0.1 Grenseverdier

Si at vi starter med verdien 0.9, og deretter stadig legger til 9 som bakerste siffer. Da får vi verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre. Ved å legge til 9 som bakerste siffer på denne måten, *kan vi komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – verdien 1*. Det å "komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – en verdi" vil vi heretter kalle å "gå mot en verdi". Metoden vi akkurat beskrev kan vi se på som en metode for å *gå mot* 1. Vi kan da si at *grenseverdien* til denne metoden er 1. For å indikere en grenseverdi skriver vi $\lim$.

Det er viktig å tenke over at vi kan gå mot et tall fra to sider; fra venstre eller fra høgre på tallinjen. Med en metode som gir oss verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre, nærmer vi oss 1 fra venstre. Lager vi oss en metode som gir verdiene 1.1, 1.01, 1.001 og så videre, nærmer vi oss 1 fra høgre. Dette vises ved å markere $+$ eller $-$ på tallet vi går mot.

0.1 Grenseverdier

$$x \to a^{+} = x \text{ går mot } a \text{ fra høgre}$$

$$x \to a^{-} = x \text{ går mot } a \text{ fra venstre}$$

$$x \to a = x \text{ går mot } a \text{ (fra både høgre og venstre)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \text{grenseverdien til } f \text{ når } x \text{ går mot } a \\ &= \text{verdien } f \text{ går mot når } x \text{ går mot } a\end{aligned}$$

Språkboksen

Å gå mot en verdi fra høgre/venstre kalles også å gå mot en verdi ovenfra/nedenfra.

Merk

$x \to a$ omfatter de to tilfellene $x \to a^{+}$ og $x \to a^{-}$. Ofte vil disse være så like av natur at vi kan behandle $x \to a$ som ett tilfelle.

En utvidelse av $=$

Det litt paradoksale med grenserverdier hvor x går mot a, er at vi ofte ender opp med å erstatte x med a, selv om vi per definisjon har at $x \neq a$. For eksempel er

$$\lim_{x \to 2}(x+1) = 2+1 = 3 \tag{1}$$

Det er verd å filosofere litt over likhetene i (1). Når x går mot 2, vil x aldri bli eksakt lik 2. Dette betyr at $x+1$ aldri kan bli *eksakt lik* 3. Men *jo nærmere* x er lik 2, *jo nærmere* er $x+1$ lik 3. Med andre ord går $x+1$ mot 3 når x går mot 2. Likheten i (1) viser altså ikke til et uttrykk som er *eksakt lik* en verdi, men et uttrykk som *går eksakt mot* en verdi. Dette gjør altså at grenseverdier bringer en noe utvidet forståelse av $=$.

Eksempel 1

Gitt $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$. Finn $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Svar

Når $x \neq 1$, har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \\ &= x+3 \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} x+3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

0.2 Kontinuitet

0.2 Kontinuitet

Gitt en funksjon $f(x)$ og en konstant c. Hvis $f(c)$ eksisterer, er f kontinuerlig for $x = c$ hvis

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{2}$$

Hvis (2) er ugyldig, er f diskontinuerlig for $x = c$.

Eksempel 1

Undersøk om funksjonene er kontinuerlige for $x = 2$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < 2 \\ -3x + 12 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad x \leq 2 \\ -x + 6 & , \quad x > 2 \end{cases} \tag{4}$$

Svar

a) Vi har at

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -3 \cdot 2 + 12 = 6$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 + 4 = 6$$

Altså er f kontinuerlig for $x = 2$.

b) Vi har at

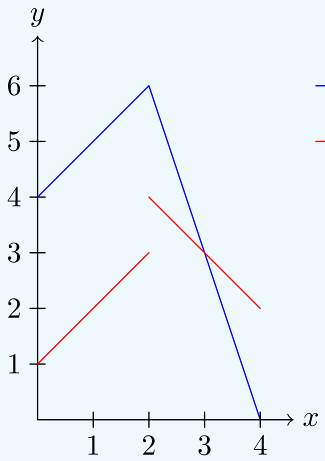
$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = g(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = -2 + 6 = 4$$

Altså er g ikke kontinuerlig for $x = 2$.

Visualisering av kontinuitet

Visuelt kan vi skille mellom kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner slik; kontinuerlige funksjoner har sammenhengende grafer, diskontinuerlige funksjoner har det ikke. Et utsnitt av grafene til funksjonene fra *Eksempel 1* på side 4 ser slik ut:



Grafer fungerer utmerket til å avgjøre hvilke funskjoner vi *forventer* å være kontinuerlige eller ikke, men er aldri gyldige som et bevis for dette.

0.3 Asymptote