

?? a)  $f'(x) = 20x^4$  b)  $f(2) - f(0) = 128$

??  $F(4) - F(1) = 8$

??

a) Vi bruker kjerneregelen to ganger. Først setter vi  $u(x) = \cos^2 x$  og  $g(u) = e^u$ . Deretter setter vi  $h(x) = \cos x$  og  $i(h) = h^2$ . Vi får da at:

$$\begin{aligned} u'(x) &= i'(h)h'(x) \\ &= 2h \cdot (-\sin x) \\ &= -2 \cos x \sin x \end{aligned}$$

Videre har vi da at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u \cdot (-2 \cos x \sin x) \\ &= -2 \cos x \sin x e^{\cos^2 x} \end{aligned}$$

b) Av (??) har vi at  $2 \cos x \sin x = \sin(2x)$ , og derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int -\sin(2x) e^{\cos^2 x} dx &= \int -2 \cos x \sin x e^{\cos^2 x} dx \\ &= \int f'(x) dx \\ &= f(x) + C \\ &= e^{\cos^2 x} + C \end{aligned}$$

Overgangen mellom andre og tredje linje følger av definisjonen av det ubestemte integralet.

??

a) Vi må vise at  $(x^2 e^x)'$  tilsvarer uttrykket i integranden.

$$\begin{aligned} (x^2 e^x)' &= 2x e^x + x^2 e^x \\ &= x e^x (2 + x) \end{aligned}$$

b) Vi må vise at  $(e^{\cos x + x^2})'$  tilsvarer uttrykket i integranden:

$$\begin{aligned} (e^{\cos x + x^2})' &= e^{\cos x + x^2} \cdot (\cos x + x^2)' \\ &= e^{\cos x + x^2} (-\sin x + 2x) \\ &= -e^{\cos x + x^2} (\sin x - 2x) \end{aligned}$$

?? Av (??) vet vi at perioden  $\cos x$  er  $2\pi$ . Dette betyr at hvis vi for en konstant  $c$  har at  $a = c$ , så er  $b = a + 2\pi$ . Integralet blir da:

$$\begin{aligned}\int_c^{c+2\pi} (\cos x + k) dx &= \left[ \sin x + kx \right]_c^{c+2\pi} \\ &= \left[ \sin(c + 2\pi) + k(c + 2\pi) - (\sin c + kc) \right] \\ &= 2k\pi\end{aligned}$$

Mellom andre og tredje linje har vi brukt at  $\sin(c + 2\pi) = \sin c$ . Gjennomsnittet kan altså skrives som

$$\frac{1}{(c + 2\pi) - c} \cdot 2k\pi = k$$

??

a) Vi setter  $u = x^2$  og  $g(u) = e^u$ . Siden  $u' = 2x$  får vi:

$$\begin{aligned}\int x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int u' e^u dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} + C\end{aligned}$$

b) Vi starter med å finne det ubestemte integralet ved å bruke bytte av variabel. Vi setter  $u = 2x^2 - 3$  og  $g(u) = e^u$ , siden  $u' = 4x$  får vi:

$$\begin{aligned}\int 8x e^{2x^2-3} dx &= 2 \int 4x e^{2x^2-3} dx \\ &= 2 \int u' e^u dx \\ &= 2 \int e^u du \\ &= 2e^u + C\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir derfor:

$$\begin{aligned}\left[ 2e^{2x^2-3} \right]_1^2 &= 2 \left[ e^{2 \cdot 2^2-3} - e^{2 \cdot 1^2-3} \right] \\ &= 2 \left[ e^5 - e^{-1} \right]\end{aligned}$$

c) Vi setter  $u = \cos x$  og  $g(u) = u$ . Siden  $u' = -\sin x$ , får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= - \int \frac{u'}{u} dx \\ &= - \int \frac{1}{u} du \\ &= -\ln u + C \\ &= -\ln(\cos x) + C\end{aligned}$$

d) Vi setter  $u = \cos x$  og  $g(u) = \frac{1}{u^3}$ . Siden  $u' = -\sin x$ , får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{-u'}{u^3} dx \\ &= - \int u^{-3} dx \\ &= \frac{1}{2}u^{-2} + C\end{aligned}$$

Siden  $u(0) = \cos 0 = 1$  og  $u(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 2^{-1}$  blir det bestemte integralet:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^{2^{-1}} &= \frac{1}{2}[(2^{-1})^{-2} - 1^{-2}] \\ &= \frac{1}{2}[4 - 1] \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

e) Vi setter  $u = 2x^2 + 5x$  og  $g(u) = \frac{1}{u}$ . Da er

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+5}{2x^2+5x} dx &= \int \frac{u'}{u} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(2x^2 + 5x) + C\end{aligned}$$

f) Vi setter  $u = 3x^2 + 4x + 3$  og  $g(u) = \frac{1}{u}$ , og får da:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{6x+4}{3x^2+4x+3} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{u'}{u} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln u \\ &= \frac{1}{2} \ln (3x^2 + 4x + 3)\end{aligned}$$

??

Av (??) og (??) kan vi skrive:

$$\int \sin(2x) e^{1-\cos^2 x} dx = \int 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x}$$

Vi setter så  $u = \sin x$  og  $g(u) = 2ue^{u^2}$ . Siden  $u' = \cos x$  kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\int 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} dx &= 2 \int uu' e^{u^2} dx \\ &= 2 \int ue^{u^2} dx\end{aligned}$$

Vi setter nå  $v = u^2$  og  $h(v) = e^v$ . Siden  $v' = 2u$  får vi:

$$\begin{aligned}2 \int ue^{u^2} dx &= \int v' e^v dx \\ &= \int e^v dv \\ &= e^v + C \\ &= e^{u^2} + C \\ &= e^{\sin^2 x} + C\end{aligned}$$

??

b) Vi setter  $u = \ln x$  og  $v' = x^{\frac{1}{2}}$  og får da at  $u' = x^{-1}$  og  $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ :

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \int uv' \, dx \\
 &= uv - \int u'v \, dx \\
 &= \ln x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int x^{-1} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
 &= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C
 \end{aligned}$$

c) Vi setter  $u = \ln x$  og  $v' = x^{-2}$ , og får da at  $u' = x^{-1}$  og  $v = -x^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
 \int \ln x \, x^{-2} \, dx &= \int uv' \, dx \\
 &= uv - \int u'v \, dx \\
 &= \ln x (-x^{-1}) - \int x^{-1}(-x)^{-1} \, dx \\
 &= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \, dx \\
 &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\
 &= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C
 \end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}
 \left[ -\frac{1}{x}(\ln |x| + 1) \right]_1^e &= -\left[ \frac{1}{e}(\ln e + 1) - \frac{1}{1}(\ln 1 + 1) \right] \\
 &= -\left[ \frac{2}{e} - 1 \right] \\
 &= 1 - \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

?? Vi setter  $u = \sin x$  og  $v' = \sin x$ , og får da at  $u' = \cos x$  og  $v = -\cos x$ :

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx \\ \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\end{aligned}$$

?? a) Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Altså kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\frac{13 - 4x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \\ 13 - 4x &= A(x - 3) + B(x - 2)\end{aligned}$$

Når  $x = 3$  får vi:

$$\begin{aligned}13 - 4 \cdot 3 &= B(3 - 2) \\ 1 &= B\end{aligned}$$

Og når  $x = 2$  får vi:

$$\begin{aligned}12 - 4 \cdot 2 &= A(2 - 3) \\ 5 &= -A \\ -5 &= A\end{aligned}$$

Det ubestemte integralet vi ønsker å løse kan derfor skrives som:

$$\int \left( \frac{1}{x - 3} - \frac{5}{x - 2} \right) dx = \ln(x - 3) - 5 \ln(x - 2) + C$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}\left[ \ln|x - 3| - 5 \ln|x - 2| \right]_4^5 &= \ln|5 - 3| - 5 \ln|5 - 2| - (\ln|4 - 3| - 5 \ln|4 - 2|) \\ &= \ln 2 - 5 \ln 3 - \ln 1 + 5 \ln 2 \\ &= 6 \ln 2 - 5 \ln 3\end{aligned}$$

?? Se eksempel på side ??

??

a) Ut ifra figuren ser vi at

$$\int_a^b g \, dx = A + (b - a)k - B$$

$$\int_a^b f \, dx = A - B = \int_a^b g \, dx - (b - a)k$$

b) Vi har at

$$\int_a^b g \, dx = \int_a^b f + k \, dx$$

$$= \int_a^b f \, dx + [kx]_a^b$$

$$= \int_a^b f \, dx + (b - a)k$$

$$\int_a^b g \, dx - (b - a)k = \int_a^b f \, dx$$

??

a) Tverrsnittet langs  $x$ -aksen blir en sirkel med høyde  $\sqrt{r^2 - x^2}$ . Tverrsnittsarealet blir derfor

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi \sqrt{r^2 - x^2}^2 \\ &= \pi(r^2 - x^2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r A(x) dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[ xr^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{\pi}{3} (3rr^2 - r^3 - (3(-r)r^2 - (-r)^3)) \\ &= \frac{\pi}{3} (3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$

??

Volumet  $V$  er gitt ved ligningen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 f^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x} dx \end{aligned}$$

Vi setter  $u = 2x$  og  $g(u) = e^u$ , da blir  $u' = 2$ :

$$\begin{aligned} \int e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u' e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C \end{aligned}$$



Siden  $u(0) = 0$  og  $u(1) = 2$  blir det bestemte integralet

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^2 &= \frac{1}{2} [e^2 - e^0] \\ &= \frac{1}{2} [e^2 - 1]\end{aligned}$$

Altså er

$$V = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

### Gruble ??

Vi har at

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx$$

Vi setter  $u = \sin x$  og  $v' = \sin x$ . Da er

$$u' = \cos x \qquad v = -\cos x$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx + \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Ettersom  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , følger det at

$$\begin{aligned} 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + x \\ \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

### Gruble ??

- a) Vi har at  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Da  $(\sin x)' = \cos x$  og  $(\cos x)' = -\sin x$  har vi av divisjonsregelen ved derivasjon (se [TM1](#)) at

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

- b) Vi setter  $u = \tan x$ . Av oppgave a) har vi da at

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \int \frac{1}{u} dx = \ln |u| + C = \ln |\tan x|$$

### Gruble ??

Vi har at

$$\int_{-1}^1 x^3 + 2x dx = \left[ \frac{x^4}{4} + x^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} + 1 - \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = 0$$

Svaret forteller at arealet avgrenset av  $f(x) = x^3 + 2x$  og  $x$ -aksen for  $f \geq 0$  er like stort som arealet avgrenset av  $f$  og  $x$ -aksen for  $f \leq 0$  på intervallet  $x \in [-1, 1]$ .

### Gruble ??

$f$  og  $g$  skjærer hverandre når

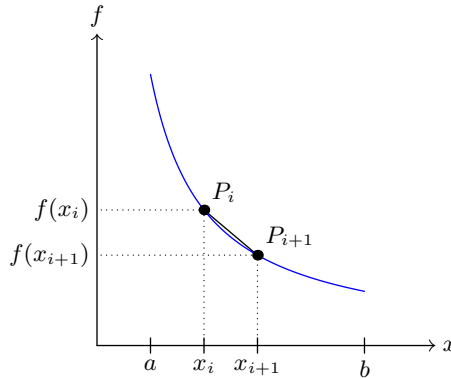
$$\sin x = \cos x$$

$$\tan x = 1$$

Da  $\tan 1 = \frac{\pi}{4}$ , skjærer  $f$  og  $g$  hverandre når  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$  for  $n \in \mathbb{Z}$ . De to skjæringspunktene i figuren må dermed være  $x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}]$ . Da  $f > g$  på dette intervallet, er arealet til det fargede området gitt som

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx &= \left[ \sin x + \cos x \right]_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left( \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Gruble ??



For  $i, n \in \mathbb{N}$  setter vi  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ , hvor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = 0$ . Da er  $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(x_i + \Delta x) - f(x_i)$ . Avstanden mellom  $P_{i+1}$  og  $P_i$  er da gitt som

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x_i + \Delta x) - f(x_i)]^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left( \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{(\Delta x)^2} \right)^2}$$

I tilfellet der  $\Delta x \rightarrow 0$  gjenkjenner vi brøken som  $[f'(x_i)]^2$ , og dermed er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i+1} - P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}$$

Av (??) har vi da at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i+1} - P_i| = \int_a^b \sqrt{1 + g^2} dx$$

Gruble ??

Vi har at

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a + (i-1)\Delta x)^2 \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a^2 \Delta x + 2a(i-1)(\Delta x)^2 + (i-1)^2 (\Delta x)^3) \end{aligned}$$

Vi har at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a^2 \Delta x = a^2 \frac{b-a}{n} n = a^2 b - a^3$$

Ved å bruke summen av en aritmetisk rekke får vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2a(i-1)(\Delta x)^2 = 2a \frac{(n-1)n}{2} \frac{(b-a)^2}{n^2} = a(b-a)^2$$

Ved å bruke bruke (??) finner vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 (\Delta x)^3 = \frac{(n-1)(2(n-1)+1)n}{6} \frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{1}{3}(b-a)^3$$

Dermed er

$$\int x^2 dx = a^2b - a^3 + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

a) Det er rett skrevet at  $x_i = a + (a - i)\Delta x$ . Dette gjør at differansen mellom to naboliggende  $x_i$ -verdier er  $\Delta x$ , og det er denne differansen man ganger med  $f(x_i)$ .

b) Det stemmer at kjerneregelen gir

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

I teksten du viser til gir kjerneregelen

$$F'(x) = G'(u)u'(x)$$

Og da vi har definert  $F'(x) = f(x)$  og  $G'(u) = g'(u)$ , kan vi skrive

$$f(x) = g(u)u$$