0.1 Grenseverdier

Si at vi starter med verdien 0.9, og deretter stadig legger til 9 som bakerste siffer. Da får vi verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre. Ved å legge til 9 som bakerste siffer på denne måten, *kan vi komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – verdien 1*. Det å "komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – en verdi" vil vi heretter kalle å "gå mot en verdi". Metoden vi akkurat beskrev kan vi altså se på som en metode for å *gå mot* 1. Vi kan da si at *grenseverdien* til denne metoden er 1. For å indikere en grenseverdi skriver vi $\lim$, og for å vise til at en variabel x går mot et tall a skriver vi $x \to a$:

0.1 Grenseverdien til en funksjon

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \text{grenseverdien til } f \text{ når } x \text{ går mot } a \\ &= \text{verdien } f \text{ går mot når } x \text{ går mot } a\end{aligned}$$

En utvidelse av $=$

Det litt paradoksale med grenserverdier hvor x går mot a, er at vi ofte ender opp med å erstatte x med a, selv om vi per definisjon har at $x \neq a$. For eksempel skriver vi at

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = 2+1 = 3 \tag{1}$$

Det er verd å filosofere litt over likhetene i (1). Når x går mot 2, vil x aldri bli eksakt lik 2. Dette betyr at $x+1$ aldri kan bli *eksakt lik* 3. Men *jo nærmere* x er lik 2, *jo nærmere* er $x+1$ lik 3. Med andre ord går $x+1$ mot 3 når x går mot 2. Likheten i (1) viser altså ikke til et uttrykk som er *eksakt lik* en verdi, men et uttrykk som *går eksakt mot* en verdi. Dette gjør altså at grenseverdier bringer en noe utvidet forståelse av $=$.

Eksempel 1

Gitt $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$. Finn $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Svar:

Hensikten med denne oppgaven er å undersøke om $f(x)$ går mot en bestemt verdi når x går mot 1, selv om f ikke