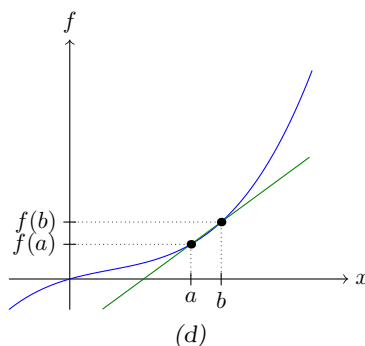
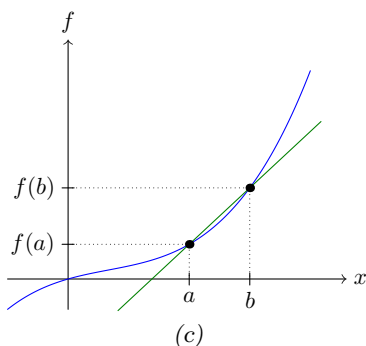
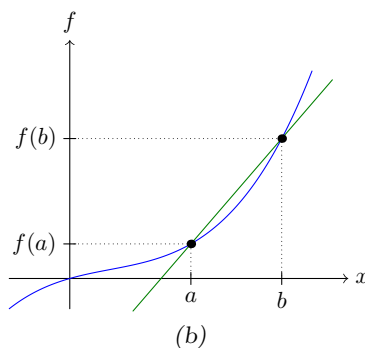
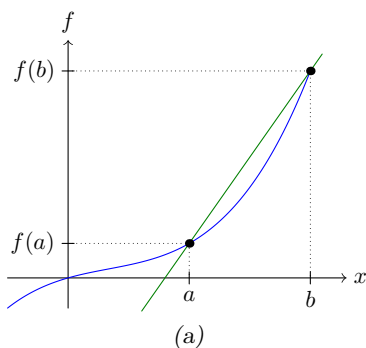


## 0.1 Definisjoner

Gitt en funksjon  $f(x)$  og to  $x$ -verdier  $a$  og  $b$ . Endringen til  $f$  relativ til endringen til  $x$  for disse verdiene er gitt som

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

I [MB](#) har vi sett at uttrykket over gir stigningstallet til linja som går gjennom punktene  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$ . I en matematisk sammenheng er det ekstra interessant å undersøke (1) når  $b$  nærmer seg  $a$ .



Ved å innføre tallet  $h$ , og å sette  $b = a + h$ , kan vi skrive (1) som

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Å **derivere** innebærer å undersøke grenseverdien til denne brøken når  $h$  går mot 0.

### Merk

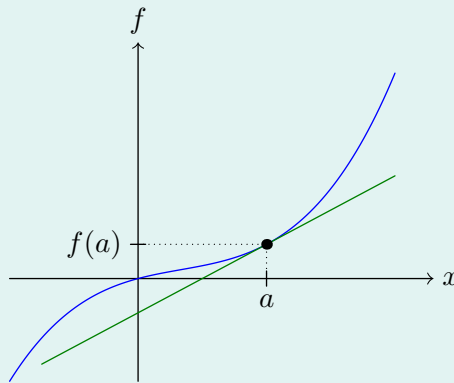
I teksten og figurene over har vi tatt utgangspunkt i at  $b > a$ , men dette er ikke en forutsetning for at uttrykkene er gyldige.

## 0.1 Den deriverte

Gitt en funksjon  $f(x)$ . **Den deriverte av  $f$  i  $x = a$**  er da gitt som

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

Linja som har stigningstall  $f'(a)$ , og som går gjennom punktet  $(a, f(a))$ , kalles **tangeringslinja** til  $f$  for  $x = a$ .



### Eksempel 1

Gitt  $f(x) = x^2$ . Finn  $f'(2)$ .

**Svar**

Vi har at

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^2 + 4h + (h)^2 - 2^2}{h} \\ &= 4 \end{aligned}$$

## Eksempel 2

Gitt  $f(x) = x^3$ . Finn  $f'(a)$ .

### Svar

Vi har at

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Altså er  $f'(a) = 3a^2$ .

## Alternativ definisjon

En ekvivalent utgave av (2) er

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3)$$

## Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon  $f(x)$  og en variabel  $k$ . Siden  $f'(a)$  angir stigningstallet til  $f(a)$  for  $x = a$ , vil en tilnærming til  $f(a+k)$  være

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k$$

Det er ofte nyttig å vite differansen  $\varepsilon$  mellom en tilnærming og den faktiske verdien:

$$\varepsilon = f(a+k) - [f(a) + f'(a)k] \quad (4)$$

Vi legger merket til at<sup>1</sup>  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$ , og skriver om (4) til en formel for  $f(x+k)$ :

---

<sup>1</sup>Dette overlates til leseren å vise.

## 0.2 Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon  $f(x)$  og en variabel  $k$ . Da finnes en funksjon  $\varepsilon$  slik at

$$f(a+k) = f(a) + f'(a)k + \varepsilon \quad (5)$$

hvor  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$ .

Tilnærmingen

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(x)k \quad (6)$$

kalles **lineærapproksimasjonen** av  $f(a+k)$ .

## 0.2 Derivasjonsregler

### 0.2.1 Den deriverte

*Eksempel 2* på side 3 belyser noe viktig; hvis grenseverdien i (2) eksisterer, vil  $f'(a)$  være uttrykt ved  $a$ . Og selv om  $a$  betraktes som en konstant langs veien som fører til dette uttrykket, er det ingenting som hindrer oss i å etterpå behandle  $a$  som en variabel. Hvis  $f'(a)$  er et resultat av derivasjon av funksjonen  $f(x)$  er det også hendig å omdøpe  $a$  til  $x$ :

### 0.3 Den deriverte funksjonen

Gitt en funksjon  $f(x)$ . **Den deriverte av  $f$**  er funksjonen som fremkommer ved å erstatte  $a$  i (2) med  $x$ . Denne funksjonen skriver vi som  $f'(x)$ .

### Eksempel

Gitt  $f(x) = x^3$ . Siden<sup>1</sup>  $f'(a) = 3a^2$ , er  $f'(x) = 3x^2$ .

---

<sup>1</sup>Se *Eksempel 2*, side 3.

### Alternative skrivemåter

Alternative skrivemåter for  $f'$  er  $(f)'$  og  $\frac{d}{dx}f$ .

### Derivert med hensyn på

Derivasjon som vi har sett på så langt har vært en brøk med en differanse av  $x$ -verdier i nevner og den tilknyttede differansen av  $f$ -verdier i teller. Da sier vi at  $f$  er derivert med **hensyn på  $x$** . I denne bokserien skal vi i all hovedsak se på funksjoner som bare er avhengige av én variabel. Gitt en funksjon  $f(x)$ , er det da underforstått at  $f'$  symboliserer  $f$  derivert med hensyn på  $x$ .

Samtidig er det greit å være klar over at en funksjon gjerne kan være avhengig av flere variabler. For eksempel er funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

en **flervariabel funksjon**, avhengig av både  $x$  og  $y$ . I dette tilfellet kan vi bruke skrive  $\frac{d}{dx}f$  for å indikere derivasjon med hensyn på  $x$ , og  $\frac{d}{dy}f$  for å indikere derivasjon med hensyn på  $y$ . Leseren må gjerne forklare for seg selv hvorfor følgende stemmer:

$$\frac{d}{dx}f = 2x \quad , \quad \frac{d}{dy}f = 3y^2,$$

## 0.2.2 Den deriverte av elementære funksjoner

### 0.4 Den deriverte av elementære funksjoner

For en variabel  $x$  og  $r \in \mathbb{R}$  er

$$(e^x)' = e^x \tag{7}$$

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{8}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{9}$$

$$(\sin x)' = \cos(x) \tag{10}$$

$$(\cos x)' = -\sin(x) \tag{11}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{12}$$

### 0.5 Den deriverte av sammensatte funksjoner

Gitt  $c \in \mathbb{R}$  og funksjonene  $f(x)$  og  $g(x)$ . Da er

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

### 0.6 Den andrederiverte

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$ . Da er den **andrederiverte av  $f$**  gitt som

$$(f')' = f'' \tag{13}$$

## 0.7 Den deriverte av en vektorfunksjon

Gitt funksjonene  $f(t)$ ,  $g(t)$  og  $v(t) = [f(t), g(t)]$ . Da er

$$v'(t) = [f'(t), g'(t)] \quad (14)$$

### 0.2.3 Kjernerregelen

La oss se på tre funksjoner  $f$ ,  $g$  og  $u$ , hvor

$$f(x) = g[u(x)]$$

$f$  beskrives direkte av  $x$ , mens  $g$  beskrives indirekte av  $x$ , via  $u(x)$ .

La oss bruke  $f(x) = e^{x^2}$  som eksempel. Kjenner vi verdien til  $x$ , kan vi fort regne ut hva verdien til  $f(x)$  er. For eksempel er

$$f(2) = e^4$$

Men vi kan også skrive  $g[u(x)] = e^{u(x)}$ , hvor  $u(x) = x^2$ . Denne skrivemåten impliserer at når vi kjenner verdien til  $x$ , regner vi først ut verdien til  $u$ , før vi så finner verdien av  $g$ :

$$u(2) = 4 \quad , \quad g[u(2)] = e^{u(2)} = e^4$$

Av (2) har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g[u(x+h)] - g[u(x)]}{h} \end{aligned}$$

Vi setter  $k = u(x+h) - u(x)$ . Da er

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g[u(x+h)] - g[u(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h}$$

Av (5) har vi at

$$g(u) - g(u+k) = g'(u)k + \varepsilon_g$$

Altså er

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(u)k + \varepsilon_g}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} \end{aligned}$$

Da  $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ , er  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_g}{k} = 0$ . Videre har vi at  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = u'(x)$ . Altså har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} = g'(u)u'(x)$$

## 0.8 Kjernerregelen

For en funksjon  $f(x) = g[u(x)]$  har vi at

$$f'(x) = g'(u)u'(x) \quad (15)$$

### Eksempel

Finn  $f'(x)$  når  $f(x) = e^{x^2+x+1}$ .

#### Svar

Vi setter  $u = x^2 + x + 1$ , og får at

$$g(u) = e^u$$

$$g'(u) = e^u$$

$$u'(x) = 2x + 1$$

Altså er

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u(2x + 1) \\ &= e^{x^2+x+1}(2x + 1) \end{aligned}$$

## 0.2.4 Produkt- og divisjonsregelen

Gitt funksjonene  $f$ ,  $u$  og  $v$ , hvor

$$f(x) = u(x)v(x)$$

Av (0.1) er da

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

La oss nå skrive  $u(x)$  og  $v(x)$  som henholdsvis  $u$  og  $v$ , og  $u(x+h)$  og  $v(x+h)$  som henholdsvis  $\tilde{u}$  og  $\tilde{v}$ :

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h}$$



Vi kan alltid legge til 0 i form av  $\frac{u\tilde{v}}{h} - \frac{u\tilde{v}}{h}$ :

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h} + \frac{u\tilde{v}}{h} - \frac{u\tilde{v}}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{(\tilde{u} - u)\tilde{v}}{h} + \frac{u(\tilde{v} - v)}{h} \right] \end{aligned}$$

Siden vi for enhver kontinuerlig funksjon  $g$  har at  $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{g} = g$  og

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g', \text{ er}$$

$$f' = u'v + uv'$$

## 0.9 Produktregelen ved derivasjon

Gitt funksjonene  $f(x)$ ,  $u(x)$  og  $v(x)$ , hvor  $f = uv$  da er

$$f' = u'v + uv'$$

### Eksempel 1

Finn den deriverte av funksjonen  $f(x) = x^2 e^x$ .

#### Svar

Vi setter  $u(x) = x^2$  og  $v(x) = e^x$ , da er

$$f = uv \qquad u' = 2x \qquad v' = e^x$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= xe^x(2 + x) \end{aligned}$$

## 0.10 Divisjonsregelen ved derivasjon

Gitt funksjonene  $f(x)$ ,  $u(x)$  og  $v(x)$ , hvor  $f = \frac{u}{v}$ . Da er

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{16}$$

## Eksempel

Finn den deriverte av funksjonen  $f(x) = \frac{\cos x}{x^4}$ .

### Svar

Vi setter  $u(x) = \cos x$  og  $v(x) = x$ , da er

$$f = uv \qquad u' = -\sin x \qquad v' = 4x^3$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= \frac{-\sin x \cdot x^4 - \cos x \cdot 4x^3}{x^8} \\ &= -\frac{x \sin x + 4 \cos x}{x^5} \end{aligned}$$

*Merk:* Vi kan også finne  $f'$  ved å sette  $u(x) = \cos x$  og  $v(x) = x^{-4}$ , for så å bruke produktregelen.

### 0.11 L'Hopitals regel

Gitt to deriverbare funksjoner  $f(x)$  og  $g(x)$ , hvor

$$f(a) = g(a) = 0$$

Da er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'}$$

### Eksempel

Finn grenseverdien til  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

### Svar

Vi setter  $f(x) = e^x - 1$  og  $g(x) = x$ , og merker oss at  $f(0) = g(0) = 0$ . Dermed har vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'}{g'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

## Forklaringer

### L'hoptial (forklaring)

Siden  $f(a) = g(a) = 0$ , er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Av (3) har vi da at

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 0.10 Divisjonsregelen ved derivasjon (forklaring)

Vi har at

$$f' = \left( \frac{u}{v} \right)' = (uv^{-1})'$$

Av produktregelen og kjerneregelen er da

$$\begin{aligned} f' &= u'v^{-1} - uv^{-2}v' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

## 0.4 Den deriverte av elementære funksjoner (forklaring)

### Likning (8)

Vi starter med å merke oss at

$$\begin{aligned}(\ln x^r)' &= (r \ln x)' \\ &= \frac{r}{x}\end{aligned}$$

Vi setter  $u = x^r$ . Av kjerneregelen har vi da at

$$\begin{aligned}\frac{r}{x} &= (\ln u)' \\ &= \frac{1}{u} u' \\ &= \frac{1}{x^r} (x^r)'\end{aligned}$$

Altså er

$$(x^r)' = \frac{r}{x} x^r = r x^{r-1}$$

### Likning (9)

Vi har at  $x = e^{\ln x}$ . Vi setter  $u = \ln x$  og  $g(u) = e^u$ . Da har vi at  $x = g(u)$ , og at

$$\begin{aligned}g'(u) &= e^u = e^{\ln x} = x \\ u'(x) &= (\ln x)'\end{aligned}$$

Av kjerneregelen har vi at

$$\begin{aligned}(x)' &= g'(u) u'(x) \\ &= x (\ln x)'\end{aligned}$$

Da<sup>1</sup>  $(x)' = 1$ , har vi at

$$1 = x (\ln x)'$$

Altså er

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Vi skal her anvende de to ligningene (se vedlegg??)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{I})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad (\text{II})$$

Av (2) har vi at

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Ved (??) kan vi skrive

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\cos h - 1] \cos x - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cos x - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \sin x \\ &= 0 - 1 \cdot \sin x \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

Mellom tredje og fjerde linje i likningen over brukte vi (I) og (II).

### Likning (11)

Av (??), (??) og (??) har vi at

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) &= \cos x \end{aligned}$$

Bruker vi det faktum at  $(\cos x)' = -\sin x$ , i kombinasjon med kjerneregelen, får vi at

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \left( \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right)' \\ &= -\sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot 1 \\ &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

### Likning (12)

Av kjerneregelen og (??) har vi at

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\&= \cos x \cos^{-1} x + \sin x \left( \cos^{-1} \right)' \\&= 1 + \sin x (-\cos^{-2} x) (-\sin x) \\&= 1 + \tan^2 x \\&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\&= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Se oppgave ??.