

```
(1,3)
```

og

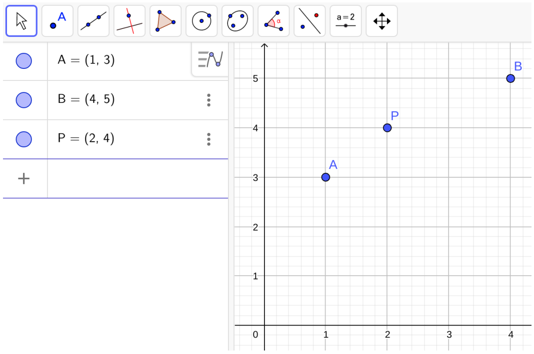
```
(4,5)
```

GeoGebra kaller da punktene A og B, og tegner dem inn i grafikfeltet:



Ønsker vi å selv et punkts navn kan vi f. eks skrive

```
P=(2,4)
```



Funksjoner

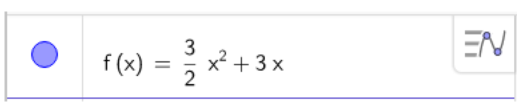
Si vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

For å bruke $f(x)$ i GeoGebra, skriver vi:

```
3/2*x^2+3x
```

Når vi ikke gir funksjonen noen navn, vil GeoGebra automatisk gi funksjonen navnet f. I algebrafeltet får vi derfor



I grafikkfeltet får vi grafen til f.

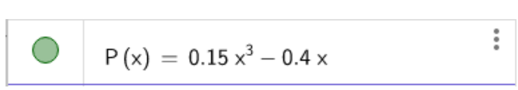
Hvis vi isteden har funksjonen

$$P(x) = 0{,}15x^3 - 0{,}4x$$

er det to ting vi må passe på. Det første er at *alle desimaltall må skrives med punktum istedenfor komma* i GeoGebra . Det andre er at vi ønsker å gi funksjonen navnet $P(x)$. Vi skriver da

```
P(x) = 0.15x^3 - 0.4x
```

og får



Obs!

Man kan aldri gi funksjoner navnet $y(x)$ i GeoGebra. y kan bare brukes når man skriver inn uttrykk for en rett linje, altså $y = ax + b$, hvor a og b er to valgfrie tall.

Vannette og loddrette linjer

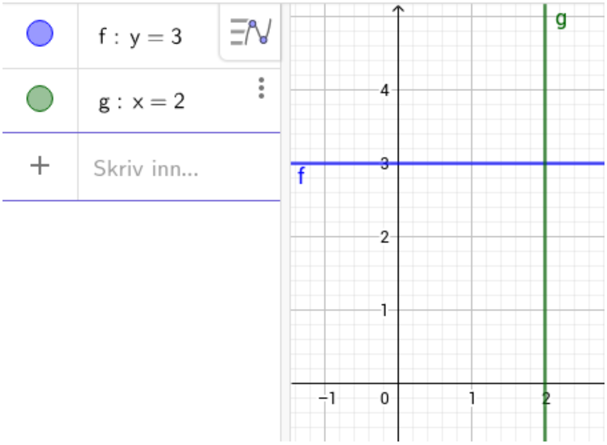
Ønser vi å lage ei linje som går vannrett gjennom verdien 3 på y-aksen og ei linje som går loddrett gjennom verdien 2 på x-aksen skriver vi:

```
y = 3
```

og

```
x = 2
```

Da får vi denne figuren:



7.3.3 Å finne verdien til funksjoner og linjer

Funksjoner

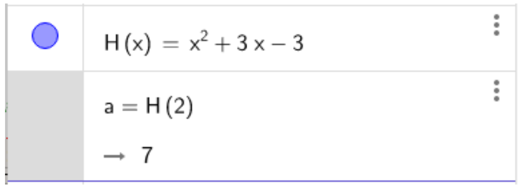
Si vi har funksjonen

$$H(x) = x^2 + 3x - 3$$

Hvis vi ønsker å vite hva $H(2)$ er, skriver vi

```
H(2)
```

som resulterer i dette



Da vet vi at $H(2) = 7$.

Linjer

Det anbefales på det sterkeste at du bruker funksjonsuttrykk når du behandler linjer i GeoGebra, men i noen tilfeller kommer man ikke utenom linjer på former $y = ax + b$.

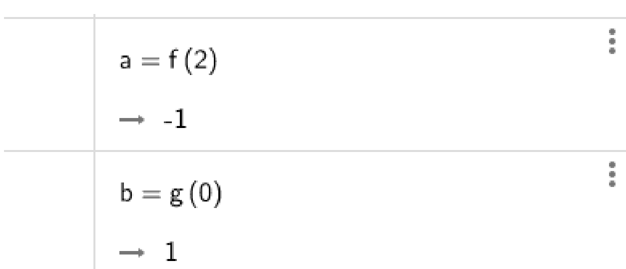
La oss se på de to linjene

$$y = x - 3$$

$$y = -2x + 1$$

Vi skriver disse inn i GeoGebra, og får

Ønsker vi nå å finne hva verdien til $y = x - 3$ er når $x = 2$, må vi legge merke til at GeoGebra har kalt denne linja for f. Svaret vi søker får vi da ved å skrive $f(2)$. Ønsker vi samtidig å vite hva $y = -2x + 1$ er når $x = 0$, må vi skrive $g(0)$:



7.3.4 Knapper og kommandoer

Videoer

- Finne nullpunktene til en graf
- Finne lokale bunnpunkt (eller toppunkt) til en graf
- Finne skjæringspunktene til to funksjoner
- Justere akser
- Endre tykkelse, farge o.l på graf
- Tegne graf på gitt intervall
  I videoen tegner vi $f(x) = x^2 - 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 5$.
- Lage linje mellom to punkt.
  Legg merke til hva som gjøres mot slutten av videoen for å få det vante uttrykket $y = ax + b$.

Kommandoer

Merk: Mange av kommandoene har egne knapper, som blant annet vist i videoene over.

- `abs( <x> )`
  Gir lengden til x (et tall, et linjestykke o.l.). Alternativt kan man skrive `|x|`.
- `Linje( <Punkt>, <Punkt> )`
  Gir linjen mellom to punkt.
- `Ekstremalpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Finner lokale topp- og bunnpunkt for en funksjon på et gitt intervall.
- `Funksjon( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Tegner en funksjon innenfor et gitt intervall.
- `Mangekant( <Punkt>, ..., <Punkt> )`
  Tegner mangekanten mellom gitte punkt.
- `Nullpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )`
  Gir nullpunktene til en funksjon innenfor et gitt intervall

- `Skjæring( <Objekt>, <Objekt> )`
  Finner skjæringspunktene til to objekt (funksjoner, linjer o.l.)

Oppgaver for kapittel 7

7.1.1

Lag et script som fra en liste med tall finner

a) gjennomsnittet.

b) typetallet.

c) medianen.

(Bruk gjerne datasettet fra oppgave 2.2.2 som et utgangspunkt.)

7.2.1

a) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgave 2.2.6.

b) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgave 2.2.7.

7.2.2

Gjør oppgave 5.3.4 og oppgave 5.4.1.

7.2.3

a) Sett opp et serielån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt? (Summen av alle terminbeløpene.)

7.2.4

a) Sett opp et annuitetslån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp, som er 23 523 kr.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt?

c) Sammenlign svaret du fikk i oppgave b) med svaret fra oppgave 7.2.3b, hvilket lån koster mest penger?

7.2.5

Sjekk at du i oppgave E7.2.3 og E7.2.4 har fått samme svar som nettsiden laanekalkulator.no. (Velg *Tinglysning: Ingen* og sett alle gebyrer til 0).

7.3.1

a) Skriv den lineære funksjonen $f(x) = 2x + 4$ og linja $y = 2x + 2$ inn i GeoGebra. Lag $f(x)$ blå og y grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?

b) Finn verdien til $f(x)$ når $x = 4$.

c) Finn verdien til y når $x = -3$.

7.3.2

a) Tegn punktene $(-1{,}2)$ og $(2{,}8)$.

b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

7.3.3

a) Skriv inn funksjonen $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) Finn $f(4)$.

c) Finn nullpunktene til $f(x)$.

d) Finn bunnpunktet til $f(x)$.

e) Finn skjæringspunktet mellom $f(x)$ og linja $y = 5$.

Kapittel 8

Blandende oppgaver

8.0.1 (1PV22D1)
#programmering #prosentregning

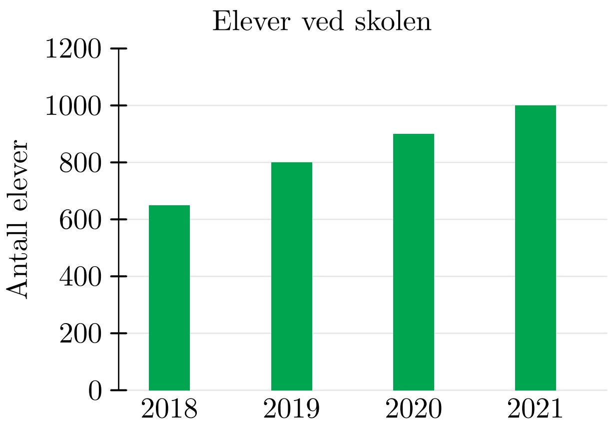
```python
startverdi = 2000
verdi = startverdi
vekstfaktor = 1.05
år = 0

while verdi < startverdi*2:
  verdi = verdi*vekstfaktor
  år = år + 1

print(verdi)
print(år)
```

En elev har skrevet programkoden ovenfor. Hva ønsker eleven å finne ut? Forklar hva som skjer når programmet kjøres.

8.0.2 (1PV22D1)
#prosentregning #statistikk #tallforståelse



Diagrammet viser antall elever ved en videregående skole de fire siste årene.

Når var det størst prosentvis økning i antall elever fra et år til det neste?

8.0.3

\# omgjøring av enheter # standardform
\# proporsjonale størrelser

Det har det blitt populært å regne ut hva det koster å ta seg en dusj. Til et slikt reknestykke kan man gjøre følgende antakelser:

- Energien som kreves er energien som må til for å varme opp vannet som gikk med til dusjingen fra 7° til 35°.
- For å øke temperaturen til 1 liter vann med 1°, kreves det $4{,}2 \cdot 10^3$ J.

Ifølge vg.no var 395,41 øre/kWh den høyeste (gjennomsnittlige) strømprisen registrert i Oslo.

a) Regn ut hva en dusj på 10 minutter ville kostet med denne prisen.

b) Bruk internett til å finne strømprisene for din region i dag. Sjekk hva en 10 minutters dusj vil koste deg.

8.0.4

#algebra #modellering #andregradsfunksjon
#omgjøring av enheter #proporsjonalitet

La F være summen av kreftene som virker i motsatt retning av en bils kjøreretning. Ifølge en rapport[1] fra SINTEF kan[2] F tilnærmes som

$$F(v) = mgC_r + \frac{1}{2}\rho v^2 D_m \qquad , \qquad v \geq 10$$

	betydning	**verdi**	**enhet**
v	bilens hastighet	variabel	m/s
m	bilens masse[3]	1409	kg
g	tyngdeakselerasjonen	9.81	m/s^2
C_r	koeffisient for bilens rullemotstand	0.015	
ρ	tettheten til luft	1.25	kg/m^3
D_m	koeffisient for bilens luftmotstandsareal[4]	0.74	

a) Tegn grafen til F for $v \in [10, 35]$

b) På intervallet gitt i oppgave a, for hvilken hastighet er det at

- rullemotstanden gir det største bidraget til F?
- luftmotstanden gir det største bidraget til F?

Oppgi svarene rundet av til nærmeste heltall og målt i km/h.

[1] https://sintef.brage.unit.no/sintef-xmlui/handle/11250/2468761

[2] Det er er her forutsatt flatt strekke, og sett vekk ifra motstand ved akselerasjon.

[3] Det er tatt ugangspunkt i gjennomsnittsvekten til en norsk personbil.

[4] Verdien er hentet fra en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficient#Drag_area

c) Med ”energiforbruk”[1] mener vi her den energien som må til for å motvirke F over en viss kjørelengde. Ved konstant hastighet er energiforbruket etter kjørt lengde proporsjonal med F. På norske motorveier er 90 km/h og 110 km/h vanlige fartsgrenser. Hvor stor økning i energiforbruk vil en økning fra 90 km/h til 110 km/h innebære?

d) Lag en funksjon F_1 som gir F ut ifra bilens hastighet målt i km/h.

[1] Den totale energimengden en bil bruker på en kjørelengde vil være høyere enn det vi har kalt ”energiforbruket”. Som regel vil den totale energimengden som kreves for å kjøre en strekning være høyere jo høyere hastighet man har. Slik kan man anta at differansen i energiforbruk vi finner i denne oppgaven er et minimum for den reelle differansen i total energimengde.

Fasit

Kommer