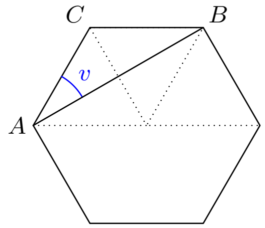
Oppgaver for kapittel 0

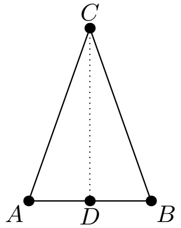
Gruble ??

En regulær sekskant kan deles in i seks kongruente, likesidete trekanter. Dette betyr at $\angle C = 120^\circ$. Da $\triangle ABC$ er likebeint, er derfor

$$
\begin{aligned}
2\angle BAC + 120^\circ &= 180^\circ \\
\angle BAC &= 30
\end{aligned}
$$

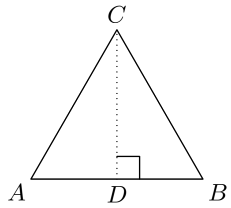


Gruble ??



Vi lar D være punktet der halveringslinja til $\angle ACB$ skjærer AB. $\triangle DAC \cong \triangle DBC$ fordi de har CD felles og $AC = BC$ (trekantene oppfyller altså vilkår iii for formlikhet, og må da være kongruente). Følgelig er $\angle BDA = \angle ADC$, og da er $2\angle DBA = 180^\circ$. Altså er $\angle DBA = 90^\circ$, og da $AD = BD$, ligger DC på midtnormalen til AB.

Gruble ??



a) Da $\triangle ABC$ er likesidet, er D midpunktet på AB. Dermed er

$$AD = DB = \frac{AB}{2} = \frac{s}{2}$$

$\triangle ACD$ er en trekant med vinkler lik 30°, 60° og 90° og $AC = 2AD$. Altså er den lengste siden dobbelt så lang som den korteste.

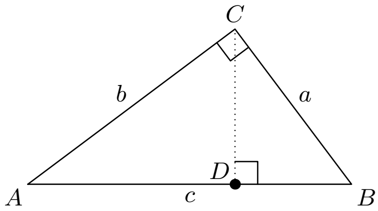
b) Av Pytagoras' setningpå $\triangle ADC$ har vi at

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 - AD^2 \\ &= s^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}s^2 \end{aligned}$$

Altså er

$$CD = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Gruble ??



a) $\triangle CDA \sim \triangle BCA$ fordi begge er rettvinklede og de har $\angle BAC$ felles. Dermed er

$$AD = \frac{AC}{AB}AC = \frac{b^2}{c}$$

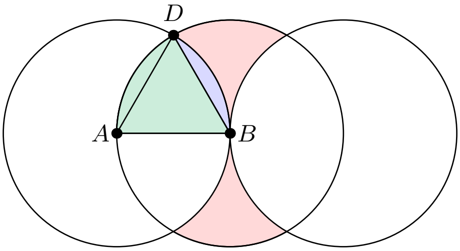
b) $\triangle BDA \sim \triangle BCA$ fordi begge er rettvinklede og de har $\angle CBA$ felles. Dermed er

$$DB = \frac{BC}{AB}BC = \frac{a^2}{c}$$

c) Vi har at

$$\begin{aligned} c &= AD + DB \\ c &= \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} \\ c^2 &= b^2 + a^2 \end{aligned}$$

Gruble ??



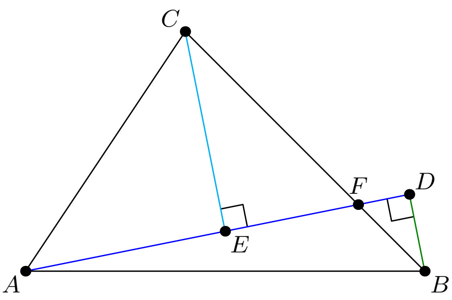
$\triangle ABD$ er likesidet fordi $AD = AB = BD$, og har dermed areal lik $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AB^2 = \sqrt{3}$. Da $\angle B = 60°$, utgjør den grønne sektoren $\frac{1}{6}$ av sirklenes areal, følgelig er arealet til den grønne sektoren $\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 2^2 = \frac{2\pi}{3}$. Vi har at

$$\begin{aligned}\text{areal til grønt og blått område} &= 2\cdot\text{areal til grønt område} - A_{\triangle ABD} \\ &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}\text{areal til rødt omrdåde} &= \text{areal til sirkel} - 4\cdot\text{areal til grønt og blått område} \\ &= 4\pi - 4\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

Gruble ??



$\triangle EFC \sim \triangle DFB$ fordi begge er rettvinklede, og $\angle CFE = \angle BFD$ (de er toppvinkler). Dermed har vi at

$$\frac{EF}{CE} = \frac{FD}{BD} \tag{1}$$

Videre er

$$EF + FD = AD - AE \tag{2}$$

Ved å løse likningssettet vi får av (1) og (2), med hensyn på EF og ED, får vi at

$$EF = \frac{AD - AE}{CE + BD}CE \qquad , \qquad FD = \frac{AD - AE}{CE + BD}BD$$

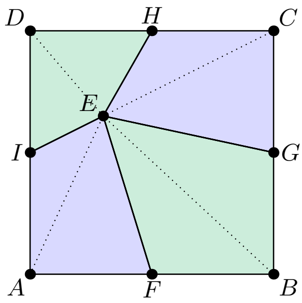
Det doble arealet til $\triangle ABC$ er gitt som

$$\begin{aligned}&(AE + EF)CE + (AD - FD)BD \\ &\qquad = \left(AE + \frac{AD - AE}{CE + BD}CE\right)CE + \left(AD - \frac{AD - AE}{CE + BD}BC\right)BD\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{CE + BD} \left[(AE \cdot BD + AD \cdot CE)\, CE + (AD \cdot CE + AE \cdot BD)\, BD \right]$$

$$= AD \cdot CE + AE \cdot BD$$

Gruble ??



Av å legge merke til trekanter med grunnlinje og høgde av lik lengde, finner vi at

$$A_{\triangle AFE} = A_{\triangle FBE} \qquad A_{\triangle AIE} = A_{\triangle EDI}$$

$$A_{\triangle BCE} = A_{\triangle GCE} \qquad A_{\triangle HDE} = A_{\triangle HCE}$$

Følgelig er

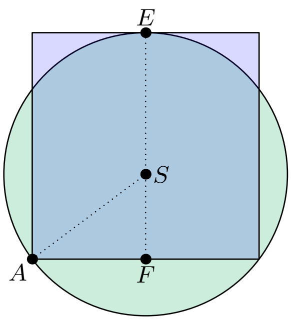
$$(A_{\triangle AFE} + A_{\triangle AIE}) + (A_{\triangle BCE} + A_{\triangle HDE}) = (A_{\triangle FBE} + A_{\triangle EDI}) + (A_{\triangle GCE} + A_{\triangle HCE})$$
$$A_{\square AFEI} + A_{\square GCHE} = A_{\square FBGE} + A_{\square DIEH}$$

Altså er arealet til det blåfargede området er det samme som arealet til det grønnfargede området.

Gruble ??
Vi lar r være radien til sirkelen. Vi har at $AS = ES = r$, $AF = 2$, og at $FS = EF - SE = 4 - r$. Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle AFS$ er

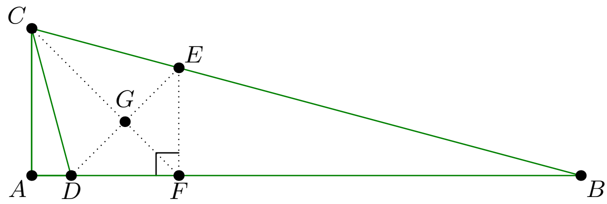
$$AS^2 = AF^2 + SF^2$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 2^2 + (4-r)^2 \\ r^2 &= 4 + 16 - 8r + r^2 \\ 8r &= 20 \\ r &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$



Gruble ??

a) **Alternativ 1**



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$. Videre lar vi E være punktet på BC slik at $CD = CE$, da er $\triangle CDE$ likesidet. Vi setter $s = CD$. Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle CBD$ er $\angle BDC = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 105^\circ$, og da er $\angle FDE = 45^\circ$. Altså er $\triangle DFE$ rettvinklet og likebeint, som betyr at $DF = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Altså er

$$CF = CG + GF = \frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{s}{2}$$

Vi uttrykker det doble arealet til $\triangle DFC$ på to måter:

$$\begin{aligned} DF \cdot CA &= GD \cdot CF \\ \frac{s}{\sqrt{2}}b &= \frac{s}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{s}{2}\right) && (s \neq 0) \\ 4b &= s(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \\ s &= \frac{4b}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \end{aligned}$$

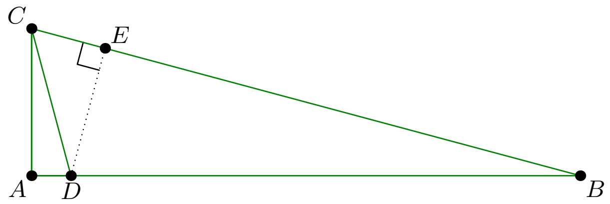
Da $\triangle ABC \sim \triangle BFE$, er

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{BE}{EF} \\ \frac{a}{b} &= \frac{a-s}{\frac{s}{\sqrt{2}}} \\ sa - a\sqrt{2} &= -bs\sqrt{2} \\ \frac{a}{b} &= s\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b - s} \end{aligned}$$

Altså er

$$\frac{a}{b} = \frac{4b}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b - \frac{4b}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$$

Alternativ 2



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$, og dermed er $\triangle CDE$ en 30°, 60°, 90° trekant. Vi setter $s = CE$ og $c = AB$. Da er $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ og $CE = \frac{s}{2}$. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle EBD$ fordi alle er rettvinklede og har en vinkel lik 15°. Dermed er

$$CD \cdot AB = BC \cdot AC$$
$$cs = ab$$

Videre har vi at

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DE}$$
$$\frac{c}{b} = \frac{a - \frac{s}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}s}$$
$$c = \frac{2ab - s}{\sqrt{3}s}$$
$$\sqrt{3}c = 2c - b$$

Altså er

$$c = \frac{b}{2 - \sqrt{3}} = b(2 + \sqrt{3})$$

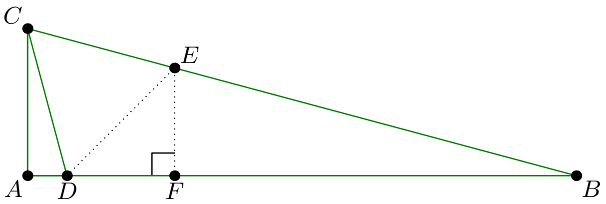
Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ABC$ er

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = b^2(2 + \sqrt{3})^2 + b^2$$
$$\frac{a^2}{b^2} = 8 + 4\sqrt{3}$$

Da $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$, er

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

Alternativ 3



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$. Videre lar vi E være punktet på BC slik at $CD = CE$, da er $\triangle CDE$ likesidet. Vi setter $s = CD$, og $c = AB$. $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ fordi begge er rettvinklede, og $\angle ACD = \angle ABC$. Dermed er

$$AD = AC\frac{AC}{AB} = \frac{b^2}{c}$$

$$s = BC\frac{AC}{AB} = \frac{ab}{c}$$

Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle CBD$ er $\angle BDC = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 105^\circ$, og da er $\angle FDE = 45^\circ$. Altså er $\triangle DFE$ rettvinklet og likebeint, som betyr at $DF = FE = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Da $\triangle ABC \sim FBE$, er $\triangle ACD \sim \triangle FBE$, og dermed er

$$\begin{aligned} EF \cdot CD &= AD \cdot EB \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ab}{c}\right)^2 &= \frac{b^2}{c}\left(a - \frac{ab}{c}\right) && (a,b \neq 0) \\ a &= c\sqrt{2} - b\sqrt{2} \end{aligned}$$

Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ABC$ har vi at $c^2 = a^2 - b^2$, og følgelig er

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2} - b\sqrt{2} \\ a + b\sqrt{2} &= \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2} \\ a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 &= 2(a^2 - b^2) \\ -a^2 + 2ab\sqrt{2} + 4b^2 &= 0 \end{aligned}$$

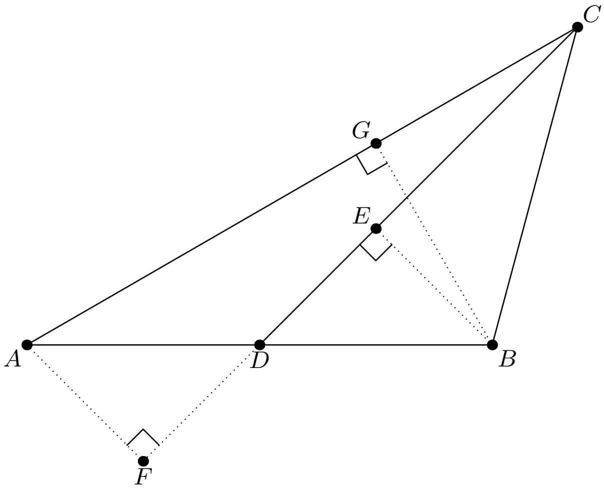
Av abc-formelen har vi at

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2b\sqrt{2} \pm \sqrt{8b^2 + 16b^2}}{-2} \\ &= \left(\sqrt{2} \mp \sqrt{6}\right) b \end{aligned}$$

Vi forkaster den negative løsningen for a, og får at

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

b)



$A_{\triangle DBC} = A_{\triangle ADC}$ fordi med henholdsvis DB og AD som grunnlinje har de lik høgde, og $DB = AD$. Altså er $AF \cdot DC = EB \cdot DC$, og da er $AF = EB$. Videre er $\triangle DAF \cong \triangle DBE$ fordi begge er rettvinklede $\angle ADF = \angle BDE$ (de er toppvinkler), og $AD = DB$. Vi setter $x = DE$, $a = EB$ og $b = AC$. Da $\triangle BCE$ er en $30°$, $60°$, $90°$ trekant, er $EC = \sqrt{3}a$ og $BC = 2a$. Da $\triangle BGC$ er en $45°$, $45°$, $90°$ trekant, er $GB = \frac{2}{\sqrt{2}}a$. Da $A_{\triangle ABC} = 2A_{\triangle DBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} b \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}a &= 2(\sqrt{3}a + x) \cdot a \\ b &= \sqrt{2}(\sqrt{3}a + x) \end{aligned}$$

Av løsningen i oppgave a) har vi at $AC = (\sqrt{2} + \sqrt{6})AF$, og dermed er $b = a\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$. Altså er $x = a$, som betyr at $\triangle AFD$ er en $45°$, $45°$, $90°$ trekant. Ved å betrakte vinkelsummen i $\triangle CAF$, finner vi da at

$$\begin{aligned} \angle DAC &= 180° - 15° - 90° - 45° \\ &= 30° \end{aligned}$$

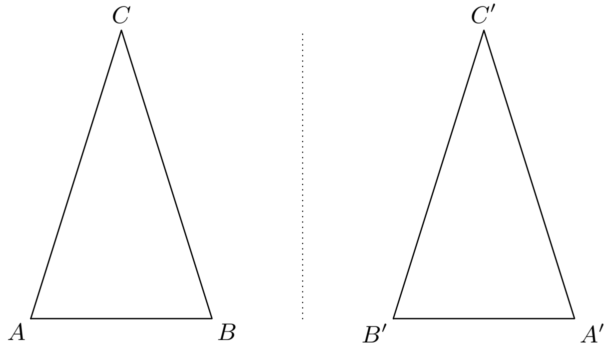
Alternativ metode for å vise at $x = a$

Av Pytagoras' setning på $\triangle ACD$ har vi at

$$\begin{aligned} AC^2 &= FC^2 + AF \\ 2(\sqrt{3}a + x)^2 &= (\sqrt{3}a + 2x)^2 + a^2 \\ x^2 &= a^2 \end{aligned}$$

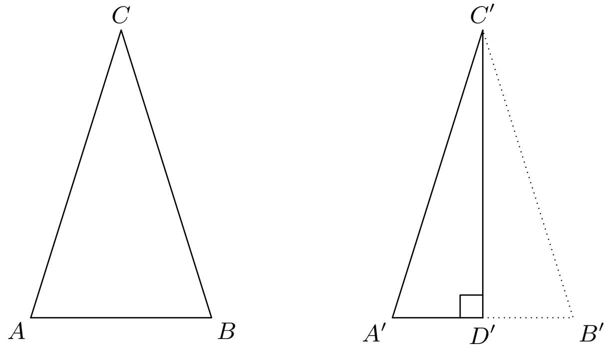
Gruble ??

a) **Alternativ 1**



Vi lar $\triangle A'B'C'$ være en speilet utgave av $\triangle ABC$. Da $\angle C = \angle C'$, $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB}$ og $\frac{AC}{B'C'} = \frac{BC}{A'C'}$, har vi av vilkår (iii) i regel **??** at $\triangle ABC \sim \triangle BA'C'$. Mer spesifikt betyr dette at AC er den samsvarende siden til $B'C'$, som betyr at $\angle B = \angle A' = \angle A$.

Alternativ 2



Vi kan alltids konsturere en rettvinklet trekant $\triangle A'D'C'$ hvor $2AD' = AB$ og $A'C' = AC$. Ved å la B' være A' speilet om $C'D'$, har vi at $\angle A' = \angle B$ og $B'C' = A'C$. Dermed har $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ parvis like lange sider, og er derfor kongruente. Da AB er den samsvarende siden til $A'B'$, er BC den samsvarende siden enten til $B'C'$ eller til $A'C'$. Uansett hvilke to av disse det er, har vi at $\angle A = \angle A' = \angle B'$, og tilsvarende er $\angle B = \angle A' = \angle B'$.

b) Vi plasserer D på forlengelsen av CB slik at $CD = CA$. Av oppgave a) er da $\angle DAC = \angle D$, som betyr at

$$\angle BAC < \angle D \qquad , \qquad \angle D - \angle BAC > 0 \tag{3}$$

Videre er $\angle C = 180^\circ - 2\angle D$, og da er

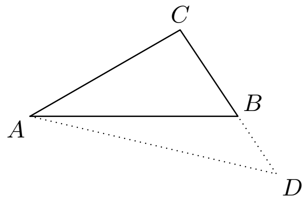
$$B = 180^\circ - \angle C - \angle BAC = 2\angle D - \angle BAC \tag{4}$$

Av (3) og (4) har vi at

$$\angle B > \angle D$$

Dermed er

$$\angle BAC < \angle D < \angle B$$



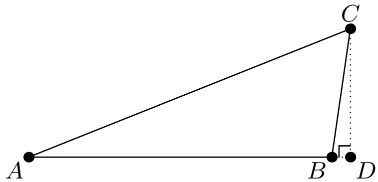
c) Hvis CD ligger utenfor $\triangle ABC$, har vi av Pytagoras' setning at

$$(AB + DB)^2 = AC^2 - CD^2$$

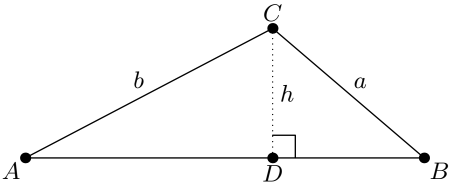
Dette betyr at

$$\begin{aligned} (AB + DB)^2 &< AC^2 \\ AB^2 &< AC^2 \\ AB &< AC \end{aligned}$$

Da AB er den lengste siden i $\triangle ABC$, er dette en selvmotsigelse, og dermed må CD ligge inni trekanten.



d) At $a + c > b$ og at $b + c > a$ følger direkte av at c er den største lengden. Av oppgave c) vet vi at CD ligger inni $\triangle ABC$, som vist i figuren under.



Av Pytagoras' setning har vi at

$$b^2 = AD^2 + h^2 \qquad , \qquad a^2 = BD^2 + h^2$$

Som betyr at

$$b > AD \qquad , \qquad a > BD$$

Da $c = AD + DB$, er dermed

$$c < b + a$$