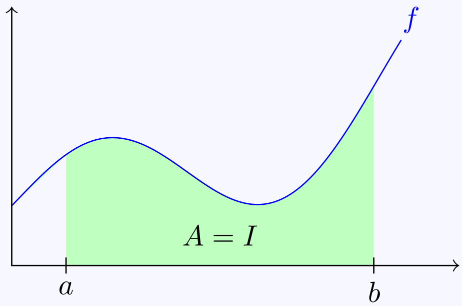
## 0.1 Bestemt og ubestemt integral

**0.1 Integral som areal**

Gitt en funksjon $f(x)$ som er positiv og kontinuerlig for alle $x \in [a, b]$. **Integralet** $I$ til $f$ på intervallet $x \in [a, b]$ tilsvarer da arealet avgrenset av $x$-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$, og grafen til $f$.




Gitt en funksjon $f(x)$, som vist i *figur 1*. Vi ønsker nå å finne en tilmærming for integralet $I$ til $f$ på intervallet $[a, b]$.

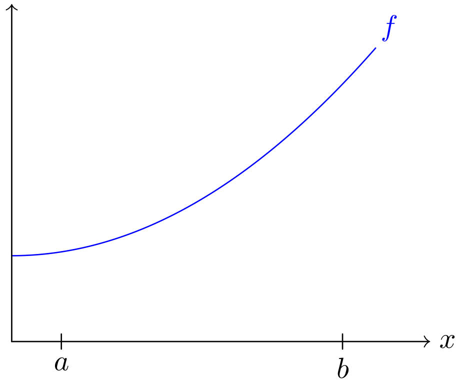



*Figure 1*

Vi starter med å dele $[a, b]$ inn i tre delintervaller, som da får bredden $\Delta x = \frac{b-a}{3}$. Videre bruker vi $f(x)$ i starten av hvert delintervall som høgden i et rektangel. $x$-verdiene dette gjelder kaller vi $x_1 = a$, $x_2$ og $x_3$. Vi kan nå tilnærme $I$ som summen av tre areal, $s_1$, $s_2$ og $s_3$:

$$\begin{aligned} I &\approx s_1 + s_2 + s_3 \\ &\approx f(a)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \\ &\approx [f(a) + f(x_2) + f(x_3)]\,\Delta x \end{aligned}$$

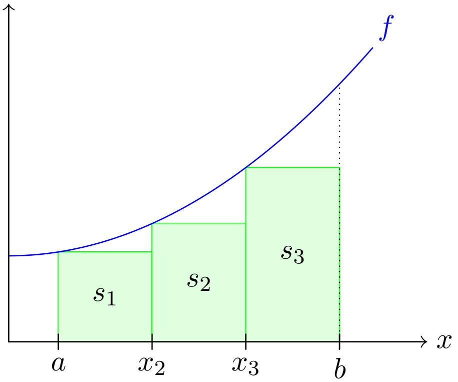



*Figure 2*

Intuitivt vil vi tenke at jo mindre intervaller vi bruker, jo bedre må tilnærmingen være.

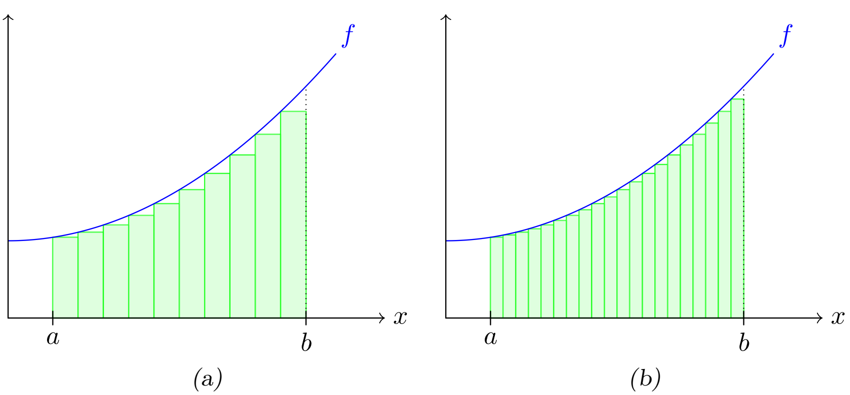



*Figure 3: a)* 10 intervaller *b)* 20 intervaller

Lar vi $n$ være antall delintervaller, og $n \to \infty$, får vi at

$$\begin{aligned} I &\approx \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + fv(x_2) + ... + f(x_n)\right] \Delta x \\ &\approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad (1) \end{aligned}$$

hvor $x_i = a + (i-1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (legg merke til at $t_1 = a$). Det kan vises at grenseverdien i (1) er lik $I$, og det fører oss til følgende definisjon:

## 0.2 Bestemt integral I

**Det bestemte integralet** $I$ av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{2}$$

hvor $x_i = a + (i-1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

### Eksempel

Finn det bestemte integralet av $f(x) = x$ på intervallet $x \in [0, 4]$.

### Svar

Vi har her at $f(x_i) = x_i = (i-1)\Delta x$, hvor $\Delta x = \frac{4}{n}$. Setter vi dette inn i (2), får vi at

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \left(\frac{4}{n}\right)^2 \\
&= 4^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&= 4^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2+n}{2} - n\right) \\
&= 16 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 8
\end{aligned}$$

*Merk*: I overgangen mellom første og andre linje i ligningen over har vi brukt summen av en aritmetisk rekke.

I kommende seksjoner skal vi finne integraler på en helt annen måte enn i eksempelet over. Læresetningen som sørger for dette er så viktig at den rett og slett kalles **analysens fundamentalteorem**[1]. Da teoremet gir oss en metode som omgår utregning av summer, lønner det seg å skrive integralet på en mer kompakt form:

**0.3 Bestemt integral II**

Det bestemte integralet $I$ av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ skrives som

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \tag{3}$$

**Omskriving**

I overgangen mellom (2) og (3) har vi erstattet $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n}$ med $\int\limits_a^b$, $\Delta x$ med $dx$, og i tillegg fjernet alle indekser.

### 0.1.1 Den antideriverte

Vi skal nå se på en definisjon som kan virke veldig triviell, men som viser seg å være svært viktig i neste delseksjon.

La oss starte med å se på funksjonen $f(x) = x^2$. Å derivere $f$ mhp. $x$ byr på få problemer:

$$f' = 2x$$

Hva nå med den deriverte av $g(x) = x^2 + 1$? Svaret blir det samme som for $f'$:

$$g' = 2x$$

Allerede nå innser vi at det finnes en haug av funksjoner, rett og slett uendelig mange, som har $2x$ som sin deriverte. Tiden er derfor inne for å lage en samlebetegnelse for alle funksjoner med samme deriverte:

**0.4 Den antideriverte**

Hvis $F(x)$ er en deriverbar funksjon og $F'(x) = f(x)$, da er $F$ en antiderivert av $f$.

[1] Analyse i matematisk sammenheng kan, kort oppsummert, sies å være studien av funksjoner. Et teorem er en læresetning som kan bevises.

**Eksempel**

Undersøk om følgende funksjoner er en antiderivert til $f(x) = 2x + e^x$:

$$g(x) = x^2 + e^x$$

$$h(x) = x^2 + e^{2x}$$

$$k(x) = x^2 + e^x + 4$$

**Svar**

Vi finner de deriverte av $g$, $h$ og $k$:

$$g'(x) = 2x + e^x$$

$$h'(x) = 2x + 2e^{2x}$$

$$k(x) = 2x + e^x$$

Siden $g'(x) = k'(x) = f(x)$, mens $h'(x) \neq f(x)$, er bare $g(x)$ og $k(x)$ en antiderivert til $f$.

### 0.1.2 Analysens fundamentalteorem

**0.5 Analysens fundamentalteorem**

Gitt en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[a, b]$. Hvis $F$ er en antiderivert til $f$, er

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{4}$$

**Eksempel**

Gitt funksjonen $f(x) = e^{\sin x}$. Finn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\, dx$ .

**Svar**

Siden $f$ er en antiderivert til $f'(x)$, har vi at

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\, dx &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \\ &= e^{\sin\frac{\pi}{2}} - e^{\sin 0} \\ &= e - 1\end{aligned}$$

### 0.1.3 Ubestemte integral

Vi har hittil sett på det **bestemte integralet**, som har sitt navn fordi integralet er over et intervall der start- og sluttverdien er gitt. Det *ubestemte* integralet til en funksjon $f(x)$ skriver vi derimot som

$$\int_c^x f(t)\, dt$$

Navnet ubestemt kommer av at $c$ er en vilkårlig konstant og at $x$ er en varierende verdi[1].

[1] Det kan kanskje se litt rart ut at vi har skrevet $f(t)$ i integralet når vi snakker om $f(x)$, men dette gjøres bare for å skille mellom de to varierende verdiene $x$ og $t$. $x$ kan være en hvilken som helst verdi, men for det ubestemte integralet ser vi på $f$ for verdiene $t \in [a, x]$, altså $f(t)$. Og da er det ikke $x$ som varierer, men $t$, derav $dt$.

Hvis vi lar $F$ være en antiderivert til $f$, har vi fra (4) at:

$$\int_c^x f(t)\,dt = F(x) - F(c)$$

Siden $c$ er en konstant, må $-F(c)$ også være det. Denne kalles **integrasjonskonstanten**, og omdøpes gjerne til $C$. Det er også vanlig å forenkle skrivemåten til det ubestemte integralet ved å fjerne grensene og bare skrive $f(x)\,dx$ etter integraltegnet.

### 0.6 Ubestemt integral

Det ubestemte integralet av $f(x)$ er gitt som

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{5}$$

Hvor $F$ er en antiderivert til $f$ og $C$ er en vilkårlig konstant.

### Merk

Når ikke annet er nevnt, tar vi det heretter for gitt at størrelser skrevet som store bokstaver er vilkårlige konstanter som resultat av integrasjon.

### Eksempel 1

Ved derivasjon vet vi at $(x^2)' = 2x$. Bruk dette til å å finne $\int 2x\,dx$.

#### Svar

Fra derivasjonen ser vi at $x^2$ er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

**Eksempel 2**

Ved derivasjon vet vi at $(x^2+3)' = 2x$. Bruk dette til å finne $\int 2x\,dx$.

**Svar**

Fra derivasjonen ser vi at $x^2+3$ er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x\,dx = x^2+3+C$$

Men siden $C$ er en vilkårlig konstant, kan vi liksågodt lage oss en ny konstant $D = C+3$, og får da at

$$\int 2x\,dx = x^2+D$$

*Merk*: Siden integrasjonskonstanter er vilkårlige, kan vi tillate oss å komprimere flere konstanter til én. I utregningen over kunne vi skrevet $C$ opp igen, underforstått at 3 var ”trekt inn” i denne konstanten:

$$\int 2x\,dx = x^2+3+C = x^2+C$$

## 0.2 Integralregning

Å finne bestemte og ubestemte integraler er et stort og viktig felt innenfor matematikken. Analysens fundamentalteorem forteller oss at nøkkelen er å finne en antiderivert til funksjonen vi ønsker å integrere.

### 0.2.1 Integralet av utvalge funksjoner

Vi skal etterhvert se at å finne integraler ofte krever spesielle metoder, men noen grunnleggende relasjoner bør vi huske:

**0.7 Ubestemte integraler**

For to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, og to konstanter $k$ og $C$, er

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \tag{6}$$

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \tag{7}$$

$$\int x^k\, dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C \qquad (k \neq -1) \tag{8}$$

$$\int \sin(kx)\, dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C \tag{9}$$

$$\int \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k}\sin(kx) + C \tag{10}$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{x+k}\, dx = \ln|x+k| + C \tag{13}$$

### Eksempel 1

Finn det bestemte integralet $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{1-\sin^2 x}\,dx$.

**Svar**

Vi starter med å observere at $1-\sin^2 x = \cos^2 x$. I tillegg vet vi fra (7) at konstanten 8 kan trekkes utenfor integralet. Vi kan derfor skrive integralet vårt som

$$8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

Fra (12) vet vi at $\tan x$ er en antiderivert til $\frac{1}{\cos^2 x}$. Når vi har funnet en antiderivert fører vi gjerne slik[1]:

$$\begin{aligned} 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= 8\big[\tan x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 8\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] \\ &= 8[1-0] \\ &= 8 \end{aligned}$$

*Merk*: Bruken av klammeparantes er bare en annen måte å skrive (4) på.

---

[1] Forklar for deg selv hvorfor vi ikke trenger å ta hensyn til konstanten når vi skal finne et bestemt integral.

**Eksempel 2**

Finn det ubestemte integralet $\int \left( \frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx$.

**Svar**

Vi utnytter at $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ og at $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Ved (6) og (8) kan vi skrive:

$$\begin{aligned}
\int \left( \frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx &= \int \left( x^{-4} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx \\
&= \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C \\
&= -\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}$$

### 0.2.1 Integralet av utvalge funksjoner (forklaring)

(6) og (7) følger direkte av (**??**) og (**??**).

Ut ifra definisjonen av det ubestemte integralet (se (5)) har vi at

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

hvis $F' = f$. For alle ubestemte integraler gitt i (8)-(12) kan dette sjekkes via enkle derivasjonoperasjoner og er derfor overlatt til leseren.

### 0.2.2 Bytte av variabel

Vi skal nå se på en metode som kalles *bytte av variabel*[1] (også kalt *substutisjon*). Med denne kan vi ofte forenkle integralregningen betraktelig.

**0.8 Bytte av variabel**

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $g(u)$. Hvis $\int f(x)\,dx$ kan skrives om til $\int g(u)u'\,dx$, kan integralet løses med $u$ som variabel:

$$\int g(u)u'\,dx = \int g(u)\,du \tag{14}$$

**Eksempel 1**

Finn det ubestemte integralet

$$\int 8x\sin\left(4x^2\right)\,dx$$

**Svar**

Vi setter $u(x) = 4x^2$ og $g(u) = \sin u$. Dermed blir $u' = 8x$, og da er

$$\begin{aligned}\int 8x\sin\left(4x^2\right)\,dx &= \int u'g(u)\,dx \\ &= \int g(u)\,du \\ &= \int \sin u\,du \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos\left(4x^2\right) + C\end{aligned}$$

*Merk*: Når integralet vi skal finne er mhp. $x$, er det viktig at sluttuttrykket har $x$ som eneste variabel.

[1] Det er flere framgangsmåter for denne metoden. Den vi her presenterer er, etter forfatterens mening, den raskeste for integraler som er pensum i R2. For mer avanserte integraler bør man kjenne til framgangsmåten presentert i vedlegg **??**.

**Eksempel 2**

Finn det bestemte integralet

$$\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\,dx$$

**Svar**

Vi setter $u(x) = 2x^3$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 6x^2$. I integralet vi skal løse mangler vi altså faktoren 6 for å kunne anvende oss av (14). Men vi kan alltids gange integralet vårt med 1, skrevet som $\frac{6}{6}$. Da kan vi trekke 6-tallet vi ønsker inn i integralet, og la resten av brøken forbli utenfor:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\,dx &= \frac{6}{6}\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 6x^2 e^{2x^3}\,dx\end{aligned}$$

Nå ligger alt til rette for å bytte variabel:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int_0^2 6x^2 e^{2x^3}\,dx &= \frac{1}{6}\int_0^2 u' g(u)\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 g(u)\,du \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 e^u\,du \\ &= \frac{1}{6}\left[e^u\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{6}\left[e^{2x^3}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{6}\left(e2\cdot 2^3 - e^{2\cdot 0^2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(e^{16} - 1\right)\end{aligned}$$

Det finnes også en alternativ måte for å regne ut bestemte integral ved bytte av variabel, se vedlegg **??** for denne.

**Eksempel 3**

Buelengden til grafen til en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\, dx \tag{I}$$

Finn lengden til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \qquad , \qquad x \in [0, 5]$$

**Svar**

Vi har at

$$f' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Og videre at

$$(f')^2 = \frac{1}{4}x$$

Det ubestemte integralet i (I) blir da

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{4}x}\, dx$$

Vi setter $u = 1 + \frac{1}{4}x$ og $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$. Da er $u' = \frac{1}{4}$. Nå har vi at

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 + \frac{1}{4}x}\, dx &= 4 \int u^{\frac{1}{2}} u'\, dx \\ &= 4 \int u^{\frac{1}{2}}\, du \\ &= \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{8}{3}\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Altså er

$$\int_0^5 \sqrt{1+(f')^2}\,dx = \frac{8}{3}\left[\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$$
$$= \frac{8}{3}\left(\left(1+\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$
$$= \frac{8}{3}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{27}{8} - 1\right)$$
$$= \frac{19}{3}$$

*Merk:* En litt lettere utrekning kunne vi fått ved å observere at

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x}$$

Med denne omskrivingen kunne vi valgt substutisjonen $u = 4 + x$, og dermed fått at $u' = 1$.

### 0.2.3 Delvis integrasjon

Hvis vi ikke finner et passende bytte av variabel for å løse et integral, kan vi isteden prøve med *delvis integrasjon*. Vi starter med å utlede ligningen som legger grunnlaget for metoden.

Gitt produktet av to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$, altså $uv$. Av produktregelen ved derivasjon (se TM1) har vi at

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Videre integrerer[1] vi begge sider av ligningen over mhp. $x$:

$$\begin{aligned}\int (uv)'\,dx &= \int \left(u'v + uv'\right)\,dx\\ uv &= \int \left(u'v + uv'\right)\,dx\\ uv - \int u'v\,dx &= \int uv'\,dx\end{aligned}$$

**0.9 Delvis integrasjon**

For to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ har vi at

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \tag{15}$$

**Eksempel 1**

Integrer funksjonen $f(x) = x \ln x$.

**Svar**

Vi observerer at $f(x)$ er sammensatt av $x$ og $\ln x$. Trikset bak delvis integrasjon er å sette én av disse til å være funksjonen $u(x)$ og den andre til å være den deriverte av $v(x)$, altså $v'(x)$. Da har vi en ligning som i (15) og kan (forhåpentligvis) bruke denne til å finne integralet vi søker.

Vi må integrere $v'$ for å finne $v$ og derivere $u$ for å finne $u'$. Siden $\ln x$ er lett å derivere, men vanskelig å integrere, setter vi

$$\begin{aligned}u &= \ln x\\ v' &= x\end{aligned}$$

Da må vi ha at[1]

$$\begin{aligned}u' &= \frac{1}{x}\\ v &= \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Altså kan vi skrive (rekkefølgen på $v'$ og $u$ har selvsagt ingent-

[1] Når vi har flere ubestemte itegraler, trenger vi bare ta med integrasjonskonstanten for én av dem. Derfor er ikke konstanten fra integrasjonen av $(uv)'$ tatt med.

ing å si i (15))

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,dx &= \int v'u\,dx\\ &= uv - \int u'v\,dx\\ &= \ln x\cdot\frac{1}{2}x^2 - \int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int\frac{1}{2}x\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

---

[1]Hvorfor ikke $v = \frac{1}{2}x^2 + C$? Vi hadde jo da fått samme $v'$.

Hvis vi lar $V$ betegne en antiderivert til $v'$, kan vi skrive $v = V + C$. Av (15) har vi da at

$$\begin{aligned}\int uv'\,dx &= u(V+C) - \int u'(V+C)\,dx\\ &= u(V+C) - \int u'V\,dx - \int Cu'\,dx\\ &= uV + Cu - \int u'V\,dx - Cu\\ &= uV - \int u'V\,dx\end{aligned}$$

Vi har endt opp med et uttrykk hvor $C$ ikke lenger deltar. Vi får altså det samme svaret uansett hva verdien til $C$ er, og da velger vi selvsagt fra starten av at $C = 0$.

**Eksempel 2**

Integrer funksjonen $f(x) = \ln x$.

**Svar**

Vi starter med å skrive $f(x) = \ln x \cdot 1$, og setter

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ v' &= 1 \end{aligned}$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{x} \\ v &= x \end{aligned}$$

$\int f\,dx$ finner vi nå ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot 1\,dx &= \int uv'\,dx \\ &= uv - \int u'v\,dx \\ &= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

### 0.2.4 Delbrøksoppspaltning

Gitt integralet

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

Etter litt testing vil vi finne at både delvis integrasjon og bytte av variabel kommer til kort i vår søken etter en antiderivert. Hva vi heller kan gjøre, er å ta i bruk *delbrøksoppspaltning*.

Vi merker oss da at integranden[1] er en brøk med nevneren $(x+1)(x+2)$. Dette betyr at den kan skrives som to separate brøker med $(x+1)$ og $(x+2)$ som nevnere:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \tag{16}$$

[1] For $\int f(x)\,dx$ sier vi at $f$ er *integranden*.

$A$ og $B$ er to konstanter, vår oppgave blir nå å bestemme verdien til disse.

Vi starter med å gange begge sider av (16) med fellesnevneren:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}(x+1)(x+2) = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\right)(x+1)(x+2)$$
$$4x+5 = A(x+2) + B(x+1)$$

For det rette valget av $A$ og $B$ er uttrykkene over like for alle verdier av $x$. Når $x = -1$, har vi bare $A$ som ukjent:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) + 5 &= A(-1+2) + B(-1+1) \\ 1 &= A \end{aligned}$$

Og ved å sette $x = -2$, finner vi $B$:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-2) + 5 &= A(-2+2) + B(-2+1) \\ -3 &= -B \\ 3 &= B \end{aligned}$$

Nå kan vi altså skrive

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Dette er to brøker vi kan å integrere[1] (se (13)):

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}\right) dx \\ &= \ln|x+1| + 3\ln|x+2| \end{aligned}$$

[1] *Obs!* I søken etter $A$ og $B$ valgte vi verdiene $x = -1$ og $x = -2$. I ligningene hvor vi satte inn disse verdiene var dette helt uskyldig, men i integralet må vi være observante. Vi får nemlig 0 i nevner hvis én av disse verdiene ligger i intervallet vi skal integere over. Er det snakk om et bestemt integral må vi derfor passe på at dette ikke er tilfelle.

### 0.10 Integrasjon ved delbrøksoppspaltning

For integraler på formen

$$\int \frac{a + bx + cx^2 + ...}{(x-d)(x-e)(x-f)...}\,dx$$

hvor $a, b, c, ...$ er konstanter, skriver vi om integranden til

$$\frac{A}{(x-d)} + \frac{B}{(x-e)} + \frac{C}{(x-f)} + ...$$

og finner så de ukjente konstantene $A, B, C, ...$

**Eksempel 1**

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x}\,dx$$

**Svar**

Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden, og får at

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(x-1)}$$

Denne brøken ønsker vi å skrive som

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

For å finne $A$, $B$ og $C$, omskriver vi ligningen ved å gange med fellesnevneren $x(x+1)(x-1)$:

$$3x^2 + 3x + 2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

Ligningen må holde for alle verdier av $x$. Vi setter først $x = 0$, og får at

$$\begin{aligned} 2 &= A \cdot (-1) \\ -2 &= A \end{aligned}$$

Videre setter vi $x = -1$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1)^2 + 3(-1) + 2 &= B \cdot (-1)(-1-1) \\ 1 &= B \end{aligned}$$

Til slutt setter vi $x = 1$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 &= C(1+1) \\ 4 &= C \end{aligned}$$

Integralet vi skal finne kan vi derfor skrive som

$$\int \left( -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-1} \right) dx = -2\ln|x| + \ln|x+1| + 4\ln|x-1| + D$$

**Eksempel 2**

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + x - 4}{x^2 + x - 2}\, dx$$

**Svar**

Hvis telleren har potenser av høyere orden[1] enn nevneren, må vi starte med en polynomdivisjon:

$$\begin{aligned} &(x^3 + 5x^2 + x - 4) : (x^2 + x - 2) = x + 4 + \frac{-x+4}{x^2+x-2} \\ &\underline{-(x^3 + x^2 - 2x)} \\ &\qquad 4x^2 + 3x - 4 \\ &\quad \underline{-\,(4x^2 + 4x - 8)} \\ &\qquad\qquad -\,x + 4 \end{aligned}$$

Vi observerer videre at nevneren i brøken kan omskrives til $(x-1)(x+2)$, for to konstanter $A$ og $B$ har vi altså at

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} &= \frac{-x+4}{x^2+x-2} \\ A(x+2) + B(x-1) &= -x + 4 \end{aligned}$$

Når $x = -2$, får vi at

$$\begin{aligned} B(-2-1) &= -(-2) + 4 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

Og når $x = 1$, er

$$\begin{aligned} A(1+2) &= -1 + 4 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Integralet blir derfor

$$\int \left(x + 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

[1] Her har telleren tre som høyeste orden, mens nevneren har to.

## 0.3 Areal og volum

### 0.3.1 Avgrenset areal

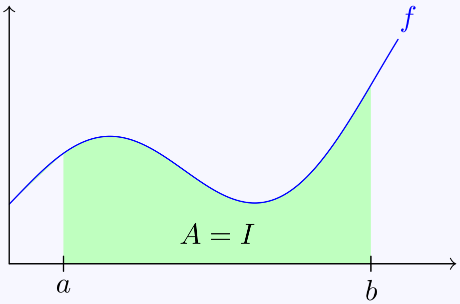
Arealet avgrenset av grafen til $f$, $x$-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$ skal vi for enkelhetsskyld kalle **arealet avgrenset av $f$ for $x \in [a, b]$**. I seksjon 0.1 har vi sett at det er en sterk sammenheng mellom dette arealet og det bestemte ingegralet av $f$:

**0.11 Integral som areal I**

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ og to tall $a$ og $b$ der $a < b$.

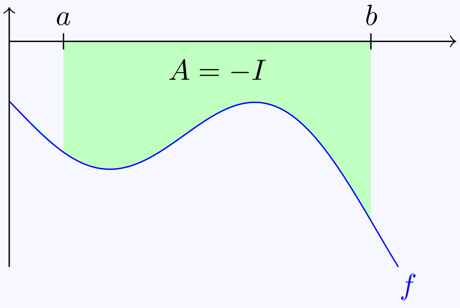
Hvis $f \geq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet $A$ avgrenset av $f$ på dette intervallet gitt som

$$A = \int_a^b f\,dx$$




Hvis $f \leq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet $A$ avgrenset av $f$ på dette intervallet gitt som

$$A = -\int_a^b f\,dx$$



### Areal avgrenset av to funksjoner

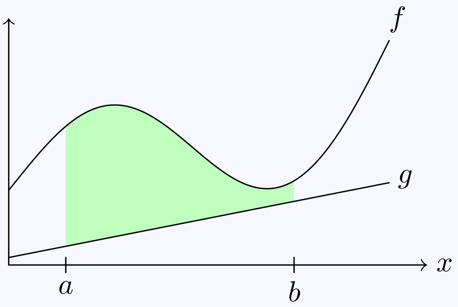
Noen ganger ønsker vi også å finne arealet avgrenset av to funksjoner. Da må vi sørge for at vi har tilstrekkelig med informasjon om disse før vi utfører integrasjonen:

## 0.12 Integral som areal II

Gitt to kontinuerlige funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og tre tall $a$, $b$ og $c$ der $a < c < b$.

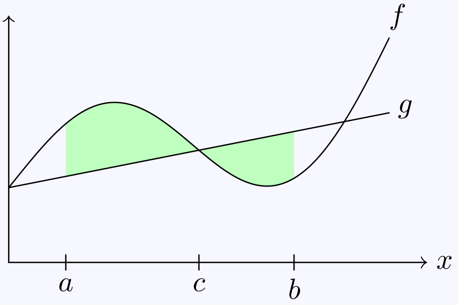
Hvis $f > g$ for $x \in [a, b]$, er arealet $A$ avgrenset mellom $f$ og $g$ på dette intervallet gitt ved

$$A = \int_a^b (f - g)\, dx \tag{17}$$




Hvis $f \geq g$ for $x \in [a, c]$ og $g \geq f$ for $x \in [c, b]$, er arealet $A$ avgrenset mellom $f$ og $g$ for $x \in [a, b]$ gitt ved

$$A = \int_a^c (f - g)\, dx + \int_c^b (g - f)\, dx \tag{18}$$



**Eksempel**

Gitt funksjonene $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ og $g(x) = 2x - 1$. Vi har da at $f \geq g$ for $x \leq 1$ og at $g \geq f$ for $x \geq 1$. Finn arealet $A$ avgrenset av $f$ og $g$ for $x \in [0, 2]$.

**Svar**

Ut ifra informasjonen over er arealet gitt ved ligningen

$$A = \int\limits_0^1 (f - g)\, dx + \int\limits_1^2 (g - f)\, dx$$

Vi starter med å regne ut de to integralene hver for seg:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 (f - g)\, dx &= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x^2 - x)\right]_0^1 \\
&= -\left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (x^2 - x)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) + (1^2 - 1) \\
&\qquad - \left(\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) + (0^2 - 0)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^2 (g - f)\, dx &= \left[(x^2 - x) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 \\
&= (2^2 - 2) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right) \\
&\qquad - \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) - (1^2 - 1)\right) \\
&= 2 - \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

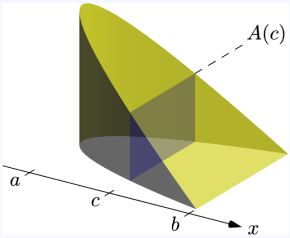
Summen av disse to integralene er 2, som altså er arealet.

### 0.3.2 Volumet av en figur

Vi har sett hvordan integraler kan brukes til å finne arealer, men de kan også brukes til å finne volumer:

**0.13 Integral som volum**

Gitt en tredimensjonal figur plassert i et koordinatsystem, med endepunktene satt til verdiene $a$ og $b$ langs $x$-aksen.




La videre $A(x)$ være tverrsnittsarealet av figuren for verdien $x$. Volumet $V$ av figuren er da gitt som

$$V = \int_a^b A\,dx \tag{19}$$

**Eksempel**

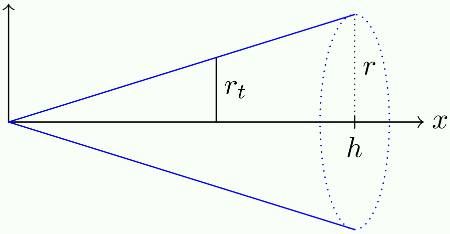
Vis at volumet $V$ av ei rett kjegle er gitt som

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

hvor $r$ er radiusen til grunnflata og $h$ er høgden til kjegla.

**Svar**

Vi plasserer kjegla inn i et koordinatsystem med høyden langs $x$-aksen og spissen plassert i origo.



Radiusen $r_t(x)$ kan beskrives som en rett linje med stigningstall $\frac{r}{h}$:

$$r_t(x) = \frac{r}{h}x$$

Arealet $A(x)$ av tverrsnittet blir da

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi r_t^2 \\ &= \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2 \end{aligned}$$

Altså er volumet av kjegla gitt som

$$\begin{aligned} \int_0^h A\,dx &= \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\,dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h \\ &= \frac{1}{3}\pi h r^2 \end{aligned}$$

### 0.3.3 Volum av omdreiningslegemer

Si vi har en funksjon $f(x)$ gitt på intervallet $[a, b]$, med en graf som vist i *figur 4a*. Tenk nå at vi dreier linjestykket 360° om $x$-aksen. Formen vi da har "skjært" ut, vist i *figur 4b*, er det vi kaller *omdreiningslegemet* til $f(x)$ på intervallet $[a, b]$.

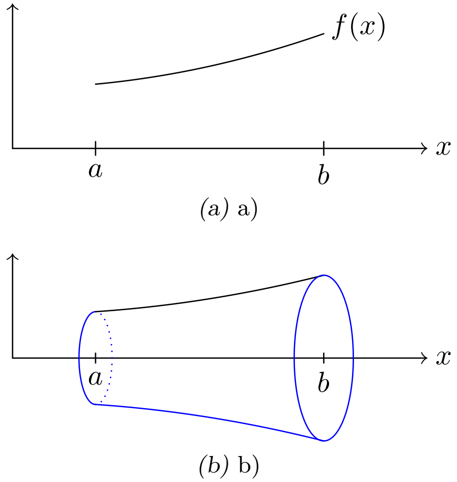



*Figure 4:* *a)* Grafen til $f$. *b)* Omdreiningslegemet til $f$.

Tverrsnittet (langs $x$-aksen) til en slik figur er alltid sirkelformet, tverrsnittsarealet er derfor $\pi r^2$, hvor $r(x)$ er radiusen til tverrsnittet. Men siden radiusen tilsvarer høyden fra $x$-aksen opp til $f$, er $r = f$. Av (19) kan vi da skrive

$$V = \int_a^b A \, dx = \int_a^b \pi f^2 \, dx = \pi \int_a^b f^2 \, dx$$

**0.14 Volum av omdreiningslegemer**

Volumet $V$ av omdreiningslegemet til $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$V = \pi \int_a^b f^2 \, dx \tag{20}$$

**Eksempel**

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

finn volumet av omdreiningsleget til $f$ på intervallet $[1, 3]$.

**Svar**

Volumet vi søker er gitt som

$$\begin{aligned}
\pi \int_1^3 f^2 \, dx &= \pi \int_1^3 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_1^3 x \, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 \\
&= \frac{\pi}{2} \left[9 - 1\right] \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

# Forklaringer

## 0.2 Bestemt integral I (forklaring)

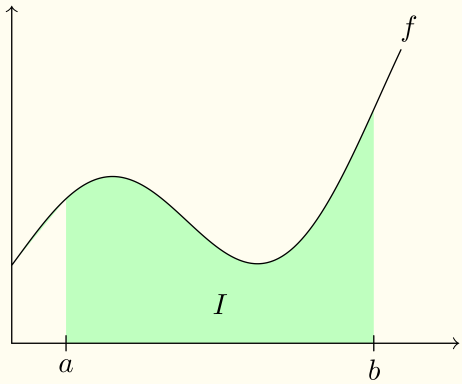



*Figure 5:* Integralet $I$ tilsvarer det avgrensede arealet i grønt.

La oss ta utgangspunkt i funksjonen $f(x)$, med en graf som vist i *figur 5*. Vårt mål er nå å finne $I$.

Vi starter med å splitte $[a, b]$ inn i $n$ mindre delintervaller, alle med bredden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. I tillegg lar vi $x_i$ for $i \in \{1, 2, ..., n\}$ betegne den $x$-verdien som er slik at $f(x_i)$ er den laveste verdien til $f$ på delintervall nr. $i$.

Arealet avgrenset av delintervallet og $f$ tilnærmer vi som $s_i = f(x_i)\Delta x$, da har vi at (se *figur 6*)

$$I \geq s_1 + s_2 + ... + s_i$$
$$I \geq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x$$
$$I \geq \sum_{i=i}^{n} f(x_i)\Delta x$$

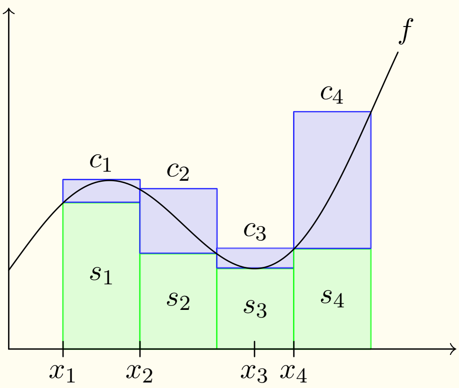



*Figure 6:* Arealene av $s_i$ markert som grønne søyler og arealene av $c_i$ markert som blå søyler. Bredden til hver søyle er $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (her er $n = 4$).

Videre må det finnes et tall $h_i \in [0, 1)$ som er slik at $f(x_i + h_i\Delta x)$ er den høyeste verdien til $f$ på delintervallet. Vi lar $c_i$ betegne arealet til søylen med $\Delta x$ som bredde og $f(x_i + h_i\Delta x) - f(x_i)$ som høyde:

$$c_i = (f(x_i + h_i\Delta x) - f(x_i))\Delta x$$

Hvis vi legger til alle $c_i$ i det første estimatet vårt, får vi en tilnærming som må være større eller lik det egentlige arealet. Derfor kan vi skrive

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Én av $c$-verdiene må være større eller lik alle andre $c$-verdier. Vi lar $m$ betegne indeksen til nettopp denne $c$-verdien. Da må vi ha at

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \leq nc_m$$

Men når $n \to \infty$, går summen $nc_m$ mot 0:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nc_m &= \lim_{n\to\infty} n(f(x_m + h_m\Delta x) - f(x_m))\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} n(f(x_m + h_m\Delta x) - f(x_m))\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(x_m + h_m\Delta x) - f(x_m))(b-a) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(x_m) - f(x_m))(b-a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Følgelig er $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 0$, og da er

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} c_i \right) \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{22}$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{23}$$

Det vi har kommet fram til nå er vel og bra, men skal vi regne ut et integral blir det slitsomt å inspisere $f(x)$ på uendelig mange delintervaller for å finne de laveste funksjonsverdiene i hver av dem! Vi merker oss derfor at venstresiden i (21), i vårt tilfelle, representerer det kraftigste underestimatet av $I$, mens høyresiden er det kraftigste overestimatet. I (21)-(23) har vi vist at begge disse estimatene går mot $I$ når $n \to \infty$, dette betyr at vi for andre valg av $x_i$ på hvert intervall også kommer fram til ønsket resultat. Regneteknisk vil det ofte være lurt å velge $x_i = a + (i-1)\Delta x$ for $i \in \{1, 2, ..., n\}$, slik som i (2).

**Integral som areal for negative funksjoner**

Hva nå om vi isteden skulle finne arealet avgrenset av $x$-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til $g(x) = -f(x)$?

Grafene til $f$ og $g$ er fullstendig symmetriske om $x$-aksen, dette må bety at arealet $A$ de avgrenser på et intervall må være helt likt. Og vi vet at

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} -g(x_i)\Delta x \\ &= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

Av dette kan vi utvide den geometriske definisjonen av integralet:

*Gitt en funksjon $f(x)$ som er negativ og kontiunerlig for alle $x \in [a, b]$. Integralet $I$ multiplisert med $-1$ tilsvarer arealet avgrenset av $x$-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til $f$.*

### 0.1.2 Analysens fundamentalteorem (forklaring)

Vi ønsker å vise at integralet $I$ av en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = F(b) - F(a)$$

hvor $F$ er en antiderivert til $f$. For å vise dette skal vi anvende oss av (2). Spesielt verdt å merke seg er at $x_1 = a$ og at $x_{n+1} = b$.

Fra tidligere vet vi at den deriverte av en funksjon $f(x)$ er gitt som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Med vår $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ kan vi omskrive grensen:

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$, da er

$$F'(x) = f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Vi erstatter $f$ i (2) med uttrykket over, og får at

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \Delta x$$

Fordi $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, har vi videre at

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= \lim_{n \to \infty} (F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + ... + F(x_{n+1}) - F(x_n)) \end{aligned}$$

Av dette legger vi merke til at alle $F(x_i)$ kansellerer hverandre, bortsett fra i endepunktene. Vi sitter altså igjen med summen

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \to \infty} (-F(x_1) + F(x_{n+1})) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

### 0.8 Bytte av variabel (forklaring)

Gitt en funksjon $F(x)$ som vil anta samme verdier som $G(u(x))$:

$$F(x) = G(u) \tag{24}$$

La oss nå skrive $F'(x)$ som $f(x)$ og $G'(u)$ som $g(u)$. For to konstanter $C$ og $D$ må vi ha at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

og

$$\int g(u)\,du = G(u) + D$$

Det må derfor finnes en konstant $E$ som er slik at

$$\int f(x)\,dx + E = \int g(u)\,du$$

Men av kjerneregelen (se TM1) har vi følgende relasjon:

$$f(x) = g(u)u'$$

Vi kan derfor skrive

$$\int g(u)u'\,dx + E = \int g(u)\,du$$

Når vi utfører integrasjonen på enten venstre eller høyre side, får vi en ny konstant som vi kan slå sammen med $E$. I praksis kan vi derfor utelate $E$, noe som er gjort i (0.8).

## 0.13 Integral som volum (forklaring)

Vi setter geometrien vår inn i et koordinatsystem, og tar for gitt at vi har en funksjon $A(x)$ som gir oss tverrsnittsarealet for alle gyldige $x$.

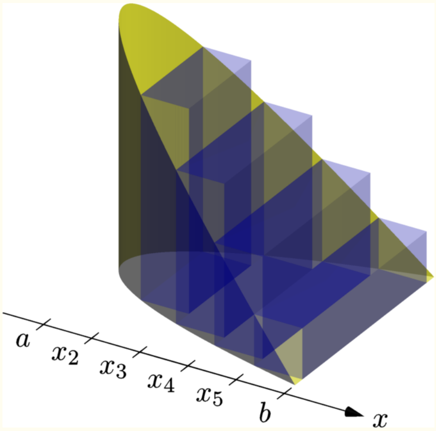



*Figure 7:* Volumet av geometrien (gul) tilnærmes ved summen av hver $A(x_i)\Delta x$ (blå).

Vi deler $[a, b]$ inn i $n$ delintervaller, der hvert intervall har lengden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og startverdi $x_i = a + (i-1)\Delta x$ for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vi tilnærmer volumet til geometrien ved å legge sammen volumene på formen $A(x_i)\Delta x$. Når vi lar $n$ gå mot uendelig vil summen gå mot volumet til gjenstanden[1], dette kan vi skrive som

$$\begin{aligned} V &= \lim_{x\to\infty} \left(A(x_0)\Delta x + A(x_1)\Delta x + \dots + A(x_n)\Delta x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(A(x_0) + A(x_1) + \dots + A(x_n)\right)\Delta x \\ &= \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

Uttrykket over er analogt til definisjonen av det bestemte integralet fra ligning (2).

[1] Argumentasjonen for denne påstanden blir identisk med den gitt i forklaringen for det bestemte integralet (se side 30).