4.1.2

a) Vi har at

$$\text{resterende lånebeløp} = \text{forrige lånebeløp} - \text{avdrag} \tag{1}$$

Ved et annuitetslån er terminbeløpet likt ved hver nedbetaling av lånet. Dette betyr at

$$\begin{aligned} \text{terminbeløp} &= \text{avdrag} + \text{rentebeløp} \\ \text{avdrag} &= \text{terminbeløp} - \text{rentebeløp} \end{aligned} \tag{2}$$

Av (1) og (2) er

$$\begin{aligned} \text{resterende lånebeløp} &= \text{forrige lånebeløp} - (\text{terminbeløp} - \text{rentebeløp}) \\ &= \text{forrige lånebeløp} + \text{rentebeløp} - \text{terminbeløp} \end{aligned}$$

Da rentebeløp = forrige lånebeløp $\cdot\, r$, har vi at

$$\text{resterende lånebeløp} = (1+r)\cdot \text{forrige lånebeløp} - \text{terminbeløp}$$

Med størrelsene slik de er definert i oppgaven kan dette skrives som

$$L_n = (1+r)L_{n-1} - T$$

b) Vi har at

$$L_1 = (1+r)L_0 - T$$

$$\begin{aligned} L_2 &= (1+r)L_1 - T \\ &= (1+r)\left[(1+r)L_0 - T\right] \\ &= (1+r)^2 L_0 + (1+r)T - T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= (1+r)L_2 - T \\ &= (1+r)\left[(1+r)^2 L_0 - (1+r)T - T\right] \\ &= (1+r)^3 L_0 - (1+r)^2 T - (1+r)T - T \end{aligned}$$

Følgelig er

$$L_n = (1+r)^n L_0 - T - (1+r)T - (1+r)^2 - ... - (1+r)^{n-1}T$$

Etter t år er $L_t = 0$, og dermed er

$$T + (1+r)T + (1+r)^2 + ... + (1+r)^{t-1}T = (1+r)^t \qquad (*)$$

Venstresiden i likningen over er summen av en geometrisk rekke med første ledd T og kvotient $1 + r$, og av (1.10) i TM2 har vi at

$$T\frac{1-(1+r)^t}{-r} = (1+r)^t L_0$$
$$T = \frac{-r}{1-(1+r)^t}(1+r)^t L_0$$

Da $(1+r)^t = \frac{1}{(1+r)^{-t}}$, kan vi skrive

$$\begin{aligned} T &= \frac{-r}{1-(1+r)^t} \cdot \frac{1}{(1+r)^{-t}} L_0 \\ &= \frac{-r}{(1+r)^{-t} - 1} L_0 \\ &= \frac{r}{1-(1+r)^{-t}} L_0 \end{aligned}$$

4.1.1

a) Når du har spart i 5 måneder betyr det at første innskudd har forrentet seg 4 ganger, andre beløp 3 ganger osv. Forrentingen tilsvarer en økning med 1.02. Medregnet det ferske innskuddet blir regnestykket

$$1000 \cdot 1.02^4 + 1000 \cdot 1.02^3 + 1000 \cdot 1.02^2 + 1000 \cdot 1.02^1 + 1000$$

b) Av oppgave a) innser vi at $P(n)$ er summen av en geometrisk rekke med $a_1 = 1000$ og $k = 1.02$:

$$\begin{aligned} P(n) &= 1000 \cdot \frac{1-1.02^n}{1-1.02} \\ &= -50000(1-1.02^n) \\ &= 50000(1.02^n - 1) \end{aligned}$$

4.1.11

a) En cosinusfunksjon har lavest verdi når cosinusuttrykket har verdien -1. Den laveste verdien til f er derfor $128 - 80 = 48$. Når det er fjære er altså vannstanden 48 cm over sjåkartnull.

b) Av (2.49) i TM2 har vi at perioden P er gitt som

$$P = \frac{2\pi}{k}$$

I dette tilfellet er $k = \frac{3\pi}{37}$, altså er

$$\begin{aligned} P &= \frac{37}{3} \\ &= 12 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Følgelig er det 12 timer og 20 minutter mellom to etterfølgende tipspunkt for flo. Dette betyr at det er 6 timer og 10 minutter mellom flo og fjære.