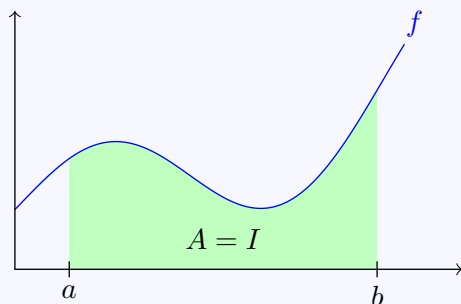


0.1 Bestemt og ubestemt integral

0.1 Integral som areal

Gitt en funksjon $f(x)$ som er positiv og kontinuert for alle $x \in [a, b]$. **Integralet** I til f på intervallet $x \in [a, b]$ tilsvarer da arealet avgrenset av x -aksen, linjene $x = a$ og $x = b$, og grafen til f .



Gitt en funksjon $f(x)$, som vist i figur 1. Vi ønsker nå å finne en tilnærming for integralet I til f på intervallet $[a, b]$.

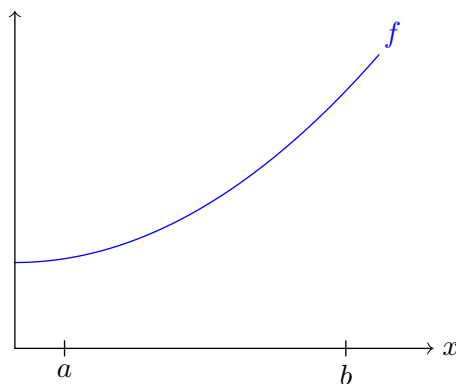


Figure 1

Vi starter med å dele $[a, b]$ inn i tre delintervaller, som da får bredden $\Delta x = \frac{b-a}{3}$. Videre bruker vi $f(x)$ i starten av hvert delintervall som høyden i et rektangel. x -verdiene dette gjelder kaller vi $x_1 = a$, x_2 og x_3 . Vi kan nå tilnærme I som summen av tre areal, s_1 , s_2 og s_3 :

$$\begin{aligned} I &\approx s_1 + s_2 + s_3 \\ &\approx f(a)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \\ &\approx [f(a) + f(x_2) + f(x_3)] \Delta x \end{aligned}$$

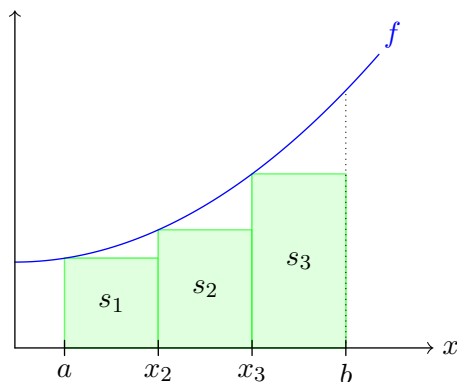


Figure 2

Intuitivt vil vi tenke at jo mindre intervaller vi bruker, jo bedre må tilnærmingen være.

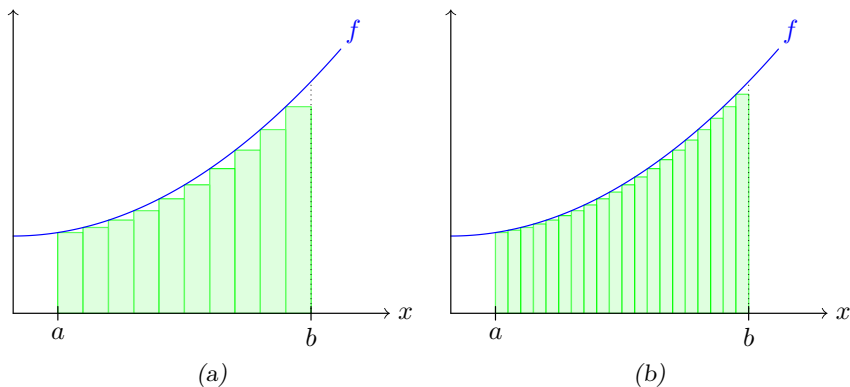


Figure 3: a) 10 intervaller b) 20 intervaller

Lar vi n være antall delintervaller, og $n \rightarrow \infty$, får vi at

$$\begin{aligned}
 I &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \Delta x \\
 &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x
 \end{aligned} \tag{1}$$

hvor $x_i = a + (i - 1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (legg merke til at $t_1 = a$). Det kan vises at grenseverdien i (1) er lik I , og det fører oss til følgende definisjon:

0.2 Bestemt integral I

Det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (2)$$

hvor $x_i = a + (i - 1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Eksempel

Finne det bestemte integralet av $f(x) = x$ på intervallet $x \in [0, 4]$.

Svar

Vi har her at $f(x_i) = x_i = (i - 1)\Delta x$, hvor $\Delta x = \frac{4}{n}$. Setter vi dette inn i (2), får vi at

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i - 1) \left(\frac{4}{n} \right)^2 \\ &= 4^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= 4^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2 + n}{2} - n \right) \\ &= 16 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Merk: I overgangen mellom første og andre linje i ligningen over har vi brukt summen av en aritmetisk rekke.

I kommende seksjoner skal vi finne integraler på en helt annen måte enn i eksempelet over. Læresetningen som sørger for dette er så viktig at den rett og slett kalles **analysens fundamentalteorem**¹. Da teoremet gir oss en metode som omgår utregning av summer, lønner det seg å skrive integralet på en mer kompakt form:

0.3 Bestemt integral II

Det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ skrives som

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Omskriving

I overgangen mellom (2) og (3) har vi erstattet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n$ med \int_a^b , Δx med dx , og i tillegg fjernet alle indekser.

0.1.1 Den antideriverte

Vi skal nå se på en definisjon som kan virke veldig triviell, men som viser seg å være svært viktig i neste delseksjon.

La oss starte med å se på funksjonen $f(x) = x^2$. Å derivere f mhp. x byr på få problemer:

$$f' = 2x$$

Hva nå med den deriverte av $g(x) = x^2 + 1$? Svaret blir det samme som for f' :

$$g' = 2x$$

Allerede nå innser vi at det finnes en haug av funksjoner, rett og slett uendelig mange, som har $2x$ som sin deriverte. Tiden er derfor inne for å lage en samlebetegnelse for alle funksjoner med samme deriverte:

0.4 Den antideriverte

Hvis $F(x)$ er en deriverbar funksjon og $F'(x) = f(x)$, da er F en antiderivert av f .

¹Analyse i matematisk sammenheng kan, kort oppsummert, sies å være studien av funksjoner. Et teorem er en læresetning som kan bevises.

Eksempel

Undersøk om følgende funksjoner er en antiderivert til $f(x) = 2x + e^x$:

$$g(x) = x^2 + e^x$$

$$h(x) = x^2 + e^{2x}$$

$$k(x) = x^2 + e^x + 4$$

Svar

Vi finner de deriverte av g , h og k :

$$g'(x) = 2x + e^x$$

$$h'(x) = 2x + 2e^{2x}$$

$$k'(x) = 2x + e^x$$

Siden $g'(x) = k'(x) = f(x)$, mens $h'(x) \neq f(x)$, er bare $g(x)$ og $k(x)$ en antiderivert til f .

0.1.2 Analysens fundamentalteorem

0.5 Analysens fundamentalteorem

Gitt en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[a, b]$. Hvis F er en antiderivert til f , er

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

Eksempel

Gitt funksjonen $f(x) = e^{\sin x}$. Finn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx$.

Svar

Siden f er en antiderivert til $f'(x)$, har vi at

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \\ &= e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^{\sin 0} \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

0.1.3 Ubestemte integral

Vi har hittil sett på det **bestemte integralet**, som har sitt navn fordi integralet er over et intervall der start- og sluttverdien er gitt. Det *ubestemte* integralet til en funksjon $f(x)$ skriver vi derimot som

$$\int_c^x f(t) dt$$

Navnet ubestemt kommer av at c er en vilkårlig konstant og at x er en varierende verdi¹.

¹Det kan kanskje se litt rart ut at vi har skrevet $f(t)$ i integralet når vi snakker om $f(x)$, men dette gjøres bare for å skille mellom de to varierende verdiene x og t . x kan være en hvilken som helst verdi, men for det ubestemte integralet ser vi på f for verdiene $t \in [a, x]$, altså $f(t)$. Og da er det ikke x som varierer, men t , derav dt .

Hvis vi lar F være en antiderivert til f , har vi fra (4) at:

$$\int_c^x f(t) dt = F(x) - F(c)$$

Siden c er en konstant, må $-F(c)$ også være det. Denne kalles **integrasjonskonstanten**, og omdøpes gjerne til C . Det er også vanlig å forenkle skrivemåten til det ubestemte integralet ved å fjerne grensene og bare skrive $f(x) dx$ etter integraltegnet.

0.6 Ubestemt integral

Det ubestemte integralet av $f(x)$ er gitt som

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (5)$$

Hvor F er en antiderivert til f og C er en vilkårlig konstant.

Merk

Når ikke annet er nevnt, tar vi det heretter for gitt at størrelser skrevet som store bokstaver er vilkårlige konstanter som resultat av integrasjon.

Eksempel 1

Ved derivasjon vet vi at $(x^2)' = 2x$. Bruk dette til å finne $\int 2x dx$.

Svar

Fra derivasjonen ser vi at x^2 er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

Eksempel 2

Ved derivasjon vet vi at $(x^2 + 3)' = 2x$. Bruk dette til å finne $\int 2x \, dx$.

Svar

Fra derivasjonen ser vi at $x^2 + 3$ er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x \, dx = x^2 + 3 + C$$

Men siden C er en vilkårlig konstant, kan vi liksågodt lage oss en ny konstant $D = C + 3$, og får da at

$$\int 2x \, dx = x^2 + D$$

Merk: Siden integrasjonskonstanter er vilkårlige, kan vi tillate oss å komprimere flere konstanter til én. I utregningen over kunne vi skrevet C opp igen, underforstått at 3 var ”trekt inn” i denne konstanten:

$$\int 2x \, dx = x^2 + 3 + C = x^2 + C$$

0.2 Integralregning

Å finne bestemte og ubestemte integraler er et stort og viktig felt innenfor matematikken. Analysens fundamentalteorem forteller oss at nøkkelen er å finne en antiderivert til funksjonen vi ønsker å integrere.

0.2.1 Integralet av utvalgte funksjoner

Vi skal etterhvert se at å finne integraler ofte krever spesielle metoder, men noen grunnleggende relasjoner bør vi huske:

0.7 Ubestemte integraler

For to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, og to konstanter k og C , er

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (6)$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (7)$$

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C \quad (k \neq -1) \quad (8)$$

$$\int \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) + C \quad (9)$$

$$\int \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \sin(kx) + C \quad (10)$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x+k} dx = \ln|x+k| + C \quad (13)$$

Eksempel 1

Finn det bestemte integralet $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{1 - \sin^2 x} dx$.

Svar

Vi starter med å observere at $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$. I tillegg vet vi fra (7) at konstanten 8 kan trekkes utenfor integralet. Vi kan derfor skrive integralet vårt som

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Fra (12) vet vi at $\tan x$ er en antiderivert til $\frac{1}{\cos^2 x}$. Når vi har funnet en antiderivert fører vi gjerne slik¹:

$$\begin{aligned} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx &= 8 [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 8 \left[\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right] \\ &= 8[1 - 0] \\ &= 8 \end{aligned}$$

Merk: Bruken av klammeparantes er bare en annen måte å skrive (4) på.

¹Forklar for deg selv hvorfor vi ikke trenger å ta hensyn til konstanten når vi skal finne et bestemt integral.

Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet $\int \left(\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx$.

Svar

Vi utnytter at $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ og at $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Ved (6) og (8) kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx &= \int \left(x^{-4} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx \\ &= \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= -\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C \end{aligned}$$

0.2.1 Integralet av utvalgte funksjoner (forklaring)

(6) og (7) følger direkte av (??) og (??).

Ut ifra definisjonen av det ubestemte integralet (se (5)) har vi at

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

hvis $F' = f$. For alle ubestemte integraler gitt i (8)-(12) kan dette sjekkes via enkle derivasjonoperasjoner og er derfor overlatt til leseren.

0.2.2 Bytte av variabel

Vi skal nå se på en metode som kalles *bytte av variabel*¹ (også kalt *substutisjon*). Med denne kan vi ofte forenkle integralregningen betraktelig.

0.8 Bytte av variabel

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $g(u)$. Hvis $\int f(x) dx$ kan skrives om til $\int g(u)u' dx$, kan integralet løses med u som variabel:

$$\int g(u)u' dx = \int g(u) du \quad (14)$$

Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int 8x \sin(4x^2) dx$$

Svar

Vi setter $u(x) = 4x^2$ og $g(u) = \sin u$. Dermed blir $u' = 8x$, og da er

$$\begin{aligned} \int 8x \sin(4x^2) dx &= \int u' g(u) dx \\ &= \int g(u) du \\ &= \int \sin u du \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos(4x^2) + C \end{aligned}$$

Merk: Når integralet vi skal finne er mhp. x , er det viktig at sluttuttrykket har x som eneste variabel.

¹Det er flere framgangsmåter for denne metoden. Den vi her presenterer er, etter forfatterens mening, den raskeste for integraler som er pensum i R2. For mer avanserte integraler bør man kjenne til framgangsmåten presentert i [vedlegg ??](#).

Eksempel 2

Finn det bestemte integralet

$$\int_0^2 x^2 e^{2x^3} dx$$

Svar

Vi setter $u(x) = 2x^3$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 6x^2$. I integralet vi skal løse mangler vi altså faktoren 6 for å kunne anvende oss av (14). Men vi kan alltid gange integralet vårt med 1, skrevet som $\frac{6}{6}$. Da kan vi trekke 6-tallet vi ønsker inn i integralet, og la resten av brøken forbli utenfor:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 e^{2x^3} dx &= \frac{6}{6} \int_0^2 x^2 e^{2x^3} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 6x^2 e^{2x^3} dx \end{aligned}$$

Nå ligger alt til rette for å bytte variabel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \int_0^2 6x^2 e^{2x^3} dx &= \frac{1}{6} \int_0^2 u' g(u) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 g(u) du \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 e^u du \\ &= \frac{1}{6} [e^u]_0^2 \\ &= \frac{1}{6} [e^{2x^3}]_0^2 \\ &= \frac{1}{6} (e^2 \cdot 2^3 - e^{2 \cdot 0^2}) \\ &= \frac{1}{6} (e^{16} - 1) \end{aligned}$$

Det finnes også en alternativ måte for å regne ut bestemte integral ved bytte av variabel, se [vedlegg ??](#) for denne.

Eksempel 3

Buelengden til grafen til en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx \quad (\text{I})$$

Finn lengden til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad x \in [0, 5]$$

Svar

Vi har at

$$f' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Og videre at

$$(f')^2 = \frac{1}{4}x$$

Det ubestemte integralet i (I) blir da

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{4}x} dx$$

Vi setter $u = 1 + \frac{1}{4}x$ og $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$. Da er $u' = \frac{1}{4}$. Nå har vi at

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{1}{4}x} dx &= 4 \int u^{\frac{1}{2}} u' dx \\ &= 4 \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\int_0^5 \sqrt{1 + (f')^2} dx &= \frac{8}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{4}x \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\ &= \frac{8}{3} \left(\left(1 + \frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} \left(\left(\frac{9}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{27}{8} - 1 \right) \\ &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

Merk: En litt lettere utrekning kunne vi fått ved å observere at

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x}$$

Med denne omskrivingen kunne vi valgt substitusjonen $u = 4 + x$, og dermed fått at $u' = 1$.

0.2.3 Delvis integrasjon

Hvis vi ikke finner et passende bytte av variabel for å løse et integral, kan vi isteden prøve med *delvis integrasjon*. Vi starter med å utlede ligningen som legger grunnlaget for metoden.

Gitt produktet av to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$, altså uv . Av produktregelen ved derivasjon (se [TM1](#)) har vi at

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Videre integrerer¹ vi begge sider av ligningen over mhp. x :

$$\begin{aligned}\int (uv)' dx &= \int (u'v + uv') dx \\ uv &= \int (u'v + uv') dx \\ uv - \int u'v dx &= \int uv' dx\end{aligned}$$

0.9 Delvis integrasjon

For to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ har vi at

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \quad (15)$$

Eksempel 1

Integrer funksjonen $f(x) = x \ln x$.

Svar

Vi observerer at $f(x)$ er sammensatt av x og $\ln x$. Trikset bak delvis integrasjon er å sette én av disse til å være funksjonen $u(x)$ og den andre til å være den deriverte av $v(x)$, altså $v'(x)$. Da har vi en ligning som i (15) og kan (forhåpentligvis) bruke denne til å finne integralet vi søker.

Vi må integrere v' for å finne v og derivere u for å finne u' . Siden $\ln x$ er lett å derivere, men vanskelig å integrere, setter vi

$$\begin{aligned}u &= \ln x \\ v' &= x\end{aligned}$$

Da må vi ha at¹

$$\begin{aligned}u' &= \frac{1}{x} \\ v &= \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Altså kan vi skrive (rekkefølgen på v' og u har selvsagt ingent-

¹Når vi har flere ubestemte itegraler, trenger vi bare ta med integrasjonskonstanten for én av dem. Derfor er ikke konstanten fra integrasjonen av $(uv)'$ tatt med.

ing å si i (15))

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int v' u \, dx \\&= uv - \int u' v \, dx \\&= \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x \, dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

¹Hvorfor ikke $v = \frac{1}{2}x^2 + C$? Vi hadde jo da fått samme v' .

Hvis vi lar V betegne en antiderivert til v' , kan vi skrive $v = V + C$. Av (15) har vi da at

$$\begin{aligned}\int uv' \, dx &= u(V + C) - \int u'(V + C) \, dx \\&= u(V + C) - \int u'V \, dx - \int Cu' \, dx \\&= uV + Cu - \int u'V \, dx - Cu \\&= uV - \int u'V \, dx\end{aligned}$$

Vi har endt opp med et uttrykk hvor C ikke lenger deltar. Vi får altså det samme svaret uansett hva verdien til C er, og da velger vi selvsagt fra starten av at $C = 0$.

Eksempel 2

Integrer funksjonen $f(x) = \ln x$.

Svar

Vi starter med å skrive $f(x) = \ln x \cdot 1$, og setter

$$\begin{aligned}u &= \ln x \\v' &= 1\end{aligned}$$

Vi får da at

$$\begin{aligned}u' &= \frac{1}{x} \\v &= x\end{aligned}$$

$\int f \, dx$ finner vi nå ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}\int \ln x \cdot 1 \, dx &= \int uv' \, dx \\&= uv - \int u'v \, dx \\&= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\&= x \ln x - x + C \\&= x(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

0.2.4 Delbrøksoppspaltning

Gitt integralet

$$\int \frac{4x + 5}{(x + 1)(x + 2)} \, dx$$

Etter litt testing vil vi finne at både delvis integrasjon og bytte av variabel kommer til kort i vår søken etter en antiderivert. Hva vi heller kan gjøre, er å ta i bruk *delbrøksoppspaltning*.

Vi merker oss da at integranden¹ er en brøk med nevneren $(x + 1)(x + 2)$. Dette betyr at den kan skrives som to separate brøker med $(x + 1)$ og $(x + 2)$ som nevnerne:

$$\frac{4x + 5}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} \quad (16)$$

¹For $\int f(x) \, dx$ sier vi at f er *integranden*.

A og B er to konstanter, vår oppgave blir nå å bestemme verdien til disse.

Vi starter med å gange begge sider av (16) med fellesnevneren:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}(x+1)(x+2) = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \right) (x+1)(x+2)$$

$$4x+5 = A(x+2) + B(x+1)$$

For det rette valget av A og B er uttrykkene over like for alle verdier av x . Når $x = -1$, har vi bare A som ukjent:

$$4 \cdot (-1) + 5 = A(-1+2) + B(-1+1)$$

$$1 = A$$

Og ved å sette $x = -2$, finner vi B :

$$4 \cdot (-2) + 5 = A(-2+2) + B(-2+1)$$

$$-3 = -B$$

$$3 = B$$

Nå kan vi altså skrive

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Dette er to brøker vi kan å integrere¹ (se (13)):

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x+1| + 3\ln|x+2|$$

¹Obs! I søken etter A og B valgte vi verdiene $x = -1$ og $x = -2$. I ligningene hvor vi satte inn disse verdiene var dette helt uskyldig, men i integralet må vi være observante. Vi får nemlig 0 i nevner hvis én av disse verdiene ligger i intervallet vi skal integere over. Er det snakk om et bestemt integral må vi derfor passe på at dette ikke er tilfelle.

0.10 Integrasjon ved delbrøksoppspaltning

For integraler på formen

$$\int \frac{a + bx + cx^2 + \dots}{(x - d)(x - e)(x - f)\dots} dx$$

hvor a, b, c, \dots er konstanter, skriver vi om integranden til

$$\frac{A}{(x - d)} + \frac{B}{(x - e)} + \frac{C}{(x - f)} + \dots$$

og finner så de ukjente konstantene A, B, C, \dots

Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} dx$$

Svar

Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden, og får at

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x + 1)(x - 1)}$$

Denne brøken ønsker vi å skrive som

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

For å finne A, B og C , omskriver vi ligningen ved å gange med fellesnevneren $x(x + 1)(x - 1)$:

$$3x^2 + 3x + 2 = A(x + 1)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 1)$$

Ligningen må holde for alle verdier av x . Vi setter først $x = 0$, og får at

$$\begin{aligned} 2 &= A \cdot (-1) \\ -2 &= A \end{aligned}$$

Videre setter vi $x = -1$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1)^2 + 3(-1) + 2 &= B \cdot (-1)(-1 - 1) \\ 1 &= B \end{aligned}$$

Til slutt setter vi $x = 1$:

$$\begin{aligned}3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 &= C(1 + 1) \\4 &= C\end{aligned}$$

Integralet vi skal finne kan vi derfor skrive som

$$\int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-1} \right) dx = -2 \ln |x| + \ln |x+1| + 4 \ln |x-1| + D$$

Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + x - 4}{x^2 + x - 2} dx$$

Svar

Hvis telleren har potenser av høyere orden¹ enn nevneren, må vi starte med en polynomdivisjon:

$$\begin{aligned}(x^3 + 5x^2 + x - 4) : (x^2 + x - 2) &= x + 4 + \frac{-x + 4}{x^2 + x - 2} \\-\frac{(x^3 + x^2 - 2x)}{4x^2 + 3x - 4} \\-(4x^2 + 4x - 8) \\-x + 4\end{aligned}$$

Vi observerer videre at nevneren i brøken kan omskrives til $(x - 1)(x + 2)$, for to konstanter A og B har vi altså at

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{-x+4}{x^2+x-2}$$

$$A(x+2) + B(x-1) = -x+4$$

Når $x = -2$, får vi at

$$\begin{aligned}B(-2-1) &= -(-2) + 4 \\B &= -2\end{aligned}$$

Og når $x = 1$, er

$$\begin{aligned}A(1+2) &= -1 + 4 \\A &= 1\end{aligned}$$

Integralet blir derfor

$$\int \left(x + 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

¹Her har telleren tre som høyeste orden, mens nevneren har to.

0.3 Areal og volum

0.3.1 Avgrenset areal

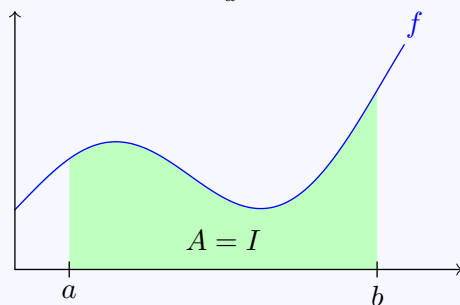
Arealet avgrenset av grafen til f , x -aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$ skal vi for enkelhetsskyld kalle **arealet avgrenset av f for $x \in [a, b]$** . I [seksjon 0.1](#) har vi sett at det er en sterk sammenheng mellom dette arealet og det bestemte integralet av f :

0.11 Integral som areal I

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ og to tall a og b der $a < b$.

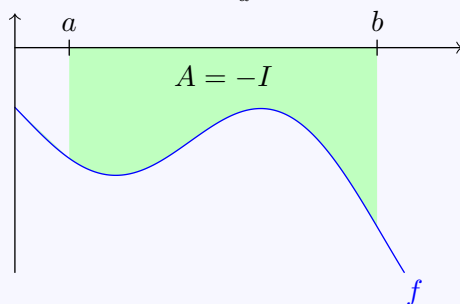
Hvis $f \geq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset av f på dette intervallet gitt som

$$A = \int_a^b f \, dx$$



Hvis $f \leq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset av f på dette intervallet gitt som

$$A = - \int_a^b f \, dx$$



Areal avgrenset av to funksjoner

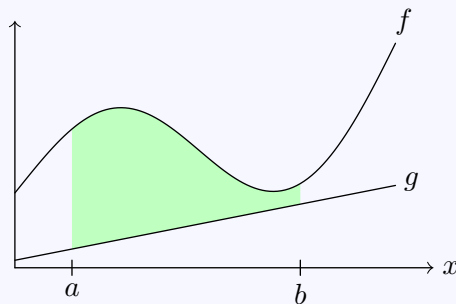
Noen ganger ønsker vi også å finne arealet avgrenset av to funksjoner. Da må vi sørge for at vi har tilstrekkelig med informasjon om disse før vi utfører integrasjonen:

0.12 Integral som areal II

Gitt to kontinuerlige funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og tre tall a , b og c der $a < c < b$.

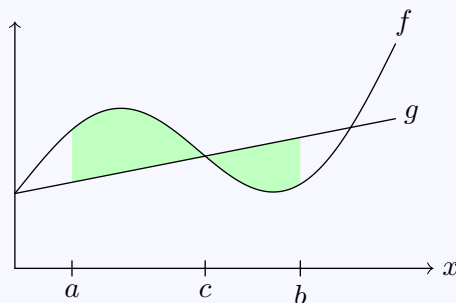
Hvis $f > g$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset mellom f og g på dette intervallet gitt ved

$$A = \int_a^b (f - g) dx \quad (17)$$



Hvis $f \geq g$ for $x \in [a, c]$ og $g \geq f$ for $x \in [c, b]$, er arealet A avgrenset mellom f og g for $x \in [a, b]$ gitt ved

$$A = \int_a^c (f - g) dx + \int_c^b (g - f) dx \quad (18)$$



Eksempel

Gitt funksjonene $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ og $g(x) = 2x - 1$. Vi har da at $f \geq g$ for $x \leq 1$ og at $g \geq f$ for $x \geq 1$. Finn arealet A avgrenset av f og g for $x \in [0, 2]$.

Svar

Ut ifra informasjonen over er arealet gitt ved ligningen

$$A = \int_0^1 (f - g) dx + \int_1^2 (g - f) dx$$

Vi starter med å regne ut de to integralene hver for seg:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f - g) dx &= \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x^2 - x) \right]_0^1 \\ &= - \left[\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (x^2 - x) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) + (1^2 - 1) \\ &\quad - \left(\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) + (0^2 - 0) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (g - f) dx &= \left[(x^2 - x) + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_1^2 \\ &= (2^2 - 2) + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) \\ &\quad - \left(-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) - (1^2 - 1) \right) \\ &= 2 - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

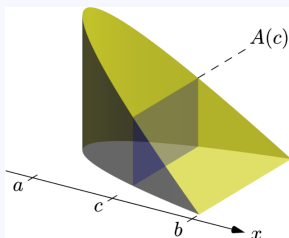
Summen av disse to integralene er 2, som altså er arealet.

0.3.2 Volumet av en figur

Vi har sett hvordan integraler kan brukes til å finne arealer, men de kan også brukes til å finne volumer:

0.13 Integral som volum

Gitt en tredimensjonal figur plassert i et koordinatsystem, med endepunktene satt til verdiene a og b langs x -aksen.



La videre $A(x)$ være tverrsnittsarealet av figuren for verdien x . Volumet V av figuren er da gitt som

$$V = \int_a^b A dx \quad (19)$$

Eksempel

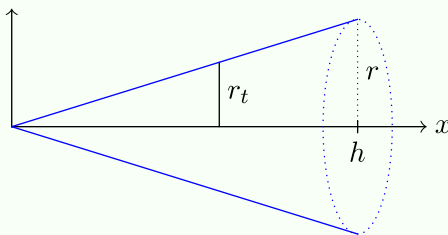
Vis at volumet V av ei rett kjegle er gitt som

$$V = \frac{1}{3} \pi h r^2$$

hvor r er radiusen til grunnflata og h er høyden til kjegla.

Svar

Vi plasserer kjegla inn i et koordinatsystem med høyden langs x -aksen og spissen plassert i origo.



Radiusen $r_t(x)$ kan beskrives som en rett linje med stigningstall $\frac{r}{h}$:

$$r_t(x) = \frac{r}{h}x$$

Arealet $A(x)$ av tverrsnittet blir da

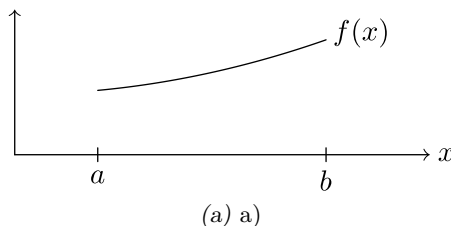
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi r_t^2 \\ &= \pi \left(\frac{r}{h} \right)^2 x^2 \end{aligned}$$

Altså er volumet av kjegla gitt som

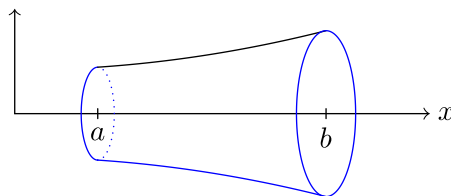
$$\begin{aligned} \int_0^h A \, dx &= \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} \right)^2 x^2 \, dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi h r^2 \end{aligned}$$

0.3.3 Volum av omdreiningselementer

Si vi har en funksjon $f(x)$ gitt på intervallet $[a, b]$, med en graf som vist i figur 4a. Tenk nå at vi dreier linjestykket 360° om x -aksen. Formen vi da har "skjært" ut, vist i figur 4b, er det vi kaller *omdreiningselementet* til $f(x)$ på intervallet $[a, b]$.



(a) a)



(b) b)

Figure 4: a) Grafen til f . b) Omdreiningselementet til f .

Tverrsnittet (langs x -aksen) til en slik figur er alltid sirkelformet, tverrsnittsarealet er derfor πr^2 , hvor $r(x)$ er radiusen til tverrsnittet. Men siden radiusen tilsvarer høyden fra x -aksen opp til f , er $r = f$. Av (19) kan vi da skrive

$$V = \int_a^b A \, dx = \int_a^b \pi f^2 \, dx = \pi \int_a^b f^2 \, dx$$

0.14 Volum av omdreiningselementer

Volumet V av omdreiningselementet til $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$V = \pi \int_a^b f^2 \, dx \quad (20)$$

Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

finn volumet av omdreiningsleget til f på intervallet $[1, 3]$.

Svar

Volumet vi søker er gitt som

$$\begin{aligned}\pi \int_1^3 f^2 dx &= \pi \int_1^3 (\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 x dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{\pi}{2} [9 - 1] \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

Forklaringer

0.2 Bestemt integral I (forklaring)

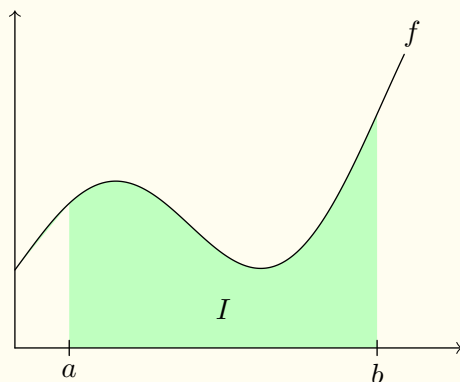


Figure 5: Integralet I tilsvarende det avgrensede arealet i grønt.

La oss ta utgangspunkt i funksjonen $f(x)$, med en graf som vist i figur 5. Vårt mål er nå å finne I .

Vi starter med å splitte $[a, b]$ inn i n mindre delintervaller, alle med bredden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. I tillegg lar vi x_i for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ betegne den x -verdien som er slik at $f(x_i)$ er den laveste verdien til f på delintervall nr. i .

Arealet avgrenset av delintervallet og f tilnærmer vi som $s_i = f(x_i)\Delta x$, da har vi at (se figur 6)

$$I \geq s_1 + s_2 + \dots + s_i$$

$$I \geq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$I \geq \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

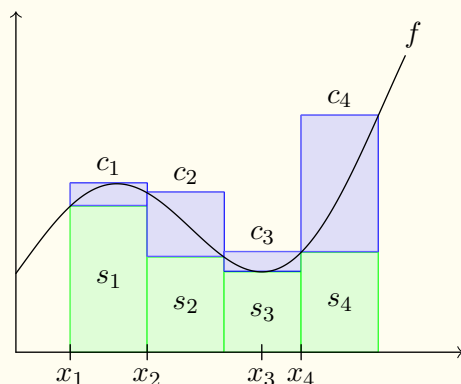


Figure 6: Arealene av s_i markert som grønne søyler og arealene av c_i markert som blå søyler. Bredden til hver søyle er $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (her er $n = 4$).

Videre må det finnes et tall $h_i \in [0, 1)$ som er slik at $f(x_i + h_i \Delta x)$ er den høyeste verdien til f på delintervallet. Vi lar c_i betegne arealet til søylen med Δx som bredde og $f(x_i + h_i \Delta x) - f(x_i)$ som høyde:

$$c_i = (f(x_i + h_i \Delta x) - f(x_i)) \Delta x$$

Hvis vi legger til alle c_i i det første estimatet vårt, får vi en tilnærming som må være større eller lik det egentlige arealet. Derfor kan vi skrive

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \leq I \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n c_i$$

Én av c -verdiene må være større eller lik alle andre c -verdier. Vi lar m betegne indeksen til nettopp denne c -verdien. Da må vi ha at

$$0 \leq \sum_{i=1}^n c_i \leq n c_m$$

Men når $n \rightarrow \infty$, går summen $n c_m$ mot 0:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n c_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} n (f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m)) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n (f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m)) \frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_m + h_m \Delta x) - f(x_m)) (b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_m) - f(x_m)) (b-a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Følgelig er $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i = 0$, og da er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \leq I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n c_i \right) \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \leq I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (22)$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (23)$$

Det vi har kommet fram til nå er vel og bra, men skal vi regne ut et integral blir det slitsomt å inspisere $f(x)$ på uendelig mange delintervaller for å finne de laveste funksjonsverdiene i hver av dem! Vi merker oss derfor at venstresiden i (21), i vårt tilfelle, representerer det kraftigste underestimatet av I , mens høyresiden er det kraftigste overestimatet. I (21)-(23) har vi vist at begge disse estimatene går mot I når $n \rightarrow \infty$, dette betyr at vi for andre valg av x_i på hvert intervall også kommer fram til ønsket resultat. Regneteknisk vil det ofte være lurt å velge $x_i = a + (i - 1) \Delta x$ for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, slik som i (2).

Integral som areal for negative funksjoner

Hva nå om vi isteden skulle finne arealet avgrenset av x -aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til $g(x) = -f(x)$?

Grafene til f og g er fullstendig symmetriske om x -aksen, dette må bety at arealet A de avgrenser på et intervall må være helt likt. Og vi vet at

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n -g(x_i) \Delta x \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \end{aligned}$$

Av dette kan vi utvide den geometriske definisjonen av integralet:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er negativ og kontinuerlig for alle $x \in [a, b]$. Integralet I multiplisert med -1 tilsvarer arealet avgrenset av x -aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til f .

0.1.2 Analysens fundamentalteorem (forklaring)

Vi ønsker å vise at integralet I av en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = F(b) - F(a)$$

hvor F er en antiderivert til f . For å vise dette skal vi anvende oss av (2). Spesielt verdt å merke seg er at $x_1 = a$ og at $x_{n+1} = b$.

Fra tidligere vet vi at den deriverte av en funksjon $f(x)$ er gitt som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Med vår $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ kan vi omskrive grensen:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$, da er

$$F'(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Vi erstatter f i (2) med uttrykket over, og får at

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \Delta x$$

Fordi $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, har vi videre at

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots + F(x_{n+1}) - F(x_n)) \end{aligned}$$

Av dette legger vi merke til at alle $F(x_i)$ kansellerer hverandre, bortsett fra i endepunktene. Vi sitter altså igjen med summen

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-F(x_1) + F(x_{n+1})) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

0.8 Bytte av variabel (forklaring)

Gitt en funksjon $F(x)$ som vil anta samme verdier som $G(u(x))$:

$$F(x) = G(u) \quad (24)$$

La oss nå skrive $F'(x)$ som $f(x)$ og $G'(u)$ som $g(u)$. For to konstanter C og D må vi ha at

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

og

$$\int g(u) du = G(u) + D$$

Det må derfor finnes en konstant E som er slik at

$$\int f(x) dx + E = \int g(u) du$$

Men av kjerneregelen (se [TM1](#)) har vi følgende relasjon:

$$f(x) = g(u)u'$$

Vi kan derfor skrive

$$\int g(u)u' dx + E = \int g(u) du$$

Når vi utfører integrasjonen på enten venstre eller høyre side, får vi en ny konstant som vi kan slå sammen med E . I praksis kan vi derfor utelate E , noe som er gjort i (0.8).

0.13 Integral som volum (forklaring)

Vi setter geometrien vår inn i et koordinatsystem, og tar for gitt at vi har en funksjon $A(x)$ som gir oss tverrsnittsarealet for alle gyldige x .

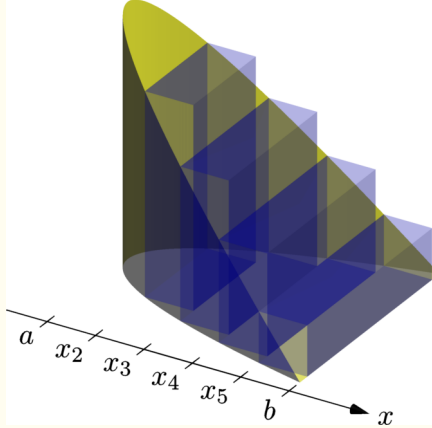


Figure 7: Volumet av geometrien (gul) tilnærmes ved summen av hver $A(x_i)\Delta x$ (blå).

Vi deler $[a, b]$ inn i n delintervaller, der hvert intervall har lengden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og startverdi $x_i = a + (i-1)\Delta x$ for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vi tilnærmer volumet til geometrien ved å legge sammen volumene på formen $A(x_i)\Delta x$. Når vi lar n gå mot uendelig vil summen gå mot volumet til gjenstanden¹, dette kan vi skrive som

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A(x_0)\Delta x + A(x_1)\Delta x + \dots + A(x_n)\Delta x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A(x_0) + A(x_1) + \dots + A(x_n)) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x \end{aligned}$$

Uttrykket over er analogt til definisjonen av det bestemte integralet fra ligning (2).

¹Argumentasjonen for denne påstanden blir identisk med den gitt i forklaringen for det bestemte integralet (se side 30).