Den deriverte som motivajon

Gitt funksjonen $f(x) = a^x$. Da har vi at

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

Da x er uavhengig av h, får vi at

$$(a^x)' = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Likningen over peker mot noe fantastisk; hvis det finnes et tall a som er slik at $\lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$, så vil funksjonen a^x være sin egen deriverte funksjon! Altså er da $(a^x)' = a^x$. Vi legger nå merke til at hvis

$$a = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

så er

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left((1 + h)^{\frac{1}{h}}\right)^h - 1}{h}$$
$$= \frac{1 + h - 1}{h}$$
$$= 1$$

Hvis vi kan vise at grenseverdien $\lim\limits_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$ eksisterer, har vi altså funnet akkurat det uttrykket for a som vi ønsket oss.

Undersøking av grenseverdien

Vi innfører de to funksjonene

$$f(h) = 1 + h \qquad , \qquad g(h) = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$$

Videre ønsker vi å undersøke for hvilke verdier f er mindre enn g. Når $f = g$, har vi at

$$1 + h = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h \tag{1}$$

Vi gjør nå følgende observasjon: Gitt to tall c og k, og funksjonen $p(h) = a^h$, hvor $k > 0$ og $0 < a < 1$. Da har vi at

$$p(c + k) - p(c) = a^{c+k} - a^c = a^c \left(a^k - 1\right)$$

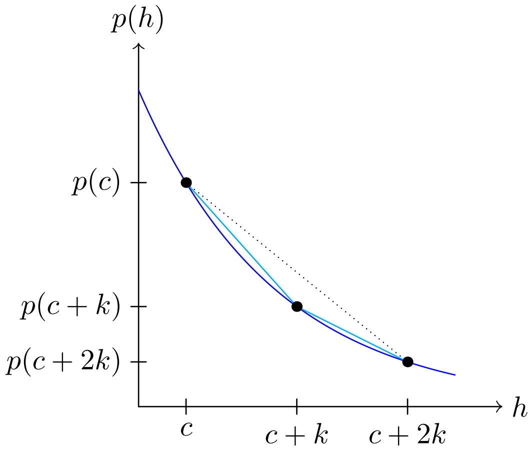
Tilsvarende er

$$p(c+2k)-p(c+k)=a^{c+k}\left(a^k-1\right)$$

Videre er $a^{c+k}<a^c$ og $a^k-1<1$, som betyr at

$$\frac{p(c+k)-p(c)}{h}<\frac{p(c+2k)-p(c)}{h}$$

Dermed må linja mellom $(c,p(c))$ og $(c+k,p(c+k))$ være brattere enn linja mellom $(c+k,p(c+k))$ og $(c+2k,p(c+2k))$, og da må $(c+k,p(c+k))$ ligge under linja mellom $(c,p(c))$ og $(c+2k,p(c+2k))$.



Det er åpenbart at $p(h)$ ikke er en lineær funksjon, og da må én av disse tre påstandene være gyldig:

(a) p er konveks for alle h

(b) p er konkav for alle h

(c) p er skiftvis konkav/konveks

Men hvis p er konkav må det finnes et intervall hvor $(c+k,p(c+k))$ ligger over linja mellom $(c,p(c))$ og $(c+2k,p(c+2k))$, og dette er selvmotsigende. Altså må p nødvendigvis være konveks for alle h.

Av det vi akkurat har funnet, kan vi konkludere med at $2-\left(\frac{1}{4}\right)^h$ er et konkavt uttrykk. Da $1+h$ er et lineært uttrykk, har (1) maksimalt to løsninger.
Vi setter $z=\frac{1}{h}$ for $h\neq 0$. Da er

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^h=\lim_{z\to\infty}=\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z}}$$

Videre kan (1) omskrives til

$$1 + \frac{1}{z} = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} \tag{2}$$

Det er enkelt å vise at $h = 0$ og $h = \frac{1}{2}$ er løsningene til (1). Dette må bety at $z = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ er den eneste løsningen til (2). Det er også enkelt å bekrefte at venstresiden i (2) er større enn høgresiden for $z = 1$, og dette innebærer at

$$1 + \frac{1}{z} < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}$$