Den deriverte som motivasjon

Gitt funksjonen $f(x) = a^x$. Da har vi at

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

Da x er uavhengig av h, får vi at

$$(a^x)' = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Likningen over peker mot noe fantastisk; hvis det finnes et tall a som er slik at $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$, så vil funksjonen a^x være sin egen deriverte funksjon! Altså er da $(a^x)' = a^x$. Vi legger nå merke til at hvis

$$a = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

så er

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^h - 1}{h}$$
$$= \frac{1+h-1}{h}$$
$$= 1$$

Hvis vi kan vise at grenseverdien $\lim\limits_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ eksisterer, har vi altså funnet akkurat det uttrykket for a som vi ønsket oss.

Undersøking av grenseverdien

Ved å sette $z = \frac{1}{h}$, kan vi skrive

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$

Vi setter $\lim\limits_{z\to\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$. Spørsmålet nå er om e har en endelig verdi eller ikke. Det første vi kan legge merke til, er at for alle $z \geq 0$ er

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1$$

Dette må bety at e er voksende når $z \to \infty$. Så lenge e har en øvre grense, kan vi da være sikre på at uttrykket går mot en endelig verdi[1].

Vi setter $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e_n$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Hvis e_n har en endelig verdi, er det åpenbart at $e = e_n$. Av binomialteoremet (se ??) har vi at

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + \binom{n}{0}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + ... \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + ... \end{aligned} \tag{1}$$

Gitt et heltall k, hvor $1 \leq k \leq n$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-k}{n} \leq 1$, følger det av (1) at

$$2 < e_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \tag{2}$$

Siden $k! \geq 2^{k-1}$, er

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... \tag{3}$$

Uttrykket til høgre kjenner vi igjen som en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = 1$ og $k = \frac{1}{2}$. Summen S av denne rekka er (se AM2??) gitt som

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dette betyr at venstresiden i (3) er mindre enn 2, og da har vi av (2) at

$$e_n < 3$$

Altså er

$$2 < e < 3$$

Nå vet vi at e går mot en endelig verdi, og det gir derfor mening å behandle e som et gitt tall.

[1] Hvis e hadde vært både voksende og avtagende når $z \to \infty$, ville uttrykket svinget i verdi, og jobben med å finne en øvre og nedre grense ville fort blitt vanskeligere.

Et tilbakeblikk på den deriverte

Derivasjon av potensfunksjoner var det som motiverte oss til å undersøke tallet e. Av det vi har drøftet i de foregående avsnittene, følger det at

$$(e^x)' = e^x$$

Likningen over er rett og slett én av de viktigste likningene i matematikk.