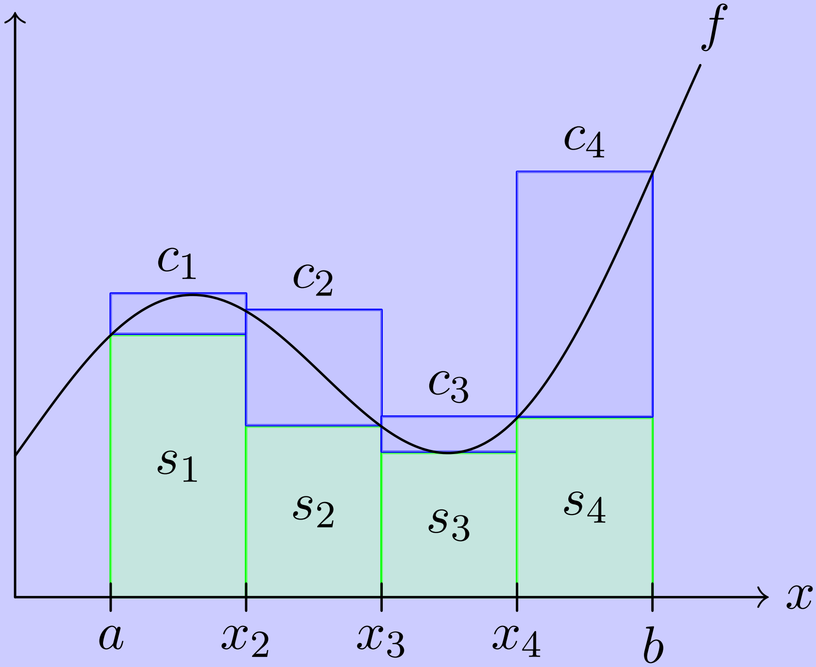
Teoretisk matematikk 2



Sindre Sogge Heggen

"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt"

"Det er ikke kunnskapen, men læringen, ikke besittelsen, men ervervelsen, ikke oppholdet, men ankomsten som gir den største gleden."

— Carl Friedrich Gauss

Alt innhold er lagd av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i LaTeX og figurene er lagd vha. LaTeX, GeoGebra og Asymptote.

01.03.2024

Om boka

Denne bokas hovedmål er å virke som lærebok i faget *Matematikk R2*. Temaene i boka dekker derfor kompetansemålene til faget per 2017, bestemt av *Utdanningsdirektoratet* (`www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-r2`).

Boka er delt inn i to deler, én teoridel og én GeoGebra-del. GeoGebra-delen kan lastes ned gratis fra nettsiden `forkalkulus.netlify.com`, som også er hjemmeside for denne boka. Hovedårsaken til en slik inndeling er at GeoGebra hyppig oppdateres. Ved å la læreteksten for GeoGebra være nettbasert, kan det sørges for at informasjonen som blir gitt alltid er tilpasset den nyeste versjonen av programvaren.

Teoridelen
En sentral del i skolematematikken er å ha en brei oversikt over ligninger som kan anvendes under visse vilkår, disse ligningene kaller vi gjerne regneregler. I de fleste lærebøker på markedet vil man erfare at noen forklaringer for regneregler er tatt med, mens andre er fullstendig utelatt. Etter forfatterens mening er dette med på å holde i live den uheldige myten om at "matematikk er et sett med regler som må læres" og at man ofte "må akspetere at sånn er det bare". Med denne holdningen undertrykker man kansje det vakreste av alt med matematikk, nemlig at (nesten) enhver sannhet bygger på en annen – alt som *kan* forklares *bør* derfor forklares.

Samtidig er læreplanen for R2 såpass omfattende at skolenes tilmålte tid til faget gjør det vanskelig å gå i dybden av hvert eneste tema. Som et et kompromiss mellom grundighet og tidspress er derfor teoridelen strukturert på følgende måte: Der hvor forfatteren mener at begrunnelesen for en regneregel er nødvendig for høy måloppnåelse i faget, er en forklaring[1] tatt med i forkant. Hvis en regneregel derimot presenteres direkte, vil man finne en forklaring for denne i seksjonen *Forklaringer* i samme kapittel, underforstått at dette er for den spesielt interesserte.

Teksten består av sju kapitler som er delt inn i seksjoner og delseksjoner. Alle oppgaver tilhørende hvert kapittel er satt av til siste seksjon, fasit finner du bakerst i boka (løsningsforslag ligger gratis tilgjen-

[1] Å *forklare* reglene istedenfor å *bevise* dem er et bevisst valg. Et bevis stiller sterke matematiske krav som ofte må defineres både på forhånd og underveis i en utledning av en ligning, noe som kan føre til at forståelsen av hovedpoenget drukner i smådetaljer. Noen av forklaringene vil likevel være gyldige som bevis.

gelig på hjemmesiden). Hver såkalt regneregel dukker opp i en blå tekstboks, som oftest etterfulgt av ett eller flere eksempler.

Rimelig unikt for denne boka, i skolesammenheng, er bruken av nummererte ligninger. Alle ligninger som blir brukt ved senere anledninger blir referert til ved et unikt nummer. Dette gjør at omskrivinger og resulter ikke kommer ”ut av det blå”, og at leseren enkelt kan finne tilbake til aktuelle ligninger. Ved digital lesning er også hyperreferanser aktivert. Dette betyr at du kan nå refererte ligninger, figurer, lenker, kapitler, seksjoner og delseksjoner ved et enkelt pekertrykk.

GeoGebra-delen
Fra og med våren 2015 har det vært spesifikke krav på eksamen i R2 om bruk av digital graftegner og CAS (Computer Algebra System). Eksamenskandidaten står fritt til å velge selv hvilket digitalt hjelpemiddel han/hun vil bruke, men på de fleste norske skoler er det GeoGebra som blir undervist.

Før kalkulus; GeoGebra i R2 tilbyr en omfattende oversikt over de mest sentrale funksjonalitetene i GeoGebra, sett fra et R2 perspektiv. Teksten følger de samme kapitlene som teoridelen og inneholder eksempler og øvingsoppgaver med løsningsforslag.

Symboler

D_f	–	definisjonsmengden til f
$\in$	–	"inneholdt i"
$\vee$	–	"eller"
$\mathbb{R}$	–	de reelle tallene
$\mathbb{N}$	–	de naturlige tallene $\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$	–	heltallene $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
$[a, b]$	–	lukket intervall fra og med a til og med b
$[a, b)$	–	halvåpent intervall fra og med a til b
(a, b)	–	åpent intervall fra a til b
$\lvert a \rvert$	–	absoluttverdien/tallverdien til a
$\perp$	–	"vinkelrett på"
$\lvert\rvert$	–	"parallell med"
$\iff$	–	"hvis og bare hvis" (om det éne er sant, er også det andre sant.)

Obs! Den engelske standarden med ' . ' som desimaltegn istedenfor ' , ' brukes.

Innhold

1 Følger og rekker **9**
- 1.1 Følger . . . 9
  - 1.1.1 Aritmetiske følger . . . 10
  - 1.1.2 Geometriske følger . . . 12
- 1.2 Rekker . . . 14
  - 1.2.1 Aritmetiske rekker . . . 14
  - 1.2.2 Geometriske rekker . . . 16
  - 1.2.3 Uendelige geometrisk rekker . . . 17
  - 1.2.4 Summetegnet . . . 19
- 1.3 Induksjon . . . 21
- Oppgaver . . . 26

2 Trigonometri **31**
- 2.1 Vinkler og enhetssirkelen . . . 31
  - 2.1.1 Vinkel og vinkelmål . . . 31
  - 2.1.2 Enhetssirkelen som tallinje . . . 34
- 2.2 Trigonometriske uttrykk . . . 37
  - 2.2.1 Sinus, cosinus og tangens til x . . . 37
  - 2.2.2 Arcuscosinus, arcusinus og arcustangens . . . 39
  - 2.2.3 Eksaktverdier . . . 41
  - 2.2.4 Trigonometriske identiteter . . . 42
  - 2.2.5 Sinus og cosinus kombinert . . . 44
- 2.3 Lineære ligninger . . . 46
  - 2.3.1 Cosinus-ligninger . . . 47
  - 2.3.2 Sinusligninger . . . 50
  - 2.3.3 Tangensligninger . . . 52
  - 2.3.4 $a\sin(kx) + b\cos(kx) = 0$ . . . 53
  - 2.3.5 $a\sin(kx) + b\cos(kx) = d$ . . . 55
- 2.4 Kvadratiske ligninger . . . 56
  - 2.4.1 Løsning ved abc-formelen . . . 56
  - 2.4.2 Kvadrater av sinus og cosinus kombinert . . . 58
- 2.5 Trigonometriske funksjoner . . . 61
  - 2.5.1 Cosinusfunksjoner . . . 61
  - 2.5.2 Sinusfunksjoner . . . 66
  - 2.5.3 Tangensfunksjoner . . . 67
  - 2.5.4 Den deriverte av de trigonometriske funksjonene . . . 69
- Forklaringer . . . 71
- Oppgaver . . . 74

3 Vektorer i rommet **82**
- 3.1 Vektorer i rommet . . . 82
- 3.2 Lengden til en vektor . . . 85
- 3.3 Regneregler og skalarprodukt . . . 87
- 3.4 Vinkelrette og parallelle vektorer . . . 92
- 3.5 Determinanter . . . 94
- 3.6 Vektorproduktet . . . 96
  - 3.6.1 Vektorprodukt som areal og volum . . . 98
- Forklaringer . . . 100
- Oppgaver . . . 105

4 Romgeometrier 110
4.1 Parameteriseringer . . . 110
4.1.1 Linje i rommet . . . 110
4.1.2 Plan i rommet . . . 112
4.2 Ligninger til geometrier . . . 115
4.2.1 Ligningen til et plan . . . 115
4.2.2 Linja mellom to plan . . . 118
4.2.3 Kuleligningen . . . 120
4.3 Avstander mellom geometrier . . . 123
4.3.1 Avstand mellom punkt og linje . . . 123
4.3.2 Avstand mellom punkt og plan . . . 125
4.4 Vinkler mellom geometrier . . . 128
4.4.1 Vinkelen mellom to linjer . . . 128
4.4.2 Vinkelen mellom to plan . . . 130
4.4.3 Vinkelen mellom plan og linje . . . 131
Oppgaver . . . 132

5 Integrasjon 136
5.1 Bestemt og ubestemt integral . . . 136
5.1.1 Den antideriverte . . . 140
5.1.2 Analysens fundamentalteorem . . . 142
5.1.3 Ubestemte integral . . . 142
5.2 Integralregning . . . 145
5.2.1 Integralet av utvalge funksjoner . . . 145
5.2.2 Bytte av variabel . . . 148
5.2.3 Delvis integrasjon . . . 151
5.2.4 Delbrøksoppspaltning . . . 154
5.3 Areal og volum . . . 159
5.3.1 Avgrenset areal . . . 159
5.3.2 Volumet av en figur . . . 162
5.3.3 Volum av omdreiningslegemer . . . 164
Forklaringer . . . 166
Oppgaver . . . 172

Vedlegg A-F 179

Indeks 191

Fasit 192

Kapittel 1

Følger og rekker

1.1 Følger

Følger er en oppramsing av tall, gjerne skilt med komma. I følgen

$$2, 4, 8, 16 \tag{1.1}$$

sier vi at vi har fire **elementer**. Element nr. 1 har verdi 2, element nr. 2 har verdi 4 og så videre. Hvert element i en rekke beskrives gjerne ved hjelp av en indeksert bokstav. Velger vi oss bokstaven a for følgen over, kan vi skrive $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ osv.

Når vi lar a_i betegne elementene i en følge, bruker vi $i \in \mathbb{N}$. I likhet med mengder, kan vi bruke $\{\}$ for å indikere en følge, og $\in$ for å vise at et element er inneholdt i en følge. For eksempel er $8 \in \{2, 4, 8, 16\}$.

Ofte kan tallene i en følge settes i sammenheng med hverandre. Multipliserer vi for eksempel et element i følgen fra (1.1) med 2, så har vi funnet det neste elementet. Den **rekursive** formelen er da

$$a_i = 2 \cdot a_{i-1}$$

I den rekursive formelen bruker vi altså den forrige verdien for å finne den neste.

Den nevnte følgen er en **endelig** følge fordi den har et konkret antall element. Hadde vi brukt den rekursive formelen kunne vi lagt på stadig flere element og fått følgen

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, ... \tag{1.2}$$

'...' betyr at nye element fortsetter i det uendelige, følgen kalles da en **uendelig** følge.

Hva om vi for denne følgen ønsker å finne element nr. 20, altså a_{20}? Det vil da lønne seg å finne en **eksplisitt** formel. For å gjøre dette skriver vi opp noen element, og ser om vi finner et mønster:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 = 2^1 \\
a_2 &= 4 = 2^2 \\
a_3 &= 8 = 2^3
\end{aligned}
$$

Av ligningene over innser vi at vi for element nr. i kan skrive

$$a_i = 2^i$$

Og slik kan vi fort finne element nr. 20:

$$
\begin{aligned}
a_{20} &= 2^{20} \\
&= 1048576
\end{aligned}
$$

En eksplisitt formel gir oss altså et uttrykk der verdien til et element regnes ut direkte. Når man har et slikt uttrykk er det også vanlig å skrive dette som siste element i rekka, (1.2) blir da seende slik ut:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., 2^i$$

1.1.1 Aritmetiske følger

Følgen

$$2, 5, 8, 11, 14, 17$$

kalles en *aritmetisk følge*. I en aritmetisk følge har to naboelement konstant differanse, i dette tilfellet 3. Skriver vi opp de tre første elementene kan vi finne mønsteret til en eksplisitt formel:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 = 2 + 3 \cdot 0 \\
a_2 &= 5 = 2 + 3 \cdot 1 \\
a_3 &= 8 = 2 + 3 \cdot 2
\end{aligned}
$$

Av ligningene over observerer vi at

$$a_i = 2 + 3 \cdot (i - 1)$$

1.1 Aritmetisk følge

Et element a_i i en **aritmetisk følge** er gitt ved den rekursive formelen

$$a_i = a_{i-1} + d \tag{1.3}$$

og den eksplisitte formelen

$$a_i = a_1 + d(i-1) \tag{1.4}$$

hvor d er den konstante differansen $a_i - a_{i-1}$.

Eksempel

Finn den rekursive og den eksplisitte formelen til følgen

$$7, 13, 19, 25, ...$$

Svar

Følgen har konstant differanse $d = 6$ og første element $a_1 = 7$. Den rekursive formelen blir da

$$a_i = a_{i-1} + 6$$

Mens den eksplisitte formelen blir

$$a_i = 7 + 6(i - 1)$$

1.1.2 Geometriske følger

Følgen

$$2, 6, 18, 54, 162$$

kalles en *geometrisk følge*. I en geometrisk følge har forholdet mellom to naboelement den samme kvotienten, i dette tilfellet 3. Også her kan vi gjenkjenne et fast mønster:

$$a_1 = 2 = 2 \cdot 3^0$$
$$a_2 = 6 = 2 \cdot 3^1$$
$$a_3 = 18 = 2 \cdot 3^2$$

Den eksplisitte formelen blir derfor

$$a_i = 2 \cdot 3^{i-1}$$

1.2 Geometrisk følge

Et element a_i i en **geometrisk følge** med kvotient k er gitt ved den rekursive formelen

$$a_i = a_{i-1} \cdot k \tag{1.5}$$

og den eksplisitte formelen

$$a_i = a_1 \cdot k^{i-1} \tag{1.6}$$

Eksempel

Finn den rekursive og den eksplisitte formelen til følgen

$$5, 10, 20, 40, ...$$

Svar

Følgen har konstant kvotien $k = 2$, og første element $a_1 = 5$. Den rekursive formelen blir da

$$a_i = a_{i-1} \cdot 2$$

Mens den eksplisitte formelen blir

$$a_i = 5 \cdot 2^{i-1}$$

Eksempel

En geometrisk følge har $a_1 = 2$ og $k = 4$. For hvilken i er $a_i = 128$?

Svar

Vi får ligningen

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^{i-1} &= 128 \\ 4^{i-1} &= 64 \\ 4^{i-1} &= 4^3 \\ i - 1 &= 3 \\ i &= 4 \end{aligned}$$

Altså er $a_4 = 128$.

1.2 Rekker

En *rekke* er strengt tatt det samme som et *addisjonsstykke* (se MB). For eksempel er

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

en rekke. Vi bruker begrepet *ledd* på samme måte som *element* for en følge; i rekka over har ledd nr. 3 verdien 18, og i alt er det fem ledd.

For en rekke er det naturlig at vi ikke bare ønsker å vite verdien til hvert enkelt ledd, men også hva summen av alle leddene er. Så lenge en rekke ikke er uendelig, kan man alltids legge sammen ledd for ledd, men for noen rekker finnes det uttrykk som gir oss summen etter mye mindre arbeid (og til og med for tilfeller av uendelige rekker).

1.2.1 Aritmetiske rekker

1.3 Summen av en aritmetisk rekke

Hvis leddene i en rekke kan beskrives som en aritmetisk følge, kalles rekka en **aritmetisk rekke**.

Summen S_n av de n første leddene i en aritmetisk rekke er gitt som

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} \tag{1.7}$$

hvor a_1 er første element i rekka.

Eksempel

Gitt den uendelige rekka

$$3 + 7 + 11 + ...$$

Finn summen av de ti første leddene

Svar

Det i-te leddet a_i i rekka er gitt ved formelen

$$a_i = 3 + 4(i - 1)$$

Dette er derfor en aritmetisk rekke, og summen av de n første leddene er da gitt av ligning (1.7). Ledd nr. 10 blir da

$$\begin{aligned} a_{10} &= 3 + 4(10 - 1) \\ &= 39 \end{aligned}$$

De ti første leddene er dermed gitt som

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{3 + 39}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

1.3 Summen av en aritmetisk rekke (forklaring)

Ved å bruke den eksplisitte formelen fra (1.4), kan vi skrive summen av en aritmetisk rekke med n element som

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + d(n - 1)) \qquad (1.8)$$

Men ledd i rekka kan også uttrykkes slik:

$$a_i = a_n - (n - i)d$$

for $1 \leq i \leq n$. Og da kan vi skrive summen som (her står siste element først, deretter nest siste osv.)

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - d(n - 1)) \qquad (1.9)$$

Adderer vi (1.8) og (1.9), får vi $2S_n$ på venstre side. På høyre side blir alle d-er kansellert, og vi ender opp med at

$$\begin{aligned} 2S_n &= na_1 + na_n \\ S_n &= n\frac{a_1 + a_n}{2} \end{aligned}$$

1.2.2 Geometriske rekker

1.4 Summen av en geometrisk rekke

Hvis ledd i en rekke kan beskrives som en geometrisk følge, kalles rekka en **geometrisk rekke**.

Summen S_n av de n første leddene i en geometrisk rekke med kvotient k og første element a_1 er gitt som

$$S_n = a_1 \frac{1-k^n}{1-k} \quad , \quad k \neq 1 \tag{1.10}$$

Hvis $k = 1$, er

$$S_n = na_1 \tag{1.11}$$

Eksempel

Gitt den uendelige rekka

$$3 + 6 + 12 + 24 + ...$$

Finn summen av de 15 første leddene.

Svar

Dette er en geometrisk rekke med $a_1 = 3$ og $k = 2$. Summen av de 15 første leddene blir da

$$\begin{aligned} S_{15} &= 3 \cdot \frac{1-2^{15}}{1-2} \\ &= 3 \cdot \frac{1-32768}{-1} \\ &= 98301 \end{aligned}$$

1.4 Summen av en geometrisk rekke (forklaring)

Summen S_n av en geometrisk rekke med n element er

$$S_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + ... + a_1k^{n-2} + a_1k^{n-1} \tag{1.12}$$

Ganger vi denne summen med k, får vi at

$$kS_n = a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + ... + a_1k^{n-1} + a_1k^n \tag{1.13}$$

Uttrykket vi søker framkommer når vi trekker (1.13) ifra (1.12):

$$\begin{aligned} S_n - kS_n &= a_1 - a_1k^n \\ S_n(1-k) &= a_1(1-k^n) \\ S_n &= a_1\frac{(1-k^n)}{1-k} \end{aligned}$$

1.2.3 Uendelige geometrisk rekker

Når en geometrisk rekke har uendelig mange element, merker vi oss dette:
Hvis $|k| < 1$, er

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} a_1\frac{1-k^n}{1-k} \\ &= a_1\frac{1}{1-k} \end{aligned}$$

Summen av uendelig mange element går altså mot en endelig (konkret) verdi! Når dette er et faktum sier vi at rekka *konvergerer* og at rekka er konvergent. Hvis derimot $|k| \geq 1$, går summen mot $\pm\infty$. Da sier vi at rekka *divergerer* og at rekka er divergent.

1.5 Summen av en uendelig geometrisk rekke

For en uendelig geometrisk rekke med kvotient $k < |1|$ og første element a_1 er summen S_∞ av rekka gitt som

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} \tag{1.14}$$

Hvis $|k| \geq 1$, vil summen gå mot $\pm\infty$.

Eksempel

Gitt den uendelige rekka

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ...$$

a) For hvilke x er rekka konvergent?

b) Vis at $S_\infty = \frac{x}{x-1}$ når rekka konvergerer.

c) For hvilken x er summen av rekka lik $\frac{3}{2}$?

d) For hvilken x er summen av rekka lik -1?

Svar

a) Dette er en geometrisk rekke med $k = \frac{1}{x}$ og $a_1 = 1$. Rekka er konvergent når $|k| < 1$, vi krever derfor at

$$|x| > 1$$

b) Når $|x| > 1$, har vi at

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Som er det vi skulle vise.

1.2.4 Summetegnet

Vi skal nå se på et symbol som forenkler skrivemåten av rekker betraktelig. Symbolet blir spesielt viktig i kapittel 5, hvor vi skal studere *integrasjon*.

Tidligere har vi skrevet rekkae mer eller mindre bent fram. For eksempel har vi sett på rekka

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

med den eksplisitte formelen

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Ved hjelp av summetegnet $\sum$ kan rekka vår komprimeres betratelig. Ved å skrive $\sum\limits_{i=1}^{5}$ indikerer vi at i er en løpende variabel som starter på 1 og deretter øker med 1 opp til 5. Hvis vi lar den eksplisitte formelen til rekka være uttrykt ved i, kan vi skrive rekka som $\sum\limits_{i=1}^{5} 2 \cdot 3^{i-1}$, underforstått at vi skal sette et plusstegn hver gang i øker med 1:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = \sum_{i=1}^{5} 2 \cdot 3^{i-1}$$

Den uendelige rekka $2 + 6 + 18 + ...$ kan vi derimot skrive som

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{i-1}$$

For summetegnet har vi også noen regneregler verdt å nevne:

1.6 Regneregler for summetegnet

For to følger $\{a_i\}$ og $\{b_i\}$ og en konstant c har vi at

$$\sum_{i=j}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=j}^{n} a_i + \sum_{i=j}^{n} b_i \tag{1.15}$$

$$\sum_{i=j}^{n} ca_i = c \sum_{i=j}^{n} a_i \tag{1.16}$$

hvor $j, n \in \mathbb{N}$ og $j < n$.

1.6 Regneregler for summetegnet (forklaring)

Ved å skrive ut summen og omrokkere på rekkefølgen av addisjonene, innser vi at

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= a_1+b_1+a_2+b_2+...+a_n+b_n\\ &= a_1+a_2+...+a_n+b_1+b_2+...+b_n\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

Ved å skrive ut summen og faktorisere ut c, innser vi også at

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}ca_i &= ca_1+ca_2+...+ca_n\\ &= c(a_1+a_2+...+a_n)\\ &= c\sum_{i=1}^{n}a_i\end{aligned}$$

1.3 Induksjon

I teoretisk matematikk stilles det strenge krav til bevis av formler. En metode som brukes spesielt for formler med heltall, er *induksjon*. Prinsippet er dette[1]:

Si vi har en ligning som er sann for et heltall n. Hvis vi kan vise at ligningen også gjelder om vi adderer heltallet med 1, har vi vist at ligningen gjelder for alle heltall større eller lik n.

Det kan være litt vanskelig i starten å få helt grep på induksjonsprinsippet, så la oss gå rett til et eksempel:

Vi ønsker å vise at summen av de n første partallene er lik $n(n+1)$:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1) \tag{1.17}$$

Vi starter med å vise at dette stemmer for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot (1+1) \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Nå vet vi altså om et heltall, nemlig $n = 1$, som formelen stemmer for. Videre antar vi at ligningen er gyldig helt opp til ledd nr. k. Vi ønsker så å sjekke at den gjelder også for neste element, altså når $n = k + 1$. Summen blir da

$$2 + 4 + 6 + ... + \overbrace{2k}^{\text{element nr. } k} + \underbrace{2(k+1)}_{\text{ledd nr.. } k+1} = (k+1)((k+1)+1)$$

Men fram til ledd nr.. k er det tatt for gitt at (1.17) gjelder, dermed får vi at[2]

---

[1] Ordene formel og ligning vil bli brukt litt om hverandre. En formel er strengt tatt bare en ligning hvor vi kan finne den ukjente størrelsen direkte ved å sette inn kjente størresler.

[2] Det kan se litt merkelig ut å skrive $2 + 4 + 6 + ... + 2k$, og anta at formelen vår gjelder for denne summen. Det virker jo da som at vi antar den gjelder for $n = 1$, $n = 2$ osv. Men dette er bare en litt kunstig skrivemåte som blir brukt for summen fram til ledd nr.. k. For etterpå sier vi at vi vet om et tall k som denne antakelsen er riktig for, nemlig $k = 1$, og da har vi jo bare ett element før ledd nr.. $k + 1$.

I påfølgende eksempler skal vi for enkelthets skyld la ledd nr.. k være innbakt i symbolet "...".

$$\underbrace{2+4+6+...+2k}_{k(k+1)}+2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$$
$$k(k+1)+2(k+1) = (k+1)(k+2)$$
$$(k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)$$

Og nå kommer den briljante konklusjonen: Vi har vist at (1.17) er sann for $n = 1$. I tillegg har vi vist at hvis ligningen gjelder for et heltall $n = k$, gjelder den også for $n = k+1$. På grunn av dette vet vi at (1.17) gjelder for $n = 1+1 = 2$. Men når vi vet at den gjelder for $n = 2$, gelder den også for $n = 2+1 = 3$ og så videre, altså for alle heltall!

1.7 Induksjon

Når vi ved induksjon ønsker å vise at ligningen

$$A(n) = B(n) \tag{1.18}$$

er sann for alle $n \in \mathbb{N}$, gjør vi følgende:

1. Sjekker at (1.18) er sann for $n = 1$.
2. Sjekker at (1.18) er sann for $n = k+1$, antatt at den er sann for $n = k$.

Eksempel 1

Vis ved induksjon at summen av de n første oddetallene er gitt ved ligningen

$$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Svar

Vi sjekker at påstanden stemmer for $n = 1$:

$$1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

Vi tar det for gitt at påstanden gjelder for $n = k$, og sjekker at den stemmer også for $n = k + 1$:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{1 + 3 + 5 + ...}_{k^2} + (2(k+1) - 1) &= (k+1)^2 \\
k^2 + 2k + 1 &= (k+1)^2 \\
(k+1)^2 &= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

Dermed er påstanden vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Merk: Hvis du har problemer med å faktorisere venstresiden når du utfører induksjon, kan du som reserveløsning skrive ut høyresiden istedenfor, men helst bør du la være. Dett er litt for elegansens skyld (selv ikke matematikk kan fraskrive seg en porsjon forfengelighet), men også fordi sjansen for regnefeil blir mindre.

Eksempel 2

Vis ved induksjon at:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Svar

Vi starter med å sjekke for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} \\ 1^3 &= \frac{2^2}{4} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Ligningen er altså sann for $n = 1$. Vi antar videre at den også stemmer for $n = k$, og sjekker for $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + ...}_{\frac{k^2(k+1)^2}{4}} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} &= \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4))}{4} &= \\ \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Påstanden er dermed vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel 3

Vis ved induksjon at:

$$3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot ... \cdot 3^n = 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

Svar

Vi sjekker at påstanden er sann for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 3 &= 3^{\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)} \\ 3 &= 3^1 \end{aligned}$$

Videre antar vi at påsanden stemmer også for $n = k$, og sjekker for $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \underbrace{3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot ...}_{3^{\frac{1}{2}k(k+1)}} \cdot 3^{k+1} &= 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+1+1)} \\ 3^{\frac{1}{2}k(k+1)} \cdot 3^{k+1} &= 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)} \\ 3^{\frac{1}{2}k(k+1)+k+1} &= \\ 3^{\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{2}{2}(k+1)} &= \\ 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)} &= 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

Påstanden er dermed vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgaver for kapittel 1

1.1.1

a) Skriv opp de tre første partallene. Lag en rekursiv og en eksplisitt formel for det i-te partallet.

b) Skriv opp de tre første oddetallene. Lag en eksplisitt formel for det i-te oddetallet.

1.1.2

Finn det eksplisitte uttrykket til den aritmetiske følgen når du vet at

a) $a_1 = 3$ og $a_4 = 30$

b) $a_1 = 5$ og $a_{11} = -25$

c) $a_3 = 14$ og $a_5 = 26$

1.1.3

Finn det eksplisitte uttrykket til den geometriske følgen når du vet at

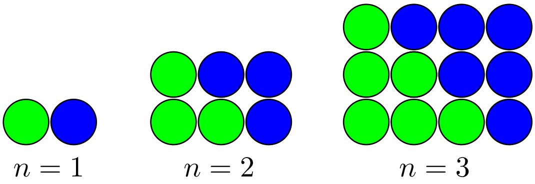
a) $a_1 = \frac{1}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{6}$

b) $a_1 = 5$ og $a_4 = 40$

1.2.1

a) Bruk figuren under til å forklare at summen S_n av de n første naturlige tallene er gitt ved

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



b) Skriv opp summen av det første, de to første og de tre første oddetallene. Bruk en lignende figur som i oppgave a) til å vise at summen S_n av de n første oddetallene er

$$S_n = n^2$$

1.2.2
$-1 - 2 - 3$ er en rekke. Skriv om rekka slik at den blir uttrykt ved ledd som adderes med hverandre.

1.2.3
Finn S_{10} for rekkene:

a) $7 + 13 + 19 + 25 + \ldots$ **b)** $1 + 9 + 17 + 25 + \ldots$

1.2.4
Gitt rekken

$$8 + 11 + 14 + \ldots$$

For hvilken n er summen av rekken lik 435?

1.2.5
Gitt den uendelige rekken

$$3 + 7 + 11 + ...$$

For hvilken n er summen av rekken lik 903?

1.2.6
Gitt den uendelige rekken

$$3 + 6 + 12 + 24 + ...$$

For hvor mange element er summen av rekken lik 93?

1.2.7
Bruk summen av en aritmetisk rekke til å vise at ligningen gitt i *Eksempel 3* på s. 25 er sann.

1.2.8
Gitt rekken

$$3 + 12 + 48 + \ldots + 768$$

Finn summen av rekken.

1.2.9

En geometrisk rekke har $a_1 = 2$ og $k = 3$.

a) Vis at summen S_n kan skrives som:

$$S_n = 3^n - 1$$

b) Regn ut summen for de tre første leddene.

c) For hvilken n er $S_n = 728$?

1.2.10

Gitt den uendelige rekken

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \dots$$

a) Forklar hvorfor rekken er konvergent.

b) Finn summen av den uendelige rekken.

1.2.11

Gitt den uendelige rekka

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ...$$

a) For hvilken x er summen av rekka lik $\frac{3}{2}$?

b) For hvilken x er summen av rekka lik -1?

1.2.12

a) Skriv det uendelige desimaltallet 0.999... som en uendelig geometrisk rekke.

b) Forklar hvorfor rekken er konvergent og bruk dette faktumet til å finne summen av rekken.

1.2.13

Gitt den uendelige rekken

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^2 + \ldots$$

a) For hvilke x er rekken konvergent?

b) For hvilken x er $S_n = \frac{2}{9}$?

c) For hvilken x er $S_n = \frac{1}{6}$?

1.3.1

Vis ved induksjon at for alle $n \in \mathbb{N}$ er

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

c) $4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n = \dfrac{4}{3}(4^n - 1)$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

1.3.2

Vis ved induksjon at $n(n^2+2)$ er delelig med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

1.3.3

a) Vis ved induksjon at:

$$\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n)!}{(2n-1)!} = 2^n n!$$

Hint: $(2(k+1))! = (2k+1)!(2k+2)$.

b) Hvordan kan venstresiden i a) skrives enklere? Utfør induksjonsbeviset på nytt etter forenklingen.

Gruble 1

(R2H23D1)
En uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av de fire første leddene når du får vite at $a_1 = 4$.

I en aritmetisk rekke er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

b) Bestem a_4.

Gruble 2

Gitt en følge med rekursiv formel

$$a_i = ka_{i-1} + d$$

hvor k og d er konstanter. Finn en eksplisitt formel for følgen uttrykt ved a_1, k, d og $n \in \mathbb{N}$.

Gruble 3

Målet med denne oppgaven er å, uten bruk av induksjon, vise at summen av n kvadrater er gitt ved følgende formel:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \tag{I}$$

a) Forklar hvorfor vi kan skrive

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots = 1 + (1+3) + (1+3+5) + \ldots$$

Hint: Se opg. 1.2.1 b).

b) Ut ifra det du fant i a), forklar at

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n + \sum_{i=1}^{n} (n-i)(2i+1)$$

c) Skriv ut alle kjente summer fra b) og løs ligningen med hensyn på $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$. Du skal da komme fram til (I).

Kapittel 2

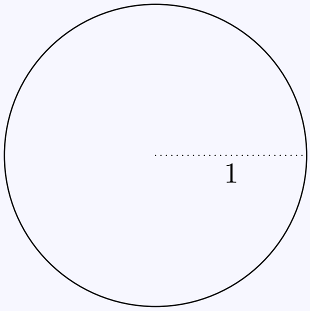
Trigonometri

2.1 Vinkler og enhetssirkelen

2.1.1 Vinkel og vinkelmål

2.1 Enhetssirkel

En sirkel med radius 1 kalles en **enhetssirkel** .



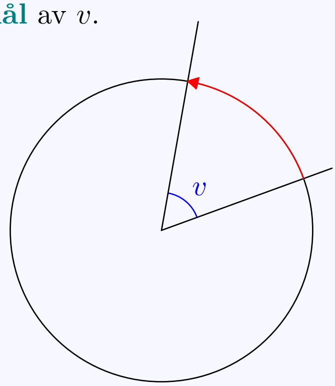
Merk

Så lenge ikke annet er nevnt, tar vi det for gitt at alle sirkler som blir vist i dette kapitlet er enhetssirkler.

2.2 Absolutt vinkelmål

Gitt en vinkel v mellom to linjestykker, og en enhetssirkel plassert med sentrum i toppunktet til vinkelen.

Den minste buelengden vi må gå (mot klokka) langs enhetssirkelen for å komme fra det éne linjestykket[1] til det andre, er et **absolutt vinkelmål** av v.



[1] Eventuelt forlengelsen av dem.

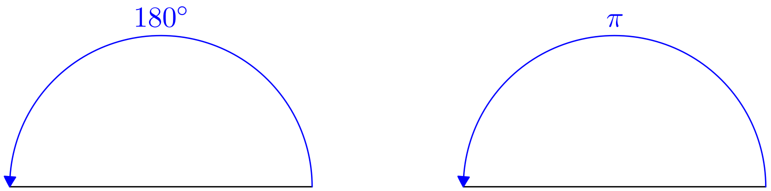
Radianer

Benevningen til absolutt vinkelmål er den dimensjonsløse[1] enheten **radianer**. Når man skriver vinkler i radianer er det vanligst å oppgi vinkelmålet bare ved et tall, men noen ganger skriver man 'radianer' eller 'rad' bak for å tydeliggjøre at det er snakk om en vinkel.

[1] Det er jo bare en *tenkt* lengde.

Som vi har sett i MB, vil buen til en halvsirkel kunne deles inn i 180°. Lengden til denne buen er π (forklar for deg selv hvorfor), som betyr at

$$180^\circ = \pi$$



Figur 2.1

2.3 Grader og absolutt vinkelmål (radianer)

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \tag{2.1}$$

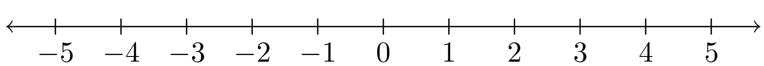
Eksempel

Tabellen under viser ekvivalente lengder målt i grader (øverst) og målt i radianer (nederst).

0°	30°	45°	60°	90°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

2.1.2 Enhetssirkelen som tallinje

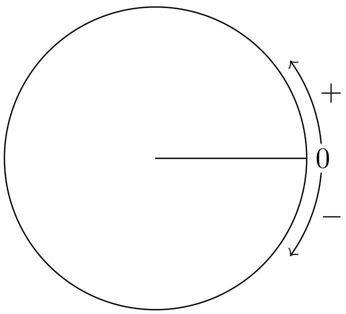
Tenk at noen ber deg tegne hele tallinjen. Dette virker som en umulig oppgave siden tallinjen består av intervallet $[-\infty, \infty]$.



Figur 2.2: Horisontal tallinje på intervallet $[-5, 5]$

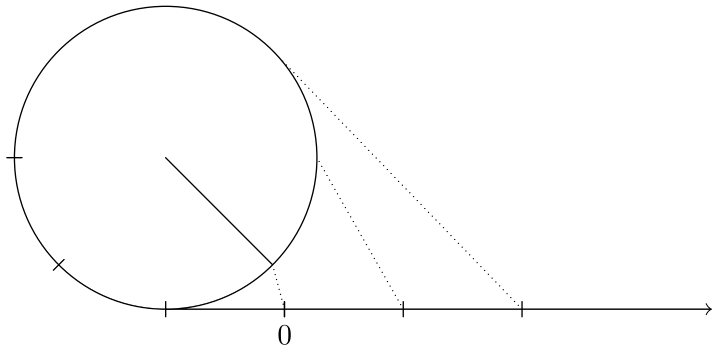
Men hva med dette?

Vi tegner en enhetssirkel og den horisontale radien til denne. På enden av radien setter vi verdien 0. Videre sier vi at buelengden vi går *mot* klokka har positivt fortegn, mens buelengden vi går *med* klokka har negativt fortegn.



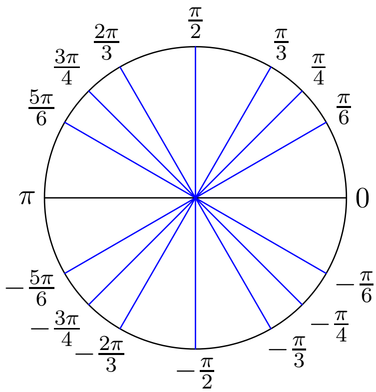
Figur 2.3

Vi kan da se på sirkelen som et hjul som har startet på en horisontal tallinje i $-\infty$ og deretter "tatt" alle verdier til seg mens det har rullet mot høyere tall.



Figur 2.4

Enhetssirkelen som tallinje er selveste grunnlaget for de *trignometriske uttrykkene* vi skal se på i kommende seksjon. Det vil da være noen verdier på interallet $(-\pi, \pi]$ som blir spesielt viktige, disse er derfor tegnet inn i figuren under:



Figur 2.5: Intervallet $(-\pi, \pi]$ avbildet på enhetssirkelen.

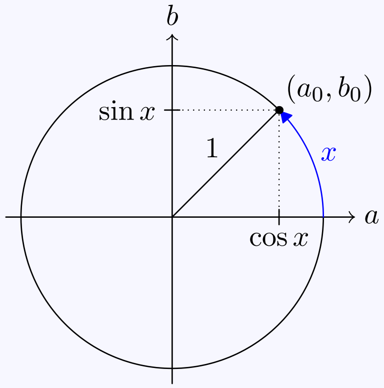
Ekstra verdt å legge merke til i *figur 2.5* er symmetrien om horisontallinjen, og at sektoren mellom 0 og et tall på øvre halvdel har en vinkel som, målt i radianer, har samme verdi som tallet.

2.2 Trigonometriske uttrykk

2.2.1 Sinus, cosinus og tangens til x

2.4 Sinus og cosinus

La enhetssirkelen være tegnet inn i et koordinatsystem med sentrum i origo, som vist i figuren under.



La videre x representere en buelengde vandret i positiv (mot klokka) eller negativ retning fra punktet $(1, 0)$ til et punkt (a_0, b_0). Da er

$$\cos x = a_0 \tag{2.2}$$

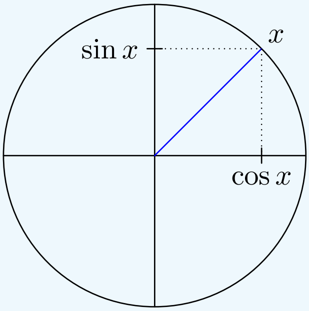
$$\sin x = b_0 \tag{2.3}$$

Merk

Definisjonene over er bare utvidete versjoner av de vi så på i TM1.

Forenklet figur

Da enhetssirkelen befinner seg i intervallet $[-1, 1]$ både langs horisontalaksen og vertikalaksen, skal vi i kommende figurer kutte akselinjene rett av i disse endepunktene. Og istedenfor å tegne både et punkt og buen som tar oss dit, nøyer vi oss med å skrive x i enden av buen. Med disse og noen flere små forenklinger blir figuren fra definisjonen på forrige side seende slik ut:



Kjerne

Etterhvert vil vi også bruke begrepet **kjerne** om tallet vi finner den trigonometriske verdien av. For eksempel er x kjernen til cosinusuttrykket $\cos x$, mens $kx + c$ er kjernen til sinusutrykket $\sin(kx + c)$.

Tangens

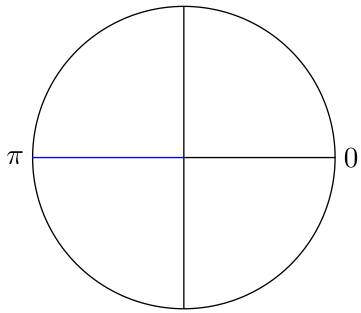
Med $\cos x$ og $\sin x$ definert, er det fort gjort å definere *tangens* til et tall x, som vi skriver som $\tan x$:

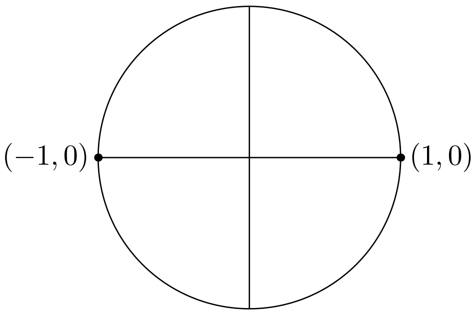
2.5 Tangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{2.4}$$

2.2.2 Arcuscosinus, arcusinus og arcustangens

Ut ifra figuren knyttet til (2.3) og (2.2) kan vi slutte at $\cos \pi = -1$ (og at $\sin \pi = 0$).





Figur 2.6: a) π plassert på enhetssirkelen som tallinje. b) I koordinatsystemet samsvarer verdien π med punktet $(-1, 0)$

Altså er π et tall som har -1 som cosinusverdi. Dette kan også uttrykkes ved begrepet arcuscosinus, som gjerne forkortes til[1] acos. Da skriver vi $\operatorname{acos} \pi = -1$.

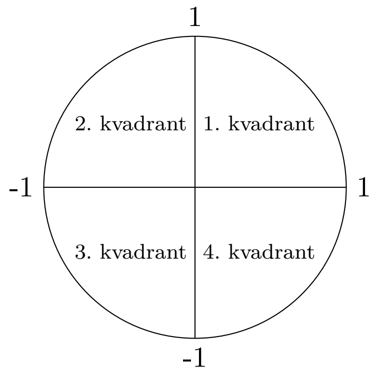
Si videre vi har ligningen

$$\operatorname{acos} d = x \tag{2.5}$$

hvor $d \in [-1, 1]$. Å bestemme verdien til x uten bruk av hjelpemidler er ofte vrient, men vi kan likevel si noe om *hvor* på enhetssirkelen x befinner seg:

Et koordinatsystem plassert i sentrum av enhetssirkelen gir en inndeling i fire sektorer. Disse sektorene kalles første, andre, tredje og fjerde *kvadrant* .

[1]Noen forfattere bruker $\arccos x$ eller $\cos^{-1} x$ istedenfor $\operatorname{acos} x$.



Figur 2.7: Enhetssirkelen inndelt i kvadranter, med ekstremverdiene til cosinus og sinus i endene.

Det er helt avgjørende å forstå at vi i trigonometri snakker om tre forskjellige tallinjer, nemlig enhetssirkelen, horisontalaksen og vertikalaksen. Mens *figur 2.5* viser tall plassert langs buen til enhetssirkelen, er -1 og 1 i *figur 2.7* plassert på horisontal- og vertikalaksen. 1 og -1 representerer ekstremverdiene til cosinus (horisontalaksen) og sinus (vertikalaksen).

Av dette observerer vi at hvis $d \in [0{,}1]$, må x ligge[1] på buen til første eller fjerde kvadrant. På samme vis må x ligge på buen til andre eller tredje kvadrant hvis $d \in [-1, 0]$.

Vi innser også at det må finnes flere verdier av x som kan oppfylle (2.5). For eksempel må det finnes et tall i 4. kvadrant som har samme cosinusverdi som et tall i 1. kvadrant. For denne typen ligninger er det likevel vanlig å bare oppgi én løsning, altså en x liggende enten i første eller andre kvadrant. I denne boka, og på de fleste kalkulatorer, svarer dette til $x \in [0, \pi]$.

Prinsippet bak arcussinus og arcustangens er akkurat det samme som for arcuscosinus, bare at vi for $x = \operatorname{asin} d$ eller $x = \operatorname{atan} d$ bruker en løsning som ligger i første eller fjerde kvadrant. Vanligst er å oppgi en x på intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

[1]Tall med cosinusverdi lik $-1, 0$ eller 1 ligger i grensesjiktet mellom to kvadranter.

2.6 Arcusuttrykkene

Uttrykket

$$\operatorname{atri} x = d \tag{2.6}$$

hvor tri erstattes med sin, cos eller tan, betyr at

$$\operatorname{tri} d = x \tag{2.7}$$

Eksempel

$$\operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

2.2.3 Eksaktverdier

Et lite utvalg av sinus-, cosinus- og tangensverdier[1] bør vi kjenne til, nemlig følgende[2]:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Table 2.1: Eksaktverdier for sinus, cosinus og tangens av x

Viktig å merke seg er at vi ut ifra denne tabellen også vet om eksaktverdiene for sinus, cosinus og tangens til mange flere tall. Tar vi et blikk tilbake til *figur 2.5*, kan vi for eksempel se at $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{3\pi}{4}$ har samme sinusverdi[3] og at $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Slik kan vi ut ifra tabell 2.1 bestemme de eksakte sinus-, cosinus- og tangensverdiene til alle tallene i *figur 2.5*.

[1] $\tan x$ er ikke definert for $x = \frac{\pi}{2}$, men $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

[2] I vedlegg A finner du et enkelt triks som kan hjelpe deg å huske tabellen.

[3] Strengt tatt kan vi ikke være helt sikre på dette ut ifra øyemål, men det blir forklart i seksjon 2.3 at det stemmer.

2.2.4 Trigonometriske identiteter

Mange trigonometriske uttrykk kan skrives på flere måter, disse omskrivingene kalles gjerne *trigonometriske identiteter*. Et lite utvalg er listet opp under[1]:

2.7 Trigonometriske identiteter

For $x, u, v \in \mathbb{R}$ har vi at

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \tag{2.8}$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v \tag{2.9}$$
$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \tag{2.10}$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v \tag{2.11}$$
$$\cos(-x) = \cos x \tag{2.12}$$
$$\sin(-x) = -\sin x \tag{2.13}$$
$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x \tag{2.14}$$
$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x \tag{2.15}$$
$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x \tag{2.16}$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{2.17}$$
$$\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \sin u \tag{2.18}$$
$$\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u \tag{2.19}$$

Eksempel 1

Bruk de trigonometrisk identitetene til å finne eksaktverdien til $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ og $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ når du vet at $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ og $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Svar

[1] For trigonometriske potenser er det vanlig å skrive eksponenten bak selve "navnet". For eksempel betyr $\sin^2 x$ det samme som $(\sin x)^2$.

Obs! Som nevnt blir $\sin^{-1} x$ brukt istedenfor $\operatorname{asin} x$ i noen lærebøker. Da er $\sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1}$.

Vi har at

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

og videre at

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Skriv om

$$2\sin\left(5x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

til et uttrykk bestående av både et cosinus- og et sinus-ledd.

Svar

Vi vet at $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ og at $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned}2\sin\left(5x+\frac{2\pi}{3}\right) &= 2\left(\sin(5x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(5x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\ &= 2\left(\sin(5x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos(5x)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \sqrt{3}\cos(5x)-\sin(5x)\end{aligned}$$

2.2.5 Sinus og cosinus kombinert

Av *Eksempel 2* på forrige side merker vi oss at når et sinus-uttrykk kan skrives om til et kombinert sinus- og cosinusuttrykk, må det også gå an å gå andre veien:

2.8 Sinus og cosinus kombinert

Vi kan skrive

$$a\cos(kx) + b\sin(kx) = r\sin(kx + c) \tag{2.20}$$

der $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ og hvor

$$\cos c = \frac{b}{r} \tag{2.21}$$

$$\sin c = \frac{a}{r} \tag{2.22}$$

Eksempel

Skriv om $\sqrt{3}\sin(\pi x) - \cos(\pi x)$ til et sinusuttrykk.

Svar

Vi starter med å finne r:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Videre krever vi at

$$\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin c = -\frac{1}{2}$$

Tallet $c = -\frac{\pi}{6}$ oppfyller disse kravene, derfor er

$$\sqrt{3}\sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Se vedlegg B for tips til hvordan å finne c når tallet ikke ligger i første kvadrant.

2.8 Sinus og cosinus kombinert (forklaring)

Gitt uttrykket

$$a\cos(kx) + b\sin(kx) \tag{2.23}$$

Vi vet at (se (2.10))

$$r\sin(kx + c) = r\sin c\cos(kx) + r\cos c\sin(kx) \tag{2.24}$$

Uttrykkene fra ligning (2.23) og (2.24) er like hvis

$$a = r\sin c \tag{2.25}$$
$$b = r\cos c \tag{2.26}$$

Kvadrerer vi ligning (2.25) og (2.26), får vi at

$$a^2 = r^2\sin^2 c \tag{2.27}$$
$$b^2 = r^2\cos^2 c \tag{2.28}$$

Hvis vi nå legger sammen ligning (2.27) og (2.28), finner vi et uttrykk for r:

$$\begin{aligned} r^2\sin^2 c + r^2\cos^2 c &= a^2 + b^2 \\ r^2(\sin^2 c + \cos^2 c) &= a^2 + b^2 \\ r^2 &= a^2 + b^2 \\ r &= \pm\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Hvis vi velger den positive løsningen for r, får vi at

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos c = \frac{b}{r}$$

$$\sin c = \frac{a}{r}$$

2.3 Lineære ligninger

I forrige seksjon så vi på sinus-, cosinus- og tangensverdiene til tall på intervallet $[-\pi, \pi)$. Vi skal nå gå over til å løse trigonometriske ligninger. Da er det viktig å ta hensyn til at løsningene liksågodt kan ligge utenfor dette intervallet, og at mange forskjellige tall kan oppfylle samme ligning.

De første ligningene vi skal se på kalles *lineære* trigonometriske ligninger. Navnet kommer av at de trigonometriske uttrykkene som $\sin x$, $\cos x$ osv. bare forekommer i første potens[1].

Merk

Selv om regel 2.9, regel 2.10, regel 2.11 er nyttige å vite om, vil lineære trigonometriske ligninger ofte kunne løses på en mer direkte metode enn via formlene som disse reglene gir. Når du skal løse oppgaver til denne seksjonen vil det derfor være lurt å først studere vedlegg B godt.

[1] Tallet a^1 er a i første potens, mens a^2 er a i andre potens osv.

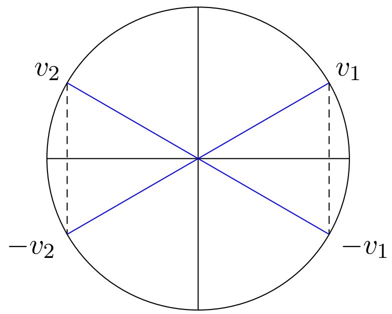
2.3.1 Cosinus-ligninger

La[1] $d \in (-1, 1)$. Vi ønsker å finne alle løsninger av ligningen

$$\cos x = d$$

Hvis $0 \leq d < 1$, må vi ha en løsning $x = v_1$ i første kvadrant (se *figur 2.7* og *2.8*). Men om vi fra 0 går en buelengde v_1 i negativ retning, har vi kommet like langt langs horisontalaksen, derfor må også $x = -v_1$ være en løsning.

Hvis vi derimot har at $-1 < d < 0$, må vi ha en løsning $x = v_2$ i andre kvadrant, og da må også $x = -v_2$ være en løsning.



Figur 2.8

Og hva nå om vi står i punktet til den ene av løsningene og derifra vandrer 2π buelengder i enten negativ eller positiv retning? Jo, da er vi tilbake til det eksakt samme punktet. Har vi én løsning kan vi altså finne en ny løsning ved å legge til et heltalls antall 2π. Alle heltallene, nemlig følgen $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, skriver vi som $\mathbb{Z}$.

Til slutt tar vi med oss at siden cosinusverdier handler om horisontalkoordinaten til et punkt på enhetssirkelen, vil vi ikke få svar hvis $d \notin [-1,1]$.

[1] Når $d \in \{-1, 1\}$ får vi to spesialtilfeller av ligningen, men resonnementet for å finne løsningene er helt analogt til det som gis ved $d \in (-1, 1)$.

2.9 Cosinusligninger

Gitt ligningen

$$\cos x = d \tag{2.29}$$

For $n \in \mathbb{Z}$ har vi at

- Hvis $d \in (-1, 1)$, har (2.29) løsningene

$$x = \pm \operatorname{acos} d + 2\pi n \tag{2.30}$$

- Hvis $d = 1$, har (2.29) løsningene

$$x = 2\pi n \tag{2.31}$$

- Hvis $d = -1$, har (2.29) løsningene

$$x = \pi + 2\pi n \tag{2.32}$$

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$4 \cos x = 2\sqrt{3}$$

Svar

Vi starter med å isolere cosinusuttrykket:

$$\begin{aligned} 4 \cos x &= 2\sqrt{3} \\ \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Siden $\operatorname{acos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, har vi at

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

Eksempel 2

Finn løsningene til ligningen

$$4\cos\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \qquad , \qquad x \in [-9{,}4]$$

Svar

Fra svaret i *Eksempel 1* på forrige side vet vi at kjernen må oppfylle kravet

$$\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

Vi må altså enten ha at

$$\frac{\pi}{6}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$
$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$
$$x = 3 + 12n$$

eller at

$$\frac{\pi}{6}x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$
$$\frac{\pi}{6}x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$
$$x = 1 + 12n$$

På intervallet $[-9, 4]$ vil $x \in \{-9, 1, 3\}$ oppfylle dette kravet.

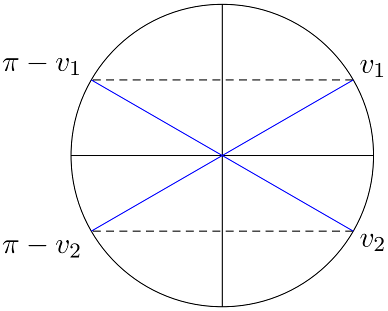
2.3.2 Sinusligninger

Gitt ligningen

$$\sin x = d \tag{2.33}$$

Hvis $0 \leq d < 1$, må vi ha en løsning $x = v_1$ i første kvadrant (se *figur 2.9*). Men om vi starter i π og går en buelengde x_1 i negativ retning, har vi kommet akkurat like høyt langs vertikalaksen, og dermed må også $x = \pi - v_1$ være en løsning.

Er derimot $-1 < d < 0$, må en løsning $x = v_2$ ligge i fjerde kvadrant. Da er også $x = \pi - v_2$ en løsning.



Figur 2.9

Og vandrer vi $\pm 2\pi$ finner vi stadig nye løsninger.

2.10 Sinusligninger

Gitt ligningen

$$\sin x = d \tag{2.34}$$

For $n \in \mathbb{Z}$ har vi at

- Hvis $d \in (-1, 1)$ har (2.34) løsningene

$$x = \operatorname{asin} d + 2\pi n \quad \vee \quad x = \pi - \operatorname{asin} d + 2\pi n \tag{2.35}$$

- Hvis $d = 1$ har (2.34) løsningene

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \tag{2.36}$$

- Hvis $d = -1$ har (2.34) løsningene

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \tag{2.37}$$

Eksempel

Løs ligningen

$$2\sin x = \sqrt{2}$$

Svar

Vi kan skrive

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\text{asin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, da er x enten gitt som

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

eller som

$$\begin{aligned} x &= \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ &= \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{aligned}$$

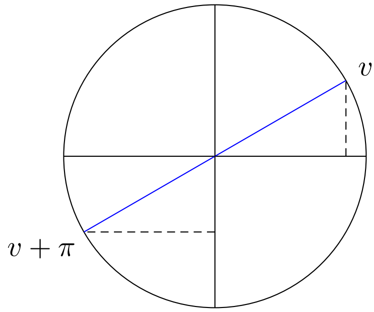
Merk: Det kan være praktisk å bli fortrolig med sinus- og cosinusverdiene til tallene i *figur 2.5*. Da vil man direkte se at $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{3\pi}{4}$ er tall med samme sinusverdi, men at de ligger i hver sin kvadrant. Legges $2\pi n$ til hver av dem, har man funnet alle løsninger. Man unngår da å regne ut π minus et tall, som er tidsbesparende og minsker sjansen for regnefeil.

2.3.3 Tangensligninger

Gitt ligningen

$$\tan x = d$$

I én av kvadrantene må det finnes en løsning $x = v$. Hvis vi vandrer en buelengde π fra denne løsningen, kommer vi til et tall som har sinusverdi $-\sin v$ og cosinusverdi $-\cos v$.



Figur 2.10

Dette tallet har altså samme tangensverdi som v, og må derfor også være en løsning. Og vandrer vi $\pm\pi$ herfra får vi stadig nye løsninger.

2.11 Tangensligninger

Ligningen

$$\tan x = d \tag{2.38}$$

har løsningene

$$x = \operatorname{atan} d + \pi n \tag{2.39}$$

hvor $d \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{Z}$.

Eksempel

Løs ligningen

$$\sqrt{3}\tan(2x) = 1$$

Svar

Vi starter med å isolere tangensuttrykket:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\tan(2x) &= 1 \\ \tan(2x) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Siden $\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, får vi at

$$\begin{aligned}2x &= \frac{\pi}{6} + \pi n \\ x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \pi n\right)\end{aligned}$$

2.3.4 $a\sin(kx) + b\cos(kx) = 0$

La oss prøve å løse ligningen

$$a\sin(kx) + b\cos(kx) = 0 \tag{2.40}$$

hvor a, b og k er konstanter forskjellige fra 0.

Det første vi observerer er at hvis $\cos(kx) = 0$, er[1] $x = \frac{1}{k}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. I så tilfelle er $\sin(kx) = \pm 1$, og da får vi at

$$a\sin(kx) + b\cos(kx) = \pm a + 0 \neq 0$$

Dette funnet gjør at vi trygt kan dele (2.40) med $\cos(kx)$:

$$\begin{aligned}\frac{a\sin(kx) + b\cos(kx)}{\cos(kx)} &= \frac{0}{\cos(kx)} \\ \frac{a\sin(kx)}{\cos kx} + b &= 0 \\ a\tan(kx) &= -b \\ \tan(kx) &= -\frac{b}{a}\end{aligned}$$

[1]Se (2.30).

Vi har nå endt opp med en tangensligning med løsninger gitt ved (2.39).

2.12 $a\sin(kx) + b\cos(kx) = 0$

Ligningen

$$a\sin(kx) + b\cos(kx) = 0 \tag{2.41}$$

løses ved å dele begge sider med $\cos(kx)$ og deretter løse den resulterende tangensligningen.

Eksempel

Løs ligningen

$$\sqrt{3}\sin(\pi x) + \cos(\pi x) = 0$$

Svar

Vi starter med å dele på $\cos(kx)$:

$$\frac{\sqrt{3}\sin(\pi x) + \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} = \frac{0}{\cos(\pi x)}$$

$$\sqrt{3}\tan(\pi x) + 1 = 0$$

$$\tan(\pi x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Siden $\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, er

$$\pi x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = n - \frac{1}{6}$$

2.3.5 $a \sin(kx) + b\cos(kx) = d$

En noe mer avansert utgave av (2.41) får vi hvis høyresiden er en konstant d istedenfor 0. Da utnytter vi (2.20) for å omskrive ligningen til en form vi kan løse:

2.13 $a \sin(kx) + b\cos(kx) = d$

Ligningen

$$a \sin(kx) + b\cos(kx) = d \tag{2.42}$$

kan løses ved å omforme venstresiden til et reint sinusuttrykk, og deretter løse den resulterende sinusligningen.

Eksempel

Løs ligningen

$$\sin(3x) + \cos(3x) = \sqrt{2}$$

Svar

Vi starter med å finne det kombinerte sinusuttrykket for venstresiden av ligningen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \qquad \sin c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$c = \frac{\pi}{4}$ oppfyller kravene over, dermed er

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned} 3x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{4} + 2n\right) \end{aligned}$$

2.4 Kvadratiske ligninger

Vi skal nå se på to typer ligninger der sinus-, cosinus- eller tangensuttrykk opptrer i andre potens. Uttrykk i andre potens kalles *kvadrerte* uttrykk, derav navnet *kvadratiske ligninger*.

2.4.1 Løsning ved abc-formelen

La oss forsøke å løse ligningen

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \tag{2.43}$$

Vi observerer at (2.43) er en andregradsligning for $\sin x$ (erstatt $\sin x$ med u hvis du syns det er vanskelig å se). Vi kan derfor bruke *abc*-formelen til å løse ligningen med hensyn på $\sin x$, og finner da at:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = -2$$

Altså har vi to sinusligninger vi nå må finne løsningene til. Vi vet at $\operatorname{asin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, dermed er (se (2.35)):

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Derimot er det ingen *reelle* tall som kan oppfylle ligningen $\sin x = -2$, vi anser derfor (2.43) som ferdig løst.

2.14 Kvadratiske ligninger I

Når vi skal løse ligninger av typen

$$a \operatorname{tri}^2 x + b \operatorname{tri} x + c = 0 \tag{2.44}$$

hvor a, b og c er konstanter og tri erstattes med sin, cos eller tan, gjør vi følgende:

1. løser ligningen mhp. tri x
2. løser de nye ligningene mhp. x

Eksempel 1

Løs ligingen

$$\cos^2 x - 3\cos x - 4 = 0$$

Svar

Vi starter med å løse andregradsligningen mhp. $\cos x$. Da $1(-4) = -4$ og $1 - 4 = -3$, får vi at (se vedlegg C)

$$\cos x = -1 \quad \vee \quad \cos x = 4$$

Siden $\cos x = 4$ ikke har noen reell løsning, trenger vi bare å løse ligningen $\cos x = -1$. Vi får da at

$$x = \pi + 2\pi n$$

Eksempel 2

Løs ligningen

$$4\cos^2(\pi x) - \sqrt{48}\cos(\pi x) + 3 = 0$$

Svar

Av *abc*-formelen er

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \frac{-(-\sqrt{48}) + \sqrt{\sqrt{48}^2 - 4\cdot 4\cdot 3}}{2\cdot 4} \\
&= \frac{\sqrt{48}}{8} \\
&= \frac{\sqrt{16}\sqrt{3}}{2\cdot 4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Fordi $\operatorname{acos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, har vi at

$$
\begin{aligned}
\pi x &= \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\
&= \pm\frac{1}{6} + 2n
\end{aligned}
$$

2.4.2 Kvadrater av sinus og cosinus kombinert

Vi går videre til å studere ligningen

$$3\cos^2(2x) + 5\sin^2(2x) = 4 \tag{2.45}$$

Fra (2.17) vet vi at $1 = \cos^2(2x) + \sin^2(2x)$, derfor kan vi skrive:

$$
\begin{aligned}
4 &= 4\cdot 1 \\
&= 4\Big(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)\Big)
\end{aligned}
$$

Kanskje litt overraskende forenkler dette ligningen vi ønsker å løse:

$$
\begin{aligned}
3\cos^2(2x) + 5\sin^2(2x) &= 4\Big(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)\Big) \\
-\cos^2(2x) + \sin^2(2x) &= 0
\end{aligned}
$$

Videre deler[1] vi ligningen med $\cos^2(2x)$:

$$\begin{aligned}\frac{-\cos^2(2x)+\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} &= \frac{0}{\cos^2(2x)}\\ -1+\tan^2(2x) &= 0\\ \tan^2(2x) &= 1\\ \tan(2x) &= \pm 1\end{aligned}$$

Siden $\operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4}$ og $\operatorname{atan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, har vi at

$$\begin{aligned}2x &= \pm\frac{\pi}{4}+\pi n\\ x &= \frac{1}{2}\left(\pm\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\end{aligned}$$

2.15 Kvadratiske ligninger II

For å løse ligninger på formen

$$a\cos^2(kx)+b\sin^2(kx) = d \tag{2.46}$$

utnytter vi at $d = d(\cos^2(kx)+\sin^2(kx))$. Vi dividerer så ligningen med $\cos^2(kx)$, og løser den resulterende tangensligningen.

Eksempel

Løs ligningen

$$-3\cos^2(5x)+\sin^2(5x) = -2$$

Svar

$$\begin{aligned}-3\cos^2(5x)+\sin^2(5x) &= -2(\cos^2(5x)+\sin^2(5x))\\ -\cos^2(5x)+3\sin^2(5x) &= 0\\ -1+3\tan^2(5x) &= 0\\ \tan^2(5x) &= \frac{1}{3}\\ \tan(5x) &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

[1] Vi observerer at (2.45) ikke har en løsning (sjekk selv!) når $\cos(2x) = 0$. Derfor er vi sikre på å unngå nulldivisjon.

Siden $\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ og $\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, har vi at

$$5x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = \pm\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$$

2.5 Trigonometriske funksjoner

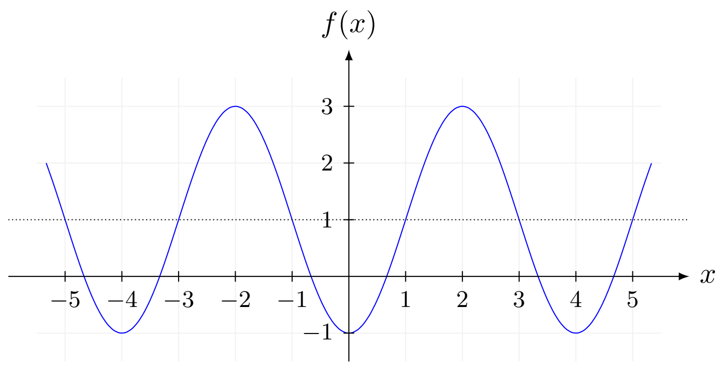
2.5.1 Cosinusfunksjoner

La oss studere funksjonen

$$f(x) = a\cos(kx + c) + d$$

hvor a, k, c og d er konstanter. Dette kaller vi en *cosinusfunksjon*. I *figur 2.11* vises grafen til

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1$$



Figur 2.11: Utsnitt av grafen til $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1$.

Av figuren merker vi oss følgende:

- horisontalavstanden mellom to naboliggende toppunkt er 4. Denne avstanden kalles *perioden* (eventuelt *bølgelengden*).
- topp- og bunnpunktene har den samme vertikalavstanden til linja $y = 1$, som kalles *likevektslinja* til grafen. Verdien til likevektslinja samsvarer med konstantleddet til f.
- vertikalavstanden fra likevektslinja til et toppunkt er 2, denne avstanden kalles *amplituden*. Verdien til amplituden samsvarer med faktoren foran cosinusuttrykket.

Om vi ikke visste uttrykket til f, kunne vi altså ut ifra *figur 2.11* og punktene over sett at[1] $a = 2$ og $d = 1$. Men hva med k og c?

[1]Som vi straks skal se, kunne a også vært -2. Men når vi skal finne et cosinusuttrykk, kan vi alltid finne et uttrykk med $a > 0$ som vil samsvare med grafen.

La oss starte med det enkleste: Når vi kjenner perioden $P = 4$, kan vi finne *bølgetallet* k ut ifra følgende relasjon:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{P} \\ &= \frac{2\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

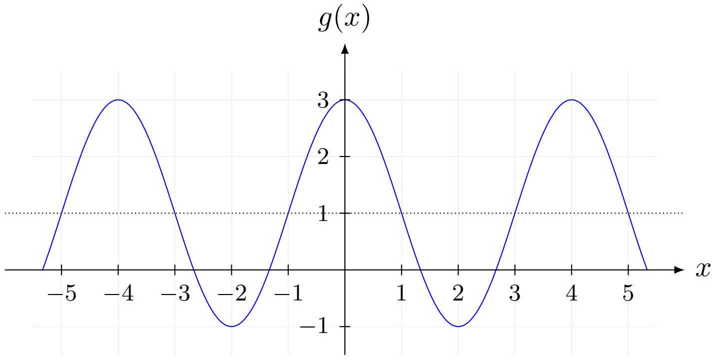
For å bestemme c gjør vi denne observasjonen: En cosinusfunksjon med positiv a må ha et toppunkt der hvor $kx + c = 0$ (fordi $\cos 0 = 1$). Da f har et toppunkt der $x = 2$, må vi ha at

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \cdot 2 + c &= 0 \\ c &= -\pi \end{aligned}$$

En endring i c vil forskyve cosinusfunksjonen horisontalt, c kalles derfor *faseforskyvningen* (eventuelt bare *fasen*).

La oss også kort studere grafen til

$$g(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1$$



Figur 2.12: Utsnitt av grafen til $g(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1$.

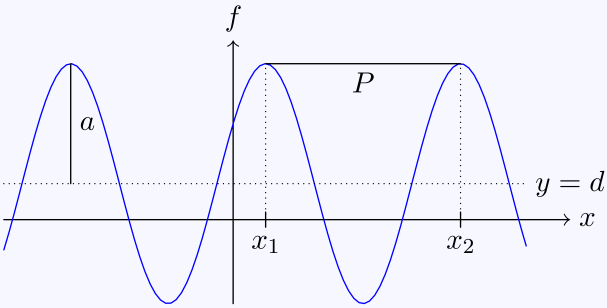
Den eneste forskjellen på uttrykkene til f og g er at g har faktoren -2 foran cosinusuttrykket. Vertikalavstanden fra likevektslinja til et toppunkt er likevel 2 også for g, som derfor har 2 som amplitude. For en hvilken som helst cosinusfunksjon er altså $|a|$ lik verdien til amplituden. Fordi a er negativ, har g et toppunkt når $kx + c = \pi$ (siden $\cos\pi = -1$).

2.16 Cosinusfunksjonen

En funksjon $f(x)$ på formen

$$f(x) = a\cos(kx + c) + d \tag{2.47}$$

kalles en cosinusfunksjon med amplitude $|a|$, bølgetall k, fase c og likevektslinje $y = d$.



For to naboliggende maksimal/minimumspunkt x_1 og x_2, er

$$P = x_2 - x_1 \tag{2.48}$$

og

$$k = \frac{2\pi}{P} \tag{2.49}$$

Videre kan c finnes ut ifra ligningen

$$kx_1 + c = 0 \tag{2.50}$$

Ekstremalpunktene til f er gitt ved ligningen

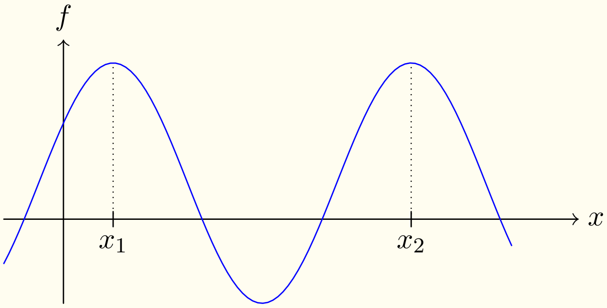
$$kx + c = 2\pi n \quad \vee \quad kx + c = \pi + 2\pi n \tag{2.51}$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$.

2.16 Cosinusfunksjonen (forklaring)

Vi skal nå vise hvorfor vi for en cosinusfunksjon har relasjonen $k = \frac{2\pi}{P}$. Det samme resonnementet kan brukes for en sinusfunksjon, og et veldig lignende et kan brukes for å vise at $k = \frac{\pi}{P}$ for en tangensfunksjon.

La oss tenke oss en cosinusfunksjon med $kx + c$ som kjerne. Si videre at x_1 og x_2 er x-verdien til to naboliggende toppunkt.



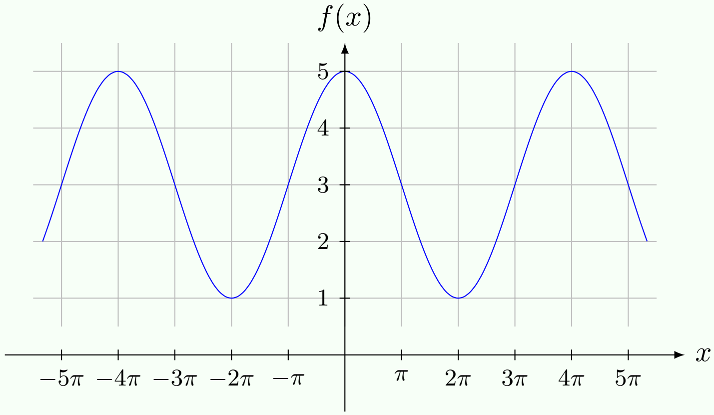
Siden et nytt toppunkt kommer for hver gang vi legger til 2π i kjernen, vet vi at

$$\begin{aligned} kx_1 + c + 2\pi &= kx_2 + c \\ k(x_2 - x_1) &= 2\pi \\ k &= \frac{2\pi}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Da $x_2 - x_1$ er det vi kaller for perioden P, har vi vist det vi skulle.

Eksempel 1

Grafen til cosinusfunksjonen f er skissert i figuren under.



Finn et uttrykk for f.

Svar

Vi observerer at verdiene til f varierer mellom 1 og 5. Dette betyr at likevektslinja er $y = \frac{1+5}{2} = 3$ og at amplituden er $\frac{5-1}{2} = 2$. Vi legger også merke til at horisontalavstanden mellom to toppunkt er $2\pi - (-2\pi) = 4\pi$, som altså er bølgelengden. Dermed er

$$f(x) = a\cos(kx + c) + d$$

hvor $a = 2$, $d = 3$ og $k = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Fasen c finner vi ved å observere at f har et toppunkt for $x = 2\pi$. Cosinusverdien til f må være 1 i dette punktet, og da er

$$\begin{aligned} kx + c &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 2\pi + c &= 0 \\ c &= -\pi \end{aligned}$$

Uttrykket til f blir da

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right) + 3$$

2.5.2 Sinusfunksjoner

Funksjoner på formen

$$f(x) = a\sin(kx + c) + d$$

kalles *sinusfunksjoner*. Amplituden, bølgetallet og likevektslinjen finner vi på akkurat samme måte som for cosinusfunksjoner.

Fasen finner vi derimot ved å observere at en sinusfunksjon må ha en maksimalverdi der

- $kx + c = \frac{\pi}{2}$ hvis a er positiv $\left(\text{fordi } \sin\frac{\pi}{2} = 1\right)$.
- $kx + c = -\frac{\pi}{2}$ hvis a er negativ $\left(\text{fordi } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\right)$.

2.17 Sinusfunksjonen

En funksjon $f(x)$ på formen

$$f(x) = a\sin(kx + c) + d \tag{2.52}$$

kalles en sinusfunksjon med amplitude $|a|$, bølgetall k, fase c og likevektslinje $y = d$.

c er gitt ved ligningen

$$kx_1 + c = \frac{\pi}{2} \tag{2.53}$$

hvor x_1 er et maksimalpunkt.

Ekstremalpunktene til f er gitt ved ligningen

$$kx + c = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n \tag{2.54}$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$.

Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = 2\cos(3x+\pi)+1$$

a) Skriv om f til en sinusfunksjon.

b) Finn x-verdiene til toppunktene til f.

Svar

a) Det eneste vi må sørge for er å gjøre om cosinusuttrykket til et sinusuttrykk. Av (2.18) vet vi at

$$\begin{aligned}\cos(3x+\pi) &= \cos\left(3x+\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(3x+\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Dermed er

$$f(x) = 2\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)+1$$

b) Fordi sinusuttrykket multipliseres med det positive tallet 2, må toppunktene være der hvor sinusuttrykket blir 1. Da er x gitt ved ligningen

$$kx+c = \frac{\pi}{2}+2\pi n$$

Vi får derfor at

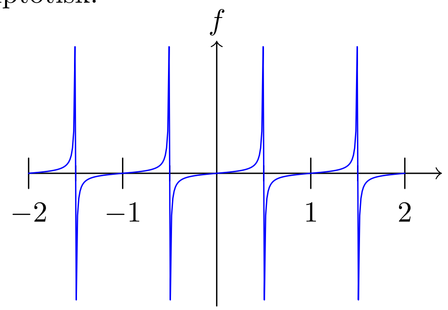
$$\begin{aligned}3x+\frac{3\pi}{2} &= \frac{\pi}{2}+2\pi n\\ 3x &= 2\pi n-\pi\\ x &= \frac{\pi}{3}(2n-1)\end{aligned}$$

2.5.3 Tangensfunksjoner

Vi avslutter seksjonen om trigonometrisk funksjoner med *tangensfunksjoner*, nemlig funksjoner f på formen

$$f(x) = a\tan(kx+c)+d$$

Når x går mot $\frac{\pi}{2}$, går $\sin x$ mot 1 og $\cos x$ mot 0. Siden $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, vil f da vil gå mot uendelig. Derfor er det ikke mulig å angi noen amplitude for tangensfunksjonen. Dette betyr også at funksjonen vil oppføre seg asymptotisk.



Figur 2.13: Grafen til $f(x) = \tan(\pi x)$ på intervallet $x \in [-2, 2]$.

Det spesielle med tangensfunksjoner er at den asymptotiske oppførselen gjentar seg med den samme avstanden, altså en periode P (i *figur 2.13* er $P = 1$). Til forskjell fra sinus- og cosinusfunskjoner er perioden her gitt av formelen

$$P = \frac{\pi}{k}$$

Med en litt annen tolkning enn tidligere kan man også se på $y = d$ som en likevektslinje, men for tangensfunksjoner er det asymptotetene og perioden som er av størst interesse.

2.18 Tangensfunksjoner

Funksjonen

$$f(x) = a\tan(kx + c) + d \tag{2.55}$$

har vertikale asymptoter for alle x der

$$kx + c = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n \tag{2.56}$$

for $n \in \mathbb{Z}$.

Perioden P er gitt ved relasjonen

$$P = \frac{\pi}{k} \tag{2.57}$$

2.5.4 Den deriverte av de trigonometriske funksjonene

2.19 Den deriverte av de trigonometriske funksjonene

$$(\cos x)' = -\sin(x) \tag{2.58}$$

$$(\sin x)' = \cos(x) \tag{2.59}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{2.60}$$

2.5.4 Den deriverte av de trigonometriske funksjonene (forklaring)

Vi skal her anvende følgende to ligninger (se vedlegg D):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{I}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \tag{II}$$

Likning (2.58)
Av definisjonen av den deriverte (se TM1) har vi at

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Ved (2.9) kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[\cos h - 1] \cos x - \sin x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cos x - \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \sin x \\
&= 0 - 1 \cdot \sin x \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Mellom tredje og fjerde linje i likningen over brukte vi (I) og (II).

Likning (2.59)

Av (2.18), (2.19) og (2.12) har vi at

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Bruker vi det faktum at $(\cos x)' = -\sin x$, i kombinasjon med kjerneregelen, får vi at

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)' \\ &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos x\end{aligned}$$

Likning (2.60)
Av kjerneregelen og produktregelen ved derivasjon (se TM1) har vi at

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \cos x \cos^{-1} x + \sin x \left(\cos^{-1}\right)' \\ &= 1 + \sin x(-\cos^{-2} x)(-\sin x) \\ &= 1 + \tan^2 x \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Forklaringer

2.7 Trigonometriske identiteter (forklaring)

$\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$

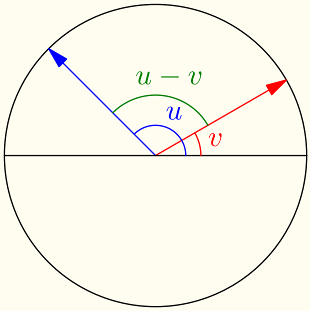
Disse to identitetene følger direkte av definisjonen av sinus og cosinus, og symmetrien om horisontal- og vertikalaksen.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

I enhetssirkelen er $\pm\cos x$ og $\pm\sin x$ katetene i en rettvinklet trekant der hypotenusen har lengde 1. Identiteten følger altså direkte av Pytagoras' setning.

$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

Gitt de todimensjonale vektorene $\vec{b}$ og $\vec{r}$, begge med lengde 1. Disse tegner vi inn i enhetssirkelen med utspring i sentrum. Den horisontale diameteren danner vinkelen u med $\vec{b}$ og vinkelen v med $\vec{r}$.



Figur 2.14: Vektorene $\vec{b}$ (blå) og $\vec{r}$ (rød).

Husk nå at en vinkel oppgitt i radianer representerer en buelengde langs enhetssirkelen (selv om vi i *figur 2.14* har indikert vinklene innenfor omkretsen for å unngå overlapping). Av definisjonen til sinus og cosinus (se ligning (2.2) og (2.3))) har vi at

$$\vec{b} = [\cos u, \sin u]$$
$$\vec{r} = [\cos v, \sin v]$$

Vinkelen $\angle(\vec{b}, \vec{r})$ dannet av to vektorer i planet (se TM1) er gitt som

$$\cos\angle(\vec{b}, \vec{r}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{|\vec{b}||\vec{r}|}$$

Hvis[1] $(u-v) \in [0, \pi]$, er $\angle(\vec{b}, \vec{r}) = u - v$, og dermed er

$$
\begin{aligned}
\cos \angle(\vec{b}, \vec{r}) &= \cos(u-v) \\
&= \frac{[\cos u, \sin u] \cdot [\cos v, \sin v]}{1 \cdot 1} \\
&= \cos u \cos v + \sin u \sin v
\end{aligned}
$$

Det er fristende å si at vi er i mål, men vi har ikke sjekket hva som skjer hvis $\pi < u - v \leq 2\pi$. Det er heldigvis ingen radikal endring, for-skjellen blir bare at $u - v = 2\pi - \angle(\vec{b}, \vec{r})$. Og siden $\cos(2\pi - x) = \cos x$ (forklar for deg selv hvorfor), har vi at

$$
\begin{aligned}
\cos(u-v) &= \cos\left(2\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})\right) \\
&= \cos \angle(\vec{b}, \vec{r}) \\
&= \cos u \cos v + \sin u \sin v
\end{aligned}
$$

Nå har vi altså vist at (2.8) gjelder for alle $u - v \in [0, 2\pi]$. Hvis $u - v$ ligger utenfor dette intervallet, må det finnes et tall $2\pi n$, hvor $n \in \mathbb{Z}$, som er slik at $(u - v + 2\pi n) \in [0, 2\pi]$. Da kan vi skrive

$$
\begin{aligned}
\cos(u-v) &= \cos(u - v + 2\pi n) \\
&= \cos u \cos(v + 2\pi n) + \sin u \sin(v + 2\pi n) \\
&= \cos u \cos v + \sin u \sin v
\end{aligned}
$$

Dermed er (2.8) vist for alle $(u-v) \in \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v}$

$$
\begin{aligned}
\cos(u-v) &= \cos(u - (-v)) \\
&= \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) \\
&= \cos u \cos v - \sin u \sin v
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \sin u}$

$$
\begin{aligned}
\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos u \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin u \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin u
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u}$

$$
\begin{aligned}
\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(u + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos u
\end{aligned}
$$

$\sin(u+v) = \cos u \sin v + \sin u \cos v$

Vi tar først med oss at (det får bli opp til leseren selv å bekrefte dette):

$$\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin u$$

Da kan vi videre skrive

$$\begin{aligned}\cos\left(u + v + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos u \cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) - \sin u \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -(\cos u \sin v + \sin u \cos v)\end{aligned}$$

Siden $\cos\left(u + \left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin(u+v)$, har vi nå at

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$

$$\begin{aligned}\sin(u-v) = &= \sin(u + (-v)) \\ &= \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v) \\ &= \sin u \cos v - \cos u \sin v\end{aligned}$$

$\sin(2u) = 2\sin u \cos u$

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x+x) \\ &= \sin x \cos x + \sin x \cos x \\ &= 2\sin x \cos x\end{aligned}$$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin x\end{aligned}$$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos x\end{aligned}$$

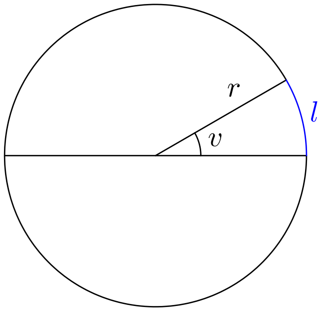
[1]Vinkelen mellom vektorer er bare definert på intervallet $[0, \pi]$.

Oppgaver for kapittel 2

2.1.1

Utdanninsdirektoratet definerer størrelsen til en vinkel v mellom to linjestykker a og b, oppgitt i radianer, på følgende måte:

Forholdet mellom lengden på en bue mellom a og b og radiusen til buen.



I figuren over svarer dette til forholdet $\frac{l}{r}$.

Forklar hvorfor radianer ut ifra denne definisjonen også kan sees på som en buelengde langs enhetssirkelen.

2.1.2

Gjør om til radianer:

a) $60°$ **b)** $15°$

2.1.3

Gjør om til grader:

a) $\dfrac{11\pi}{12}$ **b)** $\dfrac{11\pi}{6}$

2.2.1

Bruk Pytagoras' setning og definisjonen av $\cos x$ og $\sin x$ til å vise at

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2.2.2

Finn $\tan x$ når du vet at

a) $\sin x = 0$ og $\cos x = 1$ **b)** $\sin x = \dfrac{1}{2}$ og $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.2.3

Bruk $-$ og $+$ for å indikere henholdsvis negativ og positiv, og sett riktige markører i tabellen under.

	1. kvadrant	2. kvadrant	3. kvadrant	4. kvadrant
$\sin x$				
$\cos x$				
$\tan x$				

2.2.4

Bestem verdien til

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\cos\pi$ **c)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

2.2.5

Finn verdien til

a) $\operatorname{asin} 0$ **b)** $\operatorname{asin}\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{acos}(-1)$ **d)** $\operatorname{acos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\operatorname{atan} 1$ **f)** $\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2.2.6

Bruk (2.17) til å vise at $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ når du vet at $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.2.7

a) Bruk én av de trigonometriske identitetene til å vise at

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

b) Gitt at $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Bruk dette og identiteten over til å vise at

$$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$$

2.2.8

Skriv om utrykket

$$\cos\left(3x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

til et sinusuttrykk.

2.2.9

Skriv om uttrykket

$$\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x)$$

til et sinusuttrykk.

2.3.1

Vis at alle løsninger av ligningen $\cos x = 0$ er gitt som

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

mens alle løsninger av ligningen $\sin x = 0$ er gitt som

$$x = \pi n$$

2.3.2

Løs ligningene:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 0 \quad , \quad x \in [0, 5]$

c) $2\sin(3x) = 1$

d) $\sin(2x - \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $2\sqrt{3}\tan\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$

2.3.3

Løs ligningene:

a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

c) $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

2.3.4

Løs ligningene:

a) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) - \sin\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) = 1$

2.4.1

Løs ligningene:

a) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$

b) $\cos^2(3x) - 3\cos(3x) - 4 = 0$

c) $2\cos^2 x + \sqrt{8}\cos x + 1 = 0$

d) $\tan^2(\pi x) - \sqrt{12}\tan(\pi x) + 3 = 0$

e) $-\sin^2(3x) - 3\cos(3x) - 3 = 0$

2.4.2

Løs ligningene:

a) $-\cos^2 x + 15\sin^2 x = 3$

b) $\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right) - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$

2.5.1

Forklar hvorfor en cosinusfunksjon $f(x) = a\cos(kx + c) + d$ har

a) Maksimalverdier for $kx + c = 2\pi n$ og minimalverdier for $kx + c = \pi + 2\pi n$ når $a > 0$.

b) Maksimalverdier for $kx + c = \pi + 2\pi n$ og minimalverdier for $kx + c = 2\pi n$ når $a < 0$.

2.5.2

Gitt funksjonen

$$f(x) = -3\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) + 4$$

a) Finn perioden til f.

b) Hva er minimums- og maksimumsverdiene til f?

c) Finn alle x hvor f har minimums- og maksimumsverdier.

2.5.3

Forklar hvorfor en sinusfunksjon $f(x) = a\sin(kx+c)+d$ har

a) Maksimalverdier for $kx + c = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ og minimalverdier for $kx + c = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ når $a > 0$.

b) Maksimalverdier for $kx = \pi + 2\pi n$ og minimalverdier for $kx = 2\pi n$ når $a < 0$.

2.5.4

Gitt funksjonen

$$f(x) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \quad , \quad x \in [-5, 5]$$

a) Finn perioden til f.

b) Finn topppunktene til f.

c) Finn nullpunktene til f.

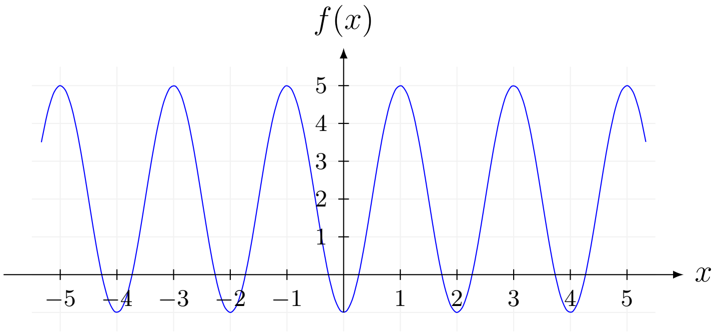
2.5.5

Om en cosinusfunksjon vet du følgende:

- likevektslinja til funksjonen er $y = 1$.
- (0,3) og $(2\pi, 3)$ er to naboliggende toppunkt.

Skisser grafen til funksjonen for $x \in [0, 3\pi]$.

2.5.6



a) Finn et cosinusuttrykk til grafen over.

b) Finn et sinusuttrykk til grafen over.

2.5.7

Forklar hvorfor alle funksjoner f på formen

$$f(x) = a\tan(kx + c) + d$$

har vertikale asymptoter når

$$kx + c = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$$

2.5.8

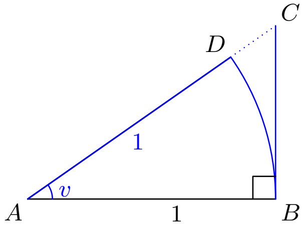
Finn den deriverte av funksjonen $f(x) = \frac{\cos x}{x^4}$.

Gruble 4

(R2V23D1)

I denne oppgaven skal du vise at $\lim\limits_{v \to 0^+} \dfrac{\sin v}{v} = 1$.

I figuren nedenfor er $AB = AD = 1$, og buen mellom B og D er del av en sirkel med sentrum i A. Vi lar $\angle BAC = v$.



a) Bruk arealbetraktninger til å grunngi at

$$\frac{1}{2}\sin v < \frac{1}{2}v < \frac{1}{2}\tan v$$

b) Forklar at dette gir oss

$$1 < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$

c) bruk ulikhetene fra oppgave b) til å grunngi at $\lim\limits_{v \to 0^+} \dfrac{\sin v}{v} = 1$.

Gruble 5

Gitt at

$$\tan x = \frac{a}{b}$$

Vis at $\sin x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ og at $\cos x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Gruble 6

Gitt to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Forklar hvorfor

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = |u||v| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Kommentar

I enkelte tekster som omtaler trigonometriske funksjoner finner man formuleringer som denne:

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [0, 2\pi] \tag{I}$$
$$g(x) = \sin x \quad , \quad x \in [0^\circ, 360^\circ]. \tag{II}$$

Dette skaper det feilaktige bildet av at f og g er den samme funksjonen, med uttrykket $\sin x$, men at det er opp til oss å velge om x er et tall eller vinkelmålet grader.

Det er viktig å innse at de trigonometriske funskjonene vi nå har introdusert, er funksjoner som bare kan ha *tall* som argumenter − x kan ikke bære enheter som grader, meter o.l. Men det kan selvfølgelig være at man ønsker å la x *representere* grader, en korrekt måte å skrive g på er da

$$g(x) = \sin^\circ x \quad , \quad x \in [0, 360]$$

hvor $^\circ$ indikerer at g er sinusverdien til x grader. Relasjonen mellom $\sin^\circ x$ og $\sin x$ er

$$\sin^\circ x = \sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

Selv om vi enda ikke har studert den deriverte av sinusfunksjoner, bør du allerede nå (via kjerneregelen) ane at $(\sin^\circ x)' \neq (\sin x)'$. Å presentere f og g med like uttrykk, som i (I) og (II), blir derfor helt feil.

Når det for eksempel skrives $\sin 45^\circ$, menes det altså strengt tatt $\sin^\circ 45$. Likevel skal vi bruke denne skrivemåten i neste kapittel fordi den er så utbredt. For å ha alt på det tørre, definerer vi her og nå at symbolet $^\circ$ rett og slett ikke er noe annet enn brøken[1] $\frac{\pi}{180}$. På denne måten blir:

$$\sin x^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{180}x\right) = \sin^\circ x$$

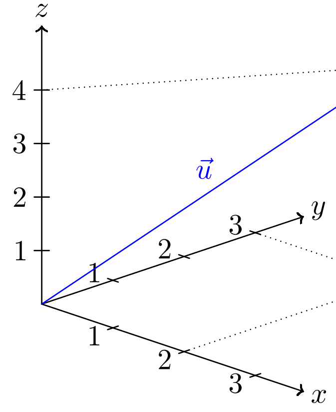
[1] Dette er i samsvar med (2.1).

Kapittel 3

Vektorer i rommet

3.1 Vektorer i rommet

I TM1 har vi sett på todimensjonale vektorer beskrevet ved hjelp av en x- og en y-akse. Når vi skal beskrive en **tredimensjonal vektor**, innfører vi i tillegg en z-akse som står normalt på de to andre aksene.



Figur 3.1: $\vec{u} = [2, 3, 4]$

3.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor $\vec{v}$ med startpunkt $A = (x_1, y_1, z_1)$ og endepunkt $B = (x_2, y_2, z_2)$ er gitt som

$$\vec{u} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] \tag{3.1}$$

Eksempel

Finn vektoren $\vec{u}$ mellom punktet $A = (1, 2, 0)$ og $B = (3, 0, 1)$.

Svar

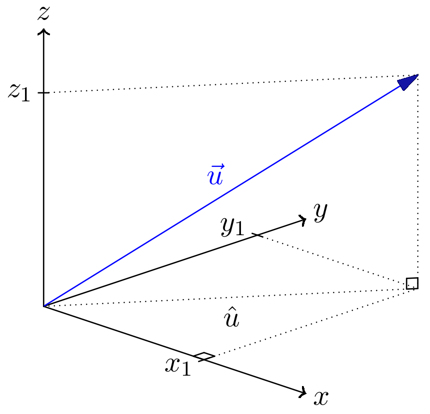
$$\begin{aligned} \vec{u} &= [3 - 1, 0 - 2, 1 - 0] \\ &= [2, -2, 1] \end{aligned}$$

Merk

Seksjon 3.2 - 3.4 handler om visse egenskaper og regneregler for tredimensjonale vektorer. Det er mange likheter ved todimensjonale og tredimensjonale vektorer, så i tilfeller hvor en regel mangler forklaring, er det fordi forklaringen for det todimensjonale tilfellet (som du finner i TM1) enkelt kan generaliseres til det tredimensjonale tilfellet.

3.2 Lengden til en vektor

La oss prøve å finne lengden til en vektor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, som skissert i *figur 3.2*. Grafisk er lengden avstanden fra den butte enden til pilspissen.



Figur 3.2

Vi kan alltid lage en rettvinklet trekant med sidelengder $|\vec{u}|$, z_1 og $\hat{u} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Av Pytagoras' setning har vi da at

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{\hat{u}^2 + z_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}
\end{aligned}
$$

3.2 lengden til en vektor

Lengden $|\vec{u}|$ av en vektor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ er gitt som

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{3.2}$$

Eksempel

Finn lengden til vektoren $\vec{u} = [-2, 4, 1]$.

Svar

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{4 + 16 + 1} \\
&= \sqrt{21}
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Finn lengden til vektoren $\vec{a} = [-9, 18, 27]$.

Svar

Ved å bruke (3.6) sparer vi oss for kvadrater av store tall:

$$[-9, 18, 27] = 9[-1, 2, 3]$$

Lengden blir da (se oppgave 3.1.3)

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 9\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \\ &= 9\sqrt{14} \end{aligned}$$

3.3 Regneregler og skalarprodukt

3.3 Regneregler for vektorer

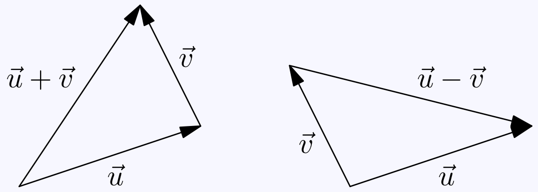
Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$, punktet $A = (x_0,y_0,z_0)$ og en konstant t. Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) \tag{3.3}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] \tag{3.4}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2] \tag{3.5}$$

Summen eller differansen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan vi tegne slik:



3.4 Regneregler for vektorer

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$, og et tall t, har vi at

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \tag{3.6}$$

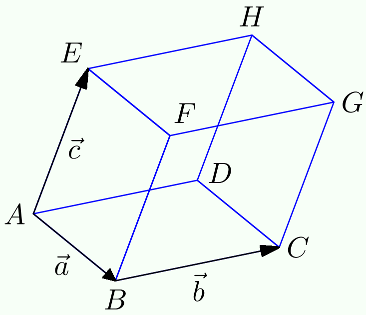
$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \tag{3.7}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{3.8}$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \tag{3.9}$$

Eksempel

Et parallellogram er tegnet inn i figuren under.



Vis at midpunktet M til diagonalen AG også er midtpunktet til diagonalen CE.

Svar

Vektoren $\overrightarrow{AG}$ er gitt som

$$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

Vi kaller midpunktet til CE for M_1. Da har vi at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b})\end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_1} &= \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CM_1} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

Dette må bety at $M = M_1$.

3.5 Skalarproduktet I

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ kan skrives som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{3.10}$$

For særtilfellet $\vec{u} \cdot \vec{u}$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \tag{3.11}$$

Eksempel

Finn skalarproduktet av vektorene $\vec{a} = [1, 2, 3]$ og $\vec{b} = [4, -3, -2]$.

Svar

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) \\ &= -8\end{aligned}$$

3.6 Skalarproduktet II

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \tag{3.12}$$

hvor $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Eksempel 1

En vektor $\vec{a}$ har lengde 3 og en vektor $\vec{b}$ har lengde 2. De utspenner vinkelen 45°. Finn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Svar

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \cdot 2\cos(45^\circ) \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Finn vinkelen v utspent av vektorene $\vec{a} = [-5, 4, -3]$ og $\vec{b} = [-2, 5, -5]$.

Svar

Vi starter med å finne lengdene og skalarproduktene av vektorene:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{50} \\
&= 5\sqrt{2} \\
|\vec{b}| &= \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{54} \\
&= 3\sqrt{6} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (-5) \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5) \\
&= 45
\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos v \\
45 &= 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cos v \\
\cos v &= \frac{5 \cdot 9}{5 \cdot 3\sqrt{12}} \\
&= \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Siden $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$, er $v = 30^\circ$.

3.7 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har vi at

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \vec{v}\cdot\vec{u} \\
\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \\
(\vec{u}+\vec{v})^2 &= \vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}
\end{aligned}$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^{\,2}$$

når du vet at $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Svar

$$\begin{aligned}
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^{\,2} &= \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2} \\
&= \vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2} \\
&= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2
\end{aligned}$$

3.4 Vinkelrette og parallelle vektorer

3.8 Vinkelrette vektorer

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett på hverandre hvis skalarproduktet av dem er null:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \tag{3.13}$$

Eksempel 1

Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5, -3, 2]$ og $\vec{b} = [2, 4, 1]$ er ortogonale.

Svar

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [5, -3, 2] \cdot [2, 4, 1] \\ &= 10 - 12 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{a} \perp \vec{b}$.

3.9 Parallelle vektorer

To vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{3.14}$$

Alternativt, for et tall t har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{3.15}$$

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{u} = [1, 2, 3]$ og $\vec{v} = [3, 2(1-t), 11+t]$, finn t slik at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

Svar

Vi starter med å kreve at forholdet mellom korresponderende komponenter er likt. Vi dividerer x- og y-komponenten i $\vec{v}$ med henholdsvis x- og y-komponenten i $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\frac{3}{1} &= \frac{2(1-t)}{2} \\ 3 &= 1-t \\ t &= -2\end{aligned}$$

Siden forholdet mellom de to x-komponentene og de to y-koordinatene er 3, må dette også stemme for z-koordinatene for at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skal være parallelle:

$$\begin{aligned}\frac{11+t}{3} &= \frac{11+(-2)}{3} \\ &= 3\end{aligned}$$

Altså er $\vec{u} \parallel \vec{v}$ hvis $t = -2$.

Eksempel 2

Finn s og t slik at vektorene $\vec{u} = [-1, 2s, 4]$ og $\vec{v} = [3, 18, 4t+4]$ er parallelle.

Svar

Vi observerer at forholdet mellom x-komponeten i $\vec{v}$ og $\vec{u}$ er $\frac{3}{-1} = -3$. Hvis $\vec{u} \parallel \vec{v}$, er altså $\vec{v} = -3\vec{u}$. Vi kan derfor sette opp følgende ligning for s:

$$\begin{aligned}18 &= -3(2s) \\ s &= -3\end{aligned}$$

Videre må vi ha at

$$\begin{aligned}4t+4 &= -3(4) \\ t &= -4\end{aligned}$$

3.5 Determinanter

3.10 3×3 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ av tre vektorer $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$ er gitt som

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ h & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ h & i \end{vmatrix} \qquad (3.16) \\
&= a(ej - fi) - b(dj - fh) + c(di - eh) \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Eksempel

Finn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ til vektorene $\vec{a} = [1, -2, 2], \vec{b} = [2, 2, -3]$ og $\vec{c} = [4, -1, 2]$.

Svar

Vi skal altså regne ut følgende:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Å gå rundt å huske (3.17) er ikke bare bare, så vi skal her bruke et triks som gjør det enklere for oss å komme fram til høyresiden i (3.16).

Vi starter med å finne tallet i første rad og kolonne, i vårt tilfelle 1. Deretter danner vi en 2×2 determinant ved å utelukke raden og kolonnen dette tallet tilhører:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 2 & -3 \\ \cancel{4} & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Når vi ganger 1 med denne determinanten, har vi funnet det første leddet fra (3.16):

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi går så over til tallet i første rad og andre kolonne, altså -2, og finner den tilhørende 2×2 determinanten:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{2} & -3 \\ 4 & \cancel{-1} & 2 \end{vmatrix}$$

Når vi setter et minustegn foran -2 ganger denne determinanten, har vi funnet andre ledd fra (3.16):

$$-(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi avslutter med determinanten vi får ved å utelukke første rad og tredje kolonne:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ 2 & 2 & \cancel{-3} \\ 4 & -1 & \cancel{2} \end{vmatrix}$$

Ganger vi denne med tallet som står i både raden og kolonnen som er utelatt, altså 2, får vi siste ledd i (3.16):

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Vi har nå funnet alle ledd vi trenger og kan da skrive

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1) + 2(2 \cdot 2 - (-3) \cdot 4) + 2(2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) \\ &= 13 \end{aligned}$$

3.6 Vektorproduktet

Vi har sett hvordan vi ved skalarproduktet kan sjekke om to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står normalt på hverandre, men ofte kan vi isteden være interessert i å finne en vektor som står normalt på begge disse. En slik vektor får vi ved **vektorproduktet** av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, som vi skriver som $\vec{u} \times \vec{v}$.

3.11 Vektorproduktet

Vektorpruduktet av vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$ er gitt som

$$\vec{u} \times \vec{v} = [bf - ce, -(af - cd), ae - bd] \tag{3.18}$$

Eventuelt kan man skrive

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

hvor $\vec{e}_x = [1, 0, 0], \vec{e}_y = [0, 1, 0]$ og $\vec{e}_z = [0, 0, 1]$.

Videre har vi at[1]

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \tag{3.20}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \tag{3.21}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \tag{3.22}$$

[1]Kryssprodukt må regnes ut før skalarprodukt.

Språkboksen

Et vektorprodukt kalles også et **kryssprodukt**.

Merk

For skalarproduktet får vi en skalar (et tall), mens vi for vektorproduktet får en vektor. Det er derfor veldig viktig å skille symbolet $\cdot$ fra $\times$.

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{a} = [-3, 2, 3]$ og $\vec{b} = [2, -2, 1]$.

a) Finn $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Vis at vektoren du fant i a) står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar

a) Vi bruker uttrykket fra (3.19), og regner ut følgende 3×3 determinant:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi får da at (se gjerne tilbake til eksempelet på side 94)

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_x(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) - \vec{e}_y(-3 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + \vec{e}_z(-3 \cdot (-2) - 2 \cdot 2) \\
&= 8\vec{e}_x + 9\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \\
&= [8, 9, 2]
\end{aligned}$$

b) To vektorer står normalt på hverandre dersom skalarproduktet av dem er 0:

$$[8, 9, 2] \cdot [-3{,}2{,}3] = -24 + 18 + 6 = 0$$

$$[8, 9, 2] \cdot [2, -2{,}1] = 16 - 18 + 2 = 0$$

3.12 Regneregler for vektorproduktet

For vektorene $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ og en konstant t har vi at

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \tag{3.23}$$

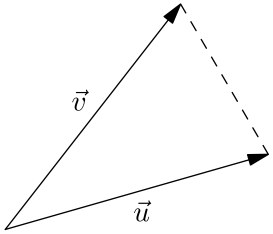
$$\vec{u} \times (t\vec{v}) = t(\vec{u} \times \vec{v}) \tag{3.24}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \tag{3.25}$$

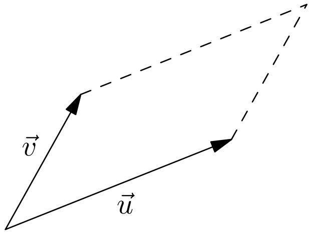
$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v} \tag{3.26}$$

3.6.1 Vektorprodukt som areal og volum

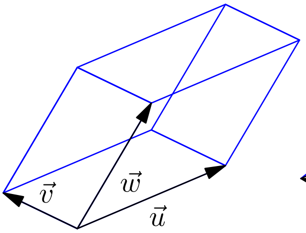
En anvendelse av vektorproduktet (og skalarproduktet) er å finne arealet og volumet av noen geometriske former som kan sies å være *utspent* av vektorer. Med dette mener vi at to eller tre vektorer som starter i samme utgangspunkt, utgjør grunnlaget for en trekant, et parallellogram, et **parallellepiped**, en pyramide eller et **tetraeder**.



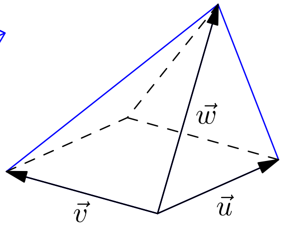
(a) Trekant



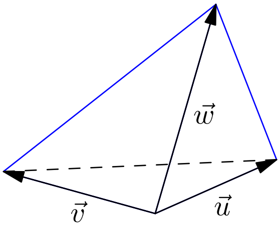
(b) Parallellogram



(c) Parallellepiped



(d) Pyramide



(e) Tetraeder

Figur 3.3: Geometriske former utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

3.13 Vektorproduktet som areal og volum

Arealet A av et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{3.27}$$

Arealet A av en trekant utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| \tag{3.28}$$

Volumet V av parallellepipedet utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{3.29}$$

Volumet V av pyramiden utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = \frac{1}{3}|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{3.30}$$

Volumet V til tetraedet utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = \frac{1}{6}|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{3.31}$$

Forklaringer

3.9 Parallelle vektorer (forklaring)

Ligning (3.27) forteller oss at $|\vec{u} \times \vec{v}|$ tilsvarer arealet av parallellogramet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Dette arealet kan bare ha verdien 0 hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, og den eneste vektoren med lengde 0 er nullvektoren $[0, 0, 0]$. Kombinerer vi dette kravet med (3.11), får vi at

$$[y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2] = [0, 0, 0]$$

Uttrykket over gir oss tre ligninger

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0$$

$$x_1 z_2 - z_1 x_2 = 0$$

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$$

som vi kan omskrive til

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Til slutt kan vi samle alle tre til én ligning:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

3.11 Vektorproduktet (forklaring)

Hensikten med vektorproduktet er å innføre en regneoperasjon som gir oss en vektor $\vec{w} = [x, y, z]$ som står normalt på to andre vektorer $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$. For at dette skal være sant, vet vi av (3.13) at

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= 0 \\ ax + by + cz &= 0 \\ ax + by &= -cz \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= 0 \\ dx + ey + fz &= 0 \\ dx + ey &= -fz \end{aligned} \tag{3.33}$$

Vi har altså to forskjellige ligninger som kan hjelpe oss med å finne de tre ukjente størrelsene x, y og z. Dette kalles at man har en ligning med *én fri variabel.* Hvis vi velger z som fri variabel betyr dette kort fortalt at vi kan finne et uttrykk for x og y som vil oppfylle (3.32) og (3.33) for et hvilket som helst valg av z.

Vi starter med å finne et uttrykk for x. Først multipliserer vi (3.33) med $\frac{b}{e}$, og subtraherer deretter venstre- og høyresiden fra denne ligningen med henholdsvis venstre- og høyresiden fra ligning (3.32):

$$\begin{aligned} ax + by - \left(\frac{bdx}{e} + by\right) &= -cz - \left(-\frac{bfz}{e}\right) \\ ax - \frac{bdx}{e} &= -cz - \left(-\frac{bfz}{e}\right) \end{aligned}$$

Hvis vi videre multipliserer med e, og deretter antar at $ae - bd \neq 0$, får vi at

$$\begin{aligned} aex - bdx &= bfz - cez \\ (ae - bd)x &= (bf - ce)z \\ x &= \frac{bf - ce}{ae - bd} z \qquad (3.34) \end{aligned}$$

Med omtrent samme framgangsmåte og identisk antakelse finner vi et uttrykk for y:

$$\begin{aligned} ax + by - \left(ax + \frac{aey}{d}\right) &= -cz - \left(-\frac{afz}{d}\right) \\ (bd - ae)y &= (af - cd)z \\ y &= \frac{af - cd}{bd - ae} z \qquad (3.35) \end{aligned}$$

Som nevnt kan z velges fritt, og vi ser av (3.34) og (3.35) at valget $z = ae - bd$ gir oss følgende fine uttrykk:

$$\begin{aligned} x &= bf - ce \\ y &= -(af - cd) \\ z &= ae - bd \end{aligned}$$

Dette samsvarer med (3.11).

For å komme fram til likhetene over har vi antatt at $z = ae - bd \neq 0$, men det er fristende å sjekke om uttrykkene vi nettopp har funnet oppfyller (3.32) og (3.33) også når $z = ae - bd = 0$:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ a(bf - ce) + -b(af - cd) &= 0 \\ -(ae - bd)c &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx + ey &= 0 \\ d(bf - ce) - e(af - cd) &= 0 \\ -(ae - db)f &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Med z som fri variabel er altså (3.32) og (3.33) oppfylt for alle $z = ae - bd$, dermed har vi funnet et uttrykk som alltid vil gi oss en vektor $\vec{w}$ som er ortogonal med både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Så lenge man bruker uttrykkene fra (3.34) og (3.35), vil $\vec{w}$ være parallell med vektoren gitt ved (3.11), uansett valg av z. I tillegg kan vi få uttrykket fra (3.11) også om vi velger x eller y som fri variabel (det får bli opp til leseren å konstatere disse to påstandene). Av dette kan vi konkludere med at alle vektorer som står ortogonalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle med vektoren gitt ved (3.11).

Lengden til vektorproduktet

For å komme fram til det vi ønsker, skal vi benytte oss av **Lagranges identitet**[1]. Denne sier at vi for to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ har at

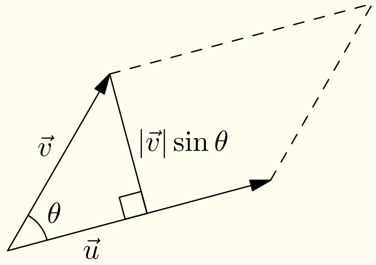
$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2|\vec{u}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \quad \text{(Lagranges identitet)}$$

Ved å anvende (3.12) og (2.17) kan vi skrive

$$\begin{aligned} |\vec{v} \times \vec{u}|^2 &= |\vec{v}|^2|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2|\vec{u}|^2 \cos^2\theta \\ |\vec{v} \times \vec{u}|^2 &= |\vec{v}|^2|\vec{u}|^2(1 - \cos^2\theta) \\ |\vec{v} \times \vec{u}| &= |\vec{v}||\vec{u}| \sin\theta \end{aligned}$$

[1]Den spesielt interesserte finner utledningen for identieten i vedlegg E

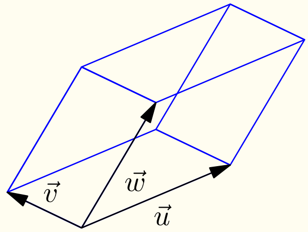
3.13 Vektorproduktet som areal og volum (forklaring)



Figur 3.4: Parallellogram med grunnlinje $|\vec{u}|$ og høyde $|\vec{v}|\sin\theta$.

Arealet av et paralellogram er gitt som grunnlinja ganger høyden. For et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, tilsvarer dette produktet $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$, som er det samme som lengden $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Arealet av trekanten utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er halvparten av arealet av parallellogrammet.

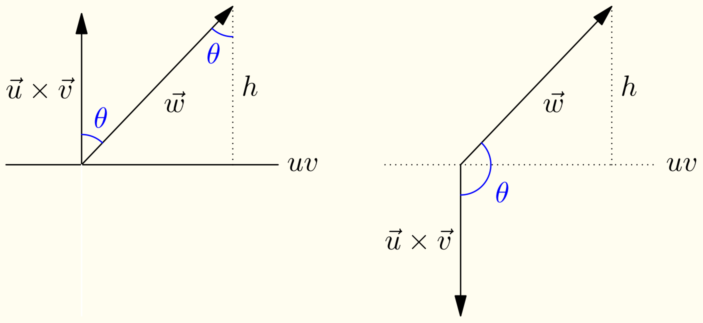
Vektorproduktet som volum



Figur 3.5

Volumet V av et parallellepiped tilsvarer grunnflaten A ganger høyden h:

$$V = Ah \tag{3.36}$$



Figur 3.6

I *figur 3.5* er grunnflaten A utspent av vektorene $\vec{v}$ og $\vec{v}$, og vi vet fra (3.27) at

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{3.37}$$

La θ være vinkelen mellom $\vec{u} \times \vec{v}$ og $\vec{w}$. Hvis $90° \geq \theta \geq 0$, får vi en figur som skissert i *figur 3.6a*. Da er høyden h gitt som

$$h = |\vec{w}\,| \cos\theta$$

Er derimot $180° \geq \theta > 90°$, får vi en figur som skissert i *figur 3.6b*. Da er

$$h = -|\vec{w}\,| \cos\theta$$

For alle $\theta \in [0°, 180°]$ kan vi derfor skrive

$$h = \big||\vec{w}\,| \cos\theta\big| \tag{3.38}$$

Av (3.12), (3.36), (3.37) og (3.38), og har vi derfor at

$$\begin{aligned} \big|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,\big| &= \big||\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}\,| \cos\theta\big| \\ &= Ah \\ &= V \end{aligned}$$

Av klassisk geometri har vi videre at

- volumet av pyramiden utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\frac{1}{3}$ av volumet av parallellepipedet.
- volumet av tetraedet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\frac{1}{6}$ av volumet av parallellepipedet.

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

Finn lengden av vektorene:

a) $[-2, 1, 5]$ **b)** $[\sqrt{3}, 2, \sqrt{2}]$

3.1.2

Hvilket av punktene $B = (3, -2, 1)$ og $C = (0, 5, 6)$ ligger nærmest punktet $A = (1, -1, -2)$?

3.1.3

Gitt vektoren

$$\vec{u} = [ad, bd, cd]$$

a) Vis at

$$|\vec{u}| = d\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

når $d > 0$.

b) Forklar at

$$|\vec{u}| = |d|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

når $d < 0$.

3.2.1

Gitt vektorene

$$\vec{u} = [ad, bd, cd] \text{ og } \vec{v} = [eh, fh, gh]$$

Vis at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = dh(ae + bf + cg)$$

3.2.2

Finn skalarproduktet av vektorene:

a) $\vec{a} = [2, 4, 6]$ og $\vec{b} = [-5, 0, -1]$

b) $\vec{a} = [-9, 1, 5]$ og $\vec{b} = [-2, 1, -2]$

c) $\vec{a} = \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right]$ og $\vec{b} = [512, -128, 64]$. *Tips:* Bruk resultatet fra opg. 3.2.1.

3.2.3

Finn skalarproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som utspenner vinkelen θ, når du vet at

a) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ og $\theta = 60°$

b) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ og $\theta = 150°$

3.2.4

Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når

a) $\vec{a} = [5, -5, 2]$ og $\vec{b} = [3, -4, 5]$

b) $\vec{a} = [2, -1, -3]$ og $\vec{b} = [-1, -3, -2]$

c) $\vec{a} = [-1, -2, 2]$ og $\vec{b} = [-3, 5, -4]$

3.2.5

Forkort uttrykkene når du vet at $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

a) $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + 3(\vec{a} + \vec{b})^2$

b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$

3.3.1

Sjekk om $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale når

a) $\vec{a} = [2, 4, -2]$ og $\vec{b} = [3, 1, 1]$

b) $\vec{a} = [-18, 12, 9]$ og $\vec{b} = [1, -2, 1]$

c) $\vec{a} = [5, 5, -1]$ og $\vec{b} = [5, -4, 5]$

3.3.2

Gitt vektoren

$$\vec{u} = [-5, -1, 6]$$

Finn t slik at $\vec{u} \perp \vec{v}$ når

a) $\vec{v} = [t, 3t, 2]$

b) $\vec{v} = [t, t^2, 1]$

3.3.3

Sjekk om $\vec{a} \parallel \vec{b}$ når

a) $\vec{a} = [8, 4, -2]$ og $\vec{b} = [4, 2, 4]$

b) $\vec{a} = [-3, 5, 2]$ og $\vec{b} = \left[-\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, \frac{6}{7}\right]$

3.3.4

Gitt vektoren

$$\vec{a} = [-3, 1, 8]$$

Om mulig, finn t slik at $\vec{a} \parallel \vec{b}$ når

a) $\vec{b} = [t+3, 1-t, -16]$

b) $\vec{b} = [t^2+2, t, -(5t^2+3)]$

3.3.5

Finn s og t slik at $\vec{u} = [4, 6+s, -(s+t)]$ og $\vec{v} = \left[\frac{12}{7}, \frac{2t-9s}{7}, \frac{3s-t}{7}\right]$ er parallelle.

3.4.1

Vis at

$$\begin{vmatrix} ae & be \\ cf & df \end{vmatrix} = ef \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

3.4.2

Vis at hvis $\vec{u}||\vec{v}$, så er $\vec{u} \times \vec{v} = 0$

3.4.3

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er *Lagranges identitet* gitt som

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Bruk identiteten og definisjonen av skalarproduktet til å vise at

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

3.4.4

Et tetraeted er utspent av vektorene $\vec{a} = [2, -2, 1]$, $\vec{b} = [3, -3, 1]$ og $\vec{c} = [2, -3, 2]$, hvor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ utspenner grunnflaten.

a) Vis at arealet av grunnflaten er $\sqrt{2}$.

b) Vis at volumet av tetraetedet er $\frac{1}{6}$.

3.4.5

Et parallellepidet er utspent av vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Vi har at $|a| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, og at grunnflaten er utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

a) Finn lengden av diagonalen til grunnflaten.

La θ være vinkelen mellom $\vec{a} \times \vec{b}$ og $\vec{c}$ og la $\theta \in [0°, 90°]$.

b) Lag en tegning og forklar hvorfor høyden h i parallellepipedet er gitt som

$$h = |\vec{c}| \cos \theta$$

d) Forklar hvorfor volumet V av parallellepidetet kan skrives som

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}||c| \cos \theta$$

3.4.6

Gitt vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$. Vis at

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Tre pyramider er utspent av vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$. Grunnflatene til pyramidene er henholdsvis utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, $\vec{u}$ og $\vec{w}$ og $\vec{v}$ og $\vec{w}$. Hva er uttrykket til volumet av pyramidene?

Kapittel 4

Romgeometrier

4.1 Parameteriseringer

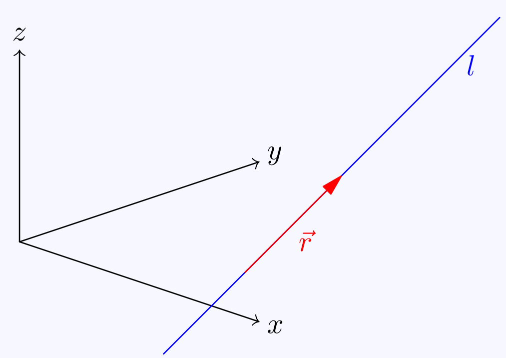
4.1.1 Linje i rommet

4.1 Linje i rommet

Ei linje l som går gjennom punktet $A = (x_0, y_0, z_0)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [a, b, c]$ kan parameteriseres ved

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \tag{4.1}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.



Eksempel

Ei linje går gjennom punktene $A = (-2, 2, 1)$ og $B = (2, 4, -5)$.

a) Finn en parameterisering for linja l som går gjennom A og B.

b) Sjekk om punktet $C = (-5, 3, 6)$ ligger på linja.

Svar

a) Vektoren $\overrightarrow{AB}$ er en retningsvektor for linja:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [2-(-2), 4-2, -5-1] \\ &= [4, 2, -6] \\ &= 2[2, 1, -3]\end{aligned}$$

Vi bruker den forkortede retningsvektoren i kombinasjon med A, og får at

$$l : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

b) Skal C ligge på l, må parameteriseringen gi oss koordinaten til C for rett valg av t. Skal for eksempel y-koordinaten bli riktig, må vi ha at

$$\begin{aligned}2 + t &= 3 \\ t &= 1\end{aligned}$$

For $t = 1$ blir $x = 0$, men x-koordinaten til C er -5, altså ligger ikke C på linja.

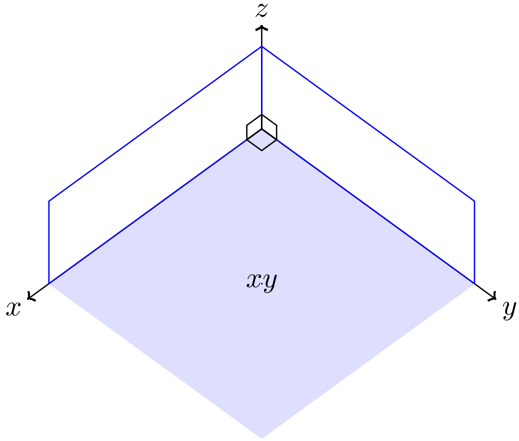
4.1 Linje i rommet (forklaring)

Det todimensjonale tilfellet som er vist i TM1 kan enkelt utvides til det tredimensjonale tilfellet. Dette er overlatt til leseren å vise.

4.1.2 Plan i rommet

Tenk at vi velger ut to ikke-parallelle vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som de eneste vektorene vi tillater oss å følge i rommet. De uendelig mange punktene vi kan nå ved å følge $\vec{u}$ og $\vec{v}$ fra et startpunkt utgjør da et *plan i rommet*.

Et enkelt eksempel er å la et hjørne i en bygning være et x, y, z aksekors. La rett opp være z-retningen, rett bort langs den ene veggen være x-retningen og rett bort langs den andre være y-retningen. Du kan komme til et hvilket som helst punkt på gulvet ved å først gå noen skritt i x-retningen, og deretter i y-retningen. I z-retningen beveger du deg ikke i det hele tatt, og siden du bare beveger deg langs to retninger[1], kan gulvet kalles et utklipp av et plan.

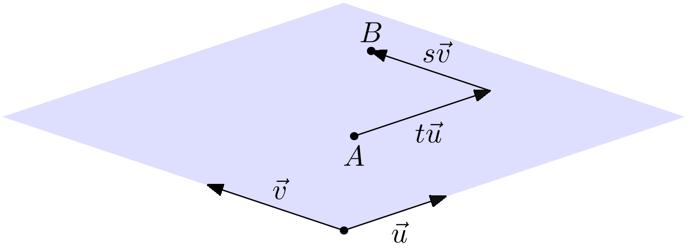


Figur 4.1: x og y bortover langs veggene, z rett opp. Gulvet er et utklipp av xy-planet.

I eksempelet akkurat gitt, sier vi at vi beveger oss i xy-planet. Om vi ikke beveger oss noen retning langs x-aksen, går vi derimot i yz-planet. Og hvis vi ikke beveger oss langs y-aksen, vandrer vi i xz-planet.

Tiden er nå inne for å beskrive plan på en mer matematisk måte. Vi tenker oss da at vi vet om et punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ som ligger i et plan α. I tillegg vet vi om to vektorer $\vec{u} = [a_1, b_1, c_1]$ og $\vec{v} = [a_2, b_2, c_2]$ som også ligger i planet, disse er da retninsgvektorer for α.

[1] retningene til vektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.



Figur 4.2: Utklipp av planet α utspent av vektorene $\vec{v}$ og $\vec{u}$.

Hvis vi nå ønsker å komme oss til et vilkårlig punkt $B = (x, y, z)$ i planet, må det gå an å starte i A og først vandre s lengder av $\vec{u}$, og deretter t lengder av $\vec{v}$. Altså kan vi skrive at

$$
\begin{aligned}
B &= A + s\vec{u} + t\vec{v} \\
(x, y, z) &= (x_0 + a_1 s + a_2 t, y_0 + b_1 s + b_2 t, z_0 + c_1 s + c_2 t)
\end{aligned}
$$

Eksempel 1

Et plan inneholder punktene $A = (-2, 3, 5)$, $B = (-10, 1, 9)$ og $C = (0, 5, -4)$.

a) Finn en parameterisering til planet.

b) Sjekk om punktet $(4, 6, -6)$ ligger i planet.

Svar

a) En vektor mellom to av punktene A, B og C er en retningsvektor for planet. Vi starter derfor med å finne to slike:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [-10 - (-2), 1 - 3, 9 - 5] \\
&= 2[-4, -1, 2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= [0 - (-2), 5 - 3, -4 - 5] \\
&= [2, 2, -9]
\end{aligned}
$$

Disse to vektorene er ikke parallelle, dermed kan vi skrive

$$
\alpha : \begin{cases} x = -2 - 4s + 2t \\ y = 3 - s + 2t \\ z = 5 + 2s - 9t \end{cases}
$$

b) Vi starter med å finne en s og en t som oppfyller kravet for x

og y-koordinatene, og får da ligningssystemet

$$-2 - 4s + 2t = 4 \tag{I}$$
$$3 - s + 2t = 6 \tag{II}$$

Av (II) er $s = 2t - 3$. Dette uttrykket for s setter vi inn i (I), og får at

$$\begin{aligned} -2 - 4(2t - 3) + 2t &= 4 \\ -6t &= -6 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Altså er $s = -1$ og $t = 1$, z-koordinaten blir da

$$5 + 2(-1) - 9(1) = -6$$

Kravet for z-koordinaten er altså oppfylt, punktet $(4, 6, -6)$ ligger derfor i planet.

Eksempel 2

Et plan α inneholder ei linje l og punktet $A = (-3, -2, 6)$. A ligger ikke på l. Finn en parameterisering til planet når l er gitt som

$$l : \begin{cases} x = t \\ y = 5 + t \\ z = 6 + 4 \end{cases}$$

Svar

Siden l ligger i planet, må en retningsvektor til l også være en retningsvektor for planet. Av parameteriseringen ser vi at en retningsvektor er $[1, 1, 4]$. Vi ser også at $(0, 5, 6)$ er et punkt som ligger på linja, og derfor også i planet. Vektoren mellom A og dette punktet må også være en retningsvektor (og er ikke parallell med $[1, 1, 4]$):

$$[-3 - 0, -2 - 5{,}6 - 6] = -[3, 7, 0]$$

Parameteriseringen til planet blir altså

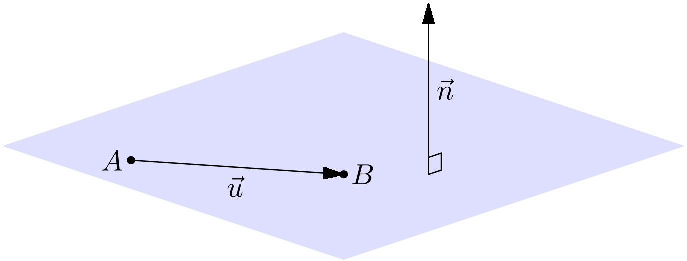
$$\alpha : \begin{cases} x = s + 3q \\ y = 5 + s + 7q \\ z = 6 + 4s \end{cases}$$

Merk: Vi har her introdusert variabelen q for å tydeligjøre at variabelen for l og variablene for α er uavhengige av hverandre.

4.2 Ligninger til geometrier

4.2.1 Ligningen til et plan

En mer kompakt metode enn parameterisering er å beskrive et plan ved en ligning.



Figur 4.3: Punktene $A = (x_0, y_0, z_0)$ og $B = (x, y, z)$ i planet α med normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$.

Tenk at vi vet om et punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ som ligger i et plan α. Vi velger oss et vilkårlig punkt $B = (x, y, z)$ i planet, vektoren $\vec{u}$ fra A til B blir da

$$\vec{u} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$$

En vektor som står normalt på alle vektorer i planet, kalles en *normalvektor* og skrives gjerne som $\vec{n}$. Hvis $\vec{n} = [a, b, c]$ er en normalvektor for α, må vi ha at

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \\ [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [a, b, c] &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

Om vi slår sammen alle konstantene til én konstant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, kan vi videre skrive

$$ax + bx + cz + d = 0$$

4.2 Ligningen til et plan i rommet

Et plan med normalvektor $n = [a, b, c]$ kan uttrykkes ved ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.2}$$

hvor $A = (x_0, y_0, z_0)$ er et vilkårlig punkt i planet.

Eventuelt kan man skrive

$$ax + by + zc + d = 0 \tag{4.3}$$

hvor $-(ax_0 + by_0 + cz_0) = d$.

Eksempel 1

Et plan er utspent av vektorene $\vec{u} = [1, -2, 2]$ og $\vec{v} = [-3, 3, 1]$ og inneholder punktet $A = (-3, 3, 4)$. Finn en ligning for planet.

Svar

En normalvektor til planet kan vi finne ved

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\vec{e}_1 - (1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2)\vec{e}_2 + (1 \cdot 3 - (-2) \cdot (-3))\vec{e}_3 \\
&= [-8, -7, -3] \\
&= -[8, 7, 3]
\end{aligned}$$

Vi har nå en normalvektor og et punkt i planet, og får dermed ligningen

$$\begin{aligned}
8(x + 3) + 7(y - 3) + 3(z - 4) &= 0 \\
8x + 24 + 7y - 21 + 3z - 12 &= 0 \\
8x + 7y + 3z - 9 &= 0
\end{aligned}$$

Eksempel 2

Et plan α er gitt ved ligningen

$$3x - y - 2z + 6 = 0$$

a) Finn en parameterisering til planet.

b) Finn et punkt som ligger i planet.

Svar

a) For å finne en parameterisering for et plan gitt av en ligning, står vi fritt til selv å velge to av x, y og z som lik hver av parameteriseringsvariablene. Vi velger her $x = s$ og $z = t$, og får at

$$\begin{aligned} 3s - y - 2t + 6 &= 0 \\ y &= 3s + 2t - 6 \end{aligned}$$

Parameteriseringen blir da

$$\alpha : \begin{cases} x = s \\ y = -6 + 3s + 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Ut ifra parameteriseringen ser vi at et punkt i planet må være $(0, -6, 0)$

Eksempel 3

Et plan α gitt ved ligningen $2x - 3y - 3z - 11 = 0$ møter ei linje l i et punkt A. Finn koordinatene til A når l er gitt ved parameteriseringen

$$l : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Svar

I punktet A må parameteriseringen til linja oppfylle ligningen til planet. Vi må altså ha at

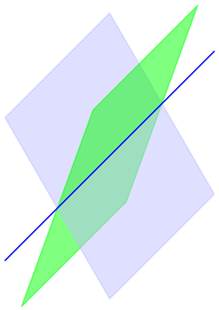
$$\begin{aligned}
2(-1-2t)-3(-1+t)-3(1+2t)-11&=0\\
-2-4t+3-3t-3-6t-11&=0\\
-13t-13&=0\\
t&=-1
\end{aligned}$$

Koordinatene til A blir da

$$\begin{aligned}
A&=(-1-2(-1),-1+(-1),1+2(-1))\\
&=(1,-2,-1)
\end{aligned}$$

4.2.2 Linja mellom to plan

Gitt to ikke-parallelle plan, det ene med normalvektor $\vec{n}_1$ og det andre med normalvektor $\vec{n}_2$. Planene vil skjære hverandre langs ei linje med en retningsvektor som må ligge i begge planene. Dette innebærer at retningsvektoren står normalt på både $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$, med andre ord må[1] $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ være en retningsvektor for linja.



Figur 4.4: Skjæringslinje mellom to plan.

4.3 Linja mellom to plan

Gitt to ikke-parallelle plan, det ene med normalvektor $\vec{n}_1$ og det andre med normalvektor $\vec{n}_2$. Planene skjærer da hverandre langs ei linje med retningsvektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

[1]Alle vektorer som står normalt på både $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ er parallelle med vektoren $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (se s. 102).

Eksempel

To plan α og β er gitt ved

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad -2x + y + z - 2 = 0 \\ \beta: &\quad x - y - z = 0 \end{aligned}$$

Planene skjærer hverandre langs ei linje l, finn en parameterisering for linja.

Svar

Vi starter med å finne en retnigsvektor for linja. Av ligningene til planene ser vi at α har normalvektor $[-2, 1, 1]$, mens β har normalvektor $[1, -1, -1]$. En retningsvektor for linja er derfor gitt ved

$$[-2, 1, 1] \times [1, -1, -1] = [0, -1, 1]$$

Nå gjenstår å finne et punkt som ligger i begge planene. Vi bestemmer da én av koordinatene og løser det resulterende ligningssystemet. For enkelhetsskyld er det naturlig å velge at én av koordinatene er 0, men vi må da være litt varsomme. Av ligningene til α og β ser vi for eksempel at hvis vi setter $x = 0$, får vi et uløselig ligningssystem, mens $y = 0$ gir et løselig et. For $y = 0$ får vi at

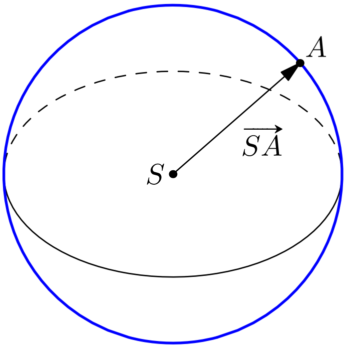
$$\begin{aligned} -2x + z - 2 &= 0 \qquad \text{(I)} \\ x - z &= 0 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Ved å løse dette ligningssystemet finner vi at $x = -2$ og $z = -2$, altså ligger punktet $(-2, 0, -2)$ i begge planene. En parameterframstilling av l blir derfor

$$l: \begin{cases} x = -2 \\ y = -t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

4.2.3 Kuleligningen

Gitt ei kule med sentrum i $S = (x_0, y_0, z_0)$ og et vilkårlig punkt $A = (x, y, z)$, som ligger på kuleflaten (på randen av kula).



Figur 4.5: Kule med sentrum $S = (x_0, y_0, z_0)$. Punktet $A = (x, y, z)$ ligger på kuleflaten.

Lengden til $\overrightarrow{SA}$ må være den samme som radiusen r til kula, dermed har vi at

$$
\begin{aligned}
r &= |\overrightarrow{SA}| \\
r &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\
r^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2
\end{aligned}
$$

4.4 Kuleligningen

Ligningen for en kuleflate med radius r og sentrum $S = (x_0, y_0, z_0)$ er gitt ved

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{4.4}$$

Eksempel 1

En kuleflate er beskrevet ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 4z - 19 = 0$$

a) Finn sentrum S og radiusen til kula.

b) Vis at punktet $A = (7, -6, 4)$ ligger på kuleflaten.

c) Finn tangentplanet til kuleflaten i punktet A.

Svar

a) For å løse denne oppgaven må vi finne de fullstendige kvadratene:

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - (-3)^2$$

$$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 2^2$$

$$z^2 - 4z = (z-2)^2 - (-2)^2$$

Dermed får vi at

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 4z - 19 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 - 3^2 - 2^2 - 2^2 - 19 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 &= 36 \\ &= 6^2 \end{aligned}$$

Kula har altså sentrum i punktet $S = (3, -2, 2)$ og radius lik 6.

b) Skal A ligge på kuleflaten, må koordinatene til A oppfylle kuleligningen:

$$\begin{aligned} (7-3)^2 + (-6+2)^2 + (4-2)^2 &= 36 \\ 4^2 + (-4)^2 + 2^2 &= 36 \\ 36 &= 36 \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

c) Tangentplanet står normalt på kuleflaten i A og har derfor $\overrightarrow{SA}$ som normalvektor:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SA} &= [7-3, -6-(-2), 4-2] \\ &= [4, -4, 2] \\ &= 2[2, -2, 1] \end{aligned}$$

Altså er $[2, -2, 1]$ en normalvektor for tangentplanet. Av (4.2) kan dette planet uttrykkes ved ligningen

$$\begin{aligned} 2(x-7) - 2(y-(-6)) + 1(z-4) &= 0 \\ 2(x-7) - 2(y+6) + 1(z-4) &= 0 \\ 2x - 14 - 2y - 12 + z - 4 &= 0 \\ 2x - 2y - z - 30 &= 0 \end{aligned}$$

Eksempel 2

En kuleflate er gitt ved ligningen

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3^2$$

I to punkt skjærer kuleflaten ei linje l parameterisert ved

$$l: \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Finn skjæringspunktene mellom kuleflaten og l.

Svar

Vi skal her bruke to løsningsmetoder. Den første gir oss direkte en andregradsligning som vi kan løse, mens den andre unngår nettopp dette, men krever til gjengjeld litt resonnering i forkant.

Løsningsmetode 1:
Der hvor kuleflaten skjærer linja, må parameteriseringen til linja oppfylle kuleligningen:

$$\begin{aligned} ((-4-2t)+2)^2 + ((5+2t)-3)^2 + ((3+t)-2)^2 &= 3^2 \\ (-2(t+1))^2 + (2(t+1))^2 + (t+1)^2 &= 9 \\ 9(t+1)^2 &= 9 \\ (t+1) &= \pm 1 \\ t &= \pm 1 - 1 \end{aligned}$$

Altså er $t \in \{0, -2\}$. For $t = 0$ får vi punktet $(-4, 5, 3)$ og for $t = -2$ får vi punktet $(0, 1, 1)$.

Løsningsmetode 2:
$[-2, 2, 1]$ er en retningsvektor for linja og har lengden 3. Vektoren $\frac{1}{3}[-2, 2, 1]$ er derfor også en retningsvektor, men har lengde 1. Siden skjæringspunktene ligger på kuleflaten, må avstanden fra S tilsvare radiusen (altså 3). De to punktene må da være gitt av uttrykket

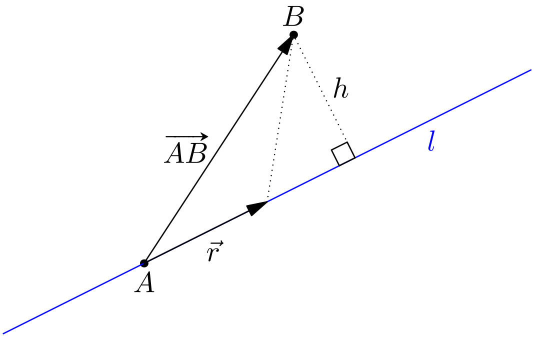
$$S \pm 3 \cdot \frac{1}{3}[-2, 2, 1]$$

Regner man ut de to tilfellene $S \pm [-2, 2, 1]$, får man de samme punktene som i *Løsningsmetode 1*.

4.3 Avstander mellom geometrier

4.3.1 Avstand mellom punkt og linje

La oss tenke at vi har ei linje l i rommet, beskrevet ut ifra et punkt A og en retningsvektor $\vec{r}$. I tillegg ligger et punkt B utenfor linja, som skissert i *figur 4.6*.



Figur 4.6: Punkt B en avstand h fra linja l.

Vi ønsker nå å finne den korteste avstanden[1] fra B til linja. Denne avstanden identifiserer vi som høyden h i trekanten utspent av $\vec{r}$ og $\overrightarrow{AB}$. Fra (3.28) vet vi at arealet er gitt ved uttrykket

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}\right|$$

Men vi er også kjent med at arealet til en trekant er gitt som grunnlinja ganger høyden, dermed er

$$\frac{1}{2}|\vec{r}|h = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}\right|$$

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$

[1]Når man snakker om avstanden mellom geometrier, menes den *korteste* avstanden (så lenge ikke annet er nevnt).

4.5 Avstand mellom punkt og linje

Avstanden h mellom et punkt B og en linje gitt av punktet A og retningsvektoren $\vec{r}$ er gitt som

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|} \tag{4.5}$$

Eksempel

Ei linje l går gjennom punktene $A = (-2, 4, 1)$ og $B = (-5, 7, -2)$. Finn avstanden mellom l og punktet $C = (1, 3, -2)$.

Svar

Vektoren mellom de to punktene er en retningsvektor for linja:

$$\begin{aligned}[-5-(-2), 7-4, -2-1] &= [-3, 3, -3] \\ &= 3[-1, 1, -1]\end{aligned}$$

Vi fortsetter med å finne lengden til den faktoriserte retningsvektoren:

$$\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

Vektoren mellom A og C er gitt som

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= [1-(-2), 3-4, -2-1] \\ &= [3, -1, -3]\end{aligned}$$

Kryssproduktet av $[-1, 1, -1]$ og $\overrightarrow{AC}$ blir

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(1-(-3)) - \vec{e}_y(-3-3) + \vec{e}_z(3-1) \\ &= [4, 6, 2]\end{aligned}$$

Lengden av denne vektoren er

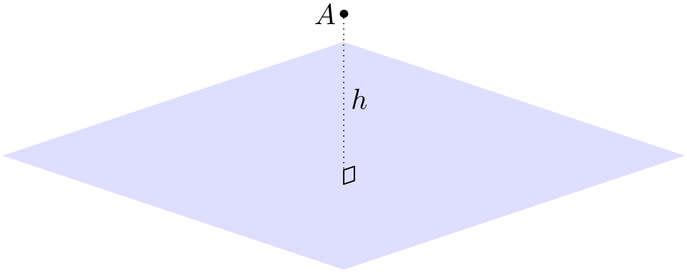
$$2\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = 2\sqrt{14}$$

Nå har vi alle størrelser vi trenger for å finne avstanden h mellom linja og C:

$$h = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$$

4.3.2 Avstand mellom punkt og plan

Når et punkt ligger over et plan, kan man trekke et linjestykke som treffer punktet og står normalt på planet. Lengden av dette linjestykket er den korteste avstanden mellom punktet og planet.



Figur 4.7: Den korteste avstanden h mellom punktet A og planet (i blått).

4.6 Avstand mellom punkt og plan

Avstanden h mellom et punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ og et plan beskrevet av ligningen $ax + by + cz + d = 0$, er gitt som

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4.6}$$

Eksempel

Finn avstanden mellom punktet $(-1{,}4{,}5)$ og planet gitt ved ligningen

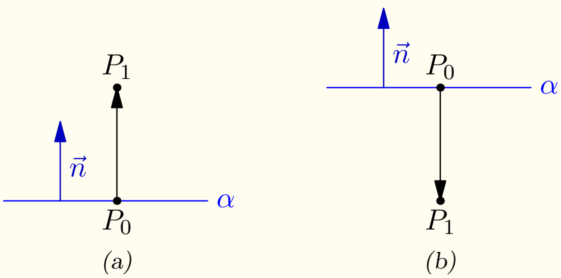
$$2x - y + 3z - 21 = 0$$

Svar

Avstanden h er

$$\begin{aligned} h &= \frac{|2(-1) - 4 + 3 \cdot 5 - 21|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|-12|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

4.6 Avstand mellom punkt og plan (forklaring)



Figur 4.8: a) Vektoren mellom P_0 og P_1 har samme retning som $\vec{n}$. *b)* Vektoren mellom P_0 og P_1 har motsatt retning som $\vec{n}$.

Vi ønsker å finne avstanden mellom et punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ og et plan α gitt ved ligningen

$$ax + by + cz + d = 0$$

I planet velger vi oss punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ slik at $\overrightarrow{P_0P_1}$ er en normalvektor til planet (se *figur 4.8*). Siden P_0 ligger i planet, følger det at

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0 \\ d &= -(ax_0 + by_0 + cz_0) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Normalvektoren gitt av ligningen til planet er $\vec{n} = [a, b, c]$, ved hjelp av (4.7) kan vi skrive skalarproduktet av $\vec{n}$ og $\overrightarrow{P_0P_1}$ som

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} &= [a, b, c] \cdot [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0] \\ &= a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 + d \end{aligned} \tag{4.8}$$

La oss kalle vinkelen mellom $\vec{n}$ og $\overrightarrow{P_0P_1}$ for v. Fra definisjonen av skalarproduktet har vi at

$$|\vec{n}| \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cos v = \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$$

Siden begge vektorene er normalvektorer, må v være enten $0°$ eller $180°$, altså er $\cos v = \pm 1$. Tar vi tallverdien av skalarproduktet, får vi at

$$\left| |\vec{n}| \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cos v \right| = \left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}\right|}{|\vec{n}|}$$

Av (4.8) og definisjonen av lengden til en vektor har vi nå at

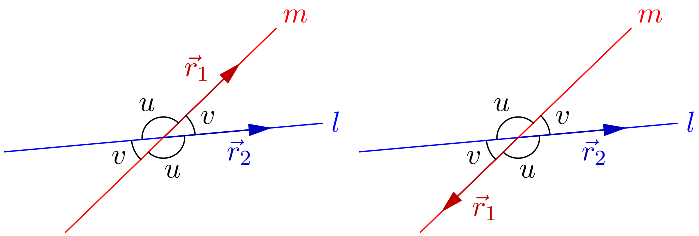
$$\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Lengden av $\overrightarrow{P_0P_1}$ er nettopp avstanden mellom P_1 og planet α.

4.4 Vinkler mellom geometrier

Når geometrier i rommet skjærer hverandre, utspenner de forskjellige vinkler mellom seg. Når vi bruker begrepet *vinkelen mellom* geometrier, søker vi alltid den minste av disse vinklene.

4.4.1 Vinkelen mellom to linjer



(a) a) (b) b)

Figur 4.9: a) $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ utspenner vinkelen v. *b)* $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ utspenner vinkelen u.

Si vi har to linjer m og l med hver sine retningsvektorer $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$. Vi er nå interessert i å finne den minste vinkelen mellom disse linjene. Vi lar u betegne den største og v den minste vinkelen mellom linjene. Linjene danner et par av vinkelen u og et par av vinkelen v, mens retningsvektorene r_1 og r_2 vil utspenne enten u eller v (se *figur 4.9*).

Av (3.12) har vi at

$$\cos\angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|}$$

Vi vet at uttrykket over representerer cosinusverdien til u eller v, men ikke hvilken av dem. Det blir tungvint å alltid måtte inspisere $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ grafisk bare for å sjekke dette, vi merker oss derfor følgende: Siden $v = 180° - u$, er tallverdien til $\cos u$ og $\cos v$ eksakt lik. Videre er $180° \geq u \geq 90°$ og $90° \geq u \geq 0°$. Altså er $\cos u \leq 0$ og $\cos v \geq 0$. Dette betyr at

$$\begin{aligned}\cos v &= |\cos\angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2)| \\ &= \left|\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|}\right| \\ &= \frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|}\end{aligned}$$

4.7 Vinkelen mellom to linjer

Vinkelen v mellom ei linje med retningsvektoren $\vec{r}_1$ og ei linje med retningsvektoren $\vec{r}_2$ er gitt ved ligningen

$$\cos v = \frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|} \tag{4.9}$$

Eksempel

Finn vinkelen mellom ei linje med retnigsvektor $\vec{r}_1 = [4, 1, 1]$ og ei linje med retningsvektor $\vec{r}_2 = [-1, 0, 1]$.

Svar

Vi starter med å regne ut skalarproduktet og lengdene av retningsvektorene:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 &= [4, 1, 1] \cdot [-1, 0, 1] \\ &= -4 + 0 + 1 \\ &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{r}_1| &= \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \\ |\vec{r}_2| &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

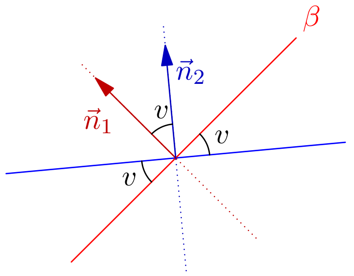
Cosinus til vinkelen v mellom linjene er derfor gitt som

$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|} \\ &= \frac{3}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

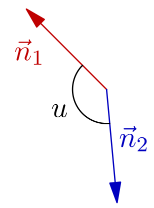
Altså er $v = 60^\circ$.

4.4.2 Vinkelen mellom to plan

Som tidligere nevnt vil skjæringspunktene mellom to plan danne ei linje (se *figur 4.4*). Om vi betrakter geometriene langsmed denne linja, vil planene selv framstå som to linjer som, analogt til forrige delseksjon, danner et par av to vinkler.



(a) a)



(b) b)

Figur 4.10: *a)* $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ utspenner vinkelen v. *b)* $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ utspenner vinkelen u.

Gitt to plan α og β med hver sine normalvektorer $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$. De to linjene som går gjennnom normalvektorene utspenner de to samme vinkelparene som de skjærende planene[1]. Resonnementet for å finne den minste vinkelen blir derfor helt likt det vi brukte da vi kom fram til ligning (4.9).

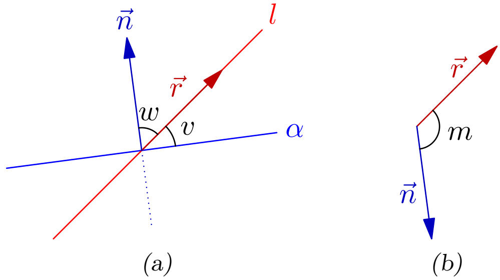
4.8 Vinkelen mellom to plan

Vinkelen v mellom et plan med normalvektoren $\vec{n}_1$ og et plan med normalvektoren $\vec{n}_2$ er gitt ved ligningen

$$\cos v = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \tag{4.10}$$

[1]Hvis vi roterer begge planene 90° til høyre, må vinklene de utspenner forbli de samme. Og ved dette tilfellet ligger planene på linje med sine opprinnelige normalvektorer, som derfor utspenner de samme vinkelparene.

4.4.3 Vinkelen mellom plan og linje



Figur 4.11: a) $\vec{n}$ og $\vec{r}$ utspenner vinkelen $w < 90°$. *b)* $\vec{n}$ og $\vec{r}$ utspenner vinkelen $m > 90°$.

Når ei linje med retningsvektor $\vec{r}$ og et plan med normalvektor $\vec{n}$ skjærer hverandre, vil linjene gjennom retningsvektoren og normalvektoren danne to vinkler w og m (se *figur 4.11*).

Vi lar w være den minste av disse to vinklene, da tilsvarer $|\cos\angle(\vec{n}, \vec{r})|$ cosinusverdien til w. Hvis vi kaller den minste vinkelen utspent av planet og linja for v, har vi at

$$v = 90° - w$$

4.9 Vinkel mellom plan og linje

Vinkelen v mellom et plan med normalvektor $\vec{n}$ og ei linje med retningsvektor $\vec{r}$ er gitt som

$$v = 90° - w \tag{4.11}$$

hvor w er gitt ved ligningen

$$\cos w = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{|\vec{n}||\vec{r}|} \tag{4.12}$$

Oppgaver for kapittel 4

4.1.1

Ei linje går gjennom punktene $A = (-2, 3, -5)$ og $B = (-1, 1, -4)$.

a) Finn en parameterframstilling for linja.

b) Sjekk om punktene $C = (-4, 7, -7)$ og $D = (-3, 5, 4)$ ligger på linja.

4.1.2

To linjer l og m krysser hverandre i et punkt A. Parameteriseringen til linjene er gitt som

$$l : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad m : \begin{cases} x = -7 + 3s \\ y = 5 - 2s \\ z = s \end{cases}$$

Finn koordinatene til A.

4.1.3

Et plan inneholder punktene $(1, 1, -1)$, $(-2, -3, -1)$ og $(5, 6, 1)$.

a) Finn en parameterisering for planet.

b) Sjekk om punktet $(-9, 5, 3)$ ligger i planet.

4.1.4

Et plan har retningsvektoren $[2, 1, -5]$ og inneholder linja gitt ved parameteriseringen

$$l : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Finn en parameterisering for planet.

4.2.1

Et plan er utspent av vektorene $[-4, 2, 0]$ og $[-3, 0, 3]$ og inneholder punket $(-2, 2, 1)$. Finn en ligning for planet.

4.2.2
Et plan α er gitt ved parameteriseringen

$$\alpha : \begin{cases} x = -4 + 2s \\ y = 2 + 3s + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

a) Finn to retningsvektorer for planet.

b) Finn en ligning for planet.

4.2.3
Et plan er gitt ved ligningen

$$10x - 3y - 4z = 0$$

a) Sjekk om punktene $(1, -2, 4)$ og $(4, -2, 1)$ ligger i planet.

b) Finn en parameterframstilling for planet.

4.2.4
Et plan går gjennom origo og inneholder punktet $A = (-2, 1, 1)$. For en gitt t er vektoren $\vec{u} = [3t, 5, t]$ ortogonal med vektoren mellom origo og A. For dette valget av t er $\vec{u}$ også en normalvektor for planet. Finn en ligning for planet.

4.2.5
Ei kule er gitt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 12z + 32 = 0$$

a) Finn sentrum og radiusen til kula.

b) Vis at punktet $A = (1, 3, 8)$ ligger på kuleflaten.

c) Bestem ligningen til tangentplanet til kuleflaten i punktet A.

4.2.6
Ei kule er gitt ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 10z - 14 = 0$$

a) Finn sentrum S og radiusen r til kula.

b) Sjekk om punktene $A = (4, 1, 6)$ og $B = (-6, -4, 1)$ ligger innenfor, utenfor eller på kuleflaten.

4.3.1

Ei linje l går gjennom punktene $(1, 0, -2)$ og $(2, -2{,}0)$. Finn avstanden mellom l og punktet $(1, -3, 1)$.

4.3.2

Et plan er gitt ved ligningen:

$$-3x + 4y + z - 7 = 0$$

Finn avstanden mellom planet og punktet $(-3{,}2{,}3)$.

4.3.3

To parallelle plan α og β er henholdsvis gitt ved ligningene

$$3x - 2y + z + 12 = 0$$

og

$$3x - 2y + z = 0$$

a) Finn en normalvektor til planene.

b) Finn et punkt som ligger i ett av planene.

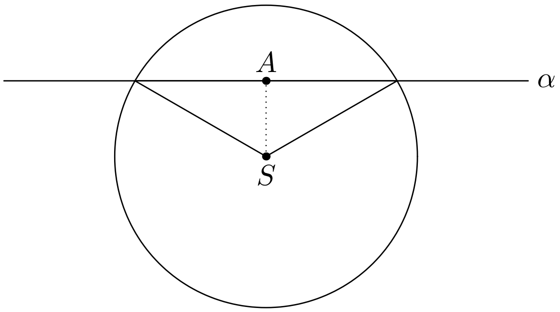
Hint: Velg fritt en verdi for x og y, og løs resulterende ligning for z.

c) Finn avstanden mellom planene.

d) Finn en parameterframstilling for ett av planene.

4.3.4

Når et plan α skjærer en kuleflate med sentrum S, kan vi alltids studere geometrien fra en slik vinkel at planet ligger rett horisontalt. Et snitt av figuren vil da se slik ut:



Punktet A er sentrum i sirkelen hvor kuleflaten skjærer planet, og ved formlikhet kan vi vise (prøv selv!) at linjestykket AS står normalt på α.

La α være gitt ved ligningen

$$2x - y - 2z + 1 = 0$$

Dette planet skjærer en kuleflate gitt ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 23 = 0$$

a) Hva er koordinatene til S?

b) Finn en parameterframstilling for linja som går gjennom A og S.

c) Finn koordiantene til de to punktene hvor kuleflaten og linja gjennom AS krysser.

d) Hva er koordinatene til A?

e) Hvor stor er radiusen til sirkelen hvor A er sentrum?

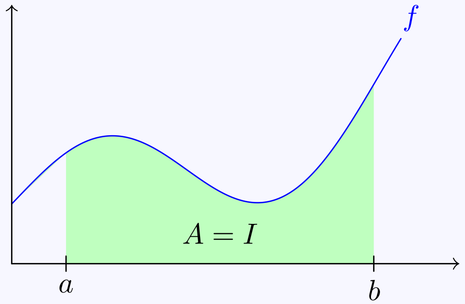
Kapittel 5

Integrasjon

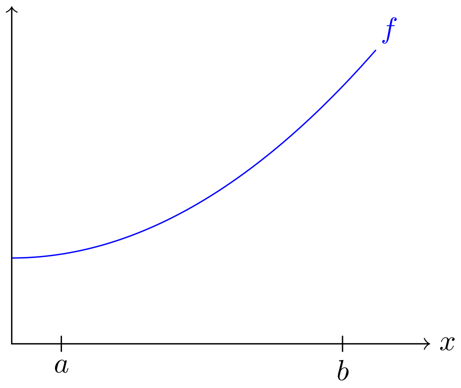
5.1 Bestemt og ubestemt integral

5.1 Integral som areal

Gitt en funksjon $f(x)$ som er positiv og kontinuerlig for alle $x \in [a, b]$. **Integralet** I til f på intervallet $x \in [a, b]$ tilsvarer da arealet avgrenset av x-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$, og grafen til f.



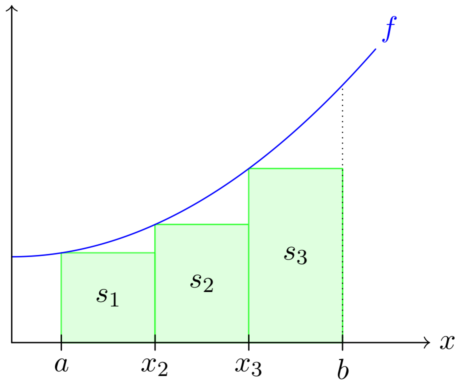
Gitt en funksjon $f(x)$, som vist i *figur 5.1*. Vi ønsker nå å finne en tilmærming for integralet I til f på intervallet $[a, b]$.



Figur 5.1

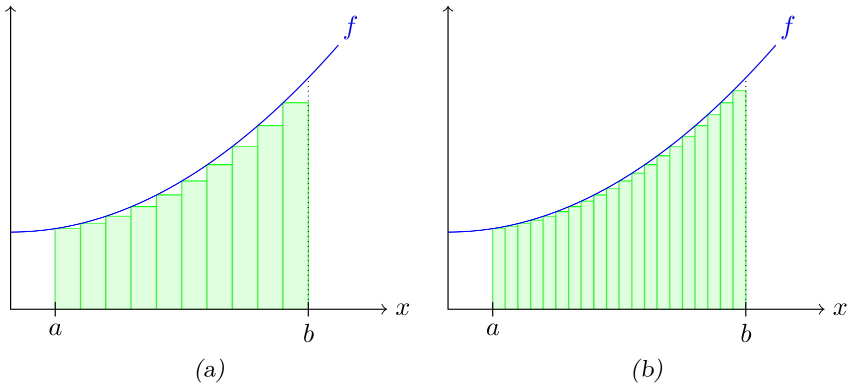
Vi starter med å dele $[a, b]$ inn i tre delintervaller, som da får bredden $\Delta x = \frac{b-a}{3}$. Videre bruker vi $f(x)$ i starten av hvert delintervall som høgden i et rektangel. x-verdiene dette gjelder kaller vi $x_1 = a$, x_2 og x_3. Vi kan nå tilnærme I som summen av tre areal, s_1, s_2 og s_3:

$$\begin{aligned}
I &\approx s_1 + s_2 + s_3 \\
&\approx f(a)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \\
&\approx [f(a) + f(x_2) + f(x_3)]\,\Delta x
\end{aligned}$$



Figur 5.2

Intuitivt vil vi tenke at jo mindre intervaller vi bruker, jo bedre må tilnærmingen være.



Figur 5.3: a) 10 intervaller *b)* 20 intervaller

Lar vi n være antall delintervaller, og $n \to \infty$, får vi at

$$\begin{aligned} I &\approx \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + fv(x_2) + ... + f(x_n)\right] \Delta x \\ &\approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad (5.1) \end{aligned}$$

hvor $x_i = a + (i-1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (legg merke til at $t_1 = a$). Det kan vises at grenseverdien i (5.1) er lik I, og det fører oss til følgende definisjon:

5.2 Bestemt integral I

Det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad (5.2)$$

hvor $x_i = a + (i-1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Eksempel

Finn det bestemte integralet av $f(x) = x$ på intervallet $x \in [0, 4]$.

Svar

Vi har her at $f(x_i) = x_i = (i-1)\Delta x$, hvor $\Delta x = \frac{4}{n}$. Setter vi dette inn i (5.2), får vi at

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \left(\frac{4}{n}\right)^2 \\
&= 4^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&= 4^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2+n}{2} - n\right) \\
&= 16 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Merk: I overgangen mellom første og andre linje i ligningen over har vi brukt summen av en aritmetisk rekke.

I kommende seksjoner skal vi finne integraler på en helt annen måte enn i eksempelet over. Læresetningen som sørger for dette er så viktig at den rett og slett kalles **analysens fundamentalteorem**[1]. Da teoremet gir oss en metode som omgår utregning av summer, lønner det seg å skrive integralet på en mer kompakt form:

5.3 Bestemt integral II

Det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ skrives som

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.3}$$

Omskriving

I overgangen mellom (5.2) og (5.3) har vi erstattet $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n}$ med $\int\limits_a^b$, Δx med dx, og i tillegg fjernet alle indekser.

5.1.1 Den antideriverte

Vi skal nå se på en definisjon som kan virke veldig triviell, men som viser seg å være svært viktig i neste delseksjon.

La oss starte med å se på funksjonen $f(x) = x^2$. Å derivere f mhp. x byr på få problemer:

$$f' = 2x$$

Hva nå med den deriverte av $g(x) = x^2 + 1$? Svaret blir det samme som for f':

$$g' = 2x$$

Allerede nå innser vi at det finnes en haug av funksjoner, rett og slett uendelig mange, som har $2x$ som sin deriverte. Tiden er derfor inne for å lage en samlebetegnelse for alle funksjoner med samme deriverte:

5.4 Den antideriverte

Hvis $F(x)$ er en deriverbar funksjon og $F'(x) = f(x)$, da er F en antiderivert av f.

[1] Analyse i matematisk sammenheng kan, kort oppsummert, sies å være studien av funksjoner. Et teorem er en læresetning som kan bevises.

Eksempel

Undersøk om følgende funksjoner er en antiderivert til $f(x) = 2x + e^x$:

$$g(x) = x^2 + e^x$$

$$h(x) = x^2 + e^{2x}$$

$$k(x) = x^2 + e^x + 4$$

Svar

Vi finner de deriverte av g, h og k:

$$g'(x) = 2x + e^x$$

$$h'(x) = 2x + 2e^{2x}$$

$$k(x) = 2x + e^x$$

Siden $g'(x) = k'(x) = f(x)$, mens $h'(x) \neq f(x)$, er bare $g(x)$ og $k(x)$ en antiderivert til f.

5.1.2 Analysens fundamentalteorem

5.5 Analysens fundamentalteorem

Gitt en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[a, b]$. Hvis F er en antiderivert til f, er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5.4}$$

Eksempel

Gitt funksjonen $f(x) = e^{\sin x}$. Finn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx$.

Svar

Siden f er en antiderivert til $f'(x)$, har vi at

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \\ &= e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^{\sin 0} \\ &= e - 1\end{aligned}$$

5.1.3 Ubestemte integral

Vi har hittil sett på det **bestemte integralet**, som har sitt navn fordi integralet er over et intervall der start- og sluttverdien er gitt. Det *ubestemte* integralet til en funksjon $f(x)$ skriver vi derimot som

$$\int_c^x f(t)\,dt$$

Navnet ubestemt kommer av at c er en vilkårlig konstant og at x er en varierende verdi[1].

[1]Det kan kanskje se litt rart ut at vi har skrevet $f(t)$ i integralet når vi snakker om $f(x)$, men dette gjøres bare for å skille mellom de to varierende verdiene x og t. x kan være en hvilken som helst verdi, men for det ubestemte integralet ser vi på f for verdiene $t \in [a, x]$, altså $f(t)$. Og da er det ikke x som varierer, men t, derav dt.

Hvis vi lar F være en antiderivert til f, har vi fra (5.4) at:

$$\int_c^x f(t)\,dt = F(x) - F(c)$$

Siden c er en konstant, må $-F(c)$ også være det. Denne kalles **integrasjonskonstanten**, og omdøpes gjerne til C. Det er også vanlig å forenkle skrivemåten til det ubestemte integralet ved å fjerne grensene og bare skrive $f(x)\,dx$ etter integraltegnet.

5.6 Ubestemt integral

Det ubestemte integralet av $f(x)$ er gitt som

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{5.5}$$

Hvor F er en antiderivert til f og C er en vilkårlig konstant.

Merk

Når ikke annet er nevnt, tar vi det heretter for gitt at størrelser skrevet som store bokstaver er vilkårlige konstanter som resultat av integrasjon.

Eksempel 1

Ved derivasjon vet vi at $(x^2)' = 2x$. Bruk dette til å å finne $\int 2x\,dx$.

Svar

Fra derivasjonen ser vi at x^2 er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Eksempel 2

Ved derivasjon vet vi at $(x^2+3)' = 2x$. Bruk dette til å finne $\int 2x\,dx$.

Svar

Fra derivasjonen ser vi at x^2+3 er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x\,dx = x^2+3+C$$

Men siden C er en vilkårlig konstant, kan vi liksågodt lage oss en ny konstant $D = C+3$, og får da at

$$\int 2x\,dx = x^2+D$$

Merk: Siden integrasjonskonstanter er vilkårlige, kan vi tillate oss å komprimere flere konstanter til én. I utregningen over kunne vi skrevet C opp igen, underforstått at 3 var "trekt inn" i denne konstanten:

$$\int 2x\,dx = x^2+3+C = x^2+C$$

5.2 Integralregning

Å finne bestemte og ubestemte integraler er et stort og viktig felt innenfor matematikken. Analysens fundamentalteorem forteller oss at nøkkelen er å finne en antiderivert til funksjonen vi ønsker å integrere.

5.2.1 Integralet av utvalge funksjoner

Vi skal etterhvert se at å finne integraler ofte krever spesielle metoder, men noen grunnleggende relasjoner bør vi huske:

5.7 Ubestemte integraler

For to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, og to konstanter k og C, er

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \tag{5.6}$$

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \tag{5.7}$$

$$\int x^k\, dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C \qquad (k \neq -1) \tag{5.8}$$

$$\int \sin(kx)\, dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C \tag{5.9}$$

$$\int \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k}\sin(kx) + C \tag{5.10}$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C \tag{5.11}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C \tag{5.12}$$

$$\int \frac{1}{x+k}\, dx = \ln|x+k| + C \tag{5.13}$$

Eksempel 1

Finn det bestemte integralet $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{1-\sin^2 x}\,dx$.

Svar

Vi starter med å observere at $1-\sin^2 x = \cos^2 x$. I tillegg vet vi fra (5.7) at konstanten 8 kan trekkes utenfor integralet. Vi kan derfor skrive integralet vårt som

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

Fra (5.12) vet vi at $\tan x$ er en antiderivert til $\frac{1}{\cos^2 x}$. Når vi har funnet en antiderivert fører vi gjerne slik[1]:

$$\begin{aligned}
8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= 8\big[\tan x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 8\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] \\
&= 8[1-0] \\
&= 8
\end{aligned}$$

Merk: Bruken av klammeparantes er bare en annen måte å skrive (5.4) på.

[1] Forklar for deg selv hvorfor vi ikke trenger å ta hensyn til konstanten når vi skal finne et bestemt integral.

Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet $\int \left(\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x}\right) dx$.

Svar

Vi utnytter at $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ og at $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Ved (5.6) og (5.8) kan vi skrive:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x}\right) dx &= \int \left(x^{-4} + x^{\frac{1}{3}}\right) dx \\
&= \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C \\
&= -\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}$$

5.2.1 Integralet av utvalge funksjoner (forklaring)

(5.6) og (5.7) følger direkte av (1.15) og (1.16).

Ut ifra definisjonen av det ubestemte integralet (se (5.5)) har vi at

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

hvis $F' = f$. For alle ubestemte integraler gitt i (5.8)-(5.12) kan dette sjekkes via enkle derivasjonoperasjoner og er derfor overlatt til leseren.

5.2.2 Bytte av variabel

Vi skal nå se på en metode som kalles *bytte av variabel*[1] (også kalt *substutisjon*). Med denne kan vi ofte forenkle integralregningen betraktelig.

5.8 Bytte av variabel

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $g(u)$. Hvis $\int f(x)\,dx$ kan skrives om til $\int g(u)u'\,dx$, kan integralet løses med u som variabel:

$$\int g(u)u'\,dx = \int g(u)\,du \tag{5.14}$$

Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int 8x\sin\left(4x^2\right)\,dx$$

Svar

Vi setter $u(x) = 4x^2$ og $g(u) = \sin u$. Dermed blir $u' = 8x$, og da er

$$\begin{aligned}\int 8x\sin\left(4x^2\right)\,dx &= \int u'g(u)\,dx \\ &= \int g(u)\,du \\ &= \int \sin u\,du \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos\left(4x^2\right) + C\end{aligned}$$

Merk: Når integralet vi skal finne er mhp. x, er det viktig at sluttuttrykket har x som eneste variabel.

[1]Det er flere framgangsmåter for denne metoden. Den vi her presenterer er, etter forfatterens mening, den raskeste for integraler som er pensum i R2. For mer avanserte integraler bør man kjenne til framgangsmåten presentert i vedlegg F.

Eksempel 2

Finn det bestemte integralet

$$\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\,dx$$

Svar

Vi setter $u(x) = 2x^3$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 6x^2$. I integralet vi skal løse mangler vi altså faktoren 6 for å kunne anvende oss av (5.14). Men vi kan alltids gange integralet vårt med 1, skrevet som $\frac{6}{6}$. Da kan vi trekke 6-tallet vi ønsker inn i integralet, og la resten av brøken forbli utenfor:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\,dx &= \frac{6}{6}\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 6x^2 e^{2x^3}\,dx\end{aligned}$$

Nå ligger alt til rette for å bytte variabel:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int_0^2 6x^2 e^{2x^3}\,dx &= \frac{1}{6}\int_0^2 u' g(u)\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 g(u)\,du \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 e^u\,du \\ &= \frac{1}{6}\left[e^u\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{6}\left[e^{2x^3}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{6}\left(e2\cdot 2^3 - e^{2\cdot 0^2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(e^{16} - 1\right)\end{aligned}$$

Det finnes også en alternativ måte for å regne ut bestemte integral ved bytte av variabel, se vedlegg G for denne.

Eksempel 3

Buelengden til grafen til en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\, dx \tag{I}$$

Finn lengden til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \qquad , \qquad x \in [0, 5]$$

Svar

Vi har at

$$f' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Og videre at

$$(f')^2 = \frac{1}{4}x$$

Det ubestemte integralet i (I) blir da

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{4}x}\, dx$$

Vi setter $u = 1 + \frac{1}{4}x$ og $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$. Da er $u' = \frac{1}{4}$. Nå har vi at

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+\frac{1}{4}x}\, dx &= 4\int u^{\frac{1}{2}} u'\, dx \\
&= 4\int u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

Altså er

$$\int_0^5 \sqrt{1+(f')^2}\,dx = \frac{8}{3}\left[\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$$
$$= \frac{8}{3}\left(\left(1+\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$
$$= \frac{8}{3}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{27}{8} - 1\right)$$
$$= \frac{19}{3}$$

Merk: En litt lettere utrekning kunne vi fått ved å observere at

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x}$$

Med denne omskrivingen kunne vi valgt substutisjonen $u = 4 + x$, og dermed fått at $u' = 1$.

5.2.3 Delvis integrasjon

Hvis vi ikke finner et passende bytte av variabel for å løse et integral, kan vi isteden prøve med *delvis integrasjon*. Vi starter med å utlede ligningen som legger grunnlaget for metoden.

Gitt produktet av to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$, altså uv. Av produktregelen ved derivasjon (se TM1) har vi at

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Videre integrerer[1] vi begge sider av ligningen over mhp. x:

$$\begin{aligned}
\int (uv)'\,dx &= \int \left(u'v + uv'\right)\,dx \\
uv &= \int \left(u'v + uv'\right)\,dx \\
uv - \int u'v\,dx &= \int uv'\,dx
\end{aligned}$$

5.9 Delvis integrasjon

For to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ har vi at

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \tag{5.15}$$

Eksempel 1

Integrer funksjonen $f(x) = x\ln x$.

Svar

Vi observerer at $f(x)$ er sammensatt av x og $\ln x$. Trikset bak delvis integrasjon er å sette én av disse til å være funksjonen $u(x)$ og den andre til å være den deriverte av $v(x)$, altså $v'(x)$. Da har vi en ligning som i (5.15) og kan (forhåpentligvis) bruke denne til å finne integralet vi søker.

Vi må integrere v' for å finne v og derivere u for å finne u'. Siden $\ln x$ er lett å derivere, men vanskelig å integrere, setter vi

$$\begin{aligned}
u &= \ln x \\
v' &= x
\end{aligned}$$

Da må vi ha at[1]

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{1}{x} \\
v &= \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

Altså kan vi skrive (rekkefølgen på v' og u har selvsagt ingent-

[1] Når vi har flere ubestemte itegraler, trenger vi bare ta med integrasjonskonstanten for én av dem. Derfor er ikke konstanten fra integrasjonen av $(uv)'$ tatt med.

ing å si i (5.15))

$$
\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \int v' u \, dx \\
&= uv - \int u' v \, dx \\
&= \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} x^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x \, dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C
\end{aligned}
$$

---

[1] Hvorfor ikke $v = \frac{1}{2}x^2 + C$? Vi hadde jo da fått samme v'.

Hvis vi lar V betegne en antiderivert til v', kan vi skrive $v = V + C$. Av (5.15) har vi da at

$$
\begin{aligned}
\int uv' \, dx &= u(V + C) - \int u'(V + C) \, dx \\
&= u(V + C) - \int u'V \, dx - \int Cu' \, dx \\
&= uV + Cu - \int u'V \, dx - Cu \\
&= uV - \int u'V \, dx
\end{aligned}
$$

Vi har endt opp med et uttrykk hvor C ikke lenger deltar. Vi får altså det samme svaret uansett hva verdien til C er, og da velger vi selvsagt fra starten av at $C = 0$.

Eksempel 2

Integrer funksjonen $f(x) = \ln x$.

Svar

Vi starter med å skrive $f(x) = \ln x \cdot 1$, og setter

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ v' &= 1 \end{aligned}$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{x} \\ v &= x \end{aligned}$$

$\int f\,dx$ finner vi nå ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot 1\,dx &= \int uv'\,dx \\ &= uv - \int u'v\,dx \\ &= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

5.2.4 Delbrøksoppspaltning

Gitt integralet

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

Etter litt testing vil vi finne at både delvis integrasjon og bytte av variabel kommer til kort i vår søken etter en antiderivert. Hva vi heller kan gjøre, er å ta i bruk *delbrøksoppspaltning*.

Vi merker oss da at integranden[1] er en brøk med nevneren $(x+1)(x+2)$. Dette betyr at den kan skrives som to separate brøker med $(x+1)$ og $(x+2)$ som nevnere:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \tag{5.16}$$

[1] For $\int f(x)\,dx$ sier vi at f er *integranden*.

A og B er to konstanter, vår oppgave blir nå å bestemme verdien til disse.

Vi starter med å gange begge sider av (5.16) med fellesnevneren:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}(x+1)(x+2) = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\right)(x+1)(x+2)$$
$$4x+5 = A(x+2) + B(x+1)$$

For det rette valget av A og B er uttrykkene over like for alle verdier av x. Når $x = -1$, har vi bare A som ukjent:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) + 5 &= A(-1+2) + B(-1+1) \\ 1 &= A \end{aligned}$$

Og ved å sette $x = -2$, finner vi B:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-2) + 5 &= A(-2+2) + B(-2+1) \\ -3 &= -B \\ 3 &= B \end{aligned}$$

Nå kan vi altså skrive

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Dette er to brøker vi kan å integrere[1] (se (5.13)):

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}\right) dx \\ &= \ln|x+1| + 3\ln|x+2| \end{aligned}$$

[1] *Obs!* I søken etter A og B valgte vi verdiene $x = -1$ og $x = -2$. I ligningene hvor vi satte inn disse verdiene var dette helt uskyldig, men i integralet må vi være observante. Vi får nemlig 0 i nevner hvis én av disse verdiene ligger i intervallet vi skal integere over. Er det snakk om et bestemt integral må vi derfor passe på at dette ikke er tilfelle.

5.10 Integrasjon ved delbrøksoppspaltning

For integraler på formen

$$\int \frac{a + bx + cx^2 + ...}{(x-d)(x-e)(x-f)...} \, dx$$

hvor $a, b, c, ...$ er konstanter, skriver vi om integranden til

$$\frac{A}{(x-d)} + \frac{B}{(x-e)} + \frac{C}{(x-f)} + ...$$

og finner så de ukjente konstantene $A, B, C, ...$

Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} \, dx$$

Svar

Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden, og får at

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(x-1)}$$

Denne brøken ønsker vi å skrive som

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

For å finne A, B og C, omskriver vi ligningen ved å gange med fellesnevneren $x(x+1)(x-1)$:

$$3x^2 + 3x + 2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

Ligningen må holde for alle verdier av x. Vi setter først $x = 0$, og får at

$$\begin{aligned} 2 &= A \cdot (-1) \\ -2 &= A \end{aligned}$$

Videre setter vi $x = -1$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1)^2 + 3(-1) + 2 &= B \cdot (-1)(-1-1) \\ 1 &= B \end{aligned}$$

Til slutt setter vi $x = 1$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 &= C(1+1) \\ 4 &= C \end{aligned}$$

Integralet vi skal finne kan vi derfor skrive som

$$\int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-1} \right) dx = -2\ln|x| + \ln|x+1| + 4\ln|x-1| + D$$

Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + x - 4}{x^2 + x - 2}\, dx$$

Svar

Hvis telleren har potenser av høyere orden[1] enn nevneren, må vi starte med en polynomdivisjon:

$$\begin{aligned} &(x^3 + 5x^2 + x - 4) : (x^2 + x - 2) = x + 4 + \frac{-x+4}{x^2+x-2} \\ -&\underline{(x^3 + x^2 - 2x)} \\ &\quad 4x^2 + 3x - 4 \\ &\quad -\underline{(4x^2 + 4x - 8)} \\ &\qquad -x + 4 \end{aligned}$$

Vi observerer videre at nevneren i brøken kan omskrives til $(x-1)(x+2)$, for to konstanter A og B har vi altså at

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{-x+4}{x^2+x-2}$$

$$A(x+2) + B(x-1) = -x + 4$$

Når $x = -2$, får vi at

$$\begin{aligned} B(-2-1) &= -(-2) + 4 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

Og når $x = 1$, er

$$\begin{aligned} A(1+2) &= -1 + 4 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Integralet blir derfor

$$\int \left(x + 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

[1] Her har telleren tre som høyeste orden, mens nevneren har to.

5.3 Areal og volum

5.3.1 Avgrenset areal

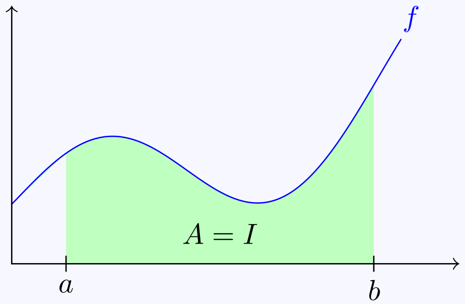
Arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$ skal vi for enkelhetsskyld kalle **arealet avgrenset av f for $x \in [a, b]$**. I seksjon 5.1 har vi sett at det er en sterk sammenheng mellom dette arealet og det bestemte ingegralet av f:

5.11 Integral som areal I

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ og to tall a og b der $a < b$.

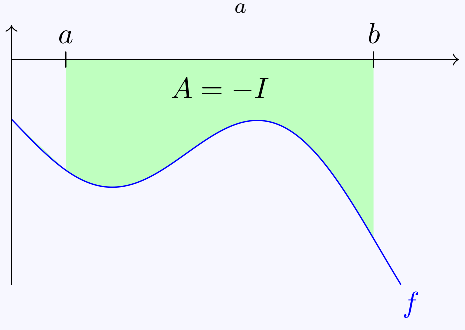
Hvis $f \geq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset av f på dette intervallet gitt som

$$A = \int_a^b f \, dx$$



Hvis $f \leq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset av f på dette intervallet gitt som

$$A = -\int_a^b f \, dx$$



Areal avgrenset av to funksjoner

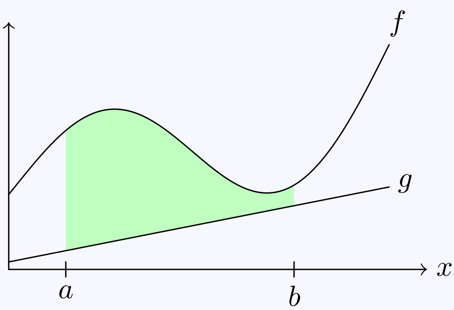
Noen ganger ønsker vi også å finne arealet avgrenset av to funksjoner. Da må vi sørge for at vi har tilstrekkelig med informasjon om disse før vi utfører integrasjonen:

5.12 Integral som areal II

Gitt to kontinuerlige funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og tre tall a, b og c der $a < c < b$.

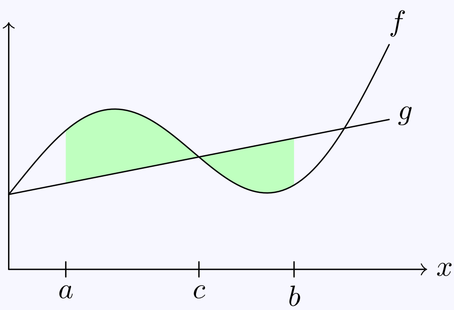
Hvis $f > g$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset mellom f og g på dette intervallet gitt ved

$$A = \int_a^b (f - g)\, dx \tag{5.17}$$



Hvis $f \geq g$ for $x \in [a, c]$ og $g \geq f$ for $x \in [c, b]$, er arealet A avgrenset mellom f og g for $x \in [a, b]$ gitt ved

$$A = \int_a^c (f - g)\, dx + \int_c^b (g - f)\, dx \tag{5.18}$$



Eksempel

Gitt funksjonene $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ og $g(x) = 2x - 1$. Vi har da at $f \geq g$ for $x \leq 1$ og at $g \geq f$ for $x \geq 1$. Finn arealet A avgrenset av f og g for $x \in [0, 2]$.

Svar

Ut ifra informasjonen over er arealet gitt ved ligningen

$$A = \int_0^1 (f - g)\, dx + \int_1^2 (g - f)\, dx$$

Vi starter med å regne ut de to integralene hver for seg:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f - g)\, dx &= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x^2 - x)\right]_0^1 \\
&= -\left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (x^2 - x)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) + (1^2 - 1) \\
&\qquad - \left(\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) + (0^2 - 0)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (g - f)\, dx &= \left[(x^2 - x) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 \\
&= (2^2 - 2) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right) \\
&\qquad - \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) - (1^2 - 1)\right) \\
&= 2 - \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

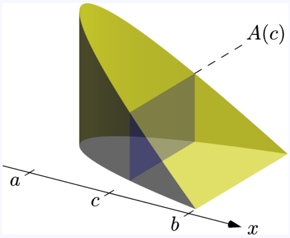
Summen av disse to integralene er 2, som altså er arealet.

5.3.2 Volumet av en figur

Vi har sett hvordan integraler kan brukes til å finne arealer, men de kan også brukes til å finne volumer:

5.13 Integral som volum

Gitt en tredimensjonal figur plassert i et koordinatsystem, med endepunktene satt til verdiene a og b langs x-aksen.



La videre $A(x)$ være tverrsnittsarealet av figuren for verdien x. Volumet V av figuren er da gitt som

$$V = \int_a^b A\,dx \tag{5.19}$$

Eksempel

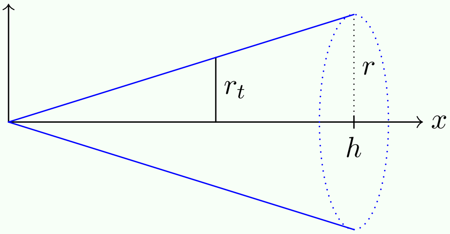
Vis at volumet V av ei rett kjegle er gitt som

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

hvor r er radiusen til grunnflata og h er høgden til kjegla.

Svar

Vi plasserer kjegla inn i et koordinatsystem med høyden langs x-aksen og spissen plassert i origo.



Radiusen $r_t(x)$ kan beskrives som en rett linje med stigningstall $\frac{r}{h}$:

$$r_t(x) = \frac{r}{h}x$$

Arealet $A(x)$ av tverrsnittet blir da

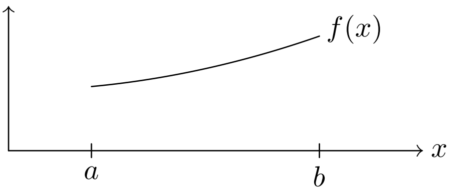
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi r_t^2 \\ &= \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2 \end{aligned}$$

Altså er volumet av kjegla gitt som

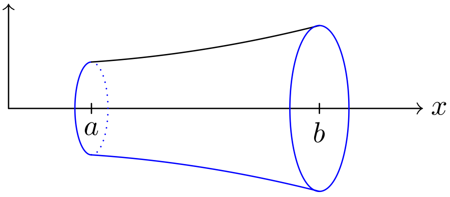
$$\begin{aligned} \int_0^h A\,dx &= \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\,dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h \\ &= \frac{1}{3}\pi h r^2 \end{aligned}$$

5.3.3 Volum av omdreiningslegemer

Si vi har en funksjon $f(x)$ gitt på intervallet $[a, b]$, med en graf som vist i *figur 5.4a*. Tenk nå at vi dreier linjestykket 360° om x-aksen. Formen vi da har "skjært" ut, vist i *figur 5.4b*, er det vi kaller *omdreiningslegemet* til $f(x)$ på intervallet $[a, b]$.



(a) a)



(b) b)

Figur 5.4: a) Grafen til f. *b)* Omdreiningslegemet til f.

Tverrsnittet (langs x-aksen) til en slik figur er alltid sirkelformet, tverrsnittsarealet er derfor πr^2, hvor $r(x)$ er radiusen til tverrsnittet. Men siden radiusen tilsvarer høyden fra x-aksen opp til f, er $r = f$. Av (5.19) kan vi da skrive

$$V = \int_a^b A\,dx = \int_a^b \pi f^2\,dx = \pi \int_a^b f^2\,dx$$

5.14 Volum av omdreiningslegemer

Volumet V av omdreiningslegemet til $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$V = \pi \int_a^b f^2\,dx \tag{5.20}$$

Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

finn volumet av omdreiningsleget til f på intervallet $[1, 3]$.

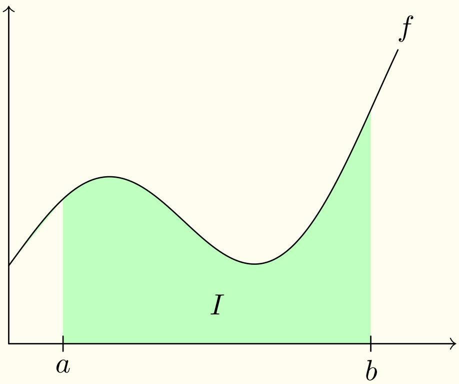
Svar

Volumet vi søker er gitt som

$$\begin{aligned}
\pi \int_1^3 f^2 \, dx &= \pi \int_1^3 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_1^3 x \, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2} x^2\right]_1^3 \\
&= \frac{\pi}{2} [9 - 1] \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Forklaringer

5.2 Bestemt integral I (forklaring)



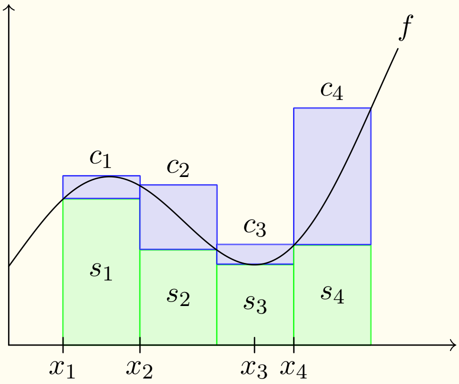
Figur 5.5: Integralet I tilsvarer det avgrensede arealet i grønt.

La oss ta utgangspunkt i funksjonen $f(x)$, med en graf som vist i *figur 5.5*. Vårt mål er nå å finne I.

Vi starter med å splitte $[a, b]$ inn i n mindre delintervaller, alle med bredden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. I tillegg lar vi x_i for $i \in \{1, 2, ..., n\}$ betegne den x-verdien som er slik at $f(x_i)$ er den laveste verdien til f på delintervall nr. i.

Arealet avgrenset av delintervallet og f tilnærmer vi som $s_i = f(x_i)\Delta x$, da har vi at (se *figur 5.6*)

$$I \geq s_1 + s_2 + ... + s_i$$
$$I \geq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x$$
$$I \geq \sum_{i=i}^{n} f(x_i)\Delta x$$



Figur 5.6: Arealene av s_i markert som grønne søyler og arealene av c_i markert som blå søyler. Bredden til hver søyle er $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (her er $n = 4$).

Videre må det finnes et tall $h_i \in [0, 1)$ som er slik at $f(x_i + h_i \Delta x)$ er den høyeste verdien til f på delintervallet. Vi lar c_i betegne arealet til søylen med Δx som bredde og $f(x_i + h_i \Delta x) - f(x_i)$ som høyde:

$$c_i = (f(x_i + h_i \Delta x) - f(x_i))\Delta x$$

Hvis vi legger til alle c_i i det første estimatet vårt, får vi en tilnærming som må være større eller lik det egentlige arealet. Derfor kan vi skrive

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Én av c-verdiene må være større eller lik alle andre c-verdier. Vi lar m betegne indeksen til nettopp denne c-verdien. Da må vi ha at

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \leq n c_m$$

Men når $n \to \infty$, går summen $n c_m$ mot 0:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n c_m &= \lim_{n\to\infty} n(f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m))\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} n(f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m))\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m))(b-a) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(x_m) - f(x_m))(b-a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Følgelig er $\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i = 0$, og da er

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} c_i \right) \tag{5.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{5.22}$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{5.23}$$

Det vi har kommet fram til nå er vel og bra, men skal vi regne ut et integral blir det slitsomt å inspisere $f(x)$ på uendelig mange delintervaller for å finne de laveste funksjonsverdiene i hver av dem! Vi merker oss derfor at venstresiden i (5.21), i vårt tilfelle, representerer det kraftigste underestimatet av I, mens høyresiden er det kraftigste overestimatet. I (5.21)-(5.23) har vi vist at begge disse estimatene går mot I når $n \to \infty$, dette betyr at vi for andre valg av x_i på hvert intervall også kommer fram til ønsket resultat. Regneteknisk vil det ofte være lurt å velge $x_i = a + (i-1)\Delta x$ for $i \in \{1, 2, ..., n\}$, slik som i (5.2).

Integral som areal for negative funksjoner

Hva nå om vi isteden skulle finne arealet avgrenset av x-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til $g(x) = -f(x)$?

Grafene til f og g er fullstendig symmetriske om x-aksen, dette må bety at arealet A de avgrenser på et intervall må være helt likt. Og vi vet at

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} -g(x_i)\Delta x \\ &= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

Av dette kan vi utvide den geometriske definisjonen av integralet:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er negativ og kontiunerlig for alle $x \in [a, b]$. Integralet I multiplisert med -1 tilsvarer arealet avgrenset av x-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til f.

5.1.2 Analysens fundamentalteorem (forklaring)

Vi ønsker å vise at integralet I av en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = F(b) - F(a)$$

hvor F er en antiderivert til f. For å vise dette skal vi anvende oss av (5.2). Spesielt verdt å merke seg er at $x_1 = a$ og at $x_{n+1} = b$.

Fra tidligere vet vi at den deriverte av en funksjon $f(x)$ er gitt som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Med vår $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ kan vi omskrive grensen:

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$, da er

$$F'(x) = f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Vi erstatter f i (5.2) med uttrykket over, og får at

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \Delta x$$

Fordi $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, har vi videre at

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\
&= \lim_{n \to \infty} (F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + ... + F(x_{n+1}) - F(x_n))
\end{aligned}$$

Av dette legger vi merke til at alle $F(x_i)$ kansellerer hverandre, bortsett fra i endepunktene. Vi sitter altså igjen med summen

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n \to \infty} (-F(x_1) + F(x_{n+1})) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

5.8 Bytte av variabel (forklaring)

Gitt en funksjon $F(x)$ som vil anta samme verdier som $G(u(x))$:

$$F(x) = G(u) \tag{5.24}$$

La oss nå skrive $F'(x)$ som $f(x)$ og $G'(u)$ som $g(u)$. For to konstanter C og D må vi ha at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

og

$$\int g(u)\,du = G(u) + D$$

Det må derfor finnes en konstant E som er slik at

$$\int f(x)\,dx + E = \int g(u)\,du$$

Men av kjerneregelen (se TM1) har vi følgende relasjon:

$$f(x) = g(u)u'$$

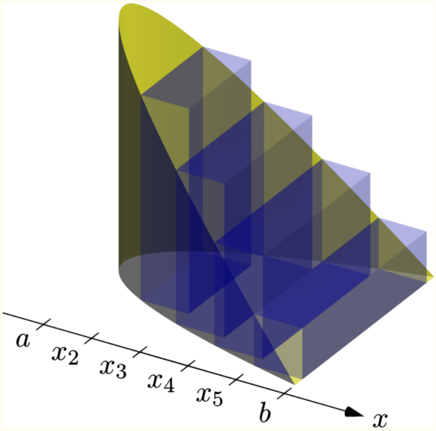
Vi kan derfor skrive

$$\int g(u)u'\,dx + E = \int g(u)\,du$$

Når vi utfører integrasjonen på enten venstre eller høyre side, får vi en ny konstant som vi kan slå sammen med E. I praksis kan vi derfor utelate E, noe som er gjort i (5.8).

5.13 Integral som volum (forklaring)

Vi setter geometrien vår inn i et koordinatsystem, og tar for gitt at vi har en funksjon $A(x)$ som gir oss tverrsnittsarealet for alle gyldige x.



Figur 5.7: Volumet av geometrien (gul) tilnærmes ved summen av hver $A(x_i)\Delta x$ (blå).

Vi deler $[a, b]$ inn i n delintervaller, der hvert intervall har lengden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og startverdi $x_i = a + (i-1)\Delta x$ for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vi tilnærmer volumet til geometrien ved å legge sammen volumene på formen $A(x_i)\Delta x$. Når vi lar n gå mot uendelig vil summen gå mot volumet til gjenstanden[1], dette kan vi skrive som

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{x\to\infty} \left(A(x_0)\Delta x + A(x_1)\Delta x + \ldots + A(x_n)\Delta x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(A(x_0) + A(x_1) + \ldots + A(x_n)\right)\Delta x \\
&= \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x
\end{aligned}$$

Uttrykket over er analogt til definisjonen av det bestemte integralet fra ligning (5.2).

[1] Argumentasjonen for denne påstanden blir identisk med den gitt i forklaringen for det bestemte integralet (se side 166).

Oppgaver for kapittel 5

5.1.1

a) Deriver funksjonen $f(x) = 4x^5$.

b) Finn det bestemte integralet $\int\limits_0^2 20x^4\,dx$.

5.1.2

Relasjonen mellom en funksjon $F(x)$ og $f(x)$ er at $F'(x) = f(x)$. Videre er $F(1) = 1$ og $F(4) = 9$.

Finn det bestemte integralet $\int\limits_1^4 f(x)\,dx$.

5.1.3

a) Deriver funksjonen $f(x) = e^{\cos^2 x}$.

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int -\sin(2x)\,e^{\cos^2 x}\,dx$$

5.1.4

Vis at

a) $\displaystyle\int x(x+2)e^x\,dx = x^2e^x + C$

b) $\displaystyle\int -e^{x^2+\cos x}(-2x+\sin x)\,dx = e^{\cos x + x^2} + C$

5.2.1

Finn integalene:

a) $\displaystyle\int \frac{3}{4x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int -\frac{7}{\cos^2 t}\,dt$ **c)** $-4x^5$

d) $\displaystyle\int \cos(\pi x)\,dx$ **e)** $\displaystyle\int 4e^{-4t}\,dt$ **f)** $\displaystyle\int \left(2x^4\,dx - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{x^5}\,dx$

5.2.2

Regn ut de bestemte integralene.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(4x^3 - x\right)\, dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} e^{2x}\, dx$

5.2.3

Gjennomsnittet av en funksjon $f(x)$ over et intervall $[a, b]$ kan vi skrive som

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Gitt et vilkårlig tall c, vis at gjennomsnittet av $f(x) = \cos x + d$ over intervallet $[c, c + 2\pi]$ er lik d.

5.2.4

Bevis (5.9)-(5.11) ved å bruke integrasjon ved substutisjon.

5.2.5

Finn integralene:

a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^2 8xe^{2x^2-3}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int \tan x\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{4x+5}{2x^2+5x}\, dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3}\, dx$

5.2.6

Anvend to av de trigonometriske identitetene og bytte av variabel to ganger for å finne integralet

$$\int \sin(2x)e^{1-\cos^2 x}\, dx$$

5.2.7

Finn det bestemte/ubestemte integralet:

a) $\displaystyle\int (x-1)\cos x\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\, dx$ **c)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}$

5.2.8

Vis at
$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

5.2.9

Finn det bestemte/ubestemte integralet:

a) $\displaystyle\int_4^5 \frac{13 - 4x}{x^2 - 5x + 6} \, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{41 - 4x}{(x-5)(x+2)} \, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 9x - 16}{(x-2)(x^2-1)} dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 14x + 10}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

5.2.10

Finn det ubestemte integralet:
$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 - 20x + 2}{x^2 - x - 6} \, dx$$

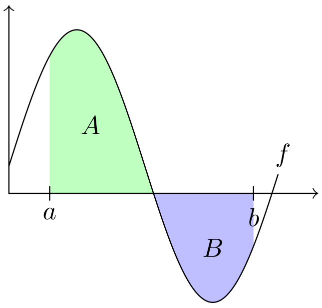
Hint: Bruk polynomdivisjon.

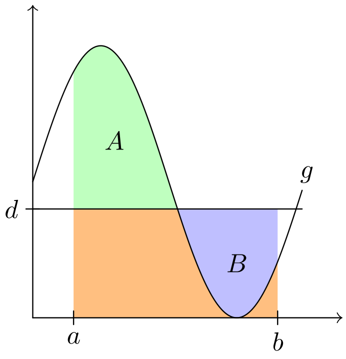
5.3.1

Relasjonen mellom to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og en konstant d er at

$$g = f + d$$

a) Ta det for gitt at f og g er som vist på figuren under.





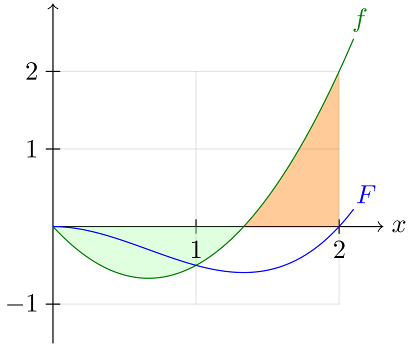
Forklar ut ifra en arealbetraktning hvorfor

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx - (b-a)d$$

b) Bekreft likheten i oppgave a) ved integrasjon.

5.3.2

Under vises grafen til $F(x)$ og $f(x)$. F er en antiderivert av f.



Forklar hvorfor arealet av det oransje området er like stort som arealet av det grønne området.

5.4.1

La en kule med radius r være plassert i et koordinatsystem med variabelen x langs horisontalaksen. Kula er plassert slik at sentrum ligger i origo.

a) Lag en tegning og bestem kulas tverrsnitt A langs horisontalaksen, uttrykt ved r og x.

b) Finn volumet V av kula.

5.4.2

Finn volumet av omdreiningslegemene til funksjonene på intervallet $[0, 1]$:

a) $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}$

Gruble 7

(R2V23D1)

a) Vis at hvis $f(x) = \tan x$, så er $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Regn ut

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}\,dx$$

Gruble 8

(R2H23D1)

Regn ut integralet

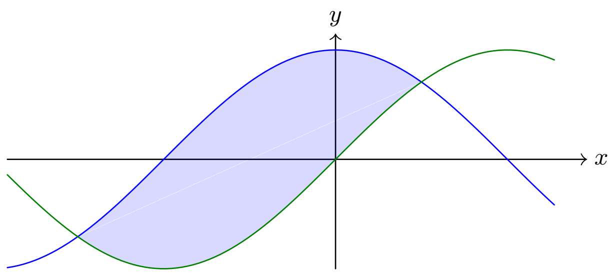
$$\int_{-1}^{1} x^3 + 2x\,dx$$

Hva forteller svaret deg?

Gruble 9

(R2H23D1)

Figuren viser grafene til funksjonene $f(x) = \cos x$ og $g(x) = \sin x$.



Bestem arealet til det fargede området.

Gruble 10

Vis at

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

ved å bruke delvis integrasjon.

Gruble 11

Bruk definisjonen fra (5.2) til å vise at

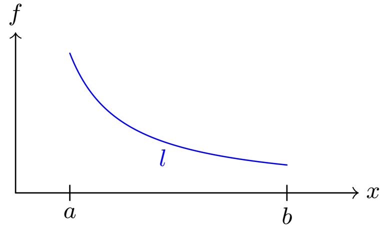
$$\int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Gruble 12

Gitt en funksjon $f(x)$ integrerbar på intervallet $[a, b]$. Vis at lengden l til grafen til f er

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + g^2}\,dx$$

hvor $g(x) = f'(x)$.



Vedlegg A-F

Vedlegg A: Eksakte sinus- og cosinus-verdier

For å finne eksakte verdier av sinus til et tall x, kan vi sette opp følgende tabell:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

For cosinus setter vi opp mønsteret andre veien:

$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0

Erstatter vi $\frac{\sqrt{1}}{2}$ med $\frac{1}{2}$ og $\frac{\sqrt{4}}{2}$ med 1, får vi dette:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Av tabellen over kan vi enkelt finne $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

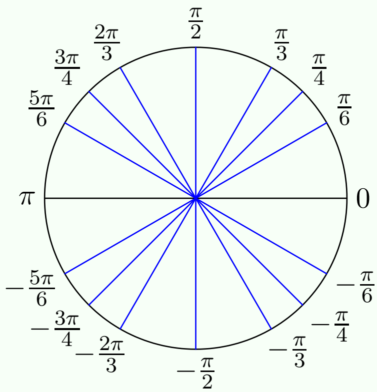
Vedlegg B: Løsning av trigonometriske ligninger

Eksempel 1

Løs ligningen

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad , \qquad x \in [-\pi, \pi] \tag{B1}$$

Svar



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

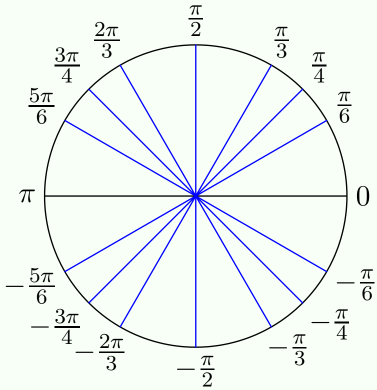
Av tabellen ser vi at $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Av figuren ser vi at $\frac{3\pi}{4}$ er $\frac{\pi}{4}$ speilet gjennom vertikalaksen. Altså har cosinusverdien til $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{3\pi}{4}$ samme tallverdi, men motsatt fortegn. Dermed er $\frac{3\pi}{4}$ en løsning av (B1). Av figuren ser vi at $-\frac{3\pi}{4}$ er $\frac{3\pi}{4}$ speilet gjennom horisontalaksen. Følgelig er ogå $-\frac{3\pi}{4}$ en løsning av (B1).

Eksempel 2

Løs likningen

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{B2}$$

Svar



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Av tabellen ser vi at $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Av figuren ser vi at $\frac{5\pi}{6}$ er $\frac{\pi}{6}$ speilet gjennom vertikalaksen. Altså har cosinusverdien til $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$ samme tallverdi, men motsatt fortegn. Dermed er $\frac{5\pi}{6}$ en løsning av (B2). Av figuren ser vi at $-\frac{5\pi}{6}$ er $\frac{5\pi}{6}$ speilet gjennom horisontalaksen. Følgelig er ogå $-\frac{5\pi}{6}$ en løsning av (B2). Så legger vi merke til at om vi starter på $\frac{5\pi}{6}$, og går en hel runde rundt sirkelen, så kommer vi til et tall med samme cosinusverdi som $\frac{5\pi}{6}$. Det samme gjelder for $-\frac{5\pi}{6}$. Altså er

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \qquad \vee \qquad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

hvor $n \in \mathbb{N}$. Dette kan vi kortere skrive som

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Vedlegg C: Løsning av andregradsligninger

Andregradssuttrykket
$$x^2 + bx + c$$
kan vi skrive som
$$(x + x_1)(x + x_2)$$
hvor $x = -x_1$ og $x = -x_2$ er løsningene av ligningen $x^2 + bc + c = 0$. Dette betyr at
$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= (x + x_1)(x + x_2) \\ &= x^2 + x_1 x + x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \end{aligned}$$

Venstre og høyre side i ligningen over er lik for alle x bare hvis
$$x_1 x_2 = c \quad \text{og} \quad x_1 + x_2 = b \tag{C1}$$

Eksempel 1

Faktoriser uttrykket $x^2 - 5x + 4$.

Svar

Siden $(-4)(-1) = 4$ og $(-4) + (-1) = -5$ er kravet fra (C1) oppfylt, og vi kan skrive

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$$

Eksempel 2

Løs ligningen

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Svar

Siden $(-3)2 = -6$ og $(-3) + 2 = -1$, kan vi skrive

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x - 3)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

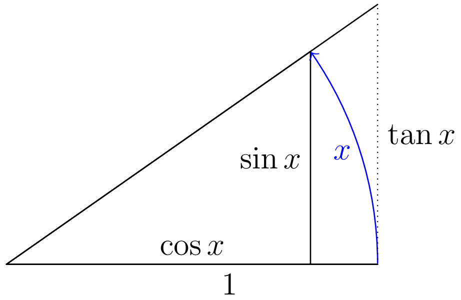
Altså har vi løsningene $x = 3$ eller $x = -2$.

Vedlegg D: Grensen av $\sin x$ og $\cos x - 1$ over x

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Vi nøyer oss med å se på grensen når $x^+ \to 0$, da resonnementet blir helt symmetrisk for $x^-+ \to 0$.

I figuren under ser vi bl. a. en rett trekant med katetene $\cos x$ og $\sin x$. Av formlikhet kan det vises at vi kan lage en forstørret trekant med katetene 1 og $\tan x$.



Bulengden x må alltid være større enn $\sin x$, altså må vi ha at

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \tag{D1}$$

Videre observerer vi at trekanten med $\tan x$ som høyde og 1 som grunnlinje må ha et større areal enn sektoren til x. Fordi x utgjør $\frac{x}{2\pi}$ av omkretsen til enhetssirkelen, må den utgjøre den samme brøkdelen av arealet (forklar for deg selv hvorfor!). Arealet til enhetssirkelen er π, og da er arealet til sektoren $\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$. Vi kan derfor skrive

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x &< \frac{1}{2}\tan x \\ x &< \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cos x &< \frac{\sin x}{x} \qquad \text{(D2)}\end{aligned}$$

Fra (D1) og (D2) har vi at

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Når x går mot 0, går $\cos x$ mot 1. I denne grensen blir altså $\frac{\sin x}{x}$ klemt i mellom et tall uendelig nærme (men mindre enn) 1 på den ene siden og 1 på den andre. Derfor må vi ha at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Siden $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, har vi at

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)}{x} \frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1}\right) \\
&= 1 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vedlegg E: Lagranges identitet

Vi ønsker å vise Lagranges identitet for to vektorer $\vec{a} = [a_1,a_2,a_3]$ og $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

La oss starte med å skrive ut venstresiden. Vi ser at dette blir en tung oppgave, men kan lette litt på trykket ved å skrive:

$$c_{ij} = a_i b_j$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (c_{23} - c_{32})^2 + (c_{31} - c_{13})^2 + (c_{12} - c_{21})^2 \\ &= c_{23}^2 - 2c_{23}c_{32} + c_{32}^2 + c_{31}^2 - 2c_{31}c_{13} + c_{13}^2 + c_{12}^2 - 2c_{12}c_{21} + c_{21}^2 \quad \text{(E1)} \end{aligned}$$

Tiden er nå inne for å observere to ting:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 \qquad \text{(E2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (c_{11} + c_{22} + c_{33})^2 \\ &= (c_{11} + c_{22})^2 + 2(c_{11} + c_{22})c_{33} + c_{33}^2 \\ &= c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 + 2c_{11}c_{22} + 2c_{11}c_{33} + 2c_{22}c_{33} \qquad \text{(E3)} \end{aligned}$$

Vi legger nå merke til at $c_{ii}c_{jj} = c_{ij}c_{ij}$. Om vi studerer høyresidene til (E1), (E2) og (E3), ser vi at vi kan skrive

$$\text{(E1)} = \text{(E2)} - \text{(E3)}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

Vedlegg F: Bytte av variabel ved Leibniz-notasjon

En annen måte å utføre bytte av variabel på, er å anvende seg av *Leibniz-notasjon*. For en funksjon $u(x)$ skriver man da at

$$u' = \frac{du}{dx}$$

du og dx betegner infinitesimale størrelser av u og x, begge størrelsene går altså mot 0. Strengt tatt kan vi ikke behandle høyresiden som en vanlig brøk. Men hvis vi *likevel* gjør det, kan vi skrive

$$dx = \frac{du}{u'}$$

Og når vi først er i gang med manipulasjoner som egentlig ikke gir mening, kan vi sette dette uttrykket inn i et integral vi ønsker å løse:

Eksempel

Finn det ubestemte integralet

$$\int x^4 e^{x^5}\, dx$$

Svar

Vi setter $u = x^5$, og får da at

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dx} \\ 5x^4 &= \frac{du}{dx} \\ dx &= \frac{du}{5x^4} \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i integralet, kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\int x^4 e^{x^5}\,dx &= \int x^4 e^u \,\frac{du}{5x^4} \\
&= \frac{1}{5}\int e^u\,du \\
&= \frac{1}{5} e^u\,du \\
&= \frac{1}{5} + e^u + C \\
&= \frac{1}{5} e^{x^5} + C
\end{aligned}$$

Kommentar: I eksempelet over kom vi fram til rett svar, selv om regneoperasjonene med de infinitesimale størrelsene ikke kan forsvares rent matematisk. Derimot kan det vises matematisk at denne metoden alltid vil gi oss korrekte uttrykk! Å bruke regneoperasjoner som i seg selv er meningsløse, men som beviselig fører til riktige uttrykk, kalles *formell regning*.

Vedlegg G: Bytte av variabel for bestemt integral

5.15 Bytte av variabel for bestemt integral

Gitt funksjonene $u(x)$ og $g(u)$. Da har vi at

$$\int_a^b g(u)u'\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du \tag{5.25}$$

Eksempel 1

Finn det bestemte integralet

$$\int_1^2 \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx$$

Svar

Vi setter $u(x) = x^3 + x^2$ og $g(u) = \frac{1}{u}$. Da blir $u' = 3x^2 + 2x$, og vi kan skrive

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx &= 2\int (3x^2+2x)\frac{1}{x^3+x^2}\,dx \\ &= 2\int u'\frac{1}{u}\,dx \\ &= 2\int \frac{1}{u}\,du \\ &= 2\ln|u| + C\end{aligned}$$

Siden $u(1) = 1^3 + 1^2 = 2$ og $u(2) = 2^3 + 2^2 = 12$, får vi at

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx &= \left[2\ln|u|\right]_2^{12} \\ &= 2(\ln 12 - \ln 2) \\ &= 2\ln\left(\frac{12}{2}\right) \\ &= 2\ln 6\end{aligned}$$

Indeks

amplitude, 61
analysens fundamentalteorem, 142
antiderivert, 140
arcuscosinus, 39
arcussinus , 39
arcustangens , 39
avstand
  fra punkt til linje, 123
  fra punkt til plan, 125

bølgelengde, 61
bølgetall, 62

cosinus, 37
  -funksjon, 61

determinant, 94
divergere, 17

eksplisitt formel, 10
element, 9
enhetssirkelen, 31

fase, 62
faseforskyvning, 62
følge, 9
  aritmetisk, 10
  endelig, 9
  geometrisk, 12
  uendelig, 10

induksjon, 21
integral
  som areal, 159
  som volum, 162
  ubestemt, 142
integrand, 154
integrasjon
  bytte av variabel, 148
  delbrøksoppspaltning, 154
  delvis, 151

kjerne, 38
konstantledd, 61
konvergere, 17
kryssprodukt, 96
kule, 120
kvadrant, 39
kvadrert, 56

Lagranges identitet., 102
likevektslinje, 61
linje, 110
  mellom to plan, 118

normalvektor, 115

omdreiningslegeme
  volumet av, 164
omdreiningsleme, 164

parallellepiped, 98
parallellogram, 98
parameterisering
  av linje, 110
  av plan, 112
periode, 61
plan, 112
  ligningen til, 115

pyramide, 98

rekke, 14
- aritmetisk, 14
- divergent, 17
- geometrisk, 16
- konvergent, 17

rekursiv formel, 9
retningsvektor
- for plan, 112

sinus, 37
- -funksjon, 66

summetegnet, 19

tangens, 39
- -funksjon, 67

tetreaeder, 98
trekant, 98
trigonometrisk
- identitet, 42
- ligning
  - kvadratisk, 56
  - lineær, 46

utspent
- geometrisk figur, 98

vektor
- i rommet, 82
- lengden til, 85
- mellom to punkt, 82

vektorprodukt, 96
- som areal og volum, 98

vinkel, 31
- mellom linjer, 128
- mellom plan, 130
- mellom plan og linje, 131

Fasit

For alle svar tas det for gitt at $i,n \in \mathbb{N}$.

Kapittel 1

1.1.1 a) Rekursiv: $a_i = a_{i-1} + 2$, eksplisitt: $2i$ **b)** Rekursiv: $a_i = a_{i-1} + 2$, eksplisitt: $2i - 1$

1.1.2 a) $a_i = 3 + 9(i-1)$ **b)** $a_i = 5 - 3(i-1)$ **c)** $a_i = 2 + 6(i-1)$

1.1.3 a) $a_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{i-1}} = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-i}$ **b)** $a_i = 5 \cdot 2^{i-1}$

1.2.1 a) Både antall grønne og antall blå sirkler tilsvarer summen av de n første naturlige tallene. Av figuren ser vi at to ganger denne summen utgjør $n(n+1)$ sirkler. **b)** Se løsningsforslag.

1.2.3 a) 340 **b)** 370

1.2.4 $n = 15$

1.2.7 Se løsningsforslag.

1.2.8 $S_5 = 1023$

1.2.9 a Se løsningsforslag.**b)** 26 **c)** $n = 6$

1.2.10 a) Fordi $-1 < k = \frac{1}{4} < 1$

1.2.12 a) $10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots$ **b)** Konvergent siden $|k| < 1$. $S_\infty = 1$

1.2.13 a) $1 < x < 3$ **b)** $x = \frac{3}{2}$. **c)** $x = 1$ løser ligningen, men rekka konvergerer ikke for denne verdien av x. $S_n = \frac{1}{6}$ har derfor ingen løsning.

1.3.1 Se løsningsforslag.

1.3.3 Se løsningsforslag.

3 Se løsningsforslag.

Kapittel 2

For alle svar tas det for gitt at $n \in \mathbb{Z}$.

Merk: Uttrykkene for løsninger av trigonometriske ligninger kan se forskjellige ut, men gi de samme verdiene av x. For eksempel vil $x = 2\pi n - \frac{\pi}{4}$ være den samme løsningen som $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ fordi $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$. Vi kan alltid trekke ut heltallsfaktorer av n-leddet for å endre på uttrykk, for å sjekke om ditt svar er riktig bør du derfor først sjekke at ditt n-ledd er i overensstemmelse med fasit.

2.1.1 Siden radiusen til enhetssirkelen er 1, blir forholdet mellom buelengde l og radiusen lik $\frac{l}{1} = l$.

2.1.2 a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{12}$

2.1.3 a) 165° **b)** 330°

2.2.1 Se løsningsforslag.

2.2.2 a) 0 **b)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2.2.3

	1. kvadrant	2. kvadrant	3. kvadrant	4. kvadrant
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan x$	$+$	$-$	$+$	$-$

2.2.4 a) $-\frac{1}{2}$ **b)** -1 **c)** 0 **d)** $-\sqrt{3}$

2.2.5 a) 0 **b)** $\frac{\pi}{3}$ **c)** π **d)** $\frac{3\pi}{4}$ **e)** $\frac{\pi}{4}$ **f)** $\frac{\pi}{6}$

2.2.6 Se løsningsforslag.

2.2.7 a) Se side 73. **b)** Se løsningsforslag.

2.2.8 $\sin(3x)$

2.2.9 a) $2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

2.3.1 Se løsningsforslag.

2.3.2 a) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ **b)** $x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{9}{2}$ **c)** $x = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{6} + 2\pi n) \vee x = \frac{1}{3}(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n)$ **d)** $x = \frac{\pi}{3}(3n+1) \vee x = \frac{\pi}{6}(6n+1)$ **e)** $\frac{1}{4}(\pi n - \frac{\pi}{3})$

2.3.3 a) $\frac{\pi}{6} + \pi n$ **b)** $\pi n - \frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}\left(\pi n - \frac{\pi}{4}\right)$

2.3.4 a) $x = 2\pi n - \frac{\pi}{4}$ **b)** $x\pi^2(4n-1) \vee x = 2\pi\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$

2.4.1 a) $x = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ **b)** $x = \frac{1}{3}(\pi + 2\pi n)$ **c)** $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ **d)** $x = \frac{1}{3} + n$ **e)** $x = \frac{1}{3}(\pi + 2\pi n)$

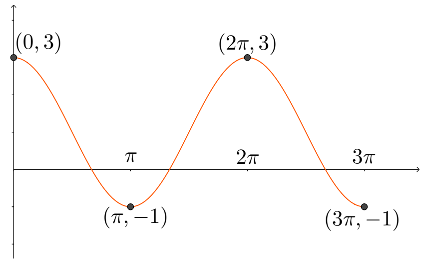
2.4.2 a) a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ **b)** $\pm\pi + 4\pi n$ (eventuelt $x = \pi + 2\pi n$))

2.5.1 Se løsningsforslag.

2.5.2 a) $P = \frac{2\pi}{3}$ **b)** $f_{maks} = 9$, $f_{min} = -1$ **c)** f har maksimum for $x = \frac{1}{3}\left(2\pi n - \frac{\pi}{12}\right)$ og minimum for $x = \frac{1}{3}(2\pi n - \frac{11\pi}{12})$

2.5.4 a) $P = 4$ **b)** $(-1, 3)$ og $(3, 3)$ **c)** $x = -\frac{7}{3}$, $x = \frac{5}{3}$ og $x = \frac{1}{3}$

2.5.5



2.5.6 a) $3\cos(\pi x - \pi) + 2$ **b)** $3\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

Gruble 5

Kapittel 3

3.1.1 a) $\sqrt{30}$ **b)** 3

3.1.2 B

3.1.3 Se løsningsforslag.

3.2.1 Se løsningsforslag.

3.2.2 a) -16 **b)** 9 **c)** $\frac{64}{5}$

3.2.3 a) 5 **b)** $-5\sqrt{3}$

3.2.4 a) $\theta = 30°$ **b)** $60°$ **c)** $\theta = 135°$

3.2.5 a) 15 **b)** $2(15 + \vec{a} \cdot \vec{c})$

3.3.4 a) $\vec{a}||\vec{b}$ for $t = 3$ **b)** $\vec{a}||\vec{b}$ for $t = -1$

3.3.5 $s = -1$ og $t = 3$

3.3.1 a) Ikke ortogonale. **b)** Ikke ortogonale. **c)** Ortogonale.

3.3.2 a) $t = \frac{3}{2}$ **b)** $t \in \{2, 3\}$

3.3.3 a) Ikke parallelle. **b)** Parallelle.

3.3.4 a) $t = 3$ **b)** $t = -1$

3.4.1 Se løsningsforslag.

3.4.2 Se løsningsforslag.

3.4.4 Se løsnigsforslag.

3.4.3 Se forklaringen for lengden av vektorproduktet, s. **??**.

3.4.5 a) $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ **b)** Se forklaringen for vektorproduktet som volum, s.103 **c)** Se forklaringen for vektorproduktet som volum, s.103

Kapittel 4

4.1.1 a) $l : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$ **b)** C ligger på linja.

4.1.2 $A = (-1, 1, 2)$

4.1.3 a) $\alpha : \begin{cases} x = 1 - 3s + 4t \\ y = 1 - 4s + 5t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ **b)** Punktet ligger ikke i planet.

4.1.4 $\alpha : \begin{cases} x = 2 - 4s + 2t \\ y = -3 + 2s + t \\ z = -5 + s - 5t \end{cases}$

4.2.1 $x + 2y + z - 3 = 0$

4.2.2 a) $[2, 3, 0]$, $[0, 2, -1]$ **b)** $-3x - 2y + 4z - 20 = 0$

4.2.3 a) Bare $(1, -2, 4)$ **b)** $\alpha : \begin{cases} x = \frac{1}{10}(3s + 4t) \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

4.2.4 $3x + 5y + z = 0$

4.2.5 a) $S = (-1, 2, 6)$, $r = 3$ **b)** Se løsningsforslag. **c)** $2x + y + 2z - 21 = 0$

4.2.6 a) $S = (3, -1, 5)$, $r = 7$ **b)** A inni og B utenfor.

4.3.1 $\sqrt{2}$

4.3.2 $\frac{13}{\sqrt{26}}$

4.3.3 a) $[3, -2, 1]$ **b)** $(0, 0, 0)$ **c)** $\frac{12}{\sqrt{14}}$

4.3.4

a) $(3, -2, 1)$ **b)** $l : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 1t \\ z = -2t \end{cases}$ **c)** $(-1, 0, 4)$, $(7, -4, -4)$ **d)** $A = (1, -1, 2)$

e) $\sqrt{27}$

Kapittel 5

5.1.1 a) $f'(x) = 20x^4$ **b)** $f(2) - f(0) = 128$

5.1.2 $F(4) - F(1) = 8$

5.1.3 a) $f' = -2\cos x \sin x \, e^{\cos^2 x} = -\sin(2x)\, e^{\cos^2 x}$ **b)** $e^{\cos^2 x}$

5.1.4 Se løsningsforslag.

5.2.1 a) $\frac{3}{4}\ln|x| + C$ **b)** $7\tan t + C$ **c)** $-\frac{2}{3}x^6 + C$ **d)** $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + C$ **e)** $-e^{-4t} + C$ **f)** $\frac{2}{5}x^5 + \frac{6}{\sqrt{x}} + C$ **g)** $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

5.2.2 a) 0 b) $\frac{3}{2}$

5.2.3 Se løsningsforslag.

5.2.5 a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ **b)** $2\left(e^5 - e^{-1}\right)$ **c)** $-\ln|\cos x| + C$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** $\ln|x| + \ln|2x + 5| + C$ **f)** $\frac{1}{2}\ln\left|3x^2 + 4x + 3\right| + C$

5.2.6 $e^{\sin^2 x} + C$

5.2.7 a) $(x - 1)\sin x + \cos x + C$ **b)** $\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$ **c)** $1 - \frac{2}{e}$

5.2.8 Se løsningsforslag.

5.2.9 a) $6\ln 2 - 5\ln 3$ **b)** $3\ln|x-5| - 7\ln|2+x| + C$ **c)** $2\ln|x-2| + 3\ln|x-1| - 4\ln|x+1| + C$ **d)** $\ln|1-x| - 3\ln|2-x| + 5\ln|x| + C$

5.2.10 $x + \frac{3}{2}x^2 + \ln|x-3| - 2\ln|x+2| + C$

5.3.1 Se løsningsforslag.

5.3.2 Se løsningsforslag.

5.4.1 a) $\pi(r^2 - x^2)$ **b)** $V = \frac{4\pi}{3}r^3$

5.4.2 a) $\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$ **b)** $\frac{1}{2}$

Gruble 11 Se løsningsforslag.

Om boka

Før Kalkulus; Teoridel introduserer matematikkteorien som inngår i faget R2. Teorien er delt inn i syv kapitler som er rike på regneeksempler og oppgaver av variert vanskegrad. Sammen med boka *Før Kalkulus; GeoGebra i R2* er dette et komplett læreverk som dekker alle kompetansemål bestemt av Utdanningsdirektoratet per 2017.

Før Kalkulus; GeoGebra i R2 kan lastes ned gratis på nettsiden `forkalkulus.netlify.com`.

Om forfatteren

Sindre Sogge Heggen har en mastergrad i anvendt matematikk fra Universitetet i Oslo og flere års erfaring med undervisning i ungdomsskoler og videregående skoler.