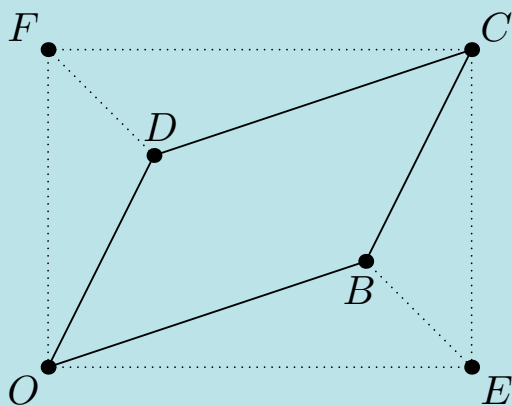


# Teoretisk matematikk 1

## 1T og R1



# Innhold

<b>1</b>	<b>Mengder og vilkår</b>	<b>4</b>
1.1	Mengder . . . . .	5
1.1.1	Definisjon . . . . .	5
1.1.2	Symbolet for uendelig . . . . .	7
1.1.3	Verdi- og definisjonsmengder . . . . .	7
1.2	Vilkår . . . . .	10
1.2.1	Symboler for vilkår . . . . .	10
1.2.2	Funksjoner med vilkår . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Algebra</b>	<b>12</b>
2.1	Faktorisering . . . . .	13
2.2	Andregradslikninger . . . . .	17
2.3	Polynomdivisjon . . . . .	20
2.3.1	Metoder . . . . .	20
2.3.2	Delelighet og faktorer . . . . .	24
2.4	Eulers tall . . . . .	26
2.5	Logaritmer . . . . .	27
2.6	Forklaringer . . . . .	30
	Oppgaver . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Geometri</b>	<b>39</b>
3.1	Definisjoner . . . . .	40
3.2	Egenskaper til sirkler . . . . .	43
3.3	Egenskaper til trekanter . . . . .	44
3.4	Forklaringer . . . . .	49
	Oppgaver . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Vektorer</b>	<b>65</b>
4.1	Introduksjon . . . . .	66
4.2	Regneregler for vektorer . . . . .	69
4.3	Lengden til en vektor . . . . .	71
4.4	Skalarproduktet I . . . . .	72
4.5	Skalarproduktet II . . . . .	74
4.6	Vektorer vinkelrett på hverandre . . . . .	75
4.7	Parallele vektorer . . . . .	77
4.8	Vektorfunksjoner . . . . .	79
4.8.1	Parameterisering . . . . .	79
4.8.2	Vektorfunksjonen til en linje . . . . .	79
4.9	Sirkellikningen . . . . .	81
4.10	Determinanter . . . . .	82
	Oppgaver . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Grenseverdier og kontinuitet</b>	<b>89</b>
5.1	Grenseverdier . . . . .	90
5.2	Kontinuitet . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Derivasjon</b>	<b>94</b>
6.1	Definisjoner . . . . .	95
6.2	Derivasjonsregler . . . . .	99

6.2.1	Den deriverte av elementære funksjoner . . . . .	101
6.2.2	Kjerne-, produkt- og divisjonsregelen ved derivasjon . . . . .	102
	Oppgaver . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Funksjonsdrøfting</b>	<b>111</b>
7.1	Monotoniegenskaper . . . . .	112
7.2	Ekstremalpunkt, vendepunkt og infleksjons-punkt . . . . .	115
7.3	Asymptoter . . . . .	121
7.4	Konvekse og konkave funksjoner . . . . .	123
7.5	Injektive og omvendte funksjoner . . . . .	124
	<b>Vedlegg A-F</b>	<b>129</b>
	<b>Indeks</b>	<b>144</b>

## Viktig kommentar om funksjoner

Som nevnt i [MB](#), er funksjoner variabler som endrer seg i takt med at andre variabler endrer seg. I denne boka vil det å skrive en funksjon  $f$  som  $f(x)$  indikere at  $f$  endrer seg i takt med variabelen  $x$ . Så lenge det er etablert at  $x$  er en variabel, vil det derfor ikke være noen forskjell på  $f$  og  $f(x)$ , for eksempel kan vi skrive

$$f = f(x) = 2x \tag{1}$$

En slik konvensjon gjør at mange forklaringer får penere uttrykk, men den krever at vi er bevisst hvordan parenteser brukes i sammenheng med multiplikasjon og i sammenheng med funksjoner. Da må vi tenke over om et symbol står for en uavhengig variabel eller en variabel som avhenger av en annen – altså en funksjon. Slik (1) er formulert, er  $x$  en uavhengig variabel og  $f$  en variabel avhengig av  $x$ . For en konstant  $a$  er da

$$x(a) = x \cdot a = ax$$

$$f(a) = 2 \cdot a = 2a$$

Videre er

$$f - a = 2x - a$$

# Kapittel 1

## Mengder og vilkår

## 1.1 Mengder

### 1.1.1 Definisjon

En samling av tall kalles en **mengde**<sup>1</sup>, og et tall som er en del av en mengde kalles et **element**. Mengder kan inneholde et endelig antall elementer og de kan inneholde uendelig mange elementer.

#### 1.1 Mengder

For to tall  $a$  og  $b$ , hvor  $a \leq b$ , har vi at

- $[a, b]$  er mengden av alle tall større eller lik  $a$  og mindre eller lik  $b$ .
- $(a, b]$  er mengden av alle tall større enn  $a$  og mindre eller lik  $b$ .
- $[a, b)$  er mengden av alle reelle tall større eller lik  $a$  og mindre enn  $b$ .

$[a, b]$  kalles et **lukket intervall**,  $(a, b)$  kalles et **åpent intervall**, og både  $(a, b]$  og  $[a, b)$  kalles **halvåpne intervall**.

Mengden som inneholder bare  $a$  og  $b$  skrives som  $\{a, b\}$ .

At  $x$  er et element i en mengde  $M$  skrives som  $x \in M$ .

At  $x$  ikke er et element i en mengde  $M$  skrives som  $x \notin M$ .

At mengden  $M$  består av mengdene  $M_1$  og  $M_2$  skrives som  $M = M_1 \cup M_2$ .

#### Språkboksen

$x \in M$  uttales ” $x$  inneholdt i  $M$ ”.

Mange tekster bruker  $\langle$  istedenfor  $($  for å indikere åpne (eller halvåpne) intervall.

#### Merk

Når vi heretter i boka definerer et intervall beskrevet av  $a$  og  $b$ , tar vi det for gitt at  $a$  og  $b$  er to tall, og at  $a \leq b$ .

<sup>1</sup>En mengde kan også være en samling av andre matematiske objekter, som for eksempel funksjoner, men i denne boka holder det å se på mengder av tall.

### Eksempel 1

Mengden av alle heltall større enn 0 og mindre enn 10 kan vi skrive som

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Denne mengden inneholder 9 elementer. 3 er et element i denne mengden, og da kan vi skrive  $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

10 er ikke et element i denne mengden, og da kan vi skrive  $10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

### Eksempel 2

I uttrykket  $0 \leq x \leq 1$ , erstatt  $\leq$  med et ulikhetssymbol slik at uttrykket gjelder for alle  $x \in M$ , og om 1 er inneholdt i  $M$ .

a)  $M = [0, 1]$

b)  $M = (0, 1]$

c)  $M = [0, 1)$

#### Svar

a)  $0 \leq x \leq 1$ . Videre er  $1 \in M$ .

b)  $0 < x \leq 1$ . Videre er  $1 \in M$ .

c)  $0 \leq x < 1$ . Videre er  $1 \notin M$ .

## 1.2 Navn på mengder

$\mathbb{N}$  Mengden av alle positive heltall<sup>1</sup>

$\mathbb{Z}$  Mengden av alle heltall<sup>2</sup>

$\mathbb{Q}$  Mengden av alle rasjonale tall

$\mathbb{R}$  Mengden av alle reelle tall

$\mathbb{C}$  Mengden av alle komplekse tall

---

<sup>1</sup>Inneholder *ikke* 0.

<sup>2</sup>Inneholder 0.

### 1.1.2 Symbolet for uendelig

Mengdene i [definisjon 1.2](#) inneholder uendelig mange elementer. Noen ganger ønsker vi å avgrense deler av en uendelig mengde, og da melder det seg et behov for et symbol som er med på å symbolisere dette.  $\infty$  er symbolet for en uendelig stor, positiv verdi.

#### Eksempel

Et vilkår om at  $x \geq 2$  kan vi skrive som  $x \in [2, \infty)$ .

Et vilkår om at  $x < -7$  kan vi skrive som  $x \in (-\infty, -7)$ .

#### Språkboksen

De to intervallene i eksempelet over kan også skrives som  $[2, \rightarrow)$  og  $(\leftarrow, -7)$ .

#### Merk

$\infty$  er ikke noe bestemt tall. Å bruke de fire grunnleggende regneartene alene med dette symbolet gir derfor ingen mening.

### 1.1.3 Verdi- og definisjonsmengder

#### 1.3 Verdi- og definisjonsmengder

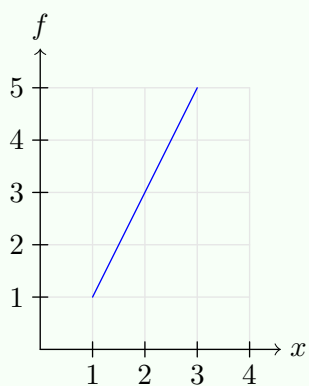
Gitt en funksjon  $f(x)$ .

- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier  $x$  kan ha, er **definisjonsmengden** til  $f$ . Denne mengden skrives som  $D_f$ .
- Mengden som utelukkende inneholder alle verdier  $f$  kan ha når  $x \in D_f$ , er **verdimengden** til  $f$ . Denne mengden skrives som  $V_f$ .

#### Eksempel 1

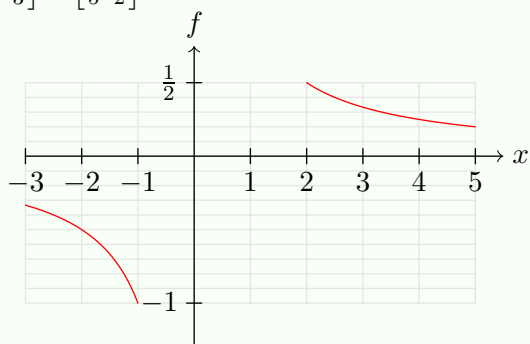
Figuren under viser  $f(x) = 2x + 1$ , hvor  $D_f = [1, 3]$ . Da er  $V_f = [1, 5]$ .





## Eksempel 2

Figuren under viser  $f(x) = \frac{1}{x}$ , hvor  $D_f = [-3, -1] \cup [2, 5]$ . Da er  $V_f = [-1, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$ .



## Merk

Definisjonsmengden til en funksjon bestemmes av to ting; hvilken sammenheng funksjonen skal brukes i, og eventuelle verdier som gir et udefinert funksjonsuttrykk. I *Eksempel 1* på side 7 er definisjonsmengden helt vilkårlig valgt, siden funksjonen er definert for alle  $x$ . I *Eksempel 2* derimot er ikke funksjonen definert for  $x = 0$ , så en definisjonsmengde som inneholdt denne verdien for  $x$  ville ikke gitt mening.

## 1.2 Vilkår

### 1.2.1 Symboler for vilkår

Symbolet  $\Rightarrow$  bruker vi for å vise til at hvis et vilkår er oppfylt, så er et annet (eller flere) vilkår også oppfylt. For eksempel; i MB så vi at hvis en trekant er rettvinklet, er Pytagoras' setning gyldig. Dette kan vi skrive slik:

trekanten er rettvinklet  $\Rightarrow$  Pytagoras' setning er gyldig

Men vi så også at det omvendte gjelder; hvis Pytagoras' setning er gyldig, må trekanten være rettvinklet. Da kan vi skrive

trekanten er rettvinklet  $\iff$  Pytagoras' setning er gyldig

Det er veldig viktig å være bevisst forskjellen på  $\Rightarrow$  og  $\iff$ ; at vilkår A oppfylt gir B oppfylt, trenger ikke å bety at vilkår B oppfylt gir vilkår A oppfylt!

#### Eksempel 1

firkanten er et kvadrat  $\Rightarrow$  firkanten har fire like lange sider

#### Eksempel 2

tallet er et primtall større enn 2  $\Rightarrow$  tallet er et oddetall

#### Eksempel 3

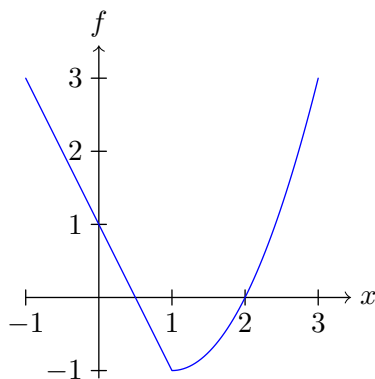
tallet er et partall  $\iff$  tallet er delelig med 2

### 1.2.2 Funksjoner med vilkår

Funksjoner kan gjerne ha flere uttrykk som gjelder ved forskjellige vilkår. La oss for eksempel definere en funksjon  $f(x)$  slik:

For  $x < 1$  er funksjonsuttrykket  $-2x + 1$

For  $x \geq 1$  er funksjonsuttrykket  $x^2 - 2x$



Figur 1.1: Grafen til  $f$  på intervallet  $[-1, 3]$ .

Dette kan vi skrive som

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

## Kapittel 2

# Algebra

## 2.1 Faktorisering

### 2.1 Kvadratsetningene

For to reelle tall  $a$  og  $b$  er

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ kvadratsetning})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{ kvadratsetning})$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3. \text{ kvadratsetning})$$

### Språkboksen

$(a + b)^2$  og  $(a - b)^2$  kalles **fullstendige kvadrat**.

3. kvadratsetning kalles også **konjugatsetningen**.

### Eksempel 1

Skriv om  $a^2 + 8a + 16$  til et fullstendig kvadrat.

**Svar**

$$\begin{aligned} a^2 + 8a + 16 &= a^2 + 2 \cdot 4a + 4^2 \\ &= (a + 4)^2 \end{aligned}$$

### Eksempel 2

Skriv om  $k^2 + 6k + 7$  til et uttrykk der  $k$  er et ledd i et fullstendig kvadrat.

**Svar**

$$\begin{aligned} k^2 + 6k + 7 &= k^2 + 2 \cdot 3k + 7 \\ &= k^2 + 2 \cdot 3k + 3^2 - 3^2 + 7 \\ &= (k + 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

### Eksempel 3

Faktoriser  $x^2 - 10x + 16$ .

#### Svar

Vi starter med å lage et fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 16 &= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + 16 \\&= (x - 5)^2 - 9\end{aligned}$$

Vi legger merke til at  $9 = 3^2$ , og bruker 3. kvadratsetning:

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 - 3^2 &= (x - 5 + 3)(x - 5 - 3) \\&= (x - 2)(x - 8)\end{aligned}$$

Altså er

$$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$$

### 2.1 Kvadratsetningene (forklaring)

Kvadratsetningene følger direkte av distributiv lov ved multiplikasjon (se [MB](#)).

### 2.2 Sum-produkt-metoden

Gitt  $x, b, c \in \mathbb{R}$ . Hvis  $a_1 + a_2 = b$  og  $a_1 a_2 = c$ , er

$$x^2 + bx + c = (x + a_1)(x + a_2) \quad (2.1)$$

### Eksempel 1

Faktoriser uttrykket  $x^2 - x - 6$ .

#### Svar

Siden  $2(-3) = -6$  og  $2 + (-3) = -1$ , er

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

## Eksempel 2

Faktoriser uttrykket  $b^2 - 5b + 4$ .

### Svar

Siden  $(-4)(-1) = 4$  og  $(-4) + (-1) = -5$ , er

$$b^2 - 5b + 4 = (b - 4)(b - 1)$$

## Eksempel 3

Løs ulikheten

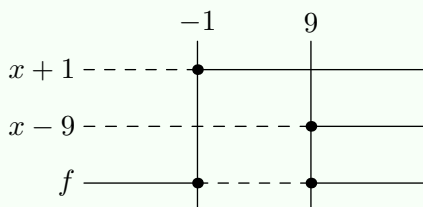
$$x^2 - 8x - 9 \leq 0$$

### Svar

Siden  $1(-9) = -9$  og  $1 + (-9) = -8$ , er

$$x^2 - 8x - 9 = (x + 1)(x - 9)$$

Vi setter  $f = (x + 1)(x - 9)$ , og lager et **fortegnsskjema**:



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket  $x + 1$  er negativt når  $x < -1$ , lik 0 når  $x = -1$ , og positivt når  $x > -1$ .
- Uttrykket  $x - 9$  er negativt når  $x < 9$ , lik 0 når  $x = 9$ , og positivt når  $x > 9$ .
- Siden  $f = (x + 1)(x - 9)$ , er

$$f > 0 \text{ når } x \in [-\infty, -1) \cup (9, \infty]$$

$$f = 0 \text{ når } x \in \{-1, 9\}$$

$$f < 0 \text{ når } x \in (-1, 9)$$

Altså er  $x^2 - 8x - 9 \leq 0$  når  $x \in [-1, 9]$ .



## 2.2 Sum-produkt-metoden (forklaring)

Vi har at

$$\begin{aligned}(x + a_1)(x + a_2) &= x^2 + xa_2 + a_1x + a_1a_2 \\ &= x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2\end{aligned}$$

Hvis  $a_1 + a_2 = b$  og  $a_1a_2 = c$ , er

$$(x + a_1)(x + a_2) = x^2 + bx + c$$

## 2.2 Andregradslikninger

### 2.3 Andregradslikning med konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.2)$$

hvor  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Da er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (abc\text{-formelen})$$

Hvis  $x = x_1$  og  $x = x_2$  er løsningene gitt av  $abc$ -formelen, er

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (2.3)$$

### Eksempel 1

a) Løs likningen  $2x^2 - 7x + 5 = 0$ .

b) Faktoriser uttrykket på venstre side i oppgave a).

#### Svar

a) Vi bruker  $abc$ -formelen. Da er  $a = 2$ ,  $b = -7$  og  $c = 5$ . Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Enten er

$$x = \frac{7 + 3}{4} = \frac{5}{2}$$

eller så er

$$x = \frac{7 - 3}{4} = 1$$

b)  $2x^2 - 7x + 5 = 2(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

## Eksempel 2

Løs likningen

$$x^2 + 3 - 10 = 0$$

**Svar**

Vi bruker *abc*-formelen. Da er  $a = 1$ ,  $b = 3$  og  $c = -10$ . Nå får vi at

$$\begin{aligned}x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \\&= \frac{-3 \pm 7}{2}\end{aligned}$$

Altså er

$$x = -5 \quad \vee \quad x = 2$$

## Eksempel 3

Løs likningen

$$4x^2 - 8x + 1$$

**Svar**

Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned}x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\&= \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{8} \\&= \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Altså er

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

## Andregradslikninger (forklaring)

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi starter med å omskrive likningen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Så lager vi et fullstendig kvadrat, og anvender konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\&= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\end{aligned}$$

Uttrykket over er lik 0 når

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 2.3 Polynomdivisjon

### 2.3.1 Metoder

Når to gitte tall ikke er delelige med hverandre, kan vi bruke brøker for å uttrykke kvotienten. For eksempel er

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \quad (2.4)$$

Tanken bak (2.4) er at vi skriver om telleren slik at vi får fram den delen av 17 som er delelig med 3:

$$\frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

Den samme tankegangen kan brukes for brøker med polynomer, og da kalles det **polynomdivisjon**.

#### Eksempel 1

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5}$$

**Svar**

#### Metode 1

Vi gjør følgende trinnvis; med den største potensen av  $x$  i telleren som utgangspunkt, lager vi uttrykk som er delelige med telleren.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5} &= \frac{2x(x + 5) - 10x + 3x - 4}{x + 5} \\ &= 2x + \frac{-7x - 4}{x + 5} \\ &= 2x + \frac{-7(x + 5) + 35 - 4}{x + 5} \\ &= 2x - 7 + \frac{31}{x + 5} \end{aligned}$$

## Metode 2

(Se utregningen under punktene)

- i) Vi observerer at leddet med den høyste ordenen av  $x$  i dividenden er  $2x^2$ . Dette uttrykket kan vi få fram ved å multiplisere dividenden med  $2x$ . Vi skriver  $2x$  til høyre for likhetstegnet, og subtraherer  $2x(x+5) = 2x^2 + 10x$ .
- ii) Differansen fra punkt ii) er  $-7x - 4$ . Vi kan få fram leddet med høyest ordenen av  $x$  ved å multiplisere dividenden med  $-7$ . Vi skriver  $-7$  til høyre for likhetstegnet, og subtraherer  $-7(x+5) = -7x - 35$ .
- iii) Differansen fra punkt iii) er  $31$ . Dette er et uttrykk som har lavere orden av  $x$  enn dividenden, og dermed skriver vi  $\frac{31}{x+5}$  til høyre for likhetstegnet.

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 3x - 4) : (x + 5) = 2x - 7 + \frac{31}{x + 5} \\ - \underline{(2x^2 + 10x)} \\ \phantom{0} - 7x - 4 \\ \phantom{00} - \underline{(-7x - 35)} \\ \phantom{000} 31 \end{array}$$

## Eksempel 2

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2}$$

**Svar**

Metode 1

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} &= \frac{x(x^2 - 2) + 2x - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} \\ &= x + \frac{-4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\ &= x + \frac{-4(x^2 - 2) - 8 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\ &= x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2}\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + 9) : (x^2 - 2) = x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2} \\ \underline{-(x^3 - 2x)} \phantom{+ 9} \\ -4x^2 + 2x + 9 \\ \underline{-(-4x^2 + 8)} \\ 2x + 1 \end{array}$$

### Eksempel 3

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

#### Svar

*Metode 1*

---

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} &= \frac{x^2(x - 4) + 4x^2 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + \frac{x(x - 4) + 4x - 6x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + x + \frac{-2x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + x - 2\end{aligned}$$

*Metode 2*

---

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = x^2 + x - 2 \\ -(x^3 - 4x^2) \phantom{+ 8} \\ \hline x^2 - 6x + 8 \\ -(-x^2 - 4x) \phantom{+ 8} \\ \hline -2x + 8 \\ -(-2x + 8) \\ \hline 0 \end{array}$$



### 2.3.2 Delelighet og faktorer

Eksempelene på side 20 - 23 peker på noen viktige sammenhenger som gjelder for generelle tilfeller:

#### 2.4 Polynomdivisjon

La  $A_k$  betegne et polynom  $A$  med grad  $k$ . Gitt polynomet  $P_m$ , da fins polynomene  $Q_n$ ,  $S_{m-n}$  og  $R_{n-1}$ , hvor  $m \geq n > 0$ , slik at

$$\frac{P_m}{Q_n} = S_{m-n} + \frac{R_{n-1}}{Q_n} \quad (2.5)$$

#### Språkboksen

Hvis  $R_{n-1} = 0$ , sier vi at  $P_m$  er **delelig** med  $Q_n$ .

#### Eksempel 1

Undersøk om polynomene er delelige med  $x - 3$ .

a)  $P(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$

b)  $K(x) = x^3 + 6x^2 - 13x - 42$

#### Svar

a) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{P}{x-2} = x^2 + 8x + 2 - \frac{50}{x-2}$$

Altså er  $P$  ikke delelig med  $x - 3$ .

b) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{K}{x-2} = x^2 + 9x + 14$$

Altså er  $K$  delelig med  $x - 3$ .

## 2.5 Faktorer i polynomer

Gitt et polynom  $P(x)$  og en konstant  $a$ . Da har vi at

$$P \text{ er delelig med } x - a \iff P(a) = 0 \quad (2.6)$$

Hvis dette stemmer, fins det et polynom  $S(x)$  slik at

$$P = (a - x)S \quad (2.7)$$

### Eksempel 1

Gitt polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

- a) Vis at  $x = 1$  løser likningen  $P = 0$ .
- b) Faktoriser  $P$ .

### Svar

- a) Vi undersøker  $P(1)$ :

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er  $P = 0$  når  $x = 1$ .

- b) Siden  $P(1) = 0$ , er  $x - 1$  en faktor i  $P$ . Ved polynomdivisjon finner vi at

$$P = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)$$

Da  $2(-4) = -8$  og  $-4 + 2 = -2$ , er

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$

Dette betyr at

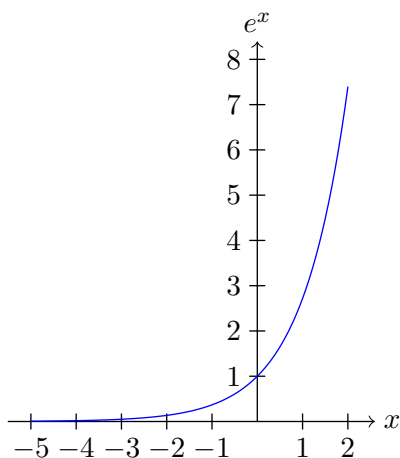
$$P = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

## 2.4 Eulers tall

**Eulers tall** er en konstant som har så stor betydning i matematikk at den har fått sin egen bokstav;  $e$ . Tallet er irrasjonalt<sup>1</sup>, og de ti første sifrene er

$$e = 2.718281828...$$

De mest fascinerende egenskapene til dette tallet kommer til syne når man undersøker funksjonen  $f(x) = e^x$ . Dette er en eksponentialfunksjon som er så viktig at den rett og slett går under navnet **eksponentialfunksjonen**. Denne funksjonen skal vi undersøke nærmere i [vedlegg D](#) og [kapittel 6](#).



---

<sup>1</sup>Og [trascendentalt](#).

## 2.5 Logaritmer

I MB så vi på potenstill, som består av et grunntall og en eksponent. En **logaritme** er en matematisk operasjon relativ til et tall. Hvis en logaritme er relativ til grunntallet til en potens, vil operasjonen resultere i eksponenten.

Logaritmen relativ til 10 skrives  $\log_{10}$ . Da er for eksempel

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

Videre er for eksempel

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Følgelig kan vi skrive

$$1000 = 10^{\log_{10} 1000}$$

Med potensreglene som utgangspunkt (se MB), kan man utlede mange regler for logaritmer.

### 2.6 Logaritmer

La  $\log_a$  betegne logaritmen relativ til  $a > 0$ . For  $m \in \mathbb{R}$  er da

$$\log_a a^m = m \quad (2.8)$$

Alternativt kan vi skrive

$$m = a^{\log_a m} \quad (2.9)$$

#### Eksempel 1

$$\log_5 5^9 = 9$$

#### Eksempel 2

$$3 = 8^{\log_8 3}$$

### Språkboksen

$\log_{10}$  skrives ofte som  $\log$ , mens  $\log_e$  skrives ofte som  $\ln$  eller (!)  $\log$ . Når man bruker digitale hjelpemidler til å finne verdier til logaritmer er det derfor viktig å sjekke hva som er grunntallet. I denne boka skal vi skrive  $\log_e$  som  $\ln$ .

Logaritmen med  $e$  som grunntall kalles den **naturlige logaritmen**.

**Eksempel 3**

$$\log 10^7 = 7$$

**Eksempel 4**

$$\ln e^{-3} = -3$$

**2.7 Logaritmereglene**

*Merk:* Logaritmereglene er her gitt ved den naturlige logaritmen. De samme reglene vil gjelde ved å erstatte  $\ln$  med  $\log_a$ , og  $e$  med  $a$ , for  $a > 0$ .

For  $x, y > 0$  har vi at

$$\ln e = 1 \quad (2.10)$$

$$\ln 1 = 0 \quad (2.11)$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad (2.12)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad (2.13)$$

For et tall  $y$  og  $x > 0$ , er

$$\ln x^y = y \ln x \quad (2.14)$$

**Eksempel 1**

$$\ln(ex^5) = \ln e + \ln x^5 = 1 + 5 \ln x$$

**Eksempel 2**

$$\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = \ln 2$$

## Logaritmerregler (forklaring)

### Likning (2.10)

$$\ln e = \ln e^1 = 1$$

### Likning (2.11)

$$\ln 1 = \ln e^0 = 0$$

### Likning (2.12)

For  $m, n \in \mathbb{R}$ , har vi at

$$\begin{aligned}\ln e^{m+n} &= m + n \\ &= \ln e^m + \ln e^n\end{aligned}$$

Vi setter<sup>1</sup>  $x = e^m$  og  $y = e^n$ . Siden  $\ln e^{m+n} = \ln(e^m \cdot e^n)$ , er da

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

### Likning (2.13)

Ved å undersøke  $\ln a^{m-n}$ , og ved å sette  $y = a^{-n}$ , blir forklaringen tilsvarende den gitt for likning (2.12).

### Likning (2.14)

Siden  $x = e^{\ln x}$  og<sup>2</sup>  $(e^{\ln x})^y = e^{y \ln x}$ , har vi at

$$\begin{aligned}\ln x^y &= \ln e^{y \ln x} \\ &= y \ln x\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Vi tar det her for gitt at alle positive tall forskjellig fra 0 kan uttrykkes som et potenstall.

<sup>2</sup>Se potensregler i [MB](#).

## 2.6 Forklaringer

### 2.4 Polynomdivisjon (forklaring)

Gitt polynomene

$P_m$ , hvor  $ax^m$  er leddet med høyest grad

$Q_n$ , hvor  $bx^n$  er leddet med høyest grad

Da kan vi skrive

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n - \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$$

Vi setter  $U = -\frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$ , og merker oss at  $U$  nødvendigvis har grad lavere eller lik  $m - 1$ . Videre har vi at

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{a}{b}x^{m-n} + \frac{U}{Q_n} \quad (2.15)$$

La oss kalle det første og det andre leddet på høgresiden i (2.15) for henholdsvis et "potensledd" og en "resterende brøk". Ved å følge prosedyren som ledet oss til (2.15), kan vi også uttrykke  $\frac{U}{Q_n}$  ved et "potensledd" og et "resterende ledd". Det "potensleddet" vil ha grad mindre eller lik  $m - 1$ , mens telleren i det "resterende leddet" vil ha grad mindre eller lik  $m - 2$ . Ved å anvende (2.15) kan vi stadig lage nye "potensledd" og "resterende ledd" fram til vi har et "resterende ledd" med grad  $n - 1$ .

## 2.5 Faktorisering av polynom (forklaring)

**$P$  er delelig med  $x - a \Rightarrow P(a) = 0$ .**

For et polynom  $S$  har vi av (2.5) at

$$\begin{aligned}\frac{P}{x-a} &= S \\ P &= (x-a)S\end{aligned}$$

Da er åpenbart  $x = a$  en løsning for likningen  $P = 0$ .

**$P$  er delelig med  $x - a \Leftarrow P(a) = 0$ .**

Av (2.5) finnes et polynom  $S$  og en konstant  $R$  slik at

$$\begin{aligned}\frac{P}{x-a} &= S + \frac{R}{x-a} \\ P &= (x-a)S + R\end{aligned}$$

Siden  $P(a) = 0$ , er  $0 = R$ , og da er  $P$  delelig med  $x - a$ .



## Oppgaver for kapittel 2

### 2.1.1

Skriv som fullstendige kvadrat.

- a)  $x^2 + 6x + 9$       b)  $b^2 + 14b + 49$       c)  $a^2 - 2a + 1$   
d)  $k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{9}$       e)  $c^2 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{16}$       f)  $y^2 + \frac{6}{7}y + \frac{9}{49}$

### 2.1.2

Skriv som fullstendige kvadrat.

- a)  $25a^2 + 90a + 81$       b)  $9b^2 + 12a + 4$       c)  $64c^2 - 16c + 1$   
d)  $\frac{1}{4}d^2 + \frac{3}{4}d + \frac{9}{16}$       e)  $\frac{1}{25}e^2 + \frac{4}{35}e + \frac{4}{49}$       f)  $\frac{81}{64}f^2 - \frac{15}{4}f + \frac{25}{9}$

### 2.1.3

Vis at

$$(a - b) - b^2 = a(a - 2b)$$

### 2.1.4

- a) Gitt to heltall  $a$  og  $b$ . Forklar hvorfor  $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$  er et heltall.  
b) Skriv om brøken  $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$  til en brøk med heltalls nevner.

### 2.1.5

Skriv om til et uttrykk der  $x$  er et ledd i et fullstendig kvadrat.

- a)  $x^2 + 6x - 7$       b)  $x^2 - 8x - 20$       c)  $x^2 + 12 - 45$

### 2.1.6

Hvorfor er det ved bruk av [sum-produkt-metoden](#) lurt å starte med å finne tall som oppfyller kravet  $a_1 a_2 = c$  (i motsetning til å finne tall som oppfyller kravet  $a_1 + a_2 = b$ )?

### 2.1.7

Faktoriser uttrykkene fra [oppgave 2.1.5](#).

### 2.1.8

Faktoriser uttrykkene.

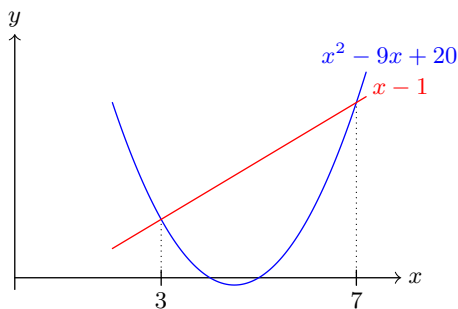
$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - 10kx + 25k^2 & \text{b) } y^2 + 8yz + 16z^2 & \text{c) } a^2 - 20aq + 100q^2 \\ \text{d) } x^2 + xy - 20y^2 & \text{e) } a^2 - 9ab + 14b^2 & \text{f) } y^2 - 9k^5y - k^2y + 9k^7 \end{array}$$

### 2.1.9

Gitt ulikheten

$$x^2 - 9x + 20 > x - 1$$

- a) Bruk figuren under til å løse ulikheten.  
b) Løs ulikheten ved hjelp av faktorisering.



### 2.1.10 (1TH21D1)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

### 2.1.11 (1TV21D1)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x-6}{x+3} - \frac{18}{x^2-9}$$

### 2.1.12 (1TH21D1)

Løs ulikheten.

$$x^2 + 2x - 8 < 0$$

### 2.1.13

Gitt ulikheten

$$\frac{10}{x+3} - \frac{2}{x+5} > 0$$

- a) Forklar hvorfor det er problematisk å gange begge sider av ulikheten med en fellesnevner.

b) Løs ulikheten.

### 2.2.1

Gitt likningen

$$ax^2 + bx = 0$$

Vis, uten å bruke *abc*-formelen, at

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{b}{a}$$

### 2.2.2

Løs likningene.

a)  $2x^2 - 4x = 0$       b)  $3x^2 + 27x = 0$

c)  $7x^2 + 2x = 0$       d)  $8x - 9x^2 = 0$

### 2.2.3

Løs likningene.

a)  $x^2 - 4x - 4 = 0$       b)  $x^2 + 2x - 15 = 0$       c)  $x^2 + 3x - 70 = 0$

d)  $x^2 + 5x - 7 = 0$       e)  $x^2 - x - 1 = 0$       f)  $x^2 - 2x - 9 = 0$

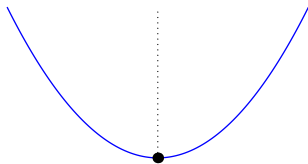
g)  $5x^2 + 2x - 7 = 0$       h)  $8x^2 - 2x^2 - 9 = 0$       i)  $3x^2 - 12x + 1 = 0$

### 2.2.4 (1TH21D1)

Grafen til en andregradsfunksjon  $f$  går gjennom punktene  $(0, 12)$ ,  $(-3, 0)$  og  $(2, 0)$ . Bestem  $f(x)$ .

### 2.2.5

Grafen til  $f(x) = x^2 + 2x - 8$  er symmetrisk om vertikallinja som går gjennom bunnpunktet. Finn  $x$ -verdien til dette punktet.



**2.2.6** (1TH21D1)

$$x^2 + 2x - y = -1 \quad (\text{I})$$

$$x + y = -2 \quad (\text{II})$$

Vis at ligningssystemet ikke har løsning

a) grafisk

b) ved regning

### 2.3.1

Utfør polynomdivisjon på uttrykkene

a)  $\frac{x^4-3x^2+5}{x^3+x}$       b)  $\frac{-7x^3-9x^2+x}{-4x^2+3}$       c)  $\frac{2x^3-6x^2+9x-27}{2x^2+9}$

### 2.4.1

$P(x) = 0$  for én av  $x \in \{-1, 2, 3\}$ . Faktoriser  $P$  når

a)  $P = x^3 - 37x + 84$   
b)  $P = x^3 + 10x^2 + 17x + 18$   
c)  $P = 2x^3 + 21x^2 + 61x + 42$

### 2.5.1

Løs likningen.

a)  $7 \cdot 5^x = 14$       b)  $3 \cdot 8^x = 27$       c)  $10 \cdot 2^x = 19$

### 2.5.2

Vis at likningen

$$b \cdot a^x = c$$

har løsningen

$$x = \log_a \frac{c}{b}$$

### 2.5.3

Løs likningen. (Hint; se [vedlegg B](#))

a)  $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$       b)  $(\log x)^2 - 3 \ln x - 70 = 0$   
c)  $e^{2x} - 2x - 3 = 0$       d)  $e^{2x} + 7x - 18 = 0$

### 2.5.4 (1TH21D1)

Løs ligningene

a)  $\lg(2x - 6) = 2$   
b)  $\frac{3^{2x} + 3^{2x} + 4}{2} = 29$

### Gruble 1

$$\sqrt{27} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Finn de heltallige verdiene til  $x$  og  $y$ .

### Gruble 2

Skriv uttrykkene på formen  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ , hvor  $a$  og  $b$  er heltall.

a)  $10 - 2\sqrt{21}$

b)  $13 + 2\sqrt{22}$

c)  $8 + 4\sqrt{3}$

d)  $42 - 14\sqrt{5}$

### Gruble 3

For en trekant med sidelengder  $a$ ,  $b$  og  $c$  er arealet  $A$  gitt ved **Hérons formel**:

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$$

Bevis formelen.

### Gruble 4

Gitt funksjonen  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Vis at grafen til  $f$  er symmetrisk om vertikallinja som går gjennom punktet  $(-\frac{b}{2a}, 0)$ .

### Gruble 5

Vis at  $2bd - 2dr - r^2$  er en faktor i uttrykket  $d^2r^2 - (d+r)^2r^2 + 4bd^2(b-r)$ .

## Kapittel 3

# Geometri

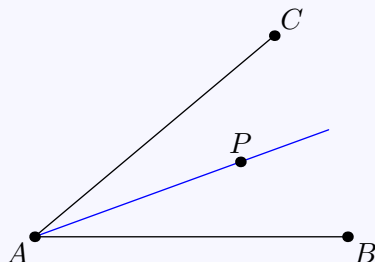


## 3.1 Definisjoner

### 3.1 Halveringslinje

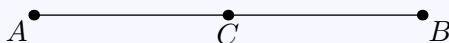
Gitt  $\angle BAC$ . For et punkt  $P$  som ligger på **halveringslinja** til vinkelen (blå linje i figuren), er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC \quad (3.1)$$



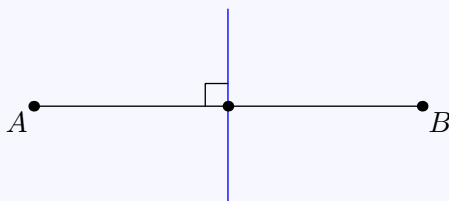
### 3.2 Midtpunkt

**Midtpunktet**  $C$  til  $AB$  er punktet på linjestykket slik at  $AC = CB$ .



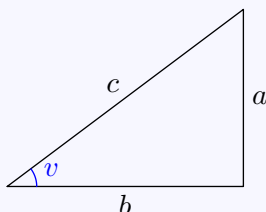
### 3.3 Midtnormal

**Midtnormalen** til  $AB$  (blå linje i figuren) står normalt på, og går gjennom midtpunktet til,  $AB$ .



### 3.4 sin, cos og tan

Gitt en rettvinklet trekant med katetene  $a$  og  $b$ , hypotenus  $c$ , og vinkel  $v$ , som vist i figuren under.



Da er

$$\sin v = \frac{a}{c} \quad (3.2)$$

$$\cos v = \frac{b}{c} \quad (3.3)$$

$$\tan v = \frac{a}{b} \quad (3.4)$$

#### Språkboksen

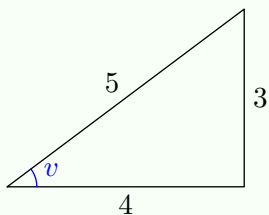
I figuren over blir  $a$  kalt den **motstående** kateten til vinkel  $v$ , og  $b$  den **hosliggende**.

sin, cos og tan er forkortelser for henholdsvis **sinus**, **cosinus** og **tangens**.

#### Eksaktverdier

De aller fleste sinus-, cosinus- og tangensverdier er irrasjonale tall, i praktiske anvendelser av verdiene er det derfor vanlig å benytte digitale hjelpemidler. Verdiene som er viktigst for teoretiske formål er gitt i **vedlegg C**.

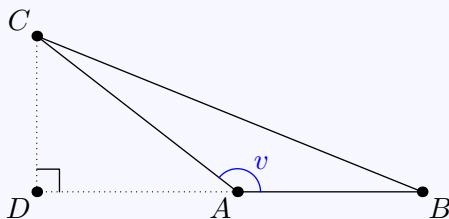
### Eksempel



$$\sin v = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos v = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan v = \frac{3}{4}$$

### 3.5 Sinus, cosinus og tangens I

Gitt  $\triangle ABC$ , hvor  $v = \angle BAC > 90^\circ$ , som vist i figuren under.



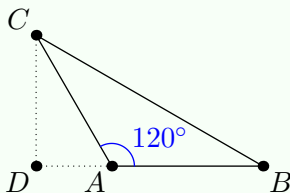
Da er

$$\sin v = \frac{CD}{AC} \quad (3.5)$$

$$\cos v = -\frac{AD}{AC} \quad (3.6)$$

$$\tan v = -\frac{CD}{AD} \quad (3.7)$$

### Eksempel



I figuren over er  $CD = \sqrt{3}$ ,  $AD = 1$  og  $AC = 2$ . Da er

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad , \quad \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

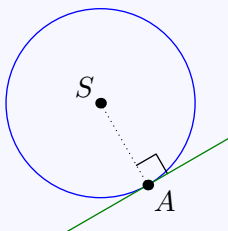
## 3.2 Egenskaper til sirkler

### 3.6 Tangent

En linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt, kalles en **tangent** til sirkelen.

La  $S$  være sentrum i en sirkel, og la  $A$  være skjæringspunktet til denne sirkelen og en linje. Da har vi at

linja er en tangent til sirkelen  $\iff \overrightarrow{AS}$  står vinkelrett på linja



### Språkboksen

Når to geometriske former skjærer hverandre i bare ett punkt, sier vi at de "tangerer hverandre".

### 3.7 Sentral- og periferivinkel

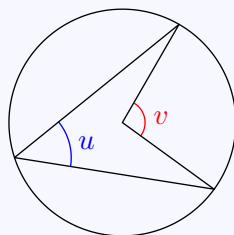
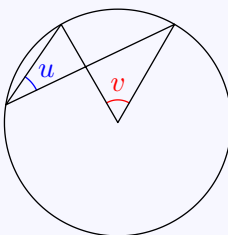
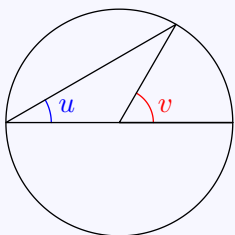
Både periferi- og sentralvinkler har vinkelbein som ligger (delvis) inni en sirkel.

En **sentralvinkel** har toppunkt i sentrum av en sirkel.

En **periferivinkel** har toppunkt på sirkelbuen.

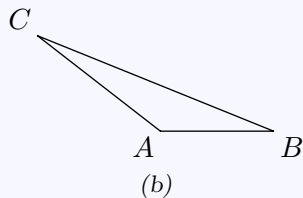
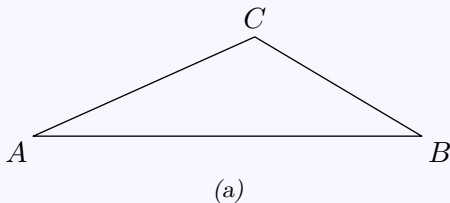
Gitt en periferivinkel  $u$  og en sentralvinkel  $v$ , som er innskrevet i samme sirkel og som spanner over samme sirkelbue. Da er

$$v = 2u \quad (3.8)$$



### 3.3 Egenskaper til trekanter

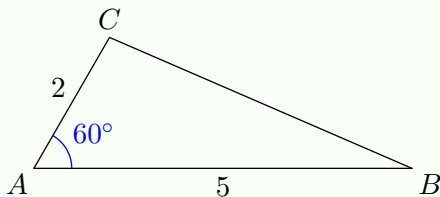
#### 3.8 Arealsetningen



Arealet  $T$  til  $\triangle ABC$  er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A \quad (3.9)$$

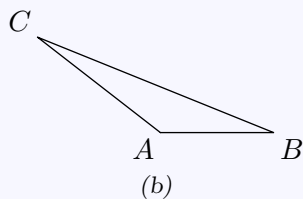
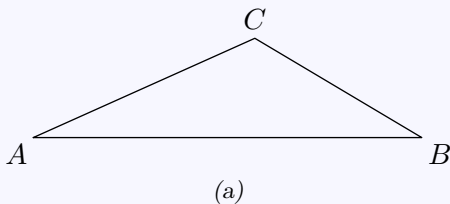
#### Eksempel



Da  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  Arealet  $T$  til  $\triangle ABC$  er

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

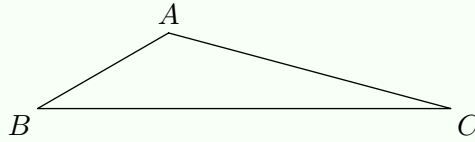
#### 3.9 Sinussetningen



$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle C}{AB} \quad (3.10)$$

### Eksempel

$BC = \sqrt{2}$ ,  $\angle A = 135^\circ$ , og  $\angle B = 30^\circ$ . Finn lengden til  $AC$ .



### Svar

Vi har at

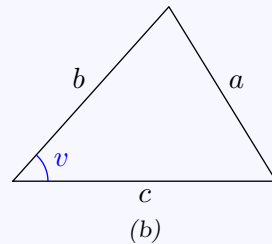
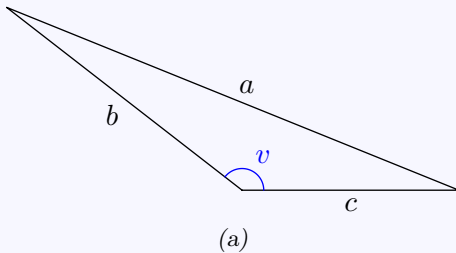
$$AC = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} BC$$

Da  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  og  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , har vi at

$$AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

### 3.10 Cosinussetningen

Gitt en trekant med sidelengder  $a$ ,  $b$  og  $c$ , og vinkel  $v$ , som vist i figurene under.

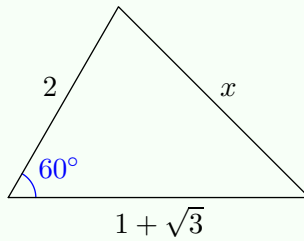


Da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v \quad (3.11)$$

### Eksempel

Finn verdien til  $x$ .



### Svar

Vi har at

$$x^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2(1 + \sqrt{3}) \cos 60^\circ$$

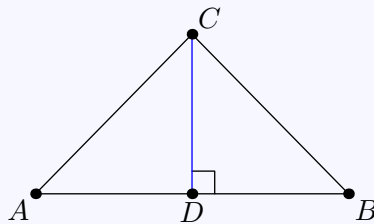
Da  $\cos 60 = \frac{1}{2}$ , har vi at

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Altså er  $x = \sqrt{6}$ .

### 3.11 Midtnormalen i en likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant  $\triangle ABC$ , hvor  $AC = BC$ , som vist i figuren under.

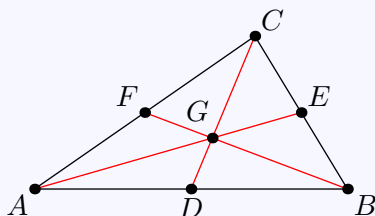


Høgda  $DC$  ligger da på midtnormalen til  $AB$ .

### 3.12 Median

En **median** er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.

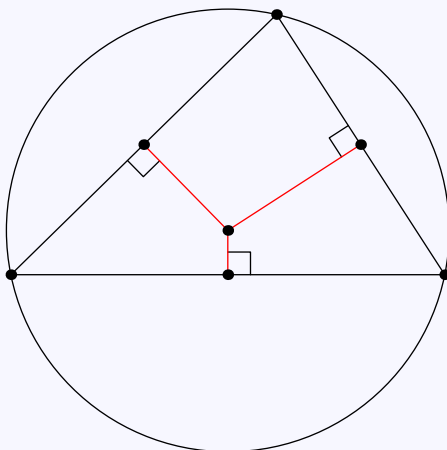


Gitt  $\triangle ABC$  med medianer  $CD$ ,  $BF$  og  $AE$ , som skjærer hverandre i  $G$ . Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

### 3.13 Midtnormal (i trekant)

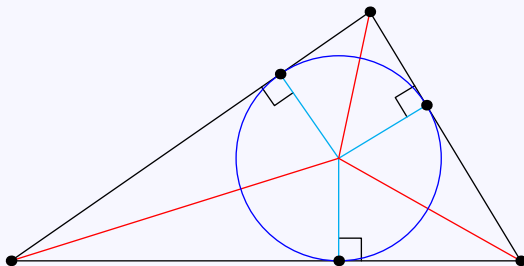
Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den **omskrevne sirkelen** til trekanten, som har hjørnene til trekanten på sin bue.





### 3.14 Innskrevet sirkel

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i trekantens **innskrevne sirkel**, som tangerer hver av sidene til trekanten.



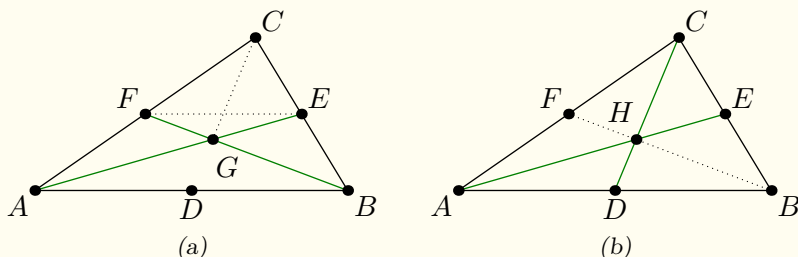
## 3.4 Forklaringer

### 3.11 Midtnormalen i en likebeint trekant (forklaring)

Da både  $\triangle ADC$  og  $\triangle DBC$  er rettvinklede og har  $CD$  som korteste katet, og  $AC = BC$ , følger det av Pytagoras' setning at  $AD = BD$ .

### 3.12 Median (forklaring)

Vi vil her skrive arealet til en trekant  $\triangle ABC$  som  $ABC$ .



Vi lar  $G$  være skjæringspunktet til  $BF$  og  $AE$ , og tar det for gitt at dette ligger inne i  $\triangle ABC$ . Da  $AF = \frac{1}{2}AC$  og  $BE = \frac{1}{2}BC$ , er  $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$ . Dermed har  $F$  og  $E$  lik avstand til  $AB$ , som betyr at  $FE \parallel AB$ . Videre har vi også at

$$\begin{aligned} ABG + AFG &= ABG + BGE \\ AFG &= BGE \end{aligned}$$

$G$  har lik avstand til  $AF$  og  $FC$ , og  $AF = FC$ . Dermed er  $AFG = GFC$ . Tilsvarende er  $BGE = GEC$ . Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$\begin{aligned} AFG + GFC + GEC &= AEC \\ GEC &= \frac{1}{6}ABC \end{aligned}$$

La  $H$  være skjæringspunktet til  $AE$  og  $CD$ . Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både  $\triangle GEC$  og  $\triangle HEC$  har  $CE$  som side, likt areal, og både  $G$  og  $H$  ligger på  $AE$ , må  $G = H$ . Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$  fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

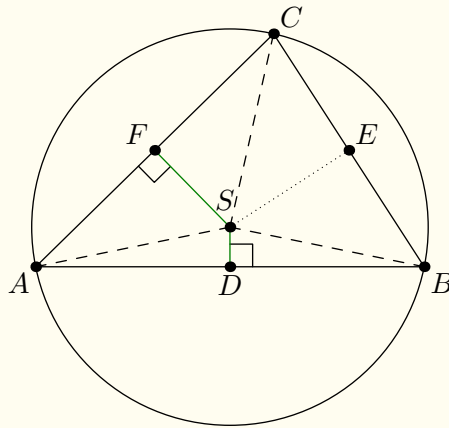
$\triangle ABG \sim \triangle EFG$  fordi  $\angle EGF$  og  $\angle AGB$  er toppvinkler og  $AB \parallel FE$ . Dermed er

$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

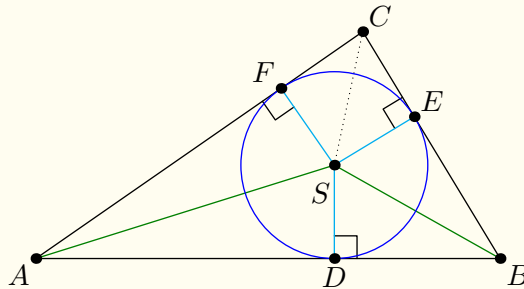
### 3.13 Midtnormal (i trekant) (forklaring)



Gitt  $\triangle ABC$  med midtpunktene  $D$ ,  $E$  og  $F$ . Vi lar  $S$  være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til  $AC$  og  $AB$ .  $\triangle AFS \sim \triangle CFS$  fordi begge er rettvinklede, begge har  $FS$  som korteste katet, og  $AF = FC$ . Tilsvarende er  $\triangle ADS \sim \triangle BDS$ . Følgelig er  $CS = AS = BS$ . Dette betyr at

- $\triangle BSC$  er likebeint, og da går midtnormalen til  $BC$  gjennom  $S$ .
- $A$ ,  $B$  og  $C$  må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum  $S$  og radius  $AS = BS = CS$

### 3.14 Innskrevet sirkel (forklaring)

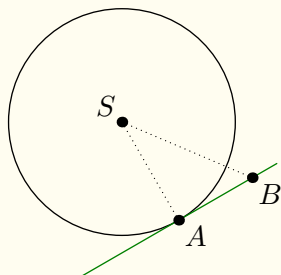


Gitt  $\triangle ABC$ . Vi lar  $S$  være skjæringspunktet til de respektive halveringslinjene til  $\angle BAC$  og  $\angle CBA$ . Videre plasserer vi  $D$ ,  $E$  og  $F$  slik at  $DS \perp AB$ ,  $ES \perp BC$  og  $FS \perp AC$ .  $\triangle ASD \cong \triangle ASF$  fordi begge er rettvinklede og har hypotenus  $AS$ , og  $\angle DAS = \angle SAF$ . Tilsvarende er  $\triangle BSD \cong \triangle BSE$ . Dermed er  $SE = SD = SF$ . Følgelig er  $F$ ,  $C$  og  $E$  de respektive tangeringspunktene til  $AB$ ,  $BC$  og  $AC$  og sirkelen med sentrum  $S$  og radius  $SE$ .

Videre har vi at  $\triangle CSE \cong \triangle CSF$ , fordi begge er rettvinklede og har hypotenus  $CS$ , og  $SF = SE$ . Altså er  $\angle FCS = \angle ECS$ , som betyr at  $CS$  ligger på halveringslinja til  $\angle ACB$ .

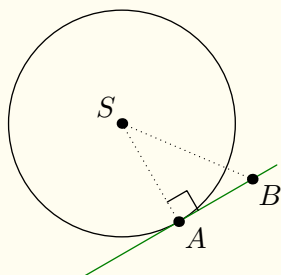
### 3.6 Tangent (forklaring)

Linja er en tangent til sirkelen  $\Rightarrow \overrightarrow{AS}$  står vinkelrett på linja



Vi antar at vinkelen mellom linja og  $\overrightarrow{AS}$  er ulik  $90^\circ$ . Da må det finnes et punkt  $B$  på linja slik at  $\angle BAS = \angle SBA$ , som betyr at  $\triangle ASB$  er likebeint. Følgelig er  $AS = BS$ , og da  $AS$  er lik radien i sirkelen, må dette bety at  $B$  også ligger på sirkelen. Dette motsier det faktum at  $A$  er det eneste skjæringspunktet til sirkelen og linja, og dermed må vinkelen mellom linja og  $\overrightarrow{AS}$  være  $90^\circ$ .

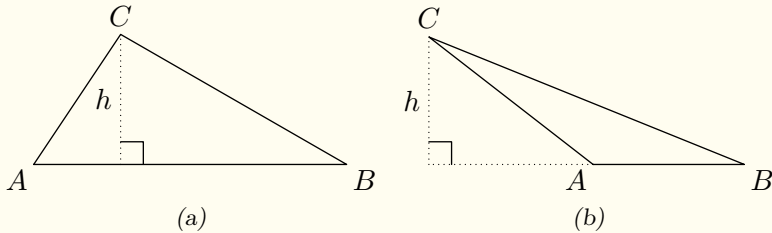
Linja er en tangent til sirkelen  $\Leftarrow \overrightarrow{AS}$  står vinkelrett på linja



Gitt et vilkårlig punkt  $B$ , som ikke samsvarer med  $A$ , på linja. Da er  $BS$  hypotenusen i  $\triangle ABC$ . Dette innebærer at  $BS$  er større enn radien til sirkelen ( $BS > AS$ ), og da kan  $B$  umulig ligge på sirkelen. Altså er  $A$  det eneste punktet som ligger på både linja og sirkelen, og dermed er linja en tangent til sirkelen.

### 3.8 Arealsetningen (forklaring)

Gitt to tilfeller av  $\triangle ABC$ , som vist i figuren under. Det éne hvor  $\angle BAC \in (0^\circ, 90^\circ]$ , det andre hvor  $\angle BAC \in (90^\circ, 0^\circ)$  og la  $h$  være høyden med grunnlinje  $AB$ .



Arealet  $T$  til  $\triangle ABC$  er i begge tilfeller

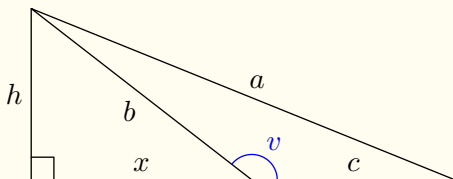
$$T = \frac{1}{2}AB \cdot h \quad (3.12)$$

Av henholdsvis (3.2) og (3.5) har vi at  $h = AC \cdot \sin \angle BAC$ , og da er

$$T = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

### 3.10 Cosinussetningen (forklaring)

Tilfellet hvor  $v \in (90^\circ, 180^\circ]$



Av Pytagoras' setning har vi at

$$x^2 = b^2 - h^2 \quad (3.13)$$

og at

$$a^2 = (x + c)^2 + h^2 \quad (3.14)$$

$$a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + h^2 \quad (3.15)$$

Ved å sette uttrykket for  $x^2$  fra (3.13) inn i (3.15), får vi at

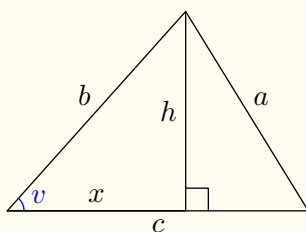
$$a^2 = b^2 - h^2 + 2xc + c^2 + h^2 \quad (3.16)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc \quad (3.17)$$

Av (3.6) har vi at  $x = -b \cos v$ , og da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

Tilfellet hvor  $v \in [0^\circ, 90^\circ]$



Dette tilfellet skiller seg ut fra tilfellet hvor  $v \in (90^\circ, 180^\circ]$  på to måter:

(i) I (3.14) får vi  $(c - x)^2$  i steden for  $(x + c)^2$ . I (3.17) får vi da  $-2xc$  i steden for  $+2xc$ .

(ii) Av (3.3) er  $x = b \cos v$ . Av punkt (i) følger det da at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

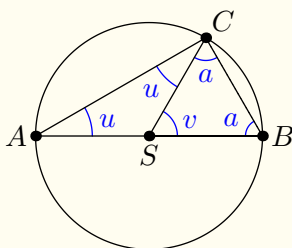


### 3.7 Sentral- og periferivinkel (forklaring)

Tilhørende periferi- og sentralvinkler kan deles inn i tre tilfeller.

#### (i) En diameter i sirkelen er høyre eller venstre vinkelbein i begge vinklene

I figuren under er  $S$  sentrum i sirkelen,  $\angle BAC = u$  en periferivinkel og  $\angle BSC = v$  den tilhørende sentralvinkelen. Vi setter  $\angle SCB = a$ .  $\angle ACS = \angle SAC = u$  og  $\angle CBS = \angle SCB = a$  fordi både  $\triangle ASC$  og  $\triangle SBC$  er likebeinte.



Vi har at

$$2a = 180^\circ - v \quad (3.18)$$

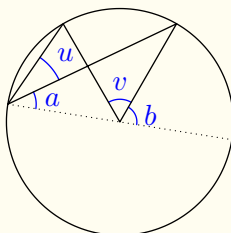
$$2u + 2a = 180^\circ \quad (3.19)$$

Vi setter uttrykket for  $2a$  fra (3.18) inn i (3.19):

$$\begin{aligned} 2u + 180^\circ - v &= 180^\circ \\ 2u &= v \end{aligned}$$

#### (ii) Vinklene ligger innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er  $u$  en periferivinkel og  $v$  den tilhørende sentralvinkelen. I tillegg har vi tegnet inn en diameter, som er med på å danne vinklene  $a$  og  $b$ . Både  $u$  og  $v$  ligger i sin helhet på samme side av denne diameteren.



Ettersom  $u + a$  er en periferivinkel, og  $v + b$  den tilhørende sentralvinkelen, vet vi av tilfelle 1 at

$$2(u + a) = v + b$$

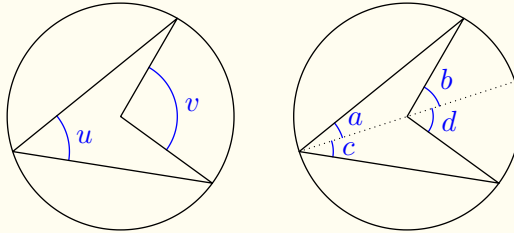
Men ettersom  $a$  og  $b$  også er samhørende periferi- og sentralvinkler, er  $2a = b$ . Det betyr at

$$2u + b = v + b$$

$$2u = v$$

**(iii) Vinklene ligger ikke innenfor samme halvdel av sirkelen**

I figuren under er  $u$  en periferivinkel og  $v$  den tilhørende sentralvinkelen. I figuren til høyre har vi tegnet inn en diameter. Den deler  $u$  inn i vinklene  $a$  og  $c$ , og  $v$  inn i  $b$  og  $d$ .



$a$  og  $c$  er begge periferivinkler, med henholdsvis  $b$  og  $d$  som tilhørende sentralvinkler. Av tilfelle i) har vi da at

$$2a = b$$

$$2c = d$$

Dermed er

$$2a + 2c = b + d$$

$$2(a + c) = v$$

$$2u = v$$

## Oppgaver for kapittel 3

### 3.1.1

Gitt  $v \in [0^\circ, 90^\circ]$ .

- a) Vis at  $\sin v = \sin(180^\circ - v)$ .
- b) Vis at  $\cos v = -\cos(180^\circ - v)$

### 3.1.2

Finn arealet til  $\triangle ABC$  når

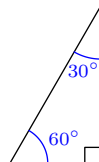
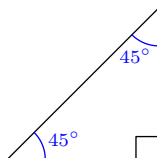
- a)  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 5$  og  $AC = 7$ .
- b)  $\angle B = 18^\circ$ ,  $AB = 4$  og  $BC = 3$ . ( $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ )
- c)  $\angle A = 75^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $AC = \sqrt{6}$  og  $BC = \sqrt{3} + 1$

### 3.1.3

- a) Bevis arealsetningen.
- b) Bevis sinussetningen.

### 3.1.4

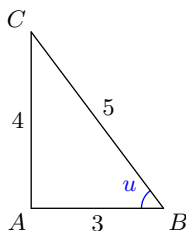
- a) Vis at  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- b) Vis at  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .
- c) Vis at  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



### 3.1.5 (1TH22D1)

Gitt trekanten til høyre. Vis at

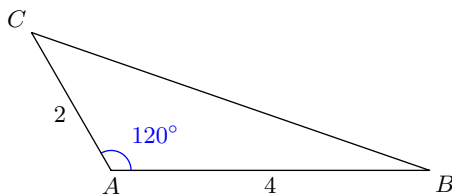
$$\frac{\sin u}{\cos u} = \tan u$$



### 3.1.6

Vis at  $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ .

### 3.2.1 (1TH21D1)



Gitt trekanten over. Bestem lengden til siden  $BC$ .

### 3.2.2

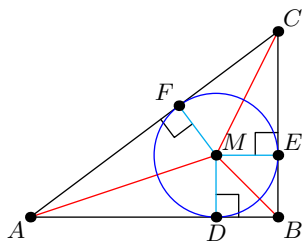
Gitt en trekant med sidelengder  $a$ ,  $b$  og  $c$  og innskrevet sirkel med radius  $r$ . Forklar hvorfor arealet til trekanten er gitt som

$$\frac{1}{2}(a + b + c)r$$

### 3.2.3

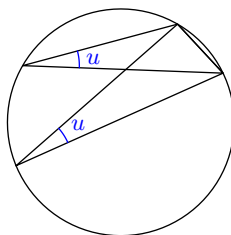
La  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  og  $DM = r$ .

- Vis at  $r = \frac{ac}{a+b+c}$ .
- Vis at  $2r = a + c - b$ .
- Bruk uttrykkene fra oppgave a) og b) til å finne  $b^2$  uttrykt ved  $a$  og  $c$ . Hva kalles denne formelen?



### 3.2.4

Forklar hvorfor det av [regel 3.7](#) følger at to vinkler som spenner over samme vinkelbue er like store.



### 3.2.5

- Vis at Tales' teorem<sup>1</sup> følger av [regel 3.7](#).
- Gitt en rettvinklet trekant  $\triangle ABC$  med hypotenus  $AB$ . Hvilken av  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$  og  $\iff$  skal erstatte  $???$  under for å beskrive det *omvendte* tilfellet av Tales' setning.

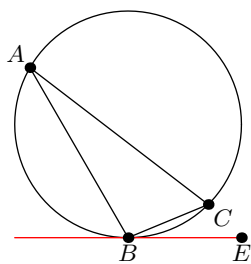
$C = 90^\circ$  ???  $AB$  er en diameter i den omskrevne sirkelen til  $\triangle ABC$

### 3.2.6

Den røde linja tangerer sirkelen. Vis at  $\angle BAC = \angle EBC$ .

---

<sup>1</sup>Se MB.



### Gruble 6

(1TH21D1)

En trekant har omkrets 12, og den éne siden i trekanten har længde 2. Bestem arealet til trekanten.

### Gruble 7

(1TV21D1)

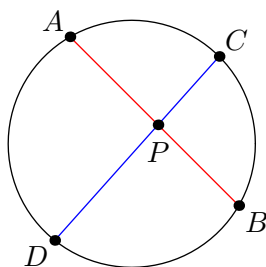
Sorter verdiene i stigende rækkefølge.

$$\sin 60^\circ \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \qquad \sin 160^\circ \qquad \lg 1$$

### Gruble 8

Vis at

$$AP \cdot PB = DP \cdot PC$$

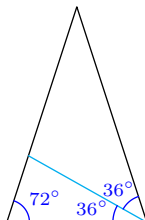


### Gruble 9

Bevis cosinussetningen.

### Gruble 10

Vis at  $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ . (Hint: Se figur.)



### Gruble 11

Vis at

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

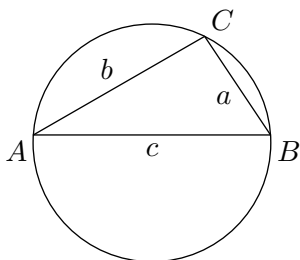
Det er tilstrekkelig å undersøke tilfellet hvor  $v, u \in [0^\circ, 90^\circ]$ .



### Gruble 12

La  $r$  være radien til den omskrevne sirkelen til  $\triangle ABC$ . Vis at

$$r = \frac{abc}{4A_{\triangle ABC}}$$



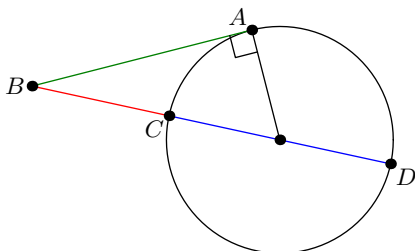
### Gruble 13

Bevis det omvendte tilfellet av Tales teorem (se [oppgave 3.2.5](#) ).

### Gruble 14

Vis at

$$AB^2 = BC \cdot CD$$

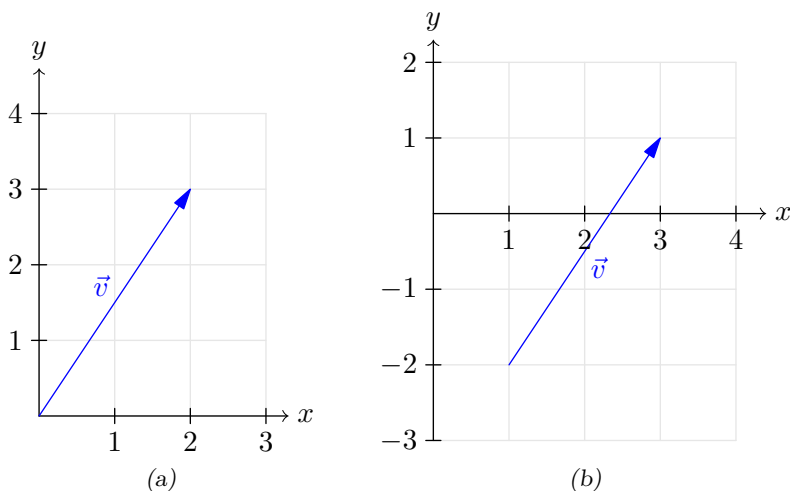


## Kapittel 4

# Vektorer

## 4.1 Introduksjon

En **todimensjonal vektor** angir en forflytning i et koordinatsystem med en  $x$ -akse og en  $y$ -akse. En vektor tegner vi som et linjestykke mellom to punkt, i tillegg til at vi lar en pil vise til hva som er endepunktet. Det betyr at forflytningen starter i punktet uten pil, og ender i punktet med pil.



I figur (a) er vektoren  $\vec{v}$  vist med startpunkt  $(0,0)$  og endepunkt  $(3,1)$ . Når en vektor har startpunkt  $(0,0)$ , sier vi at den er vist i **grunnstillingen**. I figur (b) er  $\vec{v}$  vist med startpunkt  $(1,-2)$  og endepunkt  $(3,1)$ . Forflytningen  $\vec{v}$  viser til er å vandre 2 mot høyre langs  $x$ -aksen og 3 opp langs  $y$ -aksen. Dette skriver vi som  $\vec{u} = [2,3]$ , som kalles  $\vec{u}$  skrevet på **komponentform**. 2 og 3 er henholdsvis  $x$ -komponenten og  $y$ -komponenten til  $\vec{v}$ .

### Språkboksen

En todimensjonal vektor kalles også en **vektor i planet**.

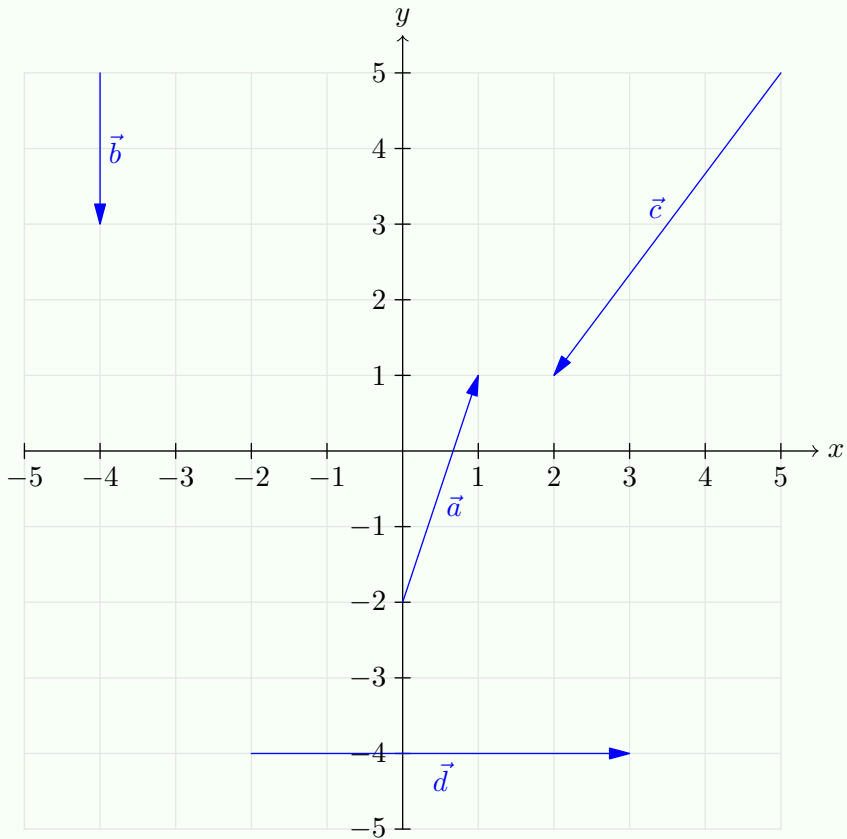
### Eksempel 1

$$\vec{a} = [1, 3]$$

$$\vec{b} = [0, -2]$$

$$\vec{c} = [-3, -4]$$

$$\vec{d} = [5, 0]$$



## 4.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor  $\vec{v}$  med startpunkt  $(x_1, y_1)$  og endepunkt  $(x_2, y_2)$  er gitt som

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] \quad (4.1)$$

### Eksempel 1

Skriv vektorene på komponentform.

- $\vec{a}$  har startpunkt  $(1, 3)$  og endepunkt  $(7, 5)$
- $\vec{b}$  har startpunkt  $(0, 9)$  og endepunkt  $(-3, 2)$
- $\vec{c}$  har startpunkt  $(-3, 7)$  og endepunkt  $(2, -4)$
- $\vec{d}$  har startpunkt  $(-7, -5)$  og endepunkt  $(3, 0)$

**Svar**

$$\vec{a} = [7 - 1, 5 - 3] = [6, 2]$$

$$\vec{b} = [-3 - 0, 2 - 9] = [-3, -7]$$

$$\vec{c} = [2 - (-3), -4 - 7] = [5, -11]$$

$$\vec{d} = [3 - (-7), 0 - (-5)] = [10, 5]$$

### Punkt eller vektor

Rent matematisk er det ingen forskjell på et punkt og en vektor; punktet  $(a, b)$  viser til akkurat samme plassering som vektoren  $[a, b]$ , og begge kan vise til den samme forflytningen. Ofte kan det likevel være greit å skille mellom når vi snakker om en plassering og når vi snakker om en forflytning, og til det bruker vi begrepene punkt (plassering) og vektorer (forflytning).

## 4.2 Regneregler for vektorer

### 4.2 Addisjon og subtraksjon av vektorer

Gitt vektorene  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ , punktet  $A = (x_0, y_0)$ .

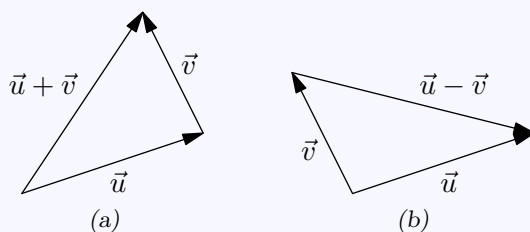
Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1) \quad (4.2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \quad (4.3)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \quad (4.4)$$

Summen eller differansen av  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  kan vi tegne slik:



### 4.3 Regneregler for vektorer

For vektorene  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$ , og et tall  $t$ , har vi at

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \quad (4.5)$$

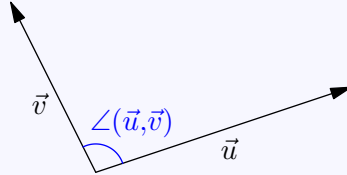
$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \quad (4.6)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad (4.7)$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad (4.8)$$

#### 4.4 Vinkelen mellom to vektorer

Vinkelen mellom to vektorer er (den minste) vinkelen som blir dannet når vektorene plasseres i samme startpunkt. For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  skriver vi denne vinkelen som  $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ .

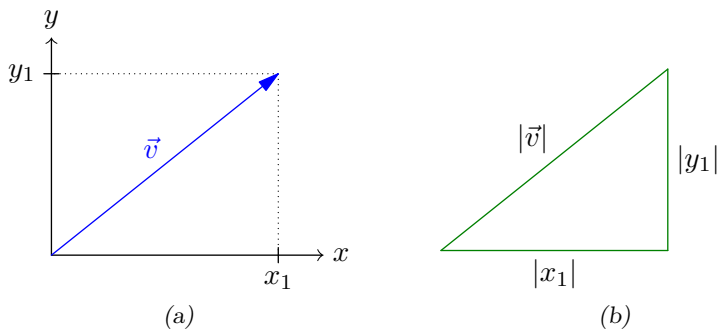


#### Vinkelmål

I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkler i grader, altså på intervallet  $[0^\circ, 180^\circ]$ .

## 4.3 Lengden til en vektor

Gitt en vektor  $\vec{v} = [x_1, y_1]$ . **Lengden** til  $\vec{v}$  er avstanden mellom startpunktet og endepunktet.



Av enhver vektor kan vi danne en rettvinklet trekant hvor  $|\vec{v}|$  er lengden til hypotenusen, og  $|x_1|$  og  $|y_1|$  er de respektive lengdene til katetene. Dermed er  $|\vec{v}|$  gitt av Pytagoras' setning.

### 4.5 Lengden til en vektor

Gitt en vektor  $\vec{v} = [x_1, y_1]$ . Lengden  $|\vec{v}|$  er da

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (4.9)$$

#### Eksempel 1

Finn lengden til vektorene  $\vec{a} = [7, 4]$  og  $\vec{b} = [-3, 2]$ .

**Svar**

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



## 4.4 Skalarproduktet I

### 4.6 Skalarproduktet I

For to vektorer  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ , er **skalarproduktet** gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 \quad (4.10)$$

### Språkboksen

Skalarproduktet kalles også **prikkproduktet** eller **indreproduktet**.

Ordet *skalar* viser til en éndimensjonal størrelse.

### Eksempel 1

Gitt vektorene  $\vec{a} = [3, 2]$ ,  $\vec{b} = [4, 7]$  og  $\vec{c} = [1, -9]$ . Regn ut  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  og  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ .

**Svar**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + 2(-9) = -15$$

## 4.7 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$  har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \quad (4.11)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (4.12)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (4.13)$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad (4.14)$$

### Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2$$

når du vet at  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ .

### Svar

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}^2 &= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= (\vec{a} + \vec{b})^2 \end{aligned}$$

## 4.5 Skalarproduktet II

Gitt vektoren  $\vec{u} - \vec{v}$ , hvor  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ . Da er

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

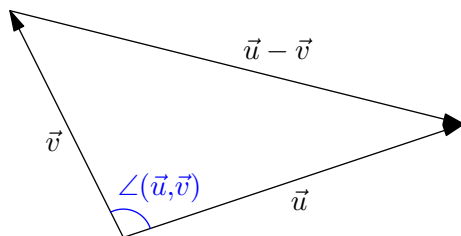
Av (4.9) har vi at

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ved hjelp av (4.10) og (4.11) kan vi skrive (4.15) som

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2} \quad (4.16)$$

Videre merker vi oss følgende figur:



Av [cosinussetningen](#) og (4.16) er

$$\begin{aligned} |(\vec{v} - \vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}^2 &= \vec{v}^2 + \vec{u}^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

## 4.8 Skalarproduktet II

For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \quad (4.17)$$

## 4.6 Vektorer vinkelrett på hverandre

Fra (4.17) kan vi gjøre en viktig observasjon; hvis  $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ , er  $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , og da blir

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

### 4.9 Vinkelrette vektorer

For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  har vi at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \quad (4.18)$$

### Språkboksen

Det er mange måter å uttrykke at  $\vec{u} \perp \vec{v}$  på. Blant annet kan vi si at

- $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  står vinkelrett på hverandre.
- $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  står normalt på hverandre.
- $\vec{u}$  er en normalvektor til  $\vec{v}$  (og omvendt).
- $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er ortogonale.

### Eksempel 1

Sjekk om vektorene  $\vec{a} = [5, -3]$ ,  $\vec{b} = [6, -10]$  og  $\vec{c} = [2, 7]$  er ortogonale.

#### Svar

Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \cdot 6 + (-3)10 \\ &= 0\end{aligned}$$

Altså er  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Videre er

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= 5 \cdot 2 + (-3)7 \\ &= 11\end{aligned}$$

Altså er  $\vec{a}$  og  $\vec{c}$  ikke ortogonale. Da  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , kan heller ikke  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  være ortogonale.

## Nullvektoren

I forkant av [regel 4.9](#) har vi bare argumentert for at  $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . For å rettferdiggjøre vilkåret som går begge veier i (4.18), må vi spørre: Kan vi få  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  om vinkelen mellom  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  *ikke* er  $90^\circ$ ?

På intervallet  $[0^\circ, 180^\circ]$  er det bare vinkelverdien  $90^\circ$  som resulterer i cosinusverdi 0. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av  $\vec{u}$  eller  $\vec{v}$  være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er **nullvektoren**  $\vec{0} = [0, 0]$ , som rett og slett ikke har noen retning<sup>1</sup>. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

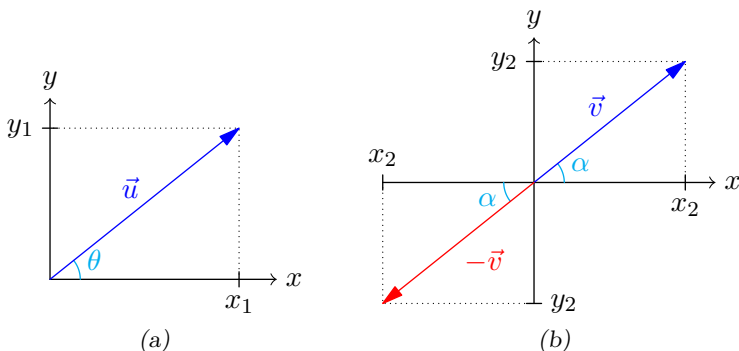
---

<sup>1</sup>Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger!

## 4.7 Parallele vektorer

### 4.10 Parallele vektorer

Hvis vinkelen mellom to vektorer er  $0^\circ$  eller  $180^\circ$ , er de parallelle.



Gitt vektorene  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$ . La  $\theta$  og  $\alpha$  være vinkelen mellom  $x$ -aksen og henholdsvis  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ , med  $x$ -aksen som høyre vinkelbein. Da er  $\tan \theta = \frac{y_1}{x_1}$  og  $\tan \alpha = \frac{y_2}{x_2}$ . Hvis  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ , er det to muligheter:

(i)  $\theta = 0^\circ$  og  $\alpha = 180^\circ$ , eller omvendt.

(ii)  $\theta = \alpha$

I begge tilfeller er  $\angle(\vec{u}, \vec{v})$  enten  $0^\circ$  eller  $180^\circ$ , og da er  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  parallelle. Det omvendte gjelder også: Hvis punkt (i) eller (ii) gjelder, er  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ . Det er ofte praktisk å omskrive denne sammenhengen til forholdet mellom samsvarende komponenter<sup>1</sup>:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad (4.19)$$

Det er også nyttig å merke seg at det må finnes to tall  $s$  og  $t$  slik at  $\vec{u} = [tx_2, sy_2]$ . Hvis  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , følger det av (4.19) at  $\frac{sx_2}{x_2} = \frac{ty_2}{y_2}$ . Dermed er  $s = t$ . Omvendt; hvis  $\vec{u} = t[x_2, y_2]$ , oppfyller  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  åpenbart (4.19).

<sup>1</sup>For vektorene  $[x_1, y_1]$  og  $[x_2, y_2]$  er disse samsvarende komponenter:

- $x_1$  og  $x_2$
- $y_1$  og  $y_2$

### 4.11 Parallele vektorer

For to vektorer  $\vec{u} = [x_1, y_1]$  og  $\vec{v} = [x_2, y_2]$  har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \quad (4.20)$$

Alternativt, for et tall  $t$  har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \quad (4.21)$$

### Språkboksen

Når  $\vec{u} = t\vec{v}$ , sier vi at  $\vec{u}$  er et **multiplum** av  $\vec{v}$  (og omvendt). Vi sier også at  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er **lineært avhengige**.

Om to vektorer ikke er parallelle, sier vi at de er **lineært uavhengige**.

### Eksempel

Undersøk hvorvidt  $\vec{a} = [2, -3]$  og  $\vec{b} = [20, -45]$  er parallelle med  $\vec{c} = [10, -15]$ .

#### Svar

Vi har at

$$\vec{c} = 5[2, -4] = 5\vec{a}$$

Dermed er  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ . Da  $\frac{20}{10} \neq \frac{-45}{-15}$ , er  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  ikke parallelle.

## 4.8 Vektorfunksjoner

### 4.8.1 Parameterisering

#### 4.12

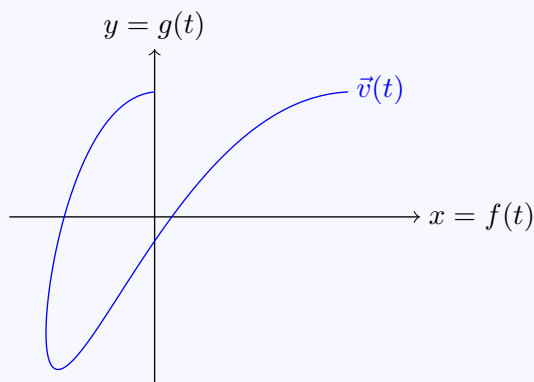
Gitt to funksjoner  $f(t)$  og  $g(t)$ . En vektor  $\vec{v}$  på formen

$$\vec{v}(t) = [f(t), g(t)]$$

er da en **vektorfunksjon**.

$\vec{v}$  kan skrives på **parameterisert form** som

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (4.22)$$



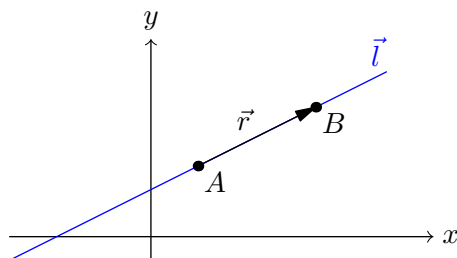
#### Merk

Til forskjell fra grafen til en skalarfunksjon, kan grafen til en vektorfunksjon "begeve seg fritt" i koordinatsystemet.

### 4.8.2 Vektorfunksjonen til en linje

Gitt en linje  $\vec{l}(t)$ , som vist i figuren under





Hvis en vektor  $\vec{r}$  er parallell med  $\vec{l}$ , kalles den en **retningsvektor** for linja. Si at  $\vec{r} = [a, b]$  er en retningsvektor for  $\vec{l}$ , og at  $A = (x_0, y_0)$  er et punkt på  $\vec{l}$ . Om vi starter i  $A$  og vandrer parallellt med  $\vec{r}$ , kan vi være sikre på at vi fortsatt befinner oss på linja. Dette må bety at vi for en variabel  $t$  kan nå et vilkårlig punkt  $B = (x, y)$  på linja ved følgende utregning:

$$B = A + t\vec{r}$$

På koordinatform kan vi skrive dette som<sup>1</sup>

$$(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Altså kan linja skrives som en vektorfunksjon:

### 4.13 Linje som vektorfunksjon

En linje  $\vec{l}(t)$  som går gjennom punktet  $A = (x_0, y_0)$  og har retningsvektor  $\vec{r} = [a, b]$  er gitt som

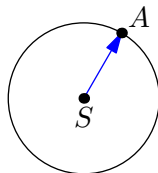
$$\vec{l} = [x_0 + at, y_0 + bt]$$

---

<sup>1</sup>Se (4.2).

## 4.9 Sirkellikningen

Gitt en sirkel med sentrum  $S = (x_0, y_0)$  og et punkt  $A = (x, y)$ , som ligger på buen til sirkelen.



Da er

$$\overrightarrow{SA} = [x - x_0, y - y_0]$$

Av (4.9) er da

$$|\overrightarrow{SA}|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Hvis vi lar  $r$  være radien til sirkelen, er  $|\overrightarrow{SA}| = r$ , og dermed kan vi uttrykke  $r$  ved koordinatene til  $S$  og  $A$ .

### 4.14 Sirkelligningen

Gitt en sirkel radius  $r$  og sentrum  $S = (x_0, y_0)$ . Hvis punktet  $A = (x, y)$  ligger på buen til sirkelen, er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

### Eksempel

Finn sentrum og radien til sirkelen gitt av likningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0 \quad (4.23)$$

### Svar

Vi starter med å lage fullstendige kvadrat:

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 2^2$$

$$y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 5^2$$

Altså kan vi skrive (4.23) som

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 - 2^2 - 5^2 - 20 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 7^2$$

Dermed har sirkelen sentrum  $(2, -5)$  og radius 7.

## 4.10 Determinanter

### 4.15 $2 \times 2$ determinanter

**Determinanten**  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  av to vektorer  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [b, c]$  er gitt som

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (4.24)$$

### Eksempel

Gitt vektorene  $\vec{u} = [-1, 3]$  og  $\vec{v} = [-2, 4]$ . Regn ut  $\det(\vec{u}, \vec{v})$ .

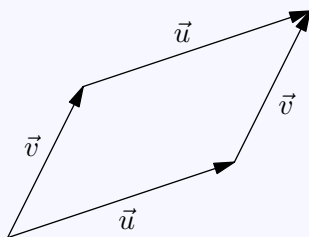
**Svar**

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

### 4.16 Arealformler med determinanter

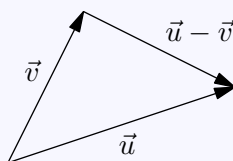
Arealet  $A$  til et parallelogram formet av to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er gitt ved

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \quad (4.25)$$



Arealet  $A$  til en trekant formet av to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er gitt ved

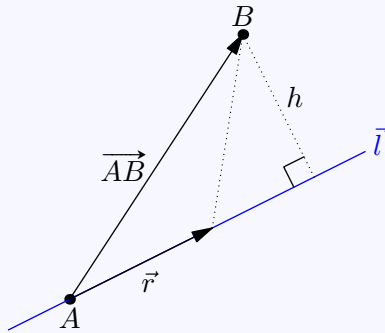
$$A = \frac{1}{2} |\det(\vec{u}, \vec{v})| \quad (4.26)$$



### 4.17 Avstand mellom punkt og linje

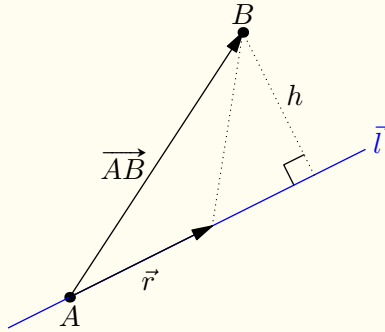
Avstanden  $h$  mellom et punkt  $B$  og en linje gitt av punktet  $A$  og retningsvektoren  $\vec{r}$  er gitt som

$$h = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{r})|}{|\vec{r}|} \quad (4.27)$$



#### 4.17 Avstand mellom punkt og linje (forklaring)

La en linje  $\vec{l}(t)$  i rommet være gitt av et punkt  $A$  og en retningsvektor  $\vec{r}$ . I tillegg ligger et punkt  $B$  utenfor linja, som vist i figuren under



Den korteste avstanden fra  $B$  til linja er høyden  $h$  i trekanten utspent av  $\vec{r}$  og  $\vec{AB}$ . Arealet til denne trekanten er gitt ved (4.26):

$$\frac{1}{2} \left| \det \left( \vec{AB}, \vec{r} \right) \right|$$

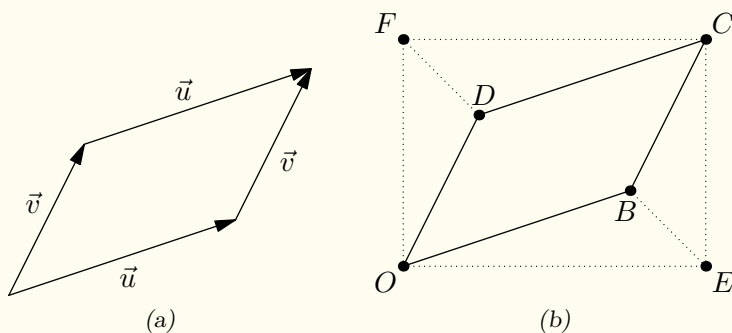
Av den klassiske arealformelen for en trekant (se [MB](#)) har vi nå at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{r}| h &= \frac{1}{2} \left| \det \left( \vec{AB}, \vec{r} \right) \right| \\ h &= \frac{\left| \det \left( \vec{AB}, \vec{r} \right) \right|}{|\vec{r}|} \end{aligned}$$

## Forklaringer

### 4.16 Arealformler med determinanter (forklaring)

Vi lar  $A_N$  betegne arealet til en geometrisk form  $N$ .



Gitt to vektorer  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [c, d]$ , hvor  $a, b, c, d > 0$ , som vist i figur (a). Plasserer vi vektorene i grunnstillingen er punktene vist i figur (b) gitt som

$$\begin{array}{lll} O = (0, 0) & B = (a, b) & C = (a + b, c + d) \\ D = (c, d) & E = (a + c, 0) & F = (0, b + d) \end{array}$$

Med  $OE$  som grunnlinje har  $\triangle OEB$  høyde  $b$ , altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da  $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$  og  $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$ , har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OEB} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

I figurene har vi antatt at (den minste) vinkelen mellom  $\vec{v}$  og  $x$ -aksen er mindre enn vinkelen mellom  $\vec{u}$  og  $x$ -aksen. I omvendt tilfelle ville vi fått at

$$A_{\square OECF} = bc - ad$$

Altså er

$$A_{\square OECF} = |ac - bd|$$

På lignende måte kan det vises at (4.25) gjelder for alle  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , se [oppgave 4.1.9](#).

*Merk:* (4.25) kan også vises veldig kortfattet ved å anvende trigonometri. Se oppgave ?? i [TM2](#) for dette.

## Oppgaver for kapittel 4

### 4.1.1

Gitt punktene  $A = (m, n)$  og  $B = (s, t)$ , og vektorene  $\vec{a} = [m, n]$  og  $\vec{b} = [s, t]$ . Vis at midtpunktet til linjestykket  $AB$  er gitt ved uttrykket

$$(0, 0) + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

### 4.1.2

Gitt  $\vec{v} = [ca, cb]$ . Vis at

$$|\vec{v}| = c\sqrt{a^2 + b^2}$$

### 4.1.3

- a) Gitt en vektor  $\vec{v}$ . Vis at lengden til vektoren  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  er lik 1.
- b) Bestem uttrykket for vektoren som er parallell med vektoren  $[3, 4]$ , og som har lengde 10.

### 4.1.4

Bestem lengden til hver av vektorene.

$$\vec{a} = [3, 4] \vec{b} = [-1, 7] \vec{c} = [-8, 6] \vec{d} = [4, -3]$$

### 4.1.5

Undersøk om noen av vektorene fra [oppgave 4.1.4](#) står vinkelrett på hverandre.

### 4.1.6

Undersøk om noen av vektorene fra [oppgave 4.1.4](#) er parallelle.

### 4.1.7 (R1V22D1)

For vektorene  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  og  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ .

Vi lar  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$  og  $\vec{v} = \vec{a} - 6\vec{b}$ .

- a) Bestem lengden til  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ .



b) Bestem vinkelen mellom  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ .

#### 4.1.8

Gitt  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [c, d]$  Vis at hvis  $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ , gir (4.17) at

$$ad - bc = 0$$

#### 4.1.9

Gitt to vektorer  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [c, d]$ . Vis at (4.25) gjelder når

a)  $a, b, d > 0$  og  $c < 0$

b)  $b, d > 0$  og  $a, c < 0$

c)  $b > 0$  og  $a, c, d < 0$

d)  $a, b, c, d < 0$

e)  $a > 0, b, c, d < 0$

f)  $a, c > 0$  og  $b, d < 0$

g)  $d > 0$  og  $a, b, c < 0$

#### 4.1.10

Gitt to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ . Forklar hvorfor

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = |u||v| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

## Kapittel 5

# Grenseverdier og kontinuitet

## 5.1 Grenseverdier

Si at vi starter med verdien 0.9, og deretter stadig legger til 9 som bakerste siffer. Da får vi verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre. Ved å legge til 9 som bakerste siffer på denne måten, *kan vi komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – verdien 1*. Det å ”komme så nærme vi måtte ønske – men aldri nå eksakt – en verdi” vil vi heretter kalle å ”gå mot en verdi”. Metoden vi akkurat beskrev kan vi se på som en metode for å gå mot 1. Vi kan da si at **grenseverdien** til denne metoden er 1. For å indikere en grenseverdi skriver vi **lim**.

Det er viktig å tenke over at vi kan gå mot et tall fra to sider; fra venstre eller fra høyre på tallinjen. Med en metode som gir oss verdiene 0.9, 0.99, 0.999 og så videre, nærmer vi oss 1 fra venstre. Lager vi oss en metode som gir verdiene 1.1, 1.01, 1.001 og så videre, nærmer vi oss 1 fra høyre. Dette vises ved å markere **+** eller **–** over tallet vi går mot.

### 5.1 Grenseverdier

$x \rightarrow a^+ = x$  går mot  $a$  fra høyre

$x \rightarrow a^- = x$  går mot  $a$  fra venstre

$x \rightarrow a = x$  går mot  $a$  (fra både høyre og venstre)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  = grenseverdien til  $f$  når  $x$  går mot  $a$   
= verdien  $f$  går mot når  $x$  går mot  $a$

### Språkboksen

Å gå mot en verdi fra høyre/venstre kalles også å gå mot en verdi ovenfra/nedenfra.

### Merk

$x \rightarrow a$  omfatter de to tilfellene  $x \rightarrow a^+$  og  $x \rightarrow a^-$ . Ofte vil disse være så like at vi kan behandle  $x \rightarrow a$  som ett tilfelle.

### En utvidelse av $=$

Det litt paradoksale med grenserverdier hvor  $x$  går mot  $a$ , er at vi ofte ender opp med å erstatte  $x$  med  $a$ , selv om vi per definisjon har at  $x \neq a$ . For eksempel er

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \quad (5.1)$$

Det er verd å filosofere litt over likhetene i (5.1). Når  $x$  går mot 2, vil  $x$  aldri bli eksakt lik 2. Dette betyr at  $x + 1$  aldri kan bli *eksakt lik* 3. Men *jo nærmere*  $x$  er lik 2, *jo nærmere* er  $x + 1$  lik 3. Med andre ord går  $x + 1$  mot 3 når  $x$  går mot 2. Likheten i (5.1) viser altså ikke til et uttrykk som er *eksakt lik* en verdi, men et uttrykk som *går eksakt mot* en verdi. Dette gjør altså at grenseverdier bringer en noe utvidet forståelse av  $=$ .

### Eksempel 1

Gitt  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ . Finn  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

#### Svar

Når  $x \neq 1$ , har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} \\ &= x + 3 \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

## 5.2 Kontinuitet

### 5.2 Kontinuitet

Gitt en funksjon  $f(x)$  og et tall  $c$ . Hvis  $f(c)$  eksisterer, er  $f$  **kontinuerlig** for  $x = c$  hvis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (5.2)$$

Hvis (5.2) er ugyldig, er  $f$  **diskontinuerlig** for  $x = c$ .

### Eksempel 1

Undersøk om funksjonene er kontinuerlige for  $x = 2$ .

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < 2 \\ -3x + 12 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \quad (5.3)$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad x \leq 2 \\ -x + 6 & , \quad x > 2 \end{cases} \quad (5.4)$$

### Svar

a) Vi har at

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -3 \cdot 2 + 12 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 + 4 = 6$$

Altså er  $f$  kontinuerlig for  $x = 2$ .

b) Vi har at

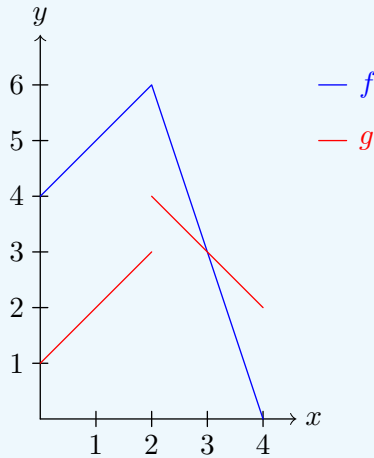
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = g(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2 + 6 = 4$$

Altså er  $g$  ikke kontinuerlig for  $x = 2$ .

## Visualisering av kontinuitet

Visuelt kan vi skille mellom kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner slik; kontinuerlige funksjoner har sammenhengende grafer, diskontinuerlige funksjoner har det ikke. Et utsnitt av grafene til funksjonene fra *Eksempel 1* på side 92 ser slik ut:



Grafer fungerer utmerket til å avgjøre hvilke funksjoner vi *forventer* å være kontinuerlige eller ikke, men er aldri gyldige som et bevis for dette.

## Kapittel 6

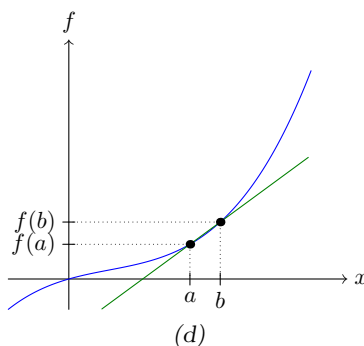
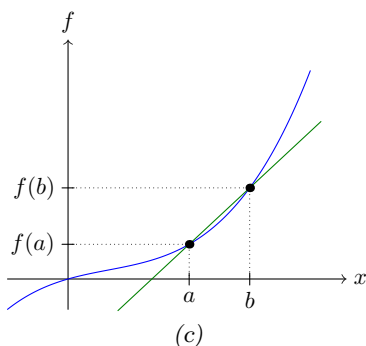
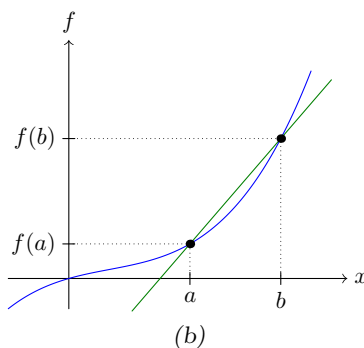
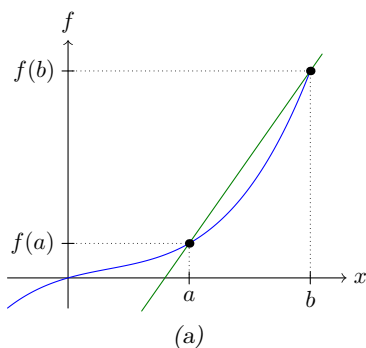
# Derivasjon

## 6.1 Definisjoner

Gitt en funksjon  $f(x)$  og to  $x$ -verdier  $a$  og  $b$ . Endringen til  $f$  relativ til endringen til  $x$  for disse verdiene er gitt som

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (6.1)$$

I MB har vi sett at uttrykket over gir stigningstallet til linja som går gjennom punktene  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$ . I en matematisk sammenheng er det ekstra interessant å undersøke (6.1) når  $b$  nærmer seg  $a$ .



Ved å innføre tallet  $h$ , og å sette  $b = a + h$ , kan vi skrive (6.1) som

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Å **derivere** innebærer å undersøke grenseverdien til denne brøken når  $h$  går mot 0.

### Merk

I teksten og figurene over har vi tatt utgangspunkt i at  $b > a$ , men dette er ikke en forutsetning for at uttrykkene er gyldige.

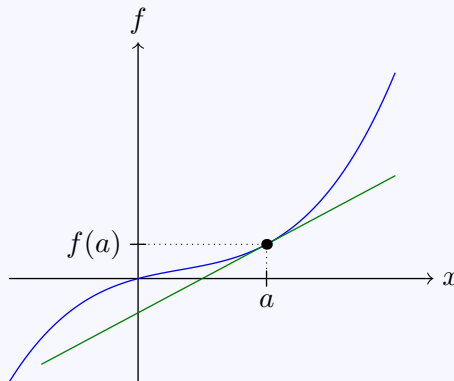


## 6.1 Den deriverte

Gitt en funksjon  $f(x)$ . Den **deriverte** av  $f$  i  $x = a$  er da gitt som

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (6.2)$$

Linja som har stigningstall  $f'(a)$ , og som går gjennom punktet  $(a, f(a))$ , kalles **tangeringslinja** til  $f$  for  $x = a$ .



### Eksempel 1

Gitt  $f(x) = x^2$ . Finn  $f'(2)$ .

#### Svar

Vi har at

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^2 + 4h + (h)^2 - 2^2}{h} \\ &= 4 \end{aligned}$$

## Eksempel 2

Gitt  $f(x) = x^3$ . Finn  $f'(a)$ .

### Svar

Vi har at

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Altså er  $f'(a) = 3a^2$ .

## Alternativ definisjon

En ekvivalent utgave av (6.2) er

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (6.3)$$

## Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon  $f(x)$  og en variabel  $k$ . Siden  $f'(a)$  angir stigningstallet til  $f(a)$  for  $x = a$ , vil en tilnærming til  $f(a+k)$  være

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k$$

Det er ofte nyttig å vite differansen  $\varepsilon$  mellom en tilnærming og den faktiske verdien:

$$\varepsilon = f(a+k) - [f(a) + f'(a)k] \quad (6.4)$$

Vi legger merket til at<sup>1</sup>  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_f}{k} = 0$ , og skriver om (6.4) til en formel for  $f(x+k)$ :

---

<sup>1</sup>Dette overlates til leseren å vise.

## 6.2 Linearisering av en funksjon

Gitt en funksjon  $f(x)$  og en variabel  $k$ . Da finnes en funksjon  $\varepsilon$  slik at

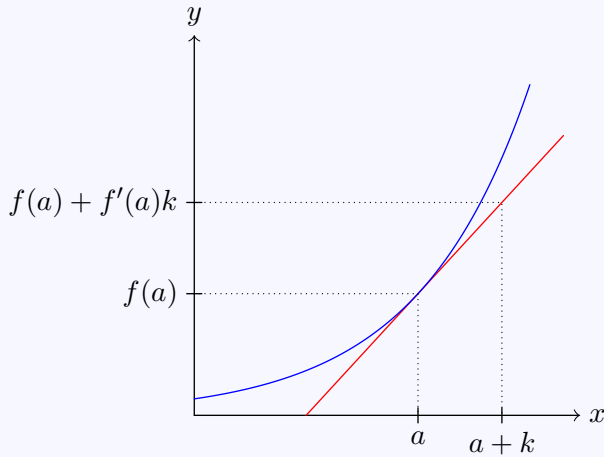
$$f(a+k) = f(a) + f'(a)k + \varepsilon \quad (6.5)$$

hvor  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{k} = 0$ .

Tilnærmingen

$$f(a+k) \approx f(a) + f'(a)k \quad (6.6)$$

kalles **lineærapproksimasjonen** av  $f(a+k)$ .



## 6.2 Derivasjonsregler

### Den deriverte funksjonen

*Eksempel 2* på side 97 belyser noe viktig; hvis grenseverdien i (6.2) eksisterer, vil  $f'(a)$  være uttrykt ved  $a$ . Og selv om  $a$  betraktes som en konstant langs veien som fører til dette uttrykket, er det ingenting som hindrer oss i å etterpå behandle  $a$  som en variabel. Hvis  $f'(a)$  er et resultat av derivasjon av funksjonen  $f(x)$  er det også hendig å omdøpe  $a$  til  $x$ :

### 6.3 Den deriverte funksjonen

Gitt en funksjon  $f(x)$ . Den **deriverte funksjonen** til  $f$  er funksjonen som fremkommer ved å erstatte  $a$  i (6.2) med  $x$ . Denne funksjonen skriver vi som  $f'(x)$ .

### Eksempel

Gitt  $f(x) = x^3$ . Siden<sup>1</sup>  $f'(a) = 3a^2$ , er  $f'(x) = 3x^2$ .

---

<sup>1</sup>Se *Eksempel 2*, side 97.

### Språkboksen

Alternative skrivemåter for  $f'$  er  $(f)'$  og  $\frac{d}{dx}f$ .

## Derivert med hensyn på

Derivasjon som vi har sett på så langt har vært en brøk med en differanse av  $x$ -verdier i nevner og den tilknyttede differansen av  $f$ -verdier i teller. Da sier vi at  $f$  er derivert med **hensyn på  $x$** . I denne bokserien skal vi i all hovedsak se på funksjoner som bare er avhengige av én variabel. Gitt en funksjon  $f(x)$ , er det da underforstått at  $f'$  symboliserer  $f$  derivert med hensyn på  $x$ .

Samtidig er det greit å være klar over at en funksjon gjerne kan være avhengig av flere variabler. For eksempel er funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

en **flervariabel funksjon**, avhengig av både  $x$  og  $y$ . I dette tilfellet kan vi bruke skrive  $\frac{d}{dx}f$  for å indikere derivasjon med hensyn på  $x$ , og  $\frac{d}{dy}f$  for å indikere derivasjon med hensyn på  $y$ . Leseren må gjerne forklare for seg selv hvorfor følgende stemmer:

$$\frac{d}{dx}f = 2x \quad , \quad \frac{d}{dy}f = 3y^2,$$

### 6.2.1 Den deriverte av elementære funksjoner

#### 6.4 Den deriverte av elementære funksjoner

For en variabel  $x$  og en konstant  $r$  er

$$(e^x)' = e^x \quad (6.7)$$

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad (6.8)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (6.9)$$

#### 6.5 Den deriverte av sammensatte funksjoner

Gitt en konstant  $a$  og funksjonene  $f(x)$  og  $g(x)$ . Da er

$$(a \cdot f)' = a \cdot f' \quad (6.10)$$

$$(f + g)' = f' + g' \quad (6.11)$$

$$(f - g)' = f' - g' \quad (6.12)$$

#### 6.6 Den andrederiverte

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$ . Da er den **andrederiverte** funksjonen til  $f$  gitt som

$$(f')' = f'' \quad (6.13)$$

#### 6.7 Den deriverte av en vektorfunksjon

Gitt funksjonene  $f(t)$ ,  $g(t)$  og  $v(t) = [f(t), g(t)]$ . Da er

$$v'(t) = [f'(t), g'(t)] \quad (6.14)$$

## 6.2.2 Kjerne-, produkt- og divisjonsregelen ved derivasjon

### 6.8 Kjerneregelen

For en funksjon  $f(x) = g[u(x)]$  har vi at

$$f'(x) = g'(u)u'(x) \quad (6.15)$$

#### Eksempel

Finn  $f'(x)$  når  $f(x) = e^{x^2+x+1}$ .

#### Svar

Vi setter  $u = x^2 + x + 1$ , og får at

$$g(u) = e^u \quad g'(u) = e^u \quad u'(x) = 2x + 1$$

Altså er

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u(2x + 1) \\ &= e^{x^2+x+1}(2x + 1) \end{aligned}$$

### 6.9 Produktregelen

Gitt funksjonene  $f(x)$ ,  $u(x)$  og  $v(x)$ , hvor  $f = uv$  da er

$$f' = u'v + uv'$$

#### Eksempel 1

Finn den deriverte av funksjonen  $f(x) = x^2e^x$ .

#### Svar

Vi setter  $u(x) = x^2$  og  $v(x) = e^x$ , da er

$$f = uv \quad u' = 2x \quad v' = e^x$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= xe^x(2 + x) \end{aligned}$$

## 6.10 Divisjonsregelen

Gitt funksjonene  $f(x)$ ,  $u(x)$  og  $v(x)$ , hvor  $f = \frac{u}{v}$ . Da er

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (6.16)$$

### Eksempel

Finn den derivate av funksjonen  $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$ .

### Svar

Vi setter  $u(x) = \ln x$  og  $v(x) = x^4$ , da er

$$f = \frac{u}{v} \qquad u' = x^{-1} \qquad v' = 4x^3$$

Altså er

$$\begin{aligned} f' &= \frac{x^{-1} \cdot x^4 - \ln x \cdot 4x^3}{x^8} \\ &= \frac{1 - 4 \ln x}{x^5} \end{aligned}$$

*Merk:* Vi kan også finne  $f'$  ved å sette  $u(x) = \ln x$  og  $v(x) = x^{-4}$ , for så å bruke produktregelen.



### 6.11 L'Hopitals regel

Gitt to deriverbare funksjoner  $f(x)$  og  $g(x)$ , hvor

$$f(a) = g(a) = 0$$

Da er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'}$$

#### Eksempel

Finn grenseverdien til  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

#### Svar

Vi setter  $f(x) = e^x - 1$  og  $g(x) = x$ , og merker oss at  $f(0) = g(0) = 0$ . Dermed har vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'}{g'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

## Forklaringer

### 6.8 Kjernerregelen (forklaring)

La oss se på tre funksjoner  $f$ ,  $g$  og  $u$ , hvor<sup>1</sup>

$$f(x) = g[u(x)]$$

$f$  beskrives direkte av  $x$ , mens  $g$  beskrives indirekte av  $x$ , via  $u(x)$ .

La oss bruke  $f(x) = e^{x^2}$  som eksempel. Kjenner vi verdien til  $x$ , kan vi fort regne ut hva verdien til  $f(x)$  er. For eksempel er

$$f(3) = e^{3^2} = e^9$$

Men vi kan også skrive  $g[u(x)] = e^{u(x)}$ , hvor  $u(x) = x^2$ . Denne skrivemåten impliserer at når vi kjenner verdien til  $x$ , regner vi først ut verdien til  $u$ , før vi så finner verdien til  $g$ :

$$u(3) = 3^2 = 9 \quad , \quad g[u(3)] = e^{u(3)} = e^9$$

Av (6.2) har vi at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g[u(x+h)] - g[u(x)]}{h} \end{aligned}$$

Vi setter  $k = u(x+h) - u(x)$ . Da er

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g[u(x+h)] - g[u(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h}$$

Av (6.5) har vi at

$$g(u) - g(u+k) = g'(u)k + \varepsilon_g$$

Altså er

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(u)k + \varepsilon_g}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( g'(u) + \frac{\varepsilon_g}{k} \right) \frac{k}{h} \end{aligned}$$

Da  $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ , er  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon g}{k} = 0$ . Videre har vi at  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = u'(x)$ .  
 Altså har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( g'(u) + \frac{\varepsilon g}{k} \right) \frac{k}{h} = g'(u)u'(x)$$

---

<sup>1</sup>Klammeparantesene  $[\ ]$  har i denne sammenhengen lik betydning som vanlige paranteser, de brukes bare for å få ryddigere uttrykk.

## 6.9 Produktregelen (forklaring)

Gitt funksjonene  $f(x)$ ,  $u(x)$  og  $v(x)$ , hvor

$$f = uv$$

Av (6.1) er da

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - uv}{h}$$

La oss skrive  $u(x+h)$  og  $v(x+h)$  som henholdsvis  $\tilde{u}$  og  $\tilde{v}$ :

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h}$$

Vi kan alltid legge til 0 i form av  $\frac{u\tilde{v}}{h} - \frac{u\tilde{v}}{h}$ :

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\tilde{u}\tilde{v} - uv}{h} + \frac{u\tilde{v}}{h} - \frac{u\tilde{v}}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{(\tilde{u} - u)\tilde{v}}{h} + \frac{u(\tilde{v} - v)}{h} \right] \end{aligned}$$

Siden vi for enhver kontinuerlig funksjon  $g$  har at  $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{g} = g$  og

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g', \text{ er}$$

$$f' = u'v + uv'$$

## 6.4 Den deriverte av elementære funksjoner (forklaring)

### Likning (6.8)

Vi starter med å merke oss at

$$\begin{aligned}(\ln x^r)' &= (r \ln x)' \\ &= \frac{r}{x}\end{aligned}$$

Vi setter  $u = x^r$ . Av kjerneregelen har vi da at

$$\begin{aligned}\frac{r}{x} &= (\ln u)' \\ &= \frac{1}{u} u' \\ &= \frac{1}{x^r} (x^r)'\end{aligned}$$

Altså er

$$(x^r)' = \frac{r}{x} x^r = r x^{r-1}$$

### Likning (6.9)

Vi har at  $x = e^{\ln x}$ . Vi setter  $u = \ln x$  og  $g(u) = e^u$ . Da har vi at  $x = g(u)$ , og at

$$\begin{aligned}g'(u) &= e^u = e^{\ln x} = x \\ u'(x) &= (\ln x)'\end{aligned}$$

Av kjerneregelen har vi at

$$\begin{aligned}(x)' &= g'(u) u'(x) \\ &= x (\ln x)'\end{aligned}$$

Da<sup>1</sup>  $(x)' = 1$ , har vi at

$$1 = x (\ln x)'$$

Altså er

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

---

<sup>1</sup>Se oppgave ??.

### 6.10 Divisjonsregelen (forklaring)

Vi har at

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = (uv^{-1})'$$

Av [produktregelen](#) og [kjerneregelen](#) er da

$$\begin{aligned} f' &= u'v^{-1} - uv^{-2}v' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

### 6.11 L'Hopitals regel (forklaring)

Siden  $f(a) = g(a) = 0$ , er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Av (6.3) har vi da at

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Oppgaver for kapittel 6

### 6.1.1

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at for funksjonen  $f(x) = \frac{1}{x}$ , er  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

### 6.1.2

Deriver uttrykkene

- a)  $5x^3$       b)  $-8x^6$       c)  $\frac{3}{7}x^7$       d)  $-x^{\frac{2}{3}}$       e)  $x^{\frac{9}{7}}$

### 6.1.3

Deriver uttrykkene

- a)  $2e^x$       b)  $-30e^x$       c)  $8 \ln x$       d)  $-4 \ln x$

### 6.1.4

Forklar hvordan du kan omskrive uttrykk på formen  $\frac{1}{x^k}$  slik at du kan anvende (6.8) til å derivere uttrykkene.

### 6.1.5

Deriver uttrykkene (Hint: Se [oppgave 6.1.4](#))

- a)  $\frac{5}{x^2}$       b)  $\frac{7}{x^{10}}$       c)  $-\frac{2}{9x^7}$       d)  $\frac{3}{11x^{\frac{8}{5}}}$

### 6.1.6

Deriver funksjonene

- a)  $g(x) = 3x^3 - 4x + \frac{1}{x}$       b)  $f(x) = x^2 + \ln x$       c)  $h(x) = \ln x + x^2 + 2$   
d)  $a(x) = x^2 + e^x$

### 6.1.7

Deriver uttrykkene med hensyn på  $x$ .

- a)  $ax^2 + bx + c$       b)  $7x^5 - 3ax + b$       c)  $-9qx^7 + 3px^3 + b^3$

### 6.2.1

Deriver funksjonene

- a)  $f(x) = x\sqrt{1-2x}$       b)  $p(x) = 3xe^{2x}$       c)  $h(x) = 3x^2 \ln x$   
d)  $k(x) = \sqrt{4x^2 - 5}$       e)  $f(x) = x^3\sqrt{2x-1}$       f)  $q(x) = \frac{x^3}{x^2-2}$   
g)  $f(x) = (x^2 + 2)^7$       h)  $h(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$

### Gruble 15

(R1V22D1)

En funksjon  $f$  er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 2 \\ x - t & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Bestem tallet  $t$  slik at  $f$  blir en kontinuerlig funksjon. Husk å grunngi svaret.
- b) Avgjør om  $f$  er deriverbar i  $x = 2$  for den verdien av  $t$  du fant i oppgave a).

### Gruble 16

Bevis at (6.16) er gyldig.

### Gruble 17

Bevis at  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

## Kapittel 7

# Funksjonsdrøfting



## 7.1 Monotoniegenskaper

De fleste funksjonsverdier varierer. Beskrivelser av hvordan funksjonene varierer kaller vi beskrivelser av funksjonenes **monotoniegenskaper**.

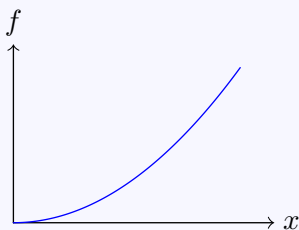
### 7.1 Voksende og avtagende funksjoner

Gitt en funksjon  $f(x)$ .

- $f$  er **voksende** på intervallet  $[a, b]$  hvis vi for alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (7.1)$$

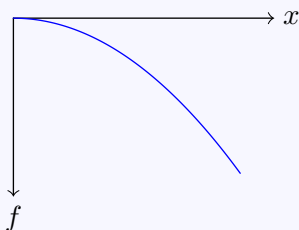
Hvis  $f(x_1) \leq f(x_2)$  kan erstattes med  $f(x_1) < f(x_2)$ , er  $f$  **strengt voksende** på intervallet.



- $f$  er **avtagende** på intervallet  $[a, b]$  hvis vi for alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (7.2)$$

Hvis  $f(x_1) \geq f(x_2)$  kan erstattes med  $f(x_1) > f(x_2)$ , er  $f$  **strengt avtagende** på intervallet.



## 7.2 Monotoniegenskaper og den deriverte

Gitt  $f(x)$  deriverbar på intervallet  $[a, b]$ .

- Hvis  $f' \geq 0$  for  $x \in (a, b)$ , er  $f$  voksende for  $x \in [a, b]$
- Hvis  $f' \leq 0$  for  $x \in (a, b)$ , er  $f$  avtagende for  $x \in [a, b]$

Hvis henholdsvis  $\geq$  og  $\leq$  kan erstattes med  $>$  og  $<$ , er  $f$  strengt voksende/avtagende.

### Eksempel

Avgjør på hvilke intervaller  $f$  er voksende/avtagende når

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \quad , \quad x \in [0, 8]$$

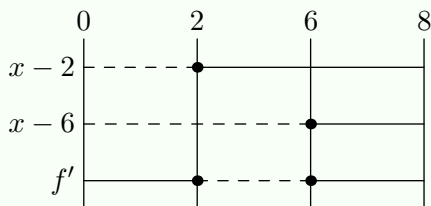
### Svar

Vi har at

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

For å tydeliggjøre når  $f'$  er positiv, negativ eller lik 0 gjør vi to ting; vi faktoriserer uttrykket til  $f'$ , og tegner et fortegnsskjema:

$$f'(x) = (x - 2)(x - 6)$$



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket  $x - 2$  er negativt når  $x \in [0, 2)$ , lik 0 når  $x = 2$ , og positivt når  $x \in (2, 8]$ .
- Uttrykket  $x - 6$  er negativt når  $x \in [0, 6)$ , lik 0 når  $x = 6$ , og positivt når  $x \in (6, 8]$ .
- Siden  $f' = (x - 2)(x - 6)$ , er

$$f' \geq 0 \text{ når } x \in (0, 2) \cup (6, 8)$$

$$f' = 0 \text{ når } x \in \{2, 6\}$$

$$f' \leq 0 \text{ når } x \in (2, 6)$$

Dette betyr at

$f$  er voksende når  $x \in [0, 2] \cup [6, 8]$

$f$  er avtagende når  $x \in [2, 6]$

## 7.2 Ekstremalpunkt, vendepunkt og infleksjonspunkt

### 7.3 Maksimum og minimum

*Merk:* Et tall  $c$  kan omtales som et punkt i funksjonsdrøftinger, forstått at det er snakk om punktet  $(c, 0)$ .

Gitt en funksjon  $f(x)$  og et tall  $c$ .

- $f$  har **absolutt maksimum**  $f(c)$  hvis  $f(c) \geq f(x)$  for alle  $x \in D_f$ .
- $f$  har **absolutt minimum**  $f(c)$  hvis  $f(c) \leq f(x)$  for alle  $x \in D_f$ .
- $f$  har et **lokalt maksimum**  $f(c)$  hvis det finnes et åpent intervall  $I$  om  $c$  slik at  $f(c) \geq f(x)$  for  $x \in I$ .
- $f$  har et **lokalt minimum**  $f(c)$  hvis det finnes et åpent intervall  $I$  om  $c$  slik at  $f(c) \leq f(x)$  for  $x \in I$ .

### Språkboksen

Et maksimum/minimum blir også kalt en **maksimumsverdi/minimumsverdi**.

### 7.4 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon  $f(x)$  med maksimum/minimum  $f(c)$ . Da er

- $f(c)$  en **ekstremalverdi** for  $f$ .
- $c$  et **ekstremalpunkt** for  $f$ . Nærmere bestemt et maksimumspunkt/minimumspunkt for  $f$ .
- $(c, f(c))$  et **toppunkt/bunnpunkt** for  $f$ .

## 7.5 Kritiske punkt

Et tall  $c$  er et **kritisk punkt** for en funksjon  $f(x)$  hvis én av følgende gjelder:

- $f$  er ikke deriverbar i  $c$
- $f'(c) = 0$

## 7.6 $f' = 0$ for lokale ekstremalpunkt

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$  og  $c \in [a, b]$ .

- (i) Hvis  $c$  er et lokalt ekstremalpunkt for  $f$ , er  $f'(c) = 0$
- (ii) Hvis  $f' > 0$  for  $x \in (a, c)$  og  $f' < 0$  for  $x \in (c, b)$ , er  $c$  et lokalt maksimumspunkt for  $f$
- (iii) Hvis  $f' < 0$  for  $x \in (a, c)$  og  $f' > 0$  for  $x \in (c, b)$ , er  $c$  et lokalt minimumspunkt for  $f$

## Språkboksen

Det som blir beskrevet i punkt (ii) og (iii) omtales ofte som at " $f$  skifter fortegn i  $c$ ".

### Eksempel 1

Finn det lokale bunnpunktet og toppunktet til

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x$$

#### Svar

Vi starter med å finne  $f'$ :

$$\begin{aligned} f' &= 6x^2 + 18x - 60 \\ &= 6(x^2 + 3x - 10) \end{aligned}$$

Siden  $5(-2) = 10$  og  $5 - 2 = 3$ , har vi av [regel 2.2](#) at

$$f' = 6(x - 2)(x + 5)$$

$f' = 0$  for  $x = 2$  og  $x = -5$ . Vi har at

$$f(-5) = 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 = -68$$

$$f(2) = 5^3 + 9 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 = 275$$

Altså er  $(-5, 275)$  toppunktet til  $f$  og  $(2, -68)$  er bunnpunktet til  $f$ .

## 7.7 Andrederiverttesten

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$  og et tall  $c$ .

- Hvis  $f'(c) = 0$  og  $f''(c) < 0$ , er  $f(c)$  et lokalt maksimum.
- Hvis  $f'(c) = 0$  og  $f''(c) > 0$ , er  $f(c)$  et lokalt minimum.
- Hvis  $f'(c) = f''(c) = 0$ , kan man ikke ut ifra denne informasjonen alene si om  $f(c)$  er et lokalt maksimum eller minimum.

## 7.7 Andrederiverttesten (forklaring)

Av definisjonen for den deriverte har vi at

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

Når  $f'(c) = 0$ , er

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

Når  $f''(c) < 0$ , betyr dette at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

Altså må  $f'(c+h)$  være positiv når  $h$  går mot 0 fra venstre og negativ når  $h$  går mot 0 fra høyre. Dermed skifter  $f'$  fortegn i  $c$ , som da må være et maksimalpunkt for  $f$ . Tilsvarende må  $c$  være et minimumspunkt for  $f$  hvis  $f'(c) = 0$  og  $f''(c) < 0$ .

## 7.8 Infleksjonspunkt og vendepunkt

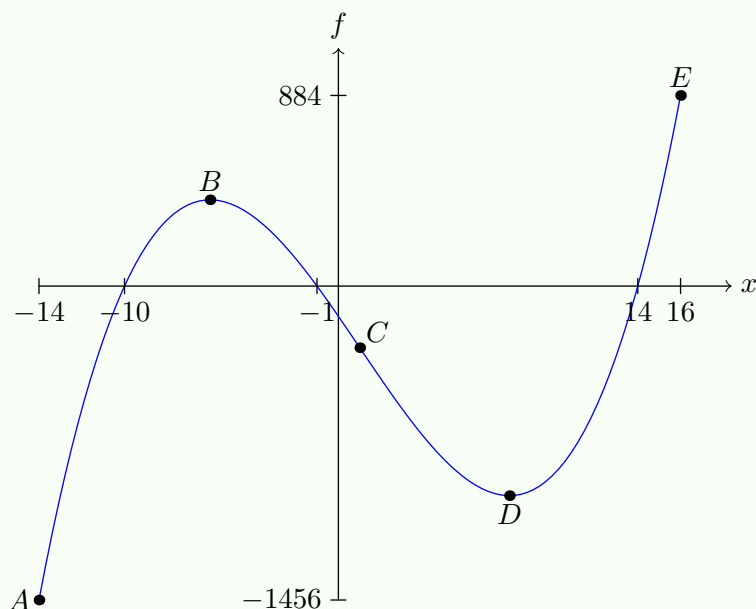
For en kontinuerlig funksjon  $f(x)$  har vi at

- Hvis  $f''(c) = 0$  og  $f''$  skifter fortegn i  $c$ , er  $c$  et **infleksjonspunkt** for  $f$ .
- Hvis  $c$  er et infleksjonspunkt for  $f$ , er  $(c, f(c))$  et **vendepunkt**.
- $f$  er konveks på intervall hvor  $f'' > 0$ , og konkav på intervall hvor  $f'' < 0$ . (Se [regel 7.11](#) angående konvekse og konkave funksjoner.)



## Eksempel

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140 \quad , \quad x \in [-14, 16]$$



punkt/verdi	type
$A = (-14, -1456)$	absolutt bunnpunkt
-14	ekstremalpunkt; absolutt minimum
-1456	absolutt minimum
$B = (-6, 400)$	lokalt toppunkt
-6	ekstremalpunkt; lokalt maksimalpunkt
400	lokalt maksimum
$C = (-1, -286)$	vendepunkt
-1	infleksjonspunkt
$D = (8, -972)$	lokalt bunnpunkt
8	ekstremalpunkt; lokalt minimumspunkt
-972	lokal minimum
$E = (16, 884)$	absolutt maksimum
16	ekstremalpunkt; absolutt maksimumspunkt
884	absolutt maksimum
-10, -1 og 14	nullpunkt

## 7.3 Asymptoter

### 7.9 Vertikale asymptoter

Gitt en funksjon  $f(x)$  og en konstant  $c$ .

- Hvis  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ , er  $c$  en **vertikal asymptote ovenfra** for  $f$ .
- Hvis  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ , er  $c$  en **vertikal asymptote nedenfra** for  $f$ .
- Hvis  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ , er  $c$  en **vertikal asymptote** for  $f$ .

### Eksempel

Finn den vertikale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

### Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{1}{x-3} + 2 \right] = \pm\infty$$

Altså er  $x = 3$  en vertikal asymptote for  $f$ .

## 7.10 Horisontale asymptoter

Gitt en funksjon  $f(x)$ . Da er  $y = c$  en **horisontal asymptote** for  $f$  hvis

$$\lim_{x \rightarrow |\infty|} f(x) = c$$

### Eksempel

Finn den horisontale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

### Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \rightarrow |\infty|} \left[ \frac{1}{x-3} + 2 \right] = 2$$

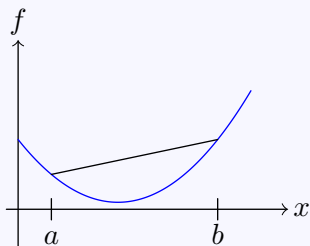
Altså er  $y = 2$  en horisontal asymptote for  $f$ .

## 7.4 Konvekse og konkave funksjoner

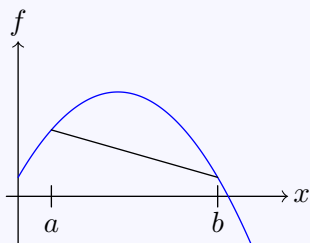
### 7.11 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon  $f(x)$ .

Hvis hele linja mellom  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$  ligger over grafen til  $f$  på intervallet  $[a, b]$ , er  $f$  **konveks** for  $x \in [a, b]$ .



Hvis hele linja mellom  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$  ligger under grafen til  $f$  på intervallet  $[a, b]$ , er  $f$  **konkav** for  $x \in [a, b]$ .



## 7.5 Injektive og omvendte funksjoner

### Injektive funksjoner

#### 7.12 Injektive funksjoner

Gitt en funksjon  $f(x)$ . Hvis alle verdier til  $f$  er unike på intervallet  $x \in [a, b]$ , er  $f$  **injektiv** på dette intervallet.

#### Språkboksen

Et annet ord for injektiv er **én-entydig**.

### Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen  $f(x) = 2x + 1$ , som åpenbart er injektiv for alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dette betyr at likningen  $f = 2x + 1$  bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på  $x$  eller  $f$ . Løser vi med hensyn på  $x$ , får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for  $f$  til, det "omvendte", et uttrykk for  $x$ . Siden  $x$  og  $f$  begge er variabler, er  $x$  en funksjon av  $f$ , og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den *omvendte* til  $f$ . Setter vi uttrykket til  $f$  inn i uttrykket til  $x(f)$ , får vi nødvendigvis  $x$ :

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle  $x$  som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både  $f$  og  $x$ , slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette  $y = f$  og  $g = x$ . Den omvendte funksjonen  $g$  til  $f$  er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

### 7.13 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner  $f(x)$  og  $g(y)$ . Hvis

$$g(f) = x$$

er  $f$  og  $g$  **omvendte** funksjoner.

#### Eksempel 1

Gitt funksjonen  $f(x) = 5x - 3$ .

- a) Finn den omvendte funksjonen  $g$  til  $f$ .
- b) Vis at  $g(f) = x$ .

#### Svar

- a) Vi setter  $y = f$ , og løser likningen med hensyn på  $x$ :

$$y = 5x - 3$$

$$x = \frac{y + 3}{5}$$

Da er  $g(y) = \frac{y+3}{5}$ .

- b) Når  $y = f$ , har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x - 3) \\ &= \frac{5x - 3 + 3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

### $f^{-1}$

Hvis  $f$  og  $g$  er omvendte funksjoner, skrives  $g$  ofte som  $f^{-1}$ . Da er det viktig å merke seg at  $f^{-1}$  ikke er det samme som  $(f)^{-1}$ . For eksempel, gitt  $f(x) = x + 1$ . Da er

$$f^{-1} = x - 1 \quad , \quad (f)^{-1} = \frac{1}{x + 1}$$

I alle andre tilfeller enn ved  $n = -1$ , vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$

## Forklaringer

### 7.2 Monotoniegenskaper og den deriverte (forklaring)

Gitt  $f(x)$ , hvor  $f' \geq 0$  for  $x \in [a, b]$ . La  $x_1, x_2 \in (a, b)$  og  $x_2 > x_1$ . Av [middelverdisetningen](#) finnes det et tall  $c \in (x_1, x_2)$  slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da  $c \in [a, b]$ , er  $f'(x) \geq 0$ , og da er

$$0 \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Følgelig er  $f(x_2) \geq f(x_1)$ , og av [definisjon 7.1](#) er da  $f$  voksende på intervallet  $(a, b)$ .

### 7.6 $f' = 0$ for lokale ekstremalpunkt (forklaring)

#### Punkt (i)

La  $c$  være et lokalt maksimumspunkt for  $f$ . For et tall  $h$  må vi da ha at  $c \geq x$  for  $x \in (c - |h|, c + |h|)$ . Da er

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Dette betyr at

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

og at

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Følgelig er

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Altså er  $f'(c) = 0$ , og  $f'$  skifter fortegn fra positiv til negativ i  $c$ . Med samme framgangsmåte kan det vises at dette også gjelder



dersom  $c$  er et minimumspunkt, bare at da skifter  $f'$  fra negativ til positiv.

**Punkt (ii)**

Hvis  $f' > 0$  på intervallet  $(a, c)$ , har vi av [regel 7.2](#) at  $f$  er sterkt voksende der. Hvis  $f' < 0$  på  $(c, b)$ , er  $f$  sterkt avtagende der. Dette må nødvendigvis bety at  $f(c) \geq f(x)$  for  $x \in (a, b)$ , og da er  $c$  et maksimumspunkt.

**Punkt (iii)**

Tilsvarende resonnement som for punkt (ii).

# Vedlegg A-F

## Vedlegg A: Navn på funksjoner

### 7.14 Potensfunksjoner

Gitt  $x, k, b \in \mathbb{R}$ . En funksjon på formen

$$f(x) = kx^m \quad (7.3)$$

er da en **potensfunksjon** med **koeffisient**  $k$  og **eksponent**  $m$ .

### 7.15 Polynomfunksjoner

En **polynomfunksjon** er én av følgende:

- en potensfunksjon med heltalls eksponent større eller lik 0.
- summen av flere potensfunksjoner med heltalls eksponent større eller lik 0.

Polynomfunksjoner kategoriseres etter den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene  $a, b, c$  og  $d$ , og en variabel  $x$ , har vi at

funksjonsuttrykk	funksjonsnavn
$ax + b$	1. grads funksjon/polynom (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. grads funksjon/polynom (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. grads funksjon/polynom (kubisk)

### Eksempel 1

$4x^7 - 5x^2 + 4$  er et 7. grads polynom.

$\frac{2}{7}x^5 - 3$  er et 5. grads polynom.

### 7.16 Eksponentialfunksjoner

Gitt  $x, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , hvor  $b > 0$ . En funksjon  $f$  gitt som

$$f(x) = a \cdot b^{cx+d}$$

er da en **eksponentialfunksjon**.

## Vedlegg B: Å løse likninger ved bytte av variabel

La oss løse likningen

$$x - 11\sqrt{x} + 28 = 0 \quad (7.4)$$

Hvis vi ser nøye etter, innser vi at dette er en andregradslikning for  $\sqrt{x}$ . Enda tydeligere blir dette hvis vi definerer variabelen  $u = \sqrt{x}$ , da kan vi skrive (7.4) som

$$u^2 - 11u + 28 = 0$$

Siden  $(-7) \cdot (-4) = 28$  og  $-7 - 4 = -11$ , har vi av (2.1) at

$$(u - 4)(u - 7) = 0$$

Altså er

$$u = 4 \quad \vee \quad u = 7$$

Dette betyr at

$$\sqrt{x} = 4 \quad \vee \quad \sqrt{x} = 7$$

Dermed er

$$x = 16 \quad \vee \quad x = 49$$

## Vedlegg C: Eksakteverdier for utvalgte vinkler

	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

## Vedlegg D: Eulers tall

### Den deriverte som motivasjon

Gitt funksjonen  $f(x) = a^x$ . Da har vi at

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}\end{aligned}$$

Da  $x$  er uavhengig av  $h$ , får vi at

$$(a^x)' = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Likningen over peker mot noe fantastisk; hvis det finnes et tall  $a$  som er slik at  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ , så vil funksjonen  $a^x$  være sin egen deriverte funksjon! Altså er da  $(a^x)' = a^x$ . Vi legger nå merke til at hvis

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

så er

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left((1 + h)^{\frac{1}{h}}\right)^h - 1}{h} \\ &= \frac{1 + h - 1}{h} \\ &= 1\end{aligned}$$

Hvis vi kan vise at grenseverdien  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$  eksisterer, har vi altså funnet akkurat det uttrykket for  $a$  som vi ønsket oss.

### Undersøking av grenseverdien

Vi innfører følgende to funksjoner (motivasjonen for å innføre  $g$  vil komme fram senere):

$$f(h) = 1 + h \quad , \quad g(h) = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$$

Videre ønsker vi å undersøke for hvilke verdier  $f$  er mindre enn  $g$ . Når  $f = g$ , har vi at

$$1 + h = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h \tag{7.5}$$

Vi gjør nå følgende observasjon: Gitt to tall  $c$  og  $k$ , og funksjonen  $p(h) = a^h$ , hvor  $k > 0$  og  $0 < a < 1$ . Da har vi at

$$p(c+k) - p(c) = a^{c+k} - a^c = a^c (a^k - 1)$$

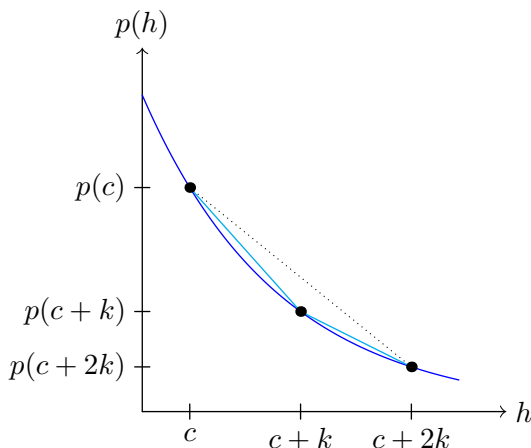
Tilsvarende er

$$p(c+2k) - p(c+k) = a^{c+k} (a^k - 1)$$

Videre er  $a^{c+k} < a^c$  og  $a^k - 1 < 1$ , som betyr at

$$\frac{p(c+k) - p(c)}{h} < \frac{p(c+2k) - p(c+k)}{h}$$

Dermed må linja mellom  $(c, p(c))$  og  $(c+k, p(c+k))$  være brattere enn linja mellom  $(c+k, p(c+k))$  og  $(c+2k, p(c+2k))$ , og da må  $(c+k, p(c+k))$  ligge under linja mellom  $(c, p(c))$  og  $(c+2k, p(c+2k))$ .



Det er åpenbart at  $p(h)$  ikke er en lineær funksjon, og da må én av disse tre påstandene være gyldig:

- (a)  $p$  er konveks for alle  $h$
- (b)  $p$  er konkav for alle  $h$
- (c)  $p$  er skiftvis konkav/konveks

Men hvis  $p$  er konkav, må det finnes et intervall hvor  $(c+k, p(c+k))$  ligger over linja mellom  $(c, p(c))$  og  $(c+2k, p(c+2k))$ , og dette er selvmotsigende. Altså må  $p$  nødvendigvis være konveks for alle  $h$ .

Av det vi akkurat har funnet, kan vi konkludere med at funksjonen  $2 - \left(\frac{1}{4}\right)^h$  er konkav for alle  $h$ , og da  $1 + h$  er et lineært uttrykk, har (7.5) maksimalt to løsninger.

Vi setter  $z = \frac{1}{h}$  for  $h \neq 0$ . Da er

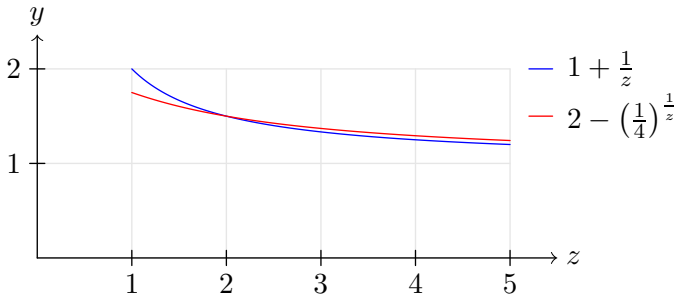
$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^h = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z}}$$

Videre kan (7.5) omskrives til

$$1 + \frac{1}{z} = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} \quad (7.6)$$

Det er enkelt å vise at  $h = 0$  og  $h = \frac{1}{2}$  er løsningene til (7.5). Dette må bety at  $z = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$  er den eneste løsningen til (7.6). Det er også enkelt å bekrefte at venstresiden i (7.6) er større enn høgresiden for  $z = 1$ , og dette innebærer at

$$1 + \frac{1}{z} < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}$$



For  $z \rightarrow \infty$  kan vi derfor være sikre på at

$$1 + \frac{1}{z} < 1 + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}} + \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)^3 + \dots$$

Høgresiden i ulikheten over kjenner vi igjen<sup>1</sup> som en uendelig geometrisk rekke hvor summen er gitt som

$$\frac{1}{1 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{z}}} = 4^{\frac{1}{z}}$$

Altså er

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \left(4^{\frac{1}{z}}\right)^z = 4 \quad (7.7)$$

---

<sup>1</sup>Se om geometriske rekker i [TM2](#).



Det er åpenbart at  $1 \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ , og dermed vet vi at  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$  ligger et sted mellom 2 og 4. Da uttrykket inneholder utelukkende positive ledd for  $z \rightarrow \infty$ , kan vi også være sikre på at grenseverdien er endelig<sup>1</sup>. Da gir derfor mening å behandle grenseverdien som et tall, som vi kaller for  $e$ :

$$e = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$$

### Merk

Den mest klassiske metoden for å finne en øvre og en nedre grense for  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$  er ved å bruke [Binomialteoremet](#).

### Et tilbakeblikk på den deriverte

Derivasjon av potensfunksjoner var det som motiverte oss til å undersøke tallet  $e$ . Av det vi har drøftet i de foregående avsnittene, følger det at

$$(e^x)' = e^x$$

Likningen over er rett og slett én av de viktigste likningene i matematikk.

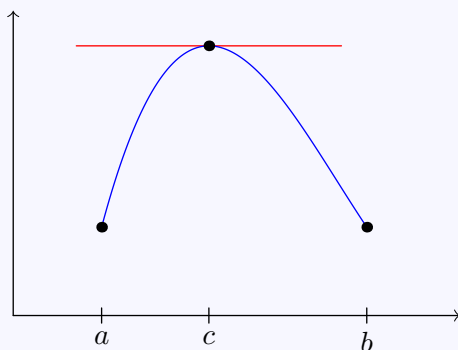
---

<sup>1</sup>I motsetning til å være ubestemt. For eksempel vil  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  være ubestemt, fordi  $\cos x$  svinger mellom  $-1$  og  $1$ .

## Vedlegg E: Rolles teorem og middelverditeoremet

### 7.17 Rolles teorem

Gitt en funksjon  $f(x)$ , deriverbar på intervallet  $(a, b)$ , og hvor  $f(a) = f(b)$ . Da fins et tall  $c \in [a, b]$  slik at  $f'(c) = 0$ .



### 7.17 Rolles teorem (forklaring)

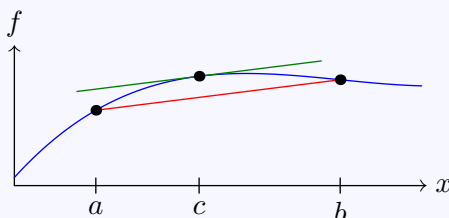
Hvis uttrykket til  $f$  er en konstant, er  $f'(x) = 0$  på hele intervallet, og påstanden om tallet  $c$  er åpenbart sann.

Hvis uttrykket til  $f$  ikke er en konstant, impliserer dette at  $f$  har et lokalt ekstremalpunkt på intervallet  $(a, b)$  (siden  $f(a) = f(b)$ ). La  $c$  være dette ekstremalpunktet, av [regel 7.6](#) er da  $f'(c) = 0$ .

### 7.18 Middelverdisetningen

Gitt en funksjon  $f(x)$  deriverbar på intervallet  $(a, b)$ . Da fins et tall  $c \in (a, b)$  slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (7.8)$$



### 7.18 Middelverdisetningen (forklaring)

La  $g(x)$  være den lineære funksjonen som beskriver linja som går gjennom punktene  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$ . Videre definerer vi

$$h(x) = f - g = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - x) + f(a)$$

Da har vi at  $h(a) = h(b) = 0$ . Av [Rolles teorem](#) vet vi da et det fins et tall  $c \in (a, b)$  hvor  $h'(c) = 0$ . Dette betyr at

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

## Vedlegg F: Tangeringslinja til en graf

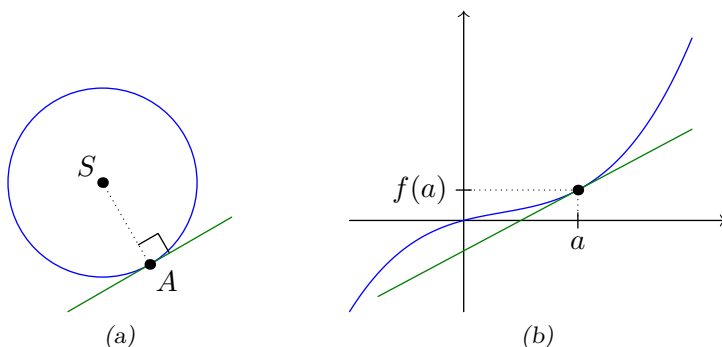
### Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se figur 7.1a.)

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$ . Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til  $f$  i punktet  $(a, f(a))$*  som linja som går gjennom  $(a, f(a))$  og har stigningstall  $f'(a)$  (Spivak, 1994). (Se Figur 7.1b.)



Figur 7.1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

### Senteret til krumningen

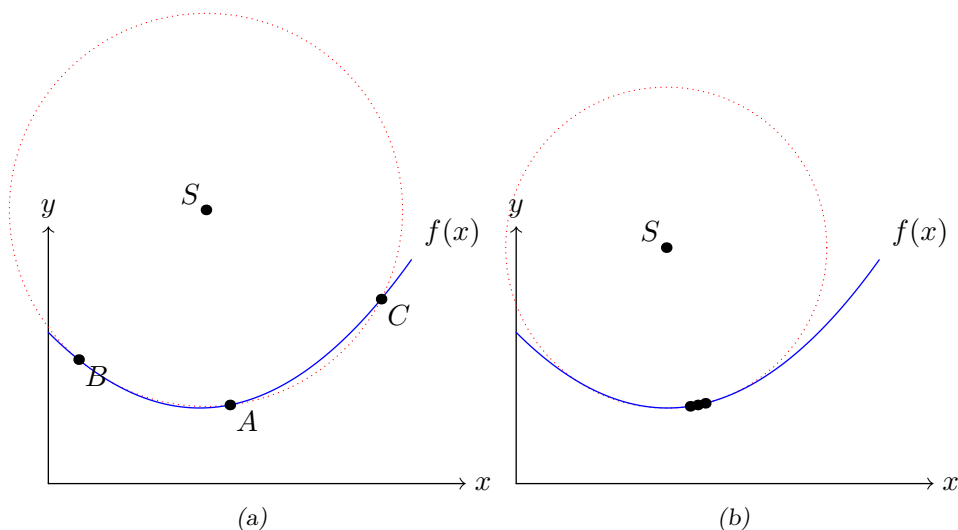
Gitt en funksjon  $f(x)$  som er kontinuerlig og to ganger deriverbar for alle  $x \in \mathbb{R}$ , og hvor  $f''(x) \neq 0$ . For en gitt  $a$  lar vi  $f_a = f(a)$ , og definerer funksjonene

$$f_b(h) = f(a - h) \quad , \quad f_c(h) = f(a + h)$$

Vi innfører også punktene

$$A = (a, f_a) \quad , \quad B = (a - h, f_b) \quad , \quad C = (a + h, f_c)$$

Videre lar vi  $S = (S_x, S_y)$  være sentrum i den omskrevne sirkelen til  $\triangle ABC$ . På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne **krumningen** i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til  $\triangle ABC$  når  $h$  går mot 0.



Figur 7.2

## Et likningssett for $S$

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [h, f_a - f_b] \quad , \quad \overrightarrow{AC} = [h, f_c - f_a]$$

La  $B_m$  og  $C_m$  være midtpunktene til henholdsvis (sekantene)  $AB$  og  $AC$ . Da er

$$B_m = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad , \quad C_m = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$[f_a - f_b, -h]$  er en normalvektor for  $\overrightarrow{BA}$ , dette betyr at midtnormalen  $l_1$  til sekanten  $AB$  kan parameterisere som

$$l_1(t) = B_m + [f_a - f_b, -h]t$$

Tilsvarende er midtnormalen  $\mathbf{l}_2$  til sekanten  $AC$  parameterisert ved

$$\mathbf{l}_2(q) = C_m + [f_c - f_a, -h]q$$

$S$  sammenfaller med skjæringspunktet til  $\mathbf{l}_1$  og  $\mathbf{l}_2$ . Ved å kreve at  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$ , får vi et lineært likningssett med to ukjente som gir

$$t = \frac{(f_a - f_c)(f_b - f_c) + 2h^2}{2h(f_b + f_c - 2f_a)}$$

## $S$ når $h$ går mot 0

Vi definerer funksjonene  $\dot{f}_b$ ,  $\dot{f}_c$ ,  $\ddot{f}_b$  og  $\ddot{f}_c$  ut ifra de (respektive) deriverte og andrederiverte av  $f_b$  og  $f_c$  med hensyn på  $h$ :

$$-\dot{f}_b = (f_b)' = -f'(a - h)$$

$$\dot{f}_c = (f_c)' = f'(a + h)$$

$$\ddot{f}_b = (f_b)'' = f''(a - h)$$

$$\ddot{f}_c = (f_c)'' = f''(a + h)$$

Vi skal nå bruke disse funksjonene til å studere koordinatene til  $S$  når  $h$  går mot 0. Vi tar da med oss at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{h^2, h\} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f_b, f_c\} = f_a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\dot{f}_c, \dot{f}_b\} = f'_a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\ddot{f}_b, \ddot{f}_c\} = f''_a$$

hvor<sup>1</sup>  $f'_a = f'(a)$  og  $f''_a = f''(a)$ .

For  $t$  uttrykt ved (F) er (se (F))

$$S_y = \frac{f_a + f_b + 2ht}{2} = \frac{f_a + f_b}{2} + ht$$

Vi har at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_a + f_b}{2} = f_a$$

Videre er

$$\begin{aligned} ht &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c) + 2h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} \\ &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{2(f_b + f_c - 2f_a)} + \frac{h^2}{f_b + f_c - 2f_a} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Legg merke til at det her er snakk om  $f$  derivert med hensyn på  $x$ , og evaluert i  $a$ .

Når  $h$  går mot 0, er begge leddene i (7.9) «0 over 0» uttrykk. Vi bruker L'Hopitals regel på det siste leddet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2)'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} \quad (7.9)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \quad \text{«0 over 0»} \quad (7.10)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \quad (7.11)$$

$$= \frac{1}{f_a''} \quad (7.12)$$

Ved å bruke L'Hopitals regel på det første leddet i (7.9) har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{f_b + f_c - 2f_a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((f_c - f_a)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'}$$

Av produktregelen ved derivasjon er

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((f_a - f_c)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \right]$$

Begge leddene over er «0 over 0» uttrykk. Vi undersøker dem hver for seg ved å anvende L'Hopitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\ddot{f}_c(f_b - f_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \\ &= 0 + \frac{(f_a')^2}{2f_a''} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(-\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \quad (7.13)$$

$$= \frac{(f_a')^2}{2f_a''} + 0 \quad (7.14)$$

Av (7.9), (7.12), (7.13) og (7.14) har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} ht = \frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}$$

Dermed er

$$S_y = f_a + \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

Videre er (med  $t$  gitt av (F))

$$S_x = (f_b - f_a)t + a - \frac{1}{2}h$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f_b - f_a)t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot ht \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} ht \\ &= -f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a} \end{aligned}$$

Altså er

$$S_x = a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

## Avslutning

Linja som har stigningstall  $f'(a)$ , og som går gjennom  $(a, f(a))$ , er gitt ved funksjonen

$$g(x) = f'_a(x - a) + f_a$$

$\vec{r} = [1, f_a]$  er en retningsvektoren til denne linja. Av uttrykkene vi har funnet for  $S_x$  og  $S_y$  har vi at

$$S = \left( a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}, f_a + \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a} \right)$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''_a} \left[ -f_a(1 + (f'_a)^2), 1 + (f'_a)^2 \right]$$

Siden  $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$  og  $g(a) = f(a)$ , er grafen til  $g$  tangeringslinja til sirkelen med sentrum  $S$  når  $h$  går mot 0. Altså er  $g$  tangeringslinja til sirkelen som beskriver krumningen til  $f$  når  $x = a$ .



# Indeks

determinant, 82

e, 26

ekstremalpunkt, 115

ekstremalverdi, 115

eulers tall, 26

infleksjonspunkt, 119

maksimum, 115

minimum, 115

retningsvektor

for linje, 80

vektor, 66

vendepunkt, 119

Fasit

## Litteratur

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press