## Matematikken sine byggesteinar



"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt"

"Det er ikkje å vite, men å lære, ikkje å eige, men å eigne til seg, ikkje å vere til stades, men å komme dit, som gjev den største gleda."

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laga av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skriven i LATEX og figurane er lagd vha. Asymptote.

Matematikken sine byggesteinar by Sindre Sogge Heggen is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

#### Forord

Matematikk har eit enormt omfang av forgreiningar og anvendingar, men det aller meste bygger på ei overkommeleg mengde med grunnprinsipp, og det er desse eg ønsker å presentere i denne boka. Eit prinsipp i oppsummert form har eg valgt å kalle ein regel. Reglar finn du i blå tekstboksar, som oftast etterfulgt av eit eksempel på bruk av regelen. Eitt av hovudmåla til denne boka er å gi lesaren ei forståing av kvifor reglane er som dei er. I kapittel 1-5 vil du finne forklaringar i forkant av kvar regel, mens i kapittel 6 finn du forklaringar enten i forkant av eller direkte etter ein regel (og eventuelle eksempel). Fra og med kapittel 7 er nokre forklaringar lagt til den avsluttande seksjonen Forklaringar, dette indikerer at dei kan vere noko krevande å forstå og/eller at regelen er så intuitiv at mange vil oppleve det som overflødig å få den forklart.

#### Boka si oppbygging

Boka er delt inn i ein *Del I* og ein *Del II*. *Del I* handlar i stor grad om å bygge ei grunnleggande forståing av tala våre, og korleis vi rekner med dei. *Del II* introduserer konseptet algebra og dei nært slekta temaa potensar, likningar og funskjonar. I tillegg har både *Del I* og *Del II* avsluttande kapittel som handlar om geometri.

Obs! Denne boka er fri for både oppgåver og eksempler på praktiske anvendingar av matematikk. Dette er to viktige element som med tida vil komme, enten integrert i denne boka eller som ei frittståande bok.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Å forklare reglane i staden for å bevise dei er eit bevisst valg. Eit bevis stiller sterke matematiske krav som ofte må definerast både på førehand og undervegs i ei utleiing av ein regel, noko som kan føre til at forståinga av hovudpoenget drukner i smådetaljar. Nokon av forklaringene vil likevel vere gyldige som bevis.

#### Kjære lesar.

Denne boka er i utgangspunktet gratis å bruke, men eg håper du forstår kor mykje tid og ressursar eg har brukt på å lage ho. Viss du ender opp med å like boka, håper eg derfor du kan donere 50 kr via Vipps til 90559730 eller via PayPal. Ver venleg å markere donasjonen med "Mattebok" ved bruk av Vipps. Pengane vil bli brukt til å fortsette arbeidet med å lage lærebøker som er med på å gjere matematikk lett tilgjengeleg for alle. På førehand takk!

Boka blir oppdatert så snart som råd når skrivefeil og liknande blir oppdaga, eg vil derfor råde alle til å laste ned ein ny versjon i ny og ne ved å følge denne lenka.

Bokmålsversjonen av boka finn du her.

For spørsmål, ta kontakt på mail: sindre.heggen@gmail.com

#### Takk til

Anne Jordal Myrset Charlotte Merete Dahl

For mange gode innspel og kommentarar.

### Symbol

=	"er lik"
<	"er mindre enn"
>	"er større enn"
≤ ≥	"er mindre enn eller lik"
$\geq$	"er større enn eller lik"
$\in$	"er inneheld i"
$\vee$	"eller"
$\wedge$	"og"
[a,b]	lukka intervall fra og med $a$ til og med $b$
a	lengda/talverdien til $a$
$\perp$	"vinkelrett på"
	"parallell med"
$\triangle$	"trekant"
	"firkant"

#### Contents

I 	Tal	l, rekning og geometri 6												
1	Tala	våre 7												
	1.1	Likskapsteiknet, mengder og tallinjer												
	1.2	Tal, siffer og verdi												
	1.3	Koordinatsystem												
2	Dei	fire rekneartane 15												
	2.1	Addisjon												
	2.2	Subtraksjon												
	2.3	Multiplikasjon (Gonging)												
	2.4	Divisjon (deling)												
	Opp	gaver												
3	Fakt	corisering og reknerekkefølge 29												
	3.1	Faktorisering												
	3.2	Reknerekkefølge												
4	Brø	k 37												
	4.1	Introduksjon												
	4.2	Verdi, utviding og forkorting av brøk 41												
	4.3	Addisjon og subtraksjon												
	4.4	Brøk gonga med heiltal												
	4.5	Brøk delt med heiltal												
	4.6	Brøk gonga med brøk												
	4.7	Kansellering av faktorar												
	4.8	Deling med brøk												
	4.9	Rasjonale og blanda tal												
	Opp	gaver												
5	$\mathbf{Neg}$	ative tal 70												
	5.1	Introduksjon												
	5.2	Dei fire rekneartane med negative tal												
	5.3	Negative tal som mengde												
6	Utrekningsmetodar 80													
	6.1	Addisjon												
	6.2	Subtraksjon												
	6.3	Ganging												
	6.4	Divisjon												
		6.4.1 Divisjon med desimaltal som svar 100												
	6.5	Primtalsfaktorisering												
	Opp	gaver												
7	Geo	metri 106												
	7.1	Omgrep												
	7.2	Eigenskapar for trekantar og firkantar												

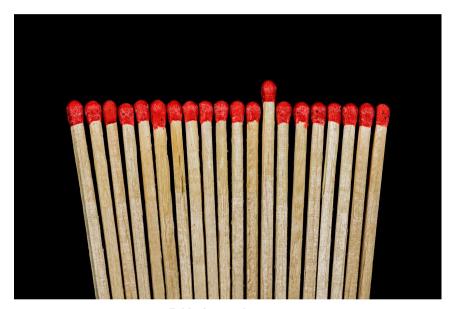
7.3	Omkrins												120
7.4	Areal												121
7.5	Tredimensjonal geometri .												128
7.6	Volum												131

II	Al	gebra og geometri	133											
8	Alge	ora	134											
	8.1	Introduksjon	135											
	8.2	Potensar	140											
	8.3	Irrasjonale tal	148											
9	Likn	ngar	151											
	9.1	Introduksjon	152											
	9.2	Løysing ved dei fire rekneartane	153											
	9.3	Løysingsmetodane oppsummert	160											
	9.4	Potenslikningar	163											
	9.5	Ulikskapar	165											
		9.5.1 Introduksjon	165											
		9.5.2 Løysing av ulikskapar	167											
	Oppg	wer	168											
10	Funksjonar													
	10.1	Introduksjon	172											
	10.2	Lineære funksjonar og grafar	175											
	Oppg	wer	184											
11	Geometri													
	11.1	Formlar for areal og omkrins	191											
	11.2	Kongruente og formlike trekantar	205											
	11.3	Forklaringar	210											
Fas	$_{ m sit}$		230											
Inc	leks		234											

# Del I Tal, rekning og geometri

## Kapittel 1

## Tala våre



Bilde fra pixabay.com

#### 1.1 Likskapsteiknet, mengder og tallinjer

#### Likskapsteiknet

Som namnet tilseier, viser *likskapsteiknet* = til at noko er likt. I kva grad og når ein kan seie at noko er likt er ein filosofisk diskusjon, og innleiingsvis er vi berre prisgitt dette: Kva likskap = sikter til må bli forstått ut ifrå konteksten teiknet blir brukt i. Med denne forståinga av = kan vi studere nokre grunnleggande eigenskaper for tala våre, og så komme tilbake til meir presise tydingar av teiknet.

#### Språkboksen

Vanlege måtar å seie = på er

- "er lik"
- "er det same som"

#### Mengder og tallinjer

Tal kan representere så mangt. I denne boka skal vi halde oss til to måtar å tolke tala på; tal som ei mengde og tal som ei plassering på ei linje. Alle representasjonar av tal tek eigentleg utganspunkt i kva forståinga er av tala 0 og 1.

#### Tal som mengde

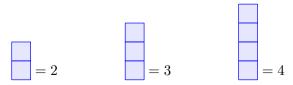
Når vi snakkar om ei mengde, vil talet 0 vere<sup>1</sup> knytt til "ingenting". Ein figur der det ikkje er noko til stades vil slik vere det same som 0:

$$= 0$$

1 vil vi teikne som ei rute:

$$=1$$

Andre tal vil da vere definert ut ifrå kor mange einarruter (einarar) ein har:



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>I kapittel 2 skal vi sjå at det også er andre tolkingar av 0.

#### Tal som plassering på ei linje

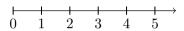
Når vi plasserer tal på ei linje, vil 0 vere utgangspunket vårt:



Så plasserer vi 1 ei viss lengde til høgre for 0:



Andre tal vil da vere definert ut ifrå kor mange einarlengder (einarar) vi er unna 0:



#### Positive heiltal

Vi skal straks sjå at tal ikkje naudsynleg treng å vere *heile* antal einarar, men tala som *er* det har eit eige namn:

#### 1.1 Positive heiltal

Tal som er eit heilt antal einarar kallast  $positive^1heiltal$ . Dei positive heiltala er

$$1,2,3,4,5$$
 og så vidare.

Positive heiltal blir også kalla  $naturlege\ tal.$ 

#### Kva med 0?

Nokre forfattarar inkluderer også 0 i omgrepet naturlege tal. I nokre samanhengar vil dette lønne seg, i andre ikkje.

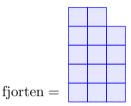
 $<sup>^1\</sup>mathrm{Kva}$ ordet positiv inneber skal vi gjere greie for i kapittel 5.

#### 1.2 Tal, siffer og verdi

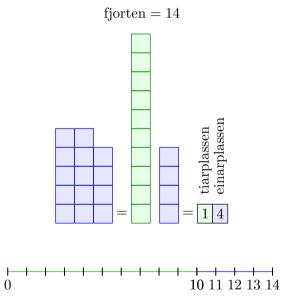
Tala våre er bygd opp av siffera~0,1,2,3,4,5,6,7,8 og 9, og plasseringa av dei. Siffera og deira plassering definerer  $^1$  verdien til talet.

#### Heiltal større enn 10

La oss som eit eksempel skrive talet fjorten ved hjelp av sifra våre.



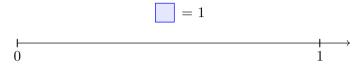
Vi kan no lage ei gruppe med 10 einarar, i tillegg har vi da 4 einarar. Da skriv vi fjorten slik:



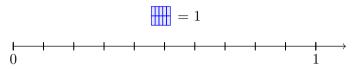
<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Etterkvart skal vi også sjå at *forteikn* er med på å definere verdien til talet (sjå kapittel 5).

#### Desimaltal

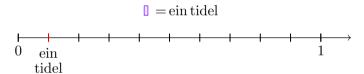
I mange tilfelle har vi ikkje eit heilt antal einarar, og da vil det vere behov for å dele 1 inn i mindre bitar. La oss starte med å teikne ein einar:



Så deler vi einaren vår inn i 10 mindre bitar:



Sidan vi har delt 1 inn i 10 bitar, kallar vi ein slik bit for ein tidel:



Tidelar skriv vi ved hjelp av desimalteiknet , :





#### Språkboksen

På engelsk bruker ein punktum . som desimalte<br/>ikn i staden for komma  $\fine{\fine}$  :

$$3,5 \pmod{norsk}$$

$$3.5 \quad (english)$$

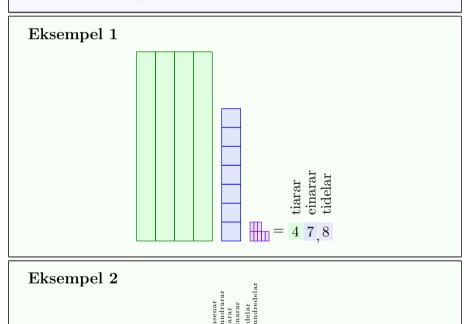
#### Titalssystemet

Vi har no sett korleis vi kan uttrykke verdien til tal ved å plassere siffer etter antal tiarar, einarar og tidelar, og det stoppar sjølvsagt ikkje der:

#### 1.2 Titalssystemet

Verdien til eit tal er gitt av siffera 0,1,2,3,4,5,6,7,8 og 9, og plasseringa av dei. Med sifferet som angir einarar som utgangspunkt vil

- siffer til venstre (i rekkefølge) indikere antal tiarar, hundrarar, tusenar osv.
- siffer til høgre (i rekkefølge) indikere antal tidelar, hundredelar, tusendelar osv.



#### 1.3 Partal og oddetal

Heiltal som har 0, 2, 6 eller 8 på einarplassen kallast partal.

Heiltall som har 1, 3, 5, 7 eller 9 på einarplassen kallast  $\mathit{oddetal}$  .

#### Eksempel

Dei ti første (positive) partala er

De ti første (positive) oddetala er

#### 1.3 Koordinatsystem

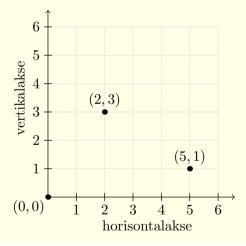
I mange tilfelle er det nyttig å bruke to tallinjer samtidig. Dette kallar vi eit koordinatsystem. Vi plasserer da éi tallinje som går horisontalt og éi som går vertikalt. Ei plassering i eit koordinatsystem kallar vi eit punkt.

Strengt tatt fins det mange typar koordinatsystem, men i denne boka bruker vi ordet om berre éin sort, nemleg det *kartesiske koordinatsystem*. Det er oppkalt etter den franske filosofen og matematikaren René Descartes.

Eit punkt skriv vi som to tal inni ein parentes. Dei to tala blir kalla førstekoordinaten og andrekoordinaten.

- Førstekoordinaten fortel oss kor langt vi skal gå langs horisontalaksen.
- Andrekoordinaten fortel oss kor langt vi skal gå langs vertikalaksen.

I figuren ser vi punkta (2,3), (5,1) og (0,0). Punktet der aksane møtast, altså (0,0), kallast origo.



## Kapittel 2

## Dei fire rekneartane



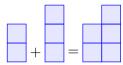
Bilde fra pxhere.com

#### 2.1 Addisjon

#### Addisjon med mengder: Å legge til

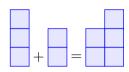
Når vi har ei mengde og skal legge til meir, bruker vi symbolet + . Har vi 2 og skal legge til 3, skriv vi

$$2 + 3 = 5$$



Rekkefølga vi legg saman tala på har ikkje noko å seie; å starte med 2 og så legge til 3 er det same som å starte med 3 og så legge til 2:

$$3 + 2 = 5$$



#### Språkboksen

Eit addisjonsstykke består av to eller fleire leddog éin sum.I reknestykket

$$2 + 3 = 5$$

er både 2 og 3 ledd, mens 5 er summen.

Vanlege måtar å sei<br/>e2+3 på er

- "2 pluss 3"
- "2 addert med 3"
- "2 og 3 lagt saman"

Det å legge saman tal kallast også å summere.

#### 2.1 Addisjon er kommutativ

Summen er den same uansett rekkefølge på ledda.

#### Eksempel

$$2+5=7=5+2$$

$$6+3=9=3+6$$

#### Addisjon på tallinja: Vandring mot høgre

På ei tallinje vil addisjon med positive tal innebere vandring  $mot\ h ggre$ :

#### Eksempel 1



#### Eksempel 2



#### Tydinga av =

+ gir oss moglegheiten til å uttrykke tal på mange forskjellige måtar, for eksempel er 5=2+3 og 5=1+4. I denne samanhengen vil = bety "har same verdi som". Dette gjeld også ved subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, som vi skal sjå på i dei neste tre seksjonane.

#### 2.2 Subtraksjon

#### Subtraksjon med mengder: Å trekke ifrå

Når vi har ei mengde og tar bort ein del av den, bruker vi symbolet —:

#### Språkboksen

Eit subtraksjonsstykke består av to eller fleire ledd og éin differanse. I subtraksjonsstykket

$$5 - 3 = 2$$

er både 5 og 3 ledd og 2 er differansen.

Vanlege måtar å sei<br/>e5-3 på er

- "5 minus 3"
- "5 fratrekt 3"
- "3 subtrahert fra 5"

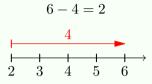
#### Ei ny tolking av 0

Innlei<br/>ingsvis i denne boka nemnde vi at 0 kan tolkast som "ingenting". Subtraksjon gir oss moglegheiten til å uttrykke 0 via andre tal. For eksempel er<br/> 7-7=0 og 19-19=0. I praktiske samanhengar vil 0 ofte innebere ei form for likevekt, for eksempel som at ei kraft og ei motkraft er like store.

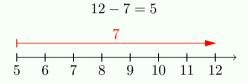
#### Subtraksjon på tallinja: Vandring mot venstre

I seksjon 2.1 har vi sett at + (med positive tal) inneber at vi skal gå mot høgre langs tallinja. Med - gjer vi omvend, vi går mot venstre<sup>1</sup>:





#### Eksempel 2



#### Merk

Med det første kan det kanskje verke litt rart at ein i *Eksempel* 1 og 2 over skal gå i motsatt veg av retninga pila peiker i, men spesielt i Kapittel 5 vil det lønne seg å tenke slik.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>I figurar med tallinjer vil raudfarga piler indikere at ein startar ved pilspissen og vandrar til andre enden.

#### 2.3 Multiplikasjon (Gonging)

#### Gonging med heiltal: Innleiiande definisjon

Når vi legg saman like tall, kan vi bruke gonge-symbolet  $\cdot$  for å skrive reknestykka våre kortare:

#### Eksempel

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$$

$$8 + 8 = 8 \cdot 2$$

$$1+1+1+1+1=1\cdot 5$$

#### Språkboksen

Eit gongestykke består av to eller fleire faktorar og eitt produkt. I gongestykket

$$4 \cdot 3 = 12$$

er 4 og 3 faktorar, mens 12 er produktet.

Vanlege måtar å seie  $4 \cdot 3$  på er

- "4 gonger 3"
- $\bullet\,$  "4 gonga med 3"
- "4 multiplisert med 3"

Mange nettstader og bøker på engelsk brukar symbolet × i staden for ·. I dei fleste programmeringsspråk er \* symbolet for multiplikasjon.

#### Gonging av mengder

La oss no bruke ein figur for å sjå for oss gongestykket  $2\cdot 3$ :

$$2 \cdot 3 = \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} = \boxed{\phantom{0}}$$

Og så kan vi legge merke til produktet til  $3 \cdot 2$ :

#### 2.2 Multiplikasjon er kommutativ

Produktet er det same uansett rekkefølge på faktorane.

#### Eksempel

$$3 \cdot 4 = 12 = 4 \cdot 3$$

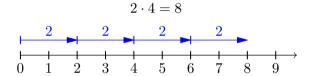
$$6 \cdot 7 = 42 = 7 \cdot 6$$

$$8 \cdot 9 = 72 = 9 \cdot 8$$

#### Gonging på tallinja

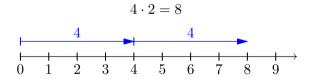
Vi kan også bruke tallinja for å rekne ut gongestykker. For eksempel kan vi finne kva  $2 \cdot 4$  er ved å tenke slik:

"2 · 4 betyr å vandre 2 plassar mot høgre, 4 gonger."



Også tallinja kan vi bruke for å overbevise oss om at rekkefølga i eit gongestykke ikkje har noko å seie:

" $4 \cdot 2$  betyr å vandre 4 plassar mot høgre, 2 gonger."



#### Endeleg definisjon av gonging med positive heiltal

Det ligg kanskje nærast å tolke "2 gonger 3" som "3, 2 gonger". Da er

"2 gonger 
$$3$$
" =  $3 + 3$ 

Innleiingsvis presenterete vi  $2 \cdot 3$ , altså "2 gonger 3", som 2+2+2. Med denne tolkinga vil 3+3 svare til  $3 \cdot 2$ , men nettopp det at multiplikasjon er ein kommutativ operasjon (regel 2.2) gjer at den eine tolkinga ikkje utelukkar den andre;  $2 \cdot 3 = 2+2+2$  og  $2 \cdot 3 = 3+3$  er to uttrykk med same verdi.

#### 2.3 Gonging som gjentatt addisjon

Gonging med eit positivt heiltal kan uttrykkast som gjentatt addisjon.

#### Eksempel 1

$$4+4+4=4\cdot 3=3+3+3+3$$
 
$$8+8=8\cdot 2=2+2+2+2+2+2+2$$
 
$$1+1+1+1+1=1\cdot 5=5$$

#### Merk

At gonging med positive heiltal kan uttrykkast som gjentatt addisjon, utelukkar ikkje andre uttrykk. Det er ikkje feil å skrive at  $2 \cdot 3 = 1 + 5$ .

#### 2.4 Divisjon (deling)

: er teiknet for divisjon. I praksis har divisjon tre forskjellige tydingar, her eksemplifisert ved reknestykket 12:3:

#### 2.4 Divisjon sine tre tydingar

• Inndeling av mengder

12 : 3 = "Antalet i kvar gruppe når 12 delast inn i 3 like store grupper"

• Antal gonger

12:3= "Antal gonger 3 går på 12"

• Omvend operasjon av multiplikasjon

12:3= "Talet ein må gonge 3 med for å få 12"

#### Språkboksen

Eit divisjonsstykke består av ein dividend, ein divisor og ein kvotient. I divisjonstykket

$$12:3=4$$

er 12 dividenden, 3 er divisoren og 4 er kvotienten.

Vanlege måtar å seie 12 : 3 på er

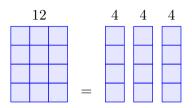
- "12 delt med 3"
- "12 dividert med 3"
- "12 på 3"

I nokre samanhengar blir 12 : 3 kalla "forholdet mellom 12 og 3". Da er 4 forholdstalet.

Ofte brukast / i staden for :, spesielt i programmeringsspråk.

#### Divisjon av mengder

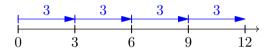
Reknestykket 12 : 3 fortel oss at vi skal dele 12 inn i 3 like store grupper:



Vi ser at kvar gruppe inneheld 4 ruter, dette betyr at

$$12:3=4$$

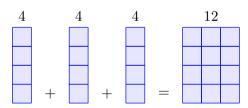
#### Antal gonger



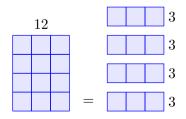
3 går 4 gonger på 12, altså er 12:3=4.

#### Omvend operasjon av multiplikasjon

Vi har nyleg sett at viss vi deler 12 inn i 3 like grupper, får vi 4 i kvar gruppe. Altså er 12:3=4. Og om vi legg saman igjen desse gruppene, får vi 12:



Men dette er det same som å gonge 4 med 3, med andre ord: Om vi veit at  $4 \cdot 3 = 12$ , så veit vi at 12 : 3 = 4. I tillegg veit vi da at 12 : 4 = 3.



#### Eksempel 1

Sidan 
$$6 \cdot 3 = 18$$
, er

$$18:6=3$$

$$18:3=6$$

#### Eksempel 2

Sidan 
$$5 \cdot 7 = 35$$
, er

$$35:5=7$$

$$35:7=5$$

#### Oppgaver for kapittel 2

#### 2.1.1

Skriv tallene som summen av to tall.

Eksempel

3 kan skrives som 1+2

- a) 4
- b) 5 c) 6
- d) 7
- e) 8
- f) 9

#### 2.1.2

Skriv tallene som summen av tre tall.

Eksempel

4 kan skrives som 1+2+1

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8
- e) 9
- f) 10

#### 2.1.3

To tall som til sammen utgjør 10 kalles tiervenner. For eksempel er 1 og 9 tiervenner fordi 1 + 9 = 10.

- 1) Finn tiervennen til
  - a) 2
- b) 3
- c) 4 d) 5
- 2) Når man har gjort oppgave 1), hvorfor er det ikke "nødvendig" å finne tiervennene til 6, 7 og 8?

#### 2.1.4

(I denne oppgaven kan du tillate deg å svare på spørsmålene bare ved å prøve ut et par eksempler. For bevis, se oppgave ??.)

Velg rett alternativ av 1), 2) og 3).

- a) Summen av to partall er
  - 1) et partall.
  - 2) et oddetall.
  - 3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- b) Summen av to oddetall er

- 1) et partall.
- 2) et oddetall.
- 3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- c) Summen av et partall og et oddetall er
  - 1) et partall.
  - 2) et oddetall.
  - 3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

#### 2.2.1

Skriv tallene som differansen mellom to tall.

Eksempel: 1 kan skrives som 8-7.

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6
- f) 7
- g) 8

#### 2.2.2

(I denne oppgaven kan du tillate deg å svare på spørsmålene bare ved å prøve ut et par eksempler. For bevis, se oppgave ??.)

- a) Differansen mellom to partall er
  - 1) Et partall.
  - 2) Et oddetall.
  - 3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- b) Differansen mellom to oddetall er
  - 1) Et partall.
  - 2) Et oddetall.
  - 3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- c) Differansen mellom et partall og et oddetall er
  - 1) Et partall.
  - 2) Et oddetall.
  - 3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

#### 2.3.1

Skriv som gangestykker og alternativ sum.

Eksempel:  $3+3+3+3+3=3\cdot 5=5+5+5$ 

- a) 2+2+2
- b) 3+3+3+3+3+3
- c) 4+4
- d) 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5
- e) 6+6+6+6
- f) 7+7+7+7

#### 2.3.2

- a) Vil et heltall ganget med 2 alltid resultere i et partall eller et oddetall?
- b) Vil et partall ganget med 5 alltid resultere i et partall eller et oddetall? Hvilket siffer vil alltid stå på enerplassen?
- c) Vil et oddetall ganget med 5 alltid resultere i et partall eller et oddetall? Hvilket siffer vil alltid stå på enerplassen?

## Kapittel 3

## Faktorisering og reknerekkefølge



Bilde fra pcommons.wikimedia.org

#### 3.1 Faktorisering

Når ein heiltalls dividend og ein heiltals divisor resulterer i ein heiltals kvotient, seier vi at dividenden er **deleleg** med divisoren. For eksempel er 6 deleleg med 3 fordi 6:3=2, og 40 er deleleg med 10 fordi 40:10=4. Omgrepet deleleg er med på å definere primtal:

#### 3.1 Primtal

Eit naturleg tal som er større enn 1, og som berre er deleleg med seg sjølv og 1, er eit **primtal**.

#### Eksempel

Dei fem første primtala er 2, 3, 5, 7 og 11.

#### 3.2 Faktorisering

**Faktorisering** inneber å skrive eit tal som eit produkt av andre tal.

#### Eksempel

Faktoriser 24 på tre forskjellige måtar.

Svar

$$24 = 2 \cdot 12$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

#### 3.3 Primtalsfaktorisering

Faktorisering med berre primtal som faktorar kallast **primtalsfaktorisering**.

#### Eksempel

Skriv 12 på primtalsfaktorisert form.

Svar

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

#### 3.2 Reknerekkefølge

#### Prioriteringa av rekneartane

Sjå på følgande reknestykke:

$$2 + 3 \cdot 4$$

Eit slikt reknestykke kunne ein tolka på to måtar:

- 1. "2 pluss 3 er 5. 5 gonga med 4 er 20. Svaret er 20."
- 2. "3 gonga med 4 er 12. 2 pluss 12 er 14. Svaret er 14."

Men svara blir ikkje like! Det er altså behov for å ha nokre reglar om kva vi skal rekne ut først. Den eine regelen er at vi må rekne ut gonging eller deling før vi legg saman eller trekk ifrå, dette betyr at

$$2+3\cdot 4=$$
 "Rekn ut  $3\cdot 4$ , og legg saman med 2"  
=  $2+12$   
=  $14$ 

Men kva om vi ønska å legge saman 2 og 3 først, og så gonge summen med 4? Å fortelle at noko skal reknast ut først gjer vi ved hjelp av parentesar:

$$(2+3)\cdot 4=$$
 "Legg saman 2 og 3, og gong med 4 etterpå" 
$$=5\cdot 4$$
 
$$=20$$

#### 3.4 Reknerekkefølge

- 1. Uttrykk med parentes
- 2. Multiplikasjon eller divisjon
- 3. Addisjon eller subtraksjon

#### Eksempel 1

Rekn ut

$$23 - (3+9) + 4 \cdot 7$$

Svar

$$23-(3+9)+4\cdot 7=23-12+4\cdot 7 \quad \text{Parentes}$$
 
$$=23-12+28 \quad \text{Gonging}$$
 
$$=39 \quad \text{Addisjon og subtraksjon}$$

#### Eksempel 2

Rekn ut

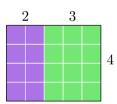
$$18:(7-5)-3$$

Svar

$$18: (7-5) - 3 = 18: 2 - 3$$
 Parentes  
=  $9-3$  Deling  
=  $6$  Addisjon og subtraksjon

#### Gonging med parentes

Kvor mange ruter ser vi i figuren under?



To måter ein kan tenke på er desse:

1. Det er  $2 \cdot 4 = 8$  lilla ruter og  $3 \cdot 4 = 12$  grøne ruter. Til saman er det 8 + 12 = 20 ruter. Dette kan vi skrive som

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$$

2. Det er 2+3=5 ruter bortover og 4 ruter oppover. Altså er det  $5\cdot 4=20$  ruter totalt. Dette kan vi skrive som

34

$$(2+3)\cdot 4 = 20$$

Av desse to utrekningane har vi at

$$(2+3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$$

#### 3.5 Gonging med parentes (distributiv lov)

Når eit parentesuttrykk er ein faktor, kan vi gonge dei andre faktorane med kvart enkelt ledd i parentesuttrykket.

#### Eksempel 1

$$(4+7) \cdot 8 = 4 \cdot 8 + 7 \cdot 8$$

#### Eksempel 2

$$(10-7) \cdot 2 = 10 \cdot 2 - 7 \cdot 2$$
  
=  $20 - 14$   
=  $6$ 

Merk: Her vil det sjølvsagt vere raskare å rekne slik:

$$(10-7) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

#### Eksempel 2

Rekn ut  $12 \cdot 3$ .

Svar

$$12 \cdot 3 = (10 + 2) \cdot 3$$
$$= 10 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$
$$= 30 + 6$$
$$= 36$$

#### Obs!

Vi introduserte parentesar som ein indikator på kva som skulle reknast ut først, men regel 3.5 gir ei alternativ og likeverdig tyding av parentesar. Regelen kjem spesielt til nytte i algebrarekning (sjå Del II).

## Å gonge med 0

Vi har tidlegare sett at 0 kan skrivast som ein differanse mellom to tal, og dette kan vi no utnytte til å finne produktet når vi gongar med 0. La oss sjå på reknestykket

$$(2-2) \cdot 3$$

Av regel 3.5 har vi at

$$(2-2) \cdot 3 = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3$$
$$= 6 - 6$$
$$= 0$$

Sidan 0 = 2 - 2, må dette bety at

$$0 \cdot 3 = 0$$

## 3.6 Gonging med 0

Viss 0 er ein faktor, er produktet lik 0.

# Eksempel 1

$$7 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 219 = 0$$

#### Assosiative lover

## 3.7 Assosiativ lov ved addisjon

Plasseringa av parentesar mellom ledd har inga påverknad på summen.

$$(2+3)+4=5+4=9$$

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$$



### 3.8 Assosiativ lov ved multiplikasjon

Plasseringa av parentesar mellom faktorar har inga påverknad på produktet.

### Eksempel

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$$



I motsetnad til addisjon og multiplikasjon, er verken subtraksjon eller divisjon assosiative:

$$(12-5)-4=7-4=3$$
  
 $12-(5-4)=12-1=11$ 

$$(80:10):2=8:2=4$$

$$80: (10:2) = 80:5 = 16$$

Vi har sett at parentesane hjelp oss med å seie noko om *prioriteringa* av rekneartane, men det at subtraksjon og divisjon er ikkje-assosiative fører til at vi også må ha ein regel for kva *retning* vi skal rekne i.

## 3.9 Retning på utrekningar

Rekneartar som ut ifrå regel 3.4 har lik prioritet, skal reknast frå venstre mot høgre.

$$12 - 5 - 4 = (12 - 5) - 4$$
$$= 7 - 4$$
$$= 3$$

# Eksempel 2

$$80:10:2 = (80:10):2$$
  
=  $8:2$   
=  $4$ 

$$6: 3 \cdot 4 = (6:3) \cdot 4$$
$$= 2 \cdot 4$$
$$= 8$$

# Kapittel 4

# $\mathbf{Br}\mathbf{ø}\mathbf{k}$

# 4.1 Introduksjon

### 4.1 Brøk som omskriving av delestykke

Ein brøk er ein annan måte å skrive eit delestykke på. I ein brøk kallar vi dividenden for tellar og divisoren for nemnar.

$$1: 4 = \frac{1}{4} \stackrel{\longleftarrow \text{Tellar}}{\longleftarrow \text{Nemnar}}$$

# Språkboksen

Vanlege måtar å sei<br/>e $\frac{1}{4}$ på er  $^1$ 

- "éin firedel"
- "1 av 4"
- "1 over 4"

## Brøk som mengde

La oss sjå for på brøken  $\frac{1}{4}$  som ei mengde. Vi startar da med å tenke på talet 1 som ei rute<sup>1</sup>:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>I tillegg har vi utsegna fra språkboksen på side 23.

 $<sup>^1\</sup>mathrm{Av}$  praktiske årsakar velg vi oss her ei einarrute som er større enn den vi brukte i Kapittel 1.

Så deler vi denne ruta inn i fire mindre ruter som er like store. Kvar av desse rutene blir da  $\frac{1}{4}$  (1 av 4):

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} = 1$$

Har vi éi slik rute, har vi altså 1 firedel:

$$=\frac{1}{4}$$

Men skal ein berre ut ifrå ein figur kunne sjå kor stor ein brøk er, må ein vite kor stor 1 er, og for å få dette lettare til syne skal vi også ta med dei "tomme" rutene:

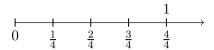


Slik vil dei blå og dei tomme rutene fortelje oss kor mange bitar 1 er delt inn i, mens dei blå rutene aleine fortel oss kor mange slike bitar det eigentleg er. Slik kan vi seie at

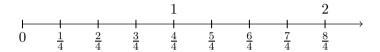
antal blå ruter = tellar antal blå ruter + antal tommme ruter = nemnar  $= \frac{2}{3} \qquad = \frac{7}{10} \qquad = \frac{19}{20}$ 

#### Brøk på tallinja

På tallinja deler vi lengda mellom 0 og 1 inn i like mange lengder som nemnaren angir. Har vi ein brøk med 4 i nemnar, deler vi lengda mellom 0 og 1 inn i 4 like lengder:



Tallinja er også fin å bruke for å teikne inn brøkar som er større enn 1:



#### Tellar og nemnar oppsummert

Sjølv om vi har vore innom det allereie, er det så avgjerande å forstå kva tellaren og nemnaren seier oss at vi tek ei kort oppsummering:

- Nemnaren fortel kor mange bitar 1 er delt inn i.
- Tellaren fortel kor mange slike bitar det er.

# 4.2 Verdi, utviding og forkorting av brøk

#### 4.2 Verdien til ein brøk

Verdien til ein brøk finn vi ved å dele tellaren med nemnaren.

## Eksempel

Finn verdien til  $\frac{1}{4}$ .

Svar

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

#### Brøkar med same verdi

Brøkar kan ha same verdi sjølv om dei ser forskjellige ut. Viss du reknar ut  $1:2,\,2:4$  og 4:8, får du i alle tilfelle  $0,\!5$  som svar. Dette betyr at

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = 0.5$$

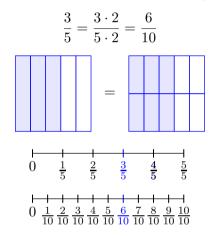




#### Utviding

At brøkar kan sjå forskjellige ut, men ha same verdi, betyr at vi kan endre på utsjånaden til ein brøk utan å endre verdien. La oss som eksempel gjere om  $\frac{3}{5}$  til ein brøk med same verdi, men med 10 som nemnar:

- $\frac{3}{5}$  kan vi gjere om til ein brøk med 10 i nemnar om vi deler kvar femdel inn i 2 like bitar, for da blir 1 til saman delt inn i  $5 \cdot 2 = 10$  bitar.
- Tellaren i  $\frac{3}{5}$  fortel at der er 3 femdelar. Når desse blir delt i to, blir dei totalt til  $3\cdot 2=6$  tidelar. Altså har  $\frac{3}{5}$  same verdi som  $\frac{6}{10}$ .



#### Forkorting

Legg no merke til at vi også kan gå "andre vegen".  $\frac{6}{10}$  kan vi gjere om til ein brøk med 5 i nemnar ved å dele både tellar og nemnar med 2:

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}$$

# 4.3 Utviding og forkorting av brøk

Vi kan gonge eller dele tellar og nemnar med det same talet utan at brøken endrar verdi.

Å gonge med eit tal større enn 1 kallast å utvide brøken. Å dele med eit tal større enn 1 kallast å forkorte brøken.

## Eksempel 1

Utvid  $\frac{3}{5}$  til ein brøk med 20 som nemnar.

#### Svar

Da  $5 \cdot 4 = 20$ , gongar vi både tellar og nemnar med 4:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4}$$
$$= \frac{12}{20}$$

## Eksempel 2

Utvid  $\frac{150}{50}$  til ein brøk med 100 som nemnar.

#### Svar

Da  $50 \cdot 2 = 100$ , gongar vi både tellar og nemnar med 2:

$$\frac{150}{50} = \frac{150 \cdot 2}{50 \cdot 2}$$
$$= \frac{300}{100}$$

# Eksempel 3

Forkort  $\frac{18}{30}$  til ein brøk med 5 som nemnar.

#### Svar

Da 30:6=5, deler vi både tellar og nemnar med 6:

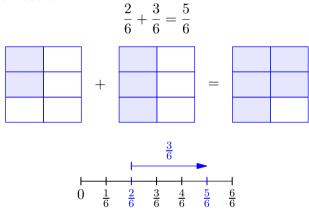
$$\frac{18}{30} = \frac{18:6}{30:6}$$
$$= \frac{3}{5}$$

# 4.3 Addisjon og subtraksjon

Addisjon og subtraksjon av brøkar handlar i stor grad om nemnarane. Husk no at nemnarane fortel oss om inndelinga av 1. Viss brøkar har lik nemnar, representerer dei eit antal bitar med lik størrelse. Da gir det meining å rekne addisjon eller subtraksjon mellom tellarane. Viss brøkar har ulike nemnarar, representerer dei eit antal bitar med ulik størrelse, og da gir ikkje addisjon eller subtraksjon mellom tellerane direkte meining.

#### Lik nemnar

Om vi for eksempel har 2 seksdelar og adderer 3 seksdelar, endar vi opp med 5 seksdelar:



# 4.4 Addisjon/subtraksjon av brøkar med lik nemnar

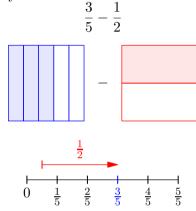
Når vi reknar addisjon/subtraksjon mellom brøkar med lik nemnar, finn vi summen/differansen av tellarane og beheld nemnaren.

## Eksempel 2

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7 - 5}{9}$$
$$= \frac{2}{9}$$

#### Ulike nemnarar

La oss sjå på reknestykket<sup>1</sup>



Skal vi skrive differansen som ein brøk, må vi sørge for at brøkane har same nemnar. Dei to brøkane våre kan begge ha 10 som nemnar:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} \qquad \qquad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

Dette betyr at

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{10} - \frac{\frac{1}{2}}{10}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

 $<sup>^{1}\</sup>mathrm{Vi}$  minner om at raudfarga på pila indikerer at ein skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Det vi har gjort, er å utvide begge brøkane slik at dei har same nemnar, nemleg 10. Når nemnarene i brøkane er like, kan vi rekne ut subtraksjonsstykket for tellarane:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$$
$$= \frac{1}{10}$$

# 4.5 Addisjon/subtraksjon av brøkar med ulik nemnar

Når vi reknar addisjon/subtraksjon mellom brøkar med ulik nemnar, må vi utvide brøkane slik at dei har lik nemnar, for så å bruke regel 4.4.

#### Eksempel 1

Rekn ut

$$\frac{2}{9} + \frac{6}{7}$$

Begge nemnarane kan bli 63 viss vi gongar med rett heiltal. Vi utvider derfor til brøkar med 63 i nemnar:

$$\frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 7} + \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{14}{63} + \frac{54}{63}$$
$$= \frac{68}{63}$$

#### Fellesnemnar

I Eksempel 1 over blir 63 kalla ein fellesnemnar. Dette fordi det finst heiltal vi kan gonge nemnarane med som gir oss talet 63:

$$9 \cdot 7 = 63$$

$$7 \cdot 9 = 63$$

Viss vi gongar saman alle nemnarane i eit reknestykke, finn vi alltid ein fellesnemnar, men vi sparer oss for store tal om vi finn den *minste* fellesnemnaren. Ta for eksempel reknestykket

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3}$$

Her kan vi bruke fellesnemnaren  $6 \cdot 3 = 18$ , men det er betre å merke seg at  $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$  også er ein fellesnemnar. Altså er

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{7}{6} + \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$
$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{6}$$
$$= \frac{17}{6}$$

## Eksempel 2

Rekn ut

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4}$$

#### Svar

Alle nemnarane kan bli 8 viss vi gongar med rett heiltall. Vi utvider derfor til brøkar med 8 i nemnar:

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{5}{8} + \frac{10 \cdot 2}{4 \cdot 2}$$
$$= \frac{12}{8} - \frac{5}{8} + \frac{20}{8}$$
$$= \frac{27}{8}$$

# 4.4 Brøk gonga med heiltal

I seksjon 2.3 såg vi at gonging med heiltal er det same som gjentatt addisjon. Skal vi for eksempel rekne ut  $\frac{2}{5} \cdot 3$ , kan vi derfor rekne slik:

$$\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2+2+2}{5}$$

$$= \frac{6}{5}$$

$$\frac{2}{5} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{5} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{5}{5} \qquad \frac{6}{5}$$

Men vi veit også at  $2+2+2=2\cdot 3,$  og derfor kan vi forenkle reknestykket vårt:

$$\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5}$$
$$= \frac{6}{5}$$

Multiplikasjon mellom heiltal og brøk er også kommutativ<sup>1</sup>:

$$3 \cdot \frac{2}{5} = 3 \cdot 2 : 5$$
$$= 6 : 5$$
$$= \frac{6}{5}$$

# $4.6~{ m Br} { m g}{ m k}$ gonga med heiltal

Når vi gongar ein brøk med eit heiltal, gongar vi heiltalet med tellaren i brøken.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Hugs at  $\frac{2}{5}$  berre er ei omskriving av 2:5.

$$\frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{1 \cdot 4}{3}$$
$$= \frac{4}{3}$$

## Eksempel 2

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5}$$
$$= \frac{6}{5}$$

## Ei tolking av gonging med brøk

Av regel 4.6 kan vi også danne ei tolking av kva å gonge med ein brøk inneber. For eksempel, å gonge 3 med  $\frac{2}{5}$  kan tolkast på desse to måtane:

• Vi gongar 3 med 2, og deler produktet med 5:

$$3 \cdot 2 = 6$$
 ,  $6:5 = \frac{6}{5}$ 

• Vi deler 3 med 5, og gongar kvotienten med 2:

$$3:5=\frac{3}{5}$$
 ,  $\frac{3}{5}\cdot 2=\frac{3\cdot 2}{5}=\frac{6}{5}$ 

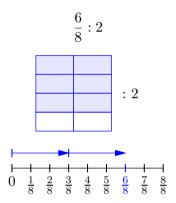
## 4.5 Brøk delt med heiltal

Det er no viktig å huske på to ting:

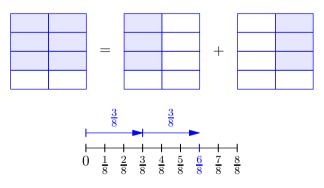
- Deling kan ein sjå på som ei lik fordeling av eit antal
- I ein brøk er det tellaren som fortel noko om antalet (nemnaren fortel om inndelinga av 1)

#### Tilfellet der tellaren er deleleg med divisoren

La oss rekne ut



Vi har her 6 åttedelar som vi skal fordele likt på 2. Dette blir 6:2=2 åttedelar.

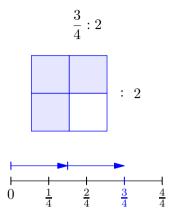


Altså er

$$\frac{6}{8}:2=\frac{3}{8}$$

#### Tilfellet der tellaren ikkje er deleleg divisoren

Kva no om vi skal dele  $\frac{3}{4}$  på 2?

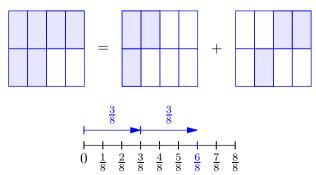


Saka er at vi alltid kan utivde brøken vår slik at tellaren blir deleleg med divisoren. Sidan vi skal dele med 2, utvidar vi altså brøken vår med 2:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

$$= \frac{1}{0} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}$$

No har vi6åttedelar. 6åttedelar delt på 2blir 3åttedelar:



Altså er

$$\frac{3}{4}$$
:  $2 = \frac{3}{8}$ 

Reint matematisk har vi rett og slett gonga nemnaren til  $\frac{3}{4}$  med 2:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} \\ = \frac{3}{8}$$

#### 4.7 Brøk delt med heiltal

Når vi delar ein brøk med eit heiltal, gongar vi nemnaren med heiltalet.

#### Eksempel 1

$$\frac{5}{3} : 6 = \frac{5}{3 \cdot 6} \\ = \frac{5}{18}$$

#### Unntak

Innleiingsvis av denne seksjonen fann vi at

$$\frac{4}{8}: 2 = \frac{2}{8}$$

Da gonga vi ikkje nemnaren med 2, slik regel 4.7 tilseier. Om vi gjer det, får vi

$$\frac{4}{8}: 2 = \frac{4}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

Men

$$\frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

Dei to svara har altså same verdi. Saka er at skal vi dele ein brøk på eit heiltal, og tellaren er deleleg med heiltalet, kan vi direkte dele tellaren på heiltalet. I slike tilfelle er det altså ikkje feil, men heller ikkje naudsynt å bruke regel 4.7.

# 4.6 Brøk gonga med brøk

Vi har sett $^1$  korleis å gonge med ein brøk inneber å gonge det andre talet med tellaren, og så dele produktet med nemnaren. La oss bruke dette til å rekne ut

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

Med tolkinga akkurat nemnt, skal vi no gonge  $\frac{5}{4}$  først med 3, og så dele produktet med 2. Av regel 4.6 er

$$\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{4}$$

Og av regel 4.7 er

$$\frac{5 \cdot 3}{4} : 2 = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

Altså er

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

## 4.8 Brøk gonga med brøk

Når vi gongar to brøkar med kvarandre, gongar vi tellar med tellar og nemnar med nemnar.

# Eksempel 1

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 9}$$
$$= \frac{24}{63}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 10}$$
$$= \frac{9}{20}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Sjå tekstboksen med tittelen *Ei tolking av gonging med brøk* på s. 49.

# 4.7 Kansellering av faktorar

Når tellaren og nemnaren har lik verdi, er verdien til brøken alltid 1. For eksempel er  $\frac{3}{3}=1,\,\frac{25}{25}=1$  osv. Dette kan vi utnytte for å forenkle brøkuttrykk.

La oss forenkle brøkuttrykket

$$\frac{8\cdot 5}{9\cdot 8}$$

Da  $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$ , kan vi skrive

$$\frac{8\cdot 5}{9\cdot 8} = \frac{5\cdot 8}{9\cdot 8}$$

Og som vi nylig har sett (regel 4.8) er

$$\frac{5\cdot 8}{9\cdot 8} = \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8}$$

Sidan  $\frac{8}{8} = 1$ , har vi at

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{5}{9} \cdot 1$$
$$= \frac{5}{9}$$

Når berre gonging er til stades i brøkar, kan ein alltid omrokkere slik vi har gjort over, men når ein har forstått kva omrokkeringa ender med, er det betre å bruke *kansellering*. Ein set da ein strek over to og to like faktorar for å indikere at dei utgjer ein brøk med verdien 1. Tilfellet vi akkurat såg på skriv vi da som

$$\frac{\cancel{8} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{9}$$

## 4.9 Kansellering av faktorar

Når berre gonging er til stades i ein brøk, kan vi kansellere par av like faktorar i tellar og nemnar.

### Eksempel 1

Kanseller så mange faktorar som mogleg i brøken

$$\frac{3 \cdot 12 \cdot 7}{7 \cdot 4 \cdot 12}$$

Svar

$$\frac{3\cdot\cancel{\cancel{1}}\cancel{\cancel{2}}\cdot\cancel{\cancel{7}}}{\cancel{\cancel{7}}\cdot\cancel{\cancel{4}}\cdot\cancel{\cancel{1}}\cancel{\cancel{2}}}=\frac{3}{4}$$

### Eksempel 2

Forkort brøken  $\frac{12}{42}$ .

#### Svar

Vi legg merke til at 6 er ein faktor i både 12 og 42, altså er

$$\frac{12}{42} = \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 7}$$
$$= \frac{2}{7}$$

# Eksempel 3

Forkort brøken  $\frac{48}{16}$ .

#### Svar

Vi legg merke til at 16 er ein faktor i 48, altså er

$$\frac{48}{16} = \frac{3 \cdot \cancel{16}}{\cancel{16}}$$
$$= \frac{3}{1}$$
$$= 3$$

Merk: Viss alle faktorar er kansellert i tellar eller nemnar, er dette det same som at talet 1 står der.

### Forkorting via primtalsfaktorisering

Det er ikkje alltid like lett å legge merke til ein felles faktor, slik vi har gjort i *Eksempel 2* og *Eksempel 3* over. Vil ein vere heilt sikker på at ein ikkje har oversett felles faktorar, kan ein alltid primtalsfaktorisere (sjå seksjon 6.5) både tellar og nemnar. For eksempel har vi at

$$\frac{12}{42} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7}}$$
$$= \frac{2}{7}$$

### Brøkar forenklar utrekningar

Desmialtalet 0,125 kan vi skrive som brøken  $\frac{1}{8}.$  Reknestykket

$$0,125 \cdot 16$$

vil for dei fleste av oss ta ei stund å løyse for hand med vanlege multiplikasjonsreglar. Men bruker vi brøkuttrykket får vi at

$$0.125 \cdot 16 = \frac{1}{8} \cdot 16$$
$$= \frac{2 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8}}$$
$$= 2$$

# "Å stryke nullar"

Eit tal som 3000 kan vi skrive som  $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ , mens 700 kan vi skrive som  $7 \cdot 10 \cdot 10$ . Brøken  $\frac{3000}{700}$  kan vi derfor forkorte slik:

$$\frac{3000}{700} = \frac{3 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}{7 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}$$
$$= \frac{3 \cdot \cancel{10}}{7}$$
$$= \frac{30}{7}$$

I praksis er dette det same som "å stryke nullar":

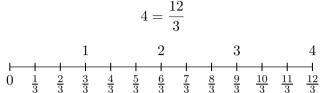
$$\frac{3000}{700} = \frac{30}{7}$$

Obs! Nullar er dei einaste sifra vi kan "stryke" på denne måten, for eksempel kan vi ikkje forkorte  $\frac{123}{13}$  på nokon som helst måte. I tillegg kan vi berre "stryke" nullar som står som bakerste siffer, for eksempel kan vi ikkje "stryke" nullar i brøken  $\frac{101}{10}$ .

# 4.8 Deling med brøk

#### Deling ved å sjå på tallinja

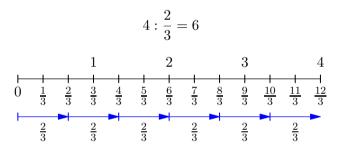
La oss rekne ut  $4:\frac{2}{3}$ . Sidan brøken vi deler 4 på har 3 i nemnar, kan det vere ein idé å gjere om også 4 til ein brøk med 3 i nemnar. Vi har at



Husk no at ei tyding av  $4:\frac{2}{3}$  er

"Kor mange gonger  $\frac{2}{3}$  går på 4."

Ved å sjå på tallinja, finn vi at  $\frac{2}{3}$  går 6 gongar på 4. Altså er



#### Ein generell metode

Vi kan ikkje sjå på ei tallinje kvar gong vi skal dele med brøkar, så no skal vi komme fram til ein generell reknemetode ved igjen å bruke  $4:\frac{2}{3}$  som eksempel. For denne metoden bruker vi denne tydinga av divisjon:

$$4: \frac{2}{3} =$$
 "Talet vi må gonge  $\frac{2}{3}$  med for å få 4."

For å finne dette talet startar vi med å gonge  $\frac{2}{3}$  med talet som gjer at produktet blir 1. Dette talet er *den omvende brøken* av  $\frac{2}{3}$ , som er  $\frac{3}{2}$ :

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

No gjenstår det berre å gonge med 4 for å få 4:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 4$$

For å få 4, må vi altså gonge  $\frac{2}{3}$  med  $\frac{3}{2} \cdot 4$ . Dette betyr at

$$4: \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \cdot 4$$
$$= 6$$

## 4.10 Brøk delt på brøk

Når vi deler eit tal med ein brøk, gongar vi talet med den omvende brøken.

$$6: \frac{2}{9} = 6 \cdot \frac{9}{2} \\ = 27$$

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{8} = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5}$$
$$= \frac{32}{15}$$

# Eksempel 3

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3}$$
$$= \frac{30}{15}$$

Her bør vi også sjå at brøken kan forkortast:

$$\frac{30}{15} = \frac{2 \cdot \cancel{15}}{\cancel{15}}$$
$$= 2$$

Merk: Vi kan spare oss for store tal viss vi kansellerer faktorar undervegs i utrekningar:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{3}}$$
$$= 2$$

#### 4.9 Rasjonale og blanda tal

## 4.11 Rasjonale tal

Eit kvart tal som kan bli skriven som ein brøk med heiltals tellar og nemnar, er eit rasjonalt tal.

#### Merk

Rasjonale tal gir oss ei samlenemning for

• Heiltal

For eksempel  $4 = \frac{4}{1}$ .

- Desimaltal med endeleg antal desimalar For eksempel  $0.2 = \frac{1}{5}$ .
- Desimaltal med repeterande desimalmønster For eksempel  ${}^{1}$  0,08 $\bar{3} = \frac{1}{12}$ .

#### 4.12 Blanda tal

Om vi adderer eit heiltal med ein brøk der tellaren er mindre enn nemnaren, får vi eit blanda tal.

## Eksempel 1

Tre forskjellige blanda tal:

$$2 + \frac{5}{7}$$

$$8 + \frac{2}{7}$$

$$2 + \frac{5}{7}$$
  $8 + \frac{2}{7}$   $\frac{1}{10} + 4$ 

### Obs!

I mange bøker vil du finne tal som dei fra Eksempel 1 over skrivne slik

$$2\frac{5}{7}$$

$$8\frac{2}{7}$$

$$4\frac{1}{10}$$

 $<sup>^{1}</sup>$   $\bar{3}\,$  indikerer at 3 fortsett i det uendelege. Ein annan måte å indikere dette på er å bruke symbolet ... . Altså er  $0.08\overline{3} = 0.08333333...$ 

## Eksempel 2

Skriv om brøken  $\frac{17}{3}$  til eit blanda tal.

#### Svar

Vi legg merke til at tellaren er 17 og nemnaren er 3. Det største heiltalet vi kan gonge med 3 utan at produktet blir større enn 17, er 5. Altså kan vi skrive

$$\frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3}$$
$$= \frac{5 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} + \frac{2}{3}$$
$$= 5 + \frac{2}{3}$$

# Eksempel 3

Skriv om  $3 + \frac{4}{5}$  til ein brøk.

#### Svar

Vi har at  $3 = \frac{3}{1}$ , altså er

$$3 + \frac{4}{5} = \frac{3}{1} + \frac{4}{5}$$

Vidare har vi $\,\mathrm{at}^1$ 

$$\frac{3}{1} + \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5}$$
$$= \frac{15}{5} + \frac{4}{5}$$
$$= \frac{19}{5}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Sjå regel 4.5.

# Oppgaver for kapittel 4

#### 4.1.1

Finn verdien til brøken.

- a)  $\frac{18}{3}$  b)  $\frac{20}{4}$  c)  $\frac{10}{5}$  d)  $\frac{42}{6}$  e)  $\frac{63}{7}$  f)  $\frac{32}{8}$

#### 4.1.2

Finn verdien til brøken. Bruk kalkulator om nødvendig.

- a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{4}$  c)  $\frac{1}{5}$  d)  $\frac{3}{4}$  e)  $\frac{2}{5}$  f)  $\frac{3}{5}$  g)  $\frac{4}{5}$

- f)  $\frac{3}{2}$  g)  $\frac{1}{3}$  h)  $\frac{5}{2}$  i)  $\frac{5}{6}$  j)  $\frac{7}{5}$  k)  $\frac{11}{4}$  l)  $\frac{7}{10}$

#### 4.1.3

Skriv brøken markert med raudt.

- b)  $\stackrel{0}{\vdash}$   $\stackrel{1}{\vdash}$   $\stackrel{1}{\vdash}$   $\stackrel{1}{\vdash}$

#### 4.1.4

Skriv brøken markert med raudt.

#### 4.2.1

Eksempel

 $\frac{9}{8}$  utvida med  $3 = \frac{9 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{27}{24}$ 

Utvid

- a)  $\frac{10}{3}$  med 2. b)  $\frac{3}{4}$  med 3. c)  $\frac{3}{7}$  med 4.

- c)  $\frac{9}{8}$  med 5. d)  $\frac{9}{5}$  med 6. e)  $\frac{11}{4}$  med 7.

#### 4.2.2

Utvid

- a)  $\frac{7}{3}$  til ein brøk med 15 som nemnar.
- b)  $\frac{3}{4}$  til ein brøk med 32 som nemnar.
- c)  $\frac{10}{9}$  til ein brøk med 63 som nemnar.

### 4.2.3

Eksempel

 $\frac{10}{8}$  forkorta med  $2 = \frac{10:2}{8:2} = \frac{5}{4}$ 

Forkort

- a)  $\frac{14}{26}$  med 2. b)  $\frac{15}{12}$  med 3. c)  $\frac{20}{16}$  med 4.
- c)  $\frac{35}{50}$  med 5. d)  $\frac{54}{18}$  med 6. e)  $\frac{49}{63}$  med 7.

# 4.2.4

Forkort

- a)  $\frac{27}{12}$  til en brøk med 4 som nemnar.
- b)  $\frac{36}{20}$  til en brøk med 5 som nemnar.
- c)  $\frac{18}{63}$  til en brøk med 7 som nemnar.

#### 4.3.1

Rekn ut.

a) 
$$\frac{4}{3} + \frac{6}{3}$$

b) 
$$\frac{5}{4} + \frac{9}{4}$$

a) 
$$\frac{4}{3} + \frac{6}{3}$$
 b)  $\frac{5}{4} + \frac{9}{4}$  c)  $\frac{1}{6} + \frac{10}{6}$  d)  $\frac{8}{7} + \frac{2}{7}$  e)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ 

d) 
$$\frac{8}{7} + \frac{2}{7}$$

e) 
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

### 4.3.2

Rekn ut.

a) 
$$\frac{10}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$
 b)  $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$  c)  $\frac{11}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ 

b) 
$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$$

c) 
$$\frac{11}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$$

### 4.3.3

Rekn ut.

a) 
$$\frac{5}{3} - \frac{4}{3}$$

b) 
$$\frac{9}{4} - \frac{7}{4}$$

c) 
$$\frac{11}{6} - \frac{1}{6}$$

a) 
$$\frac{5}{3} - \frac{4}{3}$$
 b)  $\frac{9}{4} - \frac{7}{4}$  c)  $\frac{11}{6} - \frac{1}{6}$  d)  $\frac{11}{7} - \frac{4}{7}$  e)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ 

e) 
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

### 4.3.4

Rekn ut.

a) 
$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}$$

a) 
$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}$$
 b)  $\frac{11}{7} - \frac{2}{7} - \frac{4}{7}$  c)  $\frac{10}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$ 

c) 
$$\frac{10}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$

## 4.3.5

Rekn ut.

a) 
$$\frac{2}{5} + \frac{3}{6}$$

b) 
$$\frac{5}{7} + \frac{4}{9}$$

a) 
$$\frac{2}{5} + \frac{3}{6}$$
 b)  $\frac{5}{7} + \frac{4}{9}$  c)  $\frac{10}{3} + \frac{7}{8}$  d)  $\frac{7}{5} + \frac{9}{4}$  e)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ 

d) 
$$\frac{7}{5} + \frac{9}{4}$$

e) 
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

## 4.3.6

Rekn ut.

a) 
$$\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$$
 b)  $\frac{5}{4} - \frac{4}{9}$  c)  $\frac{10}{9} - \frac{1}{8}$  d)  $\frac{4}{5} - \frac{1}{4}$  e)  $\frac{5}{2} - \frac{5}{3}$ 

b) 
$$\frac{5}{4} - \frac{4}{9}$$

c) 
$$\frac{10}{9} - \frac{1}{8}$$

67

d) 
$$\frac{4}{5} - \frac{1}{4}$$

e) 
$$\frac{5}{2} - \frac{5}{3}$$

## 4.3.7

Rekn ut.

a) 
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$$

$$b) \frac{10}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{5}$$

a) 
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$$
 b)  $\frac{10}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{5}$  c)  $\frac{9}{2} - \frac{2}{7} - \frac{1}{8}$ 

#### 4.4.1

Rekn ut.

a) 
$$\frac{4}{3} \cdot 5$$

b) 
$$\frac{5}{7} \cdot 8$$

a) 
$$\frac{4}{3} \cdot 5$$
 b)  $\frac{5}{7} \cdot 8$  c)  $\frac{9}{10} \cdot 6$  d)  $\frac{8}{7} \cdot 10$  e)  $\frac{3}{2} \cdot 7$ 

d) 
$$\frac{8}{7} \cdot 10$$

e) 
$$\frac{3}{2} \cdot 7$$

f) 
$$7 \cdot \frac{4}{3}$$

g) 
$$5 \cdot \frac{7}{3}$$

f) 
$$7 \cdot \frac{4}{3}$$
 g)  $5 \cdot \frac{7}{3}$  h)  $3 \cdot \frac{10}{7}$  i)  $1 \cdot \frac{5}{11}$  j)  $8 \cdot \frac{9}{17}$ 

i) 
$$1 \cdot \frac{5}{11}$$

j) 
$$8 \cdot \frac{9}{17}$$

### 4.5.1

Rekn ut.

a) 
$$\frac{4}{3}$$
: 5

b) 
$$\frac{5}{7}$$
: 8

c) 
$$\frac{9}{10}$$
: 6

a) 
$$\frac{4}{3}:5$$
 b)  $\frac{5}{7}:8$  c)  $\frac{9}{10}:6$  d)  $\frac{8}{7}:10$  e)  $\frac{3}{2}:7$ 

e) 
$$\frac{3}{2}$$
: 7

f) 
$$\frac{9}{10}$$
: 11

g) 
$$\frac{1}{5}$$
: 12

f) 
$$\frac{9}{10}$$
: 11 g)  $\frac{1}{5}$ : 12 h)  $\frac{9}{10}$ : 29 i)  $\frac{8}{9}$ : 51 j)  $\frac{3}{2}$ : 79

i) 
$$\frac{8}{0}$$
: 51

j) 
$$\frac{3}{2}$$
: 79

#### 4.6.1

Rekn ut.

a) 
$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{9}$$

b) 
$$\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4}$$

c) 
$$\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3}$$

a) 
$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{9}$$
 b)  $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4}$  c)  $\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3}$  d)  $\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}$  e)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$ 

e) 
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

f) 
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$$

g) 
$$\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}$$

f) 
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$$
 g)  $\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}$  h)  $\frac{10}{3} \cdot \frac{8}{3}$  i)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{7}$  j)  $\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{6}$ 

i) 
$$\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{7}$$

j) 
$$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{6}$$

### 4.7.1

Rekn ut.

a) 
$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4}$$

a) 
$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4}$$
 b)  $\frac{17}{8} \cdot \frac{9}{4}$  c)  $\frac{23}{8} \cdot \frac{2}{4}$  d)  $\frac{7}{81} \cdot \frac{3}{8}$  e)  $\frac{7}{8} \cdot \frac{29}{41}$ 

c) 
$$\frac{23}{8} \cdot \frac{2}{4}$$

d) 
$$\frac{7}{81} \cdot \frac{3}{8}$$

e) 
$$\frac{7}{8} \cdot \frac{29}{41}$$

## 4.8.1

Kanseller så mange faktorer som mulig i brøken.

a) 
$$\frac{3 \cdot 11 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 3}$$

a) 
$$\frac{3 \cdot 11 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 3}$$
 b)  $\frac{5 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 8 \cdot 12}$  c)  $\frac{6 \cdot 10}{6 \cdot 9 \cdot 10}$  d)  $\frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 3}$ 

c) 
$$\frac{6 \cdot 10}{6 \cdot 9 \cdot 10}$$

d) 
$$\frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 3}$$

#### 4.8.2

Forkort brøken så mykje som mogleg.

a) 
$$\frac{28}{16}$$

b) 
$$\frac{18}{42}$$

b) 
$$\frac{18}{42}$$
 c)  $\frac{24}{36}$  d)  $\frac{56}{49}$  e)  $\frac{25}{50}$  f)  $\frac{21}{14}$ 

d) 
$$\frac{56}{49}$$

e) 
$$\frac{25}{50}$$

f) 
$$\frac{21}{14}$$

#### 4.8.3

Eksempel 1

$$\frac{3}{4} \cdot 20 = \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$$

Utnytt at nemnaren er ein faktor i talet det blir gonga med, og rekn ut

a) 
$$\frac{7}{3} \cdot 21$$

b) 
$$\frac{9}{5} \cdot 30$$

a) 
$$\frac{7}{3} \cdot 21$$
 b)  $\frac{9}{5} \cdot 30$  c)  $\frac{10}{7} \cdot 49$  d)  $\frac{8}{9} \cdot 18$  e)  $\frac{5}{4} \cdot 24$ 

d) 
$$\frac{8}{9} \cdot 18$$

e) 
$$\frac{5}{4} \cdot 24$$

f) 
$$8 \cdot \frac{3}{2}$$

g) 
$$35 \cdot \frac{5}{7}$$

h) 
$$63 \cdot \frac{2}{6}$$

i) 
$$48 \cdot \frac{1}{6}$$

f) 
$$8 \cdot \frac{3}{2}$$
 g)  $35 \cdot \frac{5}{7}$  h)  $63 \cdot \frac{2}{9}$  i)  $48 \cdot \frac{1}{6}$  j)  $27 \cdot \frac{7}{3}$ 

#### 4.9.1

Rekn ut.

a) 
$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$$

b) 
$$\frac{8}{9}$$
:  $\frac{5}{3}$ 

c) 
$$\frac{10}{3}$$
 :  $\frac{7}{3}$ 

d) 
$$\frac{1}{5}$$
 :  $\frac{4}{7}$ 

a) 
$$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$$
 b)  $\frac{8}{9}:\frac{5}{3}$  c)  $\frac{10}{3}:\frac{7}{3}$  d)  $\frac{1}{5}:\frac{4}{7}$  e)  $\frac{6}{5}:\frac{3}{11}$ 

#### 4.9.2

Eksempel

$$\frac{3}{4} : \frac{15}{8} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2}{\cancel{3} \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Merk: Her har vi valgt å primtalsfaktorisere alle tala, men ein treng ikkje gjere det viss ein ser kva faktorar som er felles for tellarane og nemnarane.

Utnytt at tellarane og nemnarane har felles faktorar, og rekn ut.

a) 
$$\frac{7}{9}:\frac{21}{12}$$

b) 
$$\frac{35}{24} : \frac{7}{18}$$

a) 
$$\frac{7}{9} : \frac{21}{12}$$
 b)  $\frac{35}{24} : \frac{7}{18}$  c)  $\frac{84}{55} : \frac{42}{77}$ 

#### Gruble 4.1

Bruk regel 4.7 og regel 4.8 til å fylle inn heltallet som mangler der det står "\_".

- a) Å gange med  $\frac{1}{2}$  er det samme som å dele med \_ .
- b) Å gange med  $\frac{1}{4}$  er det samme som å dele med  $\_$ .
- c) Å gange med  $\frac{1}{5}$  er det samme som å dele med \_.

Se tilbake til svarene for oppgave **4.1.2a**) - g). Fyll inn heltallet som mangler der det står "\_".

- d) Å gange med 0,5 er det samme som å dele med \_ .
- e) Å gange med 0.25 er det samme som å dele med  $\_$ .
- f) Å gange med 0.2 er det samme som å dele med  $\_$ .
- g) Å gange med 0,75 er det samme som å gange med \_ og dele med \_ .
- h) Å gange med 0,4 er det samme som å gange med \_ og dele med \_ .
- i) Å gange med 0,6 er det samme som å gange med \_ og dele med \_ .
- j) Å gange med 0,8 er det samme som å gange med \_ og dele med \_ .

#### Gruble 4.2

Se tilbake til regel 4.10 og svarene for oppgave 4.1.2a) - g). Fyll inn heltallet som mangler der det står "".

- (a) Å dele med 0.5 er det samme som å gange med  $\_$ .
- (b) Å dele med 0,25 er det samme som å gange med \_\_.
- (c) Å dele med 0,2 er det samme som å gange med .
- (d) Å dele med 0,75 er det samme som å gange med og dele med .
- (e) Å dele med 0,4 er det samme som å gange med og dele  $med \dots$
- (f) Å dele med 0,6 er det samme som å gange med og dele med ..
- (g) Å dele med 0,8 er det samme som å gange med og dele med ..

#### Gruble 4.3

Utnytt primtalsfaktorisering til å finne fellesnemar, og Rekn ut.

a) 
$$\frac{5}{204} + \frac{7}{198}$$
 b)  $\frac{11}{350} + \frac{17}{315}$ 

b) 
$$\frac{11}{350} + \frac{17}{315}$$

## Kapittel 5

# Negative tal

#### 5.1 Introduksjon

Vi har tidlegare sett at (for eksempel) talet 5 på ei tallinje ligg 5 einarlengder til høgre for 0.

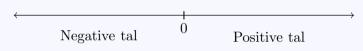


Men kva om vi går andre veien, altså mot venstre? Dette spørsmålet svarer vi på ved å innføre negative tal.

## 5.1 Positive og negative tal

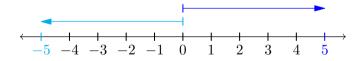
På ei tallinje gjeld følgande:

- Tal plassert til høgre for 0 er positive tal.
- Tal plassert til venstre for 0 er negative tal.



I praksis kan vi ikkje heile tida bruke ei tallinje for å avgjere om eit tal er negativt eller positivt, og derfor bruker vi eit symbol for å vise at tal er negative. Dette symbolet er rett og slett —, altså det same symbolet som vi bruker ved subtraksjon. 5 er med dét eit positivt tal, mens —5 er eit negativt tal. På tallinja er det slik at

- 5 ligg 5 einarlengder til høgre for 0.
- -5 ligg 5 einarlengder *til venstre* for 0.



Den store forskjellen på 5 og -5 er altså på kva side av 0 tala ligg. Da 5 og -5 har same avstand til 0, seier vi at 5 og -5 har same  $length{e}$ .

## 5.2 Lengde (talverdi/absoluttverdi)

Lengda til eit tal skrivast ved symbolet | | .

Lengda til eit positivt tal er verdien til talet.

Lengda til eit negativt tal er verdien til det positive talet med same siffer.

#### Eksempel 1

$$|27| = 27$$

## Eksempel 2

$$|-27| = 27$$

#### Forteikn

Forteikn er ei samlenemning for + og - . 5 har + som forteikn og -5 har - som forteikn.

## 5.2 Dei fire rekneartane med negative tal

Ved innføringa av negative tal får dei fire rekneartane nye sider som vi må sjå på trinnvis. Når vi adderer, subtraherer, multipliserer eller dividerer med negative tal vil vi ofte, for å gjere det meir tydeleg, skrive negative tal med parentes rundt. Da skriv vi for eksempel -4 som (-4).

#### Addisjon

Når vi adderte i seksjon 2.1 såg vi på + som vandring mot høgre. Negative tal gjer at vi må utvide omgrepet for +:

+ "Like langt og i same retning som"

La oss sjå på reknestykket

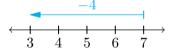
$$7 + (-4)$$

Vår utvida definisjon av + seier oss no at

$$7 + (-4) = "7$$
 og like langt og i same retning som  $(-4)$ "

(-4) har lengde 4 og retning mot venstre. Vårt reknestykke seier altså at vi skal starte på 7, og deretter gå lengda 4 mot venstre.

$$7 + (-4) = 3$$



#### 5.3 Addisjon med negative tal

À addere eit negativt tal er det same som å subtrahere talet med same talverdi.

## Eksempel 1

$$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

$$-8 + (-3) = -8 - 3 = -11$$

#### Merk

regel 2.1 erklærer at addisjon er kommutativ. Dette er gjeldande også ved innføringa av negative tal, for eksempel er

$$7 + (-3) = 4 = -3 + 7$$

#### Subtraksjon

I seksjon 2.2 såg vi på — som vandring mot venstre. Også tydinga av — må utvidast når vi jobbar med negative tal:

"Like langt og i motsett retning som"

La oss sjå på reknestykket

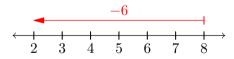
$$2 - (-6)$$

Med vår utvida tyding av —, kan vi skrive

$$2-(-6)=$$
 "2 og like langt og i motsett retning som  $(-6)$ "

-6 har lengde 6 og retning *mot venstre*. Når vi skal gå same lengde, men i *motsett* retning, må vi altså gå lengda 6 *mot høgre*<sup>1</sup>. Dette er det same som å addere 6:

$$2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$



## 5.4 Subtraksjon med negative tal

À subtrahere eit negativt tal er det same som å addere det positive talet med same talverdi.

$$11 - (-9) = 11 + 9 = 20$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Vi minner enda ein gong om at raudfarga på pila indikerer at ein skal vandre fra pilspissen til andre enden.

#### Eksempel 2

$$-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$$

#### Multiplikasjon

I seksjon 2.3 introduserte vi gonging med positive heiltal som gjentatt addisjon. Med våre utvida omgrep av addisjon og subtraksjon, kan vi no også utvide omgrepet multiplikasjon:

#### 5.5 Multiplikasjon med positive og negative tal

- Gonging med eit positivt heiltal er det same som gjentatt addisjon.
- Gonging med eit negativt heiltal er det same som gjentatt subtraksjon.

#### Eksempel 1

$$2 \cdot 3$$
 = "Like langt og i same retning som 2, 3 gonger"  
=  $2 + 2 + 2$   
=  $6$ 

#### Eksempel 2

$$(-2) \cdot 3 =$$
 "Like langt og i same retning som  $(-2)$ , 3 gonger"  
=  $-2 - 2 - 2$   
=  $-6$ 

## Eksempel 3

$$2 \cdot (-3) =$$
 "Like langt og i motsett retning som 2, 3 gonger"  
=  $-2 - 2 - 2$   
=  $-6$ 

$$(-3)\cdot(-4)\equiv \mbox{3Like langt } \mbox{3g i} \mbox{ motsett}$$
retning som  $-3,$  4 gonger" = 12

#### Multiplikasjon er kommutativ

Eksempel 2 og Eksempel 3 på side 75 illustrerer at regel 2.2 også er gjeldande ved innføringa av negative tal:

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2)$$

Det blir tungvint å rekne gonging som gjentatt addisjon/subtraksjon kvar gong vi har eit negativt tal involvert, men som ein direkte konsekvens av regel 5.5 kan vi lage oss følgande to reglar:

#### 5.6 Gonging med negative tal I

Produktet av eit negativt og eit positivt tal er eit negativt tal.

Talverdien til faktorane gonga saman gir talverdien til produktet.

#### Eksempel 1

Rekn ut  $(-7) \cdot 8$ 

#### Svar

Sidan  $7 \cdot 8 = 56$ , er  $(-7) \cdot 8 = -56$ 

#### Eksempel 2

Rekn ut  $3 \cdot (-9)$ .

#### Svar

Sidan  $3 \cdot 9 = 27$ , er  $3 \cdot (-9) = -27$ 

## 5.7 Gonging med negative tal II

Produktet av to negative tal er eit positivt tal.

Talverdien til faktorane gonga saman gir verdien til produktet.

$$(-5) \cdot (-10) = 5 \cdot 10 = 50$$

#### Eksempel 2

$$(-2) \cdot (-8) = 2 \cdot 8 = 16$$

#### Divisjon

Definisjonen av divisjon (sjå seksjon 2.4), kombinert med det vi veit om multiplikasjon med negative tal, gir oss no dette:

$$-18:6=$$
 "Talet eg må gonge 6 med for å få  $-18$  "
$$6\cdot (-3)=-18,\, \mathrm{altså} \ \mathrm{er} \ -18:6=-3$$

$$42: (-7) =$$
 "Talet eg må gonge  $-7$  med for å få  $42$ " 
$$(-7) \cdot (-8) = 42, \text{ altså er } 42: (-7) = -8$$

$$-45:(-5)=$$
 "Talet eg må gonge  $-5$  med for å få  $-45$ " 
$$(-5)\cdot 9=-45, \text{ altså er } -45:(-5)=9$$

## 5.8 Divisjon med negative tal

Divisjon mellom eit positivt og eit negativt tal gir eit negativt tal.

Divisjon mellom to negative tal gir eit positivt tal.

Talverdien til dividenden delt med talverdien til divisoren gir talverdien til kvotienten.

## Eksempel 1

$$-24:6=-4$$

$$24:(-2)=-12$$

Eksempel 3

$$-24:(-3)=8$$

Eksempel 4

$$\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{-10}{7} = -\frac{10}{7}$$

## 5.3 Negative tal som mengde

Obs! Denne tolkinga av negative tal blir først brukt i seksjon 9.2, som er ein seksjon nokre leserar utan tap av forståing kan hoppe over.

Så langt har vi sett på negative tal ved hjelp av tallinjer. Å sjå på negative tal ved hjelp av mengder er i første omgang vanskeleg, fordi vi har likestilt mengder med antal, og negative antal gir ikkje meining! For å skape ei forståing av negative tal ut ifrå eit mengdeperspektiv, nyttar vi det vi skal kalle *vektprinsippet*. Dette inneber at vi ser på tala som krefter. Dei positive tala er antal krefter som verkar nedover og dei negative tala er antal krefter som verkar oppover<sup>1</sup>. Svara på reknestykker med positive og negative tal kan ein da sjå på som resultatet av ei veiing av dei forskjellige mengdene. Slik vil altså eit positivt tal og eit negativt tal med same talverdi *utlikne* kvarandre.

#### 5.9 Negative tal som mengde

Negative tal vil vi indikere som ei lyseblå mengde:

$$= -1$$

$$1 + (-1) = 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Frå verkelegheita kan ein sjå på dei positive og negative tala som ballongar fylt med høvesvis luft og helium. Ballongar fylt med luft verkar med ei kraft nedover (dei dett), mens heliumbalongar verkar med ei kraft oppover (dei stig).

## Kapittel 6

# ${\bf Utreknings metodar}$

#### 6.1 Addisjon

#### Oppstilling

Denne metoden baserer seg på plassverdisystemet, der ein trinnvis reknar ut summen av einarane, tiarane, hundrerane, o.l.

## Eksempel 1

#### Eksempel 2

## Eksempel 3

#### Eksempel 4

## Eksempel 1 (forklaring)

- a) Vi legg saman einarane: 4 + 2 = 6
- b) Vi legg saman tiarane: 3 + 1 = 4
- c) Vi legg saman hundra: 2+6=8

#### Eksempel 2 (forklaring)

- a) Vi legg saman einarane: 3+6=9
- b) Vi legg saman tiarane: 7+8=15. Sidan 10 tiarar er det same som 100, legg vi til 1 på hundreplassen, og skriv opp dei resterande 5 tiarane på tiarplassen.
- c) Vi legg saman hundra: 1 + 2 = 3.

#### Språkboksen

Det å skrive 1 på neste sifferplass kallast "å skrive 1 i mente".

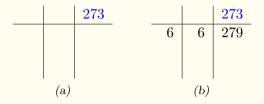
#### Tabellmetoden

Denne metoden tar utgangspunkt i det éine leddet, og summerer fram til det andre leddet er nådd. Det som i starten kan vere litt rart med denne metoden, er at du sjølv velg fritt kva tall du skal legge til, så lenge du når det andre leddet til slutt.

Eksempel 1
$$273 + 86 = 359$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 273 \\ \hline 6 & 6 & 279 \\ \hline 30 & 36 & 309 \\ 50 & 86 & 359 \\ \end{array}$$

#### Eksempel 1 (forklaring)



		273			273
6 30	6	279 309	6	6	279
30	6 36	309	30 50	36	309
			50	86	279 309 359
(c)			(d)		

- (a) Vi startar med det leddet vi sjølv ønsker, ofte er det lurt å starte med det største leddet.
- (b) Vi legg til 6. Da har vi totalt lagt til 6, og vidare er 273 + 6 = 279.
- (c) Vi legg til 30. Da har vi så totalt lagt til 36, og vidare er 279 + 30 = 309.
- (d) Vi legg til 50. Da har vi totalt lagt til 86, altså har vi nådd det andre leddet, og vidare er 309 + 50 = 359.

## Oppstilling versus tabellmetoden

Ved første augekast kan kanskje tabellmetoden sjå ut som ein innvikla måte å rekne addisjon på samanlikna med oppstilling, men med øving vil mange oppdage at tabellmetoden betrer evnen til hoderekning.

## 6.2 Subtraksjon

#### Oppstilling

Subtraksjon med oppstilling baserer seg på plassverdisystemet, der ein trinnvis reknar differansen mellom einarane, tiarane, hundra, o.l. Metoden tar også utgangspunkt i eit mengdeperspektiv, og tillet derfor ikkje differansar med negativ verdi (sjå forklaringa til *Eksempel 2*).

#### Eksempel 2

## Eksempel 3

#### Eksempel 4

## Eksempel 1 (forklaring)

- (a) Vi finn differansen mellom einarane: 9-4=5
- (b) Vi finn differansen mellom tiarane: 8 2 = 6.
- (c) Vi finn differansen mellom hundra: 7 3 = 4.

#### Eksempel 2 (forklaring)

- (a) Vi merkar oss at 7 er større enn 3, derfor tar vi 1 tiar frå dei 8 på tiarplassen. Dette markerer vi ved å sette ein strek over 8. Så finn vi differansen mellom einarane: 13-7=6
- (b) Sidan vi tok 1 frå dei 8 tiarane, er der no berre 7 tiarar. Vi finn differansen mellom tiarane: 7 6 = 1.

#### Tabellmetoden

Tabellmetoden for subtraksjon tek utgangspunkt i at subtraksjon er ein omvend operasjon av addisjon. For eksempel, svaret på spørsmålet "Kva er 789 - 324?" er det same som svaret på spørsmålet "Kor mykje må eg legge til på 324 for å få 789?". Med tabellmetoden følg du ingen spesiell regel underveis, men velg sjølv talla du meiner passar best for å nå målet.

Eksempel 2
$$83 - 67 = 16$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 67 \\ \hline & 3 & 70 \\ \hline & 13 & 83 \\ \hline & 16 & \\ \end{array}$$

#### Eksempel 3

$$564 - 478 = 86$$

	478
2	480
20	500
64	564
86	

$$206,1 - 31,7 = 174,4$$

	31,7
0,3	32
70	102
104,1	206,1
174,4	

#### Eksempel 1 (forklaring)

$$789 - 324 = 465$$





(b)



(c)

	324			
6	330			
70	400			
389	789			
(d)				

	324			
6	330			
70	400			
389	789			
465				
(e)				

- (a) Vi startar med 324.
- (b) Vi legg til 6, og får 324 + 6 = 330
- (c) Vi legg til 70, og får 70 + 330 = 400
- (d) Vi legg til 389, og får 389 + 400 = 789. Da er vi framme på 789.
- (e) Vi summerer tala vi har lagt til: 6+70+389=465

## 6.3 Ganging

#### Ganging med 10, 100, 1000 osv.

## 6.1 Å gonge heiltal med 10, 100 osv.

- Når ein gongar eit heiltal med 10, får ein svaret ved å legge til sifferet 0 bak heiltalet.
- Når ein gongar eit heiltal med 100, får ein svaret ved å legge til sifra 00 bak heiltalet.
- Det same mønsteret gjelder for talla 1000, 10000 osv.

#### Eksempel 1

$$6 \cdot 10 = 60$$

$$79 \cdot 10 = 790$$

$$802 \cdot 10 = 8020$$

#### Eksempel 2

$$6 \cdot 100 = 600$$

$$79 \cdot 100 = 7900$$

$$802 \cdot 100 = 80\,200$$

$$6 \cdot 1000 = 6000$$

$$79 \cdot 10\,000 = 790\,000$$

$$802 \cdot 100\,000 = 80\,200\,000$$

#### 6.2 Å gonge desimaltal med 10, 100 osv.

- Når ein gongar eit desimaltal med 10, får ein svaret ved å flytte komma en plass til høgre.
- Når ein gongar eit heiltal med 100, får ein svaret ved å flytte komma to plasser til høgre.
- Det same mønsteret gjelder for tallene 1000, 10000 osv.

#### Eksempel 1

$$7.9 \cdot 10 = 79.8 = 79.$$

$$38.02 \cdot 10 = 380.2$$

$$0.57 \cdot 10 = 05.7 = 5.7$$

$$0.194 \cdot 10 = 01.94 = 1.94$$

#### Eksempel 2

$$7.9 \cdot 100 = 790, = 790$$

$$38,02 \cdot 100 = 3802, = 3802$$

$$0.57 \cdot 100 = 057 = 57$$

$$0,194 \cdot 100 = 019,4 = 19,4$$

## Eksempel 3

$$7,9 \cdot 1000 = 7900, = 7900$$

$$38,02 \cdot 10\,000 = 380200, = 380\,200$$

$$0.57 \cdot 100\,000 = 57000 = 57\,000$$

#### Merk

regel 6.1 er berre eit spesialtilfelle av regel 6.2. For eksempel, å bruke regel 6.1 på reknestykket  $7 \cdot 10$  gir same resultat som å bruke regel 6.2 på reknestykket  $7.0 \cdot 10$ .

## Å gonge tall med 10, 100 osv. (forklaring)

Titalsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tidelar, hundredelar og tusendelar osv. (sjå regel 1.2). Når ein gongar eit tall med 10, vil alle einarane i talet bli til tiarar, alle tiarar bli til hundra osv. Kvart siffer forskyvast altså éin plass mot venstre. Tilsvarende forskyvast kvart siffer to plassar mot venstre når ein gongar med 100, tre plassar når ein gongar med 1000 osv.

#### Utvida form

Gonging på utvida form bruker vi for å rekne multiplikasjon mellom fleirsifra tall. Metoden baserer seg på distributiv lov (sjå regel 3.5).

#### Eksempel 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & \cdot & 3 & = & 7 & 2 \\ 2 & 0 & \cdot & 3 & = & 6 & 0 \\ 4 & \cdot & 3 & = & 1 & 2 \\ \hline 7 & 2 & & & 7 & 2$$

#### Eksempel 2

 $279 \cdot 34 = 9486$ 

## Eksempel 1 (forklaring)

24 kan skrivast som 20 + 4, altså er

$$24 \cdot 3 = (20 + 4) \cdot 3$$

Vidare er

$$(20+4) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 4 \cdot 3$$
  
=  $60 + 12$   
=  $72$ 

## Eksempel 2 (forklaring)

Vi har at

$$279 = 200 + 70 + 9$$
$$34 = 30 + 4$$

Altså er

$$279 \cdot 34 = (200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4)$$

Vidare er

$$(200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4) = 200 \cdot 30 + 70 \cdot 30 + 9 \cdot 30 + 200 \cdot 4 + 70 \cdot 4 + 9 \cdot 4$$
  
= 9486

#### Kompaktmetoden

Kompaktmetoden bygger på dei same prinsippa som gonging på utvida form, men har ein skrivemåte som gjer utrekninga kortare.

 $279 \cdot 34 = 9486$ 

#### Eksempel 1 (forklaring)

Vi startar med å gonge sifra i 279 enkeltvis med 4:

- $9 \cdot 6 = 36$ , da skriv vi 6 på einarplassen og 3 i mente.
- $7 \cdot 4 = 28$ , da skriv vi8 på tiarplassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 4 = 8$ , da skriv vi 8 på hundrerplassen.

Så gongar vi sifra i 279 enkeltvis med 30. Dette kan forenklast til å gonge med 3, så lenge vi plasserer sifra én plass forskyvde til venstre i forhold til da vi gonga med 4:

- $9 \cdot 3 = 27$ , da skriv vi 7 på tiarplassen og 2 i mente.
- $7 \cdot 3 = 21$ , da skriv vi1 på hundrerplassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 3 = 6$ , da skriv vi 6 på tusenplassen.

## 6.4 Divisjon

Deling med 10, 100, 1000 osv.

#### 6.3 Deling med 10, 100, 1000 osv.

- Når ein deler eit desimaltal med 10, får ein svaret ved å flytte komma en plass til venstre.
- Når ein deler eit desimaltal med 10, får ein svaret ved å flytte komma to plasser til venstre.
- Det same mønsteret gjelder for tallene 1000, 10000 osv.

#### Eksempel 1

$$200: 10 = 200,0: 10$$

$$= 20,00$$

$$= 20$$

$$45: 10 = 45,0: 10$$

$$= 4,50$$

$$= 4,5$$

$$200:100 = 200,0:100$$
 $= 2,000$ 
 $= 2$ 
 $45:100 = 45,0:100$ 
 $= 0,450$ 
 $= 0,45$ 

#### Eksempel 3

$$143,7:10=14,37$$

$$143,7:100=1,437$$

$$143.7:1000 = 0.1437$$

$$93,6:10=9,36$$

$$93.6:100 = 0.936$$

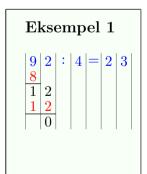
$$93,6:1000 = 0,0936$$

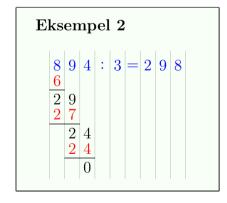
#### Deling med 10, 100, 1000 osv. (forklaring)

Titalsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tideler, hundredeler og tusendeler osv (sjå regel 1.2). Når ein deler eit tall med 10, vil alle einare i tallet bli til tidelar, alle tiarar bli til einarar osv. Kvart siffer forskyvast altså éin plass mot høgre. Tilsvarande forskyvast kvart siffer to plassar mot høgre når ein deler med 100, tre plassar når ein deler med 1000 osv.

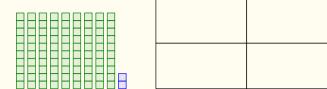
#### Oppstilling

Divisjon med oppstilling baserer seg på divisjon tolka som inndeling av mengder (sjå s.23)



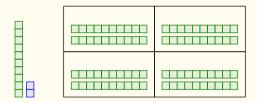


## Eksempel 1 (forklaring)



Figuren over illustrerer mengda 92, som vi skal dele inn i 4 like store grupper.

• Vi startar med å fordele så mange av tiarane som mogleg. Av dei 9 tiarane, kan kvar gruppe få 2. Da har vi totalt fordelt  $2 \cdot 4 = 8$  tiarar.



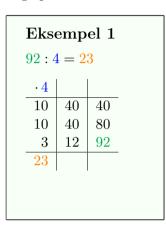
• Vi står no igjen med 1 tiar og 2 einarar, altså 12 einarar. Av dei 12 einarane, kan kvar gruppe få 3. Da har vi totalt fordelt  $3 \cdot 4 = 12$  einarar.

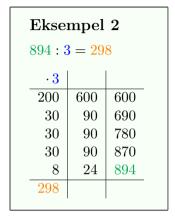


• No er heile mengda 92 fordelt, og da er vi ferdige med utrekninga. I kvar gruppe endte vi opp med mengda 23.

#### Tabellmetoden

Tabellmetoden baserer seg på divisjon som omvend operasjon av gonging. For eksempel er svaret på spørsmålet "Kva er 76 : 4" det same som svaret på spørsmålet "Kva tal må eg gonge 4 med for å få 76?". På same vis som for tabellmetoden ved subtraksjon, er det opp til ein sjølv å velge passande tal for å nå målet.





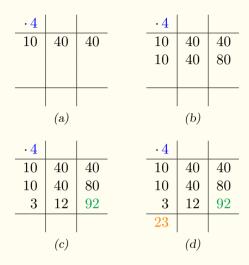
#### Eksempel 3

894:3=298

Merk: same reknestykke som i Eksempel 2, men ei anna utrekning.

#### Eksempel 1 (forklaring)

Sidan vi skal dele 92 med 4, gongar vi med 4 fram til vi når 92.



- (a) Vi gongar 10 med 4, som er lik 40. Da har vi så langt komme til 40.
- (b) Vi gongar 10 med 4, som er lik 40. Da har vi så langt komme til 40 + 40 = 80.
- (c) Vi gongar 3 med 4, som er lik 12. Da har vi komme til 80 + 12 = 92, som var målet.
- (d) Vi legg saman tala vi gonga med, og får 10 + 10 + 3 = 23.

## Tips

Det kan vere lurt å sjå tilbake på utrekningar gjort med tabellmetoden for å tenke over om ein kunne valt tal på ein betre måte. For eksempel, i *Eksempel 1* over kunne vi starta med å gonge med 20. Dette er omlag like enkelt som å gonge med 10, og det ville ha bringa oss nærare målet.

#### Divisjon med rest

Det er langt ifrå alltid at svaret ved divisjon blir eit heiltal. Ein måte å uttrykke slike svar på, er å ved å bruke omgrepet *rest*. Omgrepet er best forklart ved eksempel:

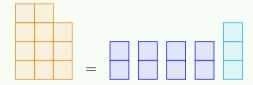
#### Eksempel 1

Rekn ut 11:4 med rest.

#### Svar

Det største heiltalet vi kan gonge med 4 utan at produktet blir større enn 11, er 2.  $2 \cdot 4 = 8$ , så da har vi 11 - 8 = 3 i rest.

$$11 = 2 \cdot 4 + 3$$



Dette betyr at

$$11:4=2 \text{ og } 3 \text{ i rest}$$

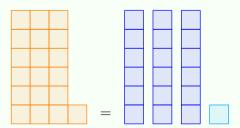
## Eksempel 2

Rekn ut 19:3 med rest.

#### Svar

Det største heiltalet vi kan gonge med 3 utan at produktet blir større enn 19, er 6.  $6 \cdot 3 = 18$ , så da har vi 19 - 8 = 1 i rest.

$$19 = 6 \cdot 3 + 1$$



Dette betyr at

$$19:3=6 \text{ og } 1 \text{ i rest}$$

#### Eksempel 3

Rekn ut 94:4 med rest.

#### Svar

Med oppstilling

$$94:4=23 \text{ og } 2 \text{ i rest}$$

Merk: Da det blir feil å bruke = i figuren over, har vi valt å bruke  $\rightarrow$ .

#### Med tabellmetoden

$$94:4=23 \text{ og } 2 \text{ i rest}$$

## Språkboksen

Viss vi utfører ein modulo-operasjon, finn vi resten i eit delestykke. Dette blir ofte vist ved forkortinga  $\mod$ . For eksempel er

$$11 \mod 4 = 3$$
 ,  $19 \mod 3 = 1$ 

I tillegg til **mod**, blir også **%** og \\ brukt som symbol for denne operasjonen i programmeringsspråk.

#### Divisjon med blanda tal som svar

#### Eksempel 1

Rekn ut 11:4. Skriv svaret som eit blanda tal.

Svar

$$11: 4 = 2 \text{ og } 3 \text{ i rest} = 2 + \frac{3}{4}$$

#### Eksempel 2

Rekn ut 19:3. Skriv svaret som eit blanda tal.

Svar

$$19: 3 = 6 \text{ og } 1 \text{ i rest} = 6 + \frac{1}{3}$$

#### Eksempel 1 (forklaring)

Vi startar med å legge merke til at  $4 = \frac{4}{1}$ . Dette betyr at

$$11:4=11:\frac{4}{1}$$

Av regel 4.10 har vi at

$$11: \frac{4}{1} = 11 \cdot \frac{1}{4}$$

Vidare er  $11=2\cdot 4+3,$ og da er

$$11 \cdot \frac{1}{4} = (2 \cdot 4 + 3) \cdot \frac{1}{4}$$

Av regel 3.5 har vi at

$$(2 \cdot 4 + 3) \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4}$$
  
=  $2 + \frac{3}{4}$ 

#### 6.4.1 Divisjon med desimaltal som svar

#### Eksempel 1

Rekn ut 11:4. Oppgi svaret som desimaltal.

#### Svar

Med oppstilling

$$11:4=2,75$$

#### Med tabellmetoden

$$11:4=2,75$$

$\cdot 4$		
2	8	8
0,5	2	10
$0,\!25$	1	11
2,75		

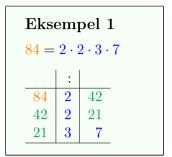
## Eksempel 1; oppstilling (forklaring)

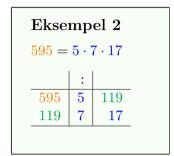
Sidan vi deler med 4, er det snakk om å fordele 11 likt i 4 grupper.

- 8 av dei 11 einarane kan vi fordele likt i 4 grupper. Da har vi igjen 3 einarar. Dette er det same som 30 tidelar.
- 28 av dei 30 tidelane kan vi fordele likt i 4 grupper. Da har vi igjen 2 tidelar. Dette er det same som 20 hundredelar.
- 20 av dei 20 hundredelane kan vi fordele likt i 4 grupper.
- Heile mengda 11 er no fordelt, og da er vi ferdige med utrekninga.

## 6.5 Primtalsfaktorisering

Merk: Primtala mellom 1-100 finn du på side 102.





## Eksempel 1 (forklaring)





- (a) Sidan 2 er det første primtallet, undersøker vi om 84 er deleleg med 2. Det er det, fordi 84:2=42.
- (b) Vi undersøker om også 42 er deleleg med 2. Det er det, fordi42:2=21.
- (c) Vi undersøker om også 21 er deleleg med 2. Det er det ikkje, fordi 21:2=10,5. Derfor går vi over til neste primtall, som er 3. 21 er deleleg med 3 fordi 21:3=7.

Sidan 7 er eit primtal, er vi komme i mål.

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

## Oppgaver for kapittel 6

#### 6.1.1

Rekn ut. .

- a) 12 + 84
- b) 36 + 51 c) 328 + 571
- d) 242 + 56

#### 6.1.2

Rekn ut. .

- a) 19 + 84
- b) 86 + 57 c) 529 + 471
  - d) 202 + 808

#### 6.2.1

Rekn ut. .

- a) 84 23
- b) 286 52 c) 529 401
  - d) 782 131

#### 6.2.2

Rekn ut. .

- a) 78 19

- b) 824 499 c) 731 208 d) 1078 991

#### 6.3.1

Rekn ut. .

- a)  $12 \cdot 3$
- b)  $28 \cdot 4$
- c)  $76 \cdot 5$  d)  $43 \cdot 6$

- e)  $109 \cdot 7$
- f) 98 · 8
- g) 213 · 9

#### 6.3.2

Rekn ut. .

- a) 29 · 12
- b)  $83 \cdot 31$  c)  $91 \cdot 76$  d)  $14 \cdot 83$

#### 6.3.3

Rekn ut. .

- a) 531 · 56
- b)  $83 \cdot 701$  c)  $91 \cdot 673$  d)  $731 \cdot 67$

#### 6.3.4

- a) Bruk kalkulator til å rekne ut  $27 \cdot 5$  og  $2,7 \cdot 5$ .
- b) Bruk kalkulator til å rekne ut  $247 \cdot 192$  og  $24,7 \cdot 19,2$ .
- c) Bruk kalkulator til å rekne ut  $928 \cdot 74$  og  $9.28 \cdot 7.4$ .
- d) Bruk kalkulator til å rekne ut  $134 \cdot 4249$  og  $1,34 \cdot 42,49$ .
- e) Sammenlikn para av svar fra oppgave a)-d) og lag ein regel for korleis du kan rekne ut gonging med desimaltall.

#### 6.3.5

Rekn ut.

- a) 82.3 · 5

- b)  $9.51 \cdot 7$  c)  $22.4 \cdot 1.7$  d)  $37.8 \cdot 41.9$

#### 6.4.1

Rekn ut. .

- a) 98:2

- b) 87:3 c) 92:4 d) 85:5 e) 72:6

#### 6.4.2

Rekn ut. .

- a) 378:2
- b) 224 : 4 c) 495 : 5
- e) 133:7
- f) 208:8
  - g) 873:9

#### 6.4.3

- a) Bruk kalkulator til å rekne ut 136:8 og 13,6:8
- b) Bruk kalkulator til å rekne ut 203: 7 og 20,3: 7
- c) Sammenlikn para av svar fra oppgave a)-b) og lag ein regel for korleis du kan rekne ut deling med desimaltall.

#### 6.4.4

Rekn ut.

- a) 18,5:5
- b) 38,8:4

## 6.5.1

Primtalsfaktoriser.

- a) 36 b) 81 c) 42 d) 38 e) 98 f) 33
- g) 144 h) 129 i) 198 j) 555 k) 888 l) 930

# Kapittel 7

# Geometri

# 7.1 Omgrep

#### Punkt

Ei bestemt plassering kallast eit  $^1$  punkt. Eit punkt markerer vi ved å teikne ein prikk, som vi gjerne set namn på med ein bokstav. Under har vi teikna punkta A og B.



#### Linje og linjestykke

Ein rett strek som er uendeleg lang (!) kallar vi ei *linje*. At linja er uendeleg lang, gjer at vi aldri kan *teikne* ei linje, vi kan berre *tenke* oss ei linje. Å tenke seg ei linje kan ein gjere ved å lage ein rett strek, og så forestille seg at endane til streken vandrar ut i kvar si retning.



Ein rett strek som går mellom to punkt kallar vi eit *linjestykke*.



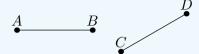
Linjestykket mellom punkta A og B skriv vi som AB.

#### Merk

Eit linjestykke er eit utklipp (eit stykke) av ei linje, derfor har ei linje og eit linjestykke mange felles eigenskapar. Når vi skriv om linjer, vil det bli opp til lesaren å avgjere om det same gjeld for linjestykker, slik sparar vi oss for heile tida å skrive "linjer/linjestykker".

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Sjå også seksjon 1.3.

# Linjestykke eller lengde?



Linjestykka AB og CD har lik lengde, men dei er ikkje det same linjestykket. Likevel kjem vi til å skrive AB=CD. Vi bruker altså dei same namna på linjestykker og lengdene deira (det same gjeld for vinklar og vinkelverdiar, sjå side 110-112). Dette gjer vi av følgande grunnar:

- Kva tid vi snakkar om eit linjestykke og kva tid vi snakkar om ei lengde vil komme tydeleg fram av samanhengen omgrepet blir brukt i.
- Å heile tida måtte ha skrive "lengda til AB" o.l. ville gitt mindre leservenlege setningar.

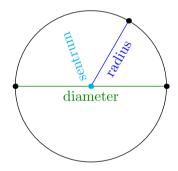
#### Avstand

Det er uendeleg med vegar ein kan gå fra eitt punkt til eit anna, og nokre vegar vil vere lengre enn andre. Når vi snakkar om avstand i geometri, meiner vi helst den kortaste avstanden. For geometriar vi skal ha om i denne boka, vil den kortaste avstanden mellom to punkt alltid vere lengda til linjestykket (blått i figuren under) som går mellom punkta.



#### Sirkel; sentrum, radius og diameter

Om vi lagar ein lukka boge der alle punkta på bogen har same avstand til eit punkt, har vi ein *sirkel*. Punktet som alle punkta på bogen har lik avstand til er *sentrum* i sirkelen. Eit linjestykke mellom sentrum og eit punkt på bogen kallar vi ein *radius*. Eit linjestykke mellom to punkt på bogen, og som går via sentrum, kallar vi ein *diameter*<sup>1</sup>.



#### Sektor

Ein bit som består av ein sirkelboge og to tilhøyrande radier kallast ein *sektor*. Bildet under viser tre forskjellige sektorar.



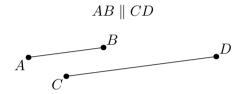
 $<sup>^1{\</sup>rm Som}$ vi har vore inne på kan radius og diameterlike gjerne bli brukt om lengda til linjestykka.

#### Parallelle linjer

Når linjer går i same retning, er dei *parallelle*. I figuren under visast to par med parallelle linjer.

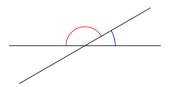


Vi bruker symbolet | for å vise til at to linjer er parallelle.



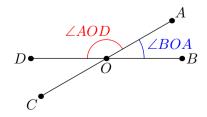
#### Vinklar

To linjer som ikkje er parallelle, vil før eller sidan krysse kvarandre. Gapet to linjer dannar seg imellom kallast ein *vinkel*. Vinklar teiknar vi som små sirkelboger:



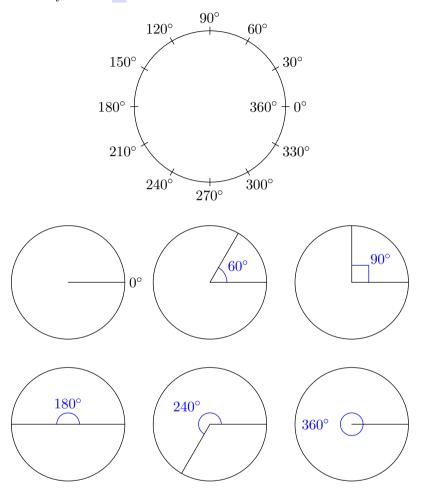
Linjene som dannar ein vinkel kallar vi *vinkelbein*. Punktet der linjene møtast kallar vi *toppunktet* til vinkelen. Ofte bruker vi punktnamn og vinkelsymbolet ∠ for å gjere tydeleg kva vinkel vi meiner. I figuren under er det slik at

- vinkelen  $\angle BOA$  har vinkelbein OB og OA og toppunkt O.
- vinkelen  $\angle AOD$  har vinkelbein OA og OD og toppunkt O.

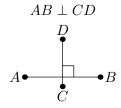


#### Mål av vinklar i grader

Når vi skal måle ein vinkel i grader, tenker vi oss at ein sirkelboge er delt inn i 360 like lange bitar. Ein slik bit kallar vi ein grad, som vi skriv med symbolet  $^{\circ}$ .

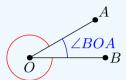


Legg merke til at ein 90° vinkel markerast med symbolet  $\square$ . Ein vinkel som måler 90° kallast ein rett vinkel. Linjer/linjestykker som dannar rette vinklar seier vi står vinkelrett på kvarandre. Dette indikerer vi med symbolet  $\bot$ .

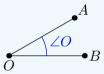


# Kva vinkel?

Når to linjestykker møtast i eit felles punkt, dannar dei strengt tatt to vinklar; den eine større eller lik 180°, den andre mindre eller lik 180°. I dei aller fleste samanhengar er det den minste vinkelen vi ønsker å studere, og derfor er det vanleg å definere  $\angle AOB$  som den minste vinkelen danna av linjestykka OA og OB.



Så lenge det berre er to linjestykker/linjer til stades, er det også vanleg å bruke berre éin bokstav for å vise til vinkelen:



# 7.1 Toppvinklar

To motståande vinklar med felles toppunkt kallast toppvinklar. Toppvinklar er like store.



# 7.1 Toppvinklar (forklaring)



Vi har at

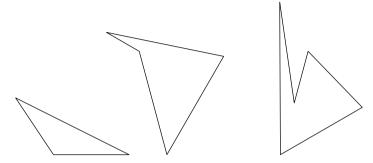
$$\angle BOC + \angle DOB = 180^{\circ}$$

$$\angle AOD + \angle DOB = 180^{\circ}$$

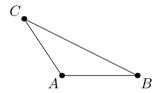
Dette må bety at  $\angle BOC = \angle AOD$ . Tilsvarande er  $\angle COA = \angle DOB$ .

#### Kantar og hjørner

Når linjestykker dannar ei lukka form, har vi ein mangekant. Under ser du (fra venstre mot høgre) ein trekant, ein firkant og ein femkant.

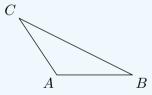


Linjestykka ein mangekant består av kallast kantar eller sider. Punkta der kantane møtast kallar vi hjørner. Trekanten under har altså hjørna A, B og C og sidene (kantane) AB, BC og AC.



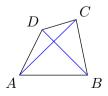
#### Merk

Ofte kjem vi til å skrive berre ein bokstav for å markere eit hjørne i ein mangekant.



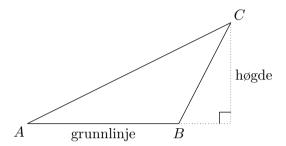
# Diagonalar

Eit linjestykke som går mellom to hjørner som ikkje høyrer til same side av ein mangekant kallast ein diagonal. I figuren under ser vi diagonalane AC og BD.

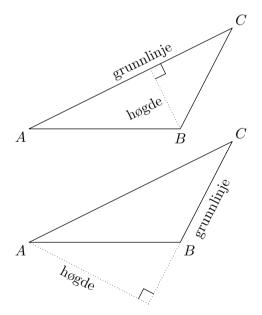


#### Høgde og grunnlinje

Når vi i seksjon 7.4 skal finne areal, vil omgrepa grunnlinje og høgde vere viktige. For å finne ei høgde i ein trekant, tar vi utgangspunkt i ei av sidene. Sida vi velg kallar vi grunnlinja. La oss starte med AB i figuren under som grunnlinje. Da er høgda linjestykket som går fra AB (eventuelt, som her, forlengelsen av AB) til C, og som står vinkelrett på AB.



Da det er tre sider vi kan velge som grunnlinje, har ein trekant tre høgder.

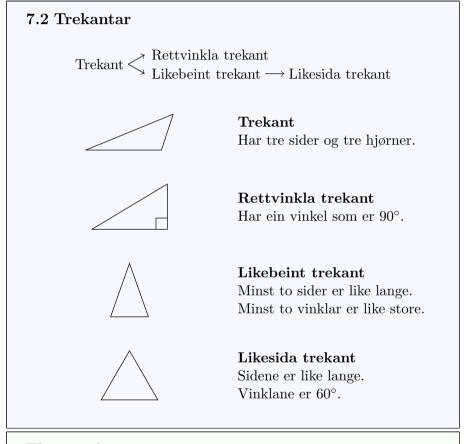


#### Merk

Høgde og grunnlinje kan også på liknande vis bli brukt i samband med andre mangekantar.

# 7.2 Eigenskapar for trekantar og firkantar

I tillegg til å ha eit bestemt antal sider og hjørner, kan mangekantar også ha andre eigenskaper, som for eksempel sider eller vinklar av lik størrelse, eller sider som er parallelle. Vi har eigne namn på mangekantar med spesielle eigenskaper, og desse kan vi sette opp i ei oversikt der nokre "arvar" eigenskaper fra andre.



# Eksempel

Da ein likesida trekant har tre sider som er like lange og tre vinklar som er 60°, er den også ein likebeint trekant.

# Språkboksen

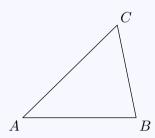
Den lengste sida i ein rettvinkla trekant blir gjerne kalla *hypotenus*. Dei kortaste sidene blir gjerne kalla *katetar*.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>I regel 7.2 og regel 7.4 er dette indikert med piler.

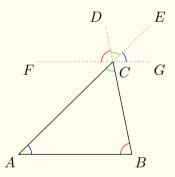
# 7.3 Summen av vinklane i ein trekant

I ein trekant er summen av vinkelverdiane 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$$



# 7.3 Summen av vinklane i ein trekant (forklaring)

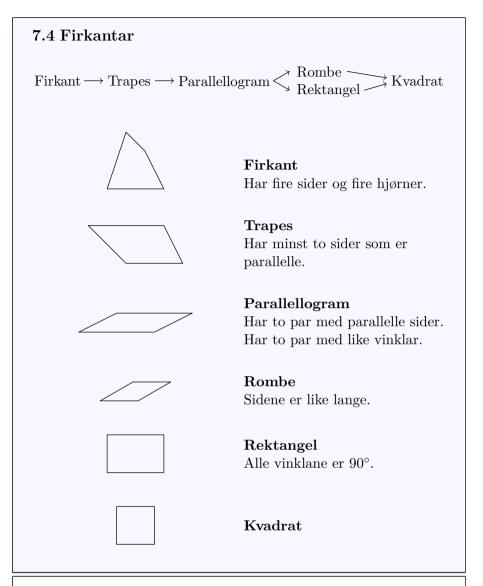


Vi teiknar eit linjestykke FG som går gjennom C og som er parallell med AB. Vidare sett vi punktet E og D på forlengelsen av høvesvis AC og BC. Da er  $\angle A = \angle GCE$  og  $\angle B = \angle DCF$ .  $\angle ACB = \angle ECD$  fordi dei er toppvinklar. Vi har at

$$\angle DCF + \angle ECD = \angle GCE = 180^{\circ}$$

Altså er

$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^{\circ}$$



# Eksempel

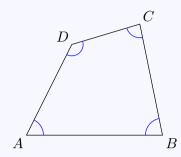
Kvadratet er både ei rombe og eit rektangel, og "arvar" derfor eigenskapane til desse. Dette betyr at i eit kvadratet er

- ullet alle sidene like lange
- alle vinklane 90°.

# 7.5 Summen av vinklane i ein firkant

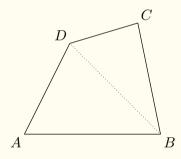
I ein firkant er summen av vinkelverdiane 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^{\circ}$$



# 7.5 Summen av vinklane i ein firkant (forklaring)

Den samla vinkelsummen i  $\triangle ABD$  og  $\triangle BCD$  utgjer vinkelsummen i  $\Box ABCD$ . Av regel 7.3 veit vi at vinkelsummen i alle trekantar er 180°, altså er vinkelsummen i  $\Box ABCD$  lik  $2\cdot 180^\circ=360^\circ$ .

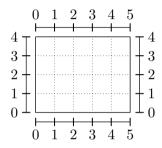


# 7.3 Omkrins

Når vi måler kor langt det er rundt ei lukka form, finn vi *omkrinsen* til figuren. La oss starte med å finne omkrinsen til dette rektangelet:



Rektangelet har to sider med lengde 4 og to sider med lengde 5:



Dette betyr at

Omkrinsen til rektangelet = 
$$4 + 4 + 5 + 5$$
  
=  $18$ 

#### 7.6 Omkrins

Omkrinsen er lengda rundt ein lukka figur.

# Eksempel 6 3 1 5 5 4 (a) (b)

I figur (a) er omkrinsen 5+2+4=11.

I figur (b) er omkrinsen 4+5+3+1+6+5=24.

# 7.4 Areal

Overalt rundt oss kan vi sjå *overflater*, for eksempel på eit golv eller eit ark. Når vi ønsker å seie noko om kor store overflater er, må vi finne *arealet* deira. Idéen bak omgrepet areal er denne:

Vi tenker oss eit kvadrat med sidelengder 1. Dette kallar vi einarkvadradet.

Så ser vi på overflata vi ønsker å finne arealet til, og spør:

"Kor mange eninarkvadrat er det plass til på denne overflata?"

#### Arealet til eit rektangel

La oss finne arealet til eit rektangel som har grunnlinje 3 og høgde 2.



Vi kan da telle oss fram til at rektangelet har plass til 6 einarkvadrat:

Arealet til rektangelet = 6

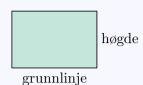


Ser vi tilbake til seksjon 2.3, legg vi merke til at

Arealet til rektangelet = 
$$3 \cdot 2$$
  
=  $6$ 

# 7.7 Arealet til eit rektangel

 $Areal = grunnlinje \cdot høgde$ 



# Breidde og lengde

Ofte blir orda breidde og lengde brukt om grunnlinja og høgda i eit rektangel.

# Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet<sup>1</sup>.

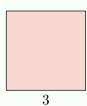


Svar

Arealet til rektangelet =  $4 \cdot 2 = 8$ 

# Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar

Arealet til kvadratet =  $3 \cdot 3 = 9$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Merk: Lengdene vi bruker som eksempel i ein figur vil ikkje naudsynleg samsvare med lengdene i ein anna figur. Ei sidelengde lik 1 i ein figur kan altså vere kortare enn ei sidelengde lik 1 i ein anna figur.

#### Arealet til ein trekant

For trekantar er det tre forskjellige tilfelle vi må sjå på:

1) Tilfellet der grunnlinja og høgda har eit felles endepunkt

La oss finne arealet til ein rettvinkla trekant med grunnlinje 5 og høgde 3.



Vi kan no lage eit rektangel ved å ta ein kopi av trekanten vår, og så legge langsidene til dei to trekantane saman:



Av regel 7.7 veit vi at arealet til rektangelet er  $5 \cdot 3$ . Arealet til éin av trekantane må utgjere halvparten av arealet til rektangelet, altså er

Arealet til den blå trekanten = 
$$\frac{5 \cdot 3}{2}$$

For den blå trekanten er

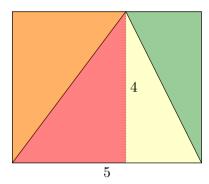
$$\frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

2) Tilfellet der høgda ligg inni trekanten, men ikkje har felles endepunkt med grunnlinja

Trekanten under har grunnlinje 5 og høgde 4.



Med denne trekanten (og høgda) som utgangspunkt, dannar vi denne figuren:



Vi legg no merke til at

- arealet til den raude trekanten utgjer halve arealet til rektangelet som består av den raude og den gule trekanten.
- arealet til den gule trekanten utgjer halve arealet til rektangelet som består av den gule og den grøne trekanten.

Summen av areala til den gule og den raude trekanten utgjer altså halvparten av arealet til rektangelet som består av alle dei fire farga trekantane. Arealet til dette rektangelet er  $5\cdot 4$ , og da vår opprinnelige trekant (den blå) består av den raude og den oransje trekanten, har vi at

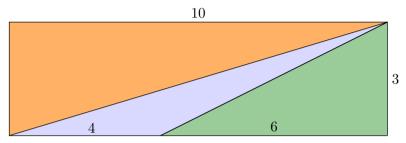
Arealet til den blå trekanten = 
$$\frac{5\cdot 4}{2}$$
 =  $\frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$ 

#### 3) Tilfellet der høgda ligg utanfor trekanten

Trekanten under har grunnlinje 4 og høgde 3.



Med denne trekanten som utgangspunkt, dannar vi eit rektangel:



Vi gir no areala følgande namn:

Arealet til rektangelet = R

Arealet til den blå trekanten = B

Arealet til den oransje trekanten = O

Arealet til den grøne trekanten = G

Da har vi at (både den oransje og den grøne trekanten er rettvinkla)

$$R = 3 \cdot 10 = 30$$

$$O = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

$$G = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Vidare er

$$B = R - O - G$$
$$= 30 - 15 - 9$$
$$= 6$$

Legg no merke til at vi kan skrive

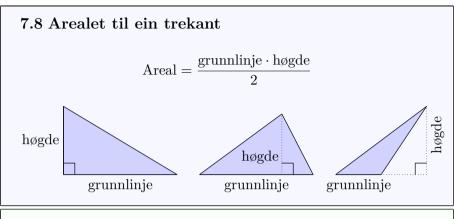
$$6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

I den blå trekanten gjenkjenner vi dette som

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

# $Alle\ tilfella\ oppsummert$

Ein av dei tre tilfella vi har studert vil alltid gjelde for ei valgt grunnlinje i ein trekant, og alle tilfella resulterte i det same uttrykket.



# Eksempel 1

Finn arealet til trekanten.



Svar

Arealet til trekanten = 
$$\frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$=6$$

# Eksempel 2

Finn arealet til trekanten.



Svar

Arealet til trekanten = 
$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

# Eksempel 3

Finn arealet til trekanten.

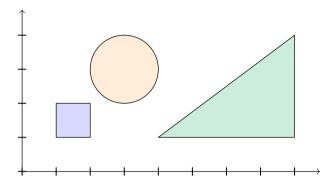


Svar

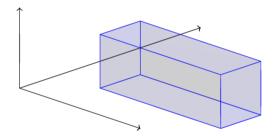
Arealet til trekanten = 
$$\frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

# 7.5 Tredimensjonal geometri

Så langt har vi sett på todimensjonale figurar som trekantar, firkantar, sirklar o.l. Alle todimensjonale figurar kan teiknast inn i et koordinatsystem med to akser.



For å teikne tredimensjonale figurar trengs derimot tre aksar:



Mens eit rektangel seiast å ha ei breidde og ei høgde, kan vi seie at boksen over har ei bredde, ei høgde og ei lengde (dybde).

Området som "ligg utanpå" ein tredimensjonal figur kallar vi *overflata*. Overflata til boksen over består av 6 rektangel. Mangekantar som er delar av ei overflate kallast *sideflater*.

# 7.9 Tredimensjonale figurer



#### Firkanta prisme

Har to like og fire like rektangel som sideflater. Alle sideflatene som er i kontakt, står vinkelrette på kvarandre.



#### Kube

Firkanta prisme med kvadrat som sideflater.



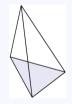
#### Trekanta prisme

To av sideflatene er like trekanter som er parallelle. Har tre sideflater som er trekantar.



#### Firkanta pyramide

Har ett rektangel og fire trekanter som sideflater.



#### Trekanta pyramide

Har fire trekanter som sideflater.



#### **Kjegle**

Ein del av overflata er ein sirkel, den resterende delen er ein samanbretta sektor.



#### Kule

Alle punkt på overflata har lik avstand til sentrum.

# Tips

Det er ikkje så lett å se for seg kva ein samanbretta sektor er, men prøv dette:

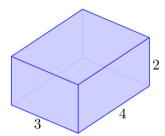
Teikn ein sektor på eit ark. Klipp ut sektoren, og føy saman dei to kantene på sektoren. Da har du ei kjegle utan bunn.

# **7.6** Volum

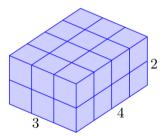
Når vi ønsker å seie noko om kor mykje det er plass til inni ein gjenstand, snakkar vi om *volumet* til den. Som eit mål på volum tenker vi oss ei kube med sidelengde 1.



Ei slik kube kan vi kalle 'einarkuba'. Sei vi har ei firkanta prisme med breidde 3, lengde 4 og høgde 2.



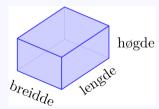
I denne er det plass til akkurat 24 einarkuber.



Dette kunne vi ha rekna slik:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

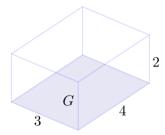
# 7.10 Volumet til ei firkanta prisme I



 $volum = breidde \cdot lengde \cdot høgde$ 

#### Grunnflate

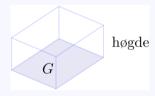
For å rekne ut volumet til dei mest elementære formene vi har, er det lurt å bruke omgrepet grunnflate. Slik som for ei grunnlinje<sup>1</sup>, er det vårt valg av grunnflate som avgjer kva som er høgda. For prisma fra førre side er det naturleg å velge den flata som ligg horisontalt til å vere grunnflata. For å indikere dette skriv ein ofte bokstaven G:



Grunnflata har arealet  $3 \cdot 4 = 12$ , mens høgda er 2. Volumet til heile prisma er grunnflata sitt areal gonga med høgda:

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 2$$
$$= G \cdot 2$$
$$= 24$$

# 7.11 Volumet til ei firkanta prisme II



 $\text{volum} = G \cdot \text{høgde}$ 

# Grunnflata eller grunnflatearealet?

I teksten over har vi først kalla sjølve grunnflata for G, og så brukt G for grunnflatearealet. I denne boka er omgrepet grunnflate så sterkt knytt til grunnflatearealet at vi ikkje skiller mellom desse to.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Siå side 115.

# Del II Algebra og geometri

# Kapittel 8

# Algebra

# 8.1 Introduksjon

Algebra er kort og godt matematikk der bokstavar representerer tal. Dette gjer at vi lettare kan jobbe med generelle tilfelle. For eksempel er  $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$  og  $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$ , men desse er berre to av dei uendeleg mange eksempla på at multiplikasjon er kommutativ! Ei av hensiktene med algebra er at vi ønsker å gi eitt eksempel som forklarer alle tilfelle, og sidan sifra våre (0-9) er uløseleg knytta til bestemde tal, bruker vi bokstavar for å nå dette målet.

Verdien til tala som er representert ved bokstavar vil ofte variere ut ifrå ein samanheng, og da kallar vi desse bokstavtala for *variablar*. Viss bokstavtala derimot har ein bestemd verdi, kallar vi dei for *konstantar*.

I  $Del\ I$  av boka har vi sett på rekning med konkrete tal, likevel er dei fleste reglane vi har utleda generelle; dei gjeld for alle tal. På side 135-138 har vi gjengitt mange av desse reglane på ei meir generell form. Ein fin introduksjon til algebra er å samanlikne reglane du finn her med slik du finn dei<sup>1</sup> i  $Del\ I$ .

# 8.1 Addisjon er kommutativ (2.1)

$$a+b=b+a$$

# Eksempel

$$7 + 5 = 5 + 7$$

# 8.2 Multiplikasjon er kommutativ (2.2)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Eksempel 1

$$9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$$

Eksempel 2

$$8 \cdot a = a \cdot 8$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Reglane sine nummer i *Del I* står i parentes.

# Gonging med bokstavuttrykk

Når ein gongar saman bokstavar, er det vanleg å utelate gongeteiknet. Og om ein gongar saman ein bokstav og eit konkret tal, skriv ein det konkrete talet først. Dette betyr for eksempel at

$$a \cdot b = ab$$

og at

$$a \cdot 8 = 8a$$

I tillegg skriv vi også

$$1 \cdot a = a$$

Det er også vanleg å utelate gongeteikn der parentesuttrykk er ein faktor:

$$3 \cdot (a+b) = 3(a+b)$$

# 8.3 Brøk som omskriving av delestykke (4.1)

$$a:b=\frac{a}{b}$$

# Eksempel

$$a:2=\frac{a}{2}$$

# 8.4 Brøk gonga med brøk (4.8)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

# Eksempel 1

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{13}{21} = \frac{2 \cdot 13}{11 \cdot 21} = \frac{26}{231}$$

# Eksempel 2

$$\frac{3}{b} \cdot \frac{a}{7} = \frac{3a}{7b}$$

8.5 Deling med brøk (4.10)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Eksempel 1

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Eksempel 2

$$\frac{a}{13} : \frac{b}{3} = \frac{a}{13} \cdot \frac{3}{b}$$
$$= \frac{3a}{13b}$$

8.6 Gonging med parentes (distributiv lov) (3.5)

$$(a+b)c = ac + bc$$

Eksempel 1

$$(2+a)b = 2b + ab$$

Eksempel 2

$$a(5b - 3) = 5ab - 3a$$

8.7 Gonging med negative tal I (5.6)

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Eksempel 1

$$3 \cdot (-4) = -(3 \cdot 4)$$
$$= -12$$

# Eksempel 2

$$(-a) \cdot 7 = -(a \cdot 7)$$
$$= -7a$$

# 8.8 Gonging med negative tal II (5.7)

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

#### Eksempel 1

$$(-2) \cdot (-8) = 2 \cdot 8$$
$$= 16$$

#### Eksempel 2

$$(-a) \cdot (-15) = 15a$$

# Utvidingar av reglane

Noko av styrken til algebra er at vi kan lage oss kompakte reglar som det er lett å utvide også til andre tilfelle. La oss som eit eksempel finne eit anna uttrykk for

$$(a+b+c)d$$

regel 8.6 fortel oss ikkje direkte korleis vi kan rekne mellom parentesuttrykket og d, men det er ingenting som hindrar oss i å omdøpe a + b til k:

$$a+b=k$$

Da er

$$(a+b+c)d = (k+c)d$$

Av regel 8.6 har vi no at

$$(k+c)d = kd + cd$$

Om vi sett inn att uttrykket for k, får vi

$$kd + cd = (a+b)d + cd$$

Ved å utnytte regel 8.6 enda ein gong kan vi skrive

$$(a+b)d + cd = ad + bc + cd$$

Altså er

$$(a+b+c)d = ad + bc + cd$$

Obs! Dette eksempelet er ikkje meint for å vise korleis ein skal gå fram når ein har uttrykk som ikkje direkte er omfatta av Regel 8.1 - 8.8, men for å vise kvifor det alltid er nok å skrive reglar med færrast moglege ledd, faktorar og liknande. Oftast vil ein bruke utvidingar av reglane utan eingong å tenke over det, og i alle fall langt ifrå så pertentleg som det vi gjorde her.

#### 8.2 Potensar

$$\operatorname{grunntal} \longrightarrow 2^3 \leftarrow \operatorname{eksponent}$$

Ein potens består av eit grunntal og ein eksponent. For eksempel er  $2^3$  ein potens med grunntal 2 og eksponent 3. Ein positiv, heiltals eksponent seier kor mange eksemplar av grunntalet som skal gongast saman, altså er

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

#### 8.9 Potenstall

 $a^n$  er eit potenstal med grunntal a og eksponent n.

Viss n er eit naturleg tal, vil  $a^n$  svare til n eksemplar av a multiplisert med kvarandre.

Merk:  $a^1 = a$ 

# Eksempel 1

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$= 125$$

# Eksempel 2

$$c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c$$

# Eksempel 3

$$(-7)^2 = (-7) \cdot (-7)$$
  
= 49

# Språkboksen

Vanlege måtar å sei<br/>e $2^3$  på er

- "2 i tredje"
- "2 opphøgd i 3"

I programmeringsspråk brukast gjerne symbolet ^ eller symbola \*\* mellom grunntall og eksponent.

#### Merk

Dei komande sidene vil innehalde reglar for potensar med tilhøyrande forklaringar. Sjølv om det er ønskeleg at dei har ei så generell form som mogleg, har vi i forklaringane valgt å bruke eksempel der eksponentane ikkje er variablar. Å bruke variablar som eksponentar ville gitt mykje mindre leservenlege uttrykk, og vi vil påstå at dei generelle tilfella kjem godt til synes også ved å studere konkrete tilfelle.

# 8.10 Gonging med potensar

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{8.1}$$

# Eksempel 1

$$3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2}$$
$$= 3^7$$

# Eksempel 2

$$b^4 \cdot b^{11} = b^{3+11}$$
$$= b^{14}$$

# Eksempel 3

$$a^5 \cdot a^{-7} = a^{5+(-7)}$$
  
=  $a^{5-7}$   
=  $a^{-2}$ 

(Sjå regel 8.13 for korleis potens med negativ eksponent kan tolkast.)

## 8.10 Gonging med potensar (forklaring)

La oss sjå på tilfellet

$$a^2 \cdot a^3$$

Vi har at

$$a^2 = 2 \cdot 2$$

$$a^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Med andre ord kan vi skrive

$$a^{2} \cdot a^{3} = \underbrace{a^{2} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^{3} \cdot a \cdot a \cdot a}$$
$$= a^{5}$$

## 8.11 Divisjon med potensar

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

## Eksempel 1

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

## Eksempel 2

$$\frac{2^4 \cdot a^7}{a^6 \cdot 2^2} = 2^{4-2} \cdot a^{7-6}$$
$$= 2^2 a$$
$$= 4a$$

## 8.11 Divisjon med potensar (forklaring)

La oss undersøke brøken

$$\frac{a^5}{a^2}$$

Vi skriv ut potensane i tellar og nemnar:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a}$$
$$= \frac{\alpha \cdot \alpha \cdot a \cdot a \cdot a}{\alpha \cdot \alpha}$$
$$= a \cdot a \cdot a$$
$$= a^3$$

Dette kunne vi ha skrive som

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2}$$
$$= a^3$$

## 8.12 Spesialtilfellet $a^0$

$$a^0 = 1$$

## Eksempel 1

$$1000^0 = 1$$

#### Eksempel 2

$$(-b)^0 = 1$$

## 8.12 Spesialtilfellet $a^0$ (forklaring)

Eit tal delt på seg sjølv er alltid lik 1, derfor er

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Av dette, og regel 8.11, har vi at

$$1 = \frac{a^n}{a^n}$$

$$= a^{n-n}$$

$$= a^0$$

#### 8.13 Potens med negativ eksponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

#### Eksempel 1

$$a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

## Eksempel 2

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

## 8.13 Potens med negativ eksponent (forklaring)

Av regel 8.12 har vi at  $a^0 = 1$ . Altså er

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}$$

Av regel 8.11 er

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n}$$
$$= a^{-n}$$

#### 8.14 Brøk som grunntal

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \tag{8.2}$$

## Eksempel 1

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

## Eksempel 2

$$\left(\frac{a}{7}\right)^3 = \frac{a^3}{7^3} = \frac{a^3}{343}$$

## 8.14 Brøk som grunntal (forklaring)

La oss studere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Vi har at

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$
$$= \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b}$$
$$= \frac{a^3}{b^3}$$

## 8.15 Faktorar som grunntal

$$(ab)^m = a^m b^m (8.3)$$

## Eksempel 1

$$(3a)^5 = 3^5 a^5$$
  
=  $243a^5$ 

## Eksempel 2

$$(ab)^4 = a^4b^4$$

## 8.15 Faktorar som grunntal (forklaring)

La oss bruke  $(a \cdot b)^3$  som eksempel. Vi har at

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$$
$$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$$
$$= a^3 b^3$$

## 8.16 Potens som grunntal

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{8.4}$$

### Eksempel 1

$$\left(c^4\right)^5 = c^{4\cdot 5}$$
$$= c^{20}$$

## Eksempel 2

$$\left(3^{\frac{5}{4}}\right)^8 = 3^{\frac{5}{4} \cdot 8}$$
$$= 3^{10}$$

## 8.16 Potens som grunntal (forklaring)

La oss bruke  $\left(a^3\right)^4$  som eksempel. Vi har at

$$\left(a^3\right)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$$

Av regel 8.10 er

$$a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3}$$
  
=  $a^{3\cdot 4}$   
=  $a^{12}$ 

#### 8.17 *n*-rot

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Symbolet  $\sqrt{\phantom{a}}$  kallast eit rotteikn. For eksponenten  $\frac{1}{2}$  er det vanleg å utelate 2 i rotteiknet:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

#### Eksempel

Av regel 8.16 har vi at

$$\left(a^{b}\right)^{\frac{1}{b}} = a^{b \cdot \frac{1}{b}}$$
$$= a$$

For eksempel er

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$
, sidan  $3^2 = 9$ 

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$$
, sidan  $5^3 = 125$ 

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$
, sidan  $2^4 = 16$ 

## Språkboksen

 $\sqrt{9}$ kallast "kvadratrota til 9"

 $\sqrt[5]{9}$  kallast "femterota til 9".

## 8.3 Irrasjonale tal

#### 8.18 Irrasjonale tal

Eit tal som ikkje er eit rasjonalt tal, er eit irrasjonalt tal<sup>1</sup>.

Verdien til eit irrasjonalt tal har uendeleg mange desimalar med eit ikkje-repeterande mønster.

#### Eksempel 1

 $\sqrt{2}$  er eit irrasjonalt tal.

 $\sqrt{2} = 1.414213562373...$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Strengt tatt er irrasjonale tal alle *reelle* tal som ikkje er rasjonale tal. Men for å forklare kva *reelle* tal er, må vi forklare kva *imaginære* tal er, og det har vi valgt å ikkje gjere i denne boka.

## Kommentar (for den spesielt interesserte)

Matematikk er såkalla *aksiomatisk* oppbygd. Dette betyr at vi erklærer nokre<sup>1</sup> påstandar for å vere sanne, og desse kallar vi for *aksiom* eller *postulat*. I rekning har ein om lag 12 aksiom<sup>2</sup>, men i denne boka har vi holdt oss til å nemne desse 6:

#### Aksiom

For tala a, b og c har vi at

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
 (A1)

$$a + b = b + a \tag{A2}$$

$$a(bc) = (ab)c \tag{A3}$$

$$ab = ba$$
 (A4)

$$a(b+c) = ab + ac (A5)$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad (a \neq 0) \qquad (A6)$$

- (A1) Assosiativ lov ved addisjon
- (A2) Kommutativ lov ved addisjon
- (A3) Assosiativ lov ved multiplikasjon
- (A4) Kommutativ lov ved multiplikasjon
- (A5) Distributiv lov
- (A6) Eksistens av multiplikativ identitet

Aksioma legg sjølve fundamentet i eit matematisk system. Ved hjelp av dei finn vi fleire og meir komplekse sanningar som vi kallar *teorem*. I denne boka har vi valgt å kalle både aksiom, definisjonar og teorem for *reglar*. Dette fordi aksiom, definisjonar og teorem alle i praksis gir føringar (reglar) for handlingsrommet vi har innanfor det matematiske systemet vi opererer i.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Helst så få som mogleg.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Talet avheng litt av korleis ein formulerer påstandane.

I  $Del\ I$  har vi forsøkt å presentere motivasjonen bak aksioma, for dei er sjølvsagt ikkje tilfeldig utvalde. Tankerekka som leder oss fram til dei nemnde aksioma kan oppsummerast slik:

- 1. Vi definerer positive tal som representasjonar av enten ei mengde eller ei plassering på ei tallinje.
- 2. Vi definerer kva addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon inneber for positive heiltal (og 0).
- 3. Ut ifrå punkta over tilseier all fornuft at (A1)-(A6) må gjelde for alle positive heiltal.
- 4. Vi definerer også brøk som representasjonar av ei mengde eller som ei plassering på ei tallinje. Kva dei fire rekneartane inneber for brøkar bygger vi på det som gjeld for positive heiltal.
- 5. Ut ifrå punkta over finn vi at (A1)-(A6) gjeld for alle positive, rasjonale tal.
- 6. Vi innfører negative heiltal, og utvider tolkinga av addisjon og subtraksjon. Dette gir så ei tolking av multiplikasjon og divisjon med negative heiltal.
- 7. (A1)-(A6) gjeld også etter innføringa av negative heiltal. Å vise at dei også gjeld for negative, rasjonale tal er da ein rein formalitet.
- 8. Vi kan aldri skrive verdien til eit irrasjonalt tal heilt eksakt, men verdien kan tilnærmast ved eit rasjonalt tal<sup>1</sup>. Alle utrekningar som inneber irrasjonale tal er derfor i *praksis* utrekningar som inneber rasjonale tal, og slik kan vi seie at<sup>2</sup> (A1) (A6) gjeld også for irrasjonale tal.

Ei liknande tankerekke kan nyttast for å argumentere for potensreglane vi fann i seksjon 8.2.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>For eksempel kan ein skrive  $\sqrt{2} = 1.414213562373... \approx \frac{1414213562373}{1000000000000}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Obs! Denne forklaringa er god nok for boka sitt formål, men er ei ekstrem forenkling. Irrasjonale tal er eit komplisert tema som mange bøker for avansert matematikk bruker mange kapittel for å forklare i full dybde.

## Kapittel 9

# Likningar

## 9.1 Introduksjon

Eit kvart matematisk uttrykk som inneheld = er ei *likning*, likevel er ordet likning tradisjonelt knytt til at vi har eit *ukjend* tal.

Sei at vi ønsker å finne eit tal som er slik at viss vi legg til 4, så får vi 7. Dette talet kan vi kalle for kva som helst, men det vanlegaste er å kalle det for x, som altså er det ukjende talet vårt. Likninga vår kan no skrivast slik:

$$x + 4 = 7$$

x-verdien<sup>1</sup> som gjer at det blir same verdi på begge sider av likskapsteiknet kallast  $l \phi y singa$  av likninga. Det er alltids lov til å sjå eller prøve seg fram for å finne verdien til x. Kanskje har du allereie merka at x=3 er løysinga av likninga, sidan

$$3 + 4 = 7$$

Men dei fleste likningar er det vanskelig å sjå eller gjette seg fram til svaret på, og da må vi ty til meir generelle løysingsmetodar. Eigentleg er det berre eitt prinsipp vi følg:

Vi kan alltid utføre ein matematisk operasjon på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi utfører den også på den andre sida.

Dei matematiske operasjonane vi har presentert i denne boka er dei fire rekneartane. Med desse lyd prinsippet slik:

Vi kan alltid legge til, trekke ifrå, gonge eller dele med eit tal på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi gjer det også på den andre sida.

Prinsippet følg av tydinga til —. Når to uttrykk har same verdi, må dei naudsynleg fortsette å ha lik verdi, så lenge vi utfører dei same matematiske operasjonane på dei. I komande seksjon skal vi likevel konkretisere dette prinsippet for kvar enkelt rekneoperasjon, men viss du føler dette allereie gir god meining kan du med fordel hoppe til seksjon 9.3.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>I andre tilfelle kan det vere fleire verdiar.

## 9.2 Løysing ved dei fire rekneartane

I figurane til denne seksjonen skal vi forstå likningar ut ifrå eit vektprinsipp. = vil da indikere<sup>1</sup> at det er like mykje vekt (lik verdi) på venstre side som på høgre side.



#### Addisjon og subtraksjon; tal som skifter side

#### Første eksempel

Vi har allereie funne løysinga på denne likninga, men lat oss løyse den på ein annan måte<sup>2</sup>:

$$x + 4 = 7$$

$$x + 4 = 7$$

Det blir tydeleg kva verdien til x er viss x står aleine på ei av sidene, og x blir isolert på venstresida viss vi tar bort 4. Men skal vi ta bort 4 fra venstresida, må vi ta bort 4 fra høgresida òg, skal begge sidene ha same verdi.

$$x + 4 - 4 = 7 - 4$$

$$x + 4 - 4 = 7 - 4$$

Da 4 - 4 = 0 og 7 - 4 = 3, får vi at

$$x = 3$$

$$x = 3$$

 $<sup>^{1} \</sup>neq$  er symbolet for "er *ikkje* lik".

 $<sup>^2</sup>$ Merk: I tidlegare figurar har det vore samsvar mellom størrelsen på rutene og (tal)verdien til talet dei symboliserer. Dette gjeld ikkje rutene som representerer x.

Dette kunne vi ha skrive noko meir kortfatta slik:

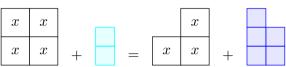
$$x + 4 = 7$$
$$x = 7 - 4$$
$$x = 3$$

Mellom første og andre linje er det vanleg å seie at 4 har skifta side, og derfor også fortegn (fra + til -).

#### Andre eksempel

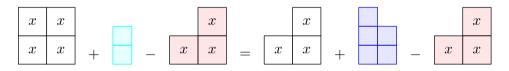
La oss gå videre til å sjå på ei litt vanskelegare likning<sup>1</sup>:

$$4x - 2 = 3x + 5$$



For å skaffe eit uttrykk med x berre på éi side, tar vi vekk 3x på begge sider:

$$4x - 2 - 3x = 3x + 5 - 3x$$



Da får vi at

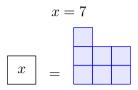
For å isolere x, legg vi til 2 på venstre side. Da må vi også legge til 2 på høgre side:

$$x - 2 + 2 = 5 + 2$$

$$x + + + = + = + = +$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Legg merke til at figuren illustrerer 4x + (-2) (sjå seksjon 5.3) på venstre side. Men 4x + (-2) er det same som 4x - 2 (sjå seksjon 5.2).

Da får vi at



Stega vi har tatt kan oppsummerast slik:

$$4x - 2 = 3x + 5$$
 1. figur  
 $4x - 3x - 2 = 3x - 3x + 5$  2. figur  
 $x - 2 = 5$  3. figur  
 $x - 2 + 2 = 5 + 2$  4. figur  
 $x = 7$  5. figur

Dette kan vi på ein forenkla måte skrive slik:

$$4x - 2 = 3x + 5$$
$$4x - 3x = 5 + 2$$
$$x = 7$$

#### 9.1 Flytting av tal over likskapsteiknet

I ei likning ønsker vi å samle alle x-ledd og alle kjente ledd på kvar si side av likskapsteiknet. Skifter eit ledd side, skifter det forteikn.

## Eksempel 1

Løys likninga

$$3x + 5 = 2x + 9$$

 $\mathbf{Svar}$ 

$$3x - 2x = 9 - 5$$
$$x = 4$$

#### Eksempel 2

Løys likninga

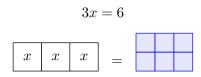
$$-4x - 3 = -5x + 12$$

$$-4x + 5x = 12 + 3$$
$$x = 15$$

## Gonging og deling

#### Deling

Hittil har vi sett på likningar der vi endte opp med éin x på den eine sida av likhetsteiknet. Ofte har vi fleire x-ar, som for eksempel i likninga



Deler vi venstresiden vår i tre like grupper, får vi éin x i kvar gruppe. Deler vi også høgresida inn i tre like grupper, må alle gruppene ha den same verdien

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x \quad x = \frac{1}{3}$$

Altså er

$$x = 2$$

$$x = 2$$

La oss oppsummere utrekninga vår:

$$3x = 6$$
 1. figur

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

Du huskar kanskje at vi gjerne skriv

$$\frac{3x}{3}$$

#### 9.2 Deling på begge sider av ei likning

Vi kan dele begge sider av ei likning med det same talet.

#### Eksempel 1

Løys likninga

$$4x = 20$$

Svar

$$\frac{Ax}{A} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

#### Eksempel 2

Løys likninga

$$2x + 6 = 3x - 2$$

Svar

$$2x - 3x = -2 - 6$$

$$-x = -8$$

$$\cancel{-x} = \frac{-8}{-1}$$

$$x = 8$$

$$(-x = -1x)$$

## Gonging

Det siste tilfellet vi skal sjå på er når likningar inneheld brøkdelar av den ukjende, som for eksempel i likninga

$$\frac{x}{3} = 4$$



Vi kan få éin x på venstresida viss vi legg til to eksemplar av  $\frac{x}{3}$ . Likninga fortel oss at  $\frac{x}{3}$  har same verdi som 4. Dette betyr at for kvar  $\frac{x}{3}$  vi legg til på venstresida, må vi legge til 4 på høgresida, skal sidene ha same verdi.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$

Vi legger no merke til at  $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \cdot 3$  og at  $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$ :

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$



Og da  $\frac{x}{3} \cdot 3 = x$  og  $4 \cdot 3 = 12$ , har vi at

$$x = 12$$



Ei oppsummering av stega våre kan vi skrive slik:

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

Dette kan vi kortare skrive som

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

## 9.3 Gonging på begge sider av ei likning

Vi kan gonge begge sider av ei likning med det same talet.

## Eksempel 1

Løys likninga

$$\frac{x}{5} = 2$$

Svar

$$\frac{x}{5} \cdot 5 = 2 \cdot 5$$
$$x = 10$$

## Eksempel 2

Løys likninga

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

$$\frac{7x}{10} - \frac{x}{10} = 13 + 5$$

$$\frac{6x}{10} = 18$$

$$\frac{6x}{\cancel{10}}\cdot\cancel{10}=18\cdot10$$

$$6x=180$$

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{180}{6}$$

$$x = 30$$

## 9.3 Løysingsmetodane oppsummert

#### 9.4 Løysingsmetodar for likningar

Vi kan alltid

- addere eller subtrahere begge sider av ei likning med det same talet. Dette er ekvivalent til å flytte eit ledd fra den eine sida av likninga til den andre, så lenge vi også skiftar forteikn på leddet.
- gonge eller dele begge sider av ei likning med det same tallet.

## Eksempel 1

Løys likninga

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Svar

$$3x - 2x = 6 + 4$$
$$x = 10$$

## Eksempel 2

Løys likninga

$$9 - 7x = -8x + 3$$

$$9 - 7x = -8x + 3$$
$$8x - 7x = 3 - 9$$
$$x = -6$$

#### Eksempel 3

Løys likninga

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Svar

$$10x - 7x = 20 - 5$$
$$3x = 15$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

#### Eksempel 4

Løys likninga

$$15 - 4x = x + 5$$

Svar

$$15 - 5 = x + 4x$$
$$10 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = \frac{5x}{5}$$
$$2 - x$$

Merk: I dei andre eksempla har vi valgt å samle x-ane på venstre side av likninga, men ein kan likså gjerne samle dei på høgre side. Ved å gjere det her har vi unngått utrekningar med negative tal.

## Eksempel 5

Løys likninga

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

$$\frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} = 20 + 8$$
$$\frac{7x}{9 \cdot 7} = \frac{28}{7}$$
$$\frac{x}{9} \cdot 9 = 4 \cdot 9$$
$$x = 36$$

#### Eksempel 6

Løys likninga

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

#### Svar

Får å unngå brøkar, gongar vi begge sider med fellesnemnaren 12:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)12 = \left(\frac{5}{12}x + 2\right)12\tag{9.1}$$

$$\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \tag{*}$$

$$4x + 2 = 5x + 24 \tag{9.2}$$

$$4x - 5x = 24 - 2 \tag{9.3}$$

$$-x = 22 \tag{9.4}$$

$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{22}{-1} \tag{9.5}$$

$$x = -22 \tag{9.6}$$

#### Tips

Mange liker å lage seg ein regel om at "vi kan gonge eller dele alle ledd med det same talet". I eksempelet over kunne vi da hoppa direkte til andre linje i utrekninga.

## Eksempel 7

Løys likninga

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

#### Svar

Vi gongar begge sider med fellesnemnaren 2x:

$$2x\left(3 - \frac{6}{x}\right) = 2x\left(2 + \frac{5}{2x}\right)$$
$$6x - 12 = 4x + 5$$
$$6x - 4x = 5 + 12$$
$$2x = 17$$
$$x = \frac{17}{2}$$

## 9.4 Potenslikningar

La oss løyse likninga

$$x^2 = 9$$

Dette kallast ei *potenslikning*. Potenslikningar er vanlegvis vanskelege å løyse berre ved hjelp av dei fire rekneartane, så her må vi også nytte oss av potensreglar. Vi opphøg begge sidene av likninga med den omvende brøken<sup>1</sup> til 2:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Av regel 8.16 er

$$x^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$
$$x - 9^{\frac{1}{2}}$$

Sidan  $3^2 = 9$ , er  $9^{\frac{1}{2}} = 3$ . No legg vi merke til dette:

Prinsippet erklært på side 152 seier at vi kan, som vi no gjorde, utføre ein matematisk operasjon på begge sider av likninga. Men, å følge dette prinsippet garanterer ikkje at alle løysingar er funne.

Når det kjem til vår likning, er x=3 ei løysing. For orden si skuld kan vi bekrefte dette med utrekninga

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Men vi har også at

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Altså er -3 også ei løysing av likninga vi starta med!

## 9.5 Potenslikningar

Ei likning som kan bli skriven som

$$x^a = b$$

der a og b er konstantar, er ei potenslikning.

Likninga har a forskjellige løysingar.

 $<sup>^{1}</sup>$ Hugs at  $2 = \frac{2}{1}$ .

#### Eksempel 1

Løys likninga

$$x^2 + 5 = 21$$

Svar

$$x^2 = 21 - 5$$

$$x^2 = 16$$

Sidan  $4 \cdot 4 = 16$  og  $(-4) \cdot (-4) = 16$ , har vi at

$$x = 4$$
  $\vee$   $x = -4$ 

#### Eksempel 2

Løys likninga

$$3x^2 + 1 = 7$$

Svar

$$3x^2 = 7 - 1$$

$$3x^2 = 6$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x^2 = 2$$

Altså er

$$x = \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$
  $\forall$   $x = -\sqrt{2}$ 

#### Merk

Sjølv om likninga

$$x^a = b$$

har a løysingar, er ikkje alle naudsynleg  $reelle^1$ . I denne boka nøyer vi oss med å finne alle rasjonale eller irrasjonale tal som løyser likninga. For eksempel har likninga

$$x^{3} = 8$$

3 løysingar, men vi nøyer oss med å finne at x = 2 er ei løysing.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Som tidlegare nemnd, reelle og imaginære tal er noko vi ikkje går nærare inn på i denne boka

## 9.5 Ulikskapar

#### 9.5.1 Introduksjon

Mens ei likning viser to uttrykk som er like, vil ein *ulikskap* vise to uttrykk som er ulike. For å skrive ulikskapar har vi desse symbola:

"er mindre enn"
"er større enn"
"er mindre enn eller lik"
"er større enn eller lik"

Ein ulikskap mellom to tal er avgjort av verdien og forteiknet til tala:

#### 9.6 Ulikskapar

- Eit positivt tal er større enn eit negativt tal.
- For tal med same forteikn, er det talet med størst absoluttverdi som er størst.
- 0 er større enn eit kvart negativt tal og mindre enn eit kvart positivt tal.

## Eksempel 1

## Eksempel 2

$$-9 < -8$$

## Eksempel 3

$$-7 < 1$$

## Eksempel 4

$$a-3 \ge 1$$

Undersøk om ulikskapen er sann viss

- a) a = 5
- b) a = 4
- c) a = 3

#### Svar

a) Når a=5, har vi at

$$5 - 3 \ge 1$$
$$2 \ge 1$$

Sidan 2 < 1, er ulikskapen sann.

b) Når a = 4, har vi at

$$4-3\geq 1$$
$$1\geq 1$$

Sidan 1 er lik 1, er ulikskapen sann.

c) Når a = 3, har vi at

$$3 - 3 \ge 1$$
$$0 \ge 1$$

Sidan 0 er mindre enn 1, er ulikskapen usann.

#### 9.5.2 Løysing av ulikskapar

Vi kan løyse ulikskapar ved å bruke metodane fra regel 9.4, men med eitt unntak; om vi gongar eller deler med negative tal, skiftar ulikskapen symbol. For å forklare kva som skjer, lat oss bruke den enkle ulikskapen

Om vi gongar begge sider av ulikskapen med -1, får vi -9 på venstre side og -8 på høgre side. Men -9 < -8. Symbolet fra vår opprinnelege ulikskap har altså endra seg frå > til <.

#### 9.7 Løysing av ulikskapar

Ulikskapar kan løysast på same måte som likningar, men med eit unntak: Viss ein gongar eller deler begge sider av ein ulikskap med eit negativt tal, vil > endre seg til <, og omvend.

#### Eksempel 1

Løys ulikskapen

$$5x - 3 \ge 2x + 6$$

Svar

$$5x - 3 \ge 2x + 6$$
$$3x \ge 9$$
$$x \ge 3$$

## Eksempel 2

Løys ulikskapen

$$4x - 8 \le 6x + 12$$

Svar

$$4x - 8 \le 6x + 12$$

$$-2x \le 20$$

$$\cancel{2}x \ge \frac{20}{-2}$$

$$x \ge -10$$

Merk: Her kan ein sjølvsagt unngå å dele med -2 ved å isolere x-ane på høgre side av ulikskapen i staden for venstre.

## Oppgaver for kapittel 9

#### 9.2.1

Løs likningene.

- a) x + 8 = 18 b) x 3 = 2 c) x 8 = 1

- d) x + 12 = 14 e) x 1 = 2 f) x 3 = 1
- g) 21 = x + 11 h) 24 = x + 16 i) 4 = x 6

#### 9.2.2

Løs ligningene.

- a) 16x 20 = 15x + 17 b) 18x 11 = 17x + 18
- c) 17x 15 = 16x + 8 d) 4x 9 = 6 + 3xe) 12x - 6 = 11x + 2f) 2x + 10 = 3x - 1g) 5 + 8x - 9 = 10

- g) 5 + 8x = 9x 18 h) 15 + 2x = 3x 4
- i) 9x + 8 = 10x 2 j) 17x + 9 = 18x 19

#### 9.2.3

Løs ligningene.

- a) 3x = 12 b) 10x = 50 c) 7x = 63 d) 2x = 30

#### 9.2.4

Løs ligningene.

- a)  $\frac{x}{4} = 2$  b)  $\frac{x}{9} = 8$  c)  $\frac{x}{7} = 7$  d)  $\frac{x}{15} = 10$

## 9.2.5

#### 9.2.6

Løs ligningene.

- a) 18x 27 = 9x + 36 b) 7x 27 = 4x + 3

- c) 15x 16 = 7x + 32 d) 13x 42 = 7x + 12
- e) 4 + 9x = 13x 32 f) 7x + 8 = 11x 24

- g) 5x + 4 = 8x 11 h) 7 + 10x = 14x 9

#### 9.2.7

Gitt en rettvinklet og likebeint trekant  $\triangle ABC$ , hvor  $\angle C = 90^{\circ}$ . Vis at

$$\angle A = 90^{\circ} - \angle B$$

**9.2.8** (E22)

Løs likningen

$$3 \cdot 24 \cdot 9 = 4 \cdot 9 \cdot x$$

## Gruble 9.1

a) Vis at

$$0,2626... = \frac{26}{99}$$

Gitt

$$a = b \left( \frac{1}{10^c} + \frac{1}{10^{2c}} + \frac{1}{10^{3c}} + \dots \right)$$

hvor b er et tall med c siffer.

- b) Vis at hvis b=26, er a=0,2626... .
- c) Vis at

$$a = \frac{b}{10^c - 1}$$

## Kapittel 10

# Funksjonar

## 10.1 Introduksjon

Variablar er verdiar som forandrar seg. Ein verdi som forandrar seg i takt med at ein variabel forandrar seg, kallar vi ein funksjon.



I figurane over forandrar antalet ruter seg etter eit bestemt mønster. Matematisk kan vi skildre dette mønsteret slik:

Antal ruter i Figur 
$$1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
  
Antal ruter i Figur  $2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$   
Antal ruter i Figur  $3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$   
Antal ruter i Figur  $4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ 

For ein figur med eit vilkårleg nummer x har vi at

Antal ruter i Figur 
$$x = 2x + 1$$

Antal ruter forandrar seg altså i takt med at x forandrar seg, og da seier vi at

"Antal ruter i  $Figur\ x$ " er ein funksjon av x

2x+1er  $\mathit{funksjonsuttrykket}$ til funksjonen "Antal ruter i Figur x"

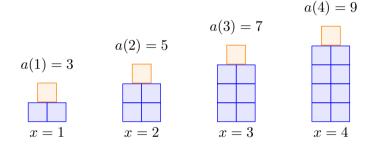
#### Generelle uttrykk

Skulle vi jobba vidare med funskjonen vi akkurat har sett på, ville det blitt tungvint å heile tida måtte skrive "Antal ruter i  $Figur\ x$ ". Det er vanleg å kalle også funksjonar berre for ein bokstav, og i tillegg skrive variabelen funskjonen er avhengig av i parentes. La oss no omdøpe funksjonen "Antal ruter i  $Figur\ x$ " til a(x). Da har vi at

Antal ruter i Figur 
$$x = a(x) = 2x + 1$$

Viss vi skriv a(x), men erstattar x med eit bestemt tal, betyr det at vi skal erstatte x med dette talet i funksjonsuttrykket vårt:

$$a(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
  
 $a(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$   
 $a(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$   
 $a(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ 

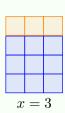


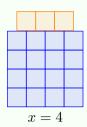
## Eksempel

La antal ruter i mønsteret under vere gitt av funksjonen a(x).









- a) Finn uttrykket for a(x).
- b) Kor mange ruter er det når x = 10?
- c) Kva er verdien til x når a(x) = 628?

#### Svar

- a) Vi legg merke til at
  - Når x = 1, er det  $1 \cdot 1 + 3 = 4$  ruter.
  - Når x = 2, er det  $2 \cdot 2 + 3 = 7$  ruter.
  - Når x = 3, er det  $3 \cdot 3 + 3 = 12$  ruter.
  - Når x = 4, er det  $4 \cdot 4 + 3 = 17$  ruter.

Altså er

$$a(x) = x \cdot x + 3 = x^2 + 3$$

b)

$$a(10) = 10^2 + 3 = 100 + 3 = 103$$

Når x = 10, er det 103 ruter.

c) Vi har likninga

$$x^2 + 3 = 628$$
$$x^2 = 625$$

Altså er

$$x = 15$$
  $\vee$   $x = -15$ 

Sidan vi søker ein positiv verdi for x, er x = 15.

## 10.2 Lineære funksjonar og grafar

Når vi har ein variabel x og ein funksjon f(x), har vi heile tida to verdiar; verdien til x og den tilhøyrande verdien til f(x). Desse para av verdiar kan vi sette inn i eit koordinatsystem<sup>1</sup> for å lage grafen til f(x).

La oss bruke funksjonen

$$f(x) = 2x - 1$$

som eksempel. Vi har at

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Desse para av verdiar kan vi sette opp i ein tabell:

Tabellen over gir punkta

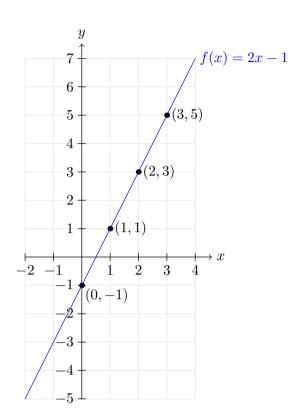
$$(0,-1)$$
  $(1,1)$   $(2,3)$   $(3,5)$ 

Vi plasserer no punkta i eit koordinatsystem (sjå figur på side 176). I samband med funksjonar er det vanleg å kalle horisontalaksen og vertikalaksen for høvesvis x-aksen og y-aksen. Grafen til f(x) er no ein tenkt strek som går gjennom alle dei uendeleg mange punkta vi kan lage av x-verdiar og dei tilhøyrande f(x)-verdiane. Vår funksjon er ein linexr funksjon, noko som betyr at grafen er ei rett linje. Altså kan grafen teiknast ved å teikne linja som går gjennom punkta vi har funne.

Som vi har vore inne på før, kan vi aldri teikne ei heil linje, berre eit utklipp av ho. Dette gjeld som regel også for grafar. I figuren på side 176 har vi teikna grafen til f(x) for x-verdiar mellom -2 og 4. At x er i dette intervallet kan vi skrive som<sup>2</sup>  $-2 \le x \le 4$  eller  $x \in [-2, 4]$ .

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Sjå seksjon 1.3.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Sjå symbolforklaringar på side 4.



#### 10.1 Lineære funksjonar

Ein funksjon på forma

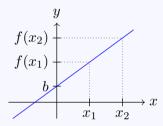
$$f(x) = ax + b$$

der a og b er konstantar, er ein line xr funksjon med stigingstal a og konstantledd b.

Grafen til ein lineær funksjon er ei rett linje som går gjennom punktet (0,b).

For to forskjellige x-verdiar,  $x_1$  og  $x_2$ , er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



## Eksempel 1

Finn stigingstalet og konstantleddet til funksjonane.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = -3 + \frac{7}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}$$

$$j(x) = 4 - \frac{1}{2}x$$

- f(x) har stigingstal 2 og konstantledd 1.
- g(x) har stigingstal -3 og konstantledd  $\frac{7}{2}$ .
- h(x) har stigingstal  $\frac{1}{4}$  og konstantledd  $-\frac{5}{6}$ .
- j(x) har stigingstal  $-\frac{1}{2}$  og konstantledd 4.

Teikn grafen til

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

for  $x \in [-5, 6]$ .

#### Svar

For å teikne grafen til ein linjeær funksjon treng vi berre å finne to punkt som ligg på grafen. Kva to punkt dette er, er det fritt å velge, så for enklast mogleg utrekning startar vi med å finne punktet der x=0:

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$$

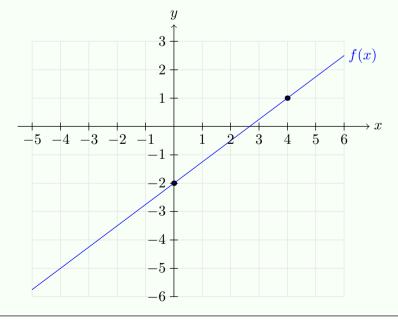
Vidare velg vix = 4, sidan dette også gir oss ei enkel utrekning:

$$f(4) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$$

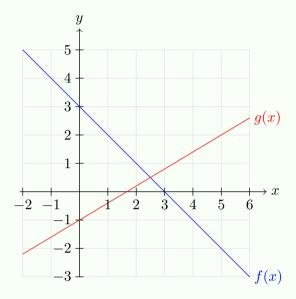
No har vi informasjonen vi treng, og for ordens skuld set vi han inn i ein tabell:

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline f(x) & -2 & 1 \end{array}$$

Vi teiknar punkta og trekk ei linje gjennom dei:



Finn funksjonsuttrykka til f(x) og g(x).



#### Svar

Vi startar med å finne funksjonsuttrykket til f(x). Punktet (0,3) ligg på grafen til f(x) (sjå også figur på neste side). Da veit vi at f(0) = 3, og dette må bety at 3 er konstantleddet til f(x). Vidare ser vi at punktet (1,2) også ligg på grafen til f(x). Stigingstalet til f(x) er da gitt ved brøken

$$\frac{2-3}{1-0} = -1$$

Altså er

$$f(x) = -x + 3$$



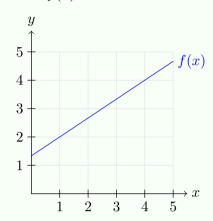
Vi går så over til å finne uttrykket til g(x). Punktet (0,-1) ligg på grafen til g(x). Da veit vi at f(0)=-1, og dette må bety at -1 er konstantleddet til g(x). Vidare ser vi at punktet (5,2) også ligg på grafen til g(x). Stigingstalet til g(x) er da gitt ved brøken

$$\frac{2 - (-1)}{5 - 0} = \frac{3}{5}$$

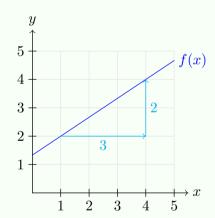
Altså er

$$g(x) = \frac{3}{5}x + 1$$

Finn stigningstalet til f(x).



Svar



Vi legg merke til at punkta (1,2) og (4,4) ligg på grafen til f(x). Altså er stigningstalet til f(x) gitt ved brøken

$$\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$$

# 10.1 Lineære funksjonar (forklaring)

### Uttrykk for a

Gitt ein lineær funksjon

$$f(x) = ax + b$$

For to forskjellige x-verdiar,  $x_1$  og  $x_2$ , har vi at

$$f(x_1) = ax_1 + b (10.1)$$

$$f(x_2) = ax_2 + b (10.2)$$

Vi trekk (10.1) fra (10.2), og får at

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$

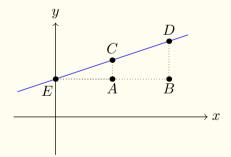
$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$
(10.3)

### Grafen til ein lineær funksjon er ei rett linje

Gitt ein lineær funksjon f(x) = ax + b, og to forskjellige xverdiar  $x_1$  og  $x_2$ . Vi set  $A = (x_1, b)$ ,  $B = (x_2, b)$ ,  $C = (b, f(x_1))$ ,  $D = (0, f(x_2))$  og E = (0, b).



Av (10.3) har vi at

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = a$$

$$\frac{ax_1 + b - b}{x_1} = a$$

$$\frac{ax_1}{x_1} = a$$
(10.4)

Tilsvarande er

$$\frac{ax_2}{x_2} = a \tag{10.5}$$

Vidare har vi at

$$AC = f(x_1) - b = ax_1$$

$$BD = f(x_2) - b = ax_2$$

$$EA = x_1$$

$$EB = x_2$$

Av (10.4) og (10.5) har vi at

$$\frac{ax_1}{x_1} = \frac{ax_2}{x_2}$$

Dette betyr at

$$\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{EB}$$

I tillegg er  $\angle A = \angle B$ , altså oppfyller  $\triangle EAC$  og  $\triangle EBD$  vilkår i<br/>ii fra regel 11.15, og dermed er trekantane formlike. Dette betyr at C og D ligg på linje, og denne linja må vere grafen til f(x).

# Oppgaver for kapittel 10

### 10.1.1

La antall ruter i figuren under være gitt ved f(x).



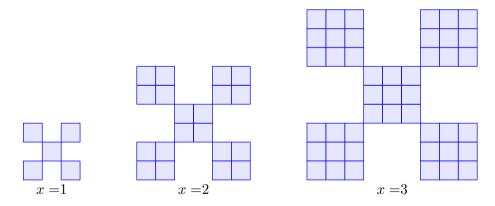




- a) Finn et uttrykk for f(x).
- b) Hvor mange ruter er der når x = 100?
- c) Hva er x når f(x) = 24.

### 10.1.2

La antall ruter i figuren under være gitt ved a(x).



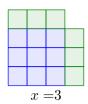
- a) Finn et uttrykk for a(x).
- b) Hvor mange ruter er der når x = 20?
- c) Hva er x når a(x) = 405?

### 10.1.3

La antall ruter i figuren under være gitt ved b(x).



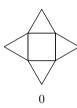


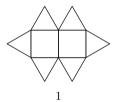


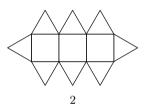
- a) Finn et uttrykk for b(x).
- b) Hvor mange ruter er der når x = 20?
- c) Hva er x når b(x) = 80?

## **10.1.4** (EG22)

Under vises de tre første figurene i et mønster. Figurene er satt sammen av trekanter og kvadrater.







a) Hvor mange trekanter og hvor mange firkanter vil det være i figur nummer 10?

## 10.1.5

La x være et positivt heltall.

- a) Lag en funskjon p(x) som gir verdien til positivt partall  $\operatorname{nr.} x.$
- b) Lag en funksjon o(x) som gir verdien til positivt oddetall  $\operatorname{nr.} x.$

#### 10.2.1

Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonene.

a) 
$$f(x) = 5x + 10$$
 b)  $g(x) = 3x - 12$ 

b) 
$$g(x) = 3x - 12$$

187

c) 
$$h(x) = -\frac{1}{7}x - 9$$
 d)  $i(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ 

d) 
$$i(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$$

### 10.2.2

Tegn grafen til disse funksjonene på intervallet  $x \in [-5, 5]$ :

a) 
$$f(x) = 2x - 1$$
 b)  $g(x) = -3x + 5$ 

b) 
$$q(x) = -3x + 5$$

### 10.3.1

Gitt likningsettet

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

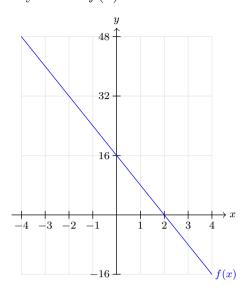
a) Forklar hvorfor løsningen av likningssettet er skjæringspunktet til funksjonene

$$f(x) = x - 5$$

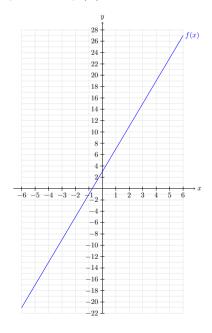
$$g(x) = 9 - x$$

b) Løs liknigssettet.

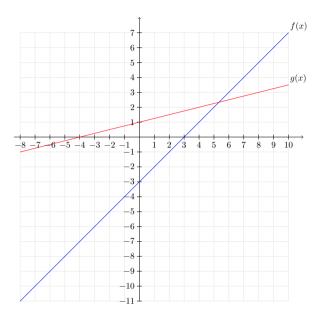
10.3.2 Finn funksjonsuttrykket til f(x)



10.3.3 Finn funksjonsuttrykket til f(x)



10.3.4 Finn funksjonsuttrykkene til f(x) og g(x).



#### Gruble 10.1

Bruk formlene fra oppgave 10.1.5 til å vise at

- a) differensen mellom to partall er et partall.
- b) differensen mellom to oddetall er et partall.
- c) differansen mellom et partall og et oddetall er et oddetall.

#### Gruble 10.2

- a) Gitt at en lineær funksjon f(x) har stigningstall 3, og at punktet (2,1) ligger på grafen til f(x). Finn funksjonsuttrykket til f(x).
- b) Gitt en funksjon f(x) med stigningstall a og punktet  $(x_1, y_1)$ , som ligger på grafen til f(x). Vis at<sup>1</sup>

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1$$

(Denne formelen kalles ettpunktsformelen.)

 $<sup>^{1}\</sup>mathrm{Denne}$  formelen kalles  $\mathit{ettpunktsformelen}.$ 

# Kapittel 11

# Geometri

# 11.1 Formlar for areal og omkrins

Ein formel er ei likning der ein variabel (som oftast) står aleine på éi side av likskapsteiknet. I seksjon 7.4 såg vi på formlar for arealet til rektangel og trekantar, men da brukte vi ord i staden for symbol. Her skal vi gjengi desse to formlane i ei meir algebraisk form, etterfulgt av andre klassiske formlar for areal, omkrins og volum.

# 11.1 Arealet til eit rektangel (7.4)

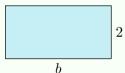
Arealet A til eit rektangel med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



# Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet.



#### Svar

Arealet A til rektangelet er

$$A = b \cdot 2 = 2b$$

# Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



#### Svar

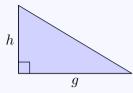
Arealet A til kvadratet er

$$A = a \cdot a = a^2$$

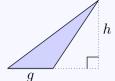
# 11.2 Arealet til ein trekant (7.4)

Arealet A til ein trekant med grunnlinje g og høyde h er

$$A=\frac{gh}{2}$$





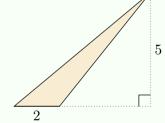


# Eksempel

Kven av trekantane har størst areal?







#### Svar

Vi let  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$  vere areala til høvesvis trekanten til venstre, i midten og til høgre. Da har vi at

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

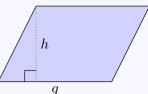
$$A_3 = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Altså er det trekanten til venstre som har størst areal.

# 11.3 Arealet til eit parallellogram

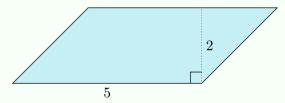
Arealet A til eit parallellogram med grunnlinje g og høgde h er





# Eksempel

Finn arealet til parallellogrammet



#### Svar

Arealet A til parallellogrammet er

$$A = 5 \cdot 2 = 10$$

# 11.3 Arealet til eit parallellogram (forklaring)

Av eit parallellogram kan vi alltid lage oss to trekantar ved å teikne inn ein av diagonalane:



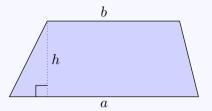
Dei farga trekantane på figuren over har begge grunnlinje g og høgde h. Da veit vi at begge har areal lik  $\frac{gh}{2}$ . Arealet A til parallellogrammet blir dermed

$$A = \frac{gh}{2} + \frac{gh}{2}$$
$$= g \cdot h$$

# 11.4 Arealet til eit trapes

Arealet A til eit trapes med parallelle sider a og b og høgde h er





# Eksempel

Finn arealet til trapeset.



#### Svar

Arealet A til trapeset er

$$A = \frac{3(6+4)}{2}$$
$$= \frac{3 \cdot 10}{2}$$
$$= 15$$

#### Merk

Når ein tek utgangspunkt i ei grunnlinje og ei høgde, er arealformlane for eit parallellogram og eit rektangel identiske. Å anvende regel 11.4 på eit parallellogram vil også resultere i eit uttrykk tilsvarande gh. Dette er fordi eit parallellogram berre er eit spesialtilfelle av eit trapes (og eit rektangel er berre eit spesialtilfelle av eit parallellogram).

# 11.4 Arealet til eit trapes (forklaring)

Også for eit trapes får vi to trekanter viss vi teikner ein av diagonalene:



I figuren over er

Arealet til den blå trekanten = 
$$\frac{ah}{2}$$

Arealet til den grøne trekanten = 
$$\frac{bh}{2}$$

Arealet A til trapeset blir dermed

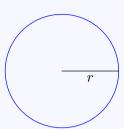
$$A = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}$$

$$=\frac{h(a+b)}{2}$$

# 11.5 Omkrinsen til ein sirkel (og $\pi$ )

Omkrinsen O til ein sirkel med radius r er

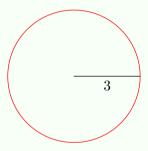
$$O = 2\pi r$$



 $\pi = 3.141592653589793....$ 

# Eksempel 1

Finn omkrinsen til sirkelen.



### Svar

Omkrinsen O er

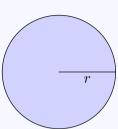
$$O=2\pi\cdot 3$$

$$=6\pi$$

# 11.6 Arealet til ein sirkel

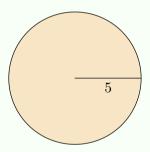
Arealet A til ein sirkel med radius r er





# Eksempel

Finn arealet til sirkelen.



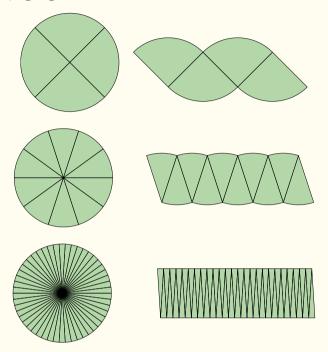
### Svar

Arealet A til sirkelen er

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

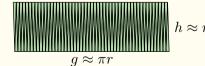
# 11.6 Arealet til ein sirkel (forklaring)

I figuren under har vi delt opp ein sirkel i 4, 10 og 50 (like store) sektorar, og lagt desse bitene etter kvarandre.



I kvart tilfelle må dei små sirkelbogene til saman utgjere heile boga, altså omkrinsen, til sirkelen. Viss sirkelen har radius r, betyr dette at summen av bogene er  $2\pi r$ . Og når vi har like mange sektorar med bogen vendt opp som sektorar med bogen vend ned, må totallengda av bogenene vere  $\pi r$  både oppe og nede.

Men jo fleire sektorar vi deler sirkelen inn i, jo meir liknar sammansettinga av dei på eit rektangel (i figuren under har vi 100 sektorar). Grunnlinja g til dette "rektangelet" vil vere tilnærma lik  $\pi r$ , mens høgda vil vere tilnærma lik r.

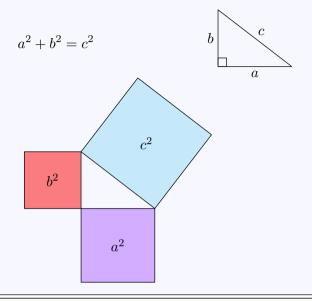


Arealet A til "rektangelet", altså sirkelen, blir da

$$A\approx gh\approx \pi r\cdot r=\pi r^2$$

# 11.7 Pytagoras' setning

I ein rettvinkla trekant er arealet til kvadratet danna av hypotenusen lik summen av areala til kvadrata danna av katetane.



# Eksempel 1

Finn lengda til c.



#### Svar

Vi veit at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

der a og b er lengdene til dei kortaste sidene i trekanten.

Dermed er

$$c^2 = 4^2 + 3^2$$
$$= 16 + 9$$
$$= 25$$

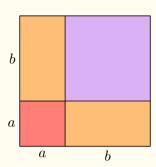
Altså har vi at

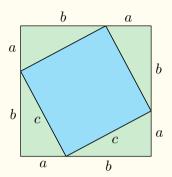
$$c = 5$$
  $\vee$   $c = -5$ 

Da c er ei lengde, er c = 5.

# 11.7 Pytagoras' setning (forklaring)

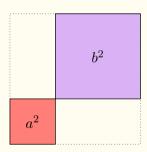
Under har vi teikna to kvadrat som er like store, men som er inndelt i forskjellige former.





Vi observerer no følgande:

- 1. Arealet til det raude kvadratet er  $a^2$ , arealet til det lilla kvadratet er  $b^2$  og arealet til det blå kvadratet er  $c^2$ .
- 2. Arealet til eit oransje rektangel er ab og arealet til ein grøn trekant er  $\frac{ab}{2}$ .
- 3. Om vi tek bort dei to oransje rektangla og dei fire grøne trekantane, er det igjen (av pkt. 2) eit like stort areal til venstre som til høgre.





Dette betyr at

$$a^2 + b^2 = c^2 (11.1)$$

Gitt ein trekant med sidelengder a, b og c, der c er den lengste sidelengda. Så lenge trekanten er rettvinkla, kan vi alltid lage to kvadrat med sidelengder a + b, slik som i første figur. (11.1) gjeld dermed for alle rettvinkla trekanter.

# 11.8 Pytagoras' setning (omvendt versjon)

Gitt en trekant med sidelengder a,b og c, der c er den lengste siden. Da er trekanten rettvinklet bare hvis  $a^2 + b^2 = c^2$ .

# Eksempel

Undersøk om en trekant er rettvinklet når den har

- a) sidelengder 2, 4 og 9.
- b) sidelengder 6, 8 og 10.

Svar

a)  $2^2 + 4^2 = 20 \neq 9^2 = 81$ 

Altså er ikke trekanten rettvinklet i dette tilfellet.

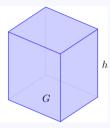
b)  $6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$ 

Altså er trekanten rettvinklet i dette tilfellet.

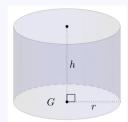
### 11.9 Volumet til tredimensjonale former

Volumet V til ei firkanta prisme eller ein sylinder med grunnflate G og høgde h er

$$V = G \cdot h$$



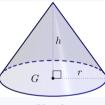
Firkanta prisme



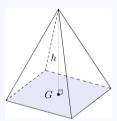
Sylinder

Volumet V til ei kjegle eller ei pyramide med grunnflate G og høgde h er

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



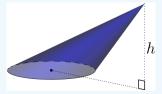
Kjegle



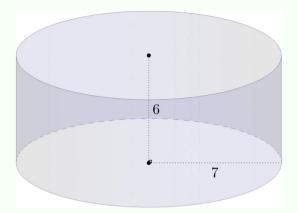
Firkanta pyramide

### Merk

Formlane frå regel 11.9 gjeld også for prismer, sylindrar, kjegler og pyramider som heller (er skeive). Vis grunnflata er plassert horisontalt, er høgda den vertikale avstanden mellom grunnflata og toppen til figuren.



(For spisse gjenstandar som kjegler og pyramider finst det sjølvsagt bare eitt valg av grunnflate.)



Ein sylinder har radius 7 og høgde 5.

- a) Finn grunnflata til sylinderen.
- b) Finn volumet til sylinderen.

### Svar

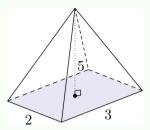
a) Av regel 11.1 har vi at

grunnflate = 
$$\pi \cdot 7^2$$
  
=  $49\pi$ 

b) Dermed er

volumet til sylinderen = 
$$49\pi \cdot 6$$
  
=  $294\pi$ 

Ei firkanta pyramide har lengde 2, bredde 3 og høgde 5.



- a) Finn grunnflata til pyramiden.
- b) Finn volumet til pyramiden.

#### Svar

a) Av regel 11.1 har vi at

grunnflate = 
$$2 \cdot 3$$

= 6

b) Dermed er

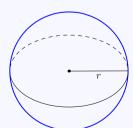
volumet til pyramiden = 
$$6 \cdot 5$$

$$= 30$$

# 11.10 Volumet til ei kule

Volumet V til ei kule med radius r er:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

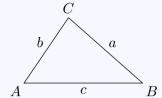


# 11.2 Kongruente og formlike trekantar

### 11.11 Konstruksjon av trekantar

Ein trekant  $\triangle ABC$ , som vist i figuren under, kan bli unikt konstruert viss ein av følgande kriterium er oppfylt:

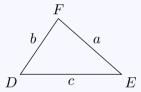
- i)  $c, \angle A$  og  $\angle B$  er kjende.
- ii) a, b og c er kjende.
- iii)  $b, c \text{ og } \angle A \text{ er kjende.}$



# 11.12 Kongruente trekantar

To trekantar som har same form og størrelse er kongruente.



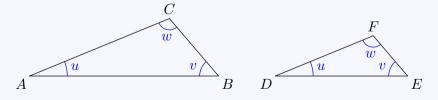


At trekantane i figuren over er kongruente skrivast

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

### 11.13 Formlike trekantar

Formlike trekantar har tre vinklar som er parvis like store.

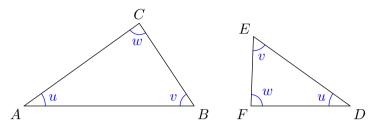


At trekantane i figuren over er formlike skrivast

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

#### Samsvarande sider

Når vi studerer formlike trekantar er samsvarande sider eit viktig omgrep. Samsvarande sider er sider som i formlike trekantar står motståande den same vinkelen.



For dei formlike trekantane  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  har vi at

I  $\triangle ABC$  er

- BC motstående til u.
- AC motstående til v
- AB motstående til w.

I  $\triangle DEF$  er

- FE motstående til u.
- FD motstående til v
- ED motstående til w.

E

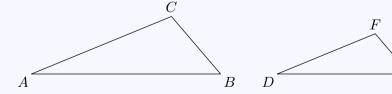
Dette betyr at desse er samsvarande sider:

- BC og FE
- $AC \circ FD$
- AB og ED

# 11.14 Forhold i formlike trekantar

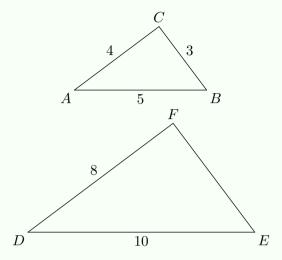
Når to trekantar er formlike, er forholdet mellom samsvarande<sup>1</sup> sider det same.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



 $<sup>^1\</sup>mathrm{Vi}$ tek det her for gitt at kva sider som er samsvarande kjem fram av figuren.

Trekantene i figuren under er formlike. Finn lengda til EF.



### Svar

Vi observerer at AB samsvarer med DE, BC med EF og AC med DF. Det betyr at

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{EF}{3}$$

$$2 \cdot 3 = \frac{EF}{3} \cdot 3$$

$$6 = EF$$

# Merk

Av Regel 11.14 har vi at for to formlike trekantar  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$ er

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

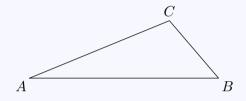
# 11.15 Vilkår i formlike trekantar

To trekantar  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  er formlike viss ein av desse vilkåra er oppfylt:

i) To vinklar i trekantane er parvis like store.

ii) 
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

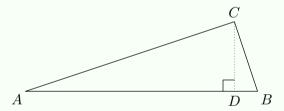
iii) 
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$
 og  $\angle A = \angle D$ .



D E

### Eksempel 1

 $\angle ACB = 90^{\circ}$ . Vis at  $\triangle ABC \sim ACD$ .

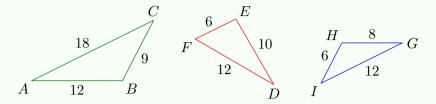


#### Svar

 $\triangle ABC$  og  $\triangle ACD$  er begge rettvinkla og dei har  $\angle DAC$  felles. Dermed er vilkår i fra regel 11.15 oppfylt, og trekantane er da formlike.

Merk: På ein tilsvarande måte kan ein vise at  $\triangle ABC \sim CBD.$ 

Undersøk om trekantane er formlike.



#### Svar

Vi har at

$$\frac{AC}{FD} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{BC}{FE} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{AB}{DE} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$
 ,  $\frac{BC}{IH} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$  ,  $\frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ 

Dermed oppfyller  $\triangle ABC$  og  $\triangle GHI$  vilkår i<br/>i fra regel 11.15, og trekantane er da formlike.

# Eksempel 3

Undersøk om trekantane er formlike.



#### Svar

Vi har at  $\angle BAC = \angle EDF$  og at

$$\frac{ED}{AB} = \frac{8}{4} = 2$$
 ,  $\frac{FD}{AC} = \frac{14}{7} = 2$ 

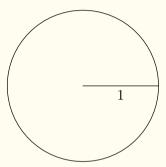
Altså er vilkår iii fra regel 11.15 oppfylt, og da er trekantane formlike.

# 11.3 Forklaringar

# 11.5 Omkrinsen til ein sirkel (og $\pi$ ) (forklaring)

Vi skal her bruke regulære mangekantar langs vegen til ønska resultat. I regulære mangekantar har alle sidene lik lengde. Da det er utelukkande regulære mangekantar vi kjem til å bruke, vil dei bli omtala berre som mangekantar.

Vi skal starte med sjå på tilnærmingar for å finne omkrinsen  $O_1$  av ein sirkel med radius 1.



### Øvre og nedre grense

Ein god vane når ein skal prøve å finne ein størrelse, er å spørre seg om ein kan vite noko om kor stor eller liten ein *forventar* at han er. Vi startar derfor med å omslutte sirkelen med eit kvadrat med sidelengde 2:

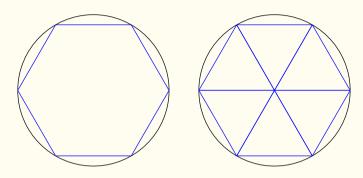


Omkrinsen til sirkelen må vere mindre enn omkrinsen til kvadratet, derfor veit vi at

$$O_1 < 2 \cdot 4$$
  
$$< 8$$

Vidare innskriv vi ein sekskant. Sekskanten kan delast inn i 6 likesida trekantar som alle må ha sidelengder 1. Omkrinsen til sirkelen må vere større enn omkrinsen til sekskanten, noko som gir at

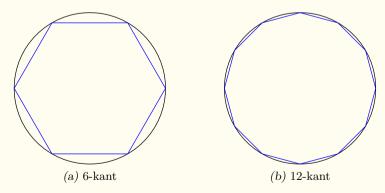
$$O_1 > 6 \cdot 1$$
$$> 6$$



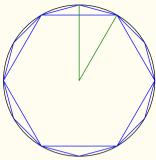
Når vi no skal gå over til ei mykje meir nøyaktig jakt etter omkrinsen, veit vi altså at vi søker ein verdi mellom 6 og 8.

### Stadig betre tilnærmingar

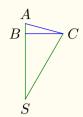
Vi fortsett med tanken om å innskrive ein mangekant. Av figurane under let vi oss overbevise om at dess fleire sider mangekanten har, dess betre estimat vil omkretsen til mangekanten vere for omkrinsen til sirkelen.



Da vi veit at sidelengda til ein 6-kant er 1, er det fristande å undersøke om vi kan bruke denne kunna til å finne sidelengda til andre mangekantar. Om vi innskriv også ein 12-kant i sirkelen vår (og i tillegg ein trekant), får vi ein figur som denne:



(a) Ein 6-kant og ein 12-kant i lag med ein trekant danna av sentrum i sirkelen og ein av sidene i 12-kanten.



(b) Utklipp av trekant fra figur (a).

La oss kalle sidelengda til 12-kanten for  $s_{12}$  og sidelengda til 6-kanten for  $s_6$ . Vidare legg vi merke til at punkta A og C ligg på sirkelbogen og at både  $\triangle ABC$  og  $\triangle BSC$  er rettvinkla trekantar (forklar for deg sjølv kvifor!). Vi har at

$$SC = 1$$

$$BC = \frac{s_6}{2}$$

$$SB = \sqrt{SC^2 - BC^2}$$

$$BA = 1 - SB$$

$$AC = s_{12}$$

$$s_{12}^2 = BA^2 + BC^2$$

For å finne  $s_{12}$  må vi finne BA, og for å finne BA må vi finne SB. Vi startar derfor med å finne SB. Da SC=1 og  $BC=\frac{s_6}{2}$ , er

$$SB = \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}}$$

Vi går så vidare til å finne  $s_{12}$ :

$$s_{12}^2 = (1 - SB)^2 + \left(\frac{s_6}{2}\right)^2$$
$$= 1^2 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4}$$

Ved første augekast ser det ut som vi ikkje kan komme særleg lengre i å forenkle uttrykket på høgre side, men ein liten operasjon vil endre på dette. Hadde vi berre hatt -1 som eit ledd kunne vi slått saman -1 og  $\frac{s_6^2}{4}$  til å bli  $-SB^2$ . Derfor "skaffar" vi oss -1 ved å både addere og subtrahere 1 på høgresida:

$$s_{12}^{2} = 1 - 2SB + SB^{2} + \frac{s_{6}^{2}}{4} - 1 + 1$$

$$= 2 - 2SB + SB^{2} - \left(1 - \frac{s_{6}^{2}}{4}\right)$$

$$= 2 - 2SB + SB^{2} - SB^{2}$$

$$= 2 - 2SB$$

$$= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_{6}^{2}}{4}}$$

$$= 2 - \sqrt{4}\sqrt{1 - \frac{s_{6}^{2}}{4}}$$

$$= 2 - \sqrt{4 - s_{6}^{2}}$$

Altså er

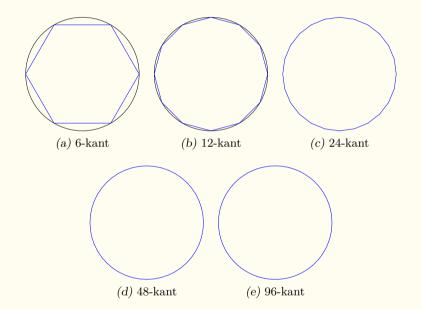
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$

Sjølv om vi her har utleda relasjonen mellom sidelengdene  $s_{12}$  og  $s_6$ , er dette ein relasjon vi kunne vist for alle par av sidelengder der den eine er sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den andre. La  $s_n$  og  $s_{2n}$  høvesvis være sidelengda til ein mangekant og ein mangekant med dobbelt så mange sider. Da er

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \tag{11.2}$$

Når vi kjenner sidelengda til ein innskriven mangekant, vil tilnærminga til omkrinsen til sirkelen vere denne sidelengda gonga med antal sidelengder i mangekanten. Ved hjelp av (11.2) kan vi stadig finne sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den forrige, og i tabellen under har vi funne sidelengda og tilnærminga til omkrinsen til sirkelen opp til ein 96-kant:

Formel for sidelengde	Sidelengde	Tilnærming for omkrins
	$s_6 = 1$	$6 \cdot s_6 = 6$
$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$	$s_{12} = 0.517$	$12 \cdot s_{12} = 6.211$
$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$	$s_{24} = 0.261$	$24 \cdot s_{24} = 6.265$
$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24}^2}}$	$s_{48} = 0.130$	$48 \cdot s_{48} = 6.278$
$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{48}^2}}$	$s_{96} = 0.065$	$96 \cdot s_{96} = 6.282$



Utrekningane over er faktisk like langt som matematikaren Arkimedes kom allereie ca 250 f. kr!

For ei datamaskin er det ingen problem å rekne ut  $^1$  dette for ein mangekant med ekstremt mange sider. Reknar vi oss fram til ein 201 326 592-kant finn vi at

Omkrins av sirkel med radius 1 = 6.283185307179586...

(Ved hjelp av meir avansert matematikk kan det visast at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 er eit irrasjonalt tal, men at alle desimalane vist over er korrekte, derav likskapsteiknet.)

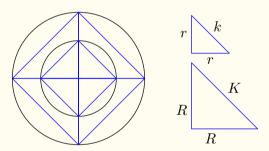
#### Den endelege formelen og $\pi$

Vi skal no komme fram til den kjende formelen for omkrinsen til ein sirkel. Også her skal vi ta for gitt at summen av sidelengdene til ein innskriven mangekant er ei tilnærming til omkrinsen som blir betre og betre dess fleire sidelengder det er.

For enkelheita si skuld skal vi bruke innskrivne firkantar for å få fram poenget vårt. Vi teiknar to sirklar som er vilkårleg store, men der den eine er større enn den andre, og innskriv ein firkant (eit kvadrat) i begge. Vi let R og r vere radien til høvesvis den største og den minste sirkelen, og K og k vere sidelengda til høvesvis den største og den minste firkanten.



Begge firkantane kan delast inn i fire likebeinte trekantar:



Da trekantane er formlike, har vi at

$$\frac{K}{R} = \frac{k}{r} \tag{11.3}$$

Vi let  $\tilde{O} = 4K$  og  $\tilde{o} = 4k$  vere tilnærminga av omkrinsen til høvesvis den største og den minste sirkelen. Ved å gonge med 4 på begge sider av (11.3) får vi at

$$\frac{4A}{R} = \frac{4a}{r} \tag{11.4}$$

$$\frac{\tilde{O}}{R} = \frac{\tilde{o}}{r} \tag{11.5}$$

Og no merker vi oss dette:

Sjølv om vi i kvar av dei to sirklane innskriv ein mangekant med 4, 100 eller kor mange sider det skulle vere, vil mangekantane alltid kunne delast inn i trekantar som oppfyller (11.3). Og på same måte som vi har gjort i eksempelet over kan vi omskrive (11.3) til (11.5) i staden.

La oss derfor tenke oss mangekantar med så mange sider at vi godtek deira omkrins som lik omkrinsane til sirklane. Om vi da skriv omkrinsen til den største og den minste sirkelen som høvesvis O og o, får vi at

$$\frac{O}{R} = \frac{o}{r}$$

Da dei to sirklane våre er heilt vilkårleg valgt, har vi no komme fram til at alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og radiusen. Ei enda vanlegare formulering er at alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og diameteren. Vi let D og d vere diameteren til høvesvis sirkelen med radius R og r. Da har vi at

$$\frac{O}{2R} = \frac{o}{2r}$$
$$\frac{O}{D} = \frac{o}{d}$$

Forholdstalet mellom omkrinsen og diameteren i ein sirkel blir kalla  $\pi$  (uttalast "pi"):

$$\frac{O}{D} = \pi$$

Likninga over fører oss til formelen for omkrinsen til ein sirkel:

$$O = \pi D$$
$$= 2\pi r$$

Tidlegare fann vi at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 (og diameter 2) er 6.283185307179586.... Dette betyr at

$$\pi = \frac{6.283185307179586...}{2}$$
$$= 3.141592653589793...$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>For den datainteresserte skal det seiast at iterasjonsalgoritma må skrivast om for å unngå instabilitetar i utrekningane når antal sider blir mange.

# 11.8 Pytagoras' setning (omvendt versjon) (forklaring)

Same kva verdien til a og b måtte vere, kan ein openbart alltid lage ein rettvinkla trekant med katetar a og b. Av Pytagoras' setning er hypotenusen da  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Av vilkår ii) i regel 11.11 er dette ein unik trekant, og det betyr at alle trekantar med sidelengder a, b og  $\sqrt{a^2 + b^2}$  er rettvinkla.

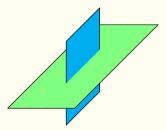
## 11.9 Volumet til tredimensjonale former (forklaring)

Sjå boka *Elementary geometry from an advanced standpoint* av E. E. Moise.

## 11.10 Volumet til ei kule (forklaring)

#### Førkunnskapar

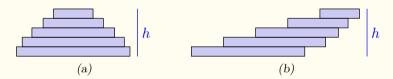
For å finne formelen for volumet til ei kule, introduserer vi tre omgrep: vertikalt tverrsnitt, horisontalt tverrsnitt og Cavalieris prinsipp. Eit tverrsnitt er ei tenkt overflate som kjem til syne når ein skjær i ei tredimensjonal form. Eit vertikalt/horisontalt tverrsnitt er ei tenkt overflate som kjem til syne viss vi skjær ei tredimensjonal form enten rett vertikalt eller rett horisontalt.



Cavalieris prinsipp lyd slik:

Viss tverrsnittsareala til to tredimensjonale former er dei same langs den same høgda, har formene same volum.

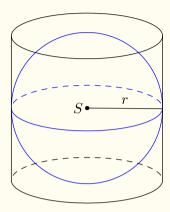
Dette prinsippet er illustrert i figuren under, som viser eit vertikalt tverrsnitt av to former bygd av fem prismer. Prismene i dei to formene er parvis like.



Det er opplagt at viss ein startar med forma vist i (a), så vil ikkje volumet endre seg om ein forskyv prismene mot høgre, slik som i (b).

#### Volumet til ei kule

Vi starter med å sjå for oss ei kule eksakt omslutta av ein sylinder. La radiusen til kula og sylinderen vere r, da er høgda til sylinderen 2r.



Figur 11.1

Vi innfører følgande størrelsar:

 $V_s$  = volumet til sylinderen

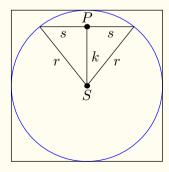
 $V_k$  = volumet til kula

 $V_i$  = volumet til forma inneklemt mellom sylinderen og kula

Da har vi at

$$V_k = V_s - V - i \tag{11.6}$$

Tenk no at vi skjær forma fra figur 11.1 frå toppen og rett ned gjennom sentrum av kula. Da får vi eit vertikalt. Ser vi på dette tverrsnittet rett horisontalt, vil sylinderen sjå ut som ein firkant, og kula som ein sirkel.

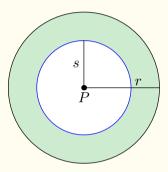


Figur 11.2

På dette tverrsnittet vandrer vi en lengde k rett opp fra sentrum til et punkt P. Den halve bredden til kula i dette punktet kaller vi s. Av Pytagoras' setning har vi at

$$s^2 = r^2 - k^2 \tag{11.7}$$

Videre forestiller vi oss at vi igjen skjærer formen i figur 11.1, men denne gangen rett fra siden og gjennom punktet P. Da får vi et horisontalt tverrsnitt. Studerer vi dette tverrsnittet rett ovenfra, får vi en figur som dette:



Figur~11.3: Horisontalt tverrsnitt. Den svarte sirkelen er buen til sylinderen og den blå er buen til kula.

Vi definerer følgende:

 $A_s$  = arealet til tverrsnittsoverflaten til sylinderen

 $A_k$  = arealet til tverrsnittsoverflaten til kula

 $A_i$  = arealet til tverrsnittsoverflaten mellom sylinderen og kula (grønn i figuren over)

Da er

$$A_i = A_s - A_k \tag{11.8}$$

Av regel 11.6 har vi at  $A_s = \pi r^2$  og  $A_k = \pi s^2$  (se tilbake til figur 11.1). Av (11.7) og (11.8) er

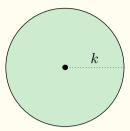
$$A_{i} = \pi r^{2} - \pi s^{2}$$

$$= \pi r^{2} - \pi (r^{2} - k^{2})$$

$$= \pi r^{2} - \pi r^{2} + \pi k^{2}$$

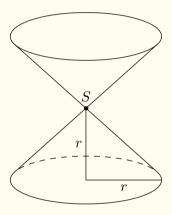
$$= \pi k^{2}$$

 $A_i$  tilsvarer altså arealet til en sirkel med radius k.



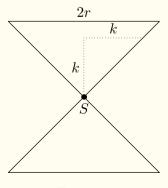
Figur 11.4: Samme areal som det grøne arealet i figur 11.3.

Vi tenker oss nå to kjegler, begge med høyde og radius lik r, satt med spissene mot hverandre. Denne formen vil være like høy som formen fra figur 11.1, og kan plasseres slik at punktet hvor spissene møtes sammenfaller med S.



Figur 11.5

Det vertikale tverrsnittet gjennom S av denne formen ser slik ut:



Figur 11.6

Om vi vandrar k rett opp eller ned fra S, så er den horisontale avstanden ut til sida også k (dette er overlatt til lesaren å vise). Dette betyr at det horisontale tverrsnittsarealet til kjeglene er  $\pi k^2 = A_i$ . Altså har den inneklemte forma fra figur 11.1 og forma fra figur 11.6 same tverrsnittsareal langs den same høgden (begge har høgde 2r). Av Cavalieris prinsipp og regel 11.9 har vi da at

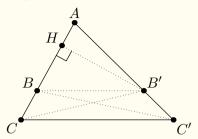
$$V_i = \frac{2(\pi r^2 \cdot r)}{3}$$
$$= \frac{2\pi r^3}{3}$$

Av (11.6), (??) og regel 11.9 er

$$V_k = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^2}{3}$$
$$= \frac{6\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3}$$
$$= \frac{4\pi r^3}{3}$$

## 11.14 Forhold i formlike trekantar (forklaring)

I figuren under er BB'||CC'. Arealet til ein trekant  $\triangle ABC$  skriv vi her som ABC.



Med BB' som grunnlinje er HB'høgda i både  $\triangle CBB'$  og  $\triangle CBB'. Derfor er$ 

$$CBB' = C'BB' \tag{11.9}$$

Vidare har vi at

$$ABB' = AB \cdot HB'$$

$$CBB' = BC \cdot HB'$$

Altså er

$$\frac{ABB'}{CBB'} = \frac{AB}{BC} \tag{11.10}$$

På liknande vis er

$$\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{11.11}$$

Av (11.9), (11.10) og (11.11) følg det at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ABB'}{CBB'} \frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'}$$
 (11.12)

For dei formlike trekantane  $\triangle ACC'$  og  $\triangle ABB'$  er

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB}$$
$$= 1 + \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AB' + B'C'}{AB'}$$
$$= 1 + \frac{B'C'}{AB'}$$

Av (11.12) er dermed forholdet mellom dei samsvarande sidene likt.

#### Merk

I dei komande forklaringane av vilkåra ii og iii fra regel 11.11 tek ein utgangspunkt i følgande:

- To sirklar skjær kvarandre i maksimalt to punkt.
- Gitt at eit koordinatsystem blir plassert med origo i senteret til den eine sirkelen, og slik at horisontalaksen går gjennom begge sirkelsentera. Viss (a,b) er det eine skjæringspunktet, er (a,-b) det andre skjæringspunktet.

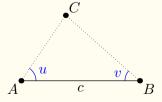


Punkta over kan enkelt visast, men er såpass intuitivt sanne at vi tek dei for gitt. Punkta fortel oss at trekanten som består av dei to sentera og det eine skjæringspunktet er kongruent med trekanten som består av dei to sentera og det andre skjæringspunktet. Med dette kan vi studere eigenskapar til trekantar ved hjelp av halvsirklar.

## 11.11 Konstruksjon av trekantar (forklaring)

#### Vilkår i

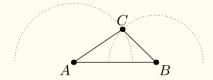
Gitt ei lengde c og to vinklar u og v. Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c. Så stiplar vi to vinkelbein slik at  $\angle A = u$  og B = v. Så lenge desse vinkelbeina ikkje er parallelle, må dei naudsynleg skjære kvarandre i eitt, og berre eitt, punkt (C i figuren). I lag med A og B vil dette punktet danne ein trekant som er unikt gitt av c, u og v.



#### Vilkår ii

Gitt tre lengder a, b og c. Vi lagar eit linjestykket AB med lengde c. Så lagar vi to halvsirklar med høvesvis radius a og b og

sentrum B og A. Skal no ein trekant  $\triangle ABC$  ha sidelengder a, b og c, må C ligge på begge sirkelbogane. Da bogane berre kan møtast i eitt punkt, er forma og størrelsen til  $\triangle ABC$  unikt gitt av a, b og c.



#### Vilkår iii

Gitt to lengder b og c og ein vinkel u. Vi startar med følgande:

- 1. Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c.
- 2. I A teiknar vi ein halvsirkel med radius b.

Ved å la C vere plassert kor som helst på denne sirkelbua, har vi alle moglege variantar av ein trekant  $\triangle ABC$  med sidelengdene AB = c og AC = b. Å plassere C langs bogen til halvsirkelen er det same som å gi  $\angle A$  ein bestemt verdi. Det gjenstår no å vise at kvar plassering av C gir ei unik lengde av BC.



Vi let  $C_1$  og  $C_2$  vere to potensielle plasseringar av C, der  $C_2$  langs halvsirkelen ligg nærare E enn  $C_1$ . Vidare stiplar vi ein sirkelboge med radius  $BC_1$  og sentrum i B. Da den stipla sirkelbogen og halvsirkelen berre kan skjære kvarandre i  $C_1$ , vil alle andre punkt på halvsirkelen ligge enten innanfor eller utanfor den stipla sirkelbogen. Slik vi har definert  $C_2$ , må dette punktet ligge utanfor den stipla sirkelbogen, og dermed er  $BC_2$  lengre enn  $BC_1$ . Av dette kan vi konkludere med at BC blir lengre dess nærare C beveger seg mot E langs halvsirkelen. Å sette  $\angle A = u$  vil altså gi ein unik verdi for BC, og da ein unik trekant  $\triangle ABC$  der AC = b, c = AB og  $\angle BAC = u$ .

## 11.15 Vilkår i formlike trekantar (forklaring)

#### Vilkår i

Gitt to trekantar  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$ . Av regel 7.3 har vi at

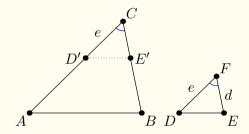
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$$

Viss  $\angle A = \angle D$  og  $\angle B = \angle E$ , følger det at  $\angle C = \angle E$ .

#### Vilkår ii

Vi tek utgangspunkt i trekantane  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  der

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$
 ,  $\angle C = \angle F$  (11.13)



Vi sett a = BC, b = AC, d = EF og e = DF. Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC, slik at D'C = e og  $AB \parallel D'E'$ . Da er  $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$ , altså har vi at

$$\frac{E'C}{BC} = \frac{D'C}{AC}$$
$$E'C = \frac{ae}{b}$$

Av (11.13) har vi at

$$EF = \frac{ae}{b}$$

Altså er E'C = EF. No har vi av vilkår ii fra regel 11.12 at  $\triangle D'E'C \cong \triangle DEF$ . Dette betyr at  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

#### Vilkår iii

Vi tek utgangspunkt i to trekantar  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  der

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \tag{11.14}$$

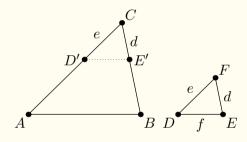
Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC, slik at D'C = e og E'C = d. Av vilkår i fra regel 11.15 har vi da at  $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$ . Altså er

$$\frac{D'E'}{AB} = \frac{D'C}{AC}$$
$$D'E' = \frac{ae}{c}$$

Av (11.14) har vi at

$$f = \frac{ae}{c}$$

Altså har  $\triangle D'E'C$  og  $\triangle DEF$  parvis like sidelengder, og av vilkår i fra regel 11.12 er dei da kongruente. Dette betyr at  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .



## Kommentar (for den spesielt interesserte)

Også i geometri har vi aksiom (sjå kommentar på side 149) som legg grunnlaget for det matematiske systemet vi skapar, men den aksiomatiske oppbygginga av geometri er mykje meir omstendeleg og uoversiktleg enn den vi har innanfor rekning. I tillegg er nokre teorem innanfor geometri så intuitivt sanne, at det i ei bok som dette ville blitt meir forvirrande enn oppklarande å skulle forklart alt i detalj.

Det som likevel bør nemnast, er at vi i regel 11.11 opplyser om tre vilkår for å unikt konstruere ein trekant, og i regel 11.12 gir eit vilkår for kongruens. I meir avanserte geometritekstar vil ein helst finne att innhaldet i desse to reglane som aksiom og teorem for kongruens:

#### Kongruens

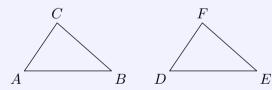
To trekantar  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  er kongruente viss ein av desse vilkåra er oppfylt:

i) 
$$AB = DE$$
,  $BC = EF$  og  $\angle A = \angle D$ .

ii) 
$$\angle A = \angle D$$
,  $\angle B = \angle E$  og  $AB = DE$ .

iii) 
$$AB = DE$$
,  $BC = EF$  og  $AC = FD$ .

iv)  $\angle A = \angle D$  and  $\angle B = \angle E$ , i tillegg er AB = DE eller BC = EF eller AC = FD.



- i) Side-vinkel-side (SAS) aksiomet
- ii) Vinkel-side-vinkel (ASA) teoremet
- iii) Side-side-side (SSS) teoremet
- iv) Side-vinkel-vinkel (SAA) teoremet

Merk: Forkortingane over er gitt ut ifrå dei engelske namna for høvesvis side og vinkel; side og angle.

I tekstboksen på førre side gir også vilkår i)-iii) tilstrekkeleg informasjon om når ein trekant kan bli unikt konstruert, men i denne boka har vi valgt å skille unik konstruksjon og kongruens fra kvarandre. Dette er gjort i den tru om at dei fleste vil ha ein intuitiv tanke om kva trekantar som er kongruente eller ikkje, men ha større problem med å svare på kva som må til for å unikt konstruere ein trekant — og det er ikkje naudsynleg så lett å sjå dette direkte ut ifrå kongruensvilkåra.

Legg også merke til at vilkår iv) berre er ei meir generell form av vilkår ii), men altså ikkje kan brukast som eit vilkår for unik konstruksjon. Dette vilkåret finn ein derfor ikkje att i korkje regel 11.11 eller regel 11.12.

## **Fasit**

### Kapittel 1

**??** a) 22

b) 13 c) 36

?? a) 17

b) 29 c) 11

?? a) 1,7 b) 2,3

?? a) 13,9 b) 32,8 c) 0,7 d) 2,4

## Kapittel 4

**4.1.1** a) 6 b) 5 c) 2 d) 7 e) 9 f) 4

**4.1.2** a) 0,5 b) 0,25 c) 0,2 d) 0,75 e) 0,4 f) 0,6 g) 0,8 h) 1,5 i) 0,33... j) 2,5 k) 0,833... l) 1,4 m) 2,75

n) 0,7

**4.1.3** a)  $\frac{3}{4}$ **4.1.4** a)  $\frac{14}{3}$ 

b)  $\frac{2}{7}$  c)  $\frac{2}{5}$  b)  $\frac{13}{2}$  c)

c)  $\frac{11}{5}$ 

d)  $\frac{45}{40}$  e)  $\frac{54}{30}$  f)  $\frac{77}{28}$ 

**4.2.1** a)  $\frac{20}{6}$ **4.2.2** a)  $\frac{9}{4}$ 

b)  $\frac{9}{12}$  c)  $\frac{12}{28}$  b)  $\frac{9}{5}$  c)  $\frac{2}{7}$ b)  $\frac{9}{12}$ 

c)  $\frac{11}{6}$ **4.3.1** a)  $\frac{10}{3}$ b)  $\frac{14}{4}$ 

d)  $\frac{10}{7}$ 

e) 1

Merk: Éin av brøkane kan forkortast.

c)  $\frac{17}{7}$ 

b)  $\frac{2}{4}$ 

d) 1 e) 0

4.3.3 a)  $\frac{1}{3}$  b)  $\frac{8}{5}$ Merk: To c)  $\frac{9}{6}$ Merk: To av brøkane kan forkortast.

**4.3.4** a)  $\frac{6}{5}$ 

b)  $\frac{5}{7}$  c) 4

d)  $\frac{73}{20}$  e)  $\frac{5}{6}$  d)  $\frac{11}{20}$  e)  $\frac{5}{6}$ 

d)  $\frac{80}{7}$  e)  $\frac{21}{2}$  f)  $\frac{28}{3}$  g)  $\frac{35}{3}$ 

4.3.5 a)  $\frac{9}{10}$  b)  $\frac{73}{63}$  c)  $\frac{101}{24}$ 4.3.6 a)  $\frac{1}{10}$  b)  $\frac{29}{36}$  c)  $\frac{71}{72}$ 4.3.7 a)  $\frac{5}{12}$  b)  $\frac{157}{30}$  c)  $\frac{229}{56}$ 4.4.1 a)  $\frac{20}{3}$  b)  $\frac{40}{7}$  c)  $\frac{54}{10}$ h)  $\frac{30}{7}$  i)  $\frac{5}{11}$  j)  $\frac{72}{17}$ 

d)  $\frac{8}{70}$  e)  $\frac{3}{14}$  f)  $\frac{9}{110}$  g)  $\frac{1}{60}$ 

**4.5.1** a)  $\frac{4}{15}$  b)  $\frac{5}{56}$  h)  $\frac{9}{290}$  i)  $\frac{8}{459}$  j)  $\frac{4}{158}$  **4.6.1** a)  $\frac{20}{27}$  b)  $\frac{7}{32}$  h)  $\frac{80}{9}$  i)  $\frac{36}{35}$  j)  $\frac{35}{12}$ 

c)  $\frac{9}{60}$ 

d)  $\frac{60}{5}$  e)  $\frac{21}{10}$  f)  $\frac{10}{21}$ 

c)  $\frac{18}{21}$ 

e)  $\frac{203}{328}$ 

**4.7.1** a)  $\frac{15}{40}$  b)  $\frac{153}{32}$  c)  $\frac{46}{32}$  d)  $\frac{21}{648}$  **4.8.1** a)  $\frac{4}{11}$  b)  $\frac{35}{8}$  c)  $\frac{1}{9}$  d) 4

**4.8.2** a)  $\frac{7}{4}$  b)  $\frac{3}{7}$  c)  $\frac{2}{3}$  d)  $\frac{8}{7}$  e)  $\frac{1}{2}$  f)  $\frac{7}{2}$ 

**4.8.3** a) 49 b) 54 c) 70 d) 16 e) 30 f) 12 g) 25 h) 14 i) 7 j) 63

**4.9.1** a)  $\frac{14}{15}$  b)  $\frac{24}{45}$  c)  $\frac{30}{21}$  d)  $\frac{7}{20}$  e)  $\frac{66}{15}$ 

**4.9.2** a)  $\frac{4}{9}$  b)  $\frac{15}{4}$  c)  $\frac{15}{5}$ 

**Gruble 4.1** a) 2 b) 4 c) 5 d) 2 e) 4 f) 5 g) 3, 4 h) 2, 5 i) 3, 5 j) 4, 5

**Gruble 4.2** a) 2 b) 4 c) 5 d) 4, 3 e) 5, 2 f) 5, 3 g) 5, 4

**Gruble 4.3** a)  $\frac{403}{6732}$  b)  $\frac{269}{3150}$ 

### Kapittel 9

**9.2.1** a) x = 10 b) x = 5 c) x = 9 d) x = 2 e) x = 3 f) x = 4 g) x = 10 h) x = 8 i) x = 10

**9.2.2** a) x = 37 b) x = 29 c) x = 23 d) x = 15 e) x = 8

f) x = 11 g) x = 23 h) x = 19 i) x = 10 j) x = 28

**9.2.3** a) x = 4 b) x = 5 c) x = 9 d) x = 15

#### 11.3.1

a) x = 8 b) x = 72 c) x = 49 d) x = 150

**9.2.6** a) x = 7 b) x = 10 c) x = 6 d) x = 9 e) x = 9

f) x = 8 g) x = 5 h) x = 4

## Litteratur

Kiselev, A. (2006). Kiselev's Geometry: Book 1. Planimetry (A. Givental, Overs.). Sumizdat. (Opprinnelig utgitt 1892).

Lindstrøm, T. (2006). Kalkulus (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Moise, E. E. (1974). Elementary geometry from an advanced standpoint. Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Spivak, M. (1994). Calculus (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press

Notis: Teksten, i alle fall ein veldig liknande ein, om Pytagoras' setning på side 200 sto første gong på trykk i Skage Hansen si bok Tempelgeometri (2020).

# Indeks

$\pi$ , 218 absoluttverdi, 74 algebra, 137	grad, 113 grunnflate, 134 grunnlinje, 117 grunntal, 142
areal, 123 til rektangel, 193 til sirkel, 199 til trapes, 196	hypotenus, 118 høgde, 117 intervall, 177
breidde, 124 brøk, 40 forkorting av, 44 omvend, 61 utviding av, 44	kansellering, 56 kant, 116 katet, 118 konstant, 137 konstantledd, 179
diameter, 111 differense, 20	koordinatsystem, 16 kvotient, 25
dividend, 25 divisor, 25	ledd, 18, 20 lengde, 73, 124
eksponent, 142	likning, 154 likskapsteiknet, 10
faktor, 22 faktorisering, 32	linje, 109 linjestykke, 109
fellesnemnar, 49 firkant, 116 forhold, 25	mangekant, 116 hjørner i, 116
forholdstal, 25	nemnar, 40
formel, 193 forteikn, 74 funksjon, 174 grafen til, 177 lineær, 177	oddetal, 15 omkrins, 122 til sirkel, 198 overflate, 123
funksjonsuttrykk, 174	parallell, 112

partal, 15	irrasjonalt, 150
positive heiltal, 11	naturlege, 11
potenslikning, 165	negativt, 73
primtal, 32	positivt, 73
primtalsfaktorisering, 32	rasjonalt, 63
produkt, 22	talverdi, 74
punkt, 16, 109	tellar, 40
radius, 111 rest, 99 rotteikn, 149 sektor, 111 side i mangekant, 116	til parallellogram, 195 til trekant, 194 toppvinkel, 115 trekant, 116 formlik, 207 kongruet, 207 ulikskap, 167
samsvarande, 208 siffer, 12	T )
sirkel, 111	variabel, 137
sentrum i, 111	verdi, 12
stigingstal, 179	vinkel, 112
sum, 18	rett, 113
. 1 10	toppunkt til, 112
tal, 10	vinkelbein, 112
blanda, 63	vinkelrett, 113

#### Om forfattaren

Sindre Sogge Heggen har ein mastergrad i anvendt matematikk fra Universitetet i Oslo og ei årseining i praktisk-pedagogisk utdanning fra NTNU. I tillegg har han fleire års erfaring med undervising i både grunnskule og vidaregåande skule.