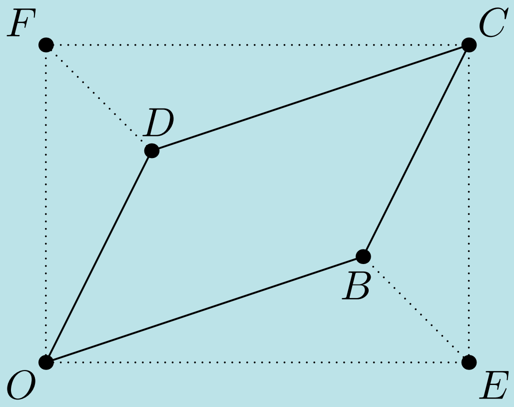
Teoretisk matematikk 1
1T og R1



Sindre Sogge Heggen

Innhold

Viktig kommentar om funksjoner

Som nevnt i MB, er funksjoner variabler som endrer seg i takt med at andre variabler endrer seg. I denne boka vil det å skrive en funksjon f som $f(x)$ indikere at f endrer seg i takt med variabelen x. Så lenge det er etablert at x er en variabel, vil det derfor ikke være noen forskjell på f og $f(x)$, for eksempel kan vi skrive

$$f = f(x) = 2x \tag{1}$$

En slik konvensjon gjør at mange forklaringer får penere uttrykk, men den krever at vi er bevisst hvordan paranteser brukes i sammenheng med multiplikasjon og i sammenheng med funksjoner. Da må vi tenke over om et symbol står for en uavhengig variabel eller en variabel som avhenger av en annen $-$ altså en funksjon. Slik (1) er formulert, er x en uavhengig variabel og f en variabel avhengig av x. For en konstant a er da

$$x(a) = x \cdot a = ax$$

$$f(a) = 2 \cdot a = 2a$$

Videre er

$$f - a = 2x - a$$

Kapittel 1

Mengder og vilkår

1.1 Mengder

1.1.1 Definisjon

En samling av tall kalles en **mengde**[1], og et tall som er en del av en mengde kalles et **element**. Mengder kan inneholde et endelig antall elementer og de kan inneholde uendelig mange elementer.

1.1 Mengder

For to tall a og b, hvor $a \leq b$, har vi at

$[a, b]$	er mengden av alle tall større eller lik a og mindre eller lik b.
$(a, b]$	er mengden av alle tall større enn a og mindre eller lik b.
$[a, b)$	er mengden av alle reelle tall større eller lik a og mindre enn b.

$[a, b]$ kalles et **lukket intervall**, (a, b) kalles et **åpent intervall**, og både $(a, b]$ og $[a, b)$ kalles **halvåpne intervall**.

Mengden som inneholder bare a og b skrives som $\{a, b\}$.

At x er et element i en mengde M skrives som $x \in M$.

At x *ikke* er et element i en mengde M skrives som $x \notin M$.

At mengden M består av mengdene M_1 og M_2 skrives som $M = M_1 \cup M_2$.

Språkboksen

$x \in M$ uttales "x inneholdt i M".

Mange tekster bruker $\langle$ istedenfor $($ for å indikere åpne (eller halvåpne) intervall.

Merk

Når vi heretter i boka definerer et intervall beskrevet av a og b, tar vi det for gitt at a og b er to tall, og at $a \leq b$.

[1]En mengde kan også være en samling av andre matematiske objekter, som for eksempel funksjoner, men i denne boka holder det å se på mengder av tall.

Eksempel 1

Mengden av alle heltall større enn 0 og mindre enn 10 kan vi skrive som

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Denne mengden inneholder 9 elementer. 3 er et element i denne mengden, og da kan vi skrive $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

10 er ikke et element i denne mengden, og da kan vi skrive $10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Eksempel 2

I uttrykket $0 \ ? \ x \ ? \ 1$, erstatt ? med et ulikhetssymbol slik at uttrykket gjelder for alle $x \in M$, og om 1 er inneholdt i M.

a) $M = [0, 1]$

b) $M = (0, 1]$

c) $M = [0, 1)$

Answer

a) $0 \leq x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

b) $0 < x \leq 1$. Videre er $1 \in M$.

c) $0 \leq x < 1$. Videre er $1 \notin M$.

1.2 Navn på mengder

$\mathbb{N}$	Mengden av alle positive heltall[1]
$\mathbb{Z}$	Mengden av alle heltall[2]
$\mathbb{Q}$	Mengden av alle rasjonale tall
$\mathbb{R}$	Mengden av alle reelle tall
$\mathbb{C}$	Mengden av alle komplekse tall

[1] Inneholder *ikke* 0.

[2] Inneholder 0.

1.1.2 Symbolet for uendelig

Mengdene i definisjon 1.2 inneholder uendelig mange elementer. Noen ganger ønsker vi å avgrense deler av en uendelig mengde, og da melder det seg et behov for et symbol som er med på å symbolisere dette. ∞ er symbolet for en uendelig stor, positiv verdi.

Eksempel

Et vilkår om at $x \geq 2$ kan vi skrive som $x \in [2, \infty)$.

Et vilkår om at $x < -7$ kan vi skrive som $x \in (-\infty, -7)$.

Språkboksen

De to intervallene i eksempelet over kan også skrives som $[2, \rightarrow)$ og $(\leftarrow, -7)$.

Merk

∞ er ikke noe bestemt tall. Å bruke de fire grunnleggende regneartene alene med dette symbolet gir derfor ingen mening.

1.1.3 Verdi- og definisjonsmengder

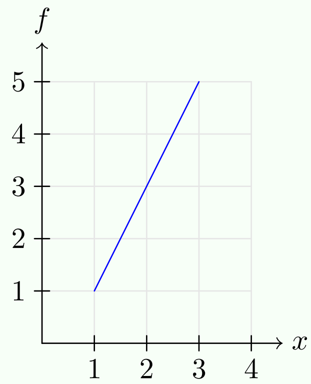
1.3 Verdi- og definisjonsmengder

Gitt en funksjon $f(x)$.

- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier x kan ha, er **definisjonsmengden** til f. Denne mengden skrives som D_f.
- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier f kan ha når $x \in D_f$, er **verdimengden** til f. Denne mengden skrives som V_f.

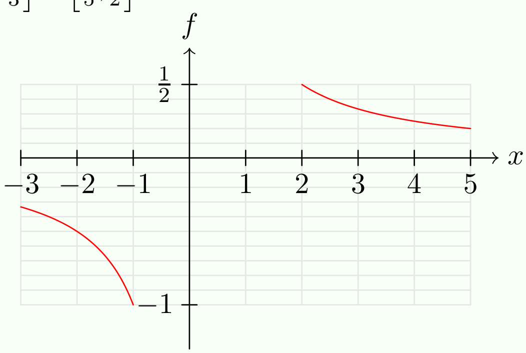
Eksempel 1

Figuren under viser $f(x) = 2x + 1$, hvor $D_f = [1, 3]$. Da er $V_f = [1, 5]$.



Eksempel 2

Figuren under viser $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $D_f = [-3, -1] \cup [2, 5]$. Da er $V_f = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$.



Merk

Definisjonsmengden til en funksjon bestemmes av to ting; hvilken sammenheng funksjonen skal brukes i, og eventuelle verdier som gir et udefinert funksjonsuttrykk. I *Eksempel 1* på side 7 er definisjonsmengden helt vilkårlig valgt, siden funksjonen er definert for alle x. I *Eksempel 2* derimot er ikke funksjonen definert for $x = 0$, så en definisjonsmengde som inneholdt denne verdien for x ville ikke gitt mening.

1.2 Vilkår

1.2.1 Symboler for vilkår

Symbolet $\Rightarrow$ bruker vi for å vise til at hvis et vilkår er oppfylt, så er et annet (eller flere) vilkår også oppfylt. For eksempel; i MB så vi at hvis en trekant er rettvinklet, er Pytagoras' setning gyldig. Dette kan vi skrive slik:

$$\text{trekanten er rettvinklet} \Rightarrow \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Men vi så også at det omvendte gjelder; hvis Pytagoras' setning er gyldig, må trekanten være rettvinklet. Da kan vi skrive

$$\text{trekanten er rettvinklet} \iff \text{Pytagoras' setning er gyldig}$$

Det er veldig viktig å være bevisst forskjellen på $\Rightarrow$ og $\iff$; at vilkår A oppfylt gir B oppfylt, trenger ikke å bety at vilkår B oppfylt gir vilkår A oppfylt!

Eksempel 1

$$\text{firkanten er et kvadrat} \Rightarrow \text{firkanten har fire like lange sider}$$

Eksempel 2

$$\text{tallet er et primtall større enn } 2 \Rightarrow \text{tallet er et oddetall}$$

Eksempel 3

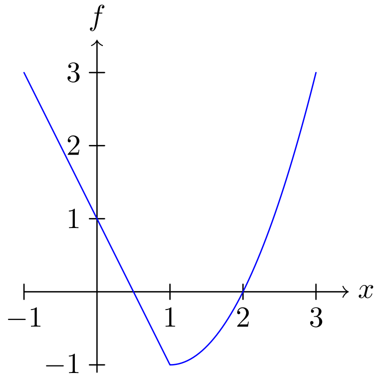
$$\text{tallet er et partall} \iff \text{tallet er delelig med } 2$$

1.2.2 Funksjoner med vilkår

Funksjoner kan gjerne ha flere uttrykk som gjelder ved forskjellige vilkår. La oss for eksempel definere en funksjon $f(x)$ slik:

For $x < 1$ er funksjonsuttrykket $-2x + 1$

For $x \geq 1$ er funksjonsuttrykket $x^2 - 2x$



Figur 1.1: Grafen til f på intervallet $[-1, 3]$.

Dette kan vi skrive som

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Kapittel 2

Algebra

2.1 Faktorisering

2.1 Kvadratsetningene

For to reelle tall a og b er

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(1. kvadratsetning)}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(2. kvadratsetning)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(3. kvadratsetning)}$$

Språkboksen

$(a+b)^2$ og $(a-b)^2$ kalles **fullstendige kvadrat**.

3. kvadratsetning kalles også **konjugatsetningen**.

Eksempel 1

Skriv om $a^2 + 8a + 16$ til et fullstendig kvadrat.

Answer

$$\begin{aligned} a^2 + 8a + 16 &= a^2 + 2 \cdot 4a + 4^2 \\ &= (a+4)^2 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Skriv om $k^2 + 6k + 7$ til et uttrykk der k er et ledd i et fullstendig kvadrat.

Answer

$$\begin{aligned} k^2 + 6k + 7 &= k^2 + 2 \cdot 3k + 7 \\ &= k^2 + 2 \cdot 3k + 3^2 - 3^2 + 7 \\ &= (k+3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Eksempel 3

Faktoriser $x^2 - 10x + 16$.

Answer

Vi starter med å lage et fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 16 &= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + 16 \\ &= (x-5)^2 - 9 \end{aligned}$$

Vi legger merke til at $9 = 3^2$, og bruker 3. kvadratsetning:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 - 3^2 &= (x-5+3)(x-5-3) \\ &= (x-2)(x-8) \end{aligned}$$

Altså er

$$x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$$

2.1 Kvadratsetningene (forklaring)

Kvadratsetningene følger direkte av distributiv lov ved multiplikasjon (se MB).

2.2 a_1a_2-metoden

Gitt $x, b, c \in \mathbb{R}$. Hvis $a_1 + a_2 = b$ og $a_1a_2 = c$, er

$$x^2 + bx + c = (x + a_1)(x + a_2) \tag{2.1}$$

Eksempel 1

Faktoriser uttrykket $x^2 - x - 6$.

Answer

Siden $2(-3) = -6$ og $2 + (-3) = -1$, er

$$x^2 - 1x - 6 = (x+2)(x-3)$$

Eksempel 2

Faktoriser uttrykket $b^2 - 5b + 4$.

Answer

Siden $(-4)(-1) = 4$ og $(-4) + (-1) = -5$, er

$$b^2 - 5b + 4 = (b - 4)(b - 1)$$

Eksempel 3

Løs ulikheten

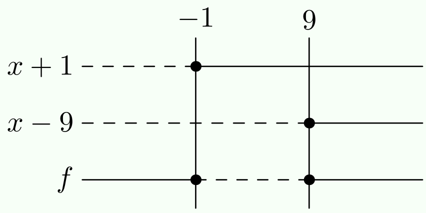
$$x^2 - 8x - 9 \leq 0$$

Answer

Siden $1(-9) = -9$ og $1 + (-9) = -8$, er

$$x^2 - 8x - 9 = (x + 1)(x - 9)$$

Vi setter $f = (x + 1)(x - 9)$, og lager et **fortegnsskjema**:



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket $x + 1$ er negativt når $x < -1$, lik 0 når $x = -1$, og positivt når $x > -1$.
- Uttrykket $x - 9$ er negativt når $x < 9$, lik 0 når $x = 9$, og positivt når $x > 9$.
- Siden $f = (x + 1)(x - 9)$, er

$$f > 0 \text{ når } x \in [-\infty, -1) \cup (9, \infty]$$
$$f = 0 \text{ når } x \in \{-1, 9\}$$
$$f < 0 \text{ når } x \in (-1, 9)$$

Altså er $x^2 - 8x - 9 \leq 0$ når $x \in [-1, 9]$.

2.2 a_1a_2-metoden (forklaring)

Vi har at

$$\begin{aligned}(x+a_1)(x+a_2) &= x^2 + xa_2 + a_1x + a_1a_2 \\ &= x^2 + (a_1+a_2)x + a_1a_2\end{aligned}$$

Hvis $a_1 + a_2 = b$ og $a_1a_2 = c$, er

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + bx + c$$

2.2 Andregradslikninger

2.3 Andregradslikning med konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$. Da er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (abc\text{-formelen})$$

Hvis $x = x_1$ og $x = x_2$ er løsningene gitt av abc-formelen, er

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{2.3}$$

Eksempel 1

a) Løs likningen $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

b) Faktoriser uttrykket på venstre side i oppgave a).

Answer

a) Vi bruker abc-formelen. Da er $a = 2$, $b = -7$ og $c = 5$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Enten er

$$x = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

eller så er

$$x = \frac{7-3}{4} = 1$$

b) $2x^2 - 7x + 5 = 2(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

Eksempel 2

Løs likningen

$$x^2 + 3 - 10 = 0$$

Answer

Vi bruker *abc*-formelen. Da er $a = 1$, $b = 3$ og $c = -10$. Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = -5 \qquad \vee \qquad x = 2$$

Eksempel 3

Løs likningen

$$4x^2 - 8x + 1$$

Answer

Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{8} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

Andregradslikninger (forklaring)

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi starter med å omskrive likningen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Så lager vi et fullstendig kvadrat, og anvdender konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Uttrykket over er lik 0 når

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \vee \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.3 Polynomdivisjon

2.3.1 Metoder

Når to gitte tall ikke er delelige med hverandre, kan vi bruke brøker for å uttrykke kvotienten. For eksempel er

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \tag{2.4}$$

Tanken bak (2.4) er at vi skriver om telleren slik at vi får fram den delen av 17 som er delelig med 3:

$$\frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

Den samme tankegangen kan brukes for brøker med polynomer, og da kalles det **polynomdivisjon**.

Eksempel 1

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5}$$

Answer

Metode 1

Vi gjør følgende trinnvis; med den største potensen av x i telleren som utgangspunkt, lager vi uttrykk som er delelige med telleren.

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5} &= \frac{2x(x+5) - 10x + 3x - 4}{x + 5} \\ &= 2x + \frac{-7x - 4}{x + 5} \\ &= 2x + \frac{-7(x+5) + 35 - 4}{x + 5} \\ &= 2x - 7 + \frac{31}{x + 5}\end{aligned}$$

Metode 2 (Se utregningen under punktene)

i) Vi observerer at leddet med den høyste ordenen av x i dividenden er $2x^2$. Dette uttrykket kan vi få fram ved å multiplisere dividenden med $2x$. Vi skriver $2x$ til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $2x(x+5) = 2x^2 + 10x$.

ii) Differansen fra punkt ii) er $-7x - 4$. Vi kan få fram leddet med høyest ordenen av x ved å multiplisere dividenden med -7. Vi skriver -7 til høgre for likhetstegnet, og subtraherer $-7(x+5) = -7x - 5$.

iii) Differansen fra punkt iii) er 31. Dette er et uttrykk som har lavere orden av x enn dividenden, og dermed skriver vi $\frac{31}{x+5}$ til høgre for likhetstegnet.

$$
\begin{array}{l}
(2x^2 + 3x - 4) : (x+5) = 2x - 7 + \dfrac{31}{x+5} \\
-\underline{(2x^2 + 10x)} \\
\qquad\quad - 7x - 4 \\
\qquad - \underline{(-7x - 35)} \\
\qquad\qquad\quad 31
\end{array}
$$

Eksempel 2

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2}$$

Answer

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} &= \frac{x(x^2 - 2) + 2x - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x + \frac{-4(x^2 - 2) - 8 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\
&= x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2}
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 9) : (x^2 - 2) = x - 4 + \dfrac{2x + 1}{x^2 - 2} \\
-\underline{(x^3 - 2x)} \\
\qquad\quad - 4x^2 + 2x + 9 \\
\qquad - \underline{(-4x^2 + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad 2x + 1
\end{array}$$

Eksempel 3

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Answer

Metode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} &= \frac{x^2(x-4) + 4x^2 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + \frac{x(x-4) + 4x - 6x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x + \frac{-2x + 8}{x - 4} \\
&= x^2 + x - 2
\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = x^2 + x - 2 \\
-\underline{(x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\qquad x^2 - 6x + 8 \\
\quad - \underline{(-x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad\quad -2x + 8 \\
\qquad\quad - \underline{(-2x + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

2.3.2 Delelighet og faktorer

Eksemplene på side 20 - 23 peker på noen viktige sammenhenger som gjelder for generelle tilfeller:

2.4 Polinomdivisjon

La A_k betegne et polynom A med grad k. Gitt polynomet P_m, da fins polynomene Q_n, S_{m-n} og R_{n-1}, hvor $m \geq n > 0$, slik at

$$\frac{P_m}{Q_n} = S_{m-n} + \frac{R_{n-1}}{Q_n} \tag{2.5}$$

Språkboksen

Hvis $R_{n-1} = 0$, sier vi at P_m er **delelig** med Q_n.

Eksempel 1

Undersøk om polynomene er delelige med $x - 3$.

a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$

b) $K(x) = x^3 + 6x^2 - 13x - 42$

Answer

a) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{P}{x-2} = x^2 + 8x + 2 - \frac{50}{x-2}$$

Altså er P *ikke* delelig med $x - 3$.

b) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{K}{x-2} = x^2 + 9x + 14$$

Altså er K delelig med $x - 3$.

2.5 Faktorer i polynomer

Gitt et polynom $P(x)$ og en konstant a. Da har vi at

$$P \text{ er delelig med } x - a \Longleftrightarrow P(a) = 0 \tag{2.6}$$

Hvis dette stemmer, fins det et polynom $S(x)$ slik at

$$P = (a - x)S \tag{2.7}$$

Eksempel 1

Gitt polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

a) Vis at $x = 1$ løser likningen $P = 0$.

b) Faktoriser P.

Answer

a) Vi undersøker $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $P = 0$ når $x = 1$.

b) Siden $P(1) = 0$, er $x - 1$ en faktor i P. Ved polynomdivisjon finner vi at

$$P = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)$$

Da $2(-4) = -8$ og $-4 + 2 = -2$, er

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$

Dette betyr at

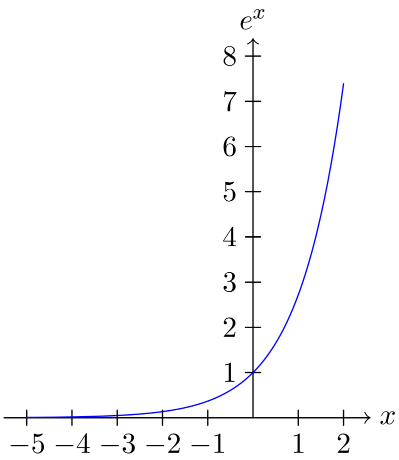
$$P = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

2.4 Eulers tall

Eulers tall er en konstant som har så stor betydning i matematikk at den har fått sin egen bokstav; e. Tallet er irrasjonalt[1], og de ti første sifrene er

$$e = 2.718281828...$$

De mest fascinerende egenskapene til dette tallet kommer til syne når man undersøker funksjonen $f(x) = e^x$. Dette er en eksponentialfunksjon som er så viktig at den rett og slett går under navnet **eksponentialfunksjonen**. Denne funksjonen skal vi undersøke nærmere i vedlegg D og kapittel 6.



[1]Og trascendentalt.

2.5 Logaritmer

I MB så vi på potenstall, som består av et grunntall og en eksponent. En **logaritme** er en matematisk operasjon relativ til et tall. Hvis en logaritme er relativ til grunntallet til en potens, vil operasjonen resultere i ekspontenten.

Logaritmen relativ til 10 skrives $\log_{10}$. Da er for eksempel

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

Videre er for eksempel

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Følelig kan vi skrive

$$1000 = 10^{\log_{10} 1000}$$

Med potensreglene som ugangspunkt (se MB), kan man utlede mange regler for logartimer.

2.6 Logaritmer

La $\log_a$ betegne logaritmen relativ til $a > 0$. For $m \in \mathbb{R}$ er da

$$\log_a a^m = m \tag{2.8}$$

Alternativt kan vi skrive

$$m = a^{\log_a m} \tag{2.9}$$

Eksempel 1

$$\log_5 5^9 = 9$$

Eksempel 2

$$3 = 8^{\log_8 3}$$

Språkboksen

$\log_{10}$ skrives ofte som $\log$, mens $\log_e$ skrives ofte som $\ln$ eller (!) $\log$. Når man bruker digitale hjelpemidler til å finne verdier til logaritmer er det derfor viktig å sjekke hva som er grunntallet. I denne boka skal vi skrive $\log_e$ som $\ln$.

Logaritmen med e som grunntall kalles den **naturlige logaritmen**.

Eksempel 3

$$\log 10^7 = 7$$

Eksempel 4

$$\ln e^{-3} = -3$$

2.7 Logaritmeregler

Merk: Logaritmereglene er her gitt ved den naturlige logaritmen. De samme regelene vil gjelde ved å erstatte ln med $\log_a$, og e med a, for $a > 0$.

For $x, y > 0$ har vi at

$$\ln e = 1 \tag{2.10}$$

$$\ln 1 = 0 \tag{2.11}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \tag{2.12}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \tag{2.13}$$

For et tall y og $x > 0$, er

$$\ln x^y = y \ln x \tag{2.14}$$

Eksempel 1

$$\ln\left(ex^5\right) = \ln e + \ln x^5 = 1 + 5 \ln x$$

Eksempel 2

$$\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = \ln 2$$

Logaritmerregler (forklaring)

Likning (2.10)

$$\ln e = \ln e^1 = 1$$

Likning (2.11)

$$\ln 1 = \ln e^0 = 0$$

Likning (2.12)

For $m, n \in \mathbb{R}$, har vi at

$$\begin{aligned} \ln e^{m+n} &= m + n \\ &= \ln e^m + \ln e^n \end{aligned}$$

Vi setter[1] $x = e^m$ og $y = e^n$. Siden $\ln e^{m+n} = \ln(e^m \cdot e^n)$, er da

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Likning (2.13)

Ved å undersøke $\ln a^{m-n}$, og ved å sette $y = a^{-n}$, blir forklaringen tilsvarende den gitt for likning (2.12).

Likning (2.14)

Siden $x = e^{\ln x}$ og[2] $\left(e^{\ln x}\right)^y = e^{y \ln x}$, har vi at

$$\begin{aligned} \ln x^y &= \ln e^{y \ln x} \\ &= y \ln x \end{aligned}$$

---

[1] Vi tar det her for gitt at alle positive tall forskjellig fra 0 kan uttrykkes som et potenstall.

[2] Se potensregler i MB.

2.6 Forklaringer

2.4 Polynomdivisjon (forklaring)

Gitt polynomene

$$P_m, \text{ hvor } ax^m \text{ er leddet med høyest grad}$$

$$Q_n, \text{ hvor } bx^n \text{ er leddet med høyest grad}$$

Da kan vi skrive

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n - \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$$

Vi setter $U = -\frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$, og merker oss at U nødvendigvis har grad lavere eller lik $m-1$. Videre har vi at

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{a}{b}x^{m-n} + \frac{U}{Q_n} \tag{2.15}$$

La oss kalle det første og det andre leddet på høgresiden i (2.15) for henholdsvis et ”potensledd’ og en ”resterende brøk”. Ved å følge prosedyren som ledet oss til (2.15), kan vi også uttrykke $\frac{U}{Q_n}$ ved et ”potensledd” og et ”resterende ledd”. Dete ”potensleddet” vil ha grad mindre eller lik $m-1$, mens telleren i det ”resterende leddet” vil ha grad mindre eller lik $m-2$. Ved å anvende (2.15) kan vi stadig lage nye ”potensledd” og ”resterende ledd” fram til vi har et ”resterende ledd” med grad $n-1$.

2.5 Faktorisering av polynom (forklaring)

$\boldsymbol{P}$ er delelig med $\boldsymbol{x-a \Rightarrow P(a)=0}$.

For et polynom S har vi av (2.5) at

$$\begin{aligned}\frac{P}{x-a} &= S \\ P &= (x-a)S\end{aligned}$$

Da er åpenbart $x = a$ en løsning for likningen $P = 0$.

$\boldsymbol{P}$ er delelig med $\boldsymbol{x-a \Leftarrow P(a)=0}$.

Av (2.5) finnes et polynom S og en konstant R slik at

$$\frac{P}{x-a} = S + \frac{R}{x-a}$$

$$P = (x-a)S + R$$

Siden $P(a) = 0$, er $0 = R$, og da er P delelig med $x - a$.

Oppgaver for kapittel 2

2.1.1

Skriv som fullstendige kvadrat.

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $b^2 + 14b + 49$ c) $a^2 - 2a + 1$

d) $k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{9}$ e) $c^2 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{16}$ f) $y^2 + \frac{6}{7}y + \frac{9}{49}$

2.1.2

Skriv som fullstendige kvadrat.

a) $25a^2 + 90a + 81$ b) $9b^2 + 12a + 4$ c) $64c^2 - 16c + 1$

d) $\frac{1}{4}d^2 + \frac{3}{4}d + \frac{9}{16}$ e) $\frac{1}{25}e^2 + \frac{4}{35}e + \frac{4}{49}$ f) $\frac{81}{64}f^2 - \frac{15}{4}f + \frac{25}{9}$

2.1.3

a) Gitt to heltall a og b. Forklar hvorfor $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$ er et heltall.

b) Skriv om brøken $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$ til en brøk med heltalls nevner.

2.1.4

Skriv om til et uttrykk der x er et ledd i et fullstendig kvadrat.

a) $x^2 + 6x - 7$ b) $x^2 - 8x - 20$ c) $x^2 + 12 - 45$

2.1.5

Hvorfor er det i a_1a_2-metoden lurte å starte med å finne tall som oppfyller kravet $a_1a_2 = c$ (i motsetning til å finne tall som oppfyller kravet $a_1 + a_2 = b$)?

2.1.6

Faktoriser uttrykkene fra Oppgave 2.1.4.

2.1.7

Faktoriser uttrykkene.

a) $x^2-10kx+25k^2$ b) $y^2+8yz+16z^2$ c) $a^2-20aq+100q^2$

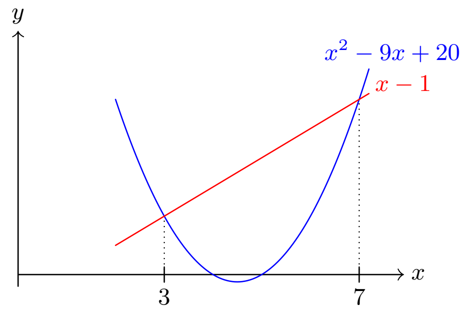
d) $x^2+xy-20y^2$ e) $a^2-9ab+14b^2$ f) $y^2-9k^5y-k^2y+9k^7$

2.1.8
Gitt ulikheten

$$x^2 - 9x + 20 > x - 1$$

a) Bruk figuren under til å løse ulikheten.

b) Løs ulikheten ved hjelp av faktorisering.



2.1.9 (1TH21D1)
Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{2x^2 - 2}{x2 - 2x + 1}$$

2.1.10 (1TV21D1)
Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x-6}{x+3} - \frac{18}{x^2-9}$$

2.1.11 (1TH21D1)
Løs ulikheten.

$$x^2 + 2x - 8 < 0$$

2.1.12
Gitt ulikheten

$$\frac{10}{x+3} - \frac{2}{x+5} > 0$$

a) Forklar hvorfor det er problematisk å gange begge sider av ulikheten med en fellesnevner.

b) Løs ulikheten.

2.2.1

Gitt likningen

$$ax^2 + bx = 0$$

Vis, uten å bruke *abc*-formelen, at

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = -\frac{b}{a}$$

2.2.2

Løs likningene.

a) $2x^2 - 4x = 0$ b) $3x^2 + 27x = 0$

c) $7x^2 + 2x = 0$ d) $8x - 9x^2 = 0$

2.2.3

Løs likningene.

a) $x^2 - 4x - 4 = 0$ b) $x^2 + 2x - 15$ c) $x^2 + 3x - 70 = 0$

d) $x^2 + 5x - 7 = 0$ e) $x^2 - x - 1 = 0$ f) $x^2 - 2x - 9 = 0$

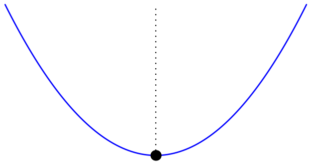
g) $5x^2 + 2x - 7 = 0$ h) $8x^2 - 2x^2 - 9 = 0$ i) $3x^2 - 12x + 1 = 0$

2.2.4 (1TH21D1)

Grafen til en andregradsfunksjon f går gjennom punktene $(0, 12)$, $(-3, 0)$ og $(2, 0)$. Bestem $f(x)$.

2.2.5

Grafen til $f(x) = x^2 + 2x - 8$ er symmetrisk om vertikallinja som går gjennom bunnpunktet. Finn x-verdien til dette punktet.



2.2.6 (1TH21D1)

$$x^2 + 2x - y = -1 \tag{I}$$

$$x + y = -2 \tag{II}$$

Vis at ligningssystemet ikke har løsning

a) grafisk

b) ved regning

2.3.1

Utfør polynomdivisjon på uttrykkene

a) $\frac{x^4-3x^2+5}{x^3+x}$ b) $\frac{-7x^3-9x^2+x}{-4x^2+3}$ c) $\frac{2x^3-6x^2+9x-27}{2x^2+9}$

2.4.1

$P(x) = 0$ for én av $x \in \{-1, 2, 3\}$. Faktoriser P når

a) $P = x^3 - 37x + 84$

b) $P = x^3 + 10x^2 + 17x + 18$

c) $P = 2x^3 + 21x^2 + 61x + 42$

2.5.1

Løs likningen.

a) $7 \cdot 5^x = 14$ b) $3 \cdot 8^x = 27$ c) $10 \cdot 2^x = 19$

2.5.2

Vis at likningen

$$b \cdot a^x = c$$

har løsningen

$$x = \log_a \frac{c}{b}$$

2.5.3

Løs likningen. (Hint; se vedlegg B)

a) $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$ b) $(\log x)^2 - 3\ln x - 70 = 0$

c) $e^{2x} - 2x - 3 = 0$ d) $e^{2x} + 7x - 18 = 0$

2.5.4 (1TH21D1)

Løs ligningene

a) $\lg(2x-6) = 2$

b) $\dfrac{3^{2x} + 3^{2x} + 4}{2} = 29$

Gruble 1

For en trekant med sidelengder a, b og c er arealet A gitt ved **Herons formel**:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$$

Bevis formelen.

Gruble 2

Gitt funksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Vis at grafen til f er symmetrisk om vertikallinja som går gjennom punktet $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.

b) Vis at $-\frac{b}{2a}$ er x-verdien til toppunktet/bunnpunktet til f.

Kapittel 3

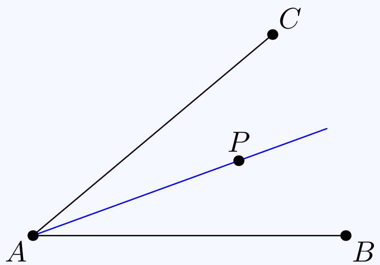
Geometri

3.1 Definisjoner

3.1 Halveringslinje

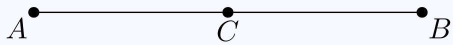
Gitt $\angle BAC$. For et punkt P som ligger på **halveringslinja** til vinkelen (blå linje i figuren), er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC \tag{3.1}$$



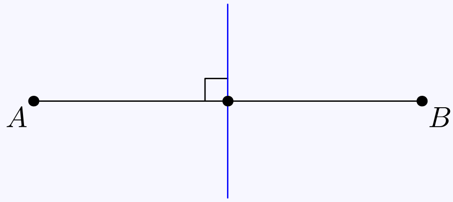
3.2 Midtpunkt

Midtpunktet C til AB er punktet på linjestykket slik at $AC = CB$.



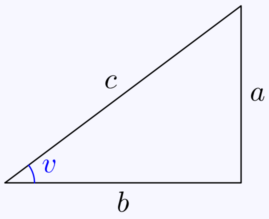
3.3 Midtnormal

Midtnormalen til AB (blå linje i figuren) står normalt på, og går gjennom midtpunktet til, AB.



3.4 sin, cos og tan

Gitt en rettvinklet trekant med katetene a og b, hypotenus c, og vinkel v, som vist i figuren under.



Da er

$$\sin v = \frac{a}{c} \tag{3.2}$$

$$\cos v = \frac{b}{c} \tag{3.3}$$

$$\tan v = \frac{a}{b} \tag{3.4}$$

Språkboksen

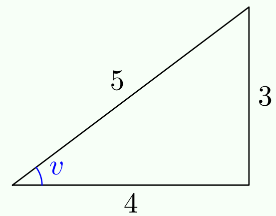
I figuren over blir a kalt den **motstående** kateten til vinkel v, og b den **hosliggende**.

sin, cos og tan er forkortelser for henholdsvis **sinus**, **cosinus** og **tangens**.

Eksaktverdier

De aller fleste sinus-, cosinus- og tangensverdier er irrasjonale tall, i praktiske anvendelser av verdiene er det derfor vanlig å benytte digitale hjelpemidler. Verdiene som er viktigst for teoretiske formål er gitt i vedlegg C.

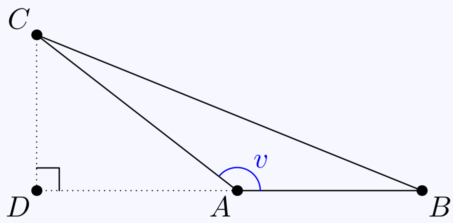
Eksempel



$$\sin v = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos v = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan v = \frac{3}{4}$$

3.5 Sinus, cosinus og tangens I

Gitt $\triangle ABC$, hvor $v = \angle BAC > 90^\circ$, som vist i figuren under.



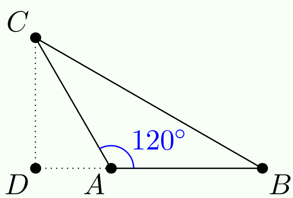
Da er

$$\sin v = \frac{CD}{AC} \tag{3.5}$$

$$\cos v = -\frac{AD}{AC} \tag{3.6}$$

$$\tan v = -\frac{CD}{AD} \tag{3.7}$$

Eksempel



I figuren over er $CD = \sqrt{3}$, $AD = 1$ og $AC = 2$. Da er

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad , \quad \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

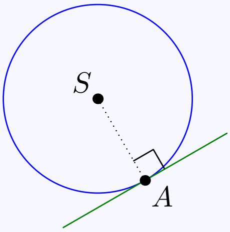
3.2 Egenskaper til sirkler

3.6 Tangent

En linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt, kalles en **tangent** til sirkelen.

La S være sentrum i en sirkel, og la A være skjæringspunktet til denne sirkelen og en linje. Da har vi at

$$\text{linja er en tangent til sirkelen} \iff \overrightarrow{AS} \text{ står vinkelrett på linja}$$



Språkboksen

Når to geometriske former skjærer hverandre i bare ett punkt, sier vi at de ”tangerer hverandre”.

3.7 Sentral- og periferivinkel

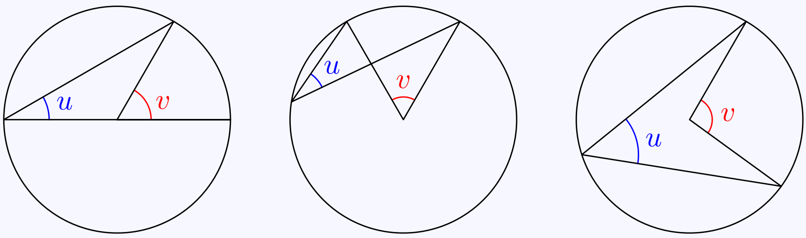
Både periferi- og sentralvinkler har vinkelbein som ligger (delvis) inni en sirkel.

En **sentralvinkel** har toppunkt i sentrum av en sirkel.

En **periferivinkel** har toppunkt på sirkelbuen.

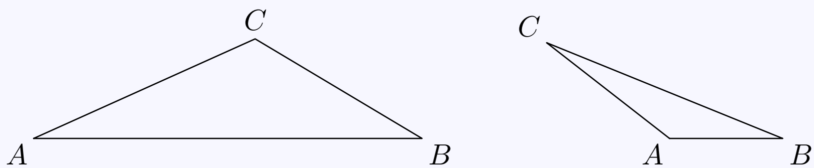
Gitt en periferivinkel u og en sentralvinkel v, som er innskrevet i samme sirkel og som spenner over samme sirkelbue. Da er

$$v = 2u \tag{3.8}$$



3.3 Egenskaper til trekanter

3.8 Arealsetningen

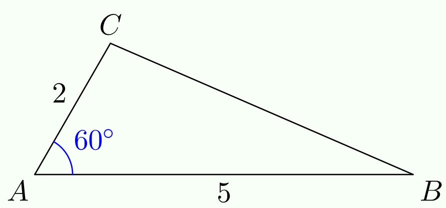


(a) (b)

Arealet T til $\triangle ABC$ er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A \tag{3.9}$$

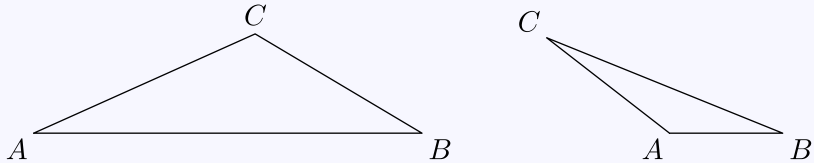
Eksempel



Da $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Arealet T til $\triangle ABC$ er

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

3.9 Sinussetningen

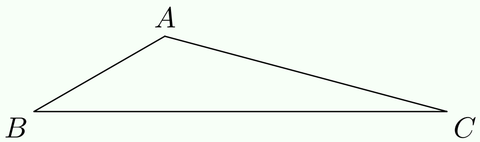


(a) (b)

$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle C}{AB} \tag{3.10}$$

Eksempel

$BC = \sqrt{2}$, $\angle A = 135°$, og $\angle B = 30°$. Finn lengden til AC.



Answer

Vi har at

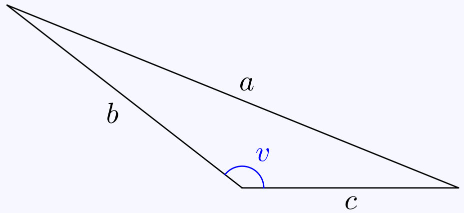
$$AC = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} BC$$

Da $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin 30° = \frac{1}{2}$, har vi at

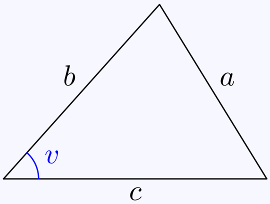
$$AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

3.10 Cosinussetningen

Gitt en trekant med sidelengder a, b og c, og vinkel v, som vist i figurene under.



(a)



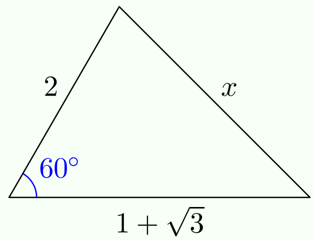
(b)

Da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v \tag{3.11}$$

Eksempel

Finn verdien til x.



Answer

Vi har at

$$x^2 = 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2(1+\sqrt{3})\cos 60°$$

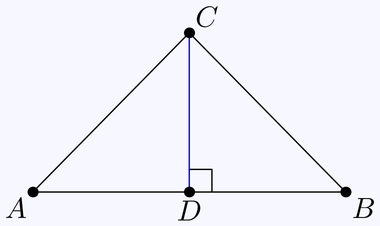
Da $\cos 60 = \frac{1}{2}$, har vi at

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Altså er $x = \sqrt{6}$.

3.11 Midtnormalen i en likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$, hvor $AC = BC$, som vist i figuren under.

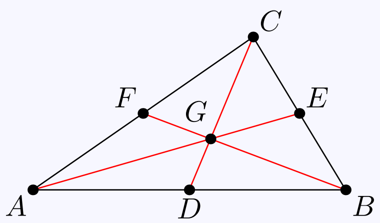


Høgda DC ligger da på midtnormalen til AB.

3.12 Median

En **median** er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.

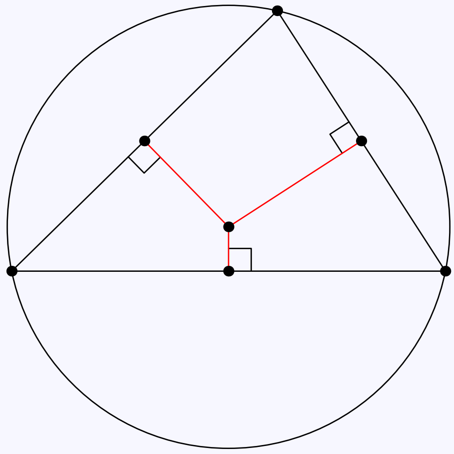


Gitt $\triangle ABC$ med medianer CD, BF og AE, som skjærer hverandre i G. Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

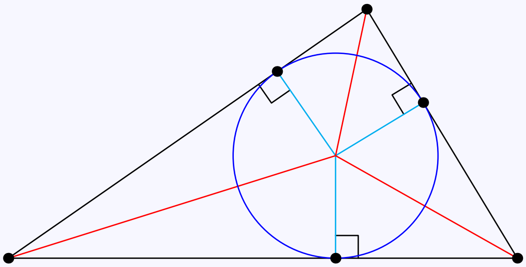
3.13 Midtnormal (i trekant)

Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den **omskrevne sirkelen** til trekanten, som har hjørnene til trekanten på sin bue.



3.14 Innskrevet sirkel

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i trekantens **innskrevne sirkel**, som tangerer hver av sidene til trekanten.



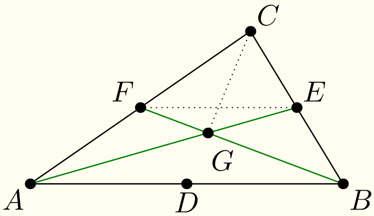
3.4 Forklaringer

3.11 Midtnormalen i en likebeint trekant (forklaring)

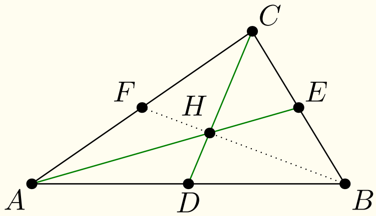
Da både $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ er rettvinklede og har CD som korteste katet, og $AC = BC$, følger det av Pytagoras' setning at $AD = BD$.

3.12 Median (forklaring)

Vi vil her skrive arealet til en trekant $\triangle ABC$ som ABC.



(a)



(b)

Vi lar G være skjæringspunktet til BF og AE, og tar det for gitt at dette ligger inne i $\triangle ABC$. Da $AF = \frac{1}{2}AC$ og $BE = \frac{1}{2}BC$, er $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$. Dermed har F og E lik avstand til AB, som betyr at $FE \parallel AB$. Videre har vi også at

$$\begin{aligned} ABG + AFG &= ABG + BGE \\ AFG &= BGE \end{aligned}$$

G har lik avstand til AF og FC, og $AF = FC$. Dermed er $AFG = GFC$. Tilsvarende er $BGE = GEC$. Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$\begin{aligned} AFG + GFC + GEC &= AEC \\ GEC &= \frac{1}{6}ABC \end{aligned}$$

La H være skjæringspunktet til AE og CD. Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både $\triangle GEC$ og $\triangle HEC$ har CE som side, likt areal, og både G og H ligger på AE, må $G = H$. Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

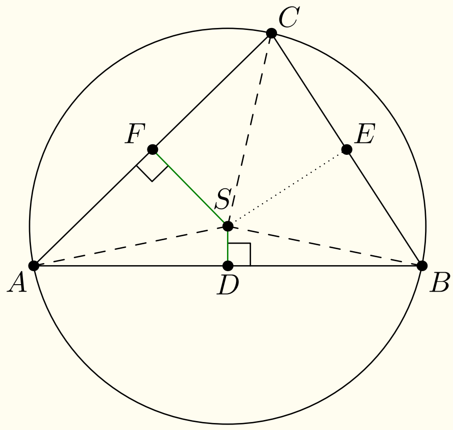
$\triangle ABG \sim \triangle EFG$ fordi $\angle EGF$ og $\angle AGB$ er toppvinkler og $AB \parallel FE$. Dermed er

$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

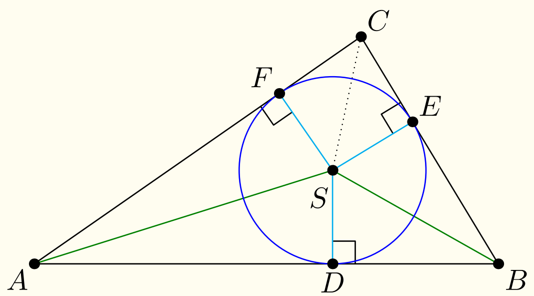
3.13 Midtnormal (i trekant) (forklaring)



Gitt $\triangle ABC$ med midtpunktene D, E og F. Vi lar S være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til AC og AB. $\triangle AFS \sim \triangle CFS$ fordi begge er rettvinklede, begge har FS som korteste katet, og $AF = FC$. Tilsvarende er $\triangle ADS \sim \triangle BDS$. Følgelig er $CS = AS = BS$. Dette betyr at

- $\triangle BSC$ er likebeint, og da går midtnormalen til BC gjennom S.
- A, B og C må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum S og radius $AS = BS = CS$

3.14 Innskrevet sirkel (forklaring)

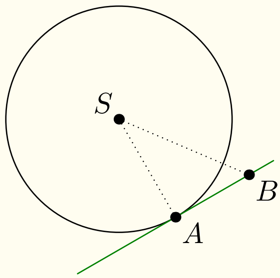


Gitt $\triangle ABC$. Vi lar S være skjæringspunktet til de respective halveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle CBA$. Videre plasserer vi D, E og F slik at $DS \perp AB$, $ES \perp BC$ og $FS \perp AC$. $\triangle ASD \cong \triangle ASF$ fordi begge er rettvinklede og har hypotenus AS, og $\angle DAS = \angle SAF$. Tilsvarende er $\triangle BSD \cong \triangle BSE$. Dermed er $SE = SD = SF$. Følgelig er F, C og E de respektive tangeringspunktene til AB, BC og AC og sirkelen med sentrum S og radius SE.

Videre har vi at $\triangle CSE \cong \triangle CSF$, fordi begge er rettvinklede og har hypotenus CS, og $SF = SE$. Altså er $\angle FCS = \angle ECS$, som betyr at CS ligger på halveringslinja til $\angle ACB$.

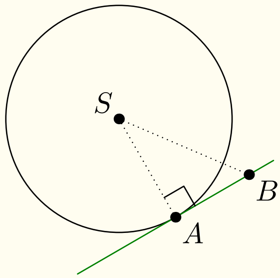
3.6 Tangent (forklaring)

Linja er en tangent til sirkelen $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Vi antar at vinkelen mellom linja og $\overrightarrow{AS}$ er ulik $90°$. Da må det finnes et punkt B på linja slik at $\angle BAS = \angle SBA$, som betyr at $\triangle ASB$ er likebeint. Følgelig er $AS = BS$, og da AS er lik radien i sirkelen, må dette bety at B også ligger på sirkelen. Dette motsier det faktum at A er det eneste skjæringspunktet til sirkelen og linja, og dermed må vinkelen mellom linja og $\overrightarrow{AS}$ være $90°$.

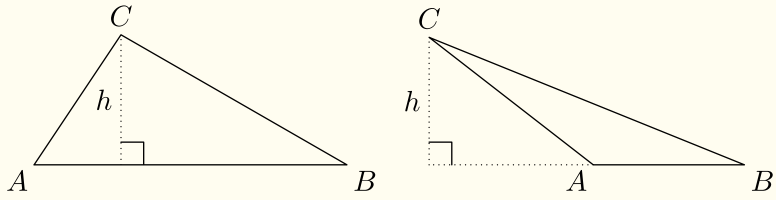
Linja er en tangent til sirkelen $\Longleftarrow$ $\overrightarrow{AS}$ står vinkelrett på linja



Gitt et vilkårlig punkt B, som ikke samsvarer med A, på linja. Da er BS hypotenusen i $\triangle ABC$. Dette innebærer at BS er større enn radien til sirkelen ($BS > AS$), og da kan B umulig ligge på sirkelen. Altså er A det eneste punktet som ligger på både linja og sirkelen, og dermed er linja en tangent til sirkelen.

3.8 Arealsetningen (forklaring)

Gitt to tilfeller av $\triangle ABC$, som vist i figuren under. Det éne hvor $\angle BAC \in (0°, 90°]$, det andre hvor $\angle BAC \in (90°, 0°)$ og la h være høyden med grunnlinje AB.



(a) (b)

Arealet T til $\triangle ABC$ er i begge tilfeller

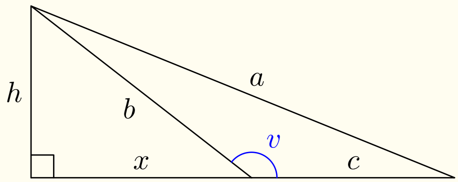
$$T = \frac{1}{2} AB \cdot h \tag{3.12}$$

Av henholdsvis (3.2) og (3.5) har vi at $h = AC \cdot \sin \angle BAC$, og da er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

3.10 Cosinussetningen (forklaring)

Tilfellet hvor $v \in (90°, 180°]$



Av Pytagoras' setning har vi at

$$x^2 = b^2 - h^2 \tag{3.13}$$

og at

$$a^2 = (x+c)^2 + h^2 \tag{3.14}$$

$$a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + h^2 \tag{3.15}$$

Ved å sette uttrykket for x^2 fra (3.13) inn i (3.15), får vi at

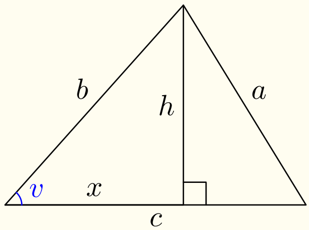
$$a^2 = b^2 - h^2 + 2xc + c^2 + h^2 \tag{3.16}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc \tag{3.17}$$

Av (3.6) har vi at $x = -b\cos v$, og da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos v$$

Tilfellet hvor $v \in [0°, 90°]$



Dette tilfellet skiller seg ut fra tilfellet hvor $v \in (90°, 180°]$ på to måter:

(i) I (3.14) får vi $(c-x)^2$ i steden for $(x+c)^2$. I (3.17) får vi da $-2xc$ i steden for $+2xc$.

(ii) Av (3.3) er $x = b\cos v$. Av punkt (i) følger det da at

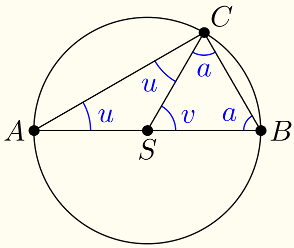
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos v$$

3.7 Sentral- og periferivinkel (forklaring)

Tilhørende periferi- og sentralvinkler kan deles inn i tre tilfeller.

(i) En diameter i sirkelen er høyre eller venstre vinkelbein i begge vinklene

I figuren under er S sentrum i sirkelen, $\angle BAC = u$ en periferivinkel og $\angle BSC = v$ den tilhørende sentralvinkelen. Vi setter $\angle SCB = a$. $\angle ACS = \angle SAC = u$ og $\angle CBS = \angle SCB = a$ fordi både $\triangle ASC$ og $\triangle SBC$ er likebeinte.



Vi har at

$$2a = 180° - v \tag{3.18}$$

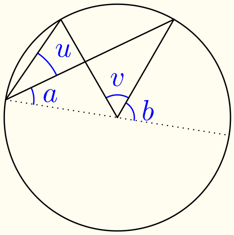
$$2u + 2a = 180° \tag{3.19}$$

Vi setter uttrykket for $2a$ fra (3.18) inn i (3.19):

$$2u + 180° - v = 180°$$
$$2u = v$$

(ii) Vinklene ligger innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I tillegg har vi tegnet inn en diameter, som er med på å danne vinklene a og b. Både u og v ligger i sin helhet på samme side av denne diameteren.



Ettersom $u + a$ er en periferivinkel, og $v + b$ den tilhørende sentralvinkelen, vet vi av tilfelle 1 at

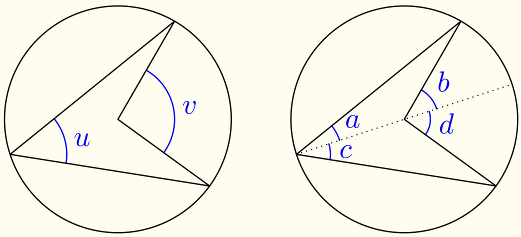
$$2(u + a) = v + b$$

Men ettersom a og b også er samhørende periferi- og sentralvinkler, er $2a = b$. Det betyr at

$$2u + b = v + b$$
$$2u = v$$

(iii) Vinklene ligger ikke innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er u en periferivinkel og v den tilhørende sentralvinkelen. I figuren til høyre har vi tegnet inn en diameter. Den deler u inn i vinklene a og c, og v inn i b og d.



a og c er begge periferivinkler, med henholdsvis b og d som tilhørende sentralvinkler. Av tilfelle i) har vi da at

$$2a = b$$

$$2c = d$$

Dermed er

$$2a + 2c = b + d$$
$$2(a + c) = v$$
$$2u = v$$

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

Gitt $v \in [0°, 90°]$.

a) Vis at $\sin v = \sin(180° - v)$.

b) Vis at $\cos v = -\cos(180° - v)$

3.1.2

Finn arealet til $\triangle ABC$ når

a) $\angle A = 60°$, $AB = 5$ og $AC = 7$.

b) $\angle B = 18°$, $AB = 4$ og $BC = 3$. $\left(\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

c) $\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$, $AC = \sqrt{6}$ og $BC = \sqrt{3} + 1$

3.1.3

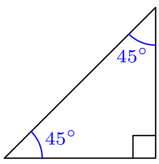
a) Bevis arealsetningen. b) Bevis sinussetningen.

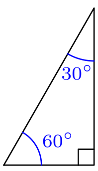
3.1.4

a) Vis at $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Vis at $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

c) Vis at $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

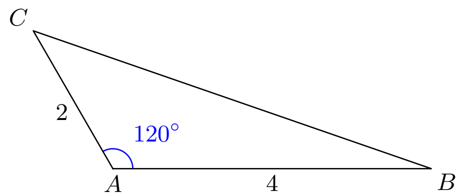




3.1.5

Vis at $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$.

3.2.1 (1TH21D1)



Gitt trekanten over. Bestem lengden til siden BC.

3.2.2

Gitt en trekant med sidelengder a, b og c og innskrevet sirkel med radius r. Forklar hvorfor arealet til trekanten er gitt som

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

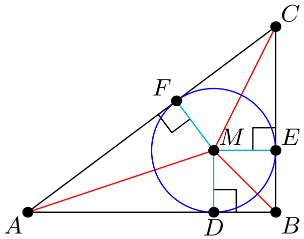
3.2.3

La $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ og $DM = r$.

a) Vis at $r = \frac{ac}{a+b+c}$.

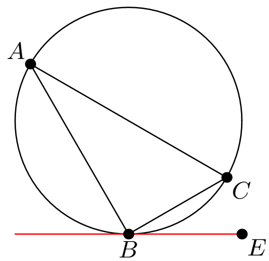
b) Vis at $2r = a + c - b$.

c) Bruk uttrykkene fra oppgave (a) og (b) til å finne b^2 uttrykt ved a og c. Hva kalles denne formelen?



3.2.4

Den røde linja tangerer sirkelen. Vis at $\angle BAC = \angle EBC$.



Gruble 3

Sorter verdiene i stigende rekkjeføle.

$$\sin 60^\circ \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \qquad \sin 160^\circ \qquad \lg 1$$

Gruble 4

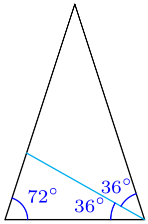
(1TH21D1) En trekant har omkrets 12, og den éne siden i trekanten har lengde 2. Bestem arealet til trekanten.

Gruble 5

Bevis cosinussetningen.

Gruble 6

Vis at $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. (Hint: Se figur.)



Gruble 7

Vis at

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

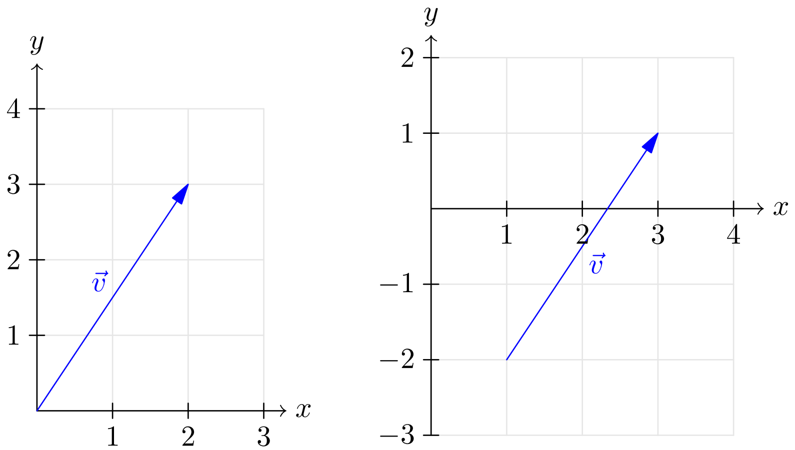
Det er tilstrekkelig å undersøke tilfellet hvor v,$u \in [0^\circ, 90^\circ]$.

Kapittel 4

Vektorer

4.1 Introduksjon

En **todimensjonal vektor** angir en forflytning i et koordinatsystem med en x-akse og en y-akse. En vektor tegner vi som et linjestykke mellom to punkt, i tillegg til at vi lar en pil vise til hva som er endepunktet. Det betyr at forflytningen starter i punktet uten pil, og ender i punktet med pil.



(a) *(b)*

I figur *(a)* er vektoren $\vec{v}$ vist med startpunkt $(0,0)$ og endepunkt (3,1). Når en vektor har startpunkt $(0,0)$, sier vi at den er vist i **grunnstillingen**. I figur *(b)* er $\vec{v}$ vist med startpunkt $(1,-2)$ og endepunkt $(3,1)$. Forflytningen $\vec{v}$ viser til er å vandre 2 mot høgre langs x-aksen og 3 opp langs y-aksen. Dette skriver vi som $\vec{u} = [2,3]$, som kalles $\vec{u}$ skrevet på **komponentform**. 2 og 3 er henholdvis x-komponenten og y-komponenten til $\vec{v}$.

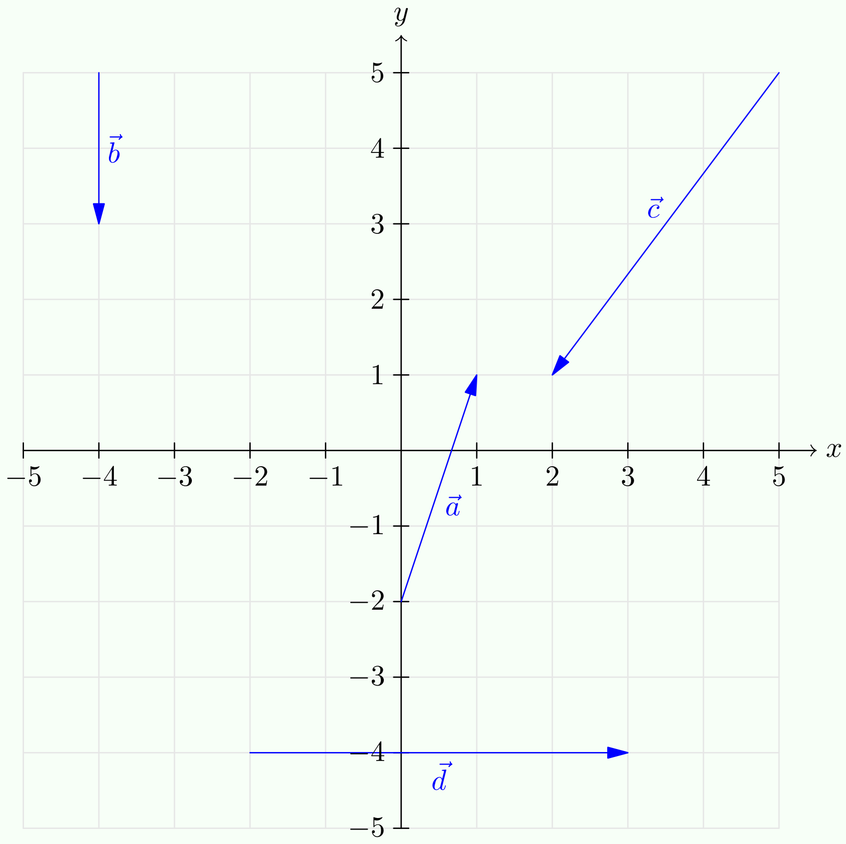
Språkboksen

En todimensjonal vektor kalles også en **vektor i planet**.

Eksempel 1

$$\vec{a} = [1, 3] \qquad \vec{b} = [0, -2]$$

$$\vec{c} = [-3, -4] \qquad \vec{d} = [5, 0]$$



4.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor $\vec{v}$ med startpunkt (x_1, y_1) og endepunkt (x_2, y_2) er gitt som

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] \tag{4.1}$$

Eksempel 1

Skriv vektorene på komponentform.

- $\vec{a}$ har startpunkt $(1, 3)$ og endepunkt $(7, 5)$
- $\vec{b}$ har startpunkt $(0, 9)$ og endepunkt $(-3, 2)$
- $\vec{c}$ har startpunkt $(-3, 7)$ og endepunkt $(2, -4)$
- $\vec{d}$ har startpunkt $(-7, -5)$ og endepunkt $(3, 0)$

Answer

$$\vec{a} = [7 - 1, 5 - 3] = [6, 2]$$

$$\vec{b} = [-3 - 0, 2 - 9] = [-3, -7]$$

$$\vec{c} = [2 - (-3), -4 - 7] = [5, -11]$$

$$\vec{d} = [3 - (-7), 0 - (-5)] = [10, 5]$$

Punkt eller vektor

Rent matematisk er det ingen forskjell på et punkt og en vektor; punktet (a, b) viser til akkurat samme plassering som vektoren $[a, b]$, og begge kan vise til den samme forflytningen. Ofte kan det likevel være greit å skille mellom når vi snakker om en plassering og når vi snakker om en forlytning, og til det bruker vi begrepene punkt (plassering) og vektorer (forflytning).

4.2 Regneregler for vektorer

4.2 Addisjon og subtraksjon av vektorer

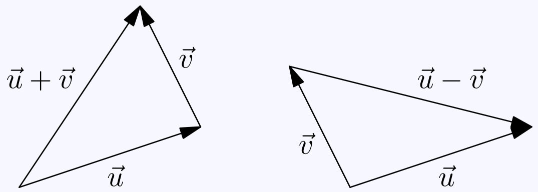
Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, punktet $A = (x_0, y_0)$. Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1) \tag{4.2}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \tag{4.3}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \tag{4.4}$$

Summen eller differansen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan vi tegne slik:



(a) (b)

4.3 Regneregler for vektorer

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$, og et tall t, har vi at

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \tag{4.5}$$

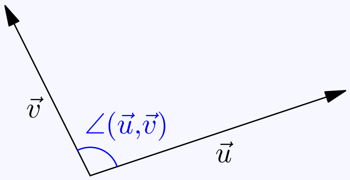
$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \tag{4.6}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{4.7}$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \tag{4.8}$$

4.4 Vinkelen mellom to vektorer

Vinkelen mellom to vektorer er (den minste) vinkelen som blir dannet når vektorene plasseres i samme startpunkt. For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skriver vi denne vinkelen som $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

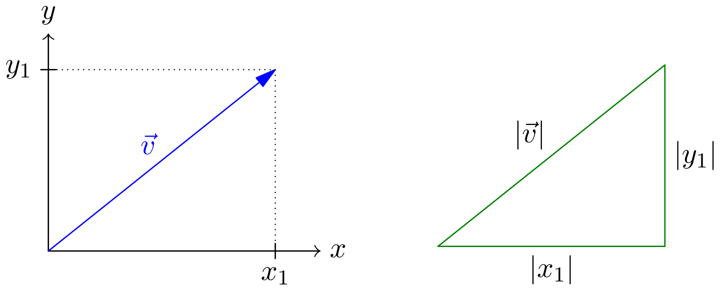


Vinkelmål

I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkler i grader, altså på intervallet $[0°, 180°]$.

4.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. **Lengden** til $\vec{v}$ er avstanden mellom startpunktet og endepunktet.



(a) (b)

Av enhver vektor kan vi danne en rettvinklet trekant hvor $|\vec{v}|$ er lengden til hypotenusen, og $|x_1|$ og $|y_1|$ er de respektive lengdene til katetene. Dermed er $|\vec{v}|$ gitt av Pytagoras' setning.

4.5 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. Lengden $|\vec{v}|$ er da

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{4.9}$$

Eksempel 1

Finn lengden til vektorene $\vec{a} = [7, 4]$ og $\vec{b} = [-3, 2]$.

Answer

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

4.4 Skalarproduktet I

4.6 Skalarproduktet I

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, er **skalarproduktet** gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{4.10}$$

Språkboksen

Skalarproduktet kalles også **prikkproduktet** eller **indreproduktet**.

Ordet *skalar* viser til en éndimensjonal størrelse.

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{a} = [3, 2]$, $\vec{b} = [4,7]$ og $\vec{c} = [1, -9]$. Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

Answer

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + 2(-9) = -15$$

4.7 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \tag{4.11}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \tag{4.12}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \tag{4.13}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \tag{4.14}$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2$$

når du vet at $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Answer

$$\begin{aligned}
\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2 &= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\
&= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\
&= \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2
\end{aligned}$$

4.5 Skalarproduktet II

Gitt vektoren $\vec{u} - \vec{v}$, hvor $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Da er

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

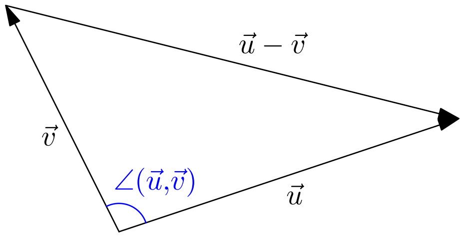
Av (4.9) har vi at

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ved hjelp av (4.10) og (4.11) kan vi skrive (4.15) som

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\vec{u}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}} \tag{4.16}$$

Videre merker vi oss følgende figur:



Av cosinussetningen og (4.16) er

$$\begin{aligned} |(\vec{v} - \vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{v}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}^{\,2} &= \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

4.8 Skalarproduktet II

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \tag{4.17}$$

4.6 Vektorer vinkelrett på hverandre

Fra (4.17) kan vi gjøre en viktig observasjon; hvis $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 90°$, er $\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0$, og da blir

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

4.9 Vinkelrette vektorer

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har vi at

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v} \tag{4.18}$$

Språkboksen

Det er mange måter å uttrykke at $\vec{u}\perp\vec{v}$ på. Blant annet kan vi si at

- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett på hverandre.
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står normalt på hverandre.
- $\vec{u}$ er en normalvektor til $\vec{v}$ (og omvendt).
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale.

Eksempel 1

Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5,-3]$, $\vec{b} = [6,-10]$ og $\vec{c} = [2,7]$ er ortogonale.

Answer

Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 5\cdot 6 + (-3)10\\ &= 0\end{aligned}$$

Altså er $\vec{a}\perp\vec{b}$. Videre er

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{c} &= 5\cdot 2 + (-3)7\cdot\\ &= 11\end{aligned}$$

Altså er $\vec{a}$ og $\vec{c}$ *ikke* ortogonale. Da $\vec{a}\perp\vec{b}$, kan heller ikke $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være ortogonale.

Nullvektoren

I forkant av regel 4.9 har vi bare argumentert for at $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. For å rettferdiggjøre vilkåret som går begge veier i (4.18), må vi spørre: Kan vi få $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ om vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ *ikke* er $90°$?

På intervallet $[0°, 180°]$ er det bare vinkelverdien $90°$ som resulterer i cosinusverdi 0. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av $\vec{u}$ eller $\vec{v}$ være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er **nullvektoren** $\vec{0} = [0, 0]$, som rett og slett ikke har noen retning[1]. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

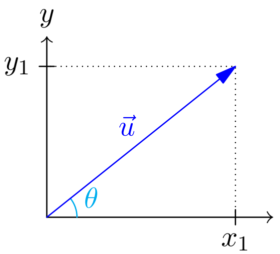
---

[1] Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger!

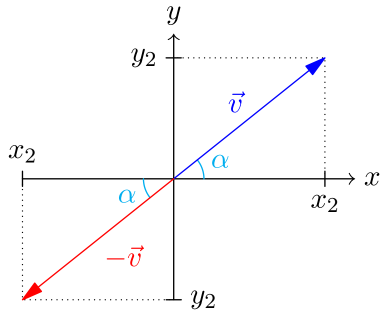
4.7 Parallelle vektorer

4.10 Parallelle vektorer

Hvis vinkelen mellom to vektorer er 0° eller 180°, er de parallelle.



(a)



(b)

Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. La θ og α være vinkelen mellom x-aksen og henholdsvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$, med x-aksen som høgre vinkelbein. Da er $\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$ og $\tan\alpha = \frac{y_2}{x_2}$. Hvis $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, er det to muligheter:

(i) $\theta = 0°$ og $\alpha = 180°$, eller omvendt.

(ii) $\theta = \alpha$

I begge tilfeller er $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ enten 0° eller 180°, og da er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle. Det omvendte gjelder også: Hvis punkt (i) eller (ii) gjelder, er $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Det er ofte praktisk å omskrive denne sammehengen til forholdet mellom samsvarende komponenter[1]:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \tag{4.19}$$

Det er også nyttig å merke seg at det må finnes to tall s og t slik at $\vec{u} = [tx_2, sy_2]$. Hvis $\vec{u} \parallel \vec{v}$, følger det av (4.19) at $\frac{sx_2}{x_2} = \frac{ty_2}{y_2}$. Dermed er $s = t$. Omvendt; hvis $\vec{u} = t[x_2, y_2]$, oppfyller $\vec{u}$ og $\vec{v}$ åpenbart (4.19).

[1]For vektorene $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$ er disse samsvarende komponenter:

- x_1 og x_2
- y_1 og y_2

4.11 Parallelle vektorer

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{4.20}$$

Alternativt, for et tall t har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{4.21}$$

Språkboksen

Når $\vec{u} = t\vec{v}$, sier vi at $\vec{u}$ er et **multiplum** av $\vec{v}$ (og omvendt). Vi sier også at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er **lineært avhengige**.

Om to vektorer ikke er parallelle, sier vi at de er **lineært uavhengige**.

Eksempel

Undersøk hvorvidt $\vec{a} = [2, -3]$ og $\vec{b} = [20, -45]$ er parallelle med $\vec{c} = [10, -15]$.

Answer

Vi har at

$$\vec{c} = 5[2, -4] = 5\vec{a}$$

Dermed er $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Da $\frac{20}{10} \neq \frac{-45}{15}$, er $\vec{b}$ og $\vec{c}$ *ikke* parallelle.

4.8 Vektorfunksjoner

4.8.1 Parameterisering

4.12

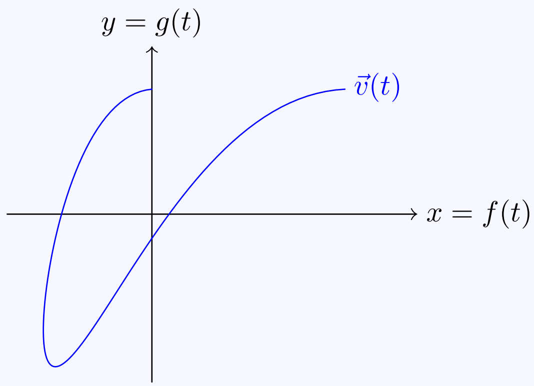
Gitt to funksjoner $f(t)$ og $g(t)$. En vektor $\vec{v}$ på formen

$$\vec{v}(t) = [f(t), g(t)]$$

er da en **vektorfunksjon**.

$\vec{v}$ kan skrives på **parameterisert form** som

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{4.22}$$

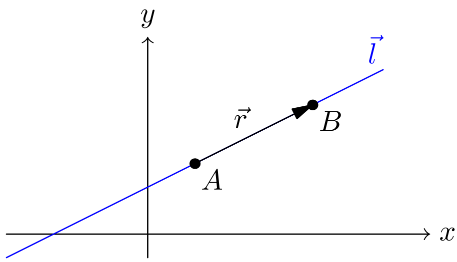


Merk

Til forskjell fra grafen til en skalarfunksjon, kan grafen til en vektorfunksjon "begevege seg fritt" i koordinatsystemet.

4.8.2 Vektorfunksjonen til en linje

Gitt en linje $\vec{l}(t)$, som vist i figuren under



Hvis en vektor $\vec{r}$ er parallell med $\vec{l}$, kalles den en **retningsvektor** for linja. Si at $\vec{r} = [a, b]$ er en retningsvektor for $\vec{l}$, og at $A = (x_0, y_0)$ er et punkt på $\vec{l}$. Om vi starter i A og vandrer parallellt med $\vec{r}$, kan vi være sikre på at vi fortsatt befinner oss på linja. Dette må bety at vi for en variabel t kan nå et vilkårlig punkt $B = (x, y)$ på linja ved følgende utregning:

$$B = A + t\vec{r}$$

På koordinatform kan vi skrive dette som[1]

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Altså kan linja skrives som en vektorfunksjon:

4.13 Linje som vektorfunksjon

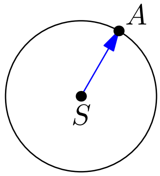
En linje $\vec{l}(t)$ som går gjennom punktet $A = (x_0, y_0,)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [a, b]$ er gitt som

$$\vec{l} = [x_0 + at, y_0 + bt]$$

[1] Se (4.2).

4.9 Sirkellikningen

Gitt en sirkel med sentrum $S = (x_0, y_0)$ og et punkt $A = (x, y)$, som ligger på buen til sirkelen.



Da er

$$\overrightarrow{SA} = [x - x_0, y - y_0]$$

Av (4.9) er da

$$\left|\overrightarrow{SA}\right|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Hvis vi lar r være radien til sirkelen, er $\left|\overrightarrow{SA}\right| = r$, og dermed kan vi uttrykke r ved koordinatene til S og A.

4.14 Sirkelligningen

Gitt en sirkel radius r og sentrum $S = (x_0, y_0)$. Hvis punktet $A = (x, y)$ ligger på buen til sirkelen, er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Eksempel

Finn sentrum og radien til sirkelen gitt av likningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0 \tag{4.23}$$

Answer

Vi starter med å lage fullstendige kvadrat:

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 2^2$$

$$y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 5^2$$

Altså kan vi skrive (4.23) som

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 - 2^2 - 5^2 - 20 = 0$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 7^2$$

Dermed har sirkelen sentrum $(2, -5)$ og radius 7.

4.10 Determinanter

4.15 2 × 2 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v})$ av to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [b, c]$ er gitt som

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{4.24}$$

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-1, 3]$ og $\vec{v} = [-2, 4]$. Regn ut $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

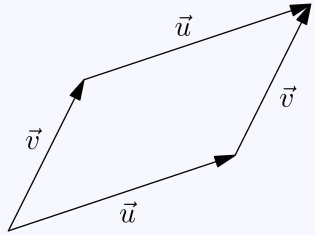
Answer

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

4.16 Arealformler med determinanter

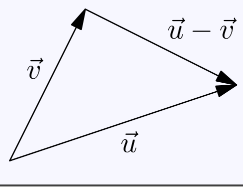
Arealet A til et parallellogram formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{4.25}$$



Arealet A til en trekant formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

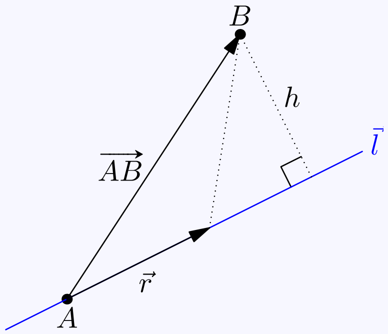
$$A = \frac{1}{2}|\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{4.26}$$



4.17 Avstand mellom punkt og linje

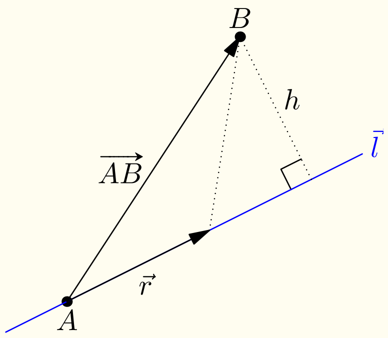
Avstanden h mellom et punkt B og en linje gitt av punktet A og retningsvektoren $\vec{r}$ er gitt som

$$h = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|}{|\vec{r}|} \tag{4.27}$$



4.17 Avstand mellom punkt og linje (forklaring)

La en linje $\vec{l}(t)$ i rommet være gitt av et punkt A og en retningsvektor $\vec{r}$. I tillegg ligger et punkt B utenfor linja, som vist i figuren under



Den korteste avstanden fra B til linja er høyden h i trekanten utspent av $\vec{r}$ og $\overrightarrow{AB}$. Arealet til denne trekanten er gitt ved (4.26):

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|$$

Av den klassiske arealformelen for en trekant (se MB) har vi nå at

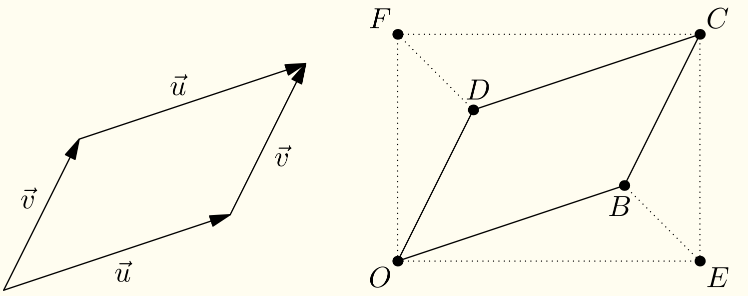
$$\frac{1}{2}|\vec{r}|h = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|$$

$$h = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|}{|\vec{r}|}$$

Forklaringer

4.16 Arealformler med determinanter (forklaring)

Vi lar A_N betegne arealet til en geometrisk form N.



(a) *(b)*

Gitt to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$, hvor $a, b, c, d > 0$, som vist i figur *(a)*. Plasserer vi vektorene i grunnstillingen er punktene vist i figur *(b)* gitt som

$$O = (0, 0) \qquad B = (a, b) \qquad C = (a + b, c + d)$$
$$D = (c, d) \qquad E = (a + c, 0) \qquad F = (0, b + d)$$

Med OE som grunnlinje har $\triangle OEB$ høgde b, altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$ og $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OBE} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

I figurene har vi antatt at (den minste) vinkelen mellom $\vec{v}$ og x-aksen er mindre enn vinkelen mellom $\vec{u}$ og x-aksen. I omvendt tilfelle ville vi fått at

$$A_{\square OECF} = bc - ad$$

Altså er

$$A_{\square OECF} = |ac - bd|$$

På lignende måte kan det vises at (4.25) gjelder for alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se oppgave 4.1.8.

Merk: (4.25) kan også vises veldig kortfattet ved å anvende trigonometri. Se oppgave ?? i TM2 for dette.

Oppgaver for kapittel 4

4.1.1

Gitt $\vec{v} = [ca, cb]$. Vis at

$$|\vec{v}| = c\sqrt{a^2 + b^2}$$

4.1.2

a) Gitt en vektor $\vec{v}$. Vis at lengden til vektoren $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ er lik 1.

b) Bestem uttrykket for vektoren som er parallell med vektoren $[3, 4]$, og som har lengde 10.

4.1.3

Bestem lengden til hver av vektorene.

$$\vec{a} = [3, 4]\vec{b} = [-1, 7]\vec{c} = [-8, 6]\vec{d} = [4, -3]$$

4.1.4

Undersøk om noen av vektorene fra oppgave 4.1.3 står vinkelrett på hverandre.

4.1.5

Undersøk om noen av vektorene fra oppgave 4.1.3 er parallelle.

4.1.6 (R1V22D1)

For vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}| = 2$, $\vec{b} = 3$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

Vi lar $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{a} - 6\vec{b}$.

a) Bestem lengden til $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

b) Bestem vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

4.1.7

Gitt $\vec{u} = [a,b]$ og $\vec{v} = [c, d]$ Vis at hvis $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$, gir (4.17) at

$$ad - bc = 0$$

4.1.8

Gitt to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$. Vis at (4.25) gjelder når

a) $a, b, d > 0$ og $c < 0$

b) $b, d > 0$ og $a, c < 0$

c) $b > 0$ og $a, c, d < 0$

d) $a, b, c, d < 0$

e) $a > 0,\ b, c, d < 0$

f) $a, c > 0$ og $b, d < 0$

g) $d > 0$ og $a, b, c < 0$

4.1.9

Gitt to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Forklar hvorfor

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = |u||v| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Kapittel 5

Grenseverdier og kontinuitet

5.1 Grenseverdier

Si at vi starter med verdien 0.9, og deretter stadig legger til 9 som bakerste siffer. Da får vi verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre. Ved å legge til 9 som bakerste siffer på denne måten, *kan vi komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – verdien 1*. Det å ”komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – en verdi” vil vi heretter kalle å ”gå mot en verdi”. Metoden vi akkurat beskrev kan vi se på som en metode for å *gå mot* 1. Vi kan da si at **grenseverdien** til denne metoden er 1. For å indikere en grenseverdi skriver vi $\lim$.

Det er viktig å tenke over at vi kan gå mot et tall fra to sider; fra venstre eller fra høgre på tallinjen. Med en metode som gir oss verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre, nærmer vi oss 1 fra venstre. Lager vi oss en metode som gir verdiene 1.1, 1.01, 1.001 og så videre, nærmer vi oss 1 fra høgre. Dette vises ved å markere $+$ eller $-$ over tallet vi går mot.

5.1 Grenseverdier

$$x \to a^+ = x \text{ går mot } a \text{ fra høgre}$$

$$x \to a^- = x \text{ går mot } a \text{ fra venstre}$$

$$x \to a = x \text{ går mot } a \text{ (fra både høgre og venstre)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \text{grenseverdien til } f \text{ når } x \text{ går mot } a \\ &= \text{verdien } f \text{ går mot når } x \text{ går mot } a\end{aligned}$$

Språkboksen

Å gå mot en verdi fra høgre/venstre kalles også å gå mot en verdi ovenfra/nedenfra.

Merk

$x \to a$ omfatter de to tilfellene $x \to a^+$ og $x \to a^-$. Ofte vil disse være så like at vi kan behandle $x \to a$ som ett tilfelle.

En utvidelse av $=$

Det litt paradoksale med grenserverdier hvor x går mot a, er at vi ofte ender opp med å erstatte x med a, selv om vi per definisjon har at $x \neq a$. For eksempel er

$$\lim_{x \to 2}(x+1) = 2+1 = 3 \tag{5.1}$$

Det er verd å filosofere litt over likhetene i (5.1). Når x går mot 2, vil x aldri bli eksakt lik 2. Dette betyr at $x+1$ aldri kan bli *eksakt lik* 3. Men *jo nærmere* x er lik 2, *jo nærmere* er $x+1$ lik 3. Med andre ord går $x+1$ mot 3 når x går mot 2. Likheten i (5.1) viser altså ikke til et uttrykk som er *eksakt lik* en verdi, men et uttrykk som *går eksakt mot* en verdi. Dette gjør altså at grenseverdier bringer en noe utvidet forståelse av $=$.

Eksempel 1

Gitt $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$. Finn $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Answer

Når $x \neq 1$, har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \\ &= x+3 \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} x+3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

5.2 Kontinuitet

5.2 Kontinuitet

Gitt en funksjon $f(x)$ og et tall c. Hvis $f(c)$ eksisterer, er f **kontinuerlig** for $x = c$ hvis

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \tag{5.2}$$

Hvis (5.2) er ugyldig, er f **diskontinuerlig** for $x = c$.

Eksempel 1

Undersøk om funksjonene er kontinuerlige for $x = 2$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & , \quad x < 2 \\ -3x+12 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \tag{5.3}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \leq 2 \\ -x+6 & , \quad x > 2 \end{cases} \tag{5.4}$$

Answer

a) Vi har at

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = -3\cdot 2 + 12 = 6$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 + 4 = 6$$

Altså er f kontinuerlig for $x = 2$.

b) Vi har at

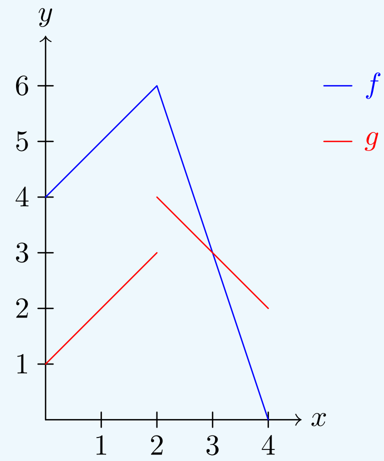
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = g(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = -2 + 6 = 4$$

Altså er g *ikke* kontinuerlig for $x = 2$.

Visualisering av kontinuitet

Visuelt kan vi skille mellom kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner slik; kontinuerlige funksjoner har sammenhengende grafer, diskontinuerlige funksjoner har det ikke. Et utsnitt av grafene til funksjonene fra *Eksempel 1* på side 88 ser slik ut:



Grafer fungerer utmerket til å avgjøre hvilke funskjoner vi *forventer* å være kontinuerlige eller ikke, men er aldri gyldige som et bevis for dette.

Kapittel 6

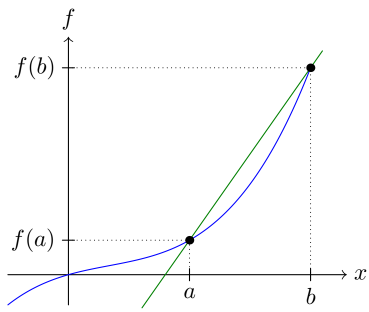
Derivasjon

6.1 Definisjoner

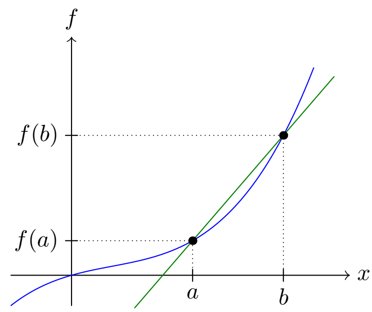
Gitt en funksjon $f(x)$ og to x-verdier a og b. Endringen til f relativ til endringen til x for disse verdiene er gitt som

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{6.1}$$

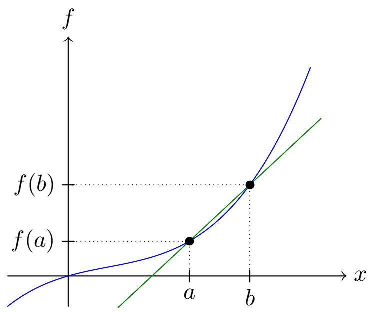
I MB har vi sett at uttrykket over gir stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. I en matematisk sammenheng er det ekstra interessant å undersøke (6.1) når b nærmer seg a.



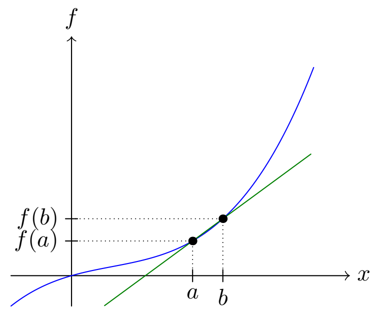
(a)



(b)



(c)



(d)

Ved å innføre tallet h, og å sette $b = a + h$, kan vi skrive (6.1) som

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Å **derivere** innebærer å undersøke grenseverdien til denne brøken når h går mot 0.

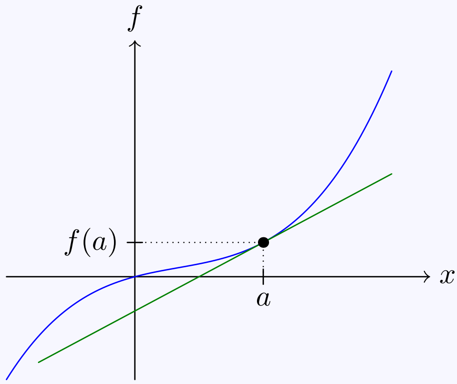
> **Merk**
>
> I teksten og figurene over har vi tatt utgangspunkt i at $b > a$, men dette er ikke en forutsetning for at uttrykkene er gyldige.

6.1 Den deriverte

Gitt en funksjon $f(x)$. Den **deriverte** av f i $x = a$ er da gitt som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{6.2}$$

Linja som har stigningstall $f'(a)$, og som går gjennom punktet $(a, f(a))$, kalles **tangeringslinja** til f for $x = a$.



Eksempel 1

Gitt $f(x) = x^2$. Finn $f'(2)$.

Answer

Vi har at

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2^2 + 4h + (h)^2 - 2^2}{h} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Eksempel 2

Gitt $f(x) = x^3$. Finn $f'(a)$.

Answer

Vi har at

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(3a^2 + 3ah + h^2\right) \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Altså er $f'(a) = 3a^2$.

Alternativ definisjon

En ekvivalent utgave av (6.2) er

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6.3}$$

Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon $f(x)$ og en variabel k. Siden $f'(a)$ angir stigningstallet til $f(a)$ for $x = a$, vil en tilnærming til $f(a + k)$ være

$$f(a + k) \approx f(a) + f'(a)k$$

Det er ofte nyttig å vite differansen ε mellom en tilnærming og den faktiske verdien:

$$\varepsilon = f(a + k) - \left[f(a) + f'(a)k\right] \tag{6.4}$$

Vi legger merket til at[1] $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$, og skriver om (6.4) til en formel for $f(x + k)$:

[1] Dette overlates til leseren å vise.

6.2 Linearisering av en funskjon

Gitt en funskjon $f(x)$ og en variabel k. Da finnes en funksjon ε slik at

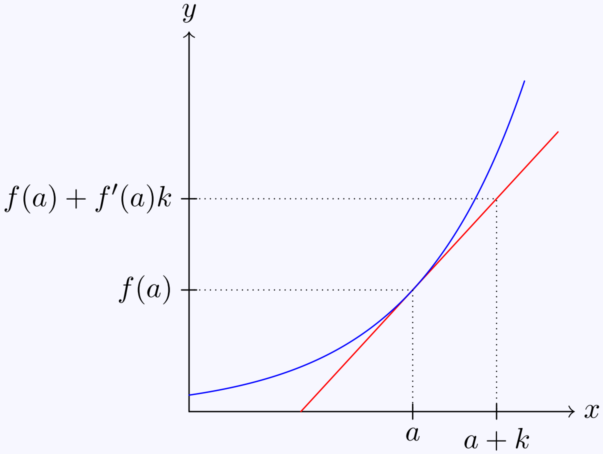
$$f(a+k) = f(a) + f'(a)k + \varepsilon \tag{6.5}$$

hvor $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$.

Tilnærmingen

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k \tag{6.6}$$

kalles **lineæarapproksimasjonen** av $f(a+k)$.



6.2 Derivasjonsregler

Den deriverte funksjonen

Eksempel 2 på side 93 belyser noe viktig; hvis grenseverdien i (6.2) eksisterer, vil $f'(a)$ være uttrykt ved a. Og selv om a betraktes som en konstant langs veien som fører til dette uttrykket, er det ingenting som hindrer oss i å etterpå behandle a som en variabel. Hvis $f'(a)$ er et resultat av derivasjon av funksjonen $f(x)$ er det også hendig å omdøpe a til x:

6.3 Den deriverte funksjonen

Gitt en funksjon $f(x)$. Den **deriverte funksjonen** til f er funksjonen som fremkommer ved å erstatte a i (6.2) med x. Denne funksjonen skriver vi som $f'(x)$.

Eksempel

Gitt $f(x) = x^3$. Siden[1] $f'(a) = 3a^2$, er $f'(x) = 3x^2$.

[1] Se *Eksempel 2*, side 93.

Språkboksen

Alternative skrivemåter for f' er $(f)'$ og $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$.

Derivert med hensyn på

Derivasjon som vi har sett på så langt har vært en brøk med en differanse av x-verdier i nevner og den tilknyttede differansen av f-verdier i teller. Da sier vi at f er derivert med **hensyn på x**. I denne bokserien skal vi i all hovedsak se på funksjoner som bare er avhengige av én variabel. Gitt en funksjon $f(x)$, er det da underforstått at f' symboliserer f derivert med hensyn på x.

Samtidig er det greit å være klar over at en funksjon gjerne kan være avhengig av flere variabler. For eksempel er funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

en **flervariabel funksjon**, avhengig av både x og y. I dette tilfellet kan vi bruke skrive $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ for å indikere derivasjon med hensyn på x, og $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ for å indikere derivasjon med hensyn på y. Leseren må gjerne forklare for seg selv hvorfor følgende stemmer:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = 2x \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f = 3y^2,$$

6.2.1 Den deriverte av elementære funksjoner

6.4 Den deriverte av elementære funksjoner

For en variabel x og en konstant r er

$$(e^x)' = e^x \tag{6.7}$$

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{6.8}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{6.9}$$

6.5 Den deriverte av sammensatte funksjoner

Gitt en konstant a og funksjonene $f(x)$ og $g(x)$. Da er

$$(a \cdot f)' = a \cdot f' \tag{6.10}$$

$$(f + g)' = f' + g' \tag{6.11}$$

$$(f - g)' = f' - g' \tag{6.12}$$

6.6 Den andrederiverte

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$. Da er den **andrederiverte** funksjonen til f gitt som

$$(f')' = f'' \tag{6.13}$$

6.7 Den deriverte av en vektorfunksjon

Gitt funksjonene $f(t)$, $g(t)$ og $v(t) = [f(t), g(t)]$. Da er

$$v'(t) = [f'(t), g'(t)] \tag{6.14}$$

6.2.2 Kjerne-, produkt- og divisjonsregelen ved derivasjon

6.8 Kjerneregelen

For en funksjon $f(x) = g\left[u(x)\right]$ har vi at

$$f'(x) = g'(u)u'(x) \tag{6.15}$$

Eksempel

Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^{x^2+x+1}$.

Answer

Vi setter $u = x^2 + x + 1$, og får at

$$g(u) = e^u \qquad g'(u) = e^u \qquad u'(x) = 2x + 1$$

Altså er

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u(2x+1) \\ &= e^{x^2+x+1}(2x+1) \end{aligned}$$

6.9 Produktregelen

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $v(x)$, hvor $f = uv$ da er

$$f' = u'v + uv'$$

Eksempel 1

Finn den deriverte av funksjonen $f(x) = x^2e^x$.

Answer

Vi setter $u(x) = x^2$ og $v(x) = e^x$, da er

$$f = uv \qquad u' = 2x \qquad v' = e^x$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= xe^x(2+x) \end{aligned}$$

6.10 Divisjonsregelen

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $v(x)$, hvor $f = \dfrac{u}{v}$. Da er

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{6.16}$$

Eksempel

Finn den deriverte av funksjonen $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$.

Answer

Vi setter $u(x) = \ln x$ og $v(x) = x^4$, da er

$$f = \frac{u} {v} \qquad u' = x^{-1} \qquad v' = 4x^3$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= \frac{x^{-1} \cdot x^4 - \ln x \cdot 4x^3}{x^8} \\ &= \frac{1 - 4\ln x}{x^5} \end{aligned}$$

Merk: Vi kan også finne f' ved å sette $u(x) = \ln x$ og $v(x) = x^{-4}$, for så å bruke produktregelen.

6.11 L'Hopitals regel

Gitt to deriverbare funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, hvor

$$f(a) = g(a) = 0$$

Da er

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g} = \lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}$$

Eksempel

Finn grenseverdien til $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Answer

Vi setter $f(x) = e^x - 1$ og $g(x) = x$, og merker oss at $f(0) = g(0) = 0$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{f}{g} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f'}{g'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

Forklaringer

6.8 Kjerneregelen (forklaring)

La oss se på tre funksjoner f, g og u, hvor[1]

$$f(x) = g\left[u(x)\right]$$

f beskrives direkte av x, mens g beskrives indirekte av x, via $u(x)$.

La oss bruke $f(x) = e^{x^2}$ som eksempel. Kjenner vi verdien til x, kan vi fort regne ut hva verdien til $f(x)$ er. For eksempel er

$$f(3) = e^{3^2} = e^9$$

Men vi kan også skrive $g\left[u(x)\right] = e^{u(x)}$, hvor $u(x) = x^2$. Denne skrivemåten impliserer at når vi kjenner verdien til x, regner vi først ut verdien til u, før vi så finner verdien til g:

$$u(3) = 3^2 = 9 \qquad , \qquad g\left[u(3)\right] = e^{u(3)} = e^9$$

Av (6.2) har vi at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} \end{aligned}$$

Vi setter $k = u(x+h) - u(x)$. Da er

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\left[u(x+h)\right] - g\left[u(x)\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h}$$

Av (6.5) har vi at

$$g(u) - g(u+k) = g'(u)k + \varepsilon_g$$

Altså er

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{g'(u)k + \varepsilon_g}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k}\right) \frac{k}{h} \end{aligned}$$

Da $\lim_{h\to 0} k = 0$, er $\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$. Videre har vi at $\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = u'(x)$. Altså har vi at

$$\lim_{h\to 0} \left(g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} = g'(u)u'(x)$$

---

[1]Klammeparantesene [ ] har i denne sammenhengen lik betydning som vanlige paranteser, de brukes bare for å få ryddigere uttrykk.

6.9 Produktregelen (forklaring)

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $v(x)$, hvor

$$f = uv$$

Av (6.1) er da

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - uv}{h}$$

La oss skrive $u(x+h)$ og $v(x+h)$ som henholdsvis $\tilde{u}$ og $\tilde{v}$:

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h}$$

Vi kan alltids legge til 0 i form av $\dfrac{u\tilde{v}}{h} - \dfrac{u\tilde{v}}{h}$:

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h} + \frac{u\tilde{v}}{h} - \frac{u\tilde{v}}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{(\tilde{u} - u)\tilde{v}}{h} + \frac{u(\tilde{v} - v)}{h} \right] \end{aligned}$$

Siden vi for enhver kontinuerlig funksjon g har at $\lim_{h\to 0} \tilde{g} = g$ og $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'$, er

$$f' = u'v + uv'$$

6.4 Den deriverte av elementære funksjoner (forklaring)

Likning (6.8)
Vi starter med å merke oss at

$$\begin{aligned}(\ln x^r)' &= (r\ln x)' \\ &= \frac{r}{x}\end{aligned}$$

Vi setter $u = x^r$. Av kjerneregelen har vi da at

$$\begin{aligned}\frac{r}{x} &= (\ln u)' \\ &= \frac{1}{u}u' \\ &= \frac{1}{x^r}(x^r)'\end{aligned}$$

Altså er

$$(x^r)' = \frac{r}{x}x^r = rx^{r-1}$$

Likning (6.9)
Vi har at $x = e^{\ln x}$. Vi setter $u = \ln x$ og $g(u) = e^u$. Da har vi at $x = g(u)$, og at

$$g'(u) = e^u = e^{\ln x} = x$$

$$u'(x) = (\ln x)'$$

Av kjerneregelen har vi at

$$\begin{aligned}(x)' &= g'(u)u'(x) \\ &= x\,(\ln x)'\end{aligned}$$

Da[1] $(x)' = 1$, har vi at

$$1 = x\,(\ln x)'$$

Altså er

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

[1]Se oppgave ??.

6.10 Divisjonsregelen (forklaring)

Vi har at

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \left(uv^{-1}\right)'$$

Av produktregelen og kjerneregelen er da

$$\begin{aligned} f' &= u'v^{-1} - uv^{-2}v' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

6.11 L'Hopitals regel (forklaring)

Siden $f(a) = g(a) = 0$, er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Av (6.3) har vi da at

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Oppgaver for kapittel 6

6.1.1

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at for funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$, er $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

6.1.2

Deriver uttrykkene

a) $5x^3$ b) $-8x^6$ c) $\frac{3}{7}x^7$ d) $-x^{\frac{2}{3}}$ e) $x^{\frac{9}{7}}$

6.1.3

Deriver uttrykkene

a) $2e^x$ b) $-30e^x$ c) $8\ln x$ d) $-4\ln x$

6.1.4

Forklar hvordan du kan omskrive uttrykk på formen $\frac{1}{x^k}$ slik at du kan anvende (6.8) til å derivere uttrykkene.

6.1.5

Deriver uttrykkene (Hint: Se oppgave 6.1.4)

a) $\dfrac{5}{x^2}$ b) $\dfrac{7}{x^{10}}$ c) $-\dfrac{2}{9x^7}$ d) $\dfrac{3}{11x^{\frac{8}{5}}}$

6.1.6

Deriver funksjonene

a) $g(x) = 3x^3 - 4x + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = x^2 + \ln x$ c) $h(x) = \ln x + x^2 + 2$
d) $a(x) = x^2 + e^x$

6.1.7

Deriver uttrykkene med hensyn på x.

a) $ax^2 + bx + c$ b) $7x^5 - 3ax + b$ c) $-9qx^7 + 3px^3 + b^3$

6.2.1

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x\sqrt{1-2x}$ b) $p(x) = 3xe^{2x}$ c) $h(x) = 3x^2 \ln x$
d) $k(x) = \sqrt{4x^2 - 5}$ e) $f(x) = x^3\sqrt{2x-1}$ f) $q(x) = \frac{x^3}{x^2-2}$
g) $f(x) = (x^2+2)^7$ h) $h(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$

Gruble 8

(R1V22D1)
En funskjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 2 \\ x - t & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Bestem tallet t slik at f blir en kontinuerlig funksjon. Husk å grunngi svaret.

b) Avgjør om f er deriverbar i $x = 2$ for den verdien av t du fant i oppgave a).

Gruble 9

Bevis at (6.16) er gyldig.

Gruble 10

Bevis at $(a^x)' = a^x \ln a$.

Kapittel 7

Funksjonsdrøfting

7.1 Monotoniegenskaper

De fleste funksjonsverdier varierer. Beskrivelser av hvordan funksjonene varierer kaller vi beskrivelser av funksjonenes **monotoniegenskaper**.

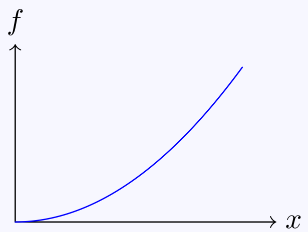
7.1 Voksende og avtagende funskjoner

Gitt en funksjon $f(x)$.

- f er **voksende** på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{7.1}$$

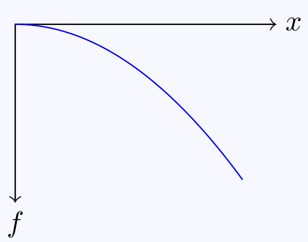
Hvis $f(x_1) \leq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) < f(x_2)$, er f **strengt voksende** på intervallet.



- f er **avtagende** på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{7.2}$$

Hvis $f(x_1) \geq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) > f(x_2)$, er f **strengt avtagende** på intervallet.



7.2 Monotoniegenskaper og den deriverte

Gitt $f(x)$ deriverbar på intervallet $[a, b]$.

- Hvis $f' \geq 0$ for $x \in [a, b]$, er f voksende for $x \in (a, b)$
- Hvis $f' \leq 0$ for $x \in [a, b]$, er f avtagende for $x \in (a, b)$

Hvis henholdsvis $\geq$ og $\leq$ kan erstattes med $>$ og $<$, er f strengt voksende/avtagende.

Eksempel

Avgjør på hvilke intervaller f er voksende/avtagende når

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \qquad , \qquad x \in [0, 8]$$

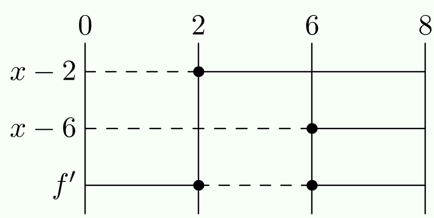
Answer

Vi har at

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

For å tydeliggjøre når f' er positiv, negativ eller lik 0 gjør vi to ting; vi faktoriserer uttrykket til f', og tegner et fortegnsskjema:

$$f'(x) = (x - 2)(x - 6)$$



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket $x - 2$ er negativt når $x \in [0, 2)$, lik 0 når $x = 2$, og positivt når $x \in (2, 8]$.
- Uttrykket $x - 6$ er negativt når $x \in [0, 8)$, lik 0 når $x = 6$, og positivt når $x \in (6, 8]$.
- Siden $f' = (x - 2)(x - 6)$, er

$$f' \geq 0 \text{ når } x \in [0, 2] \cup (6, 8]$$
$$f' = 0 \text{ når } x \in \{2, 6\}$$
$$f' \leq 0 \text{ når } x \in [2, 6]$$

Dette betyr at

$$f \text{ er voksende når } x \in (0, 2) \cup (6, 8)$$
$$f \text{ er avtagende når } x \in (2, 6)$$

7.2 Ekstremalpunkt, vendepunkt og infleksjonspunkt

7.3 Maksimum og minimum

Merk: Et tall c kan omtales som et punkt i funskjonsdrøftinger, underforstått at det er snakk om punktet $(c, 0)$.

Gitt en funksjon $f(x)$ og et tall c.

- f har **absolutt maksimum** $f(c)$ hvis $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har **absolutt minimum** $f(c)$ hvis $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har et **lokalt maksimum** $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in I$.
- f har et **lokalt minimum** $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \leq f(x)$ for $x \in I$.

Språkboksen

Et maksimum/minimum blir også kalt en **maksimumsverdi/minimumsverdi**.

7.4 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon $f(x)$ med maksimum/minimum $f(c)$. Da er

- $f(c)$ en **ekstremalverdi** for f.
- c et **ekstremalpunkt** for f. Nærmere bestemt et maksimalpunkt/minimumspunkt for f.
- $(c, f(c))$ et **toppunkt/bunnpunkt** for f.

7.5 Kritiske punkt

Et tall c er et **kritisk punkt** for en funksjon $f(x)$ hvis én av følgende gjelder:

- f er ikke deriverbar i c
- $f'(c) = 0$

7.6 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$ og $c \in [a, b]$.

(i) Hvis c er et lokalt ekstremalpunkt for f, er $f'(c) = 0$

(ii) Hvis $f' > 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' < 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt maksimumspunkt for f

(iii) Hvis $f' < 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' > 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt minimumspunkt for f

Språkboksen

Det som blir beskrevet i punkt (ii) og (iii) omtales ofte som at "f skifter fortegn i c".

Eksempel 1

Finn det lokale bunnpunktet og toppunktet til

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x$$

Answer

Vi starter med å finne f':

$$\begin{aligned} f' &= 6x^2 + 18x - 60 \\ &= 6(x^2 + 3x - 10) \end{aligned}$$

Siden $5(-2) = 10$ og $5 - 2 = 3$, har vi av regel 2.2 at

$$f' = 6(x-2)(x+5)$$

$f' = 0$ for $x = 2$ og $x = -5$. Vi har at

$$f(-5) = 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 = -68$$

$$f(2) = 5^3 + 9 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 = 275$$

Altså er $(-5, 275)$ toppunktet til f og $(2, -68)$ er bunnpunktet til f.

7.7 Andrederiverttesten

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$ og et tall c.

- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, er $f(c)$ et lokalt maksimum.
- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, er $f(c)$ et lokalt minimum.
- Hvis $f'(c) = f''(c) = 0$, kan man ikke ut ifra denne informasjonen alene si om $f(c)$ er et lokalt maksimum eller minimum.

7.7 Andrederiverttesten (forklaring)

Av definisjonen for den deriverte har vi at

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

Når $f'(c) = 0$, er

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

Når $f''(c) < 0$, betyr dette at

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

Altså må $f'(c+h)$ være positiv når h går mot 0 fra venstre og negativ når h går mot 0 fra høgre. Dermed skifter f' fortegn i c, som da må være et maksimalpunkt for f. Tilsvarende må c være et minimumspunkt for f hvis $f(c) = 0$ og $f''(c) < 0$.

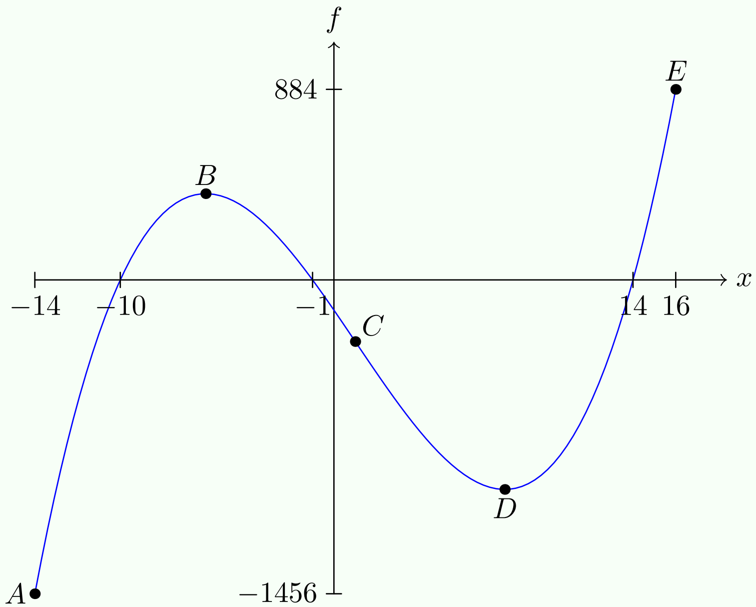
7.8 Infleksjonspunkt og vendepunkt

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ har vi at

- Hvis $f''(c) = 0$ og f'' skifter fortegn i c, er c et **infleksjonspunkt** for f.
- Hvis c er et infleksjonspunkt for f, er $(c, f(c))$ et **vendepunkt**.
- f er konveks på intervall hvor $f'' > 0$, og konkav på intervall hvor $f'' < 0$. (Se regel 7.11 angående kovekse og konkave funksjoner.)

Eksempel

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140 \quad , \quad x \in [-14, 16]$$



punkt/verdi	**type**
$A = (-14, -1456)$	absolutt bunnpunkt
-14	ekstremalpunkt; absolutt minimum
-1456	absolutt minimum
$B = (-6, 400)$	lokalt toppunkt
-6	ekstremalpunkt; lokalt maksimalpunkt
400	lokalt maksimum
$C = (-1, -286)$	vendepunkt
-1	infleksjonspunkt
$D = (8, -972)$	lokalt bunnpunkt
8	ekstremalpunkt; lokalt minimumspunkt
-972	lokal minimum
$E = (16, 884)$	absolutt maksimum
16	ekstremalpunkt; absolutt maksimumspunkt
884	absolutt maksimum
-10, -1 og 14	nullpunkt

7.3 Asymptoter

7.9 Vertikale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$ og en konstant c.

- Hvis $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote ovenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote nedenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote** for f.

Eksempel

Finn den vertikale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Answer

Vi observerer at

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{1}{x-3} + 2 \right] = \pm\infty$$

Altså er $x = 3$ en vertikal asymptote for f.

7.10 Horisontale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$. Da er $y = c$ en **horisontal asymptote** for f hvis

$$\lim_{x \to |\infty|} f(x) = c$$

Eksempel

Finn den horisontale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Answer

Vi observerer at

$$\lim_{x \to |\infty|} \left[\frac{1}{x-3} + 2 \right] = 2$$

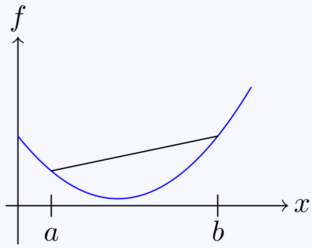
Altså er $y = 2$ en horisontal asymptote for f.

7.4 Konvekse og konkave funksjoner

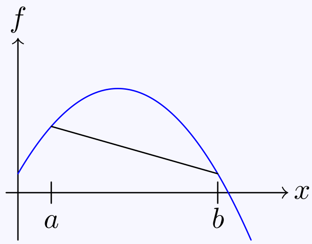
7.11 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$.

Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger over grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f **konveks** for $x \in [a, b]$.



Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger under grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f **konkav** for $x \in [a, b]$.



7.5 Injektive og omvendte funksjoner

Injektive funksjoner

7.12 Injektive funksoner

Gitt en funksjon $f(x)$. Hvis alle verdier til f er unike på intervallet $x \in [a, b]$, er f **injektiv** på dette intervallet.

Språkboksen

Et annet ord for injektiv er **én-entydig**.

Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 1$, som åpenbart er injektiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette betyr at likningen $f = 2x + 1$ bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på x eller f. Løser vi med hensyn på x, får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for f til, det "omvendte", et uttrykk for x. Siden x og f begge er variabler, er x en funksjon av f, og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den *omvendte* til f. Setter vi uttrykket til f inn i uttrykket til $x(f)$, får vi nødvendigvis x:

$$\begin{aligned} x\,(2x + 1) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle x som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både f og x, slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette $y = f$ og $g = x$. Den omvendte funksjonen g til f er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

7.13 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner $f(x)$ og $g(y)$. Hvis

$$g(f) = x$$

er f og g **omvendte** funksjoner.

Eksempel 1

Gitt funksjonen $f(x) = 5x - 3$.

a) Finn den omvendte funksjonen g til f.

b) Vis at $g(f) = x$.

Answer

a) Vi setter $y = f$, og løser likningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= 5x - 3 \\ x &= \frac{y+3}{5} \end{aligned}$$

Da er $g(y) = \frac{y+3}{5}$.

b) Når $y = f$, har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x - 3) \\ &= \frac{5x - 3 + 3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

f^{-1}

Hvis f og g er omvendte funksjoner, skrives g ofte som f^{-1}. Da er det viktig å merke seg at f^{-1} ikke er det samme som $(f)^{-1}$. For eksempel, gitt $f(x) = x + 1$. Da er

$$f^{-1} = x - 1 \qquad , \qquad (f)^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

I alle andre tilfeller enn ved $n = -1$, vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$

Forklaringer

7.2 Monotoniegenskaper og den deriverte (forklaring)

Gitt $f(x)$, hvor $f' \geq 0$ for $x \in [a, b]$. La $x_1, x_2 \in (a, b)$ og $x_2 > x_1$. Av middelverdisetningen finnes det et tall $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da $c \in [a, b]$, er $f'(x) \geq 0$, og da er

$$0 \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Følgelig er $f(x_2) \geq f(x_1)$, og av definisjon 7.1 er da f voksende på intervallet (a, b).

7.6 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt (forklaring)

Punkt (i)

La c være et lokalt maksimumspunkt for f. For et tall h må vi da ha at $c \geq x$ for $x \in (c - |h|, c + |h|)$. Da er

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Dette betyr at

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

og at

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Følgelig er

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Altså er $f'(c) = 0$, og f' skifter fortegn fra positiv til negativ i c. Med samme framgangsmåte kan det vises at dette også gjelder dersom c er et minimumspunkt, bare at da skifter f' fra negativ til positiv.

Punkt (ii)

Hvis $f' > 0$ på intervallet (a, c), har vi av regel 7.2 at f er sterkt voksende der. Hvis $f' < 0$ på (c, b), er f sterkt avtagende der. Dette må nødvendigvis bety at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in (a, b)$, og da er c et maksimumspunkt.

Punkt (iii)

Tilsvarende resonnement som for punkt (ii).

Vedlegg A-F

Vedlegg A: Navn på funksjoner

7.14 Potensfunksjoner

Gitt $x, k, b \in \mathbb{R}$. En funksjon på formen

$$f(x) = kx^m \tag{7.3}$$

er da en **potensfunksjon** med **koeffisient** k og **eksponent** m.

7.15 Polynomfunksjoner

En **polynomfunksjon** er én av følgende:

- en potensfunksjon med heltalls eksponent større eller lik 0.
- summen av flere potensfunksjoner med heltalls eksponent større eller lik 0.

Polynomfunksjoner kategoriseres etter den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene a, b, c og d, og en variabel x, har vi at

funksjonsuttyrykk	**funksjonsnavn**
$ax + b$	1. grads funksjon/polynom (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. grads funksjon/polynom (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. grads funksjon/polynom (kubisk)

Eksempel 1

$4x^7 - 5x^2 + 4$ er et 7. grads polynom.

$\frac{2}{7}x^5 - 3$ er et et 5. grads polynom.

7.16 Eksponentialfunksjoner

Gitt $x, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, hvor $b > 0$. En funksjon f gitt som

$$f(x) = a \cdot b^{cx+d}$$

er da en **eksponentialfunksjon**.

Vedlegg B: Å løse likninger ved bytte av variabel

La oss løse likningen

$$x - 11\sqrt{x} + 28 = 0 \tag{7.4}$$

Hvis vi ser nøye etter, innser vi at dette er en andregradslikning for $\sqrt{x}$. Enda tydeligere blir dette hvis vi definerer variabelen $u = \sqrt{x}$, da kan vi skrive (7.4) som

$$u^2 - 11u + 28 = 0$$

Siden $(-7) \cdot (-4) = 28$ og $-7 - 4 = -11$, har vi av (2.1) at

$$(u - 4)(u - 7) = 0$$

Altså er

$$u = 4 \qquad \vee \qquad u = 7$$

Dette betyr at

$$\sqrt{x} = 4 \qquad \vee \qquad \sqrt{x} = 7$$

Dermed er

$$x = 16 \qquad \vee \qquad x = 49$$

Vedlegg C: Eksakteverdier for utvalgte vinkler

	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	130°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Vedlegg D: Eulers tall

Den deriverte som motivajon

Gitt funksjonen $f(x) = a^x$. Da har vi at

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}
\end{aligned}
$$

Da x er uavhengig av h, får vi at

$$
(a^x)' = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}
$$

Likningen over peker mot noe fantastisk; hvis det finnes et tall a som er slik at $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$, så vil funksjonen a^x være sin egen deriverte funksjon! Altså er da $(a^x)' = a^x$. Vi legger nå merke til at hvis

$$
a = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}
$$

så er

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^h - 1}{h} \\
&= \frac{1+h-1}{h} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Hvis vi kan vise at grenseverdien $\lim\limits_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ eksisterer, har vi altså funnet akkurat det uttrykket for a som vi ønsket oss.

Undersøking av grenseverdien

Vi innfører følgende to funksjoner (motivasjonen for å innføre g vil komme fram senere):

$$
f(h) = 1 + h \qquad , \qquad g(h) = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h
$$

Videre ønsker vi å undersøke for hvilke verdier f er mindre enn g. Når $f = g$, har vi at

$$
1 + h = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h \tag{7.5}
$$

Vi gjør nå følgende observasjon: Gitt to tall c og k, og funksjonen $p(h) = a^h$, hvor $k > 0$ og $0 < a < 1$. Da har vi at

$$p(c+k) - p(c) = a^{c+k} - a^c = a^c \left(a^k - 1\right)$$

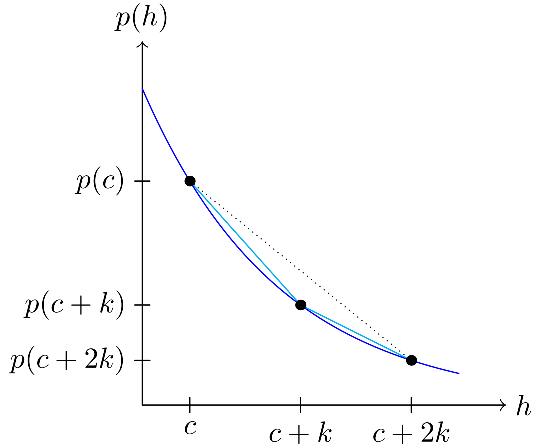
Tilsvarende er

$$p(c+2k) - p(c+k) = a^{c+k} \left(a^k - 1\right)$$

Videre er $a^{c+k} < a^c$ og $a^k - 1 < 1$, som betyr at

$$\frac{p(c+k) - p(c)}{h} < \frac{p(c+2k) - p(c)}{h}$$

Dermed må linja mellom $(c, p(c))$ og $(c+k, p(c+k))$ være brattere enn linja mellom $(c+k, p(c+k))$ og $(c+2k, p(c+2k))$, og da må $(c+k, p(c+k))$ ligge under linja mellom $(c, p(c))$ og $(c+2k, p(c+2k))$.



Det er åpenbart at $p(h)$ ikke er en lineær funksjon, og da må én av disse tre påstandene være gyldig:

(a) p er konveks for alle h

(b) p er konkav for alle h

(c) p er skiftvis konkav/konveks

Men hvis p er konkav, må det finnes et intervall hvor $(c+k, p(c+k))$ ligger over linja mellom $(c, p(c))$ og $(c+2k, p(c+2k))$, og dette er selvmotsigende. Altså må p nødvendigvis være konveks for alle h.

Av det vi akkurat har funnet, kan vi konkludere med at funksjonen $2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$ er konkav for alle h, og da $1 + h$ er et lineært uttrykk, har (7.5) maksimalt to løsninger.

Vi setter $z = \frac{1}{h}$ for $h \neq 0$. Da er

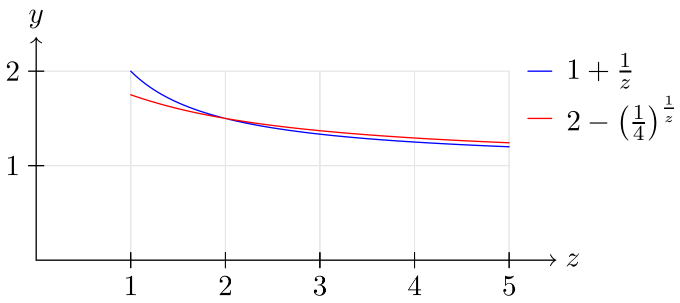
$$\lim_{h\to 0}(1+h)^h = \lim_{z\to\infty} = \left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z}}$$

Videre kan (7.5) omskrives til

$$1+\frac{1}{z} = 2-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} \tag{7.6}$$

Det er enkelt å vise at $h = 0$ og $h = \frac{1}{2}$ er løsningene til (7.5). Dette må bety at $z = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ er den eneste løsningen til (7.6). Det er også enkelt å bekrefte at venstresiden i (7.6) er større enn høgresiden for $z = 1$, og dette innebærer at

$$1+\frac{1}{z} < 2-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}$$



For $z \to \infty$ kan vi derfor være sikre på at

$$1+\frac{1}{z} < 1+1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} + \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^2 + \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^3 + \ldots$$

Høgresiden i ulikheten over kjenner vi igjen[1] som en uendelig geometrisk rekke hvor summen er gitt som

$$\frac{1}{1-\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}} = 4^{\frac{1}{z}}$$

Altså er

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z \leq \lim_{z\to\infty}\left(4^{\frac{1}{z}}\right)^z = 4 \tag{7.7}$$

[1] Se om geometriske rekker i TM2.

Det er åpenbart at $1 \leq \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$, og dermed vet vi at $\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$ ligger et sted mellom 2 og 4. Da uttrykket inneholder utelukkende positive ledd for $z \to \infty$, kan vi også være sikre på at grenseverdien er endelig[1]. Da gir derfor mening å behandle grenseverdien som et tall, som vi kaller for e:

$$e = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$$

Merk

Den mest klassiske metoden for å finne en øvre og en nedre grense for $\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$ er ved å bruke Binomialteoremet.

Et tilbakeblikk på den deriverte

Derivasjon av potensfunksjoner var det som motiverte oss til å undersøke tallet e. Av det vi har drøftet i de foregående avsnittene, følger det at

$$(e^x)' = e^x$$

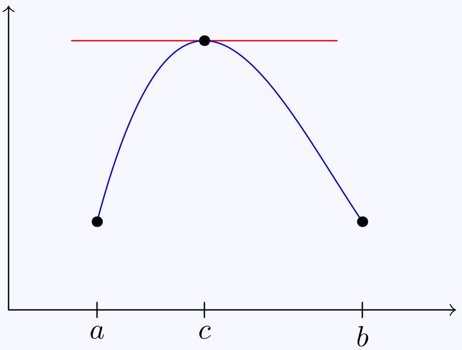
Likningen over er rett og slett én av de viktigste likningene i matematikk.

[1] I motsetning til å være ubestemt. For eksempel vil $\lim_{x\to\infty}\cos x$ være ubestemt, fordi $\cos x$ svinger mellom -1 og 1.

Vedlegg E: Rolles teorem og middelverditeoremet

7.17 Rolles teorem

Gitt en funksjon $f(x)$, deriverbar på intervallet (a, b), og hvor $f(a) = f(b)$. Da fins et tall $c \in [a, b]$ slik at $f'(c) = 0$.



7.17 Rolles teorem (forklaring)

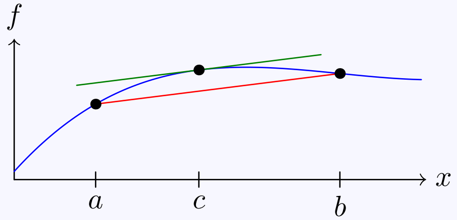
Hvis uttrykket til f er en konstant, er $f'(x) = 0$ på hele intervallet, og påstanden om tallet c er åpenbart sann.

Hvis uttrykket til f ikke er en konstant, impliserer dette at f har et lokalt ekstremalpunkt på intervallet (a, b) (siden $f(a) = f(b)$). La c være dette ekstremalpunktet, av regel 7.6 er da $f'(c) = 0$.

7.18 Middelverdisetningen

Gitt en funksjon $f(x)$ deriverbar på intervallet (a, b). Da fins et tall $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{7.8}$$



7.18 Middelverdisetningen (forklaring)

La $g(x)$ være den lineære funksjonen som beskriver linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Videre definerer vi

$$h(x) = f - g = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - x) + f(a)$$

Da har vi at $h(a) = h(b) = 0$. Av Rolles teorem vet vi da et det fins et tall $c \in (a, b)$ hvor $h'(c) = 0$. Dette betyr at

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Vedlegg F: Tangeringslinja til en graf

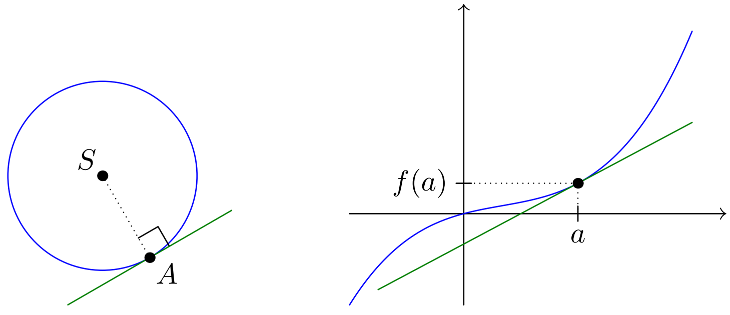
Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se *figur 7.1a*.)

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$. Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til f i punktet* $(a, f(a))$ som linja som går gjennom $(a, f(a))$ og har stigningstall $f'(a)$ (Spivak, 1994). (Se *Figur 7.1b*.)



Figur 7.1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

Senteret til krumningen

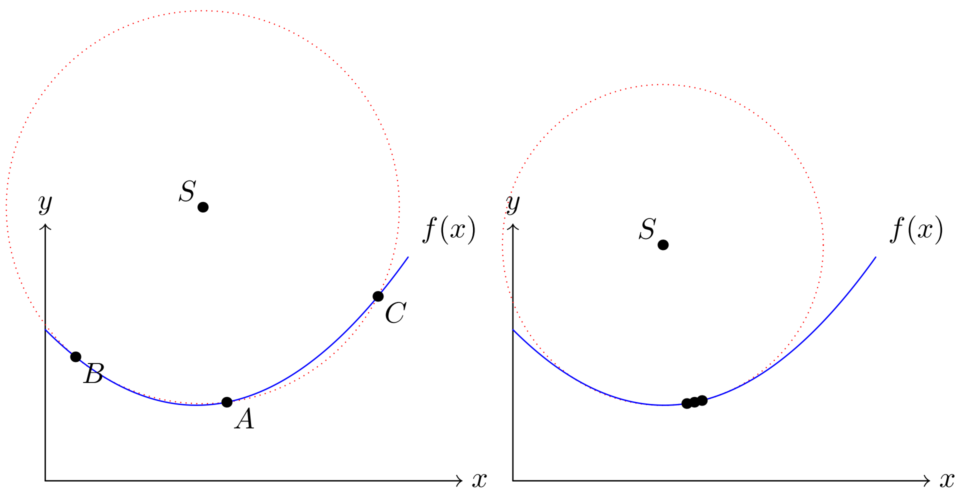
Gitt en funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig og to ganger deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, og hvor $f''(x) \neq 0$. For en gitt a lar vi $f_a = f(a)$, og definerer funksjonene

$$f_b(h) = f(a-h) \quad , \quad f_c(h) = f(a+h)$$

Vi innfører også punktene

$$A = (a, f_a) \quad , \quad B = (a - h, f_b) \quad , \quad C = (a + h, f_c)$$

Videre lar vi $S = (S_x, S_y)$ være sentrum i den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne **krumningen** i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ når h går mot 0.



(a) (b)

Figur 7.2

Et likningssett for S

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [h, f_a - f_b] \quad , \quad \overrightarrow{AC} = [h, f_c - f_a]$$

La B_m og C_m være midptunktene til henholdsvis (sekantene) AB og AC. Da er

$$B_m = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad , \qquad C_m = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$[f_a - f_b, -h]$ er en normalvektor for $\overrightarrow{BA}$, dette betyr at midtnormalen $\boldsymbol{l}_1$ til sekanten AB kan parameterisere som

$$\boldsymbol{l}_1(t) = B_m + [f_a - f_b, -h]t$$

Tilsvarende er midtnormalen $\boldsymbol{l}_2$ til sekanten AC parameterisert ved

$$\boldsymbol{l}_2(q) = C_m + [f_c - f_a, -h]q$$

S sammenfaller med skjæringspunktet til $\boldsymbol{l}_1$ og $\boldsymbol{l}_2$. Ved å kreve at $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2$, får vi et lineært likningssett med to ukjente som gir

$$t = \frac{(f_a - f_c)(f_b - f_c) + 2h^2}{2h(f_b + f_c - 2f_a)}$$

S når h går mot 0

Vi definerer funkjonene $\dot{f}_b$, $\dot{f}_c$, $\ddot{f}_b$ og $\ddot{f}_c$ ut ifra de (respektive) deriverte og andrederiverte av f_b og f_c med hensyn på h:

$$-\dot{f}_b = (f_b)' = -f'(a-h)$$

$$\dot{f}_c = (f_c)' = f'(a+h)$$

$$\ddot{f}_b = (f_b)'' = f''(a-h)$$

$$\ddot{f}_c = (f_c)'' = f''(a+h)$$

Vi skal nå bruke dise funsjonene til å studere koordinatene til S når h går mot 0. Vi tar da med oss at

$$\lim_{h\to 0} \left\{h^2, h\right\} = 0 \qquad \lim_{h\to 0} \{f_b, f_c\} = f_a$$

$$\lim_{h\to 0} \left\{\dot{f}_c, \dot{f}_b\right\} = f'_a \qquad \lim_{h\to 0} \left\{\ddot{f}_b, \ddot{f}_c\right\} = f''_a$$

hvor[1] $f'_a = f'(a)$ og $f''_a = f''(a)$.

For t uttrykt ved (F) er (se (F))

$$S_y = \frac{f_a + f_b + 2ht}{2} = \frac{f_a + f_b}{2} + ht$$

Vi har at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_a + f_b}{2} = f_a$$

Videre er

$$\begin{aligned} ht &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c) + 2h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} \\ &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{2(f_b + f_c - 2f_a)} + \frac{h^2}{f_b + f_c - 2f_a} \end{aligned}$$

[1] Legg merke til at det her er snakk om f derivert med hensyn på x, og evaluert i a.

Når h går mot 0, er begge leddene i (7.9) «0 over 0» uttrykk. Vi bruker L'Hopitals regel på det siste leddet:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2)'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} \tag{7.9}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \qquad \text{«0 over 0»} \tag{7.10}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \tag{7.11}$$

$$= \frac{1}{f_a''} \tag{7.12}$$

Ved å bruke L'Hopitals regel på det første leddet i (7.9) har vi at

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{f_b + f_c - 2f_a} = \lim_{h\to 0} \frac{((f_c - f_a)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'}$$

Av produktregelen ved derivasjon er

$$\lim_{h\to 0} \frac{((f_a - f_c)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \right]$$

Begge leddene over er «0 over 0» uttrykk. Vi undersøker dem hver for seg ved å anvende L'Hopitals regel:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\ddot{f}_c(f_b - f_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right]$$
$$= 0 + \frac{(f_a')^2}{2f_a''}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(-\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \tag{7.13}$$

$$= \frac{(f_a')^2}{2f_a''} + 0 \tag{7.14}$$

Av (7.9), (7.12), (7.13) og (7.14) har vi at

$$\lim_{h\to 0} ht = \frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}$$

Dermed er

$$S_y = f_a + \frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}$$

Videre er (med t gitt av (F))

$$S_x = (f_b - f_a)t + a - \frac{1}{2}h$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(f_b - f_a)t &= \lim_{h\to 0}\frac{f_b - f_a}{h}\cdot ht \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f_b - f_a}{h}\cdot \lim_{h\to 0} ht \\
&= -f_a'\frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}
\end{aligned}$$

Altså er

$$S_x = a - f_a'\frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}$$

Avslutning

Linja som har stigningstall $f'(a)$, og som går gjennom $(a, f(a))$, er gitt ved funksjonen

$$g(x) = f_a'(x - a) + f_a$$

$\vec{r} = [1, f_a]$ er en retningsvektoren til denne linja. Av uttrykkene vi har funnet for S_x og S_y har vi at

$$S = \left(a - f_a'\frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}, f_a + \frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}\right)$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f_a''}\left[-f_a(1 + (f_a')^2), 1 + (f_a')^2\right]$$

Siden $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AS} = 0$ og $g(a) = f(a)$, er grafen til g tangeringslinja til sirkelen med sentrum S når h går mot 0. Altså er g tangeringslinja til sirkelen som beskriver krumningen til f når $x = a$.

Indeks

Fasit

Litteratur

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint.* Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press