

0.1 Å finne størrelser

Likninger, formler og funksjoner (og uttrykk) er begrep som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. Når alle størrelsene utenom den éne er kjent, kan vi finne denne enten direkte eller indirekte.

0.1.1 Å finne størrelser direkte

Mange av regelboksene i boka inneholder en formel. Når en størrelse står alene på én side av formelen, sier vi at det er en formel for *den* størrelsen. For eksempel inneholder *regel ??* en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, er det snakk om å sette verdiene inn i formelen og regne ut for å finne den ukjente, 'målestokk'.

Men ofte har vi bare en beskrivelse av en situasjon, og da må vi selv lage formlene. Da gjelder det å først identifisere hvilke størrelser som er til stede, og så finne relasjonen mellom dem.

Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
 - I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.
- a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.
- b) Hva koster en taxitur på 17 km?

Svar

- a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

- b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

0.1.2 Å finne størrelser indirekte

Når formlene er kjente

Eksempel 1

Vi har sett at strekningen s vi har kjørt, farten f vi har holdt, og tiden t vi har brukt kan settes i sammenheng via formelen¹:

$$s = f \cdot t$$

Dette er altså en formel for s . Ønsker vi i stedet en formel for f , kan vi gjøre om formelen ved å følge prinsippene for likninger²:

$$s = f \cdot t$$

$$\frac{s}{t} = \frac{f \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}$$

$$\frac{s}{t} = f$$

¹strekning = fart · tid

²Se [MB](#), s. 121.

Eksempel 2

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

- a) Skriv om formelen til en formel for R .

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

- b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

Svar

- a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetstegnet:

$$I \cdot R = \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}}$$

$$I \cdot R = U$$

$$\frac{I \cdot R}{I} = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

- b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \frac{12}{2}$$

$$= 6$$

Resistansen er altså 6 Ω .

Eksempel 3

Gitt en temperatur T_C målt i antall grader Celsius ($^{\circ}C$). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit ($^{\circ}F$) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

- a) Skriv om formelen til en formel for T_C .
- b) Hvis en temperatur er målt til $59^{\circ}F$, hva er da temperaturen målt i $^{\circ}C$?

Svar

- a) Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\ T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= 9T_C \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{9T_C}{9} \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C \end{aligned}$$

- b) Vi bruker formelen fra a), og finner at

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\ &= \frac{5(27)}{9} \\ &= 5 \cdot 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Når formlene er ukjente

Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

- a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.
- b) Løs likningen.

Svar

- a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

penger allerede skaffet + antall lodd · penger per lodd = prisen på turen

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatte¹ *antall lodd* med x , og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$\begin{aligned} 25x &= 11\,000 - 2\,000 \\ 25x &= 9\,000 \\ \frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\ x &= 360 \end{aligned}$$

¹Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U , og lag en formel for U .

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter P med 20, og får

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

Eksempel 2

En klasse planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

Svar

Vi innfører følgende variabler:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1

- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

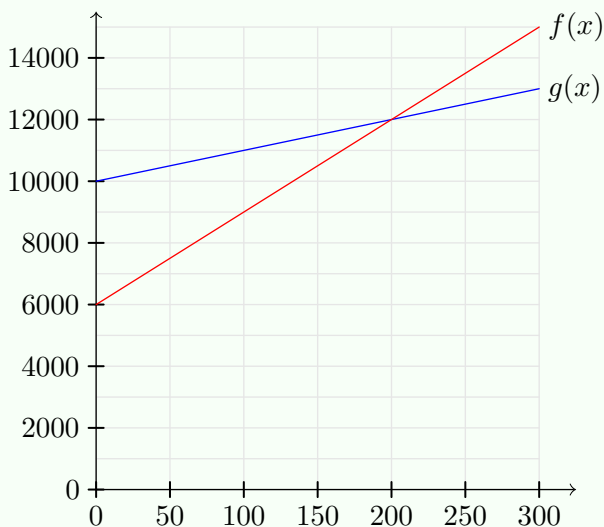
$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Videre løser vi nå oppgaven både med en grafisk og en algebraisk metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i samme koordinatsystem:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 200$. Dette betyr at busselskapene tilbyr samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

Algebraisk metode

Busselskapene har samme pris når

$$f(x) = g(x)$$

$$10x + 10\,000 = 30x + 6\,000$$

$$4\,000 = 20x$$

$$x = 200$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

Eksempel 4

”Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?”.

Svar

”Broren min er dobbelt så gammel som meg.” betyr at

$$\text{brors alder} = 2 \cdot \text{min alder}$$

”Til sammen er vi 9 år gamle.” betyr at

$$\text{brors alder} + \text{min alder} = 9$$

Erstatter vi ’brors alder’ med ” $2 \cdot \text{min alder}$ ”, får vi

$$2 \cdot \text{min alder} + \text{min alder} = 9$$

Altså er

$$3 \cdot \text{min alder} = 9$$

$$\frac{3 \cdot \text{min alder}}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\text{min alder} = 3$$

”Jeg” er altså 3 år gammel.

0.1.3 Grafisk metode

Regel 0.1 Grafisk løsning av likningssett

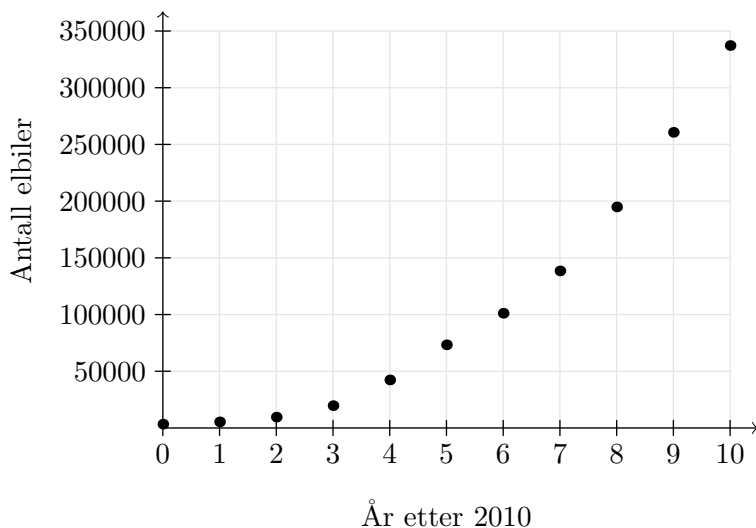
Et lineært likningssett bestående av to ukjente, x og y , kan løses ved å

1. omskrive de to likningene til uttrykk for to linjer.
2. finne skjæringspunktet til linjene.

0.2 Regresjon

Å forsøke å beskrive hvordan noe vil *utvikle* seg er en av de viktigste anvendelsene for funksjoner. Hvis vi har et datasett som beskriver tidligere hendelser, kan vi prøve å finne den funksjonen som passer best til datasettet. Dette kalles å utføre **regresjon**.

Grafen under viser¹ antall elbiler i Norge etter år 2010.

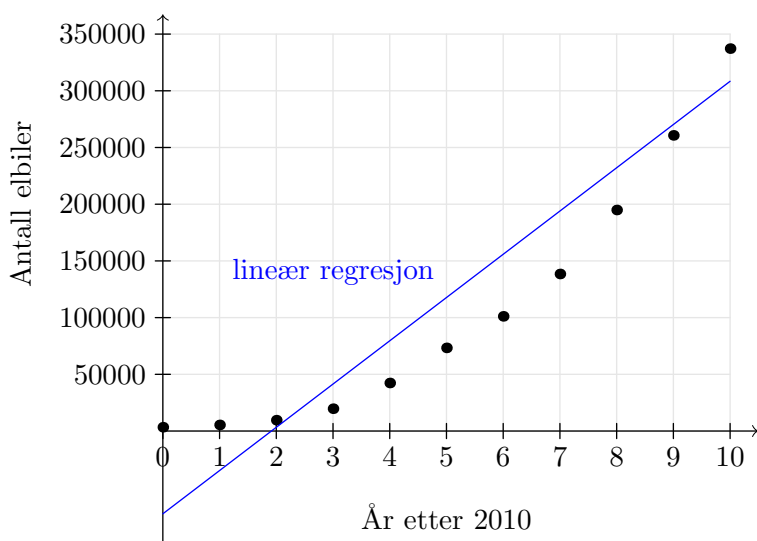


Vi ønsker nå å finne en funksjon som

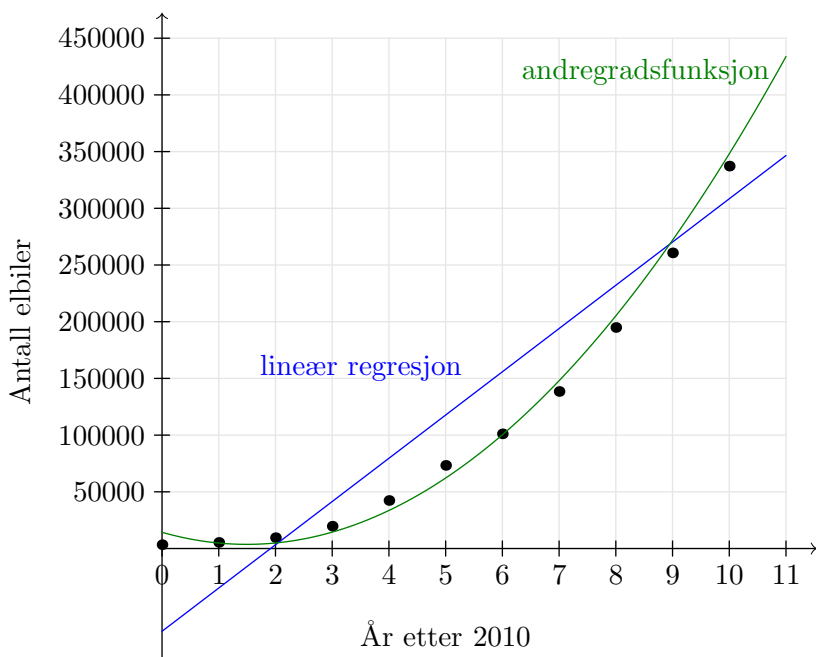
- (i) så godt som mulig skjærer hvert punkt.
- (ii) har en graf som passer til situasjonen vi modellerer.

Hvis vi utfører regresjon med en lineær funksjon i GeoGebra (se side ??), får vi denne grafen:

¹Tall hentet fra elbil.no



Utfører vi regresjon også med en andregradsfunksjon, får vi følgende resultat:



I figuren over kan vi merke oss at

- begge modellene (funksjonene) "oppfører" seg feilaktig i starten. Den lineære funksjonen starter med et negativt antall biler, mens den kvadratiske funksjonen starter med at antallet synker fra år 0 til år 1.

- Grafen til den kvadratiske passer punktene mye bedre enn grafen til den lineære funksjonen.

Hvis vi hadde antatt at den lineære funksjonen ga en god beskrivelse av antallet elbiler fremover i tid, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var ca. 350 000. Hadde vi i stedet antatt det samme om den kvadratiske funksjonen, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var litt over 425 000. Fasit er at antall elbiler i 2021 var 455 271.

