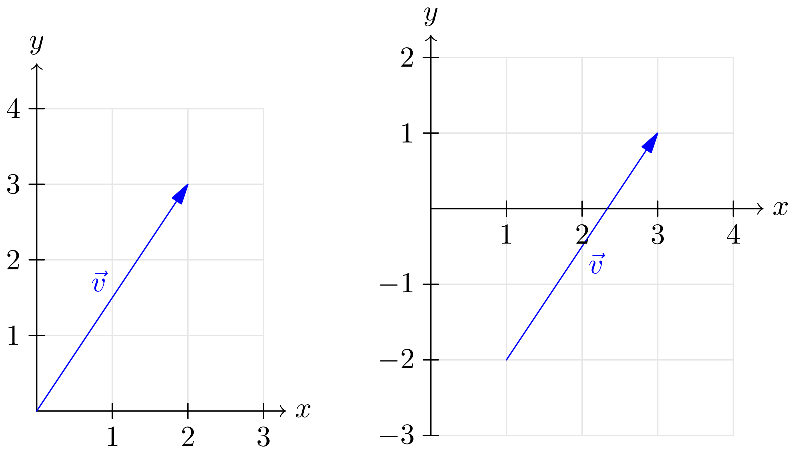
0.1 Introduksjon

En **todimensjonal vektor** angir en forflytning i et koordinatsystem med en x-akse og en y-akse. En vektor tegner vi som et linjestykke mellom to punkt, i tillegg til at vi lar en pil vise til hva som er endepunktet. Det betyr at forflytningen starter i punktet uten pil, og ender i punktet med pil.



(a) *(b)*

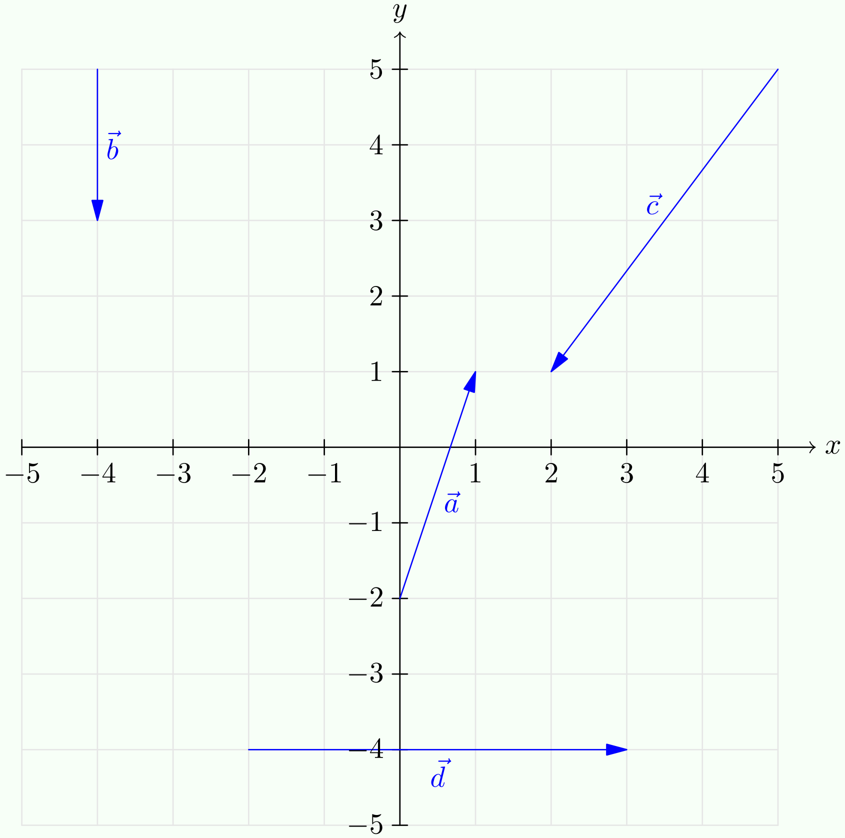
I figur *(a)* er vektoren $\vec{v}$ vist med startpunkt $(0,0)$ og endepunkt (3,1). Når en vektor har startpunkt $(0,0)$, sier vi at den er vist i **grunnstillingen**. I figur *(b)* er $\vec{v}$ vist med startpunkt $(1,-2)$ og endepunkt $(3,1)$. Forflytningen $\vec{v}$ viser til er å vandre 2 mot høgre langs x-aksen og 3 opp langs y-aksen. Dette skriver vi som $\vec{u} = [2,3]$, som kalles $\vec{u}$ skrevet på **komponentform**.

> **Språkboksen**
>
> En todimensjonal vektor kalles også en **vektor i rommet**.

Eksempel 1

$$\vec{a} = [1, 3] \qquad \vec{b} = [0, -2]$$

$$\vec{c} = [-3, -4] \qquad \vec{d} = [5, 0]$$



0.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor $\vec{v}$ med startpunkt (x_1, y_1) og endepunkt (x_2, y_2) er gitt som

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] \tag{1}$$

Eksempel 1

Skriv vektorene på komponentform.

- $\vec{a}$ har startpunkt $(1, 3)$ og endepunkt $(7, 5)$
- $\vec{b}$ har startpunkt $(0, 9)$ og endepunkt $(-3, 2)$
- $\vec{c}$ har startpunkt $(-3, 7)$ og endepunkt $(2, -4)$
- $\vec{d}$ har startpunkt $(-7, -5)$ og endepunkt $(3, 0)$

Svar

$$\vec{a} = [7 - 1, 5 - 3] = [6, 2]$$

$$\vec{b} = [-3 - 0, 2 - 9] = [-3, -7]$$

$$\vec{c} = [2 - (-3), -4 - 7] = [5, -11]$$

$$\vec{d} = [3 - (-7), 0 - (-5)] = [10, 5]$$

Punkt eller vektor

Rent matematisk er det ingen forskjell på et punkt og en vektor; punktet (a, b) viser til akkurat samme plassering som vektoren $[a, b]$, og begge kan vise til den samme forflytningen. Ofte kan det likevel være greit å skille mellom når vi snakker om en plassering og når vi snakker om en forlytning, og til det bruker vi begrepene punkt (plassering) og vektorer (forflytning).

0.2 Regneregler for vektorer

0.2 Addisjon og subtraksjon av vektorer

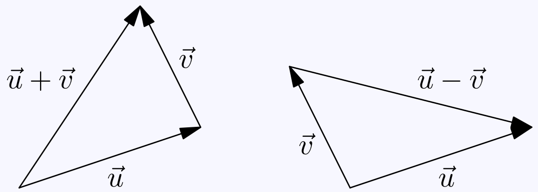
Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, punktet $A = (x_0, y_0)$. Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1) \tag{2}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \tag{3}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \tag{4}$$

Summen eller differansen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan vi tegne slik:



(a) (b)

0.3 Regneregler for vektorer

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$, og et tall t, har vi at

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \tag{5}$$

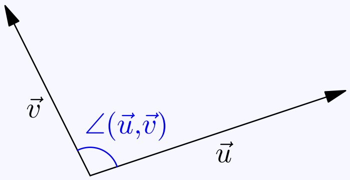
$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \tag{6}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{7}$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \tag{8}$$

0.4 Vinkelen mellom to vektorer

Vinkelen mellom to vektorer er (den minste) vinkelen som blir dannet når vektorene plasseres i samme startpunkt. For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skriver vi denne vinkelen som $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

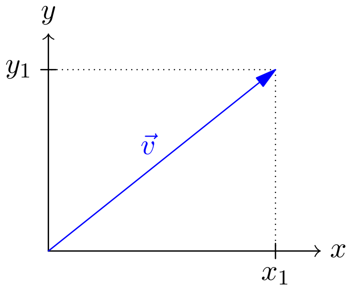


Vinkelmål

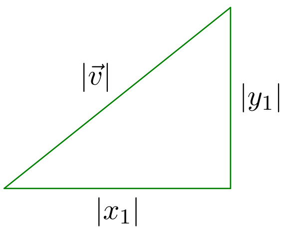
I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkler i grader, altså på intervallet $[0°, 180°]$.

0.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. **Lengden** til $\vec{v}$ er avstanden mellom startpunktet og endepunktet.



(a)



(b)

Av enhver vektor kan vi danne en rettvinklet trekant hvor $|\vec{v}|$ er lengden til hypotenusen, og $|x_1|$ og $|y_1|$ er de respektive lengdene til katetene. Dermed er $|\vec{v}|$ gitt av Pytagoras' setning.

0.5 Lengden til en vektor

Gitt en vektor $\vec{v} = [x_1, y_1]$. Lengden $|\vec{v}|$ er da

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{9}$$

Eksempel 1

Finn lengden til vektorene $\vec{a} = [7, 4]$ og $\vec{b} = [-3, 2]$.

Svar

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

0.4 Skalarproduktet I

0.6 Skalarproduktet I

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, er **skalarproduktet** gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{10}$$

Språkboksen

Skalarproduktet kalles også **prikkproduktet** eller **indre-produktet**.

Ordet *skalar* viser til en éndimensjonal størrelse.

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{a} = [3, 2]$, $\vec{b} = [4{,}7]$ og $\vec{c} = [1, -9]$. Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

Svar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + 2(-9) = -15$$

0.7 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2} \tag{11}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \tag{12}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \tag{13}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} \tag{14}$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^{\,2}$$

når du vet at $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Svar

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^2 &= \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\\ &= \vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\\ &= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\end{aligned}$$

0.5 Skalarproduktet II

Gitt vektoren $\vec{u} - \vec{v}$, hvor $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Da er

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

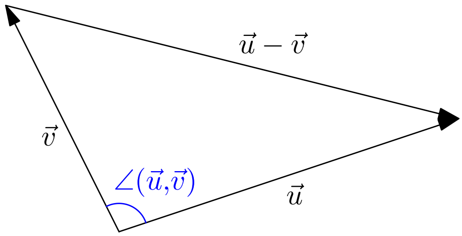
Av (9) har vi at

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Ved hjelp av (10) og (11) kan vi skrive (15) som

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\vec{u}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}} \tag{16}$$

Videre merker vi oss følgende figur:



Av cosinussetningen og (16) er

$$\begin{aligned} |(\vec{v} - \vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{v}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}^{\,2} &= \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

0.8 Skalarproduktet II

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) \tag{17}$$

0.6 Vektorer vinkelrett på hverandre

Fra (17) kan vi gjøre en viktig observasjon; hvis $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 90°$, er $\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0$, og da blir

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

0.9 Vinkelrette vektorer

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har vi at

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v} \tag{18}$$

Språkboksen

Det er mange måter å uttrykke at $\vec{u}\perp\vec{v}$ på. Blant annet kan vi si at

- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett på hverandre.
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står normalt på hverandre.
- $\vec{u}$ er en normalvektor til $\vec{v}$ (og omvendt).
- $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale.

Eksempel 1

Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5, -3]$, $\vec{b} = [6, -10]$ og $\vec{c} = [2, 7]$ er ortogonale.

Svar

Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 5\cdot 6 + (-3)10 \\ &= 0\end{aligned}$$

Altså er $\vec{a}\perp\vec{b}$. Videre er

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{c} &= 5\cdot 2 + (-3)7\cdot \\ &= 11\end{aligned}$$

Altså er $\vec{a}$ og $\vec{c}$ *ikke* ortogonale. Da $\vec{a}\perp\vec{b}$, kan heller ikke $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være ortogonale.

Nullvektoren

I forkant av regel 0.9 har vi bare argumentert for at $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. For å rettferdiggjøre betingelsen som går begge veier i (18), må vi spørre: Kan vi få $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ om vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ *ikke* er $90°$?

På intervallet $[0°, 180°]$ er det bare vinkelverdien $90°$ som resulterer i cosinusverdi 0. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av $\vec{u}$ eller $\vec{v}$ være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er **nullvektoren** $\vec{0} = [0, 0]$, som rett og slett ikke har noen retning[1]. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

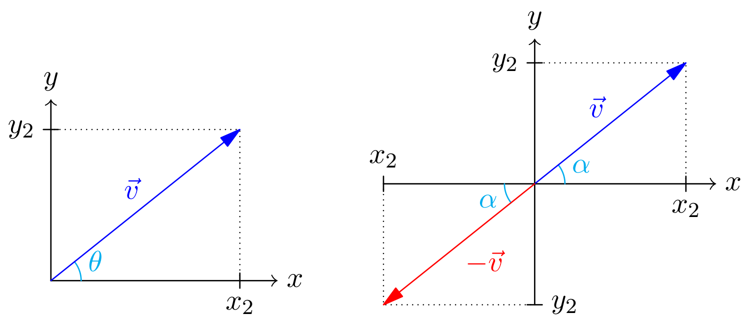
---

[1]Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger!

0.7 Parallelle vektorer

0.10 Parallelle vektorer

Hvis vinkelen mellom to vektorer er $0°$ eller $180°$, er de parallelle.



(a) (b)

Gitt to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. La θ og α være vinkelen mellom x-aksen og henholdsvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$, med x-aksen som høgre vinkelbein. Da er $\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$ og $\tan\alpha = \frac{y_2}{x_2}$. Hvis $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, er det to muligheter:

(i) $\theta = 0°$ og $\alpha = 180°$, eller omvendt.

(ii) $\theta = \alpha$

I begge tilfeller er $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ enten $0°$ eller $180°$, og da er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle. Det omvendte gjelder også: Hvis punkt (i) eller (ii) gjelder, er $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Det er ofte praktisk å omskrive denne sammehengen til forholdet mellom samsvarende komponenter[1]:

[1] For vektorene $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$ er disse samsvarende komponenter:

- x_1 og x_2
- y_1 og y_2

0.11 Parallelle vektorer

For to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{19}$$

Alternativt, for et tall t har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{20}$$

Språkboksen

Når $\vec{u} = t\vec{v}$, sier vi at $\vec{u}$ er et **multiplum** av $\vec{v}$ (og omvendt). Vi sier også at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er **lineært uavhengige**.

Eksempel

Undersøk hvorvidt $\vec{a} = [2, -3]$ og $\vec{b} = [20, -45]$ er parallelle med $\vec{c} = [10, -15]$.

Svar

Vi har at

$$\vec{c} = 5[2, -4] = 5\vec{a}$$

Dermed er $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Da $\frac{20}{10} \neq \frac{-45}{15}$, er $\vec{b}$ og $\vec{c}$ *ikke* parallelle.

0.8 Vektorfunksjoner; parameterisering

0.12

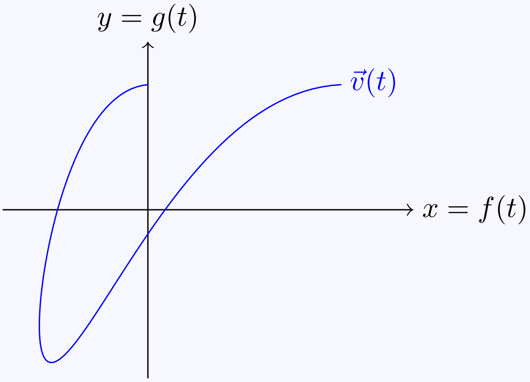
Gitt to funksjoner $f(t)$ og $g(t)$. En vektor $\vec{v}$ på formen

$$\vec{v}(t) = [f(t), g(t)]$$

er da en **vektorfunksjon**.

$\vec{v}$ kan skrives på **parameterisert form** som

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{21}$$

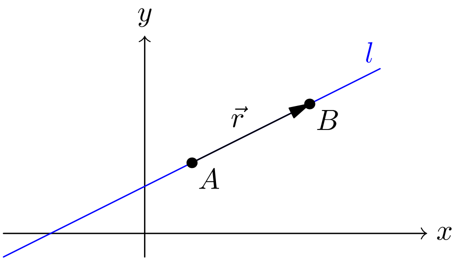


Merk

Til forskjell fra grafen til en skalarfunksjon, kan grafen til en vektorfunksjon ”begevege seg fritt” i koordinatsystemet.

0.8.1 Vektorfunksjonen til ei linje

Gitt ei linje l, som vist i figuren under



Hvis en vektor $\vec{r}$ er parallell med l, kalles den en *retningsvektor* for linja. Si at $\vec{r} = [a, b]$ er en retningsvektor for l, og at $A = (x_0, y_0)$ er et punkt på l. Om vi starter i A og vandrer parallellt med $\vec{r}$, kan vi være sikre på at vi fortsatt befinner oss på linja. Dette må bety at vi for en variabel t kan nå et vilkårlig punkt $B = (x, y)$ på linja ved følgende utregning:

$$B = A + t\vec{r}$$

På koordinatform kan vi skrive dette som[1]

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Altså kan linja skrives som en vektorfunksjon:

0.13 Linje som vektorfunksjon

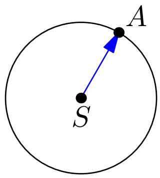
Ei linje $\vec{l}(t)$ som går gjennom punktet $A = (x_0, y_0,)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [a, b]$ er gitt som

$$\vec{l} = [x_0 + at, y_0 + bt]$$

[1]Se (2).

0.9 Sirkellikningen

Gitt en sirkel med sentrum $S = (x_0, y_0)$ og et punkt $A = (x, y)$, som ligger på buen til sirkelen.



Da er

$$\overrightarrow{SA} = [x - x_0, y - y_0]$$

Av (9) er da

$$\left|\overrightarrow{SA}\right|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Hvis vi lar r være radien til sirkelen, er $\left|\overrightarrow{SA}\right| = r$, og dermed kan vi uttrykke r ved koordinatene til S og A.

0.14 Sirkelligningen

Gitt en sirkel radius r og sentrum $S = (x_0, y_0)$. Hvis punktet $A = (x, y)$ ligger på buen til sirkelen, er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Eksempel

Finn sentrum og radien til sirkelen gitt av likningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0 \tag{22}$$

Svar

Vi starter med å lage fullstendige kvadrat:

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 2^2$$

$$y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 5^2$$

Altså kan vi skrive (22) som

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (y + 5)^2 - 2^2 - 5^2 - 20 &= 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 5)^2 &= 7^2\end{aligned}$$

Altså har sirkelen sentrum $(2, -5)$ og radius 7.

0.10 Determinanter

0.15 2×2 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v})$ av to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [b, c]$ er gitt som

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-1, 3]$ og $\vec{v} = [-2, 4]$. Regn ut $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

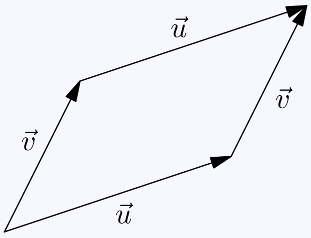
Svar

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

0.16 Arealformler med determinanter

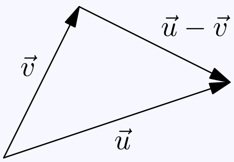
Arealet A til et parallellogram formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{23}$$



Arealet A til en trekant formet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

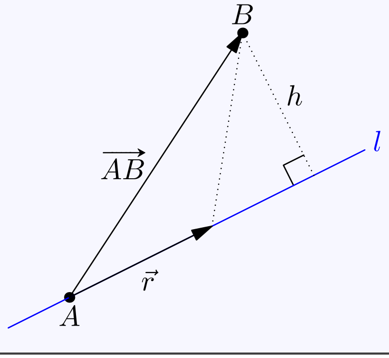
$$A = \frac{1}{2}|\det(\vec{u}, \vec{v})| \tag{24}$$



0.17 Avstand mellom punkt og linje

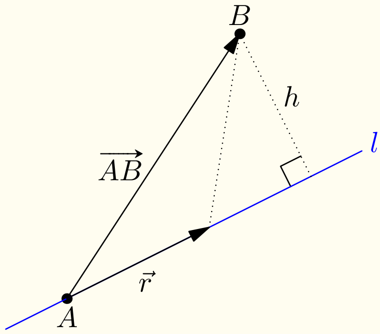
Avstanden h mellom et punkt B og en linje gitt av punktet A og retningsvektoren $\vec{r}$ er gitt som

$$h = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|}{|\vec{r}|} \tag{25}$$



0.17 Avstand mellom punkt og linje (forklaring)

La en linje l i rommet være gitt av et punkt A og en retningsvektor $\vec{r}$. I tillegg ligger et punkt B utenfor linja, som vist i figuren under



Den korteste avstanden fra B til linja er høyden h i trekanten utspent av $\vec{r}$ og $\overrightarrow{AB}$. Arealet til denne trekanten er gitt ved (24):

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|$$

Av den klassiske arealformelen for en trekant har vi nå at

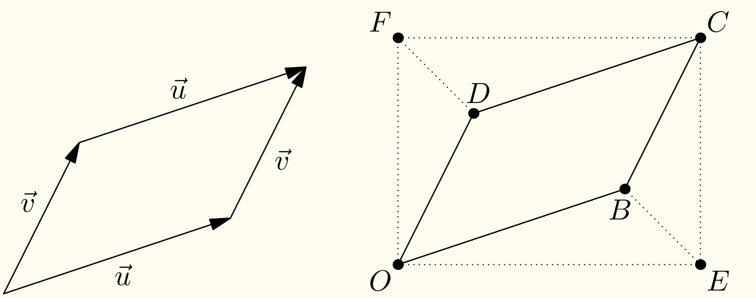
$$\frac{1}{2}|\vec{r}|h = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|$$

$$h = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\right)\right|}{|\vec{r}|}$$

Forklaringer

0.16 Arealformler med determinanter (forklaring)

Vi lar A_N betegne arealet til en geometrisk form N.



(a) (b)

Gitt to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$, hvor $a, b, c, d > 0$, som vist i figur *(a)*. Plasserer vi vektorene i grunnstillingen er punktene vist i figur *(b)* gitt som

$$O = (0, 0) \qquad B = (a, b) \qquad C = (a + b, c + d)$$

$$D = (c, d) \qquad E = (a + c, 0) \qquad F = (0, b + d)$$

Med OE som grunnlinje har $\triangle OEB$ høgde b, altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$ og $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OBE} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

I figurene har vi antatt at (den minste) vinkelen mellom $\vec{v}$ og x-aksen er mindre enn vinkelen mellom $\vec{u}$ og x-aksen. I omvendt tilfelle ville vi fått at

$$A_{\square OECF} = bc - ad$$

Altså er

$$A_{\square OECF} = |ac - bd|$$

På lignende måte kan det vises at (23) gjelder for alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se oppgave **??**.