0.1 Oppgaver med tall og situasjoner fra virkeligheten

Se også oppgaver på ekte.data.uib.no

0.1.1

#rekker #øknomi

Du ønsker å spare penger i en bank som gir 2 % månedlig rente. Du sparer ved å gjøre et innskudd på 1000 kr hver måned.

a) Skriv rekken som viser hvor mye penger du har i banken når du starter på 5. måned med sparing. Innskuddet i 5. måned skal tas med.

b) Sett opp et uttrykk $P(n)$ som viser hvor mye penger du har i banken når du starter på n-te måned med sparing. Innskuddet i n-te måned skal tas med.

0.1.2

#rekker #øknonomi # programmering

Si at du låner 1 500 000 kroner av en bank. Lånet er et annuitetslån (se AM1) med 3% årlig rente, og lånet skal betales ned i løpet av 20 år med årlige fradrag og renter.

a) Finn verdien til terminbeløpet x.

b) Lag et script som printer terminbeløp, avdrag og renter for hele nedbetalingstiden, og som bekrefter at svaret ditt fra a) er rett.

c) Sammenlign svaret ditt med en lånekalkulator[1] på internett. (Sett alle gebyrer lik 0).

[1] laanekalkulator.no er ryddig og fin, men obs!, inneholder annonser.

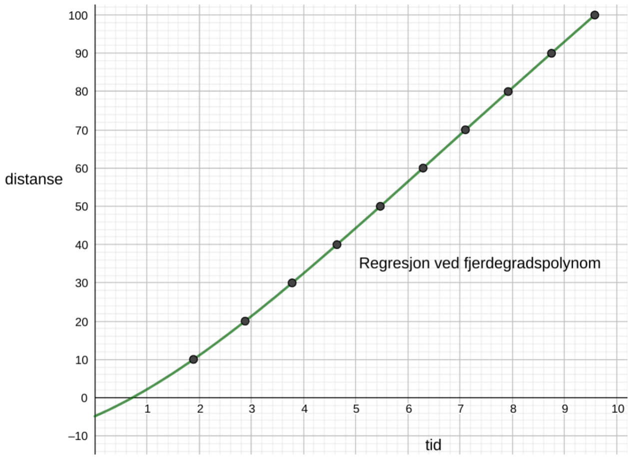
0.1.3

#regresjon #funksjonsdrøfting #omgjøring av enheter

Usain Bolt har verdensrekorden for 100 m sprint. I tabellen under ser du hva tidtakeren viste ved hver 10. meter under dette rekordløpet.

meter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
sekunder	1.89	2.88	3.78	4.64	5.47	6.29	7.1	7.92	8.75	9.58

a) I figuren under har vi brukt datasettet fra tabellen til å utføre regresjon med et fjerdegradspolynom. Hva er det som er helt feil med denne tilnærmingen?



b) I datasettet kan vi legge til et punkt som vil hjelpe med å korrigere feilen poengtert i a). Hvilket punkt er dette?

c) Bruk regresjon med et fjerdegradspolynom på datasettet fra b).

d) Ut ifra funksjonen du fant i c), hva var toppfarten til Bolt under dette løpet?

e) Bruk datasettet fra b) til å finne gjennomsnittsfarten til Bolt for $t \in [0, 1.89]$ og for $t \in [1.89, 9.58]$. Sammenlikn disse hastighetene med svaret fra oppgave d), og drøft årsaken til ulikhetene/likhetene.

0.1.4

#funksjoner #regresjon #derivasjon #vektorer i planet

På side 26 i dokumentet Premisser for geometrisk utforming av veger (utformet av Statens vegvesen) er minste **horisontalkurveradius** $R_{h,\min}$ gitt ved formelen

$$R_{h,\min} = \frac{V^2}{127(\mathrm{e}_{\text{maks}} + f_k)}$$

hvor

$$\begin{aligned} V &= \text{fartsgrense} \\ \mathrm{e}_{\text{maks}} &= \text{maksimal overhøyde} \\ f_k &= \text{dimensjonerende sidefriksjonsfaktor} \end{aligned}$$

Si at en veibane er beskrevet av grafen en funksjon $f(x)$. I vedlegg ?? i TM1 introduserte vi sirkelen som beksriver krumningen til f. Vektoren mellom sentrum S i denne sirkelen og et punkt $A = (x, f(x))$ på grafen til f er gitt som

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''}\left[-f \cdot (1 + (f')^2), 1 + (f')^2\right]$$

La r være radien til sirkelen som beskriver krumningen til f. Statens vegvesens krav tilsier at

$$r < R_{h,\min}$$

Bruk et digitalt kart og regresjon til å finne en polynomfunksjon som gir en god tilnærming for utvalgte veistykker hvor fartsgrensen er kjent. Sett $\mathrm{e}_{\text{maks}} = 0$, og bruk tabellen[1] under for å velge verdien til f_k. Undersøk om krumningen til veistykket oppfyller kravet til Statens vegvesen i alle punkt.

Tabell 2.7: Sidefriksjon for ulike fartsgrenser og sikkerhetsfaktorer

Sikker-	Fartsgrense [km/t]							
hetsfaktor	40	50	60	70	80	90	100	110
1,00	0,249	0,224	0,195	0,182	0,157	0,131	0,108	0,079
1,10	0,226	0,204	0,178	0,165	0,143	0,119	0,098	0,072

[1]Hentet fra side 22 fra nevnte dokument.

0.1.5

modellering # areal # derivasjon

Gitt et rektangel med omkrets O, og la x være den éne sidelengden.

a) Finn uttrykket til funksjonen $A(x)$, som viser aralet til rektangelet.

b) Hvilken form har rektangelet når arealet er størst?

0.1.6

#logaritmer #overslag

Momentmagnitudeskalaen er en skala som brukes til å representere styrken på jordskjelv. Hvis S er det målte **seismiske momentet** til jordskjelvet, er massemagnituden M_w gitt som[1]

$$M_w = \frac{2}{3}\log S - 10.7$$

Energien som jordskjelvet utløser er tilnærmet proporsjonal med S.

Gitt to jordskjelv, jordskjelv A og jordskjelv B, med henholdsvis seismisk moment S_A og S_B. Si videre at proporsjonalitetskonstanten for energi utløst av det seismiske momentet er likt for begge jordskjelvene. Hvis jordskjelv A er målt til 1 mer enn jordskjelv B på momentmagnitudeskalaen, hva er da forholdet mellom energi utløst av jordskjelv A og energi utløst av jordskjelv B?

[1] Kilde: Wikipedia.

0.1.7

Du skal prøve å kaste en ball så langt som mulig langs et flatt strekke. Posisjonen ballen har idét den forlater handen din setter du til $(0, 0)$. Ved å anta at tyngdekraften deretter er den eneste kraften som virker på ballen, er posisjonen til ballen godt tilnærmet ved uttrykket

$$\vec{p}_g(t) = \vec{v}t - [0, 5t^2]$$

hvor $\vec{v} = [v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta]$ er hastighetsvektoren til ballen idét den forlot handen, og t er antall tidsenheter etter at ballen har forlatt handen. Idét ballen forlater handen din har den farten v_0, $\vec{v}$ danner vinkelen θ med horisontallinjen.

Ut ifra $\vec{p}_g$, hvilken verdi må θ ha for at kastet skal bli lengst mulig?

0.1.8

integrasjon # derivasjon

La funksjonen $s(t)$ beskrive hvor langt et objekt har bevegd seg etter tiden t. Hvi objektet har konstant akselerasjon a, har vi at

$$s''(t) = a$$

a) Integrer $s''(t)$ to ganger slik at du ender opp med et uttrykk for $s(t)$.

b) Bestem uttrykkene for $s(t)$ og $s'(t)$ når du vet at $s(t) = 0$ og $s'(t) = v_0$.

c) Hvilken fysisk størrelse representerer $s'(t)$?

d) Undersøk begrepet "bevegelsesligninger"[1] (også kalt "veiformler") i en fysikkbok eller på internett. Sammenlign uttrykkene du finner med uttrykket du fant for $s(t)$.

[1] "Eqautions of motion på engelsk.

0.1.9

#vektorer i planet #derivasjon

Posisjonen $\vec{s}$ til et objekt som beveger seg i en sirkelbane kan uttrykkes som

$$\vec{s} = r[\cos(2\pi f t), \sin(2\pi f t)]$$

hvor r er radien til sirkelbanen, t er tiden og f er frekvensen.

a) f beskriver antall runder objektet fullfører per tidsenhet[1]. Forklar hvorfor $2\pi f$ kalles **vinkelfarten** til objektet.

b) Finn $\vec{s}'(t)$.

c) Hva er vinkelen mellom $\vec{s}(t)$ og $\vec{s}'(t)$?

d) Bestem lengden til $\vec{s}'(t)$

e) Finn $\vec{s}''(t)$.

f) Bestem lengden til $\vec{s}''(t)$

g) Hva er vinkelen mellom $\vec{s}(t)$ og $\vec{s}''(t)$? Peker $\vec{s}''(t)$ innover i sirkelbanen eller ut fra sirkelbanen?

h) Bruk en fysikkbok eller internett til å undersøke begrepet **sentripetalakselerasjon**. Sammenlign funnene dine i denne oppgaven med informasjonen du finner.

[1] Hvis tidsenheten er 'sekund', har f benevningen '1/sekund'.

0.1.10

trigonometri

En tilnærming for høy- og lavvann i Molde er gitt ved funksjonen

$$f(x) = 128 + 80\cos\left(\frac{3\pi}{37}x\right)$$

hvor f angir cm over sjøkartnull[1] t timer etter et gitt referansetidspunkt. Referansetidspunktet er valgt slik at det ved $t = 0$ var høyvann (flo).

a) Hva er vannstanden i Molde når det er lavvann (fjøre)?

b) Hvor lang tid er det mellom flo og fjøre?

Merk: Denne oppgaven kan med fordel løses uten digitale hjelpemidler.

[1] Sjøkartnull er som regel satt til den laveste vannstanden som kan oppnås ut ifra astronomiske betingelser (flo og fjære er i stor grad betinget av hvordan jorda, sola og månen står i forhold til hverandre).

0.2 Teoretiske utvidelser

0.2.1

#programmering #lengden til en graf

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

a) Finn $g(x) = f'(x)$.

b) I TM2 er formelen for lengden l til en graf gitt. Forklar hvilket tall l representerer når f og g er som gitt i denne oppgaven, $a = -1$ og $b = 1$.

c) Bruk en numerisk metode til for å finne en tilnærming for l. Drøft på forhånd hvilke hensyn som må tas for å unngå at skriptet feiler ved kjøring.

0.2.2

#følger og rekker #annuitetslån

Gitt et annuitetslån (se AM1) med lånebeløp L_0, årlig rente $r\%$, og nedbetalingstid t. Lånet skal nedbetales med et årlig terminbeløp T.

a) La L_n være resterende lånebeløp etter n-te nedbetaling. Forklar hvorfor
$$L_n = (1+r)L_{n-1} - T$$

b) Finn en formel for terminbeløpet T, uttrykt ved L_0, t og r.

Annuitetslån blir ofte forklart med utgangspunkt i det vi her skal kalle *spareperspektivet* og *realverdiperspektivet*:

Spareperspektivet
Vi tenker oss at utlåner oppretter en sparekonto med $r\%$ årlig rente. I t år tilføres sparekontoen et årlig innskudd T. Dette skal gi samme resultat som hvis L_0 hadde blitt satt på sparekonto umiddelbart og forrentet i t år.

Nåverdiperspektivet
Året før nedbetalingen starter setter vi som basisår, og vi tenker at kroneverdien har økt, og vil øke, med $r\%$ hvert år etter basisåret. Summen av realverdiene til alle terminbeløp skal da tilsvare L_0.

c) Ta utgangspunkt i likningen merket med (*) i løsningsforslaget, og forklar hva de to sidene i likningen beskriver ut ifra spareperspektivet.

d) Ta utgangspunkt i likningen merket med (*) i løsningsforslaget, og lag en likning som beskriver nåverdiperspektivet.

0.2.3

#rasjonale funksjoner #funksjonsdrøfting #digital graftegning

Definer funksjonen

$$\frac{ax-b}{x-c}$$

i en digital graftegner (GeoGebra). Beskriv hva som skjer med grafen til f når du øker/minker én av a, b og c på intervallet $[-3, 3]$.

0.3 Praktiske oppgaver

0.3.1

#regresjon #derivasjon # funksjonsdrøfting

- Sett opp 11 kjegler med 10 meters avstand.
- Ta video av at du springer 100-meteren så fort du kan.
- Bruk videoen og regresjon til å finne en funksjon som gir en god beskrivelse av 100-meteren din.
- Hva var gjennomsnittsfarten din?
- Hva var toppfarten din?
- På hvilket tidspunkt hadde du størst akselerasjon?

0.3.2

#trigonometri

Sett en gjenstand på enden av en planke, og vipp enden varsomt oppover fram til gjenstanden starter å renne nedover planken. Vinkelen hvor bevegelsen starter kalles **friksjonsvinkelen**. Finn friksjonsvinkelen for tre forskjellige gjenstander. Undersøk om friksjonsvinkelen endres hvis gjenstandene og/eller planken vætes. Friksjonsvinkelen skal du finne bare ved å måle hvor høyt planken er vippet, og lengden til planken.

0.3.3

#integrasjon #regresjon #omdreiningslegemer

Finn forskjellige gjenstander det går an å helle vann i. Bruk regresjon og teorien om omdreiningslegemer til å finne en tilnærming for volumet til gjenstanden. Undersøk hvor godt tilnærmingen svarer til virkeligheten.

0.4 Eksamensoppgaver

0.4.1 (R1V23D1)

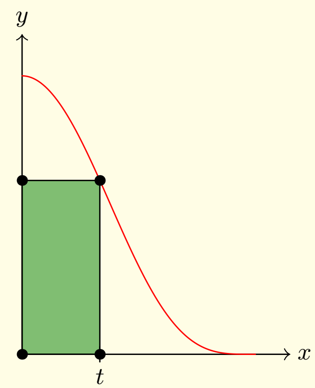
En elev har fått følgende oppgave:

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x^2 - 9)^4 \qquad , \qquad x \in (0, 3)$$

Et rektangel R har hjørne i $(0, 0)$, $(t, 0)$, $(t, f(t))$ og $(0, f(t))$.

Bestem den verdien av t som gjør at R har størst areal.



For å løse oppgaven har eleven lagd følgende program:

```
def A(x):
  return x*(x**2-9)**4

t = 0
d = 0.01

while A(t) < A(t+d):
  t = t + d

print(t)
```

a) Forklar strategien eleven har brukt.

b) Løs oppgaven eleven har fått.

0.4.2 (R2V23D1)

En elev har skrevet følgende kode:

```
1  a=3
2  d=4
3
4  N = 10
5  S = 0
6
7  for i in range(N):
8    S = S + a
9    a = a + d
10
11 print(S)
```

a) Forklar hva eleven vil regne ut.

b) Hva blir resultatet når man kjører programmet, hvis N settes til 100 i linje 4?

0.4.3 (R1H23D1)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2$$

Egil ønsker å lage et program som regner ut koordinatane til bunnpunktet på grafen til f. Han har skrevet koden nedenfor.

```python
def f(x):
  return 2*x**2 - 9*x - 2

def df(x, h):
  return (f(x+h)- f(x))/h

h = 0.001
a = 0

while df(a, h) < 0:
  a = a + 1

print("Bunnpunktet er ", (a, f(a)))
```

Utdata

```
Bunnpunktet er (3, -11)
```

a) Forklar hvilken strategi Egil har brukt.

Svaret han får er ikke rett.

b) Foreslå en endring i koden som vil gi Egil et riktigere svar.