

## 0.1 Å finne størrelser

Ligninger, formler og funksjoner er begrep som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. De fleste regelboksene i denne boka inneholder en formel. For eksempel inneholder [regel ??](#) en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, er det bare snakk om å sette disse inn i formelen for å finne 'målestokk'. Slik kan vi si at vi da finner 'målestokk' *direkte*. Har man gjort oppgaver tilknyttet de tidligere kapitlene, har man allerede øvd rikelig på det å finne størrelser *direkte*.

I denne seksjonen skal vi se på det å finne størrelser *indirekte*. Med det mener vi at minst én av følgende gjelder:

- Vi må løse en likning for å finne den ukjente størrelsen.
- Vi må ut ifra en situasjonsbeskrivelse sette opp en formel som inneholder den ukjente størrelsen.

### Merk

I denne seksjonen er det bare gitt eksempler, og ingen regler. Det er fordi vi bruker regler vi har sett på i kapitlene om ligninger og funksjoner i [MB](#). Forskjellen er bare at vi her ser på størrelser med benevning.

### Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
  - I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.
- a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.
- b) Hva koster en taxitur på 17 km?

### Svar

- a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

## Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La  $k$  stå for 'kostnad for taxituren' og  $x$  for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

## Eksempel 2

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassesetor som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

- a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseseturen.
- b) Løs likningen.

## Svar

- a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

penger allerede skaffet + antall lodd · penger per lodd = prisen på turen

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatte<sup>1</sup> *antall lodd* med  $x$ , og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

- b)

$$25x = 11\,000 - 2\,000$$

$$25x = 9\,000$$

$$\frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} = \frac{9\,000}{25}$$

$$x = 360$$

---

<sup>1</sup> Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

### Eksempel 3

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for  $P$  og 'utgift per person' for  $U$ , og lag en formel for  $U$ .

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

#### Svar

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter  $P$  med 20, og får

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

### Eksempel 4

Et sportsklubb planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

### Svar

Vi innfører følgende variabler:

- $x$  = antall kilometer kjørt
- $f(x)$  = pris for Busselskap 1
- $g(x)$  = pris for Busselskap 2

Da er

$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Busselskapene har samme pris når

$$f(x) = g(x)$$

$$10x + 10\,000 = 30x + 4\,000$$

$$4\,000 = 20x$$

$$x = 200$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis sportsklubben skal kjøre 200 km.

### Eksempel 5

*Ohms lov* sier at strømmen  $I$  gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor  $U$  er spenningen og  $R$  er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for  $R$ .

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm ( $\Omega$ ).

b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

### Svar

a) Vi gjør om formelen slik at  $R$  står alene på én side av likhetstegnet:

$$I \cdot R = \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}}$$

$$I \cdot R = U$$

$$\frac{I \cdot R}{I} = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \frac{12}{2}$$

$$= 6$$

Resistansen er altså 6  $\Omega$ .

## Eksempel 6

Gitt en temperatur  $T_C$  målt i antall grader Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ). Temperaturen  $T_F$  målt i antall grader Fahrenheit ( $^{\circ}\text{F}$ ) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

- a) Skriv om formelen til en formel for  $T_C$ .
- b) Hvis en temperatur er målt til  $59^{\circ}\text{F}$ , hva er da temperaturen målt i  $^{\circ}\text{C}$ ?

## Svar

- a) Vi isolerer  $T_C$  på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\ T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= 9T_C \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C \end{aligned}$$

- b) Vi bruker formelen fra a), og finner at

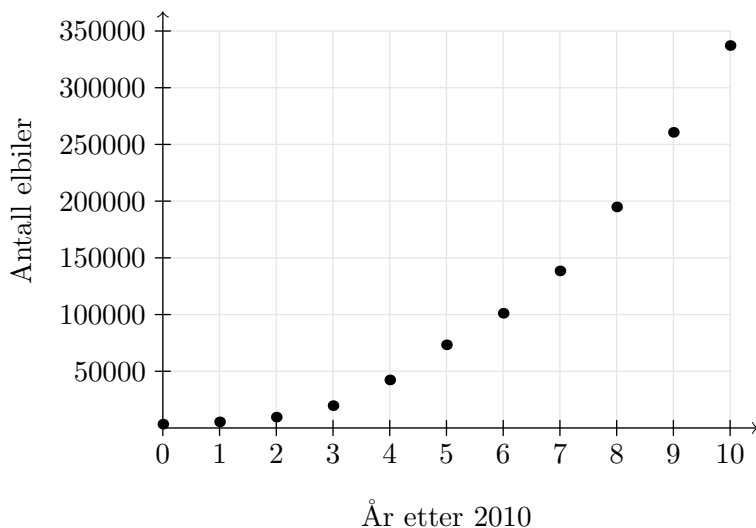
$$\begin{aligned} T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\ &= \frac{5(27)}{9} \\ &= 5 \cdot 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$59^{\circ}\text{F}$  er altså det samme som  $15^{\circ}\text{C}$ .

## 0.2 Regresjon

Å forsøke å beskrive hvordan noe vil *utvikle* seg er en av de viktigste anvendelsene for funksjoner. Hvis vi har et datasett som beskriver tidligere hendelser, kan vi prøve å finne den funksjonen som passer best til datasettet. Dette kalles å utføre **regresjon**.

Grafen under viser<sup>1</sup> antall elbiler i Norge etter år 2010.



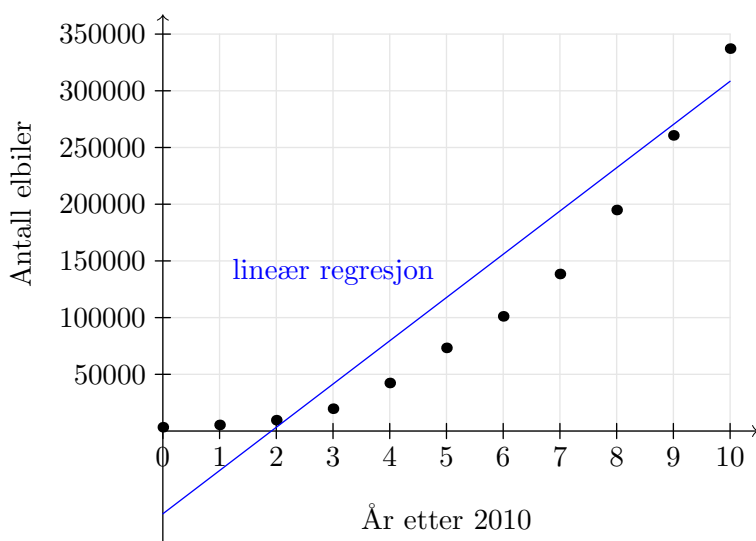
Vi ønsker nå å finne en funksjon som

- (i) så godt som mulig skjærer hvert punkt.
- (ii) har en graf som passer til situasjonen vi modellerer.

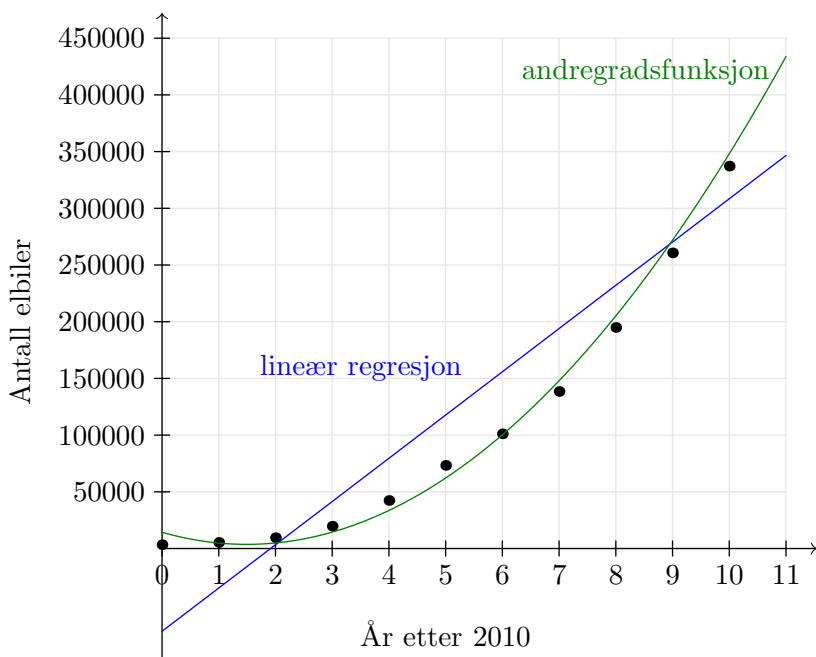
Hvis vi utfører regresjon med en lineær funksjon i GeoGebra (se side ??), får vi denne grafen:

---

<sup>1</sup>Tall hentet fra [elbil.no](http://elbil.no)



Utfører vi regresjon også med en andregradsfunksjon, får vi følgende resultat:



I figuren over kan vi merke oss at

- begge modellene (funksjonene) "oppfører" seg feilaktig i starten. Den lineære funksjonen starter med et negativt antall biler, mens den kvadratiske funksjonen starter med at antallet synker fra år 0 til år 1.



- Grafen til den kvadratiske passer punktene mye bedre enn grafen til den lineære funksjonen.

Hvis vi hadde antatt at den lineære funksjonen ga en god beskrivelse av antallet elbiler fremover i tid, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var ca. 350 000. Hadde vi i stedet antatt det samme om den kvadratiske funksjonen, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var litt over 425 000. Fasit er at antall elbiler i 2021 var 455 271.

