??

a) Vi har at

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 4x &= 0 \\
x(2x-4) &= 0
\end{aligned}
$$

Altså er $x = 0$, eller

$$
\begin{aligned}
2x - 4 &= 0 \\
2x &= 4 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

??

La x_b være minimumspunktet til f. Av symmetriegenskapene til f har vi at $x_b = \frac{x_1+x_2}{2}$ hvis $f(x_1) = f(x_2)$. Da $(-2)4 = -8$ og $4-2 = 2$, er

$$f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$$

Dette betyr at $f(2) = f(-4) = 0$, og da er

$$x_b = \frac{2+(-4)}{2} = -1$$

Gruble ??
Da

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x^2 + 2\sqrt{xy} + y^2 = 27$$

må $\sqrt{xy}$ også være et heltall, og dermed må xy være et kvadrattall. Ved litt prøving og feiling finner vi at

$$x = 3 \qquad , \qquad y = 12$$

Gruble ??

a)

$$\begin{aligned}10 - 2\sqrt{21} &= 10 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} \\ &= \sqrt{7}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}13 + 2\sqrt{22} &= 13 + 2\sqrt{11}\sqrt{2} \\ &= \sqrt{11}^2 + \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{11}\sqrt{2} \\ &= (\sqrt{11} + \sqrt{2})^2\end{aligned}$$

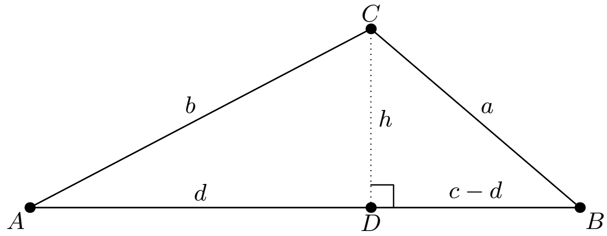
c)

$$\begin{aligned}8 + 4\sqrt{3} &= 2(4 + 2\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3}^2 + \sqrt{1}^2 + 2\sqrt{1}\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3} + 1)^2 \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}42 - 14\sqrt{5} &= 7(6 - 2\sqrt{5}) \\ &= 7(\sqrt{5}^2 + \sqrt{1}^2 - \sqrt{5}\sqrt{1}) \\ &= 7(\sqrt{5} - \sqrt{1})^2 \\ &= (\sqrt{35} - \sqrt{7})^2\end{aligned}$$

Gruble ??



Vi setter $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = CD$ og $d = AD$. Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ADC$ og $\triangle DCB$ har vi at

$$\begin{aligned} b^2 - d^2 &= a^2 - (c-d)^2 \\ d &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - d^2 \\ &= (b+d)(b-d) \\ &= \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) \\ &= \frac{1}{4c^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] \\ &= \frac{1}{4c^2}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

Da $h > 0$, er

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$$

Arealet T til $\triangle ABC$ er nå gitt som

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}hc \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \end{aligned}$$

Merk: Da en trekant må ha et areal med positiv verdi, kan Herons formel brukes for å vise *trekantulikheten*, som vi utledet i MB.

Gruble 1

Alternativ 1
Skal grafen til f være symmetrisk om vertikallinja som går gjennom punktet $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, må vi for et tall k ha at

$$f\left(k - \frac{b}{2a}\right) = f\left(-k - \frac{b}{2a}\right) \tag{1}$$

For et tall d har vi at

$$d - \frac{b}{2a} = \frac{2ad - b}{2a}$$

Videre er

$$\begin{aligned} f\left(d - \frac{b}{2a}\right) &= a\left(\frac{2ad - b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{2ad - b}{2a}\right) + c \\ &= \frac{4a^2d^2 - 4abd + b^2}{4a} + \frac{2abd - b^2}{2a} + c \\ &= \frac{4a^2d^2 - b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Dette betyr at uansett om $d = k$ eller om $d = -k$, så vil uttrykket over være likt, og altså er (1) gyldig.

Alternativ 2
Skal f være symmetrisk om en vertikallinje, må det bety at to tall t og s gir lik f-verdi:

$$\begin{aligned} f(s) &= f(t) \\ as^2 + bs + c &= at^2 + bt + c \\ a(s^2 - t^2) + b(s - t) &= 0 \\ a(s - t)(s + t) + b(s - t) &= 0 & (s \neq t) \\ a(s + t) + b &= 0 \\ t &= -\frac{b}{a} - s \end{aligned}$$

Vi lar x_s være x-verdien til symmetrilinja til f. x_s må ligge midt mellom s og t. Vi lar $t > s$, da er

$$\begin{aligned} x_s &= s + \frac{1}{2}(t - s) \\ &= s + \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} - s - s\right) \\ &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Gruble ??

$$
\begin{aligned}
d^2r^2 - (d+r)^2r^2 + 4bd^2(b-r) \\
&= (-2dr - r^2)r^2 + 2bd(2bd - 2dr) \\
&= (2bd - 2dr - r^2)r^2 - 2bdr^2 + 2bd(2bd - 2dr - r^2) + 2bdr^2 \\
&= (2bd - 2dr - r^2)\left(r^2 + 2bd\right)
\end{aligned}
$$