0.1 Oppgaver med tall og situasjoner fra virkeligheten

Se også oppgaver på ekte.data.uib.no

0.1.1

#rekker #øknomi

Du ønsker å spare penger i en bank som gir 2 % månedlig rente. Du sparer ved å gjøre et innskudd på 1000 kr hver måned.

a) Skriv rekken som viser hvor mye penger du har i banken etter 5 måneder med sparing. Innskuddet i 5. måned skal tas med.

b) Sett opp et uttrykk $P(n)$ som viser hvor mye penger du har i banken n måneder etter at sparingen startet. Innskuddet i n-te måned skal tas med.

0.1.2

#rekker #øknonomi # programmering

Si at du låner 1 500 000 kroner av en bank. Lånet er et annuitetslån (se AM1) med 3% årlig rente, og lånet skal betales ned i løpet av 20 år med årlige fradrag og renter. For å beregne terminbeløpet x kan man tenke som følger:

> Tenk deg at din bank sparer penger i en annen bank, som tilbyr 3% årlig sparerente. Da skal banken ende opp med det samme sparebeløpet ved begge disse tilfellene:
>
> - I løpet av 20 år tilføres sparekontoen et årlig innskudd på x kroner.
> - 1 500 000 kroner settes på sparekonto og forrentes i 20 år.

a) Finn verdien til terminbeløpet x.

b) Lag et script som printer terminbeløp, avdrag og renter for hele nedbetalingstiden, og som bekrefter at svaret ditt fra a) er rett.

c) Sammenlign svaret ditt med en lånekalkulator på internett. (Sett alle gebyrer lik 0).

d) Sett opp en formel som viser det årlige terminbeløpet x ved et annuitetslån, uttrykt ved lånesummen L, den årlige renten r, og nedbetalingstiden t.

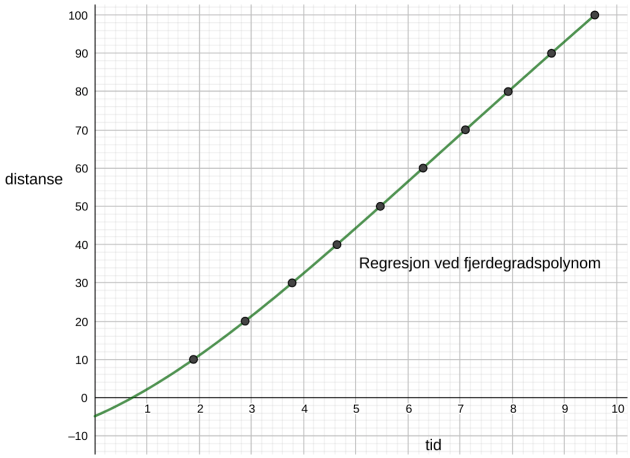
0.1.3

#regresjon #funksjonsdrøfting #omgjøring av enheter

Usain Bolt har verdensrekorden for 100 m sprint. I tabellen under ser du hva tidtakeren viste ved hver 10. meter under dette rekordløpet.

meter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
sekunder	1.89	2.88	3.78	4.64	5.47	6.29	7.1	7.92	8.75	9.58

a) I figuren under har vi brukt datasettet fra tabellen til å utføre regresjon med et fjerdegradspolynom. Hva er det som er helt feil med denne tilnærmingen?



b) I datasettet kan vi legge til et punkt som vil hjelpe med å korrigere feilen poengtert i a). Hvilket punkt er dette?

c) Bruk regresjon med et fjerdegradspolynom på datasettet fra b).

d) Ut ifra funksjonen du fant i c), hva var toppfarten til Bolt under dette løpet?

e) Bruk datasettet fra b) til å finne gjennomsnittsfarten til Bolt for $t \in [0, 1.89]$ og for $t \in [1.89, 9.58]$. Sammenlikn disse hastighetene med svaret fra oppgave d), og drøft årsaken til ulikhetene/ likhetene.

0.1.4

#funksjoner #regresjon #derivasjon #vektorer i planet

På side 26 i dokumentet Premisser for geometrisk utforming av veger (utformet av Statens vegvesen) er minste **horisontalkurveradius** $R_{h,\text{min}}$ gitt ved formelen

$$R_{h,\text{min}} = \frac{V^2}{127(\text{e}_{\text{maks}} + f_k)}$$

hvor

$$\begin{aligned} V &= \text{fartsgrense} \\ \text{e}_{\text{maks}} &= \text{maksimal overhøyde} \\ f_k &= \text{dimensjonerende sidefriksjonsfaktor} \end{aligned}$$

Si at en veibane er beskrevet av grafen en funksjon $f(x)$. I vedlegg ?? i TM1 introduserte vi sirkelen som beksriver krumningen til f. Vektoren mellom sentrum S i denne sirkelen og et punkt $A = (x, f(x))$ på grafen til f er gitt som

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''}\left[-f \cdot (1 + (f')^2), 1 + (f')^2\right]$$

La r være radien til sirkelen som beskriver krumningen til f. Statens vegvesens krav tilsier at

$$r < R_{h,\text{min}}$$

Bruk et digitalt kart og regresjon til å finne en polynomfunksjon som gir en god tilnærming for utvalgte veistykker hvor fartsgrensen er kjent. Sett $\text{e}_{\text{maks}} = 0$, og bruk tabellen[1] under for å velge verdien til f_k. Undersøk om krumningen til veistykket oppfyller kravet til Statens vegvesen i alle punkt.

Tabell 2.7: Sidefriksjon for ulike fartsgrenser og sikkerhetsfaktorer

Sikker-	Fartsgrense [km/t]							
hetsfaktor	40	50	60	70	80	90	100	110
1,00	0,249	0,224	0,195	0,182	0,157	0,131	0,108	0,079
1,10	0,226	0,204	0,178	0,165	0,143	0,119	0,098	0,072

[1]Hentet fra side 22 fra nevnte dokument.

0.1.5

modellering # areal # derivasjon

Gitt et rektangel med omkrets O, og la x være den éne sidelengden.

a) Finn uttrykket til funksjonen $A(x)$, som viser aralet til rektangelet.

b) Hvilken form har rektangelet når arealet er størst?

0.1.6

#logaritmer #overslag

Momentmagnitudeskalaen er en skala som brukes til å representere styrken på jordskjelv. Hvis S er det målte **seismiske momentet** til jordskjelvet, er massemagnituden M_w gitt som[1]

$$M_w = \frac{2}{3}\log S - 10.7$$

Energien som jordskjelvet utløser er tilnærmet proporsjonal med S.

Gitt to jordskjelv, jordskjelv A og jordskjelv B, med henholdsvis seismisk moment S_A og S_B. Si videre at proporsjonalitetskonstanten for energi utløst av det seismiske momentet er likt for begge jordskjelvene. Hvis jordskjelv A er målt til 1 mer enn jordskjelv B på momentmagnitudeskalaen, hva er da forholdet mellom energi utløst av jordskjelv A og energi utløst av jordskjelv B?

[1]Kilde: Wikipedia.

0.1.7

Du skal prøve å kaste en ball så langt som mulig langs et flatt strekke. Posisjonen ballen har idét den forlater handen din setter du til $(0, 0)$. Ved å anta at tyngdekraften deretter er den eneste kraften som virker på ballen, er posisjonen til ballen godt tilnærmet ved uttrykket

$$\vec{p}_g(t) = \vec{v}t - [0, 5t^2]$$

hvor $\vec{v} = [v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta]$ er hastighetsvektoren til ballen idét den forlot handen, og t er antall tidsenheter etter at ballen har forlatt handen. Idét ballen forlater handen din har den farten v_0, $\vec{v}$ danner vinkelen θ med horisontallinjen.

Ut ifra $\vec{p}_g$, hvilken verdi må θ ha for at kastet skal bli lengst mulig?

0.1.8

integrasjon # derivasjon

La funksjonen $s(t)$ beskrive hvor langt et objekt har bevegd seg etter tiden t. Hvi objektet har konstant akselerasjon a, har vi at

$$s''(t) = a$$

a) Integrer $s''(t)$ to ganger slik at du ender opp med et uttrykk for $s(t)$.

b) Bestem uttrykkene for $s(t)$ og $s'(t)$ når du vet at $s(t) = 0$ og $s'(t) = v_0$.

c) Hvilken fysisk størrelse representerer $s'(t)$?

d) Undersøk begrepet ”bevegelsesligninger”[1] (også kalt ”veiformler”) i en fysikkbok eller på internett. Sammenlign uttrykkene du finner med uttrykket du fant for $s(t)$.

[1] ”Eqautions of motion på engelsk.