0.1 Monotoniegenskaper

De fleste funksjonsverdier varierer. Beskrivelser av hvordan funksjonene varierer kaller vi beskrivelser av funksjonenes *monotoniegenskaper*.

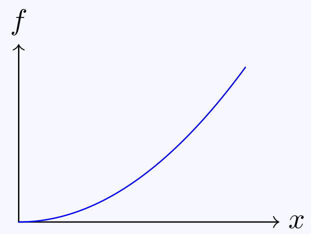
Regel 0.1 Voksende og avtagende funskjoner

Gitt en funksjon $f(x)$.

- f er *voksende* på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{1}$$

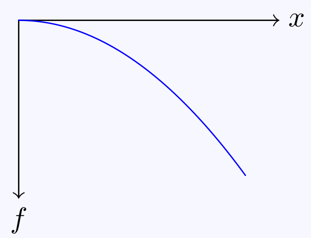
  Hvis $f(x_1) \leq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) < f(x_2)$, er f *strengt voksende*.



- f er *avtagende* på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{2}$$

  Hvis $f(x_1) \geq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) > f(x_2)$, er f *strengt avtagende*.



Regel 0.2 Monotoniegenskaper og den deriverte

Gitt $f(x)$ deriverbar på intervallet $[a, b]$.

- Hvis $f' \geq 0$ for $x \in [a, b]$, er f voksende for $x \in (a, b)$
- Hvis $f' \leq 0$ for $x \in [a, b]$, er f avtagende for $x \in (a, b)$

Hvis henholdsvis $\geq$ og $\leq$ kan erstattes med $>$ og $<$, er f strengt voksende/avtagende.

Eksempel

Avgjør på hvilke intervaller f er voksende/avtagende når

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \qquad , \qquad x \in [0, 8]$$

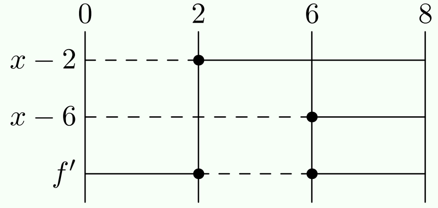
Svar

Vi har at

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

For å tydeliggjøre når f' er positiv, negativ eller lik 0 gjør vi to ting; vi faktoriserer uttrykket til f', og tegner et *fortegnsskjema*:

$$f'(x) = (x - 2)(x - 6)$$



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket $x - 2$ er negativt når $x \in [0, 2)$, lik 0 når $x = 2$, og positivt når $x \in (2, 8]$.
- Uttrykket $x - 6$ er negativt når $x \in [0, 8)$, lik 0 når $x = 6$, og positivt når $x \in (6, 8]$.
- Siden $f' = (x - 2)(x - 6)$, er

$$f' \geq 0 \text{ når } x \in [0, 2] \cup (6, 8]$$
$$f' = 0 \text{ når } x \in \{2, 6\}$$
$$f' \leq 0 \text{ når } x \in [2, 6]$$

Dette betyr at

$$f \text{ er voksende når } x \in (0,2) \cup (6,8)$$
$$f \text{ er avtagende når } x \in (2,6)$$

0.2 Monotoniegenskaper og den deriverte (forklaring)

Gitt $f(x)$, hvor $f' \geq 0$ for $x \in [a,b]$. La $x_1, x_2 \in (a,b)$ og $x_2 > x_1$. Av middelverdisetningen[1] finnes det et tall $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da $c \in [a,b]$, er $f'(x) \geq 0$, og da er

$$0 \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Følgelig er $f(x_2) \geq f(x_1)$, og av *definisjon 0.1* er da f voksende på intervallet (a,b).

[1] Se vedlegg??

0.2 Ekstremalpunkt

Regel 0.3 Maksimum og minimum

Merk: Et tall c kan omtales som et punkt i funskjonsdrøftinger, underforstått at det er snakk om punktet $(c, 0)$.

Gitt en funksjon $f(x)$ og et tall c.

Absolutt maksimum og minimum

- f har absolutt maksimum $f(c)$ hvis $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har absolutt minimum $f(c)$ hvis $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.

Lokalt maksimum og minimum

- f har et lokalt maksimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in I$.
- f har et lokalt minimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \leq f(x)$ for $x \in I$.

Språkboksen

Et *maksimum/minimum* blir også kalt en *maksimumsverdi/minimumsverdi*.

Regel 0.4 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon $f(x)$ med maksimum/minimum $f(c)$. Da er

- $f(c)$ en ekstremalverdi for f.
- c et ekstremalpunkt for f. Nærmere bestemt et maksimalpunkt/minimumspunkt for f.
- $(c, f(c))$ et toppunkt/bunnpunkt for f.

Regel 0.5 Kritiske punkt

Et tall c er et kritisk punkt for en funksjon $f(x)$ hvis én av følgende gjelder:

- f er ikke deriverbar i c
- $f'(c) = 0$

Regel 0.6 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$ og $c \in [a, b]$.

(i) Hvis c er et lokalt ekstremalpunkt for f, er $f'(c) = 0$

(ii) Hvis $f' > 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' < 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt maksimumspunkt for f

(iii) Hvis $f' < 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' > 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt minimumspunkt for f

Eksempel 1

Finn det lokale bunnpunktet og toppunktet til

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x$$

Svar

Vi starter med å finne f':

$$\begin{aligned} f' &= 6x^2 + 18x - 60 \\ &= 6(x^2 + 3x - 10) \end{aligned}$$

Siden $5(-2) = 10$ og $5 - 2 = 3$, har vi av *regel* **??** at

$$f' = 6(x - 2)(x + 5)$$

$f' = 0$ for $x = 2$ og $x = -5$. Vi har at

$$f(-5) = 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 = -68$$

$$f(2) = 5^3 + 9 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 = 275$$

Altså er $(-5, 275)$ toppunktet til f og $(2, -68)$ er bunnpunktet til f.

Språkboksen

Det som blir beskrevet i punkt ii) og iii) omtales ofte som at $\boldsymbol{f}$ **skifter fortegn i** $\boldsymbol{c}$

0.6 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt (forklaring)

Punkt (i)

La c være et lokalt maksimumspunkt for f. For et tall h må vi da ha at $c \geq x$ for $x \in (c - |h|, c + |h|)$. Da er

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

Dette betyr at

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

og at

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Følgelig er

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Altså er $f'(c) = 0$, og f' skifter fortegn fra positiv til negativ i c. Med samme framgangsmåte kan det vises at dette også gjelder dersom c er et minimumspunkt, bare at da skifter f' fra negativ til positiv.

Punkt (ii)

Hvis $f' > 0$ på intervallet (a, c), har vi av *regel 0.2* at f er sterkt voksende der. Hvis $f' < 0$ på (c, b), er f sterkt avtagende der. Dette må nødvendigvis bety at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in (a, b)$, og da er c et maksimumspunkt.

Punkt (iii)

Tilsvarende resonnement som for punkt (ii).

Regel 0.7 Andrederiverttesten

Gitt en deriverba funksjon $f(x)$ og et tall c.

- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, er $f(c)$ et lokalt maksimum.
- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, er $f(c)$ et lokalt minimum.
- Hvis $f'(c) = f''(c) = 0$, kan man ikke ut ifra denne informasjonen alene si om $f(c)$ er et lokalt maksimum eller minimum.

0.7 Andrederiverttesten (forklaring)

Av definisjonen for den deriverte har vi at

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

Når $f'(c) = 0$, er

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

Når $f''(c) < 0$, betyr dette at

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

Altså må $f'(c+h)$ være positiv når h går mot 0 fra venstre og negativ når h går mot 0 fra høgre. Dermed skifter f' fortegn i c, som da må være et maksimalpunkt for f. Tilsvarende må c være et minimumspunkt for f hvis $f(c) = 0$ og $f''(c) < 0$.

Regel 0.8 Infleksjonspunkt og vendepunkt

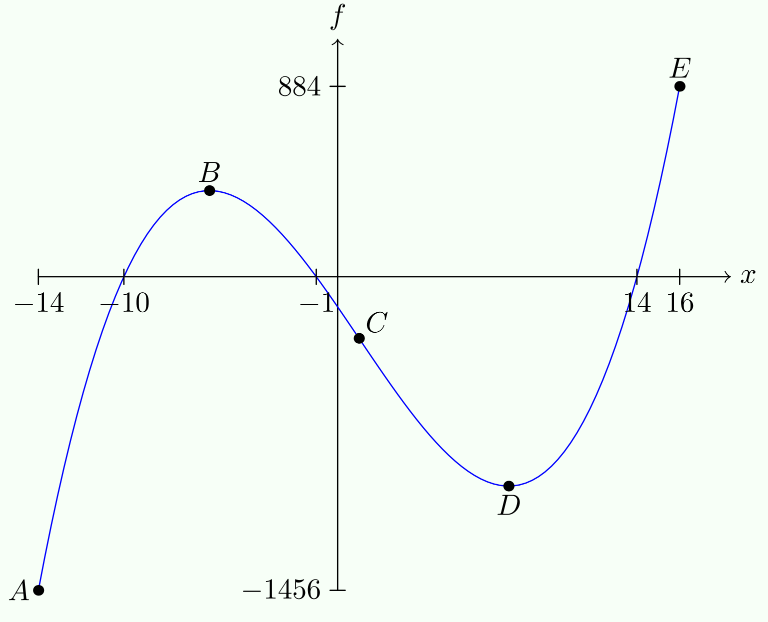
For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ har vi at

- Hvis $f''(c) = 0$ og f'' skifter fortegn i c, er c et *infleksjonspunkt* for f.
- Hvis c er et infleksjonspunkt for f, er $(c, f(c))$ et *vendepunkt*.
- Hvis f'' går fra positiv til negativ, går f fra konveks til konkav (og omvendt).

Eksempel

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140$$

punkt/verdi	**type**
$A = (-14, -1456)$	absolutt bunnpunkt
-14	ekstremalpunkt; absolutt minimum
-1456	absolutt minimum
$B = (-6, 400)$	lokalt toppunkt
-6	ekstremalpunkt; lokalt maksimalpunkt
400	lokalt maksimum
$C = (-1, -286)$	vendepunkt
-1	infleksjonspunkt
$D = (8, -972)$	lokalt bunnpunkt
8	ekstremalpunkt; lokalt minimumspunkt
-972	lokal minimum
$E = (16, 884)$	absolutt maksimum
16	ekstremalpunkt; absolutt maksimumspunkt
884	absolutt maksimum
-10, -1 og 14	nullpunkt



Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [-2, 4]$$

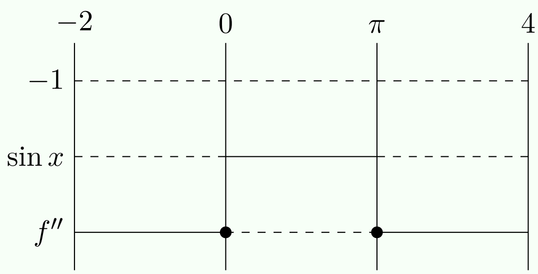
a) Finn infleksjonspunktene til f.
b) Finn vendepunktene til f.

Svar

a) Infleksjonspunktene finner vi der hvor $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (\sin x)'' &= 0 \\ -\sin x &= 0 \end{aligned}$$

Av $x \in D_f$ er det $x = 0$ og $x = \pi$ som oppfyller kravet fra ligningen over. For å finne ut om f'' skifter fortegn i disse punktene, setter vi opp et fortegnsskjema:



f'' går altså fra positiv til negativ i $x = 0$ og fra negativ til positiv i $x = \pi$. Dette betyr at f går fra konveks til konkav i $x = 0$ og fra konkav til konveks i $x = \pi$.

0.3 Asymptoter

Regel 0.9 Vertikale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$ og en konstant c.

- Hvis $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote ovenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote nedenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote** for f.

Eksempel

Finn den vertikale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{1}{x-3} + 2 \right] = \pm\infty$$

Altså er $x = 3$ en vertikal asymptote for f

Regel 0.10 Horisontale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$. Da er $y = c$ en **horisontal asymptote** for f hvis

$$\lim_{x \to |\infty|} f(x) = c$$

Eksempel

Finn den horisontale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x\to|\infty|}\left[\frac{1}{x-3}+2\right]=2$$

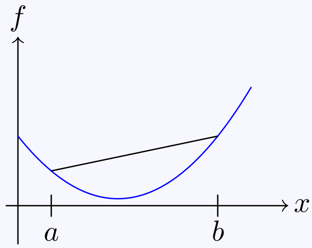
Altså er $y=2$ en horisontal asymptote for f.

0.4 Konvekse og konkave funksjoner

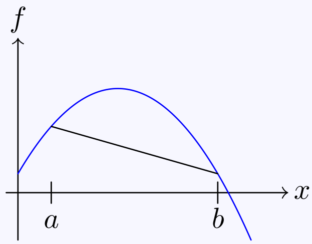
Regel 0.11 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$.

Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger over grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konveks for $x \in [a, b]$.



Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger under grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konkav for $x \in [a, b]$.



0.5 Injektive funksjoner

Regel 0.12 Injektive funksoner

Gitt en funksjon $f(x)$. Hvis alle verdier til f er unike på intervallet $x \in [a, b]$, er f *injektiv* på dette intervallet.

Språkboksen

Et annet ord for injektiv er *én-entydig*.

0.6 Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 1$, som åpenbart er injektiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette betyr at likningen $f = 2x + 1$ bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på x eller f. Løser vi med hensyn på x, får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for f til, det ”omvendte”, et uttrykk for x. Siden x og f begge er variabler, er x en funksjon av f, og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den *omvendte* til f. Setter vi uttrykket til f inn i uttrykket til $x(f)$, får vi nødvendigvis x:

$$\begin{aligned} x\left(2x + 1\right) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle x som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både f og x, slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette $y = f$ og $g = x$. Den omvendte funksjonen g til f er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

Regel 0.13 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner $f(x)$ og $g(y)$. Hvis

$$g(f) = x$$

er f og g *omvendte* funksjoner.

Eksempel 1

Gitt funksjonen $f(x) = 5x - 3$.

a) Finn den omvendte funksjonen g til f.

b) Vis at $g(f) = x$.

Svar

a) Vi setter $y = f$, og løser likningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= 5x - 3 \\ x &= \frac{y+3}{5} \end{aligned}$$

Da er $g(y) = \frac{y+3}{5}$.

b) Når $y = f$, har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x - 3) \\ &= \frac{5x - 3 + 3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

$\boldsymbol{f^{-1}}$

Hvis f og g er omvendte funksjoner, skrives g ofte som f^{-1}. Da er det veldig viktig å merke seg at f^{-1} ikke er det samme som $(f)^{-1}$. For eksempel, gitt $f(x) = x + 1$. Da er

$$f^{-1} = x - 1 \qquad , \qquad (f)^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

I alle andre tilfeller enn ved $n = -1$, vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$