١٠١ سلاسل

السلاسل هي تسلسل للأرقام، عادة ما تكون مفصولة بفواصل. في السلسلة

$$2, 4, 8, 16 \tag{١}$$

نقول أن لدينا أربعة **عناصر**. العنصر رقم 1 يكون قيمته 2، والعنصر رقم 2 يكون قيمته 4 وهكذا. يتم وصف كل عنصر في السلسلة عادة بحرف مؤشر. إذا اخترنا الحرف a للسلسلة أعلاه، يمكننا كتابة $a_1 = 2$، $a_2 = 4$ وهكذا.

عندما نستخدم a_i للإشارة إلى العناصر في السلسلة، نستخدم $i \in \mathbb{N}$. مثل المجموعات، يمكننا استخدام $\{\}$ للدلالة على سلسلة، و $\in$ للإشارة إلى أن عنصر معين موجود في السلسلة. مثلاً $8 \in \{2, 4, 8, 16\}$.

غالباً ما يمكن ربط الأرقام في السلسلة ببعضها. إذا ضربنا عنصراً من السلسلة في (١) بـ 2، فسنحصل على العنصر التالي. الصيغة **المتكررة** هي

$$a_i = 2 \cdot a_{i-1}$$

في الصيغة المتكررة نستخدم القيمة السابقة للعثور على القيمة التالية.

السلسلة المذكورة هي سلسلة **محددة** لأنها تحتوي على عدد محدد من العناصر. لو استخدمنا الصيغة المتكررة، يمكننا إضافة المزيد من العناصر ونحصل على السلسلة

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots \tag{٢}$$

... يعني أن العناصر تستمر إلى ما لا نهاية، ويُطلق على السلسلة اسم سلسلة **لا متناهية**.

ماذا لو أردنا البحث عن العنصر رقم 20 في هذه السلسلة، أي a_{20}؟ سيكون من المفيد البحث عن صيغة **صريحة**. للقيام بذلك نكتب بعض العناصر ونرى إذا كنا نجد نمطًا:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2^1 \\ a_2 &= 4 = 2^2 \\ a_3 &= 8 = 2^3 \end{aligned}$$

من المعادلات أعلاه ندرك أن للعنصر رقم i يمكن كتابته على النحو التالي:

$$a_i = 2^i$$

وبهذه الطريقة يمكننا بسهولة العثور على العنصر رقم 20:

$$\begin{aligned} a_{20} &= 2^{20} \\ &= 1048576 \end{aligned}$$

الصيغة الصريحة تعطينا تعبيرًا يتم حساب قيمة العنصر مباشرة من خلاله. عندما نمتلك تعبيرًا من هذا النوع، فإنه من المعتاد أيضًا كتابة هذا كآخر عنصر في السلسلة، وتصبح (٢) كالتالي:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., 2^i$$

١.١.١ التتابعات الحسابية

التتابع

$$2, 5, 8, 11, 14, 17$$

يُطلق عليه تتابع حسابي. في التتابع الحسابي, يكون لدينا فرق ثابت بين كل عنصرين متتاليين، وفي هذه الحالة الفرق هو 3. عندما نكتب العناصر الثلاثة الأولى نستطيع أن نجد النمط للصيغة المحددة :

$$a_1 = 2 = 2 + 3 \cdot 0$$
$$a_2 = 5 = 2 + 3 \cdot 1$$
$$a_3 = 8 = 2 + 3 \cdot 2$$

من المعادلات أعلاه نلاحظ أن

$$a_i = 2 + 3 \cdot (i - 1)$$

١.١ التتابع الحسابي

العنصر a_i في **تتابع حسابي** معطى بالصيغة التكرارية

$$a_i = a_{i-1} + d \quad (٣)$$

والصيغة المحددة

$$a_i = a_1 + d(i - 1) \quad (٤)$$

حيث d هو الفرق الثابت $a_i - a_{i-1}$.

مثال

ابحث عن الصيغة التكرارية والصيغة المحددة للتتابع

$$7, 13, 19, 25, \ldots$$

الإجابة

التتابع له فرق ثابت $d = 6$ والعنصر الأول هو $a_1 = 7$. الصيغة التكرارية تصبح

$$a_i = a_{i-1} + 6$$

في حين تصبح الصيغة المحددة

$$a_i = 7 + 6(i-1)$$

٢.١.١ التتابعات الهندسية

التتابع

$$2, 6, 18, 54, 162$$

يُطلق عليه تتابع هندسي. في التتابع الهندسي, النسبة بين كل عنصرين متتاليين تكون ثابتة، وفي هذه الحالة النسبة هي 3. هنا أيضًا نستطيع أن نكتشف نمطًا ثابتًا:

$$a_1 = 2 = 2 \cdot 3^0$$
$$a_2 = 6 = 2 \cdot 3^1$$
$$a_3 = 18 = 2 \cdot 3^2$$

إذاً الصيغة المحددة هي

$$a_i = 2 \cdot 3^{i-1}$$

١.٢ التتابع الهندسي

العنصر a_i في **تتابع هندسي** بنسبة k معطى بالصيغة التكرارية

$$a_i = a_{i-1} \cdot k \tag{٥}$$

والصيغة المحددة

$$a_i = a_1 \cdot k^{i-1} \tag{٦}$$

مثال 1

ابحث عن الصيغة التكرارية والصيغة المحددة للتتابع

$$5, 10, 20, 40, \ldots$$

الإجابة

التتابع له نسبة ثابتة $k = 2$، والعنصر الأول هو $a_1 = 5$. الصيغة التكرارية تصبح

$$a_i = a_{i-1} \cdot 2$$

في حين تصبح الصيغة المحددة

$$a_i = 5 \cdot 2^{i-1}$$

مثال 2

تتابع هندسي له $a_1 = 2$ و $k = 4$. لأي قيمة من i يكون $a_i = 128$؟

الإجابة

لدينا المعادلة

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^{i-1} &= 128 \\ 4^{i-1} &= 64 \\ 4^{i-1} &= 4^3 \\ i - 1 &= 3 \\ i &= 4 \end{aligned}$$

إذا كان $a_4 = 128$.

٢٠١ سلاسل

السلسلة هي في الواقع نفسها عبارة الجمع (انظر MB). على سبيل المثال، هي

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

سلسلة. نستخدم المصطلح عنصر بنفس الطريقة التي نستخدم فيها عنصر لتتابع، في السلسلة أعلاه، العنصر رقم 3 له القيمة 18، وفي المجموع هناك خمسة عناصر.

بالنسبة لسلسلة، من الطبيعي أننا لا نرغب فقط في معرفة قيمة كل عنصر بشكل فردي، ولكن أيضًا

ما هو مجموع جميع العناصر. طالما أن السلسلة ليست لانهائية، يمكن دائمًا جمع العناصر واحدًا تلو الآخر، ولكن بالنسبة لبعض السلاسل، هناك تعبيرات تعطينا المجموع بكثير أقل من العمل (وحتى في حالات السلاسل اللانهائية).

١.٢.١ سلاسل حسابية

٣.١ مجموع سلسلة حسابية

إذا كانت العناصر في سلسلة يمكن وصفها بتتابع حسابي، تُسمى السلسلة بـ**سلسلة حسابية**.

المجموع S_n لأول n عنصر في سلسلة حسابية هو

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} \tag{٧}$$

حيث a_1 هو العنصر الأول في السلسلة.

مثال

نظرًا للسلسلة اللانهائية

$$3 + 7 + 11 + \ldots$$

ابحث عن مجموع العناصر العشرة الأولى

الإجابة

العنصر i في السلسلة a_i معطى بالصيغة

$$a_i = 3 + 4(i - 1)$$

لذا، هذه هي سلسلة حسابية، ومجموع العناصر n الأولى هو

$$\begin{aligned} a_{10} &= 3 + 4(10 - 1) \\ &= 39 \end{aligned}$$

العناصر العشرة الأولى هي

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{3 + 39}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

٣.١ مجموع سلسلة حسابية (توضيح)

باستخدام الصيغة الصريحة من (٤)، يمكننا كتابة مجموع سلسلة حسابية بها n عنصر كـ

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + d(n-1)) \qquad (٨)$$

ويمكن أيضًا التعبير عن عنصر في السلسلة كـ:

$$a_i = a_n - (n-i)d$$

لـ $n \leq i \leq 1$. وبذلك، يمكننا كتابة المجموع (هنا العنصر الأخير أولاً، ثم الذي قبله وهكذا)

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - d(n-1)) \qquad (٩)$$

عند جمع (٨) و (٩)، نحصل على $2S_n$ على الجانب الأيسر. على الجانب الأيمن، جميع d تُلغى، ونحصل على

$$2S_n = na_1 + na_n$$

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

٤.١ مجموع سلسلة هندسية

إذا كان يمكن وصف أحد أجزاء التسلسل بأنه تتابع هندسي، يُسمى التسلسل **تسلسل هندسي**.

مجموع S_n لـ n جزء الأولى في التسلسل الهندسي بنسبة k والجزء الأول a_1 معطى كالتالي:

$$S_n = a_1 \frac{1-k^n}{1-k} \quad , \quad k \neq 1 \tag{١٠}$$

إذا كان $k = 1,$ فإن:

$$S_n = na_1 \tag{١١}$$

مثال

نظراً للتسلسل اللانهائي:

$$3 + 6 + 12 + 24 + ...$$

ابحث عن مجموع الـ 15 جزء الأولى.

الإجابة

هذا هو التسلسل الهندسي بـ $a_1 = 3$ و $k = 2$. مجموع الـ 15 جزء الأولى هو:

$$\begin{aligned} S_{15} &= 3 \cdot \frac{2^{15}-1}{1-2} \\ &= 3 \cdot \frac{1-32768}{-1} \\ &= 98301 \end{aligned}$$

١.٤ مجموع سلسلة هندسية (توضيح)

مجموع S_n للتسلسل الهندسي بـ n جزء هو:

$$S_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + ... + a_1k^{n-2} + a_1k^{n-1} \tag{١٢}$$

إذا ضربنا هذا المجموع بـ k، نحصل على:

$$kS_n = a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + ... + a_1k^{n-1} + a_1k^n \tag{١٣}$$

التعبير الذي نبحث عنه يظهر عندما نخصم (١٣) من (١٢):

$$\begin{aligned} S_n - kS_n &= a_1 - a_1k^n \\ S_n(1-k) &= a_1(1-k^n) \\ S_n &= a_1\frac{(1-k^n)}{1-k} \end{aligned}$$

١.٢.٣ التسلسلات الهندسية اللانهائية

عندما يكون للتسلسل الهندسي عناصر لانهائية، نلاحظ:
إذا كان $|k| < 1$، فإن:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} a_1\frac{1-k^n}{1-k} \\ &= a_1\frac{1}{1-k} \end{aligned}$$

إذاً، مجموع عناصر لانهائية يتجه نحو قيمة محددة (واقعية)! عندما يكون هذا حقيقة نقول أن التسلسل يتقارب وأن التسلسل هو متقارب. إذا كان من ناحية أخرى $|k| \geq 1$، يتجه المجموع نحو $\pm\infty$. في هذه الحالة نقول أن التسلسل يتباعد وأن التسلسل هو متباعد.

١.٥ مجموع التسلسل الهندسي اللانهائي

للتسلسل الهندسي اللانهائي بنسبة $|1| > k$ والجزء الأول a_1، مجموع S_∞ للتسلسل معطى كالتالي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} \tag{١٤}$$

إذا كان $|k| \geq 1$، سيرتفع المجموع نحو $\pm\infty$.

مثال

نظراً للتسلسل اللانهائي:

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+....$$

a) ما هي قيمة x التي يكون فيها التسلسل متقارباً؟

b) أظهر أن $S_\infty = \frac{x}{x-1}$ عندما يتقارب التسلسل.

c) ما هي قيمة x التي يكون فيها مجموع التسلسل مساوياً لـ $\frac{3}{2}$؟

d) ما هي قيمة x التي يكون فيها مجموع التسلسل مساوياً لـ -1؟

الإجابة

a) هذا هو التسلسل الهندسي بـ $k=\frac{1}{x}$ و $a_1 = 1$. التسلسل يكون متقارباً عندما $|k| < 1$، ولذلك نتطلب:

$$|x| > 1$$

b) عندما $|x| > 1$، نحصل على:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

وهو ما كنا بحاجة لإثباته.

٤٠٢٠١ رمز المجموع

سننظر الآن في رمز يبسط طريقة كتابة السلاسل بشكل كبير. يصبح هذا الرمز مهمًا بشكل خاص في التكامل، حيث سندرس التكامل.

في السابق كتبنا السلسلة بشكل مباشر أو أقله. على سبيل المثال، رأينا السلسلة

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

بالصيغة الصريحة

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

باستخدام رمز المجموع $\sum$ يمكننا ضغط سلسلتنا بشكل كبير. عند كتابة $\sum_{i=1}^{5}$ نشير إلى أن i هو متغير متزايد يبدأ من 1 ويزداد بمقدار 1 حتى 5. إذا كنا نعبر عن الصيغة الصريحة للسلسلة باستخدام i، يمكننا كتابة السلسلة كـ $\sum_{i=1}^{5} 2 \cdot 3^{i-1}$، مع فهم أنه يتعين وضع علامة جمع كلما زاد i بمقدار 1:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = \sum_{i=1}^{5} 2 \cdot 3^{i-1}$$

أما السلسلة اللانهائية $2 + 6 + 18 + \dots$ يمكننا كتابتها كالتالي

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{i-1}$$

بالنسبة لرمز المجموع، لدينا أيضًا بعض القواعد الحسابية التي يجدر بنا ذكرها:

٦٠١ قواعد الجمع

لهاتين السلاسلتين $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ وثابت c لدينا:

$$\sum_{i=j}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=j}^{n} a_i + \sum_{i=j}^{n} b_i \tag{١٥}$$

$$\sum_{i=j}^{n} ca_i = c \sum_{i=j}^{n} a_i \tag{١٦}$$

حيث $j, n \in \mathbb{N}$ و $j < n$.

٦٠١ قواعد الجمع (توضيح)

عند كتابة المجموع وإعادة ترتيب الجمع، ندرك أن

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= a_1+b_1+a_2+b_2+...+a_n+b_n\\ &= a_1+a_2+...+a_n+b_1+b_2+...+b_n\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

عند كتابة المجموع واستخراج العامل c، ندرك أيضًا أن

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}ca_i &= ca_1+ca_2+...+ca_n\\ &= c(a_1+a_2+...+a_n)\\ &= c\sum_{i=1}^{n}a_i\end{aligned}$$

٣٠١ الاستقراء

في الرياضيات النظرية، هناك متطلبات صارمة لإثبات الصيغ. الطريقة التي يتم استخدامها خصوصاً للصيغ التي تحتوي على أعداد صحيحة هي الاستقراء. والمبدأ هو كما يلي[١]:

إذا كان لدينا معادلة صحيحة لعدد صحيح n. إذا كنا نستطيع أن نظهر أن المعادلة صحيحة أيضاً عندما نضيف العدد الصحيح بـ 1، فقد أظهرنا أن المعادلة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة التي تكون أكبر من أو تساوي n.

قد يكون من الصعب في البداية فهم مبدأ الاستقراء، لذا دعونا ننتقل مباشرة إلى مثال:

نريد أن نظهر أن مجموع الأعداد الزوجية الـ n الأولى يساوي $n(n+1)$:

$$2+4+6+...+2n = n(n+1) \tag{١٧}$$

نبدأ بإظهار أن هذا صحيح لـ $n=1$:

$$2 = 1\cdot(1+1)$$
$$2 = 2$$

الآن نعرف عن عدد صحيح، وهو $n=1$، أن الصيغة صحيحة له. بعد ذلك نفترض أن المعادلة صحيحة حتى العنصر رقم k. نريد بعد ذلك التحقق من صحتها للعنصر التالي، أي عندما $n=k+1$. الجمع يصبح

$$2+4+6+...+\overbrace{2k}^{k\text{العنصر رقم}}+\underbrace{2(k+1)}_{k+1\text{العنصر رقم}} = (k+1)((k+1)+1)$$

ولكن حتى العنصر رقم k، تم افتراض أن (١٧) صحيحة، وبالتالي نحصل على[٢]

$$\underbrace{2+4+6+...+2k}_{k(k+1)}+2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$$
$$k(k+1)+2(k+1) = (k+1)(k+2)$$
$$(k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)$$

---

[١] سيتم استخدام كل من كلمة صيغة ومعادلة بالتبادل. الصيغة في الواقع هي مجرد معادلة حيث يمكننا العثور على الكمية المجهولة مباشرةً عن طريق إدخال الكميات المعروفة.

[٢] قد يبدو غريبًا قليلًا أن نكتب $2k + ... + 6 + 4 + 2$، ونفترض أن صيغتنا صحيحة لهذا المجموع. يبدو أننا نفترض أنها صحيحة لـ $n=1$, $n=2$ وهكذا. ولكن هذه مجرد طريقة كتابة غير حقيقية تُستخدم للمجموع حتى العنصر رقم k. لأننا بعد ذلك نقول أننا نعرف عن عدد k أن هذا الافتراض صحيح بالنسبة له، وهو $k=1$، وبالتالي لدينا عنصر واحد فقط قبل العنصر رقم $k+1$.

في الأمثلة التالية، سنترك العنصر رقم k ضمن الرمز "...".

والآن نأتي إلى الاستنتاج المدهش: لقد أظهرنا أن (١٧) صحيحة لـ $n = 1$. بالإضافة إلى أننا أظهرنا إذا كانت المعادلة صحيحة لعدد صحيح $n = k$، فإنها صحيحة أيضاً لـ $n = k + 1$. وبسبب ذلك نعرف أن (١٧) صحيحة لـ $n = 1 + 1 = 2$. ولكن عندما نعرف أنها صحيحة لـ $n = 2$، فإنها صحيحة أيضاً لـ $n = 2 + 1 = 3$ وهكذا، أي لجميع الأعداد الصحيحة!

٧٠١ الاستقراء

عندما نريد بالاستقراء أن نظهر أن المعادلة

$$A(n) = B(n) \tag{١٨}$$

صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$، نقوم بما يلي:

١. التحقق من أن (١٨) صحيحة لـ $n = 1$.

٢. التحقق من أن (١٨) صحيحة لـ $n = k + 1$، مع افتراض أنها صحيحة لـ $n = k$.

مثال 1

أظهر باستخدام الاستقراء أن مجموع الأعداد الفردية الـ n الأولى معطى بالمعادلة

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

لكل $n \in \mathbb{N}$.

الإجابة

نتحقق أن الفرض صحيح لـ $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

نفترض أن الفرض صحيح لـ $n = k$ ونتحقق منه لـ $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 3 + 5 + ...}_{k^2} + (2(k+1) - 1) &= (k+1)^2 \\ k^2 + 2k + 1 &= (k+1)^2 \\ (k+1)^2 &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

وبذلك يكون الفرض قد أثبت لكل $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة: إذا واجهت مشكلة في عاملة الجانب الأيسر أثناء الاستقراء، يمكنك كحل بديل كتابة الجانب الأيمن بدلاً من ذلك، ولكن من الأفضل أن تتجنب ذلك. هذا من أجل الأناقة (حتى الرياضيات لا تستطيع التخلص من نوع من الغرور)، ولكن أيضًا لأن فرصة الخطأ في الحساب تصبح أقل.

مثال 2

أظهر باستخدام الاستقراء:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

لكل $n \in \mathbb{N}$.

الإجابة

نبدأ بالتحقق لـ $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} \\ 1^3 &= \frac{2^2}{4} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

المعادلة صحيحة بالتالي لـ $n = 1$. نفترض أنها صحيحة أيضًا لـ $n = k$ ونتحقق لـ $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + ...}_{\frac{k^2(k+1)^2}{4}} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} &= \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4))}{4} &= \\ \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

وبذلك الفرض قد أثبت لكل $n \in \mathbb{N}$.

مثال 3

أظهر باستخدام الاستقراء:

$$3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 3^n = 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

الإجابة

نتحقق أن الفرض صحيح لـ $n = 1$:

$$3 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)}$$
$$3 = 3^1$$

نفترض أن الفرض صحيح أيضًا لـ $n = k$ ونتحقق لـ $n = k + 1$:

$$\underbrace{3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \ldots}_{3^{\frac{1}{2}k(k+1)}} \cdot 3^{k+1} = 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+1+1)}$$
$$3^{\frac{1}{2}k(k+1)} \cdot 3^{k+1} = 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}$$
$$3^{\frac{1}{2}k(k+1)+k+1} =$$
$$3^{\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{2}{2}(k+1)} =$$
$$3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)} = 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}$$

وبذلك الفرض قد أثبت لكل $n \in \mathbb{N}$.