Løsningsforslag TM2

Kapittel 1

a) Vi bruker den eksplisitte fomelen for en aritmetisk følge, og får:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + d(i-1) \\ 30 &= 3 + d(4-1) \\ 27 &= 3d \\ 9 &= d \end{aligned}$$

Altså er

$$a_i = 3 + 9(i-1)$$

c) Vi observerer at:

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 &= a_1 + d(5-1) - (a_1 + d(3-1)) \\ a_5 - a_3 &= 2d \\ 26 - 14 &= 2d \\ 6 &= d \end{aligned}$$

Videre har vi at:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ 14 &= a_1 + 12 \\ 2 &= a_1 \end{aligned}$$

Altså er

$$a_i = 2 + 6(i-1)$$

1.1.3

a) Vi har at:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

Dermed er det eksplisitte uttrykket gitt som:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{1-i} \end{aligned}$$

b) Vi vet at:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot k^{4-1} &= a_4 \\ 5 \cdot k^3 &= 40 \\ k^3 &= 8 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Altså får vi:

$$a_n = 5 \cdot 2^{i-1}$$

1.2.3

a) Vi observerer at rekka er en aritmetisk rekke med $a_1 = 7$ og $d = 6$. For å finne summen trenger vi verdien til a_{10}:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 7 + 6(10 - 1) \\ &= 61 \end{aligned}$$

Summen S_{10} blir da:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{7 + 61}{2} \\ &= 340 \end{aligned}$$

b) Se a.

1.2.4

Rekken er aritmetisk med $a_1 = 8$ og $d = 3$. Vi har at:

$$\begin{gathered} n\frac{8 + (8 + 3(n - 1))}{2} = 435 \\ 3n^2 + 13n - 870 = 0 \end{gathered}$$

Vi bruker *abc*-formelen og får at $n \in \{15, -\frac{58}{3}\}$, hvorav $n = 15$ er eneste mulige svar.

1.2.5 Dette er den aritmetiske rekken fra eksempelet på side 14. I formelen for S_n setter vi inn det eksplisitte uttrykket for a_n, og får at

$$\begin{aligned} S_n &= n\frac{a_1 + a_1 + d(n - 1)}{2} \\ 2 \cdot 903 &= n(3 + 3 + 4(n - 1)) \\ 0 &= 6n + 4n^2 - 4n - 2 \cdot 903 \\ 0 &= 2n^2 + n - 903 \end{aligned}$$

Denne ligningen har løsningene $n \in \left\{21, -\frac{43}{2}\right\}$. Vi søker et positivt heltall, derfor er $n = 21$ eneste mulige løsning.

1.2.6 Dette er den geometriske rekken fra eksempelet på side 16. Vi lar n være antall ledd, og får at

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} &= 93 \\ 2^n - 1 &= \frac{93}{3} \\ 2^n &= 31 + 1 \\ 2^n &= 2^5 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

1.2.7

$$\begin{aligned} 3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 3^n &= 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \ldots \cdot 3^n \\ &= 3^{1+2+\ldots+n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3^{n\frac{1+n}{2}} \\
&= 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}
\end{aligned}
$$

Som er det vi skulle vise.

1.2.8
Rekken er geometrisk, med $a_1 = 3$ og $k = 4$. For å finne summen må vi vite hvor mange ledd rekken består av:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 4^{n-1} &= 768 \\
4^{n-1} &= 256 \\
4^{n-1} &= 4^4 \\
n - 1 &= 4 \\
n &= 5
\end{aligned}
$$

1.2.9
a) Summen S_n er gitt som:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 2 \cdot \frac{1-3^k}{1-3} \\
&= 2 \cdot \frac{1-3^k}{-2} \\
&= 3^k - 1
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
S_3 &= 3^3 - 1 \\
&= 26
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
3^n - 1 &= 728 \\
3^n &= 729 \\
3^n &= 3^6 \\
n &= 6
\end{aligned}
$$

1.2.11 Dette er gen geometriske rekken fra eksempelet på side **??**.

a) Hvis rekka har en endelig sum $S_\infty = \frac{3}{2}$, er

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x-1} &= \frac{3}{2} \\
2x &= 3(x-1) \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Summen av rekka er altså $\frac{3}{2}$ når $x = 3$.

b) Skal summen bli -1, må x oppfylle følgende ligning:

$$
\frac{x}{x-1} = -1
$$

$$x = -(x - 1)$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Men $x = \frac{1}{2}$ oppfyller ikke kravet om at rekka er konvergent (den er divergent) for dette valget av x. Altså er det ingen verdier for x som oppfyller ligningen.

1.2.10

a) Dette er en uendelig geometrisk rekke med $k = \frac{1}{4}$. Siden $|k| < 1$ er rekka konvergent.

b) Siden rekka er uendelig geometrisk og konvergent, har rekka en endelig sum S_∞ gitt ved:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

1.2.12

a) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$. Dette er en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{9}{10}$ og $k = 10^{-1}$. **b)** Fordi $|k| < 1$ er rekken konvergent. Den uendelige summen er derfor gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Summen av rekken blir 1, altså er 0.999... = 1 (!).

1.2.13

a) Vi observerer at $k = x - 2$. Skal rekka konvergere må altså $|x - 2| < 1$. Skal dette være sant må vi ha at:

$$\begin{aligned} -1 &< x - 2 \\ 1 &< x \end{aligned}$$

og videre at:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 1 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Derfor må vi ha at $1 < x < 3$.

b)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-(x-2)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3(3-x)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{18-6x} = \frac{2}{9}$$

$$18-6x = 9$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ ligger i konvergensområdet, og er derfor et gyldig svar.

c)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-(x-2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3(3-x)} = \frac{1}{6}$$

$$3(3-x) = 6$$

$$x = 1$$

Men $x = 1$ ligger ikke i konvergensområdet, og er derfor ikke et gyldig svar. $S_n = \frac{1}{6}$ har derfor ingen løsning.

1.3.1

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$1+2+3+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} =$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1 = 2^n - 1$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k, får vi:

$$
\begin{aligned}
1+2+2^2+...+2^{k+1-1} &= 2^{k+1}-1 \\
2^k-1+2^k &= \\
2\cdot 2^k-1 &= \\
2^{k+1}-1 &= 2^{k+1}-1
\end{aligned}
$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

c) Vi sjekker påstanden for $n=1$:

$$
\begin{aligned}
4 &= \frac{4}{3}(4^1-1) \\
4 &= \frac{4}{3}\cdot 3 \\
4 &= 4
\end{aligned}
$$

Påstanden er sann for $n=1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n=k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$
\begin{aligned}
4+4^2+4^3+\ldots+4^{k+1} &= \frac{4}{3}(4^{k+1}-1) \\
\frac{4}{3}(4^k-1)+4^{k+1} &= \\
\frac{4^{k+1}-1+3\cdot 4^{k+1}}{3} &= \\
\frac{4}{3}(4^{k+1}-1) &= \frac{4}{3}(4^{k+1}-1)
\end{aligned}
$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

d) Vi sjekker påstanden for $n=1$:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1(2\cdot 1+1)(1+1)}{6} \\
&= \frac{6}{6} \\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

Påstanden er sann for $n=1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n=k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k får vi:

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^3...+(k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)((k+1)+1)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1)}{6}+(k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1)+6(k+1)^2}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1)+2k+4k+6)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+3)+4k+6)}{6} &=
\end{aligned}
$$

$$\frac{(k+1)(k(2k+3)+2(2k+3)}{6} =$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.

Merk: Faktorisering er en treningsak, men observer hvordan vi i overgangen mellom linje 5 og 6 framkalte leddet $2k+3$. Hvis man ikke kommer i mål med ren faktorisering, kan man selvfølgelig etter linje 4 vise at $k(2k+1)+6(k+1) = (2k+3)(k+2)$ ved å skrive ut uttrykkene på begge sider.

1.3.2

Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1(1^2+2) = 1 \cdot 3$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer for $n = k$, får vi:

$$\begin{aligned}(k+1)((k+1)^2+2) &= (k+1)(k^2+2k+3) \\ &= (k+1)(k(k+2)+3)\end{aligned}$$

Antakelsen vår sier at $k(k+2)$ er delelig med 3, noe tallet 3 også er. Faktoren $(k(k+2)+3)$ er derfor delelig med 3, mens $(k+1)$ er et heltall. Uttrykket i ligningen over er derfor delelig med 3.

1.3.3

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{(2\cdot 1)!}{(2\cdot 1-1)!} &= 2^1 \cdot 1! \\ \frac{1\cdot 2}{1} &= 2 \\ 2 &= 2\end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k, får vi:

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 2}{1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\frac{(2(k+1))!}{(2(k+1)-1)!} &= 2^{k+1}(k+1)! \\ 2^k k!\frac{(2(k+1))!}{(2k+1)!} &= \\ 2^k k!\frac{(2k+1)!(2k+2)}{(2k+1)!} &= \\ 2^{k+1}k!(k+1) &= \\ 2^{k+1}(k+1)! &= 2^{k+1}(k+1)!\end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Venstresiden kan enklere skrives som:

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2(k+1)$$

For $n = 1$:

$$2 = 2^1 \cdot 1!$$
$$2 = 2$$

For $n = k + 1$:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(k+1) = 2^{k+1}(k+1)!$$

$$2^k k! \cdot 2(k+1) =$$
$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

Gruble 2 a) Summen av de n første oddetallene tilsvarer n^2 (se f. eks 1.2.1b), derfor kan vi skrive kvadratene som summer av oddetall.

b) Vi får n enere, $n-1$ treere, $n-2$ femmere og så videre. Den isolerte n-en på høyresiden representerer de n enerene, mens summen representerer bidragene fra alle de andre oddetallene (skriv opp hvis du syns det er vanskelig å se).

c)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n}(n-i)(2i+1) \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n}(2in + n - 2i^2 - i) \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n}((2n-1)i + n) \\
\sum_{i=1}^{n} 3i^2 &= n + n^2 + (2n-1)\frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{2n(1+n) + (2n-1)n(n+1)}{6} \\
&= \frac{(2n + (2n-1)n)(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(2 + (2n-1))(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Gruble 1

Vi starter med å skrive opp noen ledd i følgen:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= ka_1 + d \\
a_3 &= k(ka_1 + d) + d = k^2 a_1 + d(1 + k) \\
a_4 &= k(k^2 a_1 + d(k + 1)) = k^3 a_1 + d(1 + k + k^2)
\end{aligned}
$$

Ut ifra dette finner vi at det første leddet i a_n kan skrives som

$$ka_1^{n-1}$$

Det andre lettet i a_n gjenkjenner vi som en geometrisk rekke med $n - 1$ ledd, med sum lik

$$d\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$$

Altså er

$$a_n = k^{n-1} a_1 + d\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$$

Kapittel 2

Så lenge ikke annet er nevnt, tas det for gitt at $n \in \mathbb{Z}$.

2.1.2
a)

$$\begin{aligned} 60^\circ &= \frac{60\pi}{180} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 15^\circ &= \frac{15\pi}{180} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

2.1.3
a)

$$\begin{aligned} \frac{11\pi}{12} &= \frac{11\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi}^\circ \\ &= 165^\circ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{11\pi}{6} &= \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}^\circ \\ &= 330^\circ \end{aligned}$$

2.2.1
I enhetssirkelen er $|\cos x|$ og $|\sin x|$ katetene i en rettvinklete trekant med en hypotenus med lengde lik 1. Av Pytagoras' setning får man da at:

$$\begin{aligned} |\cos x|^2 + |\sin x|^2 &= 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \end{aligned}$$

2.2.2

a)

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \frac{0}{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2.2.6

Vi har at:

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1\\ \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\ \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1-\frac{3}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}\\ &= \pm\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Siden $\frac{\pi}{6}$ ligger i første kvadrant, må sinusverdien være positiv, og altså lik $\frac{1}{2}$.

2.2.7
a) Vi legger merke til at $2x = x + x$, av (2.10) har vi da at:

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x+x)\\ &= \sin x\cos x + \cos x \sin x\\ &= 2\cos x \sin x\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.2.8
Vi legger til og trekker ifra $\frac{\pi}{2}$ i argumentet:

$$\cos\left(3x - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(3x - \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Fra (2.18) har vi da at:

$$\begin{aligned}\cos\left(3x - \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(3x - \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin(3x + 2\pi)\\ &= \sin(3x)\end{aligned}$$

2.2.9
Av (2.20) vet vi at vi kan skrive:

$$f(x) = r\sin(2x + c)$$

hvor r er gitt som:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}\\ &= 2\end{aligned}$$

mens c er gitt ved ligningssettet:

$$\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin c = \frac{1}{2}$$

En c som oppfyller dette er $c = \frac{\pi}{6}$.

Altså får vi:

$$\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

2.3.1
a) Siden $\operatorname{acos} 0 = \frac{\pi}{2}$ har vi fra (2.9) at:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \vee \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Men siden n er et vilkårlig heltall, kan vi alltids trekke ut 2π fra leddet $2\pi n$ uten at løsningen er forandret. Gjør vi dette kan vi skrive:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n &= -\frac{\pi}{2} + \pi + \pi + 2\pi n \\ &= \frac{\pi}{2} + \pi(2n+1) \end{aligned}$$

Vi ser da at vi kan skrive de to løsningene som $\frac{\pi}{2}$ pluss enten et partalls antall π eller et oddetalls antall π. Altså kan vi skrive begge løsningene kombinert som $\frac{\pi}{2}$ pluss alle heltalls antall π:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

b) Siden $\operatorname{asin} 0 = 0$ har vi fra (2.10) at:

$$x = 2\pi n \quad \vee \quad x = \pi + 2\pi n$$

Men siden $x = \pi + 2\pi = \pi(2n+1)$, kan vi med samme argumentasjon som i opg. a) skrive:

$$x = \pi n$$

2.3.2

a)

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &= \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{aligned}$$

b) Av opg. 2.3.1 a) vet vi at:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}x &= \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x &= \frac{3}{2}(1+2n) \end{aligned}$$

Faktoriseringen av uttrykket over gjør det lettere å identifisere hvilke x som ligger i intervallet $[0, 5]$. Dette er $x = \frac{3}{2}$ og $x = \frac{9}{2}$.

c)

$$\begin{aligned} 2\sin(3x) &= 1 \\ \sin(3x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vinklene $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$ har sinusverdien $\frac{1}{2}$, altså har vi at:

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \end{aligned}$$

eller at:

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3}\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \end{aligned}$$

d) Siden $-\frac{\pi}{3}$ og $-\frac{2\pi}{3}$ har sinusverdien, har vi at:

$$\begin{aligned}2x - \pi &= -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \\ &= \frac{\pi}{3}(1+3n)\end{aligned}$$

eller at:

$$\begin{aligned}2x - \pi &= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \\ &= \frac{\pi}{6}(1+6n)\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}\tan\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) &= 2 \\ \tan\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Siden $\frac{\pi}{6}$ har $\frac{1}{\sqrt{3}}$ som tangensverdi, har vi at:

$$\begin{aligned}4x + \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{6} + \pi n \\ x &= \frac{1}{4}\left(\pi n - \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

2.3.3

a

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin x - \cos x &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x} &= \frac{\cos x}{\cos x} \\ \tan x &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x &= \frac{\pi}{6} + \pi n\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{3}\cos x &= 0 \\ \frac{\sin x}{\cos x} &= -\sqrt{3} \\ \tan x &= -\sqrt{3} \\ x &= -\frac{\pi}{3} + \pi n\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\cos(2x) + \sin(2x) &= 0 \\ \tan(2x) &= -1 \\ 2x &= -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x &= \frac{1}{2}\left(\pi n - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

2.3.4

a) Vi omskriver ligningen til sinusligningen

$$r\sin(x+c)=\sqrt{2}$$

hvor:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

og der c oppfyller ligningssettet:

$$\cos c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$c=\frac{\pi}{4}$ oppfyller kravene over $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, altså får vi:

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Altså må:

$$\begin{aligned} x+\frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2}+2\pi n \\ x &= \frac{\pi}{4}+2\pi n \end{aligned}$$

b) Vi omskriver ligningen til sinusligningen

$$r\sin\left(\frac{x}{2\pi}+c\right)=1$$

hvor:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

og der c oppfyller ligningssettet:

$$\cos c = -\frac{1}{2}$$

$$\sin c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$c=\frac{2\pi}{3}$ oppfyller kravene over, altså får vi:

$$2\sin\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{2\pi}{3}\right)=1$$

$$\sin\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

Vi må altså enten ha at:

$$\frac{x}{2\pi}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi n$$

$$\frac{x}{2\pi} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$
$$x = \pi^2(4n-1)$$

eller at:

$$\frac{x}{2\pi} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$
$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$
$$x = 2\pi\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$$

2.4.1

a) Vi løser andregradsligningen mhp. $\sin x$, og får at:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

I tilfellet av at $\sin x = \frac{1}{2}$, må:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \vee \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

I tilfellet av at $\sin x = -1$, må:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

b) Vi løser andregradsligningen mhp. $\cos(3x)$, og får at:

$$\cos(3x) = -4 \quad \vee \quad x = 1$$

I tilfellet av at $\cos(3x) = -4$ har ligningen ingen reell løsning. I tilfellet av at $\cos(3x) = -1$, må:

$$x = \frac{\pi + 2\pi n}{3}$$

c) Vi løser andregradsligningen mhp. $\cos x$, og får at:

$$\cos x = -4 \quad \vee \quad x = 1$$

I tilfellet av at $\cos x = -4$ har ligningen ingen reell løsning. I tilfellet av at $\sin x = -1$, må:

$$x = 2\pi n$$

d) Vi løser andregradsligningen mhp. $\tan(\pi x)$, og får at:

$$\tan(\pi x) = \sqrt{3}$$

Altså må:

$$x = \frac{1}{3} + n$$

2.4.2

a)

$$-\cos^2 x + 15\sin^2 x = 3(\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$12\sin^2 x = 4\cos^2 x$$
$$\frac{12\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$12\tan^2 x = 4$$
$$\tan^2 x = \frac{1}{3}$$
$$\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Siden atan $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ og atan $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, får vi at:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$$

b) Vi starter med å mulitpliserer ligningen med 2, og får:

$$2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - 4\sin^2\left(\frac{x}{4}\right) = -1$$
$$2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - 4\sin^2\left(\frac{x}{4}\right) = -1\left(\cos^2\left(\frac{1}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$
$$-3\sin^2\left(\frac{x}{4}\right) = -3\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$$
$$\tan^2\left(\frac{x}{4}\right) = 1$$
$$\tan\left(\frac{x}{4}\right) = \pm 1$$

Siden atan $1 = \frac{\pi}{4}$ og atan$(-1) = -\frac{\pi}{4}$, får vi at:

$$\frac{x}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$$
$$x = \pm\pi + 4\pi n$$

Det er helt greit slå seg til ro med svaret over (på en eksamen vil dette gi full uttelling), men vi skal likevel foreta en operasjon som gjør at uttrykket blir enda mer kompakt:

Siden vi av leddet $4\pi n$ kan trekke ut så mange multiplum av 4π vi måtte ønske, kan vi for løsningen hvor π har negativt fortegn skrive:

$$x = -\pi + 4\pi + 4\pi n$$
$$x = \pi + 2\pi + 4\pi n$$
$$= \pi + 2\pi(2n + 1)$$

Videre utfører vi en enkel faktorisering av løsningen der π er positiv:

$$x = \pi + 2\pi(2n)$$

Av de to uttrykkene over innser vi at x kan skrives som π pluss 2π ganget med et vilkårlig oddetall eller et vilkårlig partall, altså alle heltall! Derfor får vi at:

$$x = \pi + 2\pi n$$

2.5.1

a) Når $a > 0$ må f må ha sin største verdi når cosinusverdien er lik 1, altså når:

$$\cos(kx + c) = 1$$

Av (2.31) får vi da at:

$$kx + c = 2\pi n$$

Videre må f ha sin minste verdi når cosinusverdien er lik -1, altså når:

$$\cos(kx + c) = -1$$

Av (2.32) får vi da at:

$$kx + c = 2\pi n$$

b) Når $a < 0$ får vi bare det omvendte av situasjonen i opg. a).

2.5.2

a) Perioden P finner vi av relasjonen:

$$k = \frac{2\pi}{P}$$

som gir:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{k} \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

b) Maksimumsverdien f_{maks} er amplituden addert med konstantleddet:

$$\begin{aligned} f_{maks} &= 5 + 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Minimumsverdien f_{min} er konstandleddet fratrekt amplituden:

$$\begin{aligned} f_{min} &= 4 - 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

c) f må ha sitt maksimum når cosinusverdien blir -1, dette skjer når:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{\pi}{12} &= \pi + 2\pi n \\ 3x &= \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3}\left(2\pi n - \frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Videre må f ha sitt minimum når cosinusverdien blir 1, altså når:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{\pi}{12} &= 2\pi n \\ 3x &= 2\pi n - \frac{\pi}{12} \\ x &= \frac{1}{3}\left(2\pi n - \frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

2.5.3

a) Når $a > 0$ må f må ha sin største verdi når sinusverdien er lik 1, altså når:

$$\sin(kx + c) = 1$$

Av (2.36) får vi da at:

$$kx + c = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Videre må f ha sin minste verdi når sinusverdien er lik -1, altså når:

$$\sin(kx + c) = -1$$

Av (2.37) får vi da at:

$$kx + c = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

b) Når $a < 0$ får vi bare det omvendte av situasjonen i opg. a).

2.5.4

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{k} \\ &= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

b) f har maksimumspunkter der hvor sinusverdien er lik -1, altså når:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}x &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x &= 4n - 1 \end{aligned}$$

På intervallet $x \in [-3, 3]$ vil $x = -1$ og $x = 3$ oppfylle ligningen over. f_{maks} vil i alle tilfeller være lik 3, derfor blir toppunktene $(-1, 3)$ og $(3, 3)$.

c)

$$\begin{aligned} -2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 &= 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Av (2.10) kan vi enten ha at:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3}(1 + 12n) \end{aligned}$$

eller at:

$$\frac{\pi}{2}x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

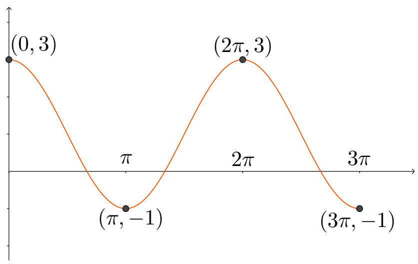
$$x = \frac{1}{3}(5 + 12n)$$

På intervallet $x \in [-3, 3]$ vil $x = -\frac{7}{3}$, $x = \frac{5}{3}$ og $x = \frac{1}{3}$ oppfylle én av de to ligningene over, dette er altså nullpunktene til f.

d) Vi markerer nullpunktene og toppunktene og skisserer sinuskurven som går mellom disse på intervallet $x \in [-3, 3]$.

2.5.5

Perioden til f tilsvarer den horisontale avstanden mellom toppunktene, som er 2π. Amplituden er vertikalavstanden mellom likevektslinja og toppunktene, som altså er 2. Bunnpunktene ligger en halv bølgelengde unna toppunktene, og siden amplituden er 2, må bunnpunktene ha y-verdien $1 - 2 = -1$.



2.5.8

Vi setter $u(x) = \cos x$ og $v(x) = x^4$, da er

$$f = \frac{u}{v} \qquad u' = -\sin x \qquad v' = 4x^3$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= \frac{-\sin x \cdot x^4 - \cos x \cdot 4x^3}{x^8} \\ &= -\frac{x \sin x + 4 \cos x}{x^5} \end{aligned}$$

Merk: Vi kan også finne f' ved å sette $u(x) = \cos x$ og $v(x) = x^{-4}$, for så å bruke produktregelen.

Gruble 5 Fordi forholdet $\frac{a}{b}$ er det samme som $\frac{\sin x}{\tan x}$, må det finnes et tall c som er slik at:

$$c \sin x = a \tag{I}$$
$$c \cos x = b \tag{II}$$

Kvadrerer vi begge ligninger og legger dem sammen, får vi:

$$
\begin{aligned}
(c \sin x)^2 + (c \cos x)^2 &= a^2 + b^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 \\
c &= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Setter vi dette tilbake i (I) og (II), finner vi at:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
\cos x &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}
$$

Gruble 6

Vi setter $\vec{u} = [a, b]$, $\vec{v} = [c, d]$. Videre lar vi α og β være vinklene som henholdsvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ danner med horisontalaksen. Da har vi at

$$
\begin{aligned}
\det(\vec{u}, \vec{v}) &= ad - bc \\
&= bd \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) \\
&= bd \left(\tan \alpha - \tan \beta \right) \\
&= bd \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\
&= \frac{bd}{\cos \alpha \cos \beta} \left(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \right)
\end{aligned}
$$

Av (2.11) i TM2 har vi at

$$
\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta)
$$

hvor $\alpha - \beta = \pm \angle(\vec{u}, \vec{v})$. I tillegg er

$$
\frac{b}{\cos \alpha} = |\vec{u}| \qquad , \qquad \frac{d}{\cos \beta} = |\vec{v}|
$$

Dermed er

$$
\frac{bd}{\cos \alpha \cos \beta} \left(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \right) = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\pm \angle(\vec{u}, \vec{v}))
$$

Da av (2.13) i TM2 har vi at $|\sin(-x)| = \sin x$, og dermed er

$$
|\det(\vec{u}, \vec{v})| = ||\vec{u}||\vec{v}| \sin(\pm \angle(\vec{u}, \vec{v}))| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})
$$

Kapittel 3

3.1.2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [3-1, 2-(-1), 1-(-2)] \\ &= [2,3,3] \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= [0-1, 5-(-1), 6-(-2)] \\ &= [-1,6,8] \\ \left|\overrightarrow{AC}\right| &= \sqrt{101}\end{aligned}$$

Siden $\sqrt{101} > \sqrt{20}$ er B nærmest A.

3.1.3
a)

$$\begin{aligned}|\vec{u}| &= \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2 + (bd)^2} \\ &= \sqrt{a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2} \\ &= \sqrt{d^2(a^2+b^2+c^2)} \\ &= d\sqrt{a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

b) Som i opg. a) kan vi også her skrive

$$|\vec{u}| = \sqrt{d^2(a^2+b^2+c^2)}$$

men siden d^2 er et positivt tall, mens d er negativ, har vi at:

$$d \neq \sqrt{d^2}$$

istedenfor er:

$$|d| = \sqrt{d^2}$$

derfor kan vi skrive:

$$|\vec{u}| = |d|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

3.2.1

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= [ad, bd, cd]\cdot[eh, fh, gh] \\ &= adeh + bdfh + cdgh \\ &= dh(ae+bf+cg)\end{aligned}$$

3.2.2
c)

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right]\cdot\vec{b} = [512, -128, 64] \\ &= \frac{1}{5}[1,3,-1]\cdot 64[8,-2,1] \\ &= \frac{64}{5}(8-6-1)\end{aligned}$$

$$= \frac{64}{5}$$

3.2.4 Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når:

a) $\vec{a} = [5, -5, 2]$ og $\vec{b} = [3, -4, 5]$

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{54} \\ &= \sqrt{9 \cdot 6} \\ &= 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= \sqrt{25 \cdot 2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [5, -5, 2] \cdot \vec{b} = [3, -4, 5] \\ &= 15 + 20 + 10 \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{45}{3\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dette betyr at $\theta = 30°$.

3.2.5
b)

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c}^2 \\ &= 1^2 + 0 + \vec{a} \cdot \vec{c} + 0 + 2^2 + 0 + \vec{c} \cdot \vec{a} + 0 + 5^2 \\ &= 2(15 + \vec{a} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

3.3.2
b) Vi krever at:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$[-5, -1, 6] \cdot [t, t^2, 1] = 0$$
$$-5t - t^2 + 6 = 0$$

Siden $(-2) \cdot (-3) = 6$ og $-2 + (-3) = -5$ kan vi skrive at:

$$(t-2)(t-3) = 0$$

Kravet er dermed oppfylt hvis $t \in \{2, 3\}$.

3.3.3 a) Vi regner fort ut at forholdet mellom både førstekomponentene og andrekomponenten er 2, men at forholdet mellom tredjekomponentene er $-\frac{1}{2}$. Vektorene er derfor ikke parallelle.

b) Vi observerer at:

$$\vec{b} = \frac{3}{7}[-3, 5, 2]$$

dermed er $\vec{b}$ et multiplum av $\vec{a}$ og da er $\vec{a}||\vec{b}$.

3.3.4

a) Vi bruker forholdet mellom første- og tredjekomponententene for å sette opp en ligning for t:

$$-\frac{t+3}{3} = -\frac{16}{8}$$
$$t + 3 = 6$$
$$t = 3$$

Forholdet mellom andrekomponentene blir da:

$$\frac{1-3}{1} = -2$$

Forholdet er -2 for alle komponentene når $t = 3$ og da er $\vec{a}||\vec{b}$.

b) Også her bruker vi første- og tredjekomponententene for å sette opp en ligning for t, fordi vi da får isolert det kvadratiske leddet:

$$-\frac{t^2+2}{3} = -\frac{(5t^2+3)}{8}$$
$$8t^2 + 16 = 15t^2 + 9$$
$$7x^2 = 7$$
$$x = \pm 1$$

Når $t = 1$ er forholdet mellom både førstkomponentene og tredjekomponentene lik

$$-\frac{1^2+2}{3} = -1$$

Og forholdet mellom andrekomponentene er:

$$\frac{1}{1} = 1$$

For $t = 1$ er altså $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke parallelle. Vi ser derimot fort at forholdet mellom hver av komponentene blir -1 når $t = -1$, for dette valget av t er derfor $\vec{a}||\vec{b}$.

3.3.5 $\vec{u} = [4, 6+s, -(s+t)]$ og $\vec{v} = \left[\frac{12}{7}, \frac{2t-9s}{7}, \frac{3s-t}{7}\right]$ Vi starter med å observere at:

$$\vec{v} = \frac{1}{7}[12, 2t-9s, 3s-t]$$

Vi definerer $\vec{w} = [12, 2t-9s, 3s-t]$. Skal vi ha at $\vec{u}||\vec{v}$, må vi også hat at $\vec{u}||\vec{w}$. Siden forholdet mellom førstekomponentene til $\vec{u}$ og $\vec{w}$ er 3, krever vi at $\vec{u} = 3\vec{w}$. Da kan vi sette opp følgende ligningssystem:

$$2t - 9s = 3(6+s) \tag{I}$$

$$3s - t = -3(s+t) \tag{II}$$

Av II får vi at:

$$\begin{aligned} 3s - t &= -3s - 3t \\ 2t &= -6s \\ t &= -3s \end{aligned}$$

Setter vi $t = -3s$ inn i (II) får vi:

$$\begin{aligned} 2(-3s) - 9s &= 18 + 3s \\ -6s - 9s &= 18 + 3s \\ -18s &= 18 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle hvis $s = -1$ og $t = -3s = 3$.

3.4.1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ae & be \\ cf & df \end{vmatrix} &= aedf - becf \\ &= ef(ad - bc) \\ &= ef \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} i \end{aligned}$$

??

b) Arelet er gitt som tallverdien til $\det(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}) &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 24 & -16 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 8 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 16((-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 3) \\ &= 16 \cdot (-4) \\ &= -64 \end{aligned}$$

Arealet er altså 64.

3.4.2

Hvis $\vec{u}||\vec{v}$ betyr dette at hvis vi skriver $\vec{u} = [a, b, c]$, så kan vi skrive $\vec{v} = d[a, b, c]$. Vi får da at:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ da & db & dc \end{vmatrix} \\
&= d\vec{e}_x \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - d\vec{e}_y \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + d\vec{e}_x \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Resultatet fra 3.4.1 er her brukt i andre linje for å forenkle regningen av 2×2 determinantene.

3.4.4

a) Arealet til grunnflaten tilsvarer lengden av vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= [(-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-3), -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 3), 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3] \\
&= [-2 + 3, -(2 - 3), -6 + 6] \\
&= [1, 1, 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

b) Av (??) vet vi at volumet V er gitt som:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$$

Vi har at:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} &= [1, 1, 0] \cdot [2, -3, 2] \\
&= 2 - 3 \qquad = -1
\end{aligned}$$

Og dermed er $V = \frac{1}{6}$.

3.4.5

a) Diagonalen til grunnflaten kan uttrykkes som vektoren $\vec{a} + \vec{b}$, og lengden blir da (husk at $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^{\,2}$):

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2} \\
&= \sqrt{\vec{a}^{\,2} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}} \\
&= \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Kapittel 4

4.1.1 Se eksempel på side **??**

4.1.2 Vi bruker kravet for x og z-koordinaten for å sette opp et ligningssystem:

$$
\begin{aligned}
-3-2t &= -7-3s \qquad \text{(I)}\\
1-t &= s \qquad \text{(II)}
\end{aligned}
$$

Av (II) har vi et uttrykk for s. Setter vi dette inn i (I) får vi:

$$
\begin{aligned}
-3-2t &= -7+3(1-t)\\
-3-2t &= -7+3-3t\\
t &= -1
\end{aligned}
$$

Altså er $t=-1$ og $s=2$. For disse verdiene gir begge parameteriseringene punktet $A=(-1,1,2)$.

4.1.3 Se eksempel på side 113

4.1.4 Se eksempel på side 114

4.2.1 Se eksempel på side 116

4.2.2
a) Av parameteriseringen ser vi at to retningsvektorer må være $[2,3,0]$ og $[0,2,-1]$.

b) En normalvektor for planet er gitt ved vektorproduktet av retningsvektorene:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\\
&= \vec{e}_x(-3-0) - \vec{e}_x(-2-0) + \vec{e}_z(4-0)\\
&= [-3,-2,4]
\end{aligned}
$$

Av parameteriseringen ser vi at $(-4,2,1)$ er et punkt i planet, derfor kan vi skrive:

$$
\begin{aligned}
-3(x-(-4))+2(y-2)+4(z-1) &= 0\\
-3x-12-2y-4+4z-4 &= 0\\
-3x-2y+4z-20 &= 0
\end{aligned}
$$

4.2.4
Vi krever at:

$$
\begin{aligned}
(-2,1,1)\cdot[3t,5,t] &= 0\\
-6t+5+t &= 0\\
t &= 1
\end{aligned}
$$

Altså er $[3,5,1]$ en retningsvektor for planet. Ligningen til planet blir da:

$$3(x-(-2))+5(y-1)+(z-1)=0$$

$$3x + 5y + z = 0$$

4.2.5 Se eksempel på side 120

4.2.6
a) Vi starter med å skrive de fullstendige kvadratene:

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x &= (x^2 - 3)^2 - 3^2 \\
y^2 + 2y &= (y + 1)^2 - 1^2 \\
z^2 - 10z &= (z - 5)^2 - 5^2
\end{aligned}$$

Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned}
(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 - 14 - 9 - 1 - 25 &= 0 \\
(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 &= 49 \\
(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 &= 7^2
\end{aligned}$$

Altså har kula sentrom i $S = (3, -1, 5)$ og radius $r = 7$.

b) Vi setter koordinatene til A faktoriserte venstresiden av kuleligningen og får:

$$(4 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + (6 - 5)^2 = 6$$

Ligningen over representerer den kvadrerte avstanden mellom S og A, siden $6 < 49$ må A ligge inni kula.

For B får vi:

$$(-6 - 3)^2 + (-4 + 1)^2 + (1 - 5)^2 = 106$$

Siden $106 > 49$ ligger B utenfor kula.

4.3.3
a) Av ligningen ser vi at $[3, -2, 1]$ er en normalvektor.

b) I ligningen for β ser vi at hvis $x = y = 0$, så må også $z = 0$. β inneholder derfor origo.

c) Avstanden h mellom α og β må tilsvare avstande mellom α og et punkt i β. Vi bruker svaret fra b) og får:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 12|}{|[3, -2, 1]|} \\
&= \frac{12}{\sqrt{9 + 4 + 1}} \\
&= \frac{12}{\sqrt{14}}
\end{aligned}$$

4.3.4
a) For å finne S skriver vi de fullstendige kvadratene:

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 3^2$$

$$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 2^2$$
$$z^2 = z^2$$

Kuleligningen kan vi derfor skrive som:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 - 23 - 3^2 - 2^2 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36$$
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 6^2$$

Altså har vi $S = (3, -2, 0)$.

b) Av ligningen til planet ser vi at $[2, -1, -2]$ er en normalvektor for α. Dette må være en retningsvektor for linja som går gjennom A og S, som dermed kan parameteriseres ved:

$$l : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

c) *Løsningsmetode 1:* Linja og kuleflata skjærer der parameteriseringen til linja oppfyler kuleligningen:

$$((3+2t) - 3)^2 + ((-2-t) + 2)^2 + (-2t - 0)^2 = 36$$
$$(2t)^2 + (-t)^2 + (-2t)^2 = 36$$
$$9t^2 = 36$$
$$t^2 = 4$$
$$t = \pm 2$$

For $t = -2$ gir parameteriseringen punktet $(-1, 0, 4)$ mens for $t = 2$ får vi punktet $(7, -4, -4)$.

Løsningsmetode 2: Vi har funnet at $[2, -1, -2]$ er en retningsvektor for linja gjennom A og S, denne vektoren har lengde 3. Vi kan derfor lage oss en retningsvektor med lengde 1 ved å skrive $\frac{1}{3}[2, -1, 2]$. Siden avstanden mellom S og de to punktene vi søker er lik radiusen 6, må de være gitt ved uttrykket

$$S \pm 6 \cdot \frac{1}{2}[2, -1, -2] = S \pm 2[2, -1, -2]$$

Regner man ut dette får man (selvølgelig) samme svar som for *Løsningsmetode 1.*

d) Se eksempel på side 117 eller bruk lignende resonnement som *Løsningsmetode 2* i opg. c).

e) Radiusen R til sirkelen, radiusen r til kula og linjestykket AS utgjør en rettvinklet trekant. Av Pytagoras' setning har vi da at:

$$R^2 = r^2 - |\overrightarrow{AS}|^2$$
$$= 6^2 - 3^2$$
$$= 36 - 9$$
$$= 27$$
$$R = \pm\sqrt{27}$$

R har altså lengden $\sqrt{27}$.

Kapittel 5

5.1.1 a) $f'(x) = 20x^4$ **b)** $f(2) - f(0) = 128$

5.1.2 $F(4) - F(1) = 8$

5.1.3
a) Vi bruker kjerneregelen to ganger. Først setter vi $u(x) = \cos^2 x$ og $g(u) = e^u$. Deretter setter vi $h(x) = \cos x$ og $i(h) = h^2$. Vi får da at:

$$\begin{aligned} u'(x) &= i'(h)h'(x) \\ &= 2h \cdot (-\sin x) \\ &= -2\cos x \sin x \end{aligned}$$

Videre har vi da at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u \cdot (-2\cos x \sin x) \\ &= -2\cos x \sin x \, e^{\cos^2 x} \end{aligned}$$

b) Av (2.16) har vi at $2\cos x \sin x = \sin(2x)$, og derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int -\sin(2x)\, e^{\cos^2 x}\, dx &= \int -2\cos x \sin x \, e^{\cos^2 x}\, dx \\ &= \int f'(x)\, dx \\ &= f(x) + C \\ &= e^{\cos^2 x} + C \end{aligned}$$

Overgangen mellom andre og tredje linje følger av definisjonen av det ubestemte integralet.

5.1.4
a) Vi må vise at $\left(x^2 e^x\right)'$ tilsvarer uttrykket i integranden.

$$\begin{aligned} \left(x^2 e^x\right)' &= 2xe^x + x^2 e^x \\ &= xe^x(2 + x) \end{aligned}$$

b) Vi må vise at $\left(e^{\cos x + x^2}\right)'$ tilsvarer uttrykket i integranden:

$$\begin{aligned} \left(e^{\cos x + x^2}\right)' &= e^{\cos x + x^2} \cdot (\cos x + x^2)' \\ &= e^{\cos x + x^2}(-\sin x + 2x) \\ &= -e^{\cos x + x^2}(\sin x - 2x) \end{aligned}$$

5.2.3 Av (2.49) vet vi at perioden $\cos x$ er 2π. Dette betyr at hvis vi for en konstant c har at $a = c$, så er $b = a + 2\pi$. Integralet blir da:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{c}^{c+2\pi} (\cos x + d)\, dx &= \Big[\sin x + dx\Big]_{c}^{c+2\pi} \\
&= \Big[\sin(c+2\pi) + d(c+2\pi) - (\sin c + dc)\Big] \\
&= 2d\pi
\end{aligned}$$

Mellom andre og tredje linje har vi brukt det faktum at $\sin(c + 2\pi) = \sin c$. Gjennomsnittet kan altså skrives som:

$$\frac{1}{(c+2\pi) - c} \cdot 2d\pi = d$$

5.2.5
a) Vi setter $u = x^2$ og $g(u) = e^u$. Siden $u' = 2x$ får vi:

$$\begin{aligned}
\int xe^{x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} \\
&= \frac{1}{2}\int u'e^u\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int e^u\, du \\
&= \frac{1}{2}e^u + C \\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + C
\end{aligned}$$

b) Vi starter med å finne det ubestemte integralet ved å bruke bytte av variabel. Vi setter $u = 2x^2 - 3$ og $g(u) = e^u$, siden $u' = 4x$ får vi:

$$\begin{aligned}
\int 8xe^{2x^2-3}\, dx &= 2\int 4xe^{2x^2-3}\, dx \\
&= 2\int u'e^u\, dx \\
&= 2\int e^u\, du \\
&= 2e^u + C
\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir derfor:

$$\begin{aligned}
\Big[2e^{2x^2-3}\Big]_1^2 &= 2\Big[e^{2\cdot 2^2-3} - e^{2\cdot 1-3}\Big] \\
&= 2\Big[e^5 - e^{-1}\Big]
\end{aligned}$$

c) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = u$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx &= -\int \frac{u'}{u}\, dx \\
&= \int \frac{1}{u}\, du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\ln u + C \\
&= -\ln(\cos x) + C
\end{aligned}
$$

d) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = \frac{1}{u^3}$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx &= \int \frac{-u'}{u^3}\, dx \\
&= -\int u^{-3}\, dx \\
&= \frac{1}{2}u^{-2} + C
\end{aligned}
$$

Siden $u(0) = \cos 0 = 1$ og $u(\frac{\pi}{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2^{-1}$ blir det bestemte integralet:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^{2^{-1}} &= \frac{1}{2}\left[(2^{-1})^{-2} - 1^{-2}\right] \\
&= \frac{1}{2}[4-1] \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

f) Vi setter $u = 3x^2 + 4x + 3$ og $g(u) = \frac{1}{u}$, og får da:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+3}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1}\, du \\
&= \frac{1}{2}\ln u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(3x^2+4x+3\right)
\end{aligned}
$$

5.2.6

Av (2.17) og (2.16) kan vi skrive:

$$
\int \sin(2x) e^{1-\cos^2 x}\, dx = \int 2\sin x \cos x\, e^{\sin^2 x}
$$

Vi setter så $u = \sin x$ og $g(u) = 2ue^{u^2}$. Siden $u' = \cos x$ kan vi skrive:

$$
\begin{aligned}
\int 2\sin x\cos x\, e^{\sin^2 x}\, dx &= 2\int uu' e^{u^2}\, dx \\
&= 2\int ue^{u^2}\, dx
\end{aligned}
$$

Vi setter nå $v = u^2$ og $h(v) = e^v$. Siden $v' = 2u$ får vi:

$$
\begin{aligned}
2\int ue^{u^2}\, dx &= \int v' e^v\, dx \\
&= \int e^v\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{v} + C \\
&= e^{u^2} + C \\
&= e^{\sin^2 x} + C
\end{aligned}
$$

5.2.7

b) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{\frac{1}{2}}$ og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\ln x\,dx &= \int uv'\,dx \\
&= uv - \int u'v\,dx \\
&= \ln x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int x^{-1} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C
\end{aligned}
$$

c) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{-2}$, og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = -x^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
\int \ln x\, x^{-2}\,dx &= \int uv'\,dx \\
&= uv - \int u'v\,dx \\
&= \ln x\,(-x^{-1}) - \int x^{-1}(-x)^{-1}\,dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C
\end{aligned}
$$

Det bestemte integralet blir da:

$$
\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{x}(\ln|x| + 1)\right]_1^e &= -\left[\frac{1}{e}(\ln e + 1) - \frac{1}{1}(\ln 1 + 1)\right] \\
&= -\left[\frac{2}{e} - 1\right] \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}
$$

5.2.8 Vi setter $u = \sin x$ og $v' = \sin x$, og får da at $u' = \cos x$ og $v = -\cos x$:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \\
&= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx \\
2\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x\cos x + \int 1\,dx \\
\int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C
\end{aligned}
$$

5.2.9 a) Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Altså kan vi skrive:

$$
\begin{aligned}
\frac{13-4x}{x^2-5x+6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \\
13 - 4x &= A(x-3) + B(x-2)
\end{aligned}
$$

Når $x = 3$ får vi:

$$
\begin{aligned}
13 - 4\cdot 3 &= B(3-2) \\
1 &= B
\end{aligned}
$$

Og når $x = 2$ får vi:

$$
\begin{aligned}
12 - 4\cdot 2 &= A(2-3) \\
5 &= -A \\
-5 &= A
\end{aligned}
$$

Det ubestemte integralet vi ønsker å løse kan derfor skrives som:

$$\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x-2}\right)\,dx = \ln(x-3) - 5\ln(x-2) + C$$

Det bestemte integralet blir da:

$$
\begin{aligned}
\Big[\ln|x-3| - 5\ln|x-2|\Big]_4^5 &= \ln|5-3| - 5\ln|5-2| - (\ln|4-3| - 5\ln|4-2|) \\
&= \ln 2 - 5\ln 3 - \ln 1 + 5\ln 2 \\
&= 6\ln 2 - 5\ln 3
\end{aligned}
$$

5.2.10 Se eksempel på side 158

5.4.1
a) Tverrsnittet langs x-aksen blir en sirkel med høyde $\sqrt{r^2 - x^2}$. Tverrsnittsarealet blir derfor

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \pi\sqrt{r^2 - x^2}^{\,2} \\
&= \pi(r^2 - x^2)
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx \\
&= \pi\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \left[xr^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} \\
&= \frac{\pi}{3}\left(3rr^2 - r^3 - (3(-r)r^2 - (-r)^3)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}(3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3) \\
&= \frac{4\pi}{3}r^3
\end{aligned}
$$

5.4.2 a)
Volumet V er gitt ved ligningen:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 f^2\, dx \\
&= \int_0^1 (e^x)^2\, dx \\
&= \int_0^1 e^{2x}\, dx
\end{aligned}
$$

Vi setter $u = 2x$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 2$:

$$
\begin{aligned}
\int e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int u' e^u\, du \\
&= \frac{1}{2}e^u + C
\end{aligned}
$$

Siden $u(0) = 0$ og $u(1) = 2$ blir det bestemte integralet:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^2 &= \frac{1}{2}\left[e^2 - e^0\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^2 - 1\right]
\end{aligned}
$$

Gruble 10
Vi har at

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin x\, dx$$

Vi setter $u = \sin x$ og $v' = \sin x$. Da er

$$u' = \cos x \qquad\qquad v = -\cos x$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned}
\int \sin x \cdot \sin x\, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx \\
2\int \sin^2 x\, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx + \int \sin^2 x\, dx
\end{aligned}$$

Ettersom $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, følger det at

$$\begin{aligned}
2\int \sin^2 x\, dx &= -\sin x \cos x + \int 1\, dx \\
2\int \sin^2 x\, dx &= -\sin x \cos x + x \\
\int \sin^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right)
\end{aligned}$$