Løsningsforslag TM1

Kapittel 1

Kapittel 2

2.2.2

a) Vi har at

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 4x &= 0 \\
x(2x - 4) &= 0
\end{aligned}
$$

Altså er $x = 0$, eller

$$
\begin{aligned}
2x - 4 &= 0 \\
2x &= 4 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Gruble ??

Da

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x^2 + 2\sqrt{xy} + y^2 = 27$$

må $\sqrt{xy}$ også være et heltall, og dermed må xy være et kvadrattall. Ved litt prøving og feiling finner vi at

$$x = 3 \qquad , \qquad y = 12$$

Gruble 2

a)

$$\begin{aligned} 10 - 2\sqrt{21} &= 10 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} \\ &= \sqrt{7}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 13 + 2\sqrt{22} &= 13 + 2\sqrt{11}\sqrt{2} \\ &= \sqrt{11}^2 + \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{11}\sqrt{2} \\ &= (\sqrt{11} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

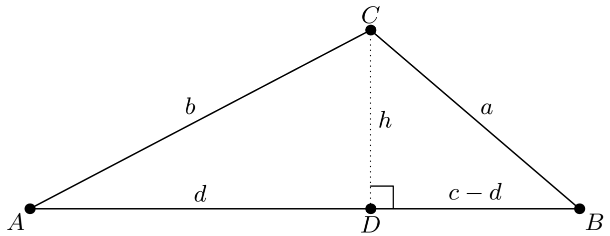
c)

$$\begin{aligned} 8 + 4\sqrt{3} &= 2(4 + 2\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3}^2 + \sqrt{1}^2 + 2\sqrt{1}\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3} + 1)^2 \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 42 - 14\sqrt{5} &= 7(6 - 2\sqrt{5}) \\ &= 7(\sqrt{5}^2 + \sqrt{1}^2 - \sqrt{5}\sqrt{1}) \\ &= 7(\sqrt{5} - \sqrt{1})^2 \\ &= (\sqrt{35} - \sqrt{7})^2 \end{aligned}$$

Gruble 3



Vi setter $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = CD$ og $d = AD$. Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ADC$ og $\triangle DCB$ har vi at

$$b^2 - d^2 = a^2 - (c-d)^2$$
$$d = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Videre er

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - d^2 \\ &= (b+d)(b-d) \\ &= \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) \\ &= \frac{1}{4c^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] \\ &= \frac{1}{4c^2}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

Da $h > 0$, er

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$$

Arealet T til $\triangle ABC$ er nå gitt som

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}hc \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \end{aligned}$$

Merk: Da en trekant må ha et areal med positiv verdi, kan Herons formel brukes for å vise *trekantulikheten*, som vi utledet i MB.

Gruble 1

Alternativ 1
Skal grafen til f være symmetrisk om vertikallinja som går gjennom punktet $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, må vi for et tall k ha at

$$f\left(k - \frac{b}{2a}\right) = f\left(-k - \frac{b}{2a}\right) \tag{1}$$

For et tall d har vi at

$$d - \frac{b}{2a} = \frac{2ad - b}{2a}$$

Videre er

$$\begin{aligned}
f\left(d - \frac{b}{2a}\right) &= a\left(\frac{2ad-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{2ad-b}{2a}\right) + c \\
&= \frac{4a^2d^2 - 4abd + b^2}{4a} + \frac{2abd - b^2}{2a} + c \\
&= \frac{4a^2d^2 - b^2}{4a} + c
\end{aligned}$$

Dette betyr at uansett om $d = k$ eller om $d = -k$, så vil uttrykket over være likt, og altså er (1) gyldig.

Alternativ 2
Skal f være symmetrisk om en vertikallinje, må det bety at to tall t og s gir lik f-verdi:

$$\begin{aligned}
f(s) &= f(t) \\
as^2 + bs + c &= at^2 + bt + c \\
a(s^2 - t^2) + b(s - t) &= 0 \\
a(s-t)(s+t) + b(s-t) &= 0 && (s \neq t) \\
a(s+t) + b &= 0 \\
t &= -\frac{b}{a} - s
\end{aligned}$$

Vi lar x_s være x-verdien til symmetrilinja til f. x_s må ligge midt mellom s og t. Vi lar $t > s$, da er

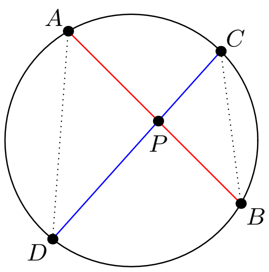
$$\begin{aligned}
x_s &= s + \frac{1}{2}(t - s) \\
&= s + \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} - s - s\right) \\
&= -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

Gruble ??

$$\begin{aligned}
d^2r^2 - (d+r)^2r^2 + 4bd^2(b-r) &= (-2dr - r^2)r^2 + 2bd(2bd - 2dr)\\
&= (2bd - 2dr - r^2)r^2 - 2bdr^2 + 2bd(2bd - 2dr - r^2) + 2bdr^2\\
&= (2bd - 2dr - r^2)\left(r^2 + 2bd\right)
\end{aligned}$$

Kapittel 3

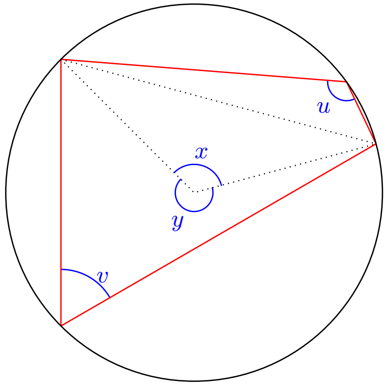
Gruble 14



Av regel 3.7 har vi at $\angle CBA = \angle CDA$. Da $\angle CPA = \angle DPB$ (de er toppvinkler), er dermed $\triangle PDA \sim \triangle PBC$. Altså har vi at

$$DP \cdot PC = AP \cdot PB$$

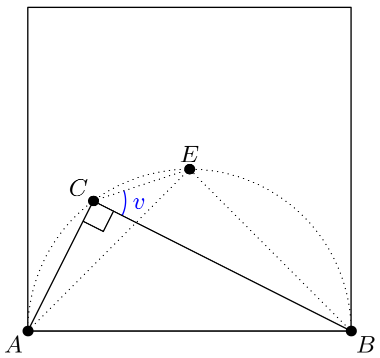
Gruble 13



Vi har at $y = 360 - x$. Da x og y er de tilhørende sentralvinklene til henholdsvis v og u, er

$$2u = 360^\circ - 2v$$
$$y = 180^\circ - v$$

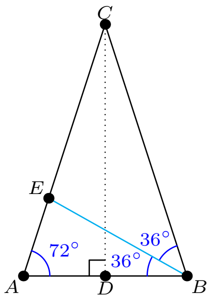
Gruble ??



$\triangle ABE$ er rettvinklet og likebeint. Periferivinklene $\angle BCE$ og $\angle BAE$ spenner over samme bue, og dermed er

$$v = \angle BAE = 45^\circ$$

Gruble 9



Da $\angle BAC = \angle CBA = 72^\circ$, er $\triangle ABC$ likebeint ($AC = BC$) og $\angle ACB = 36^\circ$. Altså er også $\triangle BEC$ likebeint ($EB = EC$). $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ fordi de har $\angle BAC$ felles, og $\angle ACB = \angle EBD$. Vi setter $x = AB$ og $y = BC$, og får at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EA}{AB}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y-x}{y}$$

$$xy + x^2 - y^2 = 0$$

Av *abc*-formelen har vi at

$$x = \frac{-y + \pm\sqrt{y^2 - 4y^2}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} y$$

Vi forkaster den negative løsningen for x, og får at

$$BD = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}y$$

Da $\sin 18^\circ = \frac{BD}{BC}$, er

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

3.2.3

a) Vi har at

$$AF = AD = c - r$$

$$FC = CE = a - r$$

Da $AF + FC = c$, er

$$\begin{aligned} c - r + a - r &= b \\ c + a - b &= 2r \end{aligned}$$

b) Med c som grunnlinje har $\triangle ABC$ høgde b. Av den klassiske arealformelen for en trekant (se MB) og formelen fra Oppgave 3.2.2 har vi da at

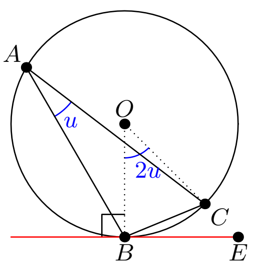
$$\begin{aligned} (a+b+c)r &= ac \\ r &= \frac{ac}{a+b+c} \end{aligned}$$

c) Av oppgave (a) og (b) er

$$\begin{aligned} c + a - b &= \frac{2ac}{a+b+c} \\ (c+a-b)(a+b+c) &= 2ac \\ (a+c)^2 - b^2 &= 2ac \\ a^2 + c^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Formelen kjenner vi igjen som Pytagoras' setning.

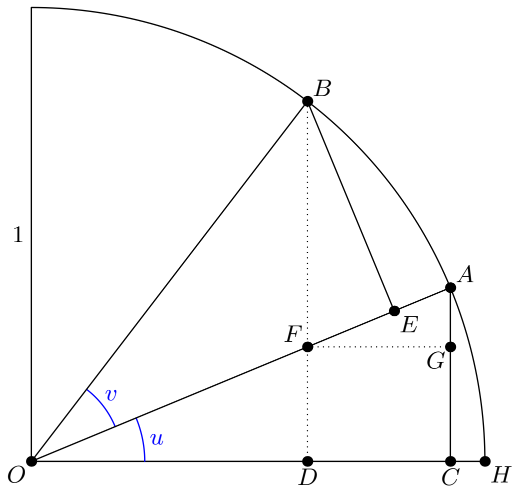
??



Vi setter $v = \angle BAC$. Da $\angle BAC$ er en periferivinkel, er $\angle BOC = 2v$. $\triangle BCO$ er likebeint, og derfor er $\angle CBO = 90^\circ - u$ (forklar for deg selv hvorfor). Nå har vi at

$$\angle EBC = 90^\circ - \angle CBO = u$$

Gruble 11



I figuren over merker vi oss at

$$EB = \sin v \qquad AC = \sin u$$

$$OE = \cos v \qquad OC = \cos u$$

Da $\triangle OCA \sim \triangle BEF$, har vi at

$$FE = \frac{BE}{OC} AC = \frac{\sin v}{\cos u} \sin u$$

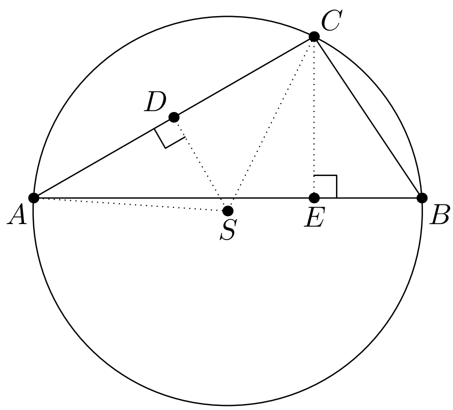
Videre har vi at $EA = OA - OE = 1 - \cos v$. Tilsvarende er $CH = 1 - \cos u$. I tillegg er

$$DC = FG = (FE + EA)\cos u = \left(\frac{\sin v}{\cos u}\sin u + 1 - \cos v\right)\cos u$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} OD &= OH - CH - DC \\ \cos(u+v) &= 1 - (1 - \cos u) - \left(\frac{\sin v}{\cos u}\sin u + 1 - \cos v\right)\cos u \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \end{aligned}$$

Gruble 16



Av regel 3.7 er $\angle CSA = 2\angle CBA$. Da $\triangle ASC$ er likesidet, er derfor $\angle DSA = \angle CBA$. Følgelig er $\triangle ASD \sim \triangle CBE$. Dette betyr at

$$\frac{a}{EC} = \frac{r}{\frac{1}{2}b}$$
$$r = \frac{ab}{2EC}$$

Da $2A_{\triangle ABC} = EC \cdot c$, er $EC = \frac{2A_{\triangle ABC}}{c}$, og dermed er

$$r = \frac{abc}{4A_{\triangle ABC}}$$

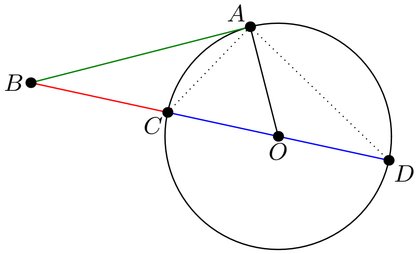
Gruble ??

Gitt $\triangle ABC$, hvor $\angle C = 90°$, $a = BC$, $b = AC$, og $c = AB$. Da er $4A_{\triangle ABC} = 2ab$. Av gruble 16 er da $r = \frac{c}{2}$. Altså er $c = 2r$, og er dermed en diameter i den omskrevne sirkelen.

Gruble 18

Vi setter $\angle ADC = u$. Av regel 3.7 er $\angle AOC = 2\angle ADC$. Da $\triangle AOC$ er likebeint ($AO = CO$), er dermed $\angle OAC = 90 - u$, og følgelig er $\angle BAC = u$. Dette betyr at $\triangle ABC$ og $\triangle BDA$ har to vinkler som er parvis like store, og dermed er de formlike. Altså er

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$
$$AB^2 = BC \cdot BD$$


A
B
C
O
D

Kapittel 4

4.1.8 Gitt to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Da $\cos 0^\circ = 1$, har vi av (4.17) at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$$
$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 = \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)$$
$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

Kapittel 5

Kapittel 6

?? Vi har at

$$f' = 2ax + b$$

$$f'' = 2a$$

Av andrederiverttesten

Kapittel 7