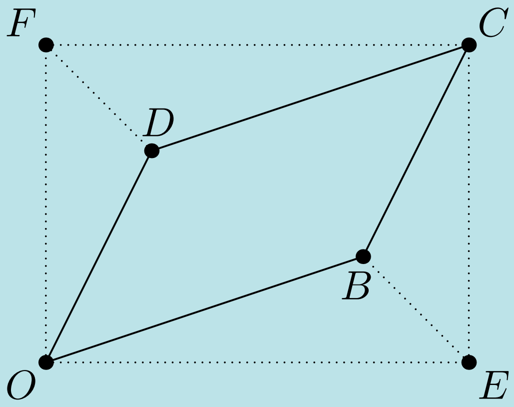
Teoretisk matematikk 1
1T og R1



Sindre Sogge Heggen

Innhold

Viktig kommentar om funksjoner

Som nevnt i MB, er funksjoner variabler som endrer seg i takt med at andre variabler endrer seg. I denne boka vil det å skrive en funksjon f som $f(x)$ indikere at f endrer seg i takt med variabelen x. Så lenge det er etablert at x er en variabel, vil det derfor ikke være noen forskjell på f og $f(x)$, for eksempel kan vi skrive

$$f = f(x) = 2x \tag{1}$$

En slik konvensjon gjør at mange forklaringer får penere uttrykk, men den krever at vi er bevisst hvordan paranteser brukes i sammenheng med multiplikasjon og i sammenheng med funksjoner. Da må vi tenke over om et symbol står for en uavhengig variabel eller en variabel som avhenger av en annen − altså en funksjon. Slik (1) er formulert, er x en uavhengig variabel og f en variabel avhengig av x. For en konstant a er da

$$x(a) = x \cdot a = ax$$

$$f(a) = 2 \cdot a = 2a$$

Videre er

$$f - a = 2x - a$$

Kapittel 1

Mengder

1.1 Mengder

En samling av tall kalles en *mengde*[2], og et tall som er en del av en mengde kalles et *element*. Mengder kan inneholde et endelig antall elementer og de kan inneholde uendelig mange elementer.

[2] En mengde kan også være en samling av andre matematiske objekter, som for eksempel funksjoner, men i denne boka holder det å se på mengder av tall.

Regel 1.1 Mengder

For to reelle tall a og b, hvor $a \leq b$, har vi at

$[a, b]$	er mengden av alle reelle tall større eller lik a og mindre eller lik b.
$(a, b]$	er mengden av alle reelle tall større enn a og mindre eller lik b.
$[a, b)$	er mengden av alle reelle tall større eller lik a og mindre enn b.

$[a, b]$ kalles et lukket intervall, (a, b) kalles et åpent intervall, og både $(a, b]$ og $[a, b)$ kalles halvåpne intervall.

Mengden som inneholder bare a og b skrives som $\{a, b\}$.

At x er et element i en mengde M, skrives som $x \in M$.

At x ikke er et element i en mengde M, skrives som $x \notin M$.

At x er et element i både en mengde M_1 og en mengde M_2, skrives som $x \in M_1 \cup M_2$.

Språkboksen

$x \in M$ uttales "x inneholdt i M".

Mange tekster bruker $\langle$ istedenfor $($ for å indikere åpne (eller halvåpne) intervall.

Merk

Når vi heretter i boka definerer et intervall beskrevet av a og b, tar vi det for gitt at a og b er to reelle tall og at $a \leq b$.

Eksempel 1

Mengden av alle heltall større enn 0 og mindre enn 10 skriver vi som

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Denne mengden inneholder 9 elementer. 3 er et element i denne mengden, og da kan vi skrive $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

10 er ikke et element i denne mengden, og da kan vi skrive $10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Eksempel 2

Skriv opp ulikhetene som gjelder for alle $x \in M$, og om 1 er inneholdt i M.

a) $M = [0, 1]$

b) $M = (0, 1]$

c) $M = [0, 1)$

Svar

a) $0 \leq x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

b) $0 < x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

c) $0 \leq x < 1$. Videre er $1 \notin M$.

Definisjon 1.2 Navn på mengder

$\mathbb{N}$	Mengden av alle positive heltall[1]
$\mathbb{Z}$	Mengden av alle heltall[2]
$\mathbb{Q}$	Mengden av alle rasjonale tall
$\mathbb{R}$	Mengden av alle reelle tall
$\mathbb{C}$	Mengden av alle komplekse tall

[1] Inneholder *ikke* 0.

[2] Inneholder 0.

Symbolet for uendelig

Mengdene i *definisjon 1.2* inneholder uendelig mange elementer. Noen ganger ønsker vi å avgrense deler av en uendelig mengde, og da melder det seg et behov for et symbol som er med på å symbolisere dette. ∞ er symbolet for en uendelig stor, positiv verdi.

Eksempel

Et vilkår om at $\geq > 2$ kan vi skrive som $x \in [2, \infty)$.

Et vilkår om at $x < -7$ kan vi skrive som $x \in (-\infty, -7)$.

Språkboksen

De to intervallene i eksempelet over kan også skrives som $[2, \rightarrow]$ og $(\leftarrow, -7)$.

Merk

∞ er ikke noe bestemt tall. Å bruke de fire grunnleggende regneartene alene med dette symbolet gir derfor ingen mening.

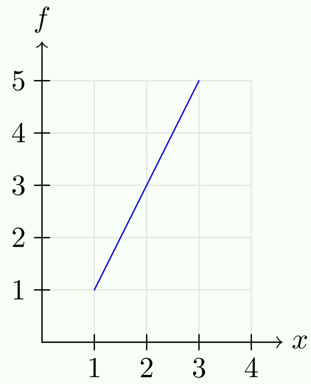
1.2 Verdi- og definisjonsmengder

Definisjon 1.3 Verdi- og definisjonsmengder

Gitt en funksjon $f(x)$. Mengden som utelukkende inneholder alle verdier x kan ha, er definisjonsmengden til f. Denne mengden skrives som D_f. Mengden som utelukkende inneholder alle verdier f kan ha når $x \in D_f$, er verdimengden til f. Denne mengden skrives som V_f.

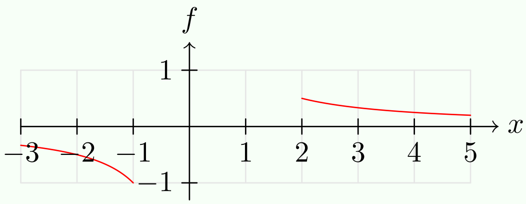
Eksempel 1

Figuren under viser$f(x) = 2x + 1$, hvor $D_f = [1, 3]$. Da er $V_f = [1, 5]$.



Eksempel 2

Figuren under viser $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $D_f = [-3, -1] \cup [2, 5]$. Da er $V_f = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right]$



Merk

Definisjonsmengden til en funksjon bestemmes av to ting; hvilken sammenheng funksjonen skal brukes i og eventuelle verdier som gir et udefinert funksjonsuttrykk. I *Eksempel 1* på side 8 er definisjonsmengden helt vilkårlig valgt, siden funksjonen er definert for alle x. I *Eksempel 2* derimot er ikke funksjonen definert for $x = 0$, så en definisjonsmengde som inneholdt denne verdien for x ville ikke gitt mening.

1.3 Betingelser

Symbolet $\Rightarrow$ bruker vi for å vise til at hvis et vilkår er oppfylt, så er en annen (eller flere) vilkår også oppfylt. For eksempel; i MB så vi at hvis en trekant er rettvinklet, er Pytagoras' setning gyldig. Dette kan vi skrive slik:

$$\text{trekanten er rettvinklet} \Rightarrow \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Men vi så også at det omvendte gjelder; hvis Pytagoras' setning er gyldig, må trekanten være rettvinklet. Da kan vi skrive

$$\text{trekanten er rettvinklet} \iff \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Det er veldig viktig å være bevisst forskjellen på $\Rightarrow$ og $\iff$; at vilkår A oppfylt gir B oppfylt, trenger ikke å bety at vilkår B oppfylt gir vilkår A oppfylt!

Eksempel 1

$$\text{firkanten er et kvadrat} \Rightarrow \text{firkanten har fire like lange sider}$$

Eksempel 2

$$\text{tallet er et primtall større enn } 2 \Rightarrow \text{tallet er et oddetall}$$

Eksempel 3

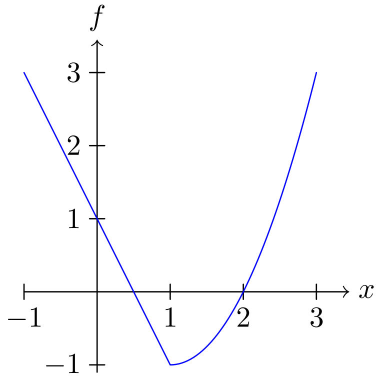
$$\text{tallet er et partall} \iff \text{tallet er delelig med } 2$$

Funksjoner med betingelser

Funksjoner kan gjerne ha flere uttrykk som gjelder for forskjellige vilkår. La oss for eksempel definere en funksjon $f(x)$ slik:

For $x < 1$ er funksjonsuttrykket $-2x + 1$

For $x \geq 1$ er funksjonsuttrykket $x^2 - 2x$



Dette kan vi skrive som

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x & , \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Kapittel 2

Algebra

2.1 Faktorisering

Regel 2.1 Kvadratsetningene

For to reelle tall a og b er

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(1. kvadratsetning)}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(2. kvadratsetning)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(3. kvadratsetning)}$$

Språkboksen

$(a+b)^2$ og $(a-b)^2$ kalles *fullstendige kvadrat*.

3. kvadratsetning kalles også *konjugatsetningen*.

Eksempel 1

Skriv om $a^2 + 8a + 16$ til et fullstendig kvadrat.

Svar

$$\begin{aligned} a^2 + 8a + 16 &= a^2 + 2 \cdot 4a + 4^2 \\ &= (a+4)^2 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Skriv om $k^2 + 6k + 7$ til et uttrykk der k er et ledd i et fullstendig kvadrat.

Svar

$$\begin{aligned} k^2 + 6k + 7 &= k^2 + 2 \cdot 3k + 7 \\ &= k^2 + 2 \cdot 3k + 3^2 - 3^2 + 7 \\ &= (k+3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Eksempel 3

Faktoriser $x^2 - 10x + 16$.

Svar

Vi starter med å lage et fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 16 &= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + 16 \\ &= (x-5)^2 - 9 \end{aligned}$$

Vi legger merke til at $9 = 3^2$, og bruker 3. kvadratsetning:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 - 3^2 &= (x - 5 + 3)(x - 5 - 3) \\ &= (x-2)(x-8) \end{aligned}$$

Altså er

$$x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$$

2.1 Kvadratsetningene (forklaring)

Kvadratsetningene følger direkte av den distributive egenskapen til multiplikasjon (se MB).

Regel 2.2 a_1a_2-metoden

Gitt $x, b, c \in \mathbb{R}$. Hvis $a_1 + a_2 = b$ og $a_1a_2 = c$, er

$$x^2 + bx + c = (x + a_1)(x + a_2) \tag{2.1}$$

Eksempel 1

Faktoriser uttrykket $x^2 - x - 6$.

Svar

Siden $2(-3) = -6$ og $2 + (-3) = -1$, er

$$x^2 - 1x - 6 = (x+2)(x-3)$$

Eksempel 2

Faktoriser uttrykket $b^2 - 5b + 4$.

Svar

Siden $(-4)(-1) = 4$ og $(-4) + (-1) = -5$, er

$$b^2 - 5b + 4 = (b - 4)(b - 1)$$

2.2 a_1a_2-metoden (forklaring)

Vi har at

$$\begin{aligned}(x + a_1)(x + a_2) &= x^2 + xa_2 + a_1x + a_1a_2 \\ &= x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2\end{aligned}$$

Hvis $a_1 + a_2 = b$ og $a_1a_2 = c$, er

$$(x + a_1)(x + a_2) = x^2 + bx + c$$

2.2 Andregradslikninger

Regel 2.3 Andregradslikning med konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

hvor a, b og c er konstanter. Da er x gitt ved abc-formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (abc\text{- formelen}) \tag{2.3}$$

Hvis $x = x_1$ og x_2 er løsninger gitt av abc-formelen, kan vi skrive

$$ax^2 + bx + x = 0 \tag{2.4}$$

Eksempel 1

Løs likningen

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

Svar

Vi bruker abc-formelen. Da er $a = 2$, $b = -7$ og $c = 5$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Enten er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7+3}{4} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Eller så er

$$\begin{aligned} x &= \frac{7-3}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$x^2 + 3 - 10 = 0$$

Svar

Vi bruker *abc*-formelen. Da er $a = 1$, $b = 3$ og $c = -10$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = -5 \qquad \vee \qquad x = 2$$

Eksempel 3

Løs likningen

$$4x^2 - 8x + 1$$

Svar

Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{8} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

Andregradslikninger (forklaring)

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi starter med å omskrive likningen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Så lager vi et fullstendig kvadrat, og anvdender konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Uttrykket over er lik 0 når

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \vee \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.3 Polynomdivisjon

Når to gitte tall ikke er delelige med hverandre, kan vi bruke brøker for å uttrykke kvotienten. For eksempel er

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \tag{2.5}$$

Tanken bak (2.5) er at vi skriver om telleren slik at den delen av 17 som er delelig med 3 framkommer:

$$\frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

Den samme tankegangen kan brukes for brøker med polynomer, og da kalles det *polynomdivisjon*:

Eksempel 1

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5}$$

Svar

Metode 1

Vi gjør følgende trinnvis; med den største potensen av x i telleren som utgangspunkt, lager vi uttrykk som er delelige med telleren.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5} &= \frac{2x(x+5) - 10x + 3x - 4}{x + 5} \\
&= 2x + \frac{-7x - 4}{x + 5} \\
&= 2x + \frac{-7(x+5) + 35 - 4}{x + 5} \\
&= 2x - 7 + \frac{31}{x + 5}
\end{aligned}$$

Metode 2 (Se utregningen under punktene)

i) Vi observerer at leddet med den høyste ordenen av x i dividenden er $2x^2$. Dette uttrykket kan vi framkalle ved å multiplisere dividenden med $2x$. Vi skriver $2x$ til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $2x(x+5) = 2x^2 + 10x$.

ii) Differansen fra punkt ii) er $-7x - 4$. Vi kan framkalle leddet med den høyeste ordenen av x ved å multiplisere dividenden med -7. Vi skriver -7 til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $-7(x+5) = -7x - 5$.

iii) Differansen fra punkt iii) er 31. Dette er et uttrykk som har lavere orden av x enn dividenden, og dermed skriver vi $\frac{31}{x+5}$ til høgre for likhetstegnet.

$$
\begin{array}{rl}
 & (2x^2 + 3x - 4) : (x+5) = 2x - 7 + \dfrac{31}{x+5} \\
- & \underline{(2x^2 + 10x)} \\
 & \qquad\quad -7x - 4 \\
 & \quad - \underline{(-7x - 35)} \\
 & \qquad\qquad\qquad 31
\end{array}
$$

Eksempel 2

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2}$$

Svar

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} &= \frac{x(x^2 - 2) + 2x - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4(x^2 - 2) - 8 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2}
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 4x^2 + 9) : (x^2 - 2) = x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2} \\
&\underline{-(x^3 - 2x)} \\
&\qquad - 4x^2 + 2x + 9 \\
&\quad \underline{-(-4x^2 + 8)} \\
&\qquad\qquad 2x + 1
\end{aligned}$$

Eksempel 3

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Svar

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} &= \frac{x^2(x-4) + 4x^2 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x(x-4) + 4x - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x + \frac{-2x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x - 2
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = x^2 + x - 2 \\
&-\underline{(x^3 - 4x^2)} \\
&\qquad\quad x^2 - 6x + 8 \\
&\quad - \underline{(-x^2 - 4x)} \\
&\qquad\qquad -2x + 8 \\
&\qquad\quad - \underline{(-2x + 8)} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

2.4 Polynomers egenskaper

Eksemplene på side 19 - 22 peker på noen viktige sammenhenger som gjelder for generelle tilfeller:

Regel 2.4 Polinomdivisjon

La A_k betegne et polynom A med grad k. Gitt polynomet P_m, da fins polynomene Q_n, S_{m-n} og R_{n-1}, hvor $m \geq n > 0$, slik at

$$\frac{P_m}{Q_n} = S_{m-n} + \frac{R_{n-1}}{Q_n} \tag{2.6}$$

Språkboksen

Hvis $R_{n-1} = 0$, sier vi at P_m er delelig med Q_n.

Eksempel 1

Undersøk om polynomene er delelige med $x - 3$.

a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$

b) $K(x) = x^3 + 6x^2 - 13x - 42$

Svar

a) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{P}{x-2} = x^2 + 8x + 2 - \frac{50}{x-2}$$

Altså er ikke P delelig med $x - 3$.

b) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{K}{x-2} = x^2 + 9x + 14$$

Altså er K delelig med $x - 3$.

Regel 2.5 Faktorer i polynomer

Gitt et polynom $P(x)$ og en konstant a. Da har vi at

$$P \text{ er delelig med } x-a \iff P(a)=0 \tag{2.7}$$

Hvis dette stemmer, fins det et polynom $S(x)$ slik at

$$P=(a-x)S \tag{2.8}$$

Eksempel 1

Gitt polynomet

$$P(x)=x^3-3x^2-6x+8$$

a) Vis at $x=1$ løser likningen $P=0$.

b) Faktoriser P.

Svar

a) Vi undersøker $P(1)$:

$$\begin{aligned}P(1)&=1^3-3\cdot 1^3-6\cdot 1+8\\&=0\end{aligned}$$

Altså er $P=0$ når $x=1$.

b) Siden $P(1)=0$, er $x-1$ en faktor i P. Ved polynomdivisjon finner vi at

$$P=(x-1)(x^2-2x-8)$$

Da $2(-4)=-8$ og $-4+2=-2$, er

$$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$$

Dette betyr at

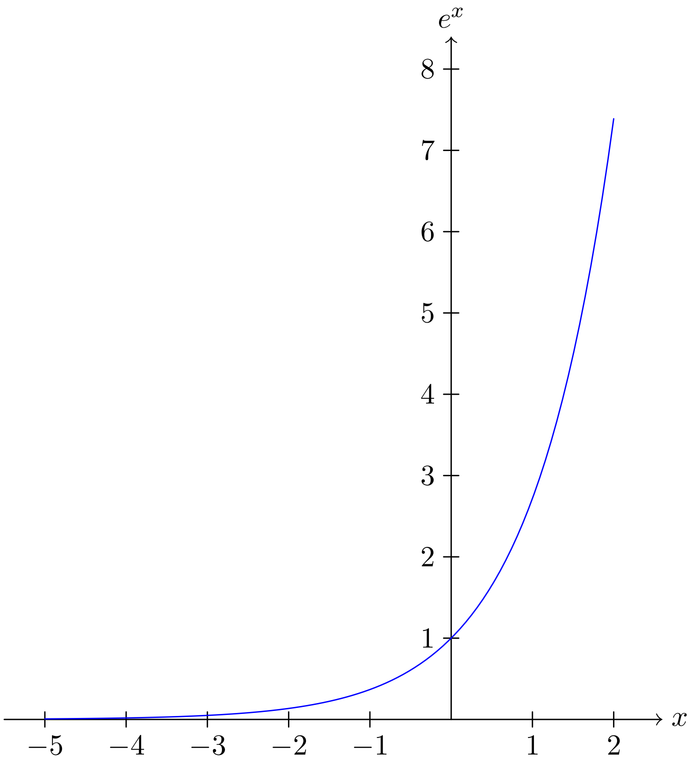
$$P=(x-1)(x+2)(x-4)$$

2.5 Eulers tall

Eulers tall er en konstant som har så stor betydning i matematikk at den har fått sin egen bokstav; e. Tallet er irrasjonalt[1], og de ti første sifrene er

$$e = 2.718281828...$$

De mest fascinerende egenskapene til dette tallet kommer til syne når man undersøker funksjonen $f(x) = e^x$. Dette er en eksponentialfunksjon som er så viktig at den rett og slett går under navnet *eksponentialfunksjonen*.



[1]Og trascendentalt.

2.6 Logaritmer

I MB så vi på potenstall, som består av et grunntall og en eksponent. En *logaritme* er en matematisk operasjon relativ til et tall. Hvis en logaritme er relativ til grunntallet til en potens, vil operasjonen resultere i ekspontenten.

Logaritmen relativ til 10 skrives $\log_{10}$. Da er for eksempel

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

Videre er for eksempel

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Følelig kan vi skrive

$$1000 = 10^{\log_{10} 1000}$$

Med potensreglene som ugangspunkt (se MB), kan man utlede mange regler for logartimer.

Definisjon 2.6 Logaritmer

La $\log_a$ betegne logaritmen relativ til $a \in \{\mathbb{R}|a \neq 0\}$. For $m \in \mathbb{R}$ er da

$$\log_a a^m = m \tag{2.9}$$

Alternativt kan vi skrive

$$m = a^{\log_a m} \tag{2.10}$$

Eksempel 1

$$\log_5 5^9 = 9$$

Eksempel 2

$$3 = 8^{\log_8 3}$$

Språkboksen

$\log_{10}$ skrives ofte som $\log$, mens $\log_e$ skrives ofte som $\ln$ eller (!) $\log$. Når man bruker digitale hjelpemidler til å finne verdier til logaritmer er det derfor viktig å sjekke hva som er grunntallet. I denne boka skal vi skrive $\log_e$ som $\ln$.

Logaritmen med e som grunntall kalles den *naturlige logaritmen*.

Eksempel 3

$$\log 10^7 = 7$$

Eksempel 4

$$\ln e^{-3} = -3$$

Regel 2.7 Logaritmeregler

Merk: Logaritmereglene er her gitt ved den naturlige logaritmen. De samme regelene vil gjelde ved å erstatte ln med $\log_a$, og e med a, for et vilkårlig tall a.

Gitt de reelle tallene x og y, alle forskjellige fra 0. Da er

$$\ln e = 1 \tag{2.11}$$

$$\ln 1 = 0 \tag{2.12}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \tag{2.13}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \tag{2.14}$$

$$\ln x^y = y \ln x \tag{2.15}$$

Eksempel ?

Løs likningen

$$4e^x - 8 = 16$$

Svar

$$\begin{aligned} 4e^x &= 24 \\ e^x &= 6 \\ \ln e^x &= \ln 6 \\ x &= \ln 6 \end{aligned}$$

Logaritmerregler (forklaring)

Likning (2.11)

$$\ln e = \ln e^1 = 1$$

Likning (2.12)

$$\ln 1 = \ln e^0 = 0$$

Likning (2.13)

For $m, n \in \mathbb{R}$, har vi at

$$\begin{aligned} \ln e^{m+n} &= m + n \\ &= \ln e^m + \ln e^n \end{aligned}$$

Vi setter[1] $x = e^m$ og $y = e^n$. Siden $\ln e^{m+n} = \ln(e^m \cdot e^n)$, er da

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Likning (2.14)

Ved å undersøke $\ln a^{m-n}$, og ved å sette $y = a^{-n}$, blir forklaringen tilsvarende den gitt for likning (2.13).

Likning (2.15)

Siden $x = e^{\ln x}$ og $\left(e^{\ln x}\right)^y = e^{y \ln x}$ (se potensregler i MB), har vi at

$$\begin{aligned} \ln x^y &= \ln e^{y \ln x} \\ &= y \ln x \end{aligned}$$

[1] Vi tar det her for gitt at ethvert reelt tall forskjellig fra 0 kan uttrykkes som et potenstall.

2.7 Forklaringer

Polynomdivisjon (2.4) (forklaring)

Gitt polynomene

$$P_m \quad \text{hvor } ax^m \text{ er leddet med høyest grad}$$

$$Q_n \quad \text{hvor } bx^n \text{ er leddet med høyest grad}$$

Da kan vi skrive

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n - \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m \tag{2.16}$$

Polynomet $-\frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$ må nødvendigvis ha grad lavere eller lik $m - 1$. Vi kaller dette polynomet U, og får at

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + U \tag{2.17}$$

Dermed er

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{a}{b}x^{m-n} + \frac{U}{Q_n} \tag{2.18}$$

Vi kan nå stadig gjenta prosedyren fra (2.16) og (2.17), hvor høgresiden i (2.18) får ledd med grad stadig mindre enn $m - n$, fram til polynomet i telleren på høgresiden får grad $n - 1$.

Faktorisering av polynom (forklaring)

(i) Vi starter med å vise at

Hvis P er delelig med $x-a$ er $x=a$ en løsning for $P=0$.

For et polynom S har vi av (2.6) at

$$\frac{P}{x-a}=S$$
$$P=(x-a)S$$

Da er åpenbart $x=a$ en løsning for likningen $P=0$.

(ii) Vi går over til å vise at

Hvis $x=a$ er en løsning for $P=0$, er P delelig med $x-a$.

For polynomene S og R

$$\frac{P}{x-a}=S+\frac{R}{x-a}$$
$$P=(x-a)S+R$$

Siden $x-a$ har grad 1, må R ha grad 0, og er dermed en konstant. Hvis $P(a)=0$, er

$$0=R$$

Altså er P delelig med $x-a$.

Kapittel 3

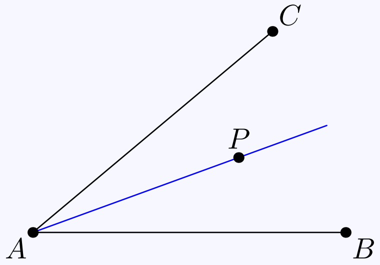
Geometri

3.1 Definisjoner

Regel 3.1 Halveringslinje

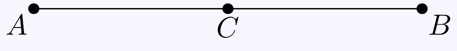
Gitt $\angle BAC$. For et punkt P som ligger på *halveringslinja* til vinkelen, er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC \tag{3.1}$$



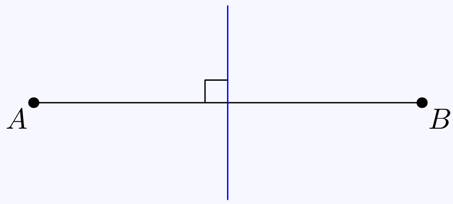
Regel 3.2 Midtpunkt

Midtpunktet C til AB er punktet på linjestykket som er slik at $AC = CB$.



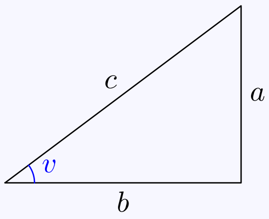
Regel 3.3 Midtnormal

Midtnormalen til AB står normalt på, og går gjennom midtpunktet til, AB.



Regel 3.4 Sinus, cosinus og tangens

Gitt en rettvinklet trekant med katetene a og b, hypotenus c, og vinkel v, som vist i figuren under.



Da er

$$\sin v = \frac{a}{c} \tag{3.2}$$

$$\cos v = \frac{b}{c} \tag{3.3}$$

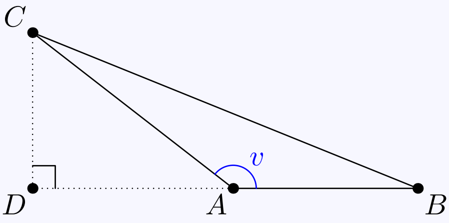
$$\tan v = \frac{a}{b} \tag{3.4}$$

Språkboksen

I figuren over blir a kalt den *motstående* kateten til vinkel v, og b den *hosliggende*.

Regel 3.5 Sinus, cosinus og tangens I

Gitt $\triangle ABC$, hvor $v = \angle BAC > 90^\circ$, som vist i figuren under.



Da er

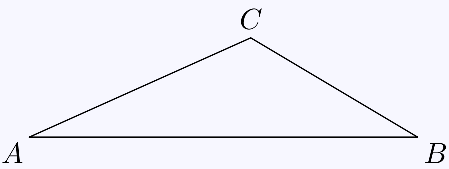
$$\sin v = \frac{CD}{AC} \tag{3.5}$$

$$\cos v = -\frac{AD}{AC} \tag{3.6}$$

$$\tan v = -\frac{CD}{AD} \tag{3.7}$$

3.2 Egenskaper til trekanter

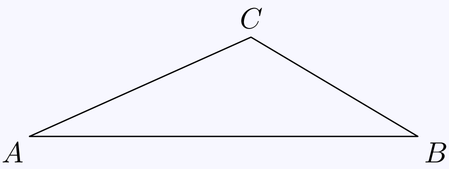
Regel 3.6 Arealsetningen



Arealet T til $\triangle ABC$ er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A \tag{3.8}$$

Regel 3.7 Sinussetningen

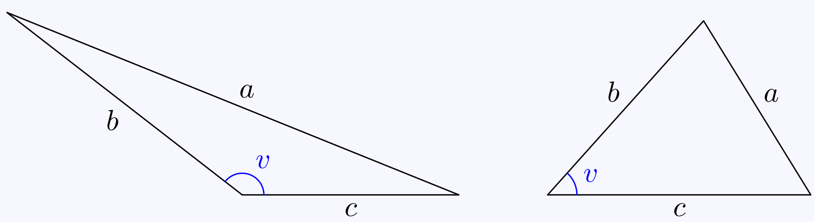


For enhver trekant $\triangle ABC$ er

$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle C}{AB} \tag{3.9}$$

Regel 3.8 Cosinussetningen

Gitt en trekant med sidelengder a, b og c, og vinkel v, som vist i figurene under.



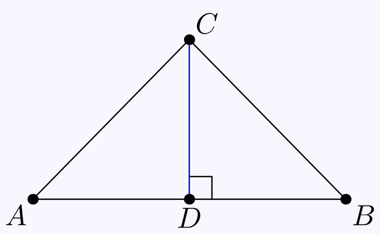
(a) (b)

Da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - ab\cos v \tag{3.10}$$

Regel 3.9 Midtnormalen i en likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$, hvor $AC = BC$, som vist i figuren under.

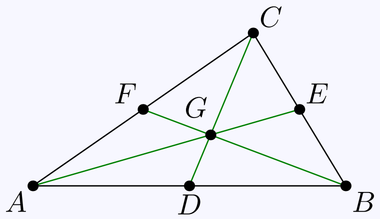


Høgda DC ligger da på midtnormalen til AB.

Regel 3.10 Medianer i trekanter

En *median* er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.

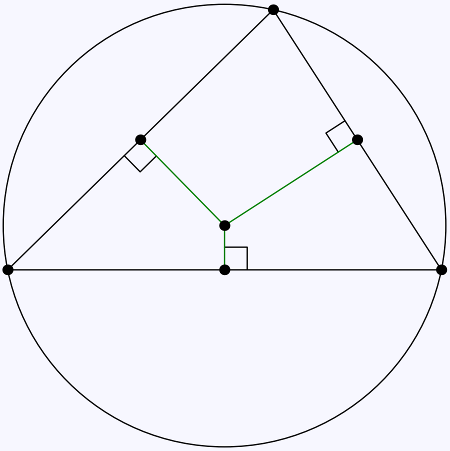


Gitt $\triangle ABC$ med medianer CD, BF og AE, som skjærer hverandre i G. Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

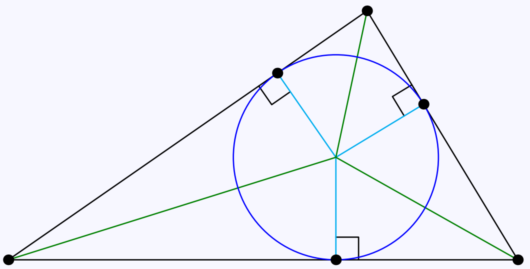
Regel 3.11 Midtnormaler i trekanter

Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i sirkelen som har hjørnene til trekanten på sin bue.



Regel 3.12 Halveringslinjer og innskrevet sirkel i trekanter

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den *innskrevne* sirkelen, som tangerer hver av sidene i trekanten.



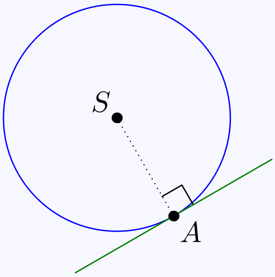
3.3 Egenskaper til sirkler

Regel 3.13 Tangent

En linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt, kalles en *tangent* til sirkelen.

La S være sentrum i en sirkel, og la A være skjæringspunktet til denne sirkelen og ei linje. Da har vi at

$$\text{linja er en tangent til sirkelen} \iff \overrightarrow{AS} \text{ står vinkelrett på linja}$$



Regel 3.14 Sentral- og periferivinkel

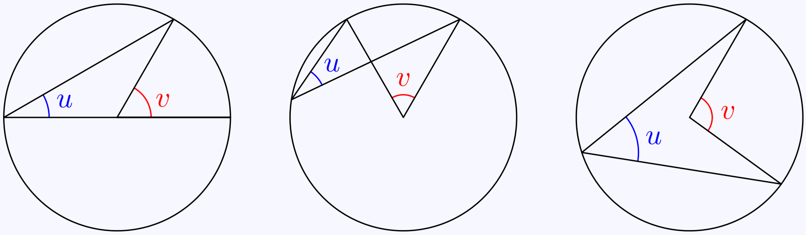
Både periferi- og sentralvinkler har vinkelbein som ligger (delvis) inni en sirkel.

En sentralvinkel har toppunkt i sentrum av en sirkel.

En periferivinkel har toppunkt på sirkelbuen.

Gitt en periferivinkel u og en sentralvinkel v, som er innskrevet i samme sirkel og som spenner over samme sirkelbue. Da er

$$v = 2u \tag{3.11}$$

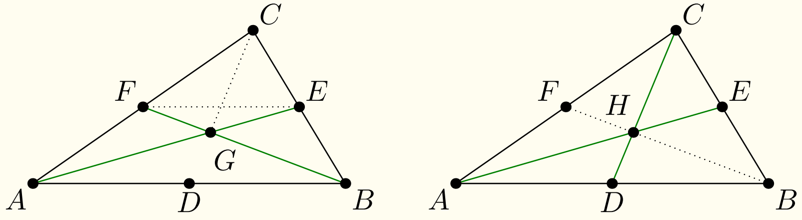


3.4 Forklaringer

3.9 Midtnormalen i en likebeint trekant (forklaring)

Da både $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ er rettvinklede, har CD som korteste katet, og $AC = BC$, følger det av Pytagoras' setning at $AD = BD$.

3.10 Medianer i trekanter (forklaring)



(a) (b)

Vi lar G være skjæringspunktet til BF og AE, og tar det for gitt at dette ligger inne i $\triangle ABC$. Da $AF = \frac{1}{2}AC$ og $BE = \frac{1}{2}BC$, er $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$. Dermed har F og E lik avstand til AB, som betyr at $FE \parallel AB$. Videre har vi også at

$$\begin{aligned} ABG + AFG &= ABG + BGE \\ AFG &= BGE \end{aligned}$$

G har lik avstand til AF og FC, og $AF = FC$. Dermed er $AFG = GFC$. Tilsvarende er $BGE = GEC$. Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$\begin{aligned} AFG + GFC + GEC &= AEC \\ GEC &= \frac{1}{6}ABC \end{aligned}$$

La H være skjæringspunktet til AE og CD. Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både $\triangle GEC$ og $\triangle HEC$ har CE som side, likt areal, og både G og H ligger på AE, må $G = H$. Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

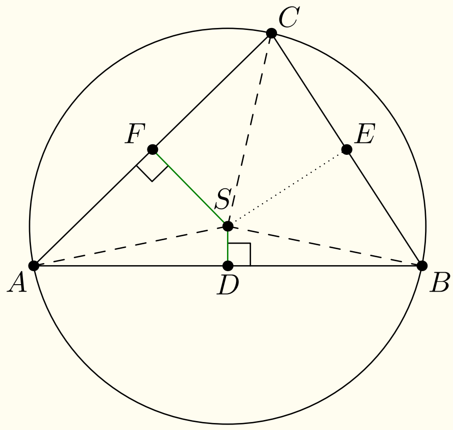
$\triangle ABG \sim \triangle EFG$ fordi $\angle EGF$ og $\angle AGB$ er toppvinkler og $AB \parallel FE$. Dermed er

$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

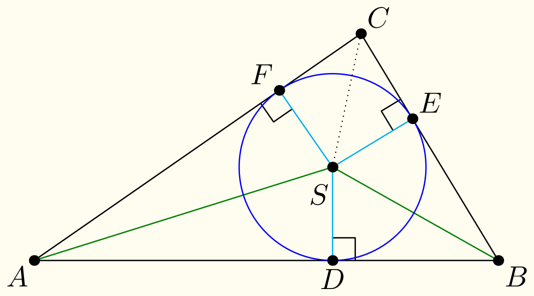
3.11 Midtnormaler i trekanter (forklaring)



Gitt $\triangle ABC$ med midtpunktene D, E og F. Vi lar S være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til AC og AB. $\triangle AFS \sim \triangle CFS$ fordi begge er rettvinklede, begge har FS som korteste katet, og $AF = FC$. Tilsvarende er $\triangle ADS \sim \triangle BDS$. Følgelig er $CS = AS = BS$. Dette betyr at

- $\triangle BSC$ er likebeint, og da går midtnormalen til BC gjennom S.
- A, B og C må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum S og radius $AS = BS = CS$

3.12 Halveringslinjer og innskrevet sirkel i trekanter (forklaring)

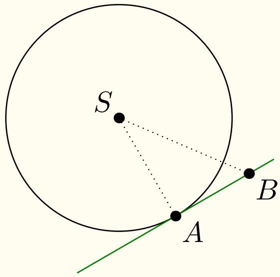


Gitt $\triangle ABC$. Vi lar S være skjæringspunktet til de respective halveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle CBA$. Videre plasserer vi D, E og F slik at $DS \perp AB$, $ES \perp BC$ og $FS \perp AC$. $\triangle ASD \cong \triangle ASF$ fordi begge er rettvinklede og har hypotenus AS, og $\angle DAS = \angle SAF$. Tilsvarende er $\triangle BSD \cong \triangle BSE$. Dermed er $SE = SD = SF$. Følgelig er F, C og E de respektive tangeringspunktene til AB, BC og AC og sirkelen med sentrum S og radius SE.

Videre har vi at $\triangle CSE \cong \triangle CSF$, fordi begge er rettvinklede og har hypotenus CS, og $SF = SE$. Altså er $\angle FCS = \angle ECS$, som betyr at CS ligger på halveringslinja til $\angle ACB$.

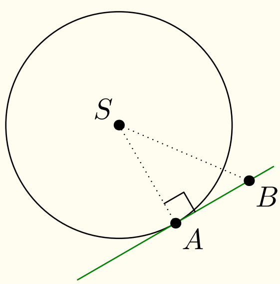
3.13 Tangent (forklaring)

Linja er en tangent til sirkelen $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Vi antar at vinkelen mellom linja og $\overrightarrow{AS}$ er ulik $90°$. Da må det finnes et punkt B på linja slik at $\angle BAS = \angle SBA$, som betyr at $\triangle ASB$ er likebeint. Følgelig er $AS = BS$, og da AS er lik radien i sirkelen, må dette bety at B også ligger på sirkelen. Dette motsier det faktum at A er det eneste skjæringspunktet til sirkelen og linja, og dermed må vinkelen mellom linja og $\overrightarrow{AS}$ være $90°$.

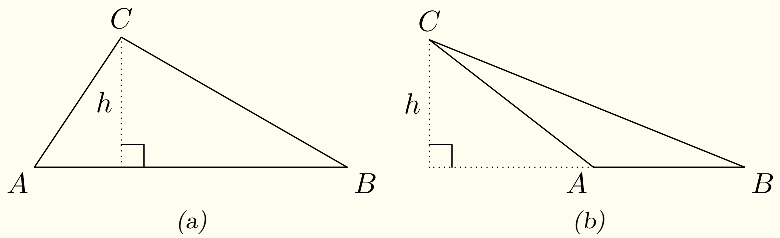
Linja er en tangent til sirkelen $\Longleftarrow$ $\overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Gitt et vilkårlig punkt B, som ikke samsvarer med A, på linja. Da er BS hypotenusen i $\triangle ABC$. Dette innebærer at BS er større enn radien til sirkelen ($BS > AS$), og da kan B umulig ligge på sirkelen. Altså er A det eneste punktet som ligger på både linja og sirkelen, og dermed er linja en tangent til sirkelen.

3.6 Arealsetningen (forklaring)

Gitt to tilfeller av $\triangle ABC$, som vist i figuren under. Det éne hvor $\angle BAC \in (0°, 90°]$, det andre hvor $\angle BAC \in (90°, 0°)$ og la h være høyden med grunnlinje AB.



Arealet T til $\triangle ABC$ er i begge tilfeller

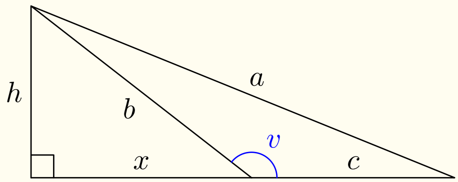
$$T = \frac{1}{2} AB \cdot h \tag{3.12}$$

Av henholdsvis (3.2) og (3.5) har vi at $h = AC \cdot \sin \angle BAC$, og da er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

3.8 Cosinussetningen (forklaring)

$\boldsymbol{v \in (90^\circ, 180^\circ)}$



Av Pytagoras' setning har vi at

$$x^2 = b^2 - h^2 \tag{3.13}$$

og at

$$a^2 = (x + c)^2 + h^2 \tag{3.14}$$

$$a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + h^2 \tag{3.15}$$

Ved å sette uttrykket for x^2 fra (3.13) inn i (3.15), får vi at

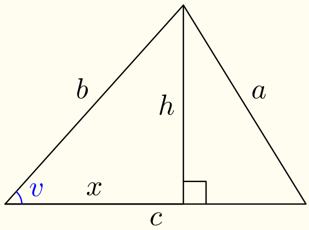
$$a^2 = b^2 - h^2 + 2xc + c^2 + h^2 \tag{3.16}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc \tag{3.17}$$

Av (3.6) har vi at $x = -b\cos v$, og da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos v$$

$\boldsymbol{v \in [(0^\circ, 90^\circ]}$



Dette tilfellet skiller seg ut fra tilfellet hvor $v \in (90^\circ, 180^\circ]$ på to måter:

(i) I (3.14) får vi $(c-x)^2$ i steden for $(x+c)^2$. I (3.17) får vi da $-2xc$ i steden for $+2xc$.

(ii) Av (3.3) er $x = b\cos v$. Av punkt (ii) følger det da at

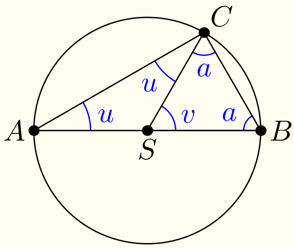
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos v$$

3.14 Sentral- og periferivinkel (forklaring)

Tilhørende periferi- og sentralvinkler kan deles inn i tre tilfeller.

i) En diameter i sirkelen er høyre eller venstre vinkelbein i begge vinklene

I figuren under er S sentrum i sirkelen, $\angle BAC = u$ en periferivinkel og $\angle BSC = v$ den tilhørende sentralvinkelen. Vi setter $\angle SCB = a$. $\angle ACS = \angle SAC = u$ og $\angle CBS = \angle SCB = a$ fordi både $\triangle ASC$ og $\triangle SBC$ er likebeinte.



Vi har at

$$2a = 180° - v \tag{3.18}$$

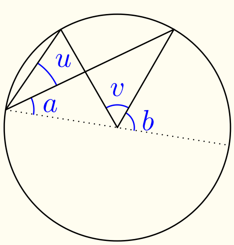
$$2u + 2a = 180° \tag{3.19}$$

Vi setter uttrykket for $2a$ fra (3.18) inn i (3.19):

$$2u + 180° - v = 180°$$
$$2u = v$$

ii) Vinklene ligger innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I tillegg har vi tegnet inn en diameter, som er med på å danne vinklene a og b. Både u og v ligger i sin helhet på samme side av denne diameteren.



Ettersom $u + a$ er en periferivinkel, og $v + b$ den tilhørende sentralvinkelen, vet vi av tilfelle 1 at

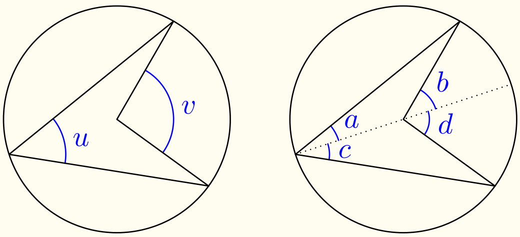
$$2(u + a) = v + b$$

Men ettersom a og b også er samhørende periferi- og sentralvinkler, er $2a = b$. Det betyr at

$$2u + b = v + b$$
$$2u = v$$

iii) Vinklene ligger ikke innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I figuren til høyre har vi tegnet inn en diameter. Den deler u inn i vinklene a og c, og v inn i b og d.



a og c er begge periferivinkler, med henholdsvis b og d som tilhørende sentralvinkler. Av tilfelle i) har vi da at

$$2a = b$$

$$2c = d$$

Dermed er

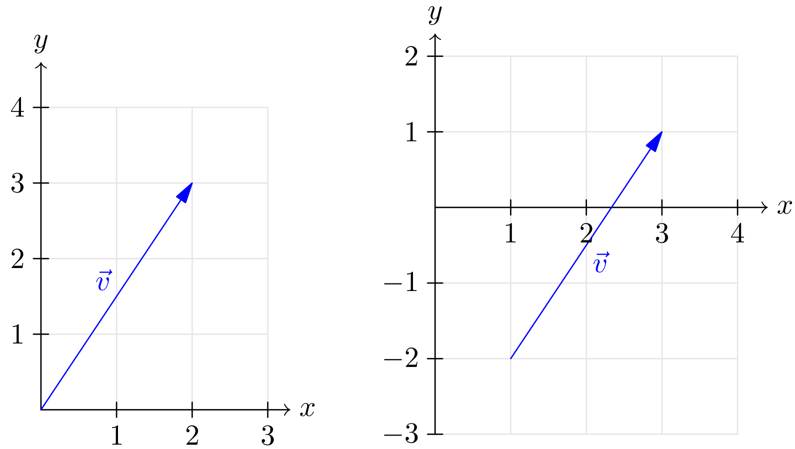
$$2a + 2c = b + d$$
$$2(a + c) = v$$
$$2u = v$$

Kapittel 4

Vektorer

4.1 Introduksjon

En todimensjonal vektor angir en forflytning i et koordinatsystem med en x-akse og en y-akse. En vektor tegner vi som et linjestykke mellom to punkt, i tillegg til at vi lar en pil vise til hva som er endepunktet. Det betyr at forflytningen starter i punktet uten pil, og ender i punktet med pil.



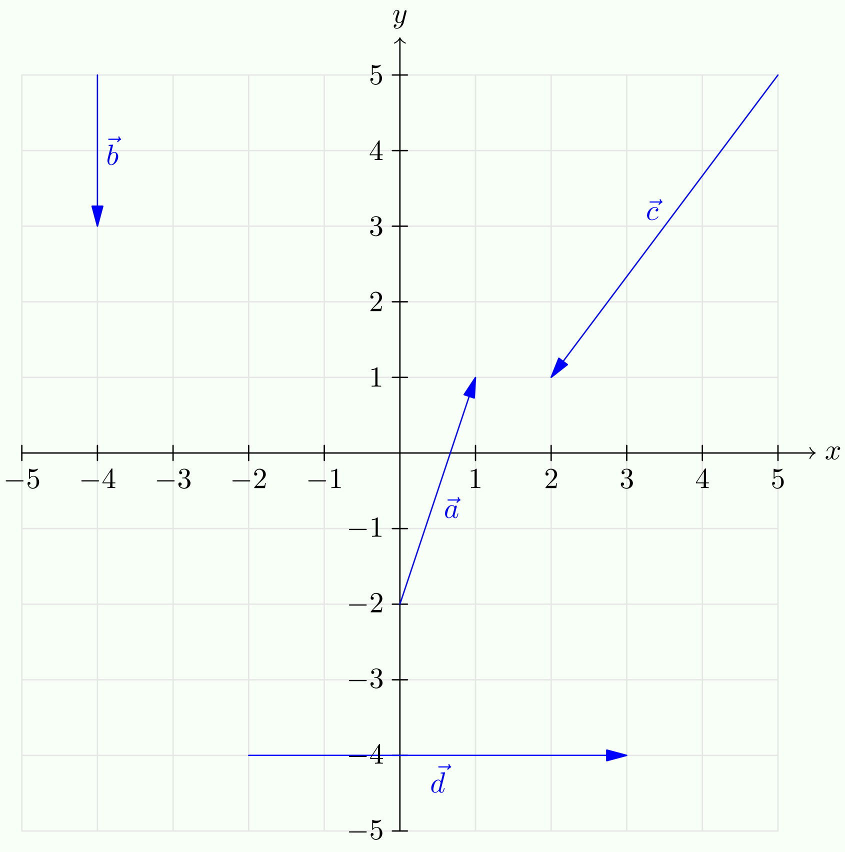
(a) *(b)*

I figur *(a)* er vektoren $\vec{u}$ vist med startpunkt $(0, 0)$ og endepunkt (3,1). Når en vektor har startpunkt $(0, 0)$, sier vi at den er vist i *grunnstillingen*. I figur *(b)* er $\vec{u}$ vist med startpunkt $(1, -2)$ og endepunkt $(3, 1)$. Forflytningen $\vec{u}$ viser til er å vandre 2 mot høgre langs x-aksen og 3 opp langs y-aksen. Dette skriver vi som $\vec{u} = [2, 3]$, som kalles $\vec{u}$ skrevet på *komponentform*.

Eksempel 1

$$\vec{a} = [1, 3] \qquad \vec{b} = [0, -2]$$

$$\vec{c} = [-3, -4] \qquad \vec{d} = [5, 0]$$



Regel 4.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor $\vec{v}$ med startpunkt (x_1, y_1) og endepunkt (x_2, y_2) er gitt som

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] \tag{4.1}$$

Eksempel 1

Skriv vektorene på komponentform.

- $\vec{a}$ har startpunkt $(1, 3)$ og endepunkt $(7, 5)$
- $\vec{b}$ har startpunkt $(0, 9)$ og endepunkt $(-3, 2)$
- $\vec{c}$ har startpunkt $(-3, 7)$ og endepunkt $(2, -4)$
- $\vec{d}$ har startpunkt $(-7, -5)$ og endepunkt $(3, 0)$

Svar

$$\vec{a} = [7 - 1, 5 - 3] = [6, 2]$$

$$\vec{b} = [-3 - 0, 2 - 9] = [-3, -7]$$

$$\vec{c} = [2 - (-3), -4 - 7] = [5, -11]$$

$$\vec{d} = [3 - (-7), 0 - (-5)] = [10, 5]$$

4.2 Regneregler

Regel 4.2 Regneregler for vektorer

Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, punktet $A = (x_0, y_0)$ og en konstant t. Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1) \tag{4.2}$$

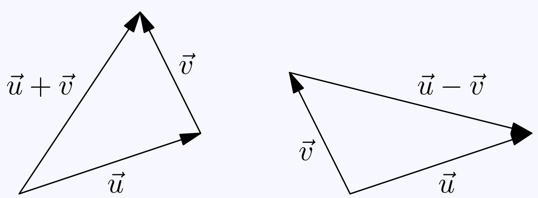
$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \tag{4.3}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \tag{4.4}$$

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \tag{4.5}$$

$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \tag{4.6}$$

Summen eller differansen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan vi tegne slik:



(a) (b)

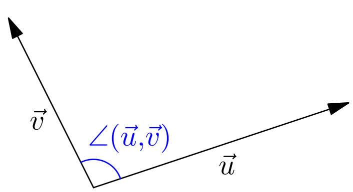
For en vektor $\vec{w}$ har vi videre at

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{4.7}$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \tag{4.8}$$

Vinkelen mellom to vektorer

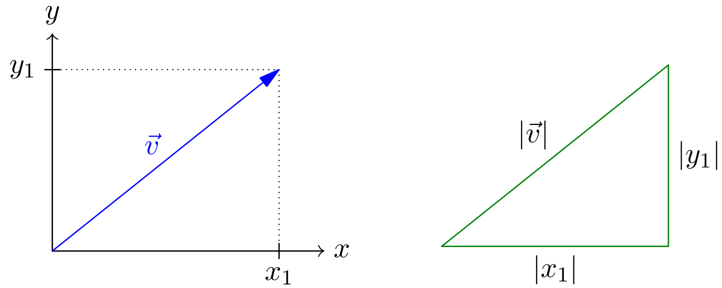
Vinkelen mellom to vektorer er (den minste) vinkelen som blir dannet når vektorene plasseres i samme startpunkt. For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skriver vi denne vinkelen som $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.



I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkler i grader, altså på intervallet $[0°, 180°]$.

4.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. *Lengden* til $\vec{v}$ er avstanden mellom startpunktet og endepunktet.



(a) *(b)*

Av enhver vektor kan vi danne en rettvinklet trekant hvor $|\vec{v}|$ er lengden til hypotenusen og $|x_1|$ og $|y_1|$ er de respektive lengdene til katetene. Dermed er $|\vec{v}|$ gitt av Pytagoras' setning.

Regel 4.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. Lengden $|\vec{v}|$ er da

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{4.9}$$

Eksempel 1

Finn lengden til vektorene $\vec{a} = [7, 4]$ og $\vec{b} = [-3, 2]$.

Svar

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

4.4 Skalarproduktet I

Regel 4.4 Skalarproduktet I

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, er *skalarproduktet* gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{4.10}$$

Språkboksen

Skalarproduktet kalles også *prikkproduktet* eller *indreproduktet*.

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{a} = [3, 2]$, $\vec{b} = [4{,}7]$ og $\vec{c} = [1, -9]$. Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

Svar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + 2(-9) = -15$$

Regel 4.5 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \tag{4.11}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \tag{4.12}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \tag{4.13}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \tag{4.14}$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2$$

når du vet at $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Svar

$$
\begin{aligned}
\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2 &= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\
&= \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\
&= \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2
\end{aligned}
$$

4.5 Skalarproduktet II

Gitt vektoren $\vec{u} - \vec{v}$, hvor $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Da er

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

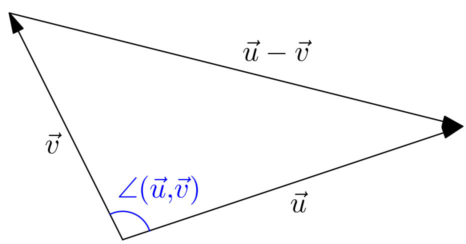
Av (4.9) har vi at

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ved hjelp av (4.10) og (4.11) kan vi skrive (4.15) som

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\vec{u}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}} \tag{4.16}$$

Videre merker vi oss følgende figur:



. Av cosinussetningen[1] og (4.16) er

$$\begin{aligned} |(\vec{v} - \vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{v}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}^{\,2} &= \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

Regel 4.6 Skalarproduktet II

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \tag{4.17}$$

[1]Se ??

4.6 Vektorer vinkelrett på hverandre

Fra (4.17) kan vi gjøre en viktig observasjon; Hvis $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 90°$, er $\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0$, og da blir

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Regel 4.7 Vinkelrette vektorer

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har vi at

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v} \tag{4.18}$$

Språkboksen

Det er mange måter å uttrykke at $\vec{u}\perp\vec{v}$ på. Blant annet kan vi si at

- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett på hverandre.
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står normalt på hverandre.
- $\vec{u}$ er en normalvektor til $\vec{v}$ (og omvendt).
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale.

Eksempel 1

Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5, -3]$, $\vec{b} = [6, -10]$ og $\vec{c} = [2, 7]$ er ortogonale.

Svar

Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 5\cdot 6 + (-3)10\\ &= 0\end{aligned}$$

Altså er $\vec{a}\perp\vec{b}$. Videre er

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{c} &= 5\cdot 2 + (-3)7\cdot\\ &= 11\end{aligned}$$

Altså er $\vec{a}$ og $\vec{c}$ *ikke* ortogonale. Da $\vec{a}\perp\vec{b}$, kan heller ikke $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være ortogonale.

Nullvektoren

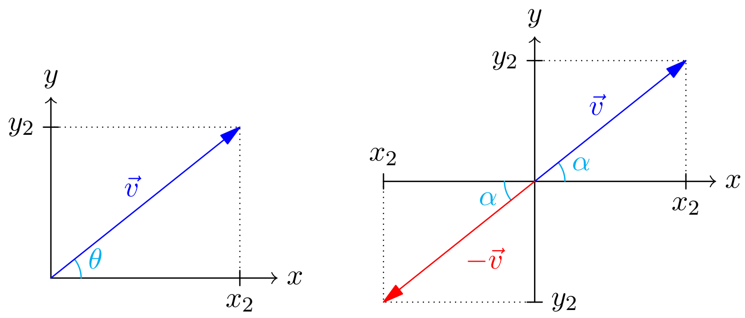
I forkant av *regel 4.7* har vi bare argumentert for at $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. For å rettferdiggjøre betingelsen som går begge veier i (4.18), må vi spørre: Kan vi få $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ om vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ *ikke* er $90°$?

På intervallet $[0°, 180°]$ er det bare vinkelverdien $90°$ som resulterer i cosinusverdi 0. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av $\vec{u}$ eller $\vec{v}$ være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er *nullvektoren* $\vec{0} = [0, 0]$, som rett og slett ikke har noen retning[1]. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

[1] Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger!

4.7 Parallelle vektorer

Hvis vinkelen mellom to vektorer er $0°$ eller $180°$, er de parallelle.



(a) (b)

Gitt to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. La θ og α være vinkelen mellom x-aksen og henholdsvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$, med x-aksen som høgre vinkelbein. Da er $\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$ og $\tan\alpha = \frac{y_2}{x_2}$. Hvis $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, er det to muligheter:

(i) $\theta = 0°$ og $\alpha = 180°$, eller omvendt.

(ii) $\theta = \alpha$

I begge tilfeller er $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ enten $0°$ eller $180°$, og da er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle. Det omvendte gjelder også: Hvis punkt (i) eller (ii) gjelder, er $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Det er ofte praktisk å omskrive denne sammehengen til forholdet mellom samsvarende komponenter[1]:

Regel 4.8 Parallelle vektorer

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{4.19}$$

Alternativt, for et tall t har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{4.20}$$

[1]For vektorene $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$ er disse samsvarende komponenter:

- x_1 og x_2
- y_1 og y_2

Språkboksen

Når $\vec{u} = t\vec{v}$, sier vi at $\vec{u}$ er et *multiplum* av $\vec{v}$ (og omvendt). Vi sier også at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er *lineært uavhengige*.

Eksempel

Undersøk hvorvidt $\vec{a} = [2, -3]$ og $\vec{b} = [20, -45]$ er parallelle med $\vec{c} = [10, -15]$.

Svar

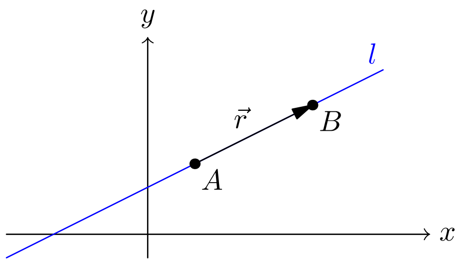
Vi har at

$$\vec{c} = 5[2, -4] = 5\vec{a}$$

Dermed er $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Da $\frac{20}{10} \neq \frac{-45}{15}$, er $\vec{b}$ og $\vec{c}$ *ikke* parallelle.

4.8 Parameterisering av ei linje

Gitt ei linje l, som vist i figuren under



Hvis en vektor $\vec{r}$ er parallell med l, kalles den en *retningsvektor* for linja. Si at $\vec{r} = [a, b]$ er en retningsvektor for l, og at $A = (x_0, y_0)$ er et punkt på l. Om vi starter i A og vandrer parallellt med $\vec{r}$, kan vi være sikre på at vi fortsatt befinner oss på linja. Dette må bety at vi for en variabel t kan nå et vilkårlig punkt $B = (x, y)$ på linja ved følgende utregning:

$$B = A + t\vec{r}$$

På koordinatform kan vi skrive dette som[1]

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Uttrykket over kalles *parameteriseringen* til linja, uttrykt ved t. Parameteriseringen skrives ofte slik:

Regel 4.9 Linje i rommet

Ei linje l som går gjennom punktet $A = (x_0, y_0,)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [a, b]$ kan parameteriseres ved

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \tag{4.21}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

[1]Se (4.2).

4.9 Determinanter

Regel 4.10 2×2 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v})$ av to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [b, c]$ er gitt som

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-1, 3]$ og $\vec{v} = [-2, 4]$. Bestem $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

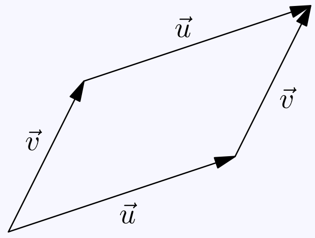
Svar

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Regel 4.11 Arealformler med determinanter

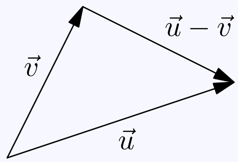
Arealet A til et parallellogram formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{4.22}$$



Arealet A til en trekant formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

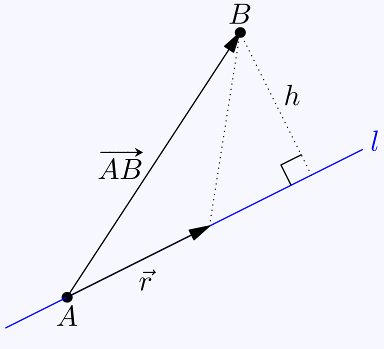
$$A = \frac{1}{2}|\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{4.23}$$



Regel 4.12 Avstand mellom punkt og linje

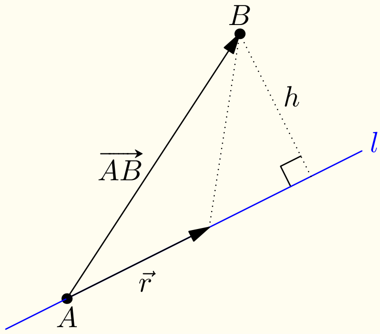
Avstanden h mellom et punkt B og en linje gitt av punktet A og retningsvektoren $\vec{r}$ er gitt som

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|} \tag{4.24}$$



(forklaring)

La en linje l i rommet være gitt av et punkt A og en retningsvektor $\vec{r}$. I tillegg ligger et punkt B utenfor linja, som vist i figuren under



Den korteste avstanden fra B til linja er høyden h i trekanten utspent av $\vec{r}$ og $\overrightarrow{AB}$. Arealet til denne trekanten er gitt ved (4.23):

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|$$

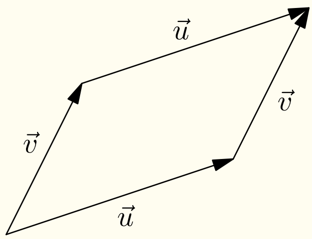
Av den klassiske arealformelen for en trekant har vi nå at

$$\frac{1}{2}|\vec{r}|h = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|$$

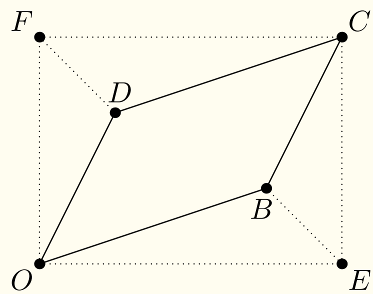
$$h = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|}{|\vec{r}|}$$

4.11 Arealformler med determinanter (forklaring)

Vi lar A_N betegne arealet til en geometrisk form N.



(a)



(b)

Gitt to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$, hvor $a, b, c, d > 0$, som vist i figur *(a)*. Plasserer vi vektorene i grunnstillingen er punktene vist i figur *(b)* gitt som

$$O = (0, 0) \qquad B = (a, b) \qquad C = (a + b, c + d)$$

$$D = (c, d) \qquad E = (a + c, 0) \qquad F = (0, b + d)$$

Med OE som grunnlinje har $\triangle OEB$ høgde b, altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$ og $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OBE} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

I figurene har vi antatt at (den minste) vinkelen mellom $\vec{v}$ og x-aksen er mindre enn vinkelen mellom $\vec{u}$ og x-aksen. I omvendt tilfelle ville vi fått at

$$A_{\square OECF} = bc - ad$$

Altså er

$$A_{\square OECF} = |ac - bd|$$

På lignende måte kan det vises at (4.22) gjelder for alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se oppgave **??**.

Kapittel 5

Grenseverdier og kontinuitet

5.1 Grenseverdier

Si at vi starter med verdien 0.9, og deretter stadig legger til 9 som bakerste siffer. Da får vi verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre. Ved å legge til 9 som bakerste siffer på denne måten, *kan vi komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – verdien 1*. Det å "komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – en verdi" vil vi heretter kalle å "gå mot en verdi". Metoden vi akkurat beskrev kan vi se på som en metode for å *gå mot* 1. Vi kan da si at *grenseverdien* til denne metoden er 1. For å indikere en grenseverdi skriver vi lim.

Det er viktig å tenke over at vi kan gå mot et tall fra to sider; fra venstre eller fra høgre på tallinjen. Med en metode som gir oss verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre, nærmer vi oss 1 fra venstre. Lager vi oss en metode som gir verdiene 1.1, 1.01, 1.001 og så videre, nærmer vi oss 1 fra høgre. Dette vises ved å markere + eller − på tallet vi går mot.

Regel 5.1 Grenseverdier

$$x \to a^+ = x \text{ går mot } a \text{ fra høgre}$$

$$x \to a^- = x \text{ går mot } a \text{ fra venstre}$$

$$x \to a = x \text{ går mot } a \text{ (fra både høgre og venstre)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \text{grenseverdien til } f \text{ når } x \text{ går mot } a \\ &= \text{verdien } f \text{ går mot når } x \text{ går mot } a\end{aligned}$$

Språkboksen

Å gå mot en verdi fra høgre/venstre kalles også å gå mot en verdi ovenfra/nedenfra.

Merk

$x \to a$ omfatter de to tilfellene $x \to a^+$ og $x \to a^-$. Ofte vil disse være så like av natur at vi kan behandle $x \to a$ som ett tilfelle.

En utvidelse av $=$

Det litt paradoksale med grenserverdier hvor x går mot a, er at vi ofte ender opp med å erstatte x med a, selv om vi per definisjon har at $x \neq a$. For eksempel er

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = 2+1 = 3 \tag{5.1}$$

Det er verd å filosofere litt over likhetene i (5.1). Når x går mot 2, vil x aldri bli eksakt lik 2. Dette betyr at $x+1$ aldri kan bli *eksakt lik* 3. Men *jo nærmere* x er lik 2, *jo nærmere* er $x+1$ lik 3. Med andre ord går $x+1$ mot 3 når x går mot 2. Likheten i (5.1) viser altså ikke til et uttrykk som er *eksakt lik* en verdi, men et uttrykk som *går eksakt mot* en verdi. Dette gjør altså at grenseverdier bringer en noe utvidet forståelse av $=$.

Eksempel 1

Gitt $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$. Finn $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Svar

Når $x \neq 1$, har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \\ &= x+3 \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} x+3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

5.2 Kontinuitet

Regel 5.2 Kontinuitet

Gitt en funksjon $f(x)$ og en konstant c. Hvis $f(c)$ eksisterer, er f kontinuerlig for $x = c$ hvis

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{5.2}$$

Hvis (5.2) er ugyldig, er f diskontinuerlig for $x = c$.

Eksempel 1

Undersøk om funksjonene er kontinuerlige for $x = 2$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < 2 \\ -3x + 12 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \tag{5.3}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad x \leq 2 \\ -x + 6 & , \quad x > 2 \end{cases} \tag{5.4}$$

Svar

a) Vi har at

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -3 \cdot 2 + 12 = 6$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 + 4 = 6$$

Altså er f kontinuerlig for $x = 2$.

b) Vi har at

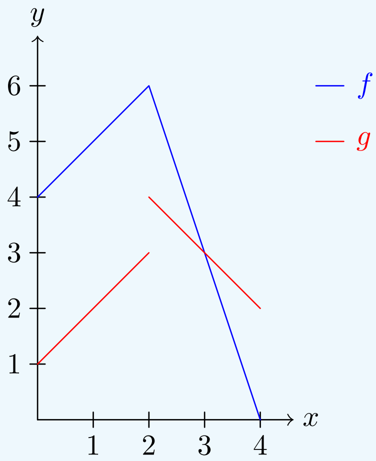
$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = g(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = -2 + 6 = 4$$

Altså er g ikke kontinuerlig for $x = 2$.

Visualisering av kontinuitet

Visuelt kan vi skille mellom kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner slik; kontinuerlige funksjoner har sammenhengende grafer, diskontinuerlige funksjoner har det ikke. Et utsnitt av grafene til funksjonene fra *Eksempel 1* på side 68 ser slik ut:



Grafer fungerer utmerket til å avgjøre hvilke funskjoner vi *forventer* å være kontinuerlige eller ikke, men er aldri gyldige som et bevis for dette.

Kapittel 6

Derivasjon

6.1 Definisjoner

Gitt en funksjon $f(x)$ og to verdier x-verdier x_1 og x_2, hvor $x_1 < x_2$. Den gjennomsnittlige endringen til f fra x_1 til x_2 er da gitt som

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Uttrykket over forteller hvor mye funksjonsverdien endrer seg i forhold til hvor mye x-verdien endrer seg, og gir stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$.

$$figur$$

La oss finne den gjennomsnittlige endringen til $f(x) = x^2$ når $x = 2$ og $x = 3$.

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3^2 - 2^2}{1} = 5$$

Men vi kan jo så mye bedre enn dette. Det er ingenting som hindrer oss i å gjøre intervallet vi studerer mye mindre, og med dèt komme mye nærmere punktet vi er ute etter. Faktisk kan vi tenke oss en avstand mellom de to x-verdiene som er så nære 0 som overhodet mulig. Betegner vi denne avstanden som Δx så skriver vi $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, som indikerer at vi studerer tilfeller i grensen hvor Δx går mot 0.
Så om vi nå ser på gjennomsnittsstigningen til f mellom $x = 2$ og x i umiddelbar nærhet av 2, gir dette oss en uendelig god tilnærming til stignigstallet vi er ute etter. Resultatet kaller vi da *den deriverte av f med hensyn på x for $x = 2$*, som vi skriver som $f'(2)$:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

Så la oss nå prøve å regne ut $f'(2)$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^2 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\ &= 4 \end{aligned}$$

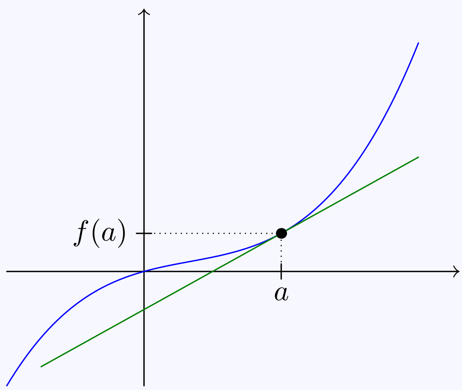
Metoden vi har brukt over kan brukes for en hvilken som helst kontinuerlig funksjon av x for et hvilket som helst valg av x.

Regel 6.1 Definisjon av den deriverte

Gitt en funksjon $f(x)$. Den deriverte av f i $x = a$ er da gitt som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(x)}{h}$$

Linja som har stigingstall $f'(a)$, og som går gjennom punktet $(a, f(a))$, kalles *tangeringslinja* til f for $x = a$.



Eksempel

Gitt $f(x) = x^3$. Finn $f'(a)$.

Svar

Vi har at

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(3a^2 + 3ah + h^2\right) \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Altså er $f'(a) = 3a^2$.

Regel 6.2 Den deriverte som funksjon

Gitt en funksjon f. Den deriverte av f med hensyn på x er da[1] definert som

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{6.1}$$

[1]Gitt at grenseverdien eksisterer.

Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon $f(x)$ og en variabel k. Siden $f'(a)$ angir stigningstallet til $f(a)$ for $x = a$, vil en tilnærming til $f(a+k)$ være (se figur ???)

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k$$

Det er ofte nyttig å vite differansen ε mellom en tilnærming og den faktiske verdien:

$$\varepsilon = f(a+k) - \left[f(a) + f'(a)k\right] \tag{6.2}$$

Vi legger merket til at[1] $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$, og skriver om (6.2) til en formel for $f(x+k)$:

[1]Dette overlates til leseren å vise.

Regel 6.3 Linearisering av en funskjon

Gitt en funskjon $f(x)$ og en variabel k. Da finnes en funksjon ε slik at

$$f(a+k) = f(a) + f'(a)k + \varepsilon \tag{6.3}$$

hvor $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$.

Tilnærmingen

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(x)k$$

kalles **lineæarapproksimasjonen** av $f(x+k)$.

6.2 Derivasjonsregler

Regel 6.4 Den deriverte av utvalgte funksjoner

$$
\begin{aligned}
(x^r)' &= rx^{r-1} \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
(\sin x)' &= \cos(x) \\
(\cos x)' &= -\sin(x) \\
(e^x)' &= e^x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x
\end{aligned}
$$

6.3 Kjerneregelen

Bevis for kjerneregelen
La oss se på tre funksjoner f og g som oppfyller likheten $f(x) = g(u(x))$. f beskrives direkte av x, mens g beskrives av indirekte av x som en funksjon av $u(x)$.

La oss bruke $f(x) = e^{x^2}$ som eksempel. Kjenner vi verdien til x, kan vi fort regne ut hva verdien til $f(x)$ er. For eksempel er:

$$f(2) = e^4$$

Men vi kan også skrive $g(u(x)) = e^{u(x)}$, hvor $u(x) = x^2$. Denne skrivemåten impliserer at når vi kjenner verdien til x, så regner vi først ut verdien til u, før vi til slutt finner verdien av g:

$$u(2) = 4 \qquad , \qquad g(u(2)) = e^{u(2)} = e^4$$

Så det vi har nå er fire unike størrelser: en varierende x, f som funksjon av x, u som funksjon av x og g som funksjon av u.

$$fig$$

Av derdef?? har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} \end{aligned}$$

Vi setter $k = u(x+h) - u(x)$. Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u+k\right] - g\left[u\right]}{h}$$

Av (6.3) har vi at

$$g(u) - g(u+k) = g'(u)k + \varepsilon_g$$

Altså er

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{g'(u)k + \varepsilon_g}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} \end{aligned}$$

Da $\lim_{h\to 0} k = 0$, er $\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$. Videre har vi at $\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = u'(x)$. Altså har vi at

$$\lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} = g'(u)u'(x)$$

Regel 6.5 Kjerneregelen

For en funksjon $f(x) = g(u(x))$ kan vi finne f derivert med hensyn på x som:

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

Eksempel

Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^{x^2+x+1}$
Svar: Vi setter $u = x^2 + x + 1$, og får:

$$\begin{aligned} g(u) &= e^u \\ g'(u) &= e^u \\ u'(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Altså blir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^{(x^2+x+1)}(2x + 1) \end{aligned}$$

6.4 Produktregelen

Bevis for produktregelen
Si at vi har en funksjon f som består av to funksjoner u og v, som begge er avhengige av x:

$$f(x) = u(x)v(x)$$

For enhver kontinuerlig funksjon g er $g'(x)$ er definert som:

$$g' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$ kan vi derfor skrive som:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

La oss nå skrive $u(x)$ og $v(x)$ som u og v og $u(x + \Delta x)$ og $v(x + \Delta x)$ som $\tilde{u}$ og $\tilde{v}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{\Delta x}$$

Vi kan alltids legge til 0 i form av $\dfrac{u\tilde{v}}{\Delta x} - \dfrac{u\tilde{v}}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{\Delta x} + \frac{u\tilde{v}}{\Delta x} - \frac{u\tilde{v}}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(\tilde{u} - u)\tilde{v}}{\Delta x} + \frac{u(\tilde{v} - v)}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

Siden vi for enhver kontinuerlig funksjon g har at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \tilde{g} = g$ og at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{g} - g}{\Delta x} = g'$, får vi nå:

$$f' = u'v + uv'$$

Regel 6.6 Produktregelen ved derivasjon

Gitt $f(x) = u(x)v(x)$ da er

$$f' = u'v + uv'$$

6.5 Divisjonsregelen

Dersom vi har uttrykket $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ kan vi bruke produktregelen og kjerneregelen:

$$\begin{aligned} f' &= \left(\frac{u}{v}\right)' \\ &= \left(uv^{-1}\right)' \\ &= u'v^{-1} - uv^{-2}v' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

Regel 6.7 Divisjonsregelen ved derivasjon

Dersom vi har funksjonen $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, kan vi finne $f'(x)$ ved:

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

L'hoptial (forklaring)

Siden $f(a) = g(a) = 0$, er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Vi setter $k = a - x$, da har vi av linaprx?? at

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(x+h) = -f'(x)k - \varepsilon_f$$

$$g(x) - g(a) = g(x) - g(x+h) = -g'(x)k - \varepsilon_g$$

Altså er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) + \frac{\varepsilon_f}{k}}{g'(x) + \frac{\varepsilon_g}{k}}$$

Da $\lim\limits_{x\to a} k = 0$, har vi at $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varepsilon_f}{k} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$ Altså er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'hopital 2 (forklaring)

Vi har at

$$\lim_{x\to a}\frac{g}{f}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}}$$

Da $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g = 0$, må $\lim_{x\to a}\frac{1}{f} = \lim_{x\to a}\frac{1}{g} = 0$. Av Lhopital1?? har vi da at

$$\lim_{x\to a}\frac{g}{f}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f^2}f'}{\frac{1}{g^2}g'}$$

Multipliserer vi begge sider med $\lim_{x\to a}\frac{f^2}{g^2}$, får vi at

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\lim_{x\to a}\frac{f'}{g'}$$

Kapittel 7

Funksjonsdrøfting

7.1 Monotoniegenskaper

De fleste funksjonsverdier varierer. Beskrivelser av hvordan funksjonene varierer kaller vi beskrivelser av funksjonenes *monotoniegenskaper*.

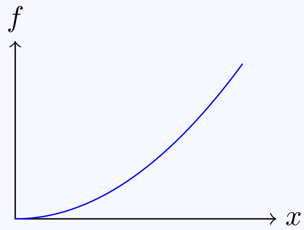
Regel 7.1 Voksende og avtagende funskjoner

Gitt en funksjon $f(x)$.

- f er *voksende* på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{7.1}$$

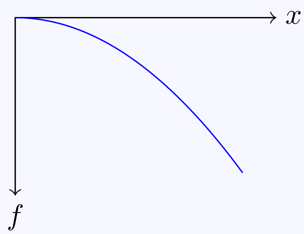
Hvis $f(x_1) \leq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) < f(x_2)$, er f *strengt voksende.*



- f er *avtagende* på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{7.2}$$

Hvis $f(x_1) \geq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) > f(x_2)$, er f *strengt avtagende.*



Regel 7.2 Monotoniegenskaper og den deriverte

Gitt $f(x)$ deriverbar på intervallet $[a, b]$.

- Hvis $f' \geq 0$ for $x \in [a, b]$, er f voksende for $x \in (a, b)$
- Hvis $f' \leq 0$ for $x \in [a, b]$, er f avtagende for $x \in (a, b)$

Hvis henholdsvis $\geq$ og $\leq$ kan erstattes med $>$ og $<$, er f strengt voksende/avtagende.

Eksempel

Avgjør på hvilke intervaller f er voksende/avtagende når

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \qquad , \qquad x \in [0, 8]$$

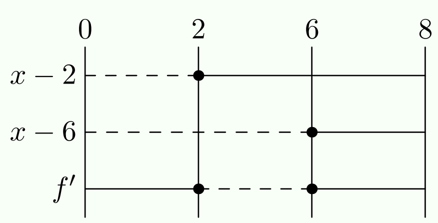
Svar

Vi har at

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

For å tydeliggjøre når f' er positiv, negativ eller lik 0 gjør vi to ting; vi faktoriserer uttrykket til f', og tegner et *fortegnsskjema*:

$$f'(x) = (x - 2)(x - 6)$$



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket $x - 2$ er negativt når $x \in [0, 2)$, lik 0 når $x = 2$, og positivt når $x \in (2, 8]$.
- Uttrykket $x - 6$ er negativt når $x \in [0, 8)$, lik 0 når $x = 6$, og positivt når $x \in (6, 8]$.
- Siden $f' = (x - 2)(x - 6)$, er

$$f' \geq 0 \text{ når } x \in [0, 2] \cup (6, 8]$$

$$f' = 0 \text{ når } x \in \{2, 6\}$$

$$f' \leq 0 \text{ når } x \in [2, 6]$$

Dette betyr at

$$f \text{ er voksende når } x \in (0,2) \cup (6,8)$$
$$f \text{ er avtagende når } x \in (2,6)$$

7.2 Monotoniegenskaper og den deriverte (forklaring)

Gitt $f(x)$, hvor $f' \geq 0$ for $x \in [a,b]$. La $x_1, x_2 \in (a,b)$ og $x_2 > x_1$. Av middelverdisetningen[1] finnes det et tall $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da $c \in [a,b]$, er $f'(x) \geq 0$, og da er

$$0 \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Følgelig er $f(x_2) \geq f(x_1)$, og av *definisjon 7.1* er da f voksende på intervallet (a,b).

[1]Se vedlegg??

7.2 Ekstremalpunkt

Regel 7.3 Maksimum og minimum

Merk: Et tall c kan omtales som et punkt i funskjonsdrøftinger, underforstått at det er snakk om punktet $(c, 0)$.

Gitt en funksjon $f(x)$ og et tall c.

Absolutt maksimum og minimum

- f har absolutt maksimum $f(c)$ hvis $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har absolutt minimum $f(c)$ hvis $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.

Lokalt maksimum og minimum

- f har et lokalt maksimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in I$.
- f har et lokalt minimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \leq f(x)$ for $x \in I$.

Språkboksen

Et *maksimum/minimum* blir også kalt en *maksimumsverdi/minimumsverdi*.

Regel 7.4 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon $f(x)$ med maksimum/minimum $f(c)$. Da er

- $f(c)$ en ekstremalverdi for f.
- c et ekstremalpunkt for f. Nærmere bestemt et maksimalpunkt/minimumspunkt for f.
- $(c, f(c))$ et toppunkt/bunnpunkt for f.

Regel 7.5 Kritiske punkt

Et tall c er et kritisk punkt for en funksjon $f(x)$ hvis én av følgende gjelder:

- f er ikke deriverbar i c
- $f'(c) = 0$

Regel 7.6 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$ og $c \in [a, b]$.

(i) Hvis c er et lokalt ekstremalpunkt for f, er $f'(c) = 0$

(ii) Hvis $f' > 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' < 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt maksimumspunkt for f

(iii) Hvis $f' < 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' > 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt minimumspunkt for f

Eksempel 1

Finn det lokale bunnpunktet og toppunktet til

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x$$

Svar

Vi starter med å finne f':

$$\begin{aligned} f' &= 6x^2 + 18x - 60 \\ &= 6(x^2 + 3x - 10) \end{aligned}$$

Siden $5(-2) = 10$ og $5 - 2 = 3$, har vi av *regel 2.2* at

$$f' = 6(x - 2)(x + 5)$$

$f' = 0$ for $x = 2$ og $x = -5$. Vi har at

$$f(-5) = 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 = -68$$

$$f(2) = 5^3 + 9 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 = 275$$

Altså er $(-5, 275)$ toppunktet til f og $(2, -68)$ er bunnpunktet til f.

Språkboksen

Det som blir beskrevet i punkt ii) og iii) omtales ofte som at $\boldsymbol{f}$ **skifter fortegn i** $\boldsymbol{c}$

7.6 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt (forklaring)

Punkt (i)

La c være et lokalt maksimumspunkt for f. For et tall h må vi da ha at $c \geq x$ for $x \in (c - |h|, c + |h|)$. Da er

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

Dette betyr at

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

og at

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Følgelig er

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Altså er $f'(c) = 0$, og f' skifter fortegn fra positiv til negativ i c. Med samme framgangsmåte kan det vises at dette også gjelder dersom c er et minimumspunkt, bare at da skifter f' fra negativ til positiv.

Punkt (ii)

Hvis $f' > 0$ på intervallet (a, c), har vi av *regel 7.2* at f er sterkt voksende der. Hvis $f' < 0$ på (c, b), er f sterkt avtagende der. Dette må nødvendigvis bety at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in (a, b)$, og da er c et maksimumspunkt.

Punkt (iii)

Tilsvarende resonnement som for punkt (ii).

Regel 7.7 Andrederiverttesten

Gitt en deriverba funksjon $f(x)$ og et tall c.

- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, er $f(c)$ et lokalt maksimum.
- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, er $f(c)$ et lokalt minimum.
- Hvis $f'(c) = f''(c) = 0$, kan man ikke ut ifra denne informasjonen alene si om $f(c)$ er et lokalt maksimum eller minimum.

7.7 Andrederiverttesten (forklaring)

Av definisjonen for den deriverte har vi at

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

Når $f'(c) = 0$, er

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

Når $f''(c) < 0$, betyr dette at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

Altså må $f'(c+h)$ være positiv når h går mot 0 fra venstre og negativ når h går mot 0 fra høgre. Dermed skifter f' fortegn i c, som da må være et maksimalpunkt for f. Tilsvarende må c være et minimumspunkt for f hvis $f(c) = 0$ og $f''(c) < 0$.

Regel 7.8 Infleksjonspunkt og vendepunkt

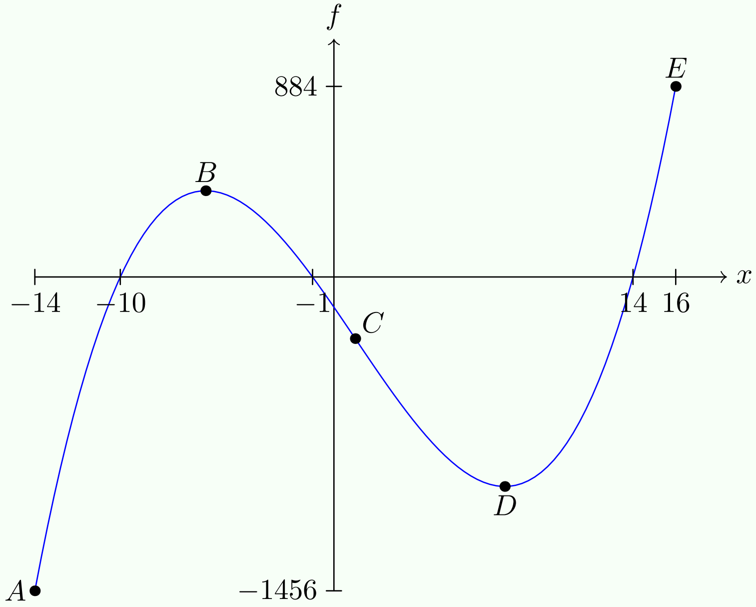
For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ har vi at

- Hvis $f''(c) = 0$ og f'' skifter fortegn i c, er c et *infleksjonspunkt* for f.
- Hvis c er et infleksjonspunkt for f, er $(c, f(c))$ et *vendepunkt*.
- Hvis f'' går fra positiv til negativ, går f fra konveks til konkav (og omvendt).

Eksempel

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140$$

punkt/verdi	**type**
$A = (-14, -1456)$	absolutt bunnpunkt
-14	ekstremalpunkt; absolutt minimum
-1456	absolutt minimum
$B = (-6, 400)$	lokalt toppunkt
-6	ekstremalpunkt; lokalt maksimalpunkt
400	lokalt maksimum
$C = (-1, -286)$	vendepunkt
-1	infleksjonspunkt
$D = (8, -972)$	lokalt bunnpunkt
8	ekstremalpunkt; lokalt minimumspunkt
-972	lokal minimum
$E = (16, 884)$	absolutt maksimum
16	ekstremalpunkt; absolutt maksimumspunkt
884	absolutt maksimum
-10, -1 og 14	nullpunkt



Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [-2, 4]$$

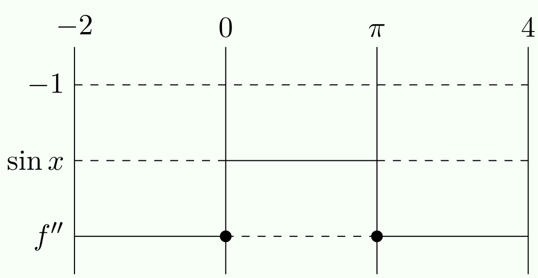
a) Finn infleksjonspunktene til f.
b) Finn vendepunktene til f.

Svar

a) Infleksjonspunktene finner vi der hvor $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (\sin x)'' &= 0 \\ -\sin x &= 0 \end{aligned}$$

Av $x \in D_f$ er det $x = 0$ og $x = \pi$ som oppfyller kravet fra ligningen over. For å finne ut om f'' skifter fortegn i disse punktene, setter vi opp et fortegnsskjema:



f'' går altså fra positiv til negativ i $x = 0$ og fra negativ til positiv i $x = \pi$. Dette betyr at f går fra konveks til konkav i $x = 0$ og fra konkav til konveks i $x = \pi$.

7.3 Asymptoter

Regel 7.9 Vertikale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$ og en konstant c.

- Hvis $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote ovenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote nedenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote** for f.

Eksempel

Finn den vertikale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{1}{x-3} + 2\right] = \pm\infty$$

Altså er $x = 3$ en vertikal asymptote for f

Regel 7.10 Horisontale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$. Da er $y = c$ en **horisontal asymptote** for f hvis

$$\lim_{x \to |\infty|} f(x) = c$$

Eksempel

Finn den horisontale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \to |\infty|} \left[\frac{1}{x-3} + 2 \right] = 2$$

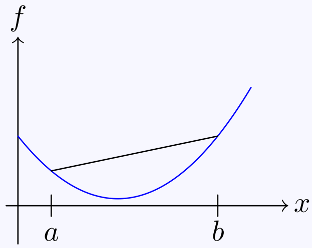
Altså er $y = 2$ en horisontal asymptote for f.

7.4 Konvekse og konkave funksjoner

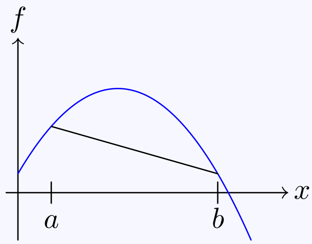
Regel 7.11 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$.

Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger over grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konveks for $x \in [a, b]$.



Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger under grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konkav for $x \in [a, b]$.



7.5 Injektive funksjoner

Regel 7.12 Injektive funksoner

Gitt en funksjon $f(x)$. Hvis alle verdier til f er unike på intervallet $x \in [a, b]$, er f *injektiv* på dette intervallet.

Språkboksen

Et annet ord for injektiv er *én-entydig*.

7.6 Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 1$, som åpenbart er injektiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette betyr at likningen $f = 2x + 1$ bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på x eller f. Løser vi med hensyn på x, får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for f til, det ”omvendte”, et uttrykk for x. Siden x og f begge er variabler, er x en funksjon av f, og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den *omvendte* til f. Setter vi uttrykket til f inn i uttrykket til $x(f)$, får vi nødvendigvis x:

$$\begin{aligned} x\left(2x + 1\right) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle x som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både f og x, slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette $y = f$ og $g = x$. Den omvendte funksjonen g til f er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

Regel 7.13 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner $f(x)$ og $g(y)$. Hvis

$$g(f) = x$$

er f og g *omvendte* funksjoner.

Eksempel 1

Gitt funksjonen $f(x) = 5x - 3$.

a) Finn den omvendte funksjonen g til f.

b) Vis at $g(f) = x$.

Svar

a) Vi setter $y = f$, og løser likningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= 5x - 3 \\ x &= \frac{y+3}{5} \end{aligned}$$

Da er $g(y) = \frac{y+3}{5}$.

b) Når $y = f$, har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x - 3) \\ &= \frac{5x - 3 + 3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

f^{-1}

Hvis f og g er omvendte funksjoner, skrives g ofte som f^{-1}. Da er det veldig viktig å merke seg at f^{-1} ikke er det samme som $(f)^{-1}$. For eksempel, gitt $f(x) = x + 1$. Da er

$$f^{-1} = x - 1 \qquad , \qquad (f)^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

I alle andre tilfeller enn ved $n = -1$, vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$

Kapittel 8

Vedlegg

8.1 Navn på funksjoner

Definisjon 8.1 Potensfunksjoner

Gitt $x, k, b \in \mathbb{R}$. En funksjon på formen

$$f(x) = kx^m \tag{8.1}$$

er da en *potensfunksjon* med *koeffisient* k og *eksponent* m.

Definisjon 8.2 Polynomfunksjoner

En polynomfunksjon er én av følgende:

- en potensfunksjon med heltalls eksponent større eller lik 0.
- summen av flere potensfunksjoner med heltalls eksponent større eller lik 0.

Polynomfunksjoner kategoriseres etter den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene a, b, c og d, og en variabel x, har vi at

funksjonsuttyrykk	**funksjonsnavn**
$ax + b$	1. grads funksjon/polynom (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. grads funksjon/polynom (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. grads funksjon/polynom (kubisk)

Eksempel 1

$4x^7 - 5x^2 + 4$ er et 7. grads polynom.

$\frac{2}{7}x^5 - 3$ er et et 5. grads polynom.

Definisjon 8.3 Eksponentialfunksjoner

Gitt $x, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, hvor $b > 0$. En funksjon f gitt som

$$f(x) = a \cdot b^{cx+d}$$

er da en **eksponentialfunksjon**.

8.2 Å løse likninger ved bytte av variabel

La oss løse likningen

$$x - 11\sqrt{x} + 28 = 0 \tag{8.2}$$

Hvis vi ser nøye etter, innser vi at dette er en andregradslikning for $\sqrt{x}$. Enda tydeligere blir dette hvis vi definerer variabelen $u = \sqrt{x}$, da kan vi skrive (8.2) som

$$u^2 - 11u + 28 = 0$$

Siden $(-7) \cdot (-4) = 28$ og $-7 - 4 = -11$, har vi av (2.1) at

$$(u - 4)(u - 7) = 0$$

Altså er

$$u = 4 \qquad \vee \qquad u = 7$$

Dette betyr at

$$\sqrt{x} = 4 \qquad \vee \qquad \sqrt{x} = 7$$

Dermed er

$$x = 16 \qquad \vee \qquad x = 49$$

8.3 Eulers tall

Den deriverte som motivajon

Gitt funksjonen $f(x) = a^x$. Da har vi at

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}
\end{aligned}
$$

Da x er uavhengig av h, får vi at

$$(a^x)' = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Likningen over peker mot noe fantastisk; hvis det finnes et tall a som er slik at $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$, så vil funksjonen a^x være sin egen deriverte funksjon! Altså er da $(a^x)' = a^x$. Vi legger nå merke til at hvis

$$a = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

så er

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^h - 1}{h} \\
&= \frac{1+h-1}{h} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Hvis vi kan vise at grenseverdien $\lim\limits_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ eksisterer, har vi altså funnet akkurat det uttrykket for a som vi ønsket oss.

Undersøking av grenseverdien

Vi innfører de to funksjonene

$$f(h) = 1 + h \qquad , \qquad g(h) = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$$

Videre ønsker vi å undersøke for hvilke verdier f er mindre enn g. Når $f = g$, har vi at

$$1 + h = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h \tag{8.3}$$

Vi gjør nå følgende observasjon: Gitt to tall c og k, og funksjonen $p(h) = a^h$, hvor $k > 0$ og $0 < a < 1$. Da har vi at

$$p(c+k) - p(c) = a^{c+k} - a^c = a^c\left(a^k - 1\right)$$

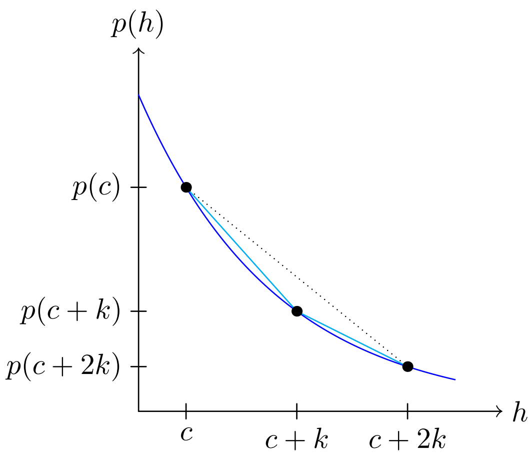
Tilsvarende er

$$p(c+2k) - p(c+k) = a^{c+k}\left(a^k - 1\right)$$

Videre er $a^{c+k} < a^c$ og $a^k - 1 < 1$, som betyr at

$$\frac{p(c+k) - p(c)}{h} < \frac{p(c+2k) - p(c)}{h}$$

Dermed må linja mellom $(c, p(c))$ og $(c+k, p(c+k))$ være brattere enn linja mellom $(c+k, p(c+k))$ og $(c+2k, p(c+2k))$, og da må $(c+k, p(c+k))$ ligge under linja mellom $(c, p(c))$ og $(c+2k, p(c+2k))$.



Det er åpenbart at $p(h)$ ikke er en lineær funksjon, og da må én av disse tre påstandene være gyldig:

(a) p er konveks for alle h

(b) p er konkav for alle h

(c) p er skiftvis konkav/konveks

Men hvis p er konkav, må det finnes et intervall hvor $(c+k, p(c+k))$ ligger over linja mellom $(c, p(c))$ og $(c+2k, p(c+2k))$, og dette er selvmotsigende. Altså må p nødvendigvis være konveks for alle h.

Av det vi akkurat har funnet, kan vi konkludere med at funksjonen $2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$ er konkav for alle h, og da $1 + h$ er et lineært uttrykk, har (8.3) maksimalt to løsninger.

Vi setter $z = \frac{1}{h}$ for $h \neq 0$. Da er

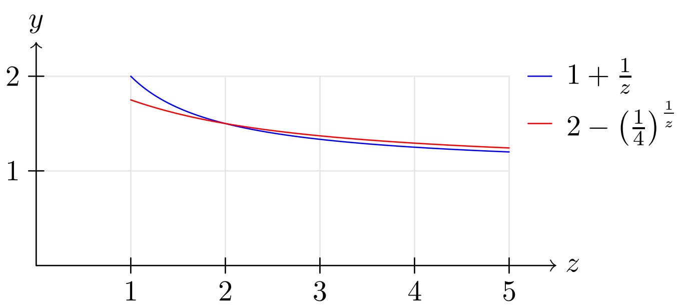
$$\lim_{h \to 0} (1+h)^h = \lim_{z \to \infty} = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z}}$$

Videre kan (8.3) omskrives til

$$1 + \frac{1}{z} = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} \tag{8.4}$$

Det er enkelt å vise at $h = 0$ og $h = \frac{1}{2}$ er løsningene til (8.3). Dette må bety at $z = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ er den eneste løsningen til (8.4). Det er også enkelt å bekrefte at venstresiden i (8.4) er større enn høgresiden for $z = 1$, og dette innebærer at

$$1 + \frac{1}{z} < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}$$



For $z \to \infty$ kan vi derfor være sikre på at

$$1 + \frac{1}{z} < 1 + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} + \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^3 + \ldots$$

Høgresiden i ulikheten over kjenner vi igjen (se ?? i TM2) som en uendelig geometrisk rekke hvor summen er gitt som

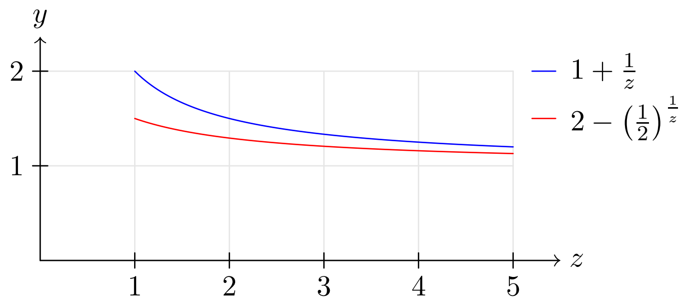
$$\frac{1}{1 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}} = 4^{\frac{1}{z}}$$

Altså er

$$\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \leq \lim_{z \to \infty} \left(4^{\frac{1}{z}}\right)^z = 4 \tag{8.5}$$

Ved å bytte ut $\frac{1}{4}$ med $\frac{1}{2}$ i (8.3), får likningen i stedet løsningene $h = -1$ og $h = 1$. Med dette som utgangspunkt kan vi på samme måte som vi kom fram til (8.5) vise at

$$2 \leq \lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$



Nå vet vi altså at $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$ ligger et sted mellom 2 og 4. Da uttrykket inneholder utelukkende positive ledd for $z \to \infty$, kan vi også være sikre på at grenseverdien er endelig[1]. Da gir derfor mening å behandle grenseverdien som et tall, som vi kaller for e:

$$e = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$$

Et tilbakeblikk på den deriverte

Derivasjon av potensfunksjoner var det som motiverte oss til å undersøke tallet e. Av det vi har drøftet i de foregående avsnittene, følger det at

$$(e^x)' = e^x$$

Likningen over er rett og slett én av de viktigste likningene i matematikk.

[1] I motsetning til å være ubestemt. For eksempel vil $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ være ubestemt, fordi $\cos x$ svinger mellom -1 og 1.

8.4 Tangeringslinja til en graf

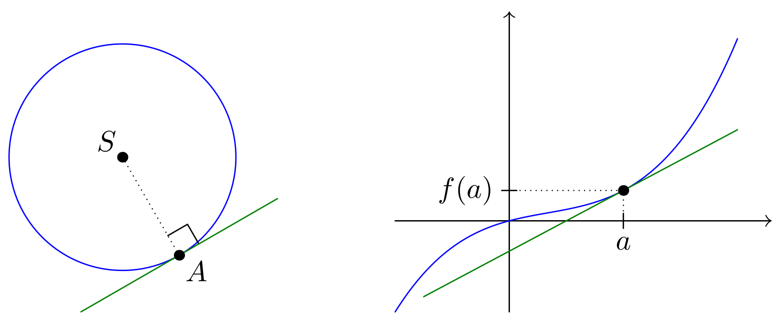
Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se *figur 8.1a*.)

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$. Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til f i punktet* $(a, f(a))$ som linja som går gjennom $(a, f(a))$ og har stigningstall $f'(a)$ (Spivak, 1994). (Se *Figur 8.1b*.)



Figur 8.1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

Senteret til krumningen

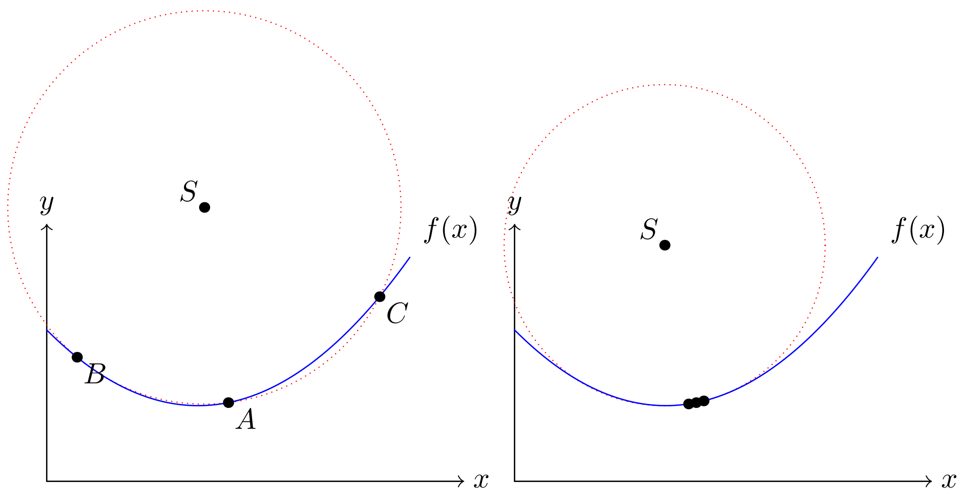
Gitt en funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig og to ganger deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, og hvor $f''(x) \neq 0$. For en gitt a lar vi $f_a = f(a)$, og definerer funksjonene

$$f_b(h) = f(a-h) \quad , \quad f_c(h) = f(a+h)$$

Vi innfører også punktene

$$A = (a, f_a) \quad , \quad B = (a - h, f_b) \quad , \quad C = (a + h, f_c)$$

Videre lar vi $S = (S_x, S_y)$ være sentrum i den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne *krumningen* i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ når h går mot 0.



(a) (b)

Figur 8.2

Et likningssett for S

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [h, f_a - f_b] \quad , \quad \overrightarrow{AC} = [h, f_c - f_a]$$

La B_m og C_m være midptunktene til henholdsvis (sekantene) AB og AC. Da er

$$B_m = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad , \qquad C_m = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$[f_a - f_b, -h]$ er en normalvektor for $\overrightarrow{BA}$, dette betyr at midtnormalen $\boldsymbol{l}_1$ til sekanten AB kan parameterisere som

$$\boldsymbol{l}_1(t) = B_m + [f_a - f_b, -h]t$$

Tilsvarende er midtnormalen $\boldsymbol{l}_2$ til sekanten AC parameterisert ved

$$\boldsymbol{l}_2(q) = C_m + [f_c - f_a, -h]q$$

S sammenfaller med skjæringspunktet til $\boldsymbol{l}_1$ og $\boldsymbol{l}_2$. Ved å kreve at $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2$, får vi et lineært likningssett med to ukjente som gir

$$t = \frac{(f_a - f_c)(f_b - f_c) + 2h^2}{2h(f_b + f_c - 2f_a)}$$

S når h går mot 0

Vi definerer funkjonene $\dot{f}_b$, $\dot{f}_c$, $\ddot{f}_b$ og $\ddot{f}_c$ ut ifra de (respektive) deriverte og andrederiverte av f_b og f_c med hensyn på h:

$$-\dot{f}_b = (f_b)' = -f'(a - h)$$

$$\dot{f}_c = (f_c)' = f'(a + h)$$

$$\ddot{f}_b = (f_b)'' = f''(a - h)$$

$$\ddot{f}_c = (f_c)'' = f''(a + h)$$

Vi skal nå bruke dise funsjonene til å studere koordinatene til S når h går mot 0. Vi tar da med oss at

$$\lim_{h\to 0} \left\{h^2, h\right\} = 0 \qquad \lim_{h\to 0} \{f_b, f_c\} = f_a$$

$$\lim_{h\to 0} \left\{\dot{f}_c, \dot{f}_b\right\} = f'_a \qquad \lim_{h\to 0} \left\{\ddot{f}_b, \ddot{f}_c\right\} = f''_a$$

hvor[1] $f'_a = f'(a)$ og $f''_a = f''(a)$.

For t uttrykt ved (8.4) er (se (8.4))

$$S_y = \frac{f_a + f_b + 2ht}{2} = \frac{f_a + f_b}{2} + ht$$

Vi har at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_a + f_b}{2} = f_a$$

Videre er

$$\begin{aligned} ht &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c) + 2h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} \\ &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{2(f_b + f_c - 2f_a)} + \frac{h^2}{f_b + f_c - 2f_a} \end{aligned}$$

[1] Legg merke til at det her er snakk om f derivert med hensyn på x, og evaluert i a.

Når h går mot 0, er begge leddene i (8.6) «0 over 0» uttrykk. Vi bruker L'Hopitals regel på det siste leddet:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{2(f_b+f_c-2f_a)} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2)'}{(f_b+f_c-2f_a)'} \tag{8.6}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} \qquad \text{«0 over 0»} \tag{8.7}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c} \tag{8.8}$$

$$= \frac{1}{f''_a} \tag{8.9}$$

Ved å bruke L'Hopitals regel på det første leddet i (8.6) har vi at

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f_c-f_a)(f_b-f_c)}{f_b+f_c-2f_a} = \lim_{h\to 0} \frac{((f_c-f_a)(f_b-f_c))'}{(f_b+f_c-2f_a)'}$$

Av produktregelen ved derivasjon er

$$\lim_{h\to 0} \frac{((f_a-f_c)(f_b-f_c))'}{(f_b+f_c-2f_a)'} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\dot{f}_c(f_b-f_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} + \frac{(f_c-f_a)(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c}\right]$$

Begge leddene over er «0 over 0» uttrykk. Vi undersøker dem hver for seg ved å anvende L'Hopitals regel:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dot{f}_c(f_b-f_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\ddot{f}_c(f_b-f_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c} + \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}\right]$$

$$= 0 + \frac{(f'_a)^2}{2f''_a}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f_c-f_a)(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{-\dot{f}_b+\dot{f}_c} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c} + \frac{(f_c-f_a)(-\dot{f}_b+\dot{f}_c)}{\ddot{f}_b+\ddot{f}_c}\right] \tag{8.10}$$

$$= \frac{(f'_a)^2}{2f''_a} + 0 \tag{8.11}$$

Av (8.6), (8.9), (8.10) og (8.11) har vi at

$$\lim_{h\to 0} ht = \frac{1+(f'_a)^2}{f''_a}$$

Dermed er

$$S_y = f_a + \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

Videre er (med t gitt av (8.4))

$$S_x = (f_b - f_a)t + a - \frac{1}{2}h$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}(f_b - f_a)t &= \lim_{h\to 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot ht \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot \lim_{h\to 0} ht \\ &= -f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a} \end{aligned}$$

Altså er

$$S_x = a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

Avslutning

Linja som har stigningstall $f'(a)$, og som går gjennom $(a, f(a))$, er gitt ved funksjonen

$$g(x) = f'_a(x - a) + f_a$$

$\vec{r} = [1, f_a]$ er en retningsvektoren til denne linja. Av uttrykkene vi har funnet for S_x og S_y har vi at

$$S = \left(a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}, f_a + \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a} \right)$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''_a} \left[-f_a(1 + (f'_a)^2), 1 + (f'_a)^2 \right]$$

Siden $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$ og $g(a) = f(a)$, er grafen til g tangeringslinja til sirkelen med sentrum S når h går mot 0. Altså er g tangeringslinja til sirkelen som beskriver krumningen til f når $x = a$.

Litteratur

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint.* Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press