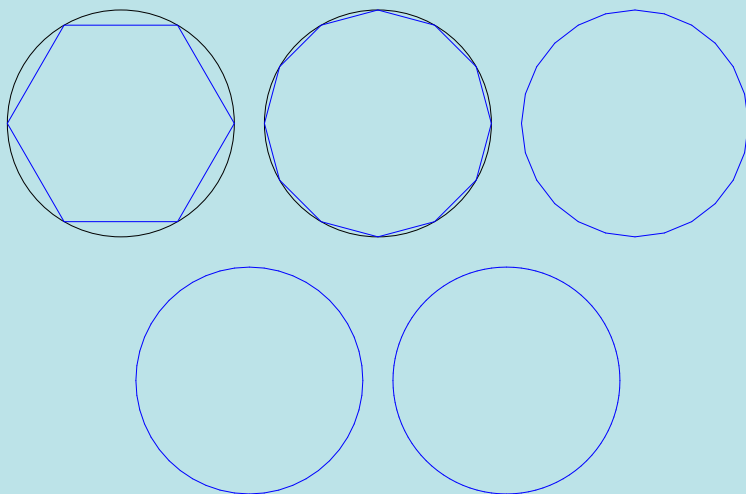


Matematikken sine byggesteinar



Sindre Sogge Heggen

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt"*

*"Det er ikkje å vite, men å lære,
ikkje å eige, men å eigne til seg,
ikkje å vere til stades, men å komme dit,
som gjev den største gleda."*

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laga av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skriven i L^AT_EX og figurane er lagd vha. Asymptote.

This book is part of the [OpenMathBooks](https://openmathbooks.org/) project. OpenMathBooks © 2022 by Sindre Sogge Heggen is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

04.11.2023

Forord

Matematikk har eit enormt omfang av forgreiningar og anvendingar, men det aller meste bygger på ei overkommeleg mengde med grunnprinsipp, og det er desse eg ønsker å presentere i denne boka. Eit prinsipp i oppsummert form har eg valgt å kalle ein *regel*. Reglar finn du i blå tekstboksar, som oftast etterfulgt av eit eksempel på bruk av regelen. Eitt av hovudmåla til denne boka er å gi lesaren ei forståing av kvifor reglane er som dei er. I kapittel 1-5 vil du finne forklaringar¹ i forkant av kvar regel, mens i kapittel 6 finn du forklaringar enten i forkant av eller direkte etter ein regel (og eventuelle eksempel). Fra og med kapittel 7 er nokre forklaringar lagt til den avsluttande seksjonen *Forklaringar*, dette indikerer at dei kan vere noko krevande å forstå og/eller at regelen er så intuitiv at mange vil oppleve det som overflødig å få den forklart.

Boka si oppbygging

Boka er delt inn i ein *Del I* og ein *Del II*. *Del I* handlar i stor grad om å bygge ei grunnleggande forståing av tala våre, og korleis vi rekner med dei. *Del II* introduserer konseptet algebra og dei nært slekta temaa potensar, likningar og funksjonar. I tillegg har både *Del I* og *Del II* avsluttande kapittel som handlar om geometri.

¹Å *forklare* reglane i staden for å *bevise* dei er eit bevisst valg. Eit bevis stiller sterke matematiske krav som ofte må definerast både på førehand og undervegs i ei utleiing av ein regel, noko som kan føre til at forståinga av hovudpoenget drukner i smådetaljar. Nokon av forklaringene vil likevel vere gyldige som bevis.

Takk til

Anne Jordal Myrset

Charlotte Merete Dahl

For mange gode innspel og kommentarar.

Symbol

| | |
|-------------|---|
| $=$ | "er lik" |
| $<$ | "er mindre enn" |
| $>$ | "er større enn" |
| \leq | "er mindre enn eller lik" |
| \geq | "er større enn eller lik" |
| \in | "er inneholdt i" |
| \vee | "eller" |
| \wedge | "og" |
| $[a, b]$ | lukka intervall fra og med a til og med b |
| $ a $ | lengda/talverdien til a |
| \perp | "vinkelrett på" |
| \parallel | "parallel med" |
| \triangle | "trekant" |
| \square | "firkant" |

Innhold

| | | |
|----------|---|-----------|
| I | Tal, rekning og geometri | 8 |
| <hr/> | | |
| 1 | Tala våre | 9 |
| 1.1 | Likskapsteiknet, mengder og tallinjer | 10 |
| 1.2 | Tal, siffer og verdi | 12 |
| 1.3 | Koordinatsystem | 16 |
| | Oppgaver | 17 |
| 2 | Dei fire rekneartene | 20 |
| 2.1 | Addisjon | 21 |
| 2.2 | Subtraksjon | 23 |
| 2.3 | Multiplikasjon (Ganging) | 25 |
| 2.4 | Divisjon (deling) | 28 |
| | Oppgaver | 31 |
| 3 | Faktorisering og reknerekkefølge | 35 |
| 3.1 | Reknerekkefølge | 36 |
| 3.2 | Faktorisering | 42 |
| | Oppgaver | 44 |
| 4 | Brøk | 47 |
| 4.1 | Introduksjon | 48 |
| 4.2 | Verdi, utviding og forkorting av brøk | 51 |
| 4.3 | Addisjon og subtraksjon | 54 |
| 4.4 | Brøk gonga med heiltal | 58 |
| 4.5 | Brøk delt med heiltal | 60 |
| 4.6 | Brøk gonga med brøk | 63 |
| 4.7 | Kansellering av faktorar | 64 |
| 4.8 | Deling med brøk | 68 |
| 4.9 | Rasjonale og blanda tal | 71 |
| | Oppgaver | 73 |
| 5 | Negative tal | 80 |
| 5.1 | Introduksjon | 81 |
| 5.2 | Dei fire rekneartane med negative tal | 83 |
| 5.3 | Negative tal som mengde | 89 |
| | Oppgaver | 90 |
| 6 | Utrekningsmetodar | 92 |
| 6.1 | Addisjon | 93 |
| 6.2 | Subtraksjon | 95 |
| 6.3 | Ganging | 98 |
| 6.4 | Divisjon | 103 |
| 6.5 | Regning med tid | 112 |
| 6.6 | Avrunding og overslagsregning | 113 |
| 6.7 | Standardform | 117 |
| | Oppgaver | 120 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 7 | Geometri | 124 |
| 7.1 | Omgrep | 125 |
| 7.2 | Egenskapar for trekantar og firkantar | 134 |
| 7.3 | Omrins | 138 |
| 7.4 | Areal | 139 |
| 7.5 | Tredimensjonal geometri | 146 |
| 7.6 | Volum | 149 |
| | Oppgaver | 151 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8 | Algebra | 159 |
| 8.1 | Introduksjon | 160 |
| | Oppgaver | 165 |
| 9 | Likningar | 172 |
| 9.1 | Introduksjon | 173 |
| 9.2 | Løysing ved dei fire rekneartane | 174 |
| 9.3 | Løysingsmetodane oppsummert | 181 |
| 9.4 | Potenslikningar | 184 |
| 9.5 | Ulikskapar | 186 |
| 9.5.1 | Introduksjon | 186 |
| 9.5.2 | Løysing av ulikskapar | 188 |
| | Oppgaver | 189 |
| 10 | Funksjonar | 192 |
| 10.1 | Introduksjon | 193 |
| 10.2 | Lineære funksjonar og grafar | 196 |
| | Oppgaver | 205 |
| 11 | Geometri | 212 |
| 11.1 | Formlar for areal og omkrins | 213 |
| 11.2 | Kongruente og formlike trekantar | 227 |
| 11.3 | Forklaringar | 232 |
| | Oppgaver | 250 |
| | Fasit | 263 |
| | Indeks | 271 |

Del I

Tal, rekning og geometri

Kapittel 1

Tala våre



Bilde fra pixabay.com

1.1 Likskapsteiknet, mengder og tallinjer

Likskapsteiknet

Som namnet tilseier, viser *likskapsteiknet* $=$ til at noko er likt. I kva grad og når ein kan seie at noko er likt er ein filosofisk diskusjon, og innleingsvis er vi berre prisgitt dette: Kva likskap $=$ sikter til må bli forstått ut ifrå konteksten teiknet blir brukt i. Med denne forståinga av $=$ kan vi studere nokre grunnleggjande eigenskaper for tala våre, og så komme tilbake til meir presise tydingar av teiknet.

Språkboksen

Vanlege måtar å seie $=$ på er

- "er lik"
- "er det same som"

Mengder og tallinjer

Tal kan representere så mangt. I denne boka skal vi halde oss til to måtar å tolke tala på; tal som ei *mengde* og tal som ei *plassering på ei linje*. Alle representasjonar av tal tek eigentleg utgangspunkt i kva forståinga er av tala 0 og 1.

Tal som mengde

Når vi snakkar om ei mengde, vil talet 0 vere¹ knytt til "ingenting". Ein figur der det ikkje er noko til stades vil slik vere det same som 0:

$$= 0$$

1 vil vi teikne som ei rute:

$$\square = 1$$

Andre tal vil da vere definert ut ifrå kor mange einarruter (einarar) ein har:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 2$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 3$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 4$$

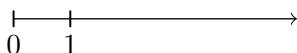
¹I [kapittel 2](#) skal vi sjå at det også er andre tolkingar av 0.

Tal som plassering på ei linje

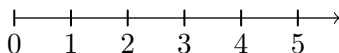
Når vi plasserer tal på ei linje, vil 0 vere utgangspunktet vårt:



Så plasserer vi 1 ei viss lengde til høgre for 0:



Andre tal vil da vere definert ut ifrå kor mange einarlengder (einarar) vi er unna 0:



Positive heiltal

Vi skal straks sjå at tal ikkje naudsynleg treng å vere *heile* antal einarar, men tala som *er* det har eit eige namn:

1.1 Positive heiltal

Tal som er eit heilt antal einarar kallast *positive*¹ *heiltal*. Dei positive heiltala er

1, 2, 3, 4, 5 og så vidare.

Positive heiltal blir også kalla *naturlege tal*.

Kva med 0?

Nokre forfattarar inkluderer også 0 i omgrepet naturlege tal. I nokre samanhengar vil dette lønne seg, i andre ikkje.

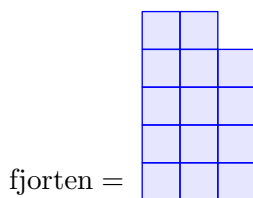
¹Kva ordet positiv inneber skal vi gjere greie for i [kapittel 5](#).

1.2 Tal, siffer og verdi

Tala våre er bygd opp av *siffera* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9, og *plasseringa* av dei. Siffera og deira plassering definerer¹ *verdien* til talet.

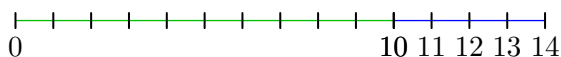
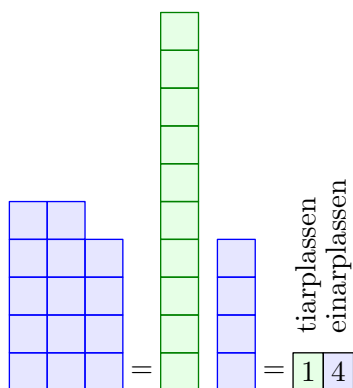
Heiltal større enn 10

La oss som eit eksempel skrive talet *fjorten* ved hjelp av sifra våre.



Vi kan no lage ei gruppe med 10 einarar, i tillegg har vi da 4 einarar. Da skriv vi fjorten slik:

$$\text{fjorten} = 14$$

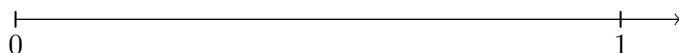


¹Etterkvart skal vi også sjå at *forteikn* er med på å definere verdien til talet (sjå [kapittel 5](#)).

Desimaltal

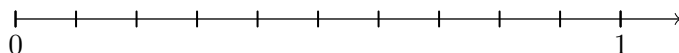
I mange tilfelle har vi ikkje eit heilt antal einarar, og da vil det vere behov for å dele 1 inn i mindre bitar. La oss starte med å teikne ein einar:

$$\square = 1$$



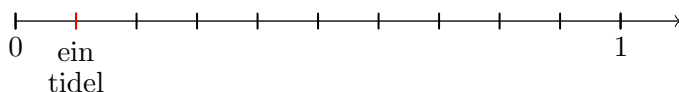
Så deler vi einaren vår inn i 10 mindre bitar:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = 1$$



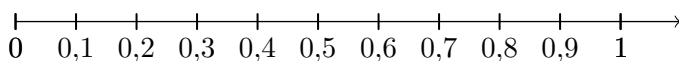
Sidan vi har delt 1 inn i 10 bitar, kallar vi ein slik bit for *ein tidel*:

$$\square = \text{ein tidel}$$



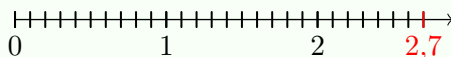
Tidelar skriv vi ved hjelp av *desimalteiknet* , :

$$\square = 0,1$$



Eksempel

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = 2,7$$



Språkboksen

På engelsk bruker ein punktum . som desimalteikn i staden for komma , :

3,5 (*norsk*)

3.5 (*english*)

Titalssystemet

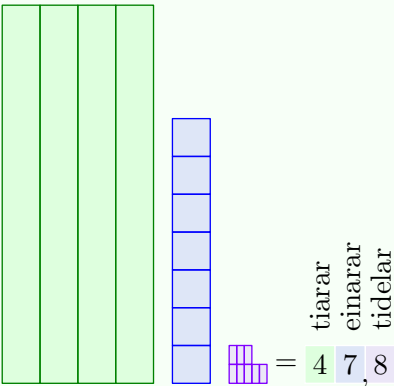
Vi har no sett korleis vi kan uttrykke verdien til tal ved å plassere siffer etter antal tiarar, einarar og tidelar, og det stoppar sjølvsagt ikkje der:

1.2 Titalssystemet

Verdien til eit tal er gitt av siffera 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9, og plasseringa av dei. Med sifferet som angir einarar som utgangspunkt vil

- siffer til venstre (i rekkefølge) indikere antal tiarar, hundrarar, tusenar osv.
- siffer til høgre (i rekkefølge) indikere antal tidelar, hundredelar, tusendelar osv.

Eksempel 1



Eksempel 2

tusenar
hundrarar
tiarar
einarar
tidelar
hundredelar

3805,72

1.3 Partal og oddetal

Heiltal som har 0, 2, 6 eller 8 på einarplassen kallast *partal* .

Heiltall som har 1, 3, 5, 7 eller 9 på einarplassen kallast *oddetal* .

Eksempel

Dei ti første (positive) partala er

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, og 18

De ti første (positive) oddetala er

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, og 19

1.3 Koordinatsystem

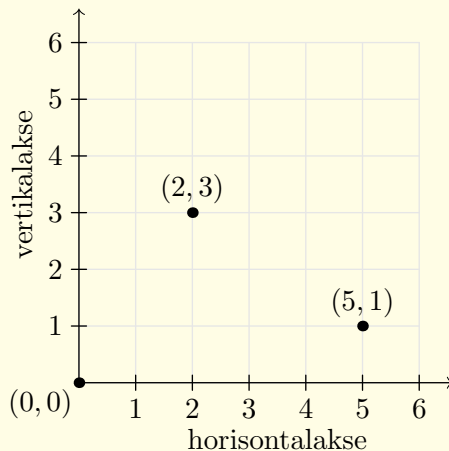
I mange tilfelle er det nyttig å bruke to tallinjer samtidig. Dette kallar vi eit *koordinatsystem*. Vi plasserer da éi tallinje som går *horisontalt* og éi som går *vertikalt*. Ei plassering i eit koordinatsystem kallar vi eit *punkt*.

Strengt tatt fins det mange typar koordinatsystem, men i denne boka bruker vi ordet om berre éin sort, nemleg det *kartesiske koordinatsystem*. Det er oppkalt etter den franske filosofen og matematikaren René Descartes.

Eit punkt skriv vi som to tal inni ein parentes. Dei to tala blir kalla *førstekoordinaten* og *andrekoordinaten*.

- Førstekoordinaten fortel oss kor langt vi skal gå langs horisontalaksen.
- Andrekoordinaten fortel oss kor langt vi skal gå langs vertikalaksen.

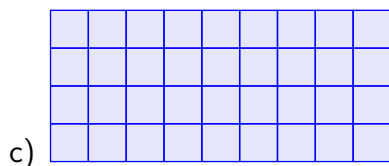
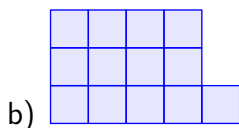
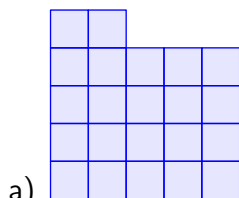
I figuren ser vi punkta $(2, 3)$, $(5, 1)$ og $(0, 0)$. Punktet der aksane møtast, altså $(0, 0)$, kallast *origo*.



Oppgaver for kapittel 1

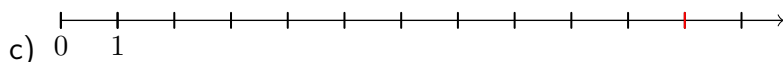
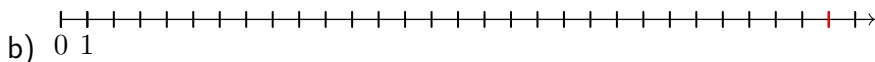
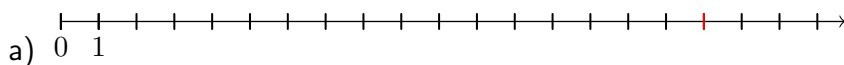
1.1.1

Skriv verdien til tallet.



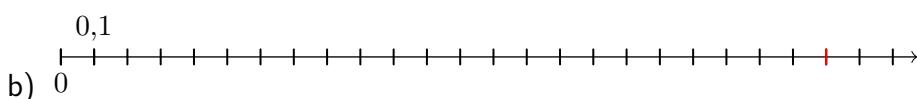
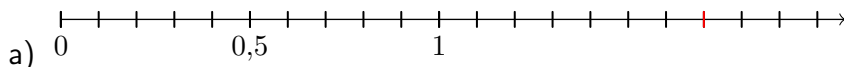
1.1.2

Skriv verdien til tallet som er markert med rødt.



1.1.3

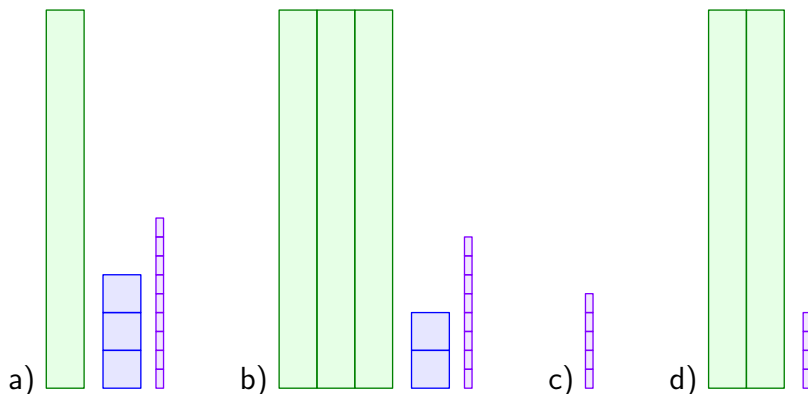
Skriv verdien til tallet som er markert med rødt.



1.1.4

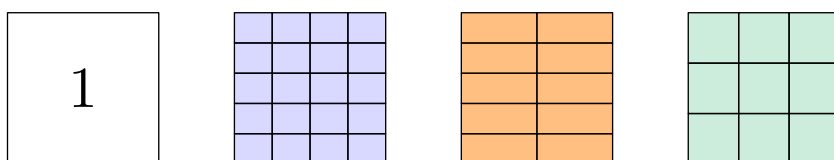
$$\text{[Green bar]} = 10 \quad \text{[Blue square]} = 1 \quad \text{[Purple vertical bar]} = 0,1$$

Skriv verdien til tallet.



1.1.5

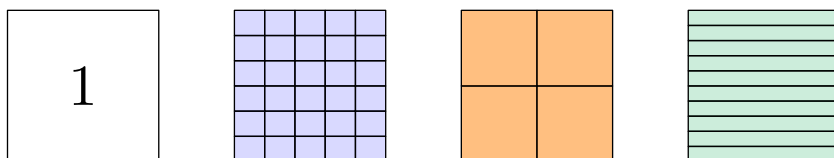
Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,1.



a)  b)  c) 

1.1.6

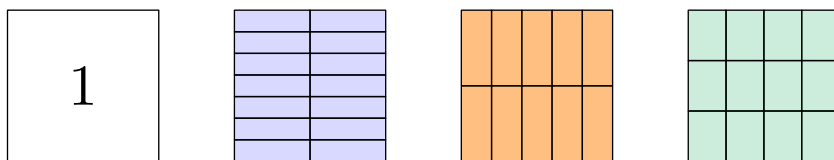
Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,1.






a)  b)  c) 

1.1.7

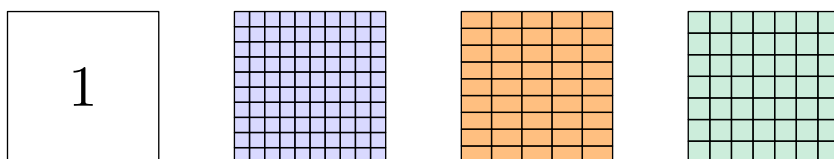
Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,1.






- a)  b)  c) 

1.1.8

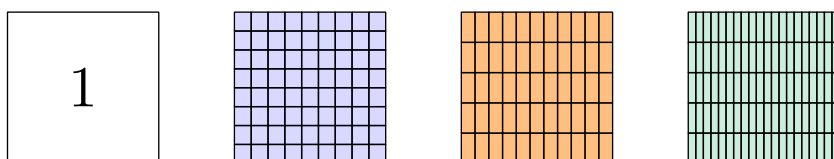
Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,01.






- a)  b)  c) 

1.1.9

Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,01.



- a)  b)  c) 

Kapittel 2

Dei fire rekneartene



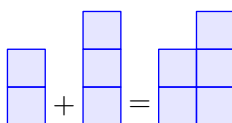
Bilde fra pxhere.com

2.1 Addisjon

Addisjon med mengder: Å legge til

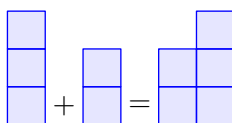
Når vi har ei mengde og skal legge til meir, bruker vi symbolet $+$. Har vi 2 og skal legge til 3, skriv vi

$$2 + 3 = 5$$



Rekkefølga vi legg saman tala på har ikkje noko å seie; å starte med 2 og så legge til 3 er det same som å starte med 3 og så legge til 2:

$$3 + 2 = 5$$



Språkboksen

Eit addisjonsstykke består av to eller fleire *ledd* og éin *sum*. I rek-nestykket

$$2 + 3 = 5$$

er både 2 og 3 ledd, mens 5 er summen.

Vanlege måtar å seie $2 + 3$ på er

- "2 pluss 3"
- "2 addert med 3"
- "2 og 3 lagt saman"

Det å legge saman tal kallast også å *summere*.

2.1 Addisjon er kommutativ

Summen er den same uansett rekkefølge på ledda.

Eksempel

$$2 + 5 = 7 = 5 + 2$$

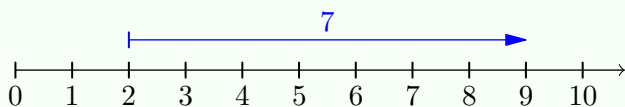
$$6 + 3 = 9 = 3 + 6$$

Addisjon på tallinja: Vandring mot høgre

På ei tallinja vil addisjon med positive tal innebære vandring *mot høgre*:

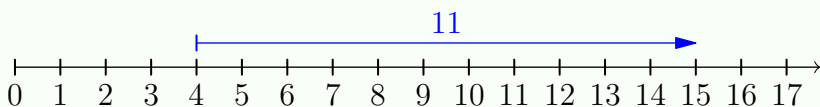
Eksempel 1

$$2 + 7 = 9$$



Eksempel 2

$$4 + 11 = 15$$




Tydinga av =

+ gir oss moglegheiten til å uttrykke tal på mange forskjellige måtar, for eksempel er $5 = 2 + 3$ og $5 = 1 + 4$. I denne samanhengen vil **=** bety "har same verdi som". Dette gjeld også ved subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, som vi skal sjå på i dei neste tre seksjonane.

2.2 Subtraksjon

Subtraksjon med mengder: Å trekke ifrå

Når vi har ei mengde og tar bort ein del av den, bruker vi symbolet :

$$5 - 3 = 2$$



The diagram illustrates the subtraction 5 - 3 = 2 using colored boxes. On the left, there are five blue boxes. In the middle, there is a minus sign followed by three red boxes. To the right of the minus sign is an equals sign, followed by two blue boxes.

Språkboksen

Eit subtraksjonsstykke består av to eller fleire *ledd* og éin *differanse*. I subtraksjonsstykket

$$5 - 3 = 2$$

er både 5 og 3 ledd og 2 er differansen.

Vanlege måtar å seie $5 - 3$ på er

- "5 minus 3"
- "5 fratrekt 3"
- "3 subtrahert fra 5"

Ei ny tolking av 0

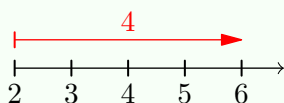
Innleiingsvis i denne boka nemnde vi at 0 kan tolkast som "ingenting". Subtraksjon gir oss moglegheiten til å uttrykke 0 via andre tal. For eksempel er $7 - 7 = 0$ og $19 - 19 = 0$. I praktiske samanhengar vil 0 ofte innebere ei form for likevekt, for eksempel som at ei kraft og ei motkraft er like store.

Subtraksjon på tallinja: Vandring mot venstre

I [seksjon 2.1](#) har vi sett at $+$ (med positive tal) inneber at vi skal gå *mot høgre* langs tallinja. Med $-$ gjer vi omvend, vi går *mot venstre*¹:

Eksempel 1

$$6 - 4 = 2$$



Eksempel 2

$$12 - 7 = 5$$



Merk

Med det første kan det kanskje verke litt rart at ein i *Eksempel 1* og *2* over skal gå i motsatt veg av retninga pila peiker i, men spesielt i [Kapittel 5](#) vil det lønne seg å tenke slik.

¹I figurar med tallinjer vil raudfarga piler indikere at ein startar ved pilspissen og vandrar til andre enden.

2.3 Multiplikasjon (Gonging)

Gonging med heiltal: Innleiande definisjon

Når vi legg saman like tall, kan vi bruke gonge-symbolet \cdot for å skrive reknestykka våre kortare:

Eksempel

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$$

$$8 + 8 = 8 \cdot 2$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 5$$

Språkboksen

Eit gongestykke består av to eller fleire **faktorar** og eitt **produkt**. I gongestykket

$$4 \cdot 3 = 12$$

er 4 og 3 faktorar, mens 12 er produktet.

Vanlege måtar å seie $4 \cdot 3$ på er

- "4 gonger 3"
- "4 gonga med 3"
- "4 multiplisert med 3"

Mange nettstader og bøker på engelsk brukar symbolet \times i staden for \cdot . I dei fleste programmeringsspråk er $*$ symbolet for multiplikasjon.

Gonging av mengder

La oss no bruke ein figur for å sjå for oss gongestykket $2 \cdot 3$:

$$2 \cdot 3 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Og så kan vi legge merke til produktet til $3 \cdot 2$:

$$3 \cdot 2 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

2.2 Multiplikasjon er kommutativ

Produktet er det same uansett rekkefølge på faktorane.

Eksempel

$$3 \cdot 4 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$6 \cdot 7 = 42 = 7 \cdot 6$$

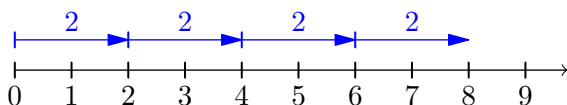
$$8 \cdot 9 = 72 = 9 \cdot 8$$

Gonging på tallinja

Vi kan også bruke tallinja for å rekne ut gongestykker. For eksempel kan vi finne kva $2 \cdot 4$ er ved å tenke slik:

" $2 \cdot 4$ betyr å vandre 2 plassar mot høgre, 4 gonger."

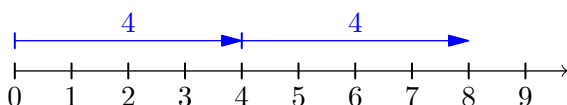
$$2 \cdot 4 = 8$$



Også tallinja kan vi bruke for å overbevise oss om at rekkefølga i eit gongestykke ikkje har noko å seie:

" $4 \cdot 2$ betyr å vandre 4 plassar mot høgre, 2 gonger."

$$4 \cdot 2 = 8$$



Endeleg definisjon av gonging med positive heiltal

Det ligg kanskje nærast å tolke "2 gonger 3" som "3, 2 gonger". Da er

$$\text{"2 gonger 3"} = 3 + 3$$

Innleiingsvis presenterete vi $2 \cdot 3$, altså "2 gonger 3", som $2 + 2 + 2$. Med denne tolkinga vil $3 + 3$ svare til $3 \cdot 2$, men nettopp det at multiplikasjon er ein kommutativ operasjon ([regel 2.2](#)) gjer at den eine tolkinga ikkje utelukkar den andre; $2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$ og $2 \cdot 3 = 3 + 3$ er to uttrykk med same verdi.

2.3 Gonging som gjentatt addisjon

Gonging med eit positivt heiltal kan uttrykkast som gjentatt addisjon.

Eksempel 1

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$8 + 8 = 8 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 5 = 5$$

Merk

At gonging med positive heiltal kan uttrykkast som gjentatt addisjon, utelukkar ikkje andre uttrykk. Det er ikkje feil å skrive at $2 \cdot 3 = 1 + 5$.

2.4 Divisjon (deling)

`:` er **divisjonstegnet**. I praksis har divisjon tre forskjellige tydingar, her eksemplifisert ved regnestykket $12 : 3$:

2.4 Divisjon sine tre tydingar

- **Inndeling av mengder**

$12 : 3 =$ "Antallet i kvar gruppe når 12 delast inn i 3 like store grupper"

- **Antall gongar**

$12 : 3 =$ "Antall gongar 3 går på 12"

- **Omvendt operasjon av multiplikasjon**

$12 : 3 =$ "Tallet ein må gonge 3 med for å få 12"

Språkboksen

Eit divisjonsstykke består av ein **dividend**, ein **divisor** og ein **kvotient**. I divisjonstykket

$$12 : 3 = 4$$

er 12 dividenden, 3 er divisoren og 4 er kvotienten.

Vanlege måtar å uttale $12 : 3$ på er

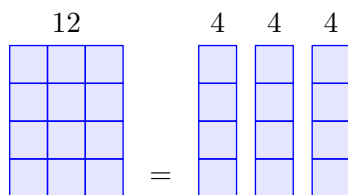
- "12 delt med/på 3"
- "12 dividert med/på 3"
- "12 på 3"

I nokre samanhengar blir $12 : 3$ kalt "**forholdet** mellom 12 og 3". Da er 4 **forholdstallet**.

Ofte brukast `/` i staden for `:`, spesielt i programmeringsspråk.

Divisjon av mengder

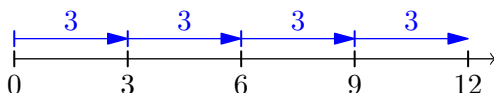
Reknestykket $12 : 3$ fortell oss at vi skal dele 12 inn i 3 like store grupper:



Vi ser at kvar gruppe inneheld 4 ruter, dette betyr at

$$12 : 3 = 4$$

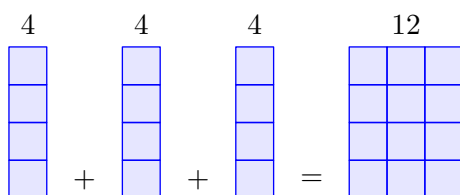
Antal gongar



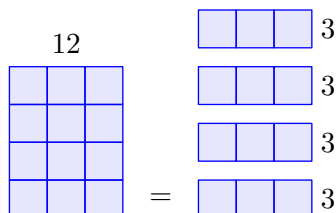
3 går 4 gonger på 12, altså er $12 : 3 = 4$.

Omvend operasjon av multiplikasjon

Vi har sett at viss vi deler 12 inn i 3 like grupper, får vi 4 i kvar gruppe. Altså er $12 : 3 = 4$. Om vi legg saman igjen desse gruppene, får vi naturlegvis 12:



Men dette er det samme som å gonge 4 med 3. Altså; om vi veit at $4 \cdot 3 = 12$, så veit vi også at $12 : 3 = 4$. I tillegg veit vi da at $12 : 4 = 3$.



Eksempel 1

Sidan $6 \cdot 3 = 18$, er

$$18 : 6 = 3$$

$$18 : 3 = 6$$

Eksempel 2

Sidan $5 \cdot 7 = 35$, er

$$35 : 5 = 7$$

$$35 : 7 = 5$$

Oppgaver for kapittel 2

2.1.1

Skriv tallene som summen av to tall.

Eksempel

3 kan skrives som $1 + 2$

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

2.1.2

Skriv tallene som summen av tre tall.

Eksempel

4 kan skrives som $1 + 2 + 1$

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9 f) 10

2.1.3

To tall som til sammen utgjør 10 kalles **tiervenner**. For eksempel er 1 og 9 tiervenner fordi $1 + 9 = 10$.

1) Finn tiervennen til

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

2) Når man har gjort oppgave 1), hvorfor er det ikke "nødvendig" å finne tiervennene til 6, 7 og 8?

2.1.4

Merk: Du kan tillate deg å svare på spørsmålene bare ved å prøve ut et par eksempler.
For bevis, se [oppgave 14](#).

Velg rett alternativ av 1), 2) og 3).

- a) Summen av to partall er
 - 1) et partall.
 - 2) et oddetall.
 - 3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- b) Summen av to oddetall er
 - 1) et partall.
 - 2) et oddetall.
 - 3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- c) Summen av et partall og et oddetall er
 - 1) et partall.
 - 2) et oddetall.
 - 3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

2.2.1

Skriv tallene som differansen mellom to tall.

Eksempel

1 kan skrives som $8 - 7$.

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7 g) 8

2.2.2

(I denne oppgaven kan du tillate deg å svare på spørsmålene bare ved å prøve ut et par eksempler. For bevis, se oppgave [oppgave 14.](#))

- a) Differansen mellom to partall er
 - 1) Et partall.
 - 2) Et oddetall.
 - 3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- b) Differansen mellom to oddetall er
 - 1) Et partall.
 - 2) Et oddetall.
 - 3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.
- c) Differansen mellom et partall og et oddetall er
 - 1) Et partall.
 - 2) Et oddetall.
 - 3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

2.3.1

Skriv som gangestykker og alternativ sum.

Eksempel

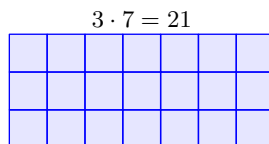
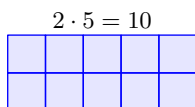
$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$$

- a) $2 + 2 + 2$
- b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
- c) $4 + 4$
- d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
- e) $6 + 6 + 6 + 6$
- f) $7 + 7 + 7 + 7$

2.3.2

Tegn ruter og finn svaret på gangestykket.

Eksempel



- a) $4 \cdot 5$ b) $8 \cdot 3$ c) $2 \cdot 9$ d) $5 \cdot 6$ e) $7 \cdot 8$

2.3.3

- a) Vil et heltall ganget med 2 alltid resultere i et partall eller et oddetall?
- b) Vil et partall ganget med 5 alltid resultere i et partall eller et oddetall? Hvilket siffer vil alltid stå på enerplassen?
- c) Vil et oddetall ganget med 5 alltid resultere i et partall eller et oddetall? Hvilket siffer vil alltid stå på enerplassen?

Kapittel 3

Faktorisering og reknerrekkefølge

3.1 Reknerekkefølge

Prioriteringa av rekneartane

Sjå på følgande reknestykke:

$$2 + 3 \cdot 4$$

Eit slikt reknestykke *kunne* ein tolka på to måtar:

1. "2 pluss 3 er 5. 5 gonga med 4 er 20. Svaret er 20."
2. "3 gonga med 4 er 12. 2 pluss 12 er 14. Svaret er 14."

Men svara blir ikkje like! Det er altså behov for å ha nokre reglar om kva vi skal rekne ut først. Den eine regelen er at vi må rekne ut gonging eller deling *før* vi legg saman eller trekk ifrå, dette betyr at

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 4 &= \text{"Rekn ut } 3 \cdot 4, \text{ og legg saman med } 2\text{"} \\ &= 2 + 12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Men kva om vi ønska å legge saman 2 og 3 først, og så gonge summen med 4? Å fortelle at noko skal reknast ut først gjer vi ved hjelp av parentesar:

$$\begin{aligned} (2 + 3) \cdot 4 &= \text{"Legg saman 2 og 3, og gong med 4 etterpå"} \\ &= 5 \cdot 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

3.1 Reknerekkefølge

1. Uttrykk med parentes
2. Multiplikasjon eller divisjon
3. Addisjon eller subtraksjon

Eksempel 1

Rekn ut

$$23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7$$

Answer

$$\begin{aligned} 23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7 &= 23 - 12 + 4 \cdot 7 && \text{Parentes} \\ &= 23 - 12 + 28 && \text{Ganging} \\ &= 39 && \text{Addisjon og subtraksjon} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Rekn ut

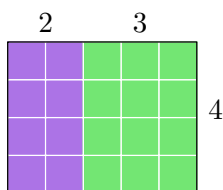
$$18 : (7 - 5) - 3$$

Answer

$$\begin{aligned} 18 : (7 - 5) - 3 &= 18 : 2 - 3 && \text{Parentes} \\ &= 9 - 3 && \text{Deling} \\ &= 6 && \text{Addisjon og subtraksjon} \end{aligned}$$

Ganging med parentes

Kvor mange ruter ser vi i figuren under?



To måter ein kan tenke på er desse:

1. Det er $2 \cdot 4 = 8$ lilla ruter og $3 \cdot 4 = 12$ grønne ruter. Til saman er det $8 + 12 = 20$ ruter. Dette kan vi skrive som

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$$

2. Det er $2 + 3 = 5$ ruter bortover og 4 ruter oppover. Altså er det $5 \cdot 4 = 20$ ruter totalt. Dette kan vi skrive som

$$(2 + 3) \cdot 4 = 20$$

Av desse to utrekningane har vi at

$$(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$$

3.2 Gonging med parentes (distributiv lov)

Når eit parentesuttrykk er ein faktor, kan vi gonge dei andre faktorane med kvart enkelt ledd i parentesuttrykket.

Eksempel 1

$$(4 + 7) \cdot 8 = 4 \cdot 8 + 7 \cdot 8$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(10 - 7) \cdot 2 &= 10 \cdot 2 - 7 \cdot 2 \\ &= 20 - 14 \\ &= 6\end{aligned}$$

Merk: Her vil det sjølvsagt vere raskare å rekne slik:

$$(10 - 7) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Eksempel 2

Rekn ut $12 \cdot 3$.

Answer

$$\begin{aligned}12 \cdot 3 &= (10 + 2) \cdot 3 \\ &= 10 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \\ &= 30 + 6 \\ &= 36\end{aligned}$$

Obs!

Vi introduserte parentesar som ein indikator på kva som skulle rek-nast ut først, men [regel 3.2](#) gir ei alternativ og likeverdig tyding av parentesar. Regelen kjem spesielt til nytte i algebrarekning (sjå [Del II](#)).

Å gonge med 0

Vi har tidlegare sett at 0 kan skrivast som ein differanse mellom to tal, og dette kan vi no utnytte til å finne produktet når vi gongar med 0. La oss sjå på reknestykket

$$(2 - 2) \cdot 3$$

Av [regel 3.2](#) har vi at

$$\begin{aligned}(2 - 2) \cdot 3 &= 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \\ &= 6 - 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

Sidan $0 = 2 - 2$, må dette bety at

$$0 \cdot 3 = 0$$

3.3 Gonging med 0

Viss 0 er ein faktor, er produktet lik 0.

Eksempel 1

$$7 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 219 = 0$$

Assosiative lover

3.4 Assosiativ lov ved addisjon

Plasseringa av parentesar mellom ledd har inga påverknad på summen.

Eksempel

$$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$$

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$$

$$\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

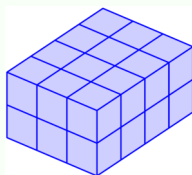
3.5 Assosiativ lov ved multiplikasjon

Plasseringa av parentesar mellom faktorar har inga påverknad på produktet.

Eksempel

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$$



I motsetnad til addisjon og multiplikasjon, er verken subtraksjon eller divisjon assosiative:

$$(12 - 5) - 4 = 7 - 4 = 3$$

$$12 - (5 - 4) = 12 - 1 = 11$$

$$(80 : 10) : 2 = 8 : 2 = 4$$

$$80 : (10 : 2) = 80 : 5 = 16$$

Vi har sett at parentesane hjelp oss med å seie noko om *prioriteringa* av rekneartane, men det at subtraksjon og divisjon er ikkje-assosiative fører til at vi også må ha ein regel for kva *retning* vi skal rekne i.

3.6 Retning på utrekningar

Rekneartar som ut ifrå [regel 3.1](#) har lik prioritet, skal reknast frå venstre mot høgre.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 12 - 5 - 4 &= (12 - 5) - 4 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}80 : 10 : 2 &= (80 : 10) : 2 \\&= 8 : 2 \\&= 4\end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned}6 : 3 \cdot 4 &= (6 : 3) \cdot 4 \\&= 2 \cdot 4 \\&= 8\end{aligned}$$

3.2 Faktorisering

Når ein heiltalls dividend og ein heiltals divisor resulterer i ein heiltals kvotient, seier vi at dividenden er **deleleg** med divisoren. For eksempel er 6 deleleg med 3 fordi $6 : 3 = 2$, og 40 er deleleg med 10 fordi $40 : 10 = 4$. Omgrepet deleleg er med på å definere primtal:

3.7 Primtal

Eit naturleg tal som er større enn 1, og som berre er deleleg med seg sjølv og 1, er eit **primtal**.

Eksempel

Dei fem første primtala er 2, 3, 5, 7 og 11.

3.8 Faktorisering

Faktorisering inneber å skrive eit tal som eit produkt av andre tal.

Eksempel

Faktoriser 24 på tre forskjellige måtar.

Answer

$$24 = 2 \cdot 12$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Språkboksen

Da 12 er deleleg med 4, seier vi at "4 er ein faktor i 12".

3.9 Primtalsfaktorisering

Faktorisering med berre primtal som faktorar kallast **primtalsfaktorisering**.

Eksempel

Skriv 12 på primtalsfaktorisert form.

Answer

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

Regn ut ved å skrive tallene som summen av enere, tiere og hundrere, og bruk distributiv lov.

Eksempel

$$15 \cdot 3 = (10 + 5) \cdot 3 = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$$

$$147 \cdot 2 = (100 + 40 + 7) \cdot 2 = 100 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 200 + 80 + 14 = 294$$

- a) $17 \cdot 2$ b) $59 \cdot 3$ c) $25 \cdot 4$ d) $582 \cdot 2$ e) $981 \cdot 3$

3.2.1

Skriv tallene som et gangestykke med to faktorer.

- a) 100 b) 30 c) 40 d) 70
e) 42 f) 32 g) 84 h) 90

3.2.2

Primtallsfaktoriser tallene fra [oppgave 3.2.1](#).

Merk: Det er anbefalt at leseren finner sin egen metode for å primtallsfaktorisere tall, men for den som ønsker en skjematisk metode vises det til [oppgave 3.2.5](#).

3.2.3

Faktoriser tallene fra [oppgave 3.2.1](#) på tre forskjellige måter.

3.2.4

6 kalles et **perfekt tall** fordi summen av alle faktorene til 6 (inkludert 1, men ekskludert 6) er lik 6: $1 + 2 + 3 = 6$. Finn det neste perfekte tallet (det ligger mellom 15 og 30).

3.2.5

Eksemplene under viser en metode for å primtallsfaktorisere tall.
Forklar metoden.

Eksempel 1

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

| | : | |
|----|---|----|
| 84 | 2 | 42 |
| 42 | 2 | 21 |
| 21 | 3 | 7 |

Eksempel 2

$$595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$$

| | : | |
|-----|---|-----|
| 595 | 5 | 119 |
| 119 | 7 | 17 |

Gruble 1

Forklar hvorfor produktet av to oddetall alltid er et oddetall.

Gruble 2

Beskriv en metode for å finne nye primtall.

Kapittel 4

Brøk

4.1 Introduksjon

4.1 Brøk som omskriving av delestykke

Ein brøk er ein annan måte å skrive eit delestykke på. I ein brøk kallar vi dividenden for *tellar* og divisoren for *nemnar*.

$$1 : 4 = \frac{1}{4} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Tellar} \\ \leftarrow \text{Nemnar} \end{array}$$

Språkboksen

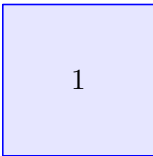
Vanlege måtar å seie $\frac{1}{4}$ på er¹

- "éin firedel"
- "1 av 4"
- "1 over 4"

¹I tillegg har vi utsegna fra språkboksen på side 28.

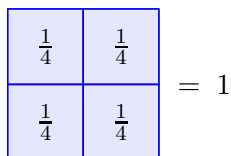
Brøk som mengde

La oss sjå for på brøken $\frac{1}{4}$ som ei mengde. Vi startar da med å tenke på talet 1 som ei rute¹:

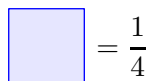

$$1 = 1$$

¹Av praktiske årsakar velg vi oss her ei einarrute som er større enn den vi brukte i [Kapittel 1](#).

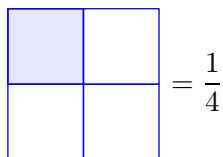
Så deler vi denne ruta inn i fire mindre ruter som er like store. Kvar av desse rutene blir da $\frac{1}{4}$ (1 av 4):



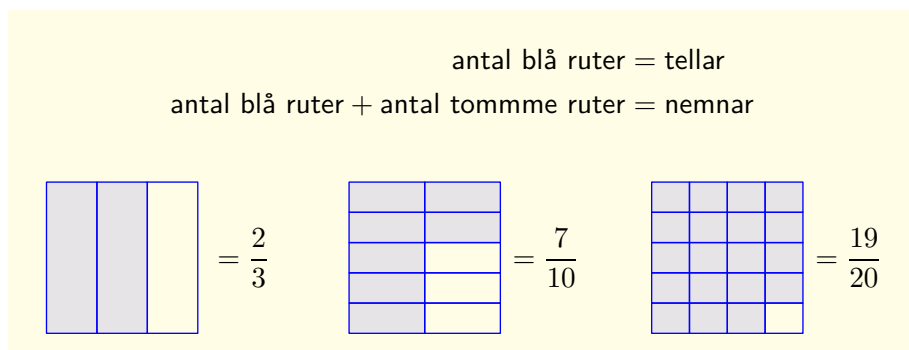
Har vi éi slik rute, har vi altså 1 firedel:



Men skal ein berre ut ifrå ein figur kunne sjå kor stor ein brøk er, må ein vite kor stor 1 er, og for å få dette lettare til syne skal vi også ta med dei "tomme" rutene:

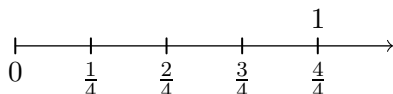


Slik vil dei blå og dei tomme rutene fortelje oss kor mange bitar 1 er delt inn i, mens dei blå rutene aleine fortel oss kor mange slike bitar det *eigentleg* er. Slik kan vi seie at

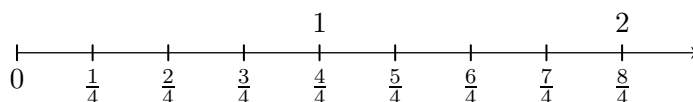


Brøk på tallinja

På tallinja deler vi lengda mellom 0 og 1 inn i like mange lengder som nemnaren angir. Har vi ein brøk med 4 i nemnar, deler vi lengda mellom 0 og 1 inn i 4 like lengder:



Tallinja er også fin å bruke for å teikne inn brøkar som er større enn 1:



Tallar og nemnar oppsummert

Sjølv om vi har vore innom det allereie, er det så avgjerande å forstå kva tellaren og nemnaren seier oss at vi tek ei kort oppsummering:

- Nemnaren fortel kor mange bitar 1 er delt inn i.
- Tellaren fortel kor mange slike bitar det er.

4.2 Verdi, utviding og forkorting av brøk

4.2 Verdien til ein brøk

Verdien til ein brøk finn vi ved å dele tellaren med nemnaren.

Eksempel

Finn verdien til $\frac{1}{4}$.

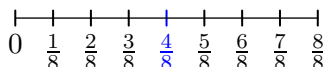
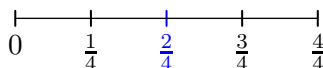
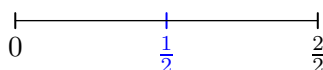
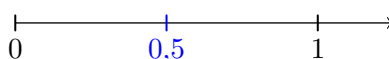
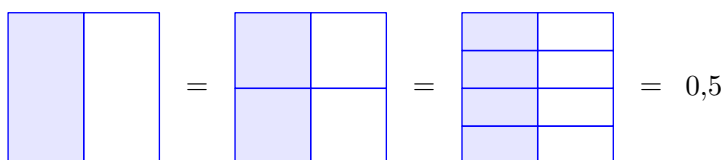
Answer

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

Brøkar med same verdi

Brøkar kan ha same verdi sjølv om dei ser forskjellige ut. Viss du reknar ut $1 : 2$, $2 : 4$ og $4 : 8$, får du i alle tilfelle 0,5 som svar. Dette betyr at

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = 0,5$$

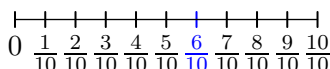
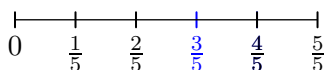
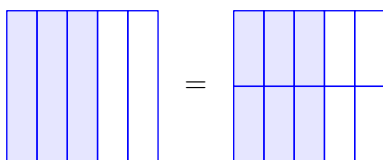


Utviding

At brøkar kan sjå forskjellige ut, men ha same verdi, betyr at vi kan endre på utsjånaden til ein brøk utan å endre verdien. La oss som eksempel gjere om $\frac{3}{5}$ til ein brøk med same verdi, men med 10 som nemnar:

- $\frac{3}{5}$ kan vi gjere om til ein brøk med 10 i nemnar om vi deler kvar femdel inn i 2 like bitar, for da blir 1 til saman delt inn i $5 \cdot 2 = 10$ bitar.
- Tellaren i $\frac{3}{5}$ fortel at der er 3 femdelar. Når desse blir delt i to, blir dei totalt til $3 \cdot 2 = 6$ tidelar. Altså har $\frac{3}{5}$ same verdi som $\frac{6}{10}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$



Forkorting

Legg no merke til at vi også kan gå "andre vegen". $\frac{6}{10}$ kan vi gjere om til ein brøk med 5 i nemnar ved å dele både tellar og nemnar med 2:

$$\frac{6}{10} = \frac{6 : 2}{10 : 2} = \frac{3}{5}$$

4.3 Utviding og forkorting av brøk

Vi kan gonge eller dele tellar og nemnar med det same talet utan at brøken endrar verdi.

Å gonge med eit tal større enn 1 kallast å *utvide* brøken. Å dele med eit tal større enn 1 kallast å *forkorte* brøken.

Eksempel 1

Utvid $\frac{3}{5}$ til ein brøk med 20 som nemnar.

Answer

Da $5 \cdot 4 = 20$, gongar vi både tellar og nemnar med 4:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} &= \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{12}{20}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Utvid $\frac{150}{50}$ til ein brøk med 100 som nemnar.

Answer

Da $50 \cdot 2 = 100$, gongar vi både tellar og nemnar med 2:

$$\begin{aligned}\frac{150}{50} &= \frac{150 \cdot 2}{50 \cdot 2} \\ &= \frac{300}{100}\end{aligned}$$

Eksempel 3

Forkort $\frac{18}{30}$ til ein brøk med 5 som nemnar.

Answer

Da $30 : 6 = 5$, deler vi både tellar og nemnar med 6:

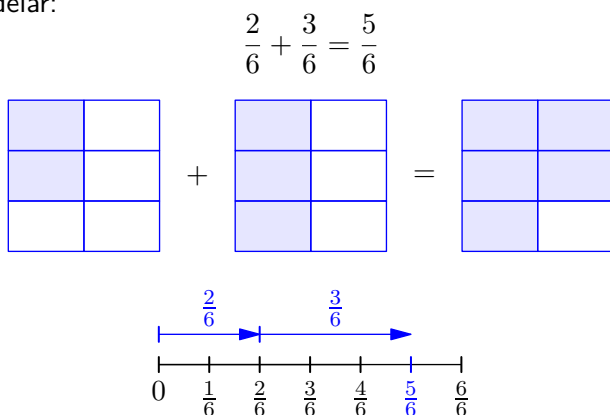
$$\begin{aligned}\frac{18}{30} &= \frac{18 : 6}{30 : 6} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

4.3 Addisjon og subtraksjon

Addisjon og subtraksjon av brøkar handlar i stor grad om nemnarane. Husk no at nemnarane fortel oss om inndelingar av 1. Viss brøkar har lik nemnar, representerer dei eit antal bitar med lik størrelse. Da gir det meining å rekne addisjon eller subtraksjon mellom tellarane. Viss brøkar har ulike nemnarar, representerer dei eit antal bitar med ulik størrelse, og da gir ikkje addisjon eller subtraksjon mellom tellarane direkte meining.

Lik nemnar

Om vi for eksempel har 2 seksdelar og adderer 3 seksdelar, endar vi opp med 5 seksdelar:



4.4 Addisjon/subtraksjon av brøkar med lik nemnar

Når vi reknar addisjon/subtraksjon mellom brøkar med lik nemnar, finn vi summen/differansen av tellarane og beheld nemnaren.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} + \frac{8}{7} &= \frac{2+8}{7} \\ &= \frac{10}{7}\end{aligned}$$

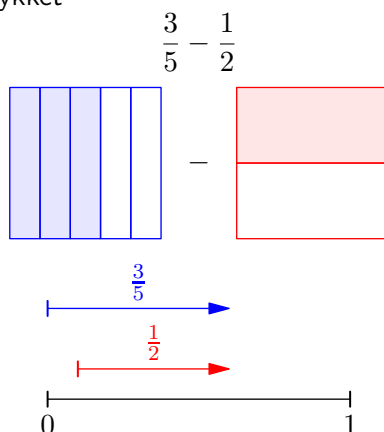
Eksempel 2

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9}$$

$$= \frac{2}{9}$$

Ulike nemnarar

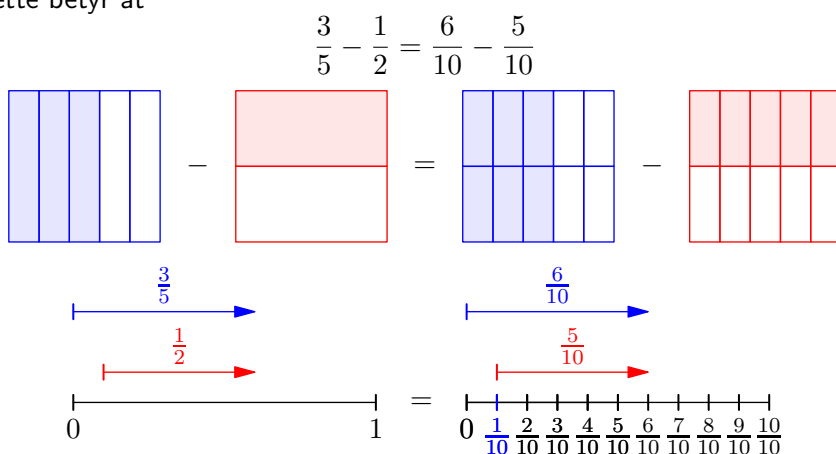
La oss sjå på reknestykket¹



Skal vi skrive differansen som ein brøk, må vi sørge for at brøkane har same nemnar. Dei to brøkane våre kan begge ha 10 som nemnar:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

Dette betyr at



¹Vi minner om at raudfarga på pila indikerer at ein skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Det vi har gjort, er å utvide begge brøkane slik at dei har same nemnar, nemleg 10. Når nemnarene i brøkane er like, kan vi rekne ut subtraksjonssstykket for tellarane:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} - \frac{1}{2} &= \frac{6}{10} - \frac{5}{10} \\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

4.5 Addisjon/subtraksjon av brøkar med ulik nemnar

Når vi reknar addisjon/subtraksjon mellom brøkar med ulik nemnar, må vi utvide brøkane slik at dei har lik nemnar, for så å bruke [regel 4.4](#).

Eksempel 1

Rekn ut

$$\frac{2}{9} + \frac{6}{7}$$

Begge nemnarane kan bli 63 viss vi gongar med rett heiltal. Vi utvider derfor til brøkar med 63 i nemnar:

$$\begin{aligned}\frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 7} + \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} &= \frac{14}{63} + \frac{54}{63} \\ &= \frac{68}{63}\end{aligned}$$

Fellesnemnar

I *Eksempel 1* over blir 63 kalla ein *fellesnemnar*. Dette fordi det finst heiltal vi kan gonge nemnarane med som gir oss talet 63:

$$9 \cdot 7 = 63$$

$$7 \cdot 9 = 63$$

Viss vi gongar saman alle nemnarane i eit reknestykke, finn vi alltid ein fellesnemnar, men vi sparer oss for store tal om vi finn den *minste* fellesnemnaren. Ta for eksempel reknestykket

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3}$$

Her kan vi bruke fellesnemnaren $6 \cdot 3 = 18$, men det er betre å merke seg at $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$ også er ein fellesnemnar. Altså er

$$\begin{aligned}\frac{7}{6} + \frac{5}{3} &= \frac{7}{6} + \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{7}{6} + \frac{10}{6} \\ &= \frac{17}{6}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Rekn ut

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4}$$

Answer

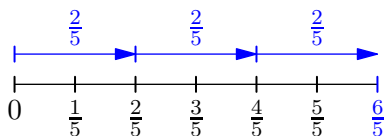
Alle nemnarane kan bli 8 viss vi gongar med rett heiltall. Vi utvider derfor til brøkar med 8 i nemnar:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4} &= \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{5}{8} + \frac{10 \cdot 2}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{12}{8} - \frac{5}{8} + \frac{20}{8} \\ &= \frac{27}{8}\end{aligned}$$

4.4 Brøk gonga med heiltal

I [seksjon 2.3](#) såg vi at gonging med heiltal er det same som gjentatt addisjon. Skal vi for eksempel rekne ut $\frac{2}{5} \cdot 3$, kan vi derfor rekne slik:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{2+2+2}{5} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$



Men vi veit også at $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3$, og derfor kan vi forenkle reknestykket vårt:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2 \cdot 3}{5} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Multiplikasjon mellom heiltal og brøk er også kommutativ¹:

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{2}{5} &= 3 \cdot 2 : 5 \\ &= 6 : 5 \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

4.6 Brøk gonga med heiltal

Når vi gongar ein brøk med eit heiltal, gongar vi heiltalet med tellaren i brøken.

¹Hugs at $\frac{2}{5}$ berre er ei omskriving av $2 : 5$.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot 4 &= \frac{1 \cdot 4}{3} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{2}{5} &= \frac{3 \cdot 2}{5} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Ei tolking av gonging med brøk

Av [regel 4.6](#) kan vi også danne ei tolking av kva å gonge med ein brøk inneber. For eksempel, å gonge 3 med $\frac{2}{5}$ kan tolkast på desse to måtane:

- Vi gongar 3 med 2, og deler produktet med 5:

$$3 \cdot 2 = 6 \quad , \quad 6 : 5 = \frac{6}{5}$$

- Vi deler 3 med 5, og gongar kvotienten med 2:

$$3 : 5 = \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

4.5 Brøk delt med heiltal

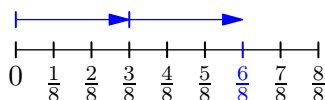
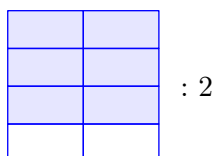
Det er no viktig å huske på to ting:

- Deling kan ein sjå på som ei lik fordeling av eit antal
- I ein brøk er det tellaren som fortel noko om antalet (nemnaren fortel om inndelinga av 1)

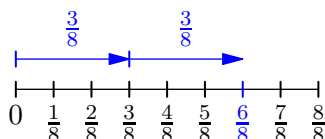
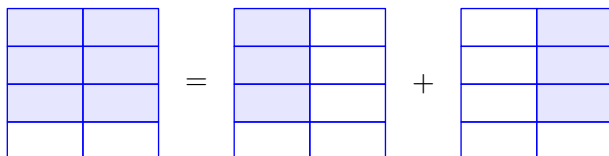
Tilfellet der tellaren er deleleg med divisoren

La oss rekne ut

$$\frac{6}{8} : 2$$



Vi har her 6 åttedelar som vi skal fordele likt på 2. Dette blir $6 : 2 = 3$ åttedelar.



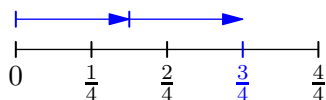
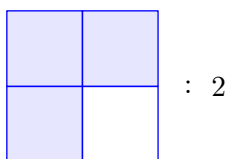
Altså er

$$\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8}$$

Tilfellet der tellaren ikkje er deleleg divisoren

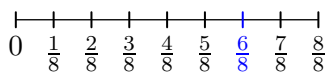
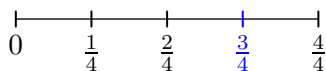
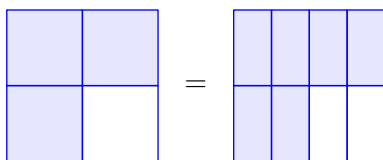
Kva no om vi skal dele $\frac{3}{4}$ på 2?

$$\frac{3}{4} : 2$$

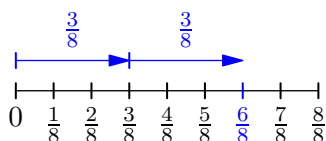
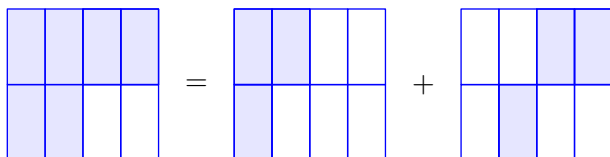


Saka er at vi alltid kan utvide brøken vår slik at tellaren blir deleleg med divisoren. Sidan vi skal dele med 2, utvidar vi altså brøken vår med 2:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$



No har vi 6 åttedelar. 6 åttedelar delt på 2 blir 3 åttedelar:



Altså er

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

Reint matematisk har vi rett og slett gonga nemnaren til $\frac{3}{4}$ med 2:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} : 2 &= \frac{3}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

4.7 Brøk delt med heiltal

Når vi delar ein brøk med eit heiltal, gongar vi nemnaren med heiltalet.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} : 6 &= \frac{5}{3 \cdot 6} \\ &= \frac{5}{18}\end{aligned}$$

Unntak

Innleiingsvis av denne seksjonen fann vi at

$$\frac{4}{8} : 2 = \frac{2}{8}$$

Da gonga vi ikkje nemnaren med 2, slik [regel 4.7](#) tilseier. Om vi gjer det, får vi

$$\frac{4}{8} : 2 = \frac{4}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

Men

$$\frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

Dei to svara har altså same verdi. Saka er at skal vi dele ein brøk på eit heiltal, og tellaren er deleleg med heiltalet, kan vi direkte dele tellaren på heiltalet. I slike tilfelle er det altså ikkje feil, men heller ikkje naudsynt å bruke [regel 4.7](#).

4.6 Brøk gonga med brøk

Vi har sett¹ korleis å gonge med ein brøk inneber å gonge det andre talet med tellaren, og så dele produktet med nemnaren. La oss bruke dette til å rekne ut

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

Med tolkinga akkurat nemnt, skal vi no gonge $\frac{5}{4}$ først med 3, og så dele produktet med 2. Av [regel 4.6](#) er

$$\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{4}$$

Og av [regel 4.7](#) er

$$\frac{5 \cdot 3}{4} : 2 = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

Altså er

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

4.8 Brøk gonga med brøk

Når vi gongar to brøkar med kvarandre, gongar vi tellar med tellar og nemnar med nemnar.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} &= \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 9} \\ &= \frac{24}{63}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} &= \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 10} \\ &= \frac{9}{20}\end{aligned}$$

¹Sjå tekstboksen med tittelen *Ei tolking av gonging med brøk* på s. 59.

4.7 Kansellering av faktorar

Når tellaren og nemnaren har lik verdi, er verdien til brøken alltid 1. For eksempel er $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{25}{25} = 1$ osv. Dette kan vi utnytte for å forenkle brøkuttrykk.

La oss forenkle brøkuttrykket

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8}$$

Da $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$, kan vi skrive

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8}$$

Og som vi nylig har sett ([regel 4.8](#)) er

$$\frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8}$$

Sidan $\frac{8}{8} = 1$, har vi at

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8} &= \frac{5}{9} \cdot 1 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Når berre gonging er til stades i brøkar, kan ein alltid omrokkere slik vi har gjort over, men når ein har forstått kva omrokkinga ender med, er det betre å bruke *kansellering*. Ein set da ein strek over to og to like faktorar for å indikere at dei utgjer ein brøk med verdien 1. Tilfellet vi akkurat såg på skriv vi da som

$$\frac{\cancel{8} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{9}$$

4.9 Kansellering av faktorar

Når berre gonging er til stades i ein brøk, kan vi kansellere par av like faktorar i tellar og nemnar.

Eksempel 1

Kanseller så mange faktorar som mogleg i brøken

$$\frac{3 \cdot 12 \cdot 7}{7 \cdot 4 \cdot 12}$$

Answer

$$\frac{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 4 \cdot \cancel{12}} = \frac{3}{4}$$

Eksempel 2

Forkort brøken $\frac{12}{42}$.

Answer

Vi legg merke til at 6 er ein faktor i både 12 og 42, altså er

$$\begin{aligned}\frac{12}{42} &= \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 7} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Eksempel 3

Forkort brøken $\frac{48}{16}$.

Answer

Vi legg merke til at 16 er ein faktor i 48, altså er

$$\begin{aligned}\frac{48}{16} &= \frac{3 \cdot \cancel{16}}{\cancel{16}} \\ &= \frac{3}{1} \\ &= 3\end{aligned}$$

Merk: Viss alle faktorar er kansellert i tellar eller nemnar, er dette det same som at talet 1 står der.

Forkorting via primtalsfaktorisering

Det er ikkje alltid like lett å legge merke til ein felles faktor, slik vi har gjort i *Eksempel 2* og *Eksempel 3* over. Vil ein vere heilt sikker på at ein ikkje har oversett felles faktorar, kan ein alltid primtalsfaktorisere (sjå [seksjon ??](#)) både tellar og nemnar. For eksempel har vi at

$$\begin{aligned}\frac{12}{42} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 7} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Brøkar forenkler utrekningar

Desmialtalet 0,125 kan vi skrive som brøken $\frac{1}{8}$. Reknestykket

$$0,125 \cdot 16$$

vil for dei fleste av oss ta ei stund å løyse for hand med vanlege multiplikasjonsreglar. Men bruker vi brøkuttrykket får vi at

$$\begin{aligned}0,125 \cdot 16 &= \frac{1}{8} \cdot 16 \\ &= \frac{2 \cdot 8}{8} \\ &= 2\end{aligned}$$

"Å stryke nullar"

Eit tal som 3000 kan vi skrive som $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, mens 700 kan vi skrive som $7 \cdot 10 \cdot 10$. Brøken $\frac{3000}{700}$ kan vi derfor forkorte slik:

$$\begin{aligned}\frac{3000}{700} &= \frac{3 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot 10}{7 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{7} \\ &= \frac{30}{7}\end{aligned}$$

I praksis er dette det same som "å stryke nullar":

$$\frac{300\cancel{0}}{70\cancel{0}} = \frac{30}{7}$$

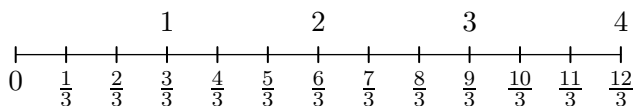
Obs! Nullar er dei einaste sifra vi kan "stryke" på denne måten, for eksempel kan vi ikkje forkorte $\frac{123}{13}$ på nokon som helst måte. I tillegg kan vi berre "stryke" nullar som står som bakerste siffer, for eksempel kan vi ikkje "stryke" nullar i brøken $\frac{101}{10}$.

4.8 Deling med brøk

Deling ved å sjå på tallinja

La oss rekne ut $4 : \frac{2}{3}$. Sidan brøken vi deler 4 på har 3 i nemnar, kan det vere ein idé å gjere om også 4 til ein brøk med 3 i nemnar. Vi har at

$$4 = \frac{12}{3}$$

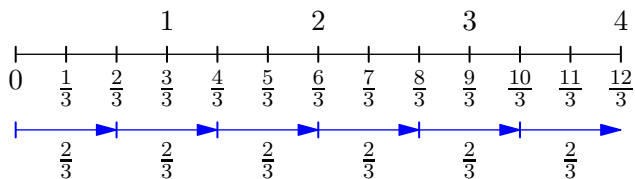


Husk no at ei tyding av $4 : \frac{2}{3}$ er

"Kor mange gonger $\frac{2}{3}$ går på 4."

Ved å sjå på tallinja, finn vi at $\frac{2}{3}$ går 6 gongar på 4. Altså er

$$4 : \frac{2}{3} = 6$$



Ein generell metode

Vi kan ikkje sjå på ei tallinje kvar gong vi skal dele med brøkar, så no skal vi komme fram til ein generell reknemetode ved igjen å bruke $4 : \frac{2}{3}$ som eksempel. For denne metoden bruker vi denne tydinga av divisjon:

$$4 : \frac{2}{3} = \text{"Talet vi må gonge } \frac{2}{3} \text{ med for å få 4."}$$

For å finne dette talet startar vi med å gonge $\frac{2}{3}$ med talet som gjer at produktet blir 1. Dette talet er *den omvende brøken* av $\frac{2}{3}$, som er $\frac{3}{2}$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

No gjenstår det berre å gonge med 4 for å få 4:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 4$$

For å få 4, må vi altså gonge $\frac{2}{3}$ med $\frac{3}{2} \cdot 4$. Dette betyr at

$$\begin{aligned} 4 : \frac{2}{3} &= \frac{3}{2} \cdot 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

4.10 Brøk delt på brøk

Når vi deler eit tal med ein brøk, gongar vi talet med den omvende brøken.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3 : \frac{2}{9} &= 3 \cdot \frac{9}{2} \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} : \frac{5}{8} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5} \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} : \frac{3}{10} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} \\ &= \frac{30}{15}\end{aligned}$$

Her bør vi også sjå at brøken kan forkortast:

$$\begin{aligned}\frac{30}{15} &= \frac{2 \cdot \cancel{15}}{\cancel{15}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Merk: Vi kan spare oss for store tal viss vi kansellerer faktorar undervegs i utrekningar:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} &= \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{3}} \\ &= 2\end{aligned}$$

4.9 Rasjonale og blanda tal

4.11 Rasjonale tal

Eit kvart tal som kan bli skriven som ein brøk med heiltals tellar og nemnar, er eit *rasjonalt tal*.

Merk

Rasjonale tal gir oss ei samlenemning for

- **Heital**

For eksempel $4 = \frac{4}{1}$.

- **Desimaltal med endeleg antal desimalar**

For eksempel $0,2 = \frac{1}{5}$.

- **Desimaltal med repeterande desimalmønster**

For eksempel $^1 0,08\bar{3} = \frac{1}{12}$.

¹ $\bar{3}$ indikerer at 3 fortsett i det uendelege. Ein annan måte å indikere dette på er å bruke symbolet \dots . Altså er $0,08\bar{3} = 0,08333333\dots$

4.12 Blanda tal

Om vi adderer eit heital med ein brøk der tellaren er mindre enn nemnaren, får vi eit *blanda tal*.

Eksempel 1

Tre forskjellige blanda tal:

$$2 + \frac{5}{7} \qquad 8 + \frac{2}{7} \qquad \frac{1}{10} + 4$$

Obs!

I mange bøker vil du finne tal som dei fra *Eksempel 1* over skrivne slik

$$2\frac{5}{7} \qquad 8\frac{2}{7} \qquad 4\frac{1}{10}$$

Eksempel 2

Skriv om brøken $\frac{17}{3}$ til eit blanda tal.

Answer

Vi legg merke til at tellaren er 17 og nemnaren er 3. Det største heiltalet vi kan gonge med 3 utan at produktet blir større enn 17, er 5. Altså kan vi skrive

$$\begin{aligned}\frac{17}{3} &= \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} \\ &= \frac{5 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} + \frac{2}{3} \\ &= 5 + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Eksempel 3

Skriv om $3 + \frac{4}{5}$ til ein brøk.

Answer

Vi har at $3 = \frac{3}{1}$, altså er

$$3 + \frac{4}{5} = \frac{3}{1} + \frac{4}{5}$$

Vidare har vi at¹

$$\begin{aligned}\frac{3}{1} + \frac{4}{5} &= \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5} \\ &= \frac{15}{5} + \frac{4}{5} \\ &= \frac{19}{5}\end{aligned}$$

¹Sjå regel 4.5.

Oppgaver for kapittel 4

4.1.1

Finn verdien til brøken.

- a) $\frac{18}{3}$ b) $\frac{20}{4}$ c) $\frac{10}{5}$ d) $\frac{42}{6}$ e) $\frac{63}{7}$ f) $\frac{32}{8}$

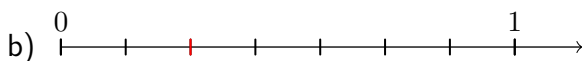
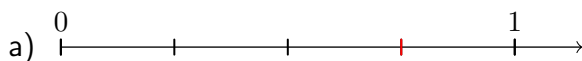
4.1.2

Finn verdien til brøken. Bruk kalkulator om nødvendig.

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{3}{5}$ g) $\frac{4}{5}$
f) $\frac{3}{2}$ g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{5}{2}$ i) $\frac{5}{6}$ j) $\frac{7}{5}$ k) $\frac{11}{4}$ l) $\frac{7}{10}$

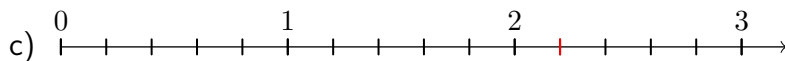
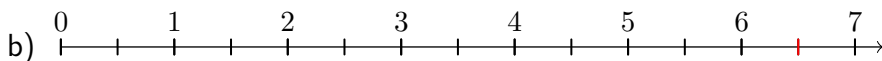
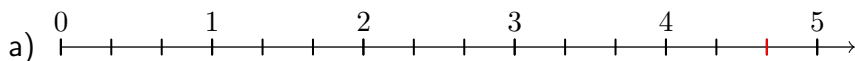
4.1.3

Skriv brøken markert med raudt.



4.1.4

Skriv brøken markert med raudt.



4.2.1

Eksempel

$$\frac{9}{8} \text{ utvida med } 3 = \frac{9 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{27}{24}$$

Utvid

a) $\frac{10}{3}$ med 2. b) $\frac{3}{4}$ med 3. c) $\frac{3}{7}$ med 4.

c) $\frac{9}{8}$ med 5. d) $\frac{9}{5}$ med 6. e) $\frac{11}{4}$ med 7.

4.2.2

Utvid

a) $\frac{7}{3}$ til ein brøk med 15 som nemnar.

b) $\frac{3}{4}$ til ein brøk med 32 som nemnar.

c) $\frac{10}{9}$ til ein brøk med 63 som nemnar.

4.2.3

Eksempel

$$\frac{10}{8} \text{ forkorta med } 2 = \frac{10 : 2}{8 : 2} = \frac{5}{4}$$

Forkort

a) $\frac{14}{26}$ med 2. b) $\frac{15}{12}$ med 3. c) $\frac{20}{16}$ med 4.

c) $\frac{35}{50}$ med 5. d) $\frac{54}{18}$ med 6. e) $\frac{49}{63}$ med 7.

4.2.4

Forkort

a) $\frac{27}{12}$ til en brøk med 4 som nemnar.

b) $\frac{36}{20}$ til en brøk med 5 som nemnar.

c) $\frac{18}{63}$ til en brøk med 7 som nemnar.

4.3.1

Rekn ut.

a) $\frac{4}{3} + \frac{6}{3}$

b) $\frac{5}{4} + \frac{9}{4}$

c) $\frac{1}{6} + \frac{10}{6}$

d) $\frac{8}{7} + \frac{2}{7}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

4.3.2

Rekn ut.

a) $\frac{10}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

c) $\frac{11}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$

4.3.3

Rekn ut.

a) $\frac{5}{3} - \frac{4}{3}$

b) $\frac{9}{4} - \frac{7}{4}$

c) $\frac{11}{6} - \frac{1}{6}$

d) $\frac{11}{7} - \frac{4}{7}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

4.3.4

Rekn ut.

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}$

b) $\frac{11}{7} - \frac{2}{7} - \frac{4}{7}$

c) $\frac{10}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$

4.3.5

Rekn ut.

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{6}$

b) $\frac{5}{7} + \frac{4}{9}$

c) $\frac{10}{3} + \frac{7}{8}$

d) $\frac{7}{5} + \frac{9}{4}$

e) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

4.3.6

Rekn ut.

a) $\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

b) $\frac{5}{4} - \frac{4}{9}$

c) $\frac{10}{9} - \frac{1}{8}$

d) $\frac{4}{5} - \frac{1}{4}$

e) $\frac{5}{2} - \frac{5}{3}$

4.3.7

Rekn ut.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

b) $\frac{10}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{5}$

c) $\frac{9}{2} - \frac{2}{7} - \frac{1}{8}$

4.4.1

Rekn ut.

a) $\frac{4}{3} \cdot 5$ b) $\frac{5}{7} \cdot 8$ c) $\frac{9}{10} \cdot 6$ d) $\frac{8}{7} \cdot 10$ e) $\frac{3}{2} \cdot 7$

f) $7 \cdot \frac{4}{3}$ g) $5 \cdot \frac{7}{3}$ h) $3 \cdot \frac{10}{7}$ i) $1 \cdot \frac{5}{11}$ j) $8 \cdot \frac{9}{17}$

4.5.1

Rekn ut.

a) $\frac{4}{3} : 5$ b) $\frac{5}{7} : 8$ c) $\frac{9}{10} : 6$ d) $\frac{8}{7} : 10$ e) $\frac{3}{2} : 7$

f) $\frac{9}{10} : 11$ g) $\frac{1}{5} : 12$ h) $\frac{9}{10} : 29$ i) $\frac{8}{9} : 51$ j) $\frac{3}{2} : 79$

4.6.1

Rekn ut.

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{9}$ b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3}$ d) $\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}$ e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$

f) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ g) $\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}$ h) $\frac{10}{3} \cdot \frac{8}{3}$ i) $\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{7}$ j) $\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{6}$

4.7.1

Rekn ut.

a) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4}$ b) $\frac{17}{8} \cdot \frac{9}{4}$ c) $\frac{23}{8} \cdot \frac{2}{4}$ d) $\frac{7}{81} \cdot \frac{3}{8}$ e) $\frac{7}{8} \cdot \frac{29}{41}$

4.8.1

Kanseller så mange faktorer som mulig i brøken.

a) $\frac{3 \cdot 11 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 3}$ b) $\frac{5 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 8 \cdot 12}$ c) $\frac{6 \cdot 10}{6 \cdot 9 \cdot 10}$ d) $\frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 3}$

4.8.2

Forkort brøken så mykje som mogleg.

a) $\frac{28}{16}$ b) $\frac{18}{42}$ c) $\frac{24}{36}$ d) $\frac{56}{49}$ e) $\frac{25}{50}$ f) $\frac{21}{14}$

4.8.3

Eksempel 1

$$\frac{3}{4} \cdot 20 = \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$$

Utnytt at nemnaren er ein faktor i talet det blir gonga med, og rekn ut

a) $\frac{7}{3} \cdot 21$ b) $\frac{9}{5} \cdot 30$ c) $\frac{10}{7} \cdot 49$ d) $\frac{8}{9} \cdot 18$ e) $\frac{5}{4} \cdot 24$
f) $8 \cdot \frac{3}{2}$ g) $35 \cdot \frac{5}{7}$ h) $63 \cdot \frac{2}{9}$ i) $48 \cdot \frac{1}{6}$ j) $27 \cdot \frac{7}{3}$

4.9.1

Rekn ut.

a) $4 : \frac{9}{8}$ b) $7 : \frac{3}{5}$ c) $10 : \frac{7}{3}$ d) $5 : \frac{4}{5}$ e) $2 : \frac{5}{11}$

4.9.2

Rekn ut, og forkort brøken så mykje som mogleg.

a) $4 : \frac{8}{9}$ b) $7 : \frac{21}{5}$ c) $10 : \frac{5}{3}$ d) $5 : \frac{5}{4}$ e) $2 : \frac{8}{11}$

4.9.3

Rekn ut.

a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ b) $\frac{8}{9} : \frac{5}{3}$ c) $\frac{10}{3} : \frac{7}{3}$ d) $\frac{1}{5} : \frac{4}{7}$ e) $\frac{6}{5} : \frac{3}{11}$

4.9.4

Eksempel

$$\frac{3}{4} : \frac{15}{8} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2}{\cancel{3} \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Merk: Her har vi valgt å primtalsfaktorisere alle tala, men ein treng ikkje gjere det viss ein ser kva faktorar som er felles for tellarane og nemnarane.

Utnytt at tellarane og nemnarane har felles faktorar, og rekn ut.

a) $\frac{7}{9} : \frac{21}{12}$

b) $\frac{35}{24} : \frac{7}{18}$

c) $\frac{84}{55} : \frac{42}{77}$

Gruble 3

Bruk [regel 4.7](#) og [regel 4.8](#) til å fylle inn heltallet som mangler der det står " _".

a) Å gange med $\frac{1}{2}$ er det samme som å dele med _.

b) Å gange med $\frac{1}{4}$ er det samme som å dele med _.

c) Å gange med $\frac{1}{5}$ er det samme som å dele med _.

Se tilbake til svarene for oppgave **4.1.2a) - g)**. Fyll inn heltallet som mangler der det står " _".

d) Å gange med 0,5 er det samme som å dele med _.

e) Å gange med 0,25 er det samme som å dele med _.

f) Å gange med 0,2 er det samme som å dele med _.

g) Å gange med 0,75 er det samme som å gange med _ og dele med _.

h) Å gange med 0,4 er det samme som å gange med _ og dele med _.

i) Å gange med 0,6 er det samme som å gange med _ og dele med _.

j) Å gange med 0,8 er det samme som å gange med _ og dele med _.

Gruble 4

Se tilbake til [regel 4.10](#) og svarene for oppgave 4.1.2a) - g). Fyll inn heltallet som mangler der det står " _".

- (a) Å dele med 0,5 er det samme som å gange med _.
- (b) Å dele med 0,25 er det samme som å gange med _.
- (c) Å dele med 0,2 er det samme som å gange med _.
- (d) Å dele med 0,75 er det samme som å gange med _ og dele med _.
- (e) Å dele med 0,4 er det samme som å gange med _ og dele med _.
- (f) Å dele med 0,6 er det samme som å gange med _ og dele med _.
- (g) Å dele med 0,8 er det samme som å gange med _ og dele med _.

Gruble 5

Utnytt primtalsfaktorisering til å finne fellesnevner, og regn ut

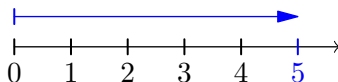
a) $\frac{5}{204} + \frac{7}{198}$ b) $\frac{11}{350} + \frac{17}{315}$

Kapittel 5

Negative tal

5.1 Introduksjon

Vi har tidlegare sett at (for eksempel) talet 5 på ei tallinje ligg 5 einarlengder til høgre for 0.

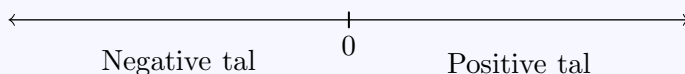


Men kva om vi går andre veien, altså mot venstre? Dette spørsmålet svarer vi på ved å innføre *negative tal*.

5.1 Positive og negative tal

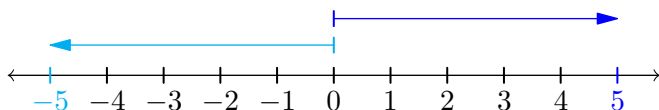
På ei tallinje gjeld følgande:

- Tal plassert *til høgre* for 0 er positive tal.
- Tal plassert *til venstre* for 0 er negative tal.



I praksis kan vi ikkje heile tida bruke ei tallinje for å avgjere om eit tal er negativt eller positivt, og derfor bruker vi eit symbol for å vise at tal er negative. Dette symbolet er rett og slett $-$, altså det same symbolet som vi bruker ved subtraksjon. 5 er med dét eit positivt tal, mens -5 er eit negativt tal. På tallinja er det slik at

- 5 ligg 5 einarlengder *til høgre* for 0.
- -5 ligg 5 einarlengder *til venstre* for 0.



Den store forskjellen på 5 og -5 er altså på kva side av 0 tala ligg. Da 5 og -5 har same avstand til 0, seier vi at 5 og -5 har same *lengde*.

5.2 Lengde (talverdi/absoluttverdi)

Lengda til eit tal skrivast ved symbolet $| |$.

Lengda til eit positivt tal er verdien til talet.

Lengda til eit negativt tal er verdien til det positive talet med same siffer.

Eksempel 1

$$|27| = 27$$

Eksempel 2

$$|-27| = 27$$

Forteikn

Forteikn er ei samlenemning for $+$ og $-$. 5 har $+$ som forteikn og -5 har $-$ som forteikn.

5.2 Dei fire rekneartane med negative tal

Ved innføringa av negative tal får dei fire rekneartane nye sider som vi må sjå på trinnvis. Når vi adderer, subtraherer, multipliserer eller dividerer med negative tal vil vi ofte, for å gjere det meir tydeleg, skrive negative tal med parentes rundt. Da skriv vi for eksempel -4 som (-4) .

Addisjon

Når vi adderte i [seksjon 2.1](#) såg vi på $+$ som vandring *mot høgre*. Negative tal gjer at vi må utvide omgrepet for $+$:

$+$ "Like langt og i *same* retning som"

La oss sjå på reknestykket

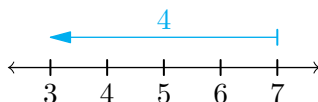
$$7 + (-4)$$

Vår utvida definisjon av $+$ seier oss no at

$$7 + (-4) = "7 \text{ og like langt og i } \textit{same} \text{ retning som } (-4)"$$

(-4) har lengde 4 og retning *mot venstre*. Vårt reknestykke seier altså at vi skal starte på 7, og deretter gå lengda 4 *mot venstre*.

$$7 + (-4) = 3$$



5.3 Addisjon med negative tal

Å addere eit negativt tal er det same som å subtrahere talet med same talverdi.

Eksempel 1

$$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

Eksempel 2

$$-8 + (-3) = -8 - 3 = -11$$

Merk

regel 2.1 erklærer at addisjon er kommutativ. Dette er gjeldande også ved innføringa av negative tal, for eksempel er

$$7 + (-3) = 4 = -3 + 7$$

Subtraksjon

I seksjon 2.2 såg vi på $-$ som vandring *mot venstre*. Også tydinga av $-$ må utvidast når vi jobbar med negative tal:

$-$ "Like langt og i *motsett* retning som"

La oss sjå på reknestykket

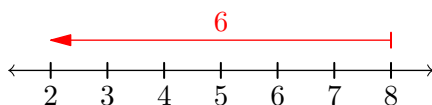
$$2 - (-6)$$

Med vår utvida tyding av $-$, kan vi skrive

$$2 - (-6) = "2 \text{ og like langt og i } \textit{motsett} \text{ retning som } (-6)"$$

-6 har lengde 6 og retning *mot venstre*. Når vi skal gå same lengde, men i *motsett* retning, må vi altså gå lengda 6 *mot høgre*¹. Dette er det same som å addere 6:

$$2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$



5.4 Subtraksjon med negative tal

Å subtrahere eit negativt tal er det same som å addere det positive talet med same talverdi.

Eksempel 1

$$11 - (-9) = 11 + 9 = 20$$

¹Vi minner enda ein gong om at raudfarga på pila indikerer at ein skal vandre fra pil-spissen til andre enden.

Eksempel 2

$$-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$$

Multiplikasjon

I [seksjon 2.3](#) introduserte vi gonging med positive heiltal som gjentatt addisjon. Med våre utvida omgrep av addisjon og subtraksjon, kan vi no også utvide omgrepet multiplikasjon:

5.5 Multiplikasjon med positive og negative tal

- Gonging med eit positivt heiltal er det same som gjentatt addisjon.
- Gonging med eit negativt heiltal er det same som gjentatt subtraksjon.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= \text{"Like langt og i same retning som 2, 3 gonger"} \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} (-2) \cdot 3 &= \text{"Like langt og i same retning som } (-2), 3 \text{ gonger"} \\ &= -2 - 2 - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-3) &= \text{"Like langt og i motsett retning som 2, 3 gonger"} \\ &= -2 - 2 - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 4

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (-4) &\equiv \text{"Like langt og i motsett retning som } -3, 4 \text{ gonger"} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Multiplikasjon er kommutativ

Eksempel 2 og *Eksempel 3* på side 85 illustrerer at [regel 2.2](#) også er gjeldende ved innføringa av negative tal:

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2)$$

Det blir tungvint å rekne gonging som gjentatt addisjon/subtraksjon kvar gong vi har eit negativt tal involvert, men som ein direkte konsekvens av [regel 5.5](#) kan vi lage oss følgjande to reglar:

5.6 Gonging med negative tal I

Produktet av eit negativt og eit positivt tal er eit negativt tal.

Talverdien til faktorane gonga saman gir talverdien til produktet.

Eksempel 1

Rekn ut $(-7) \cdot 8$

Answer

Sidan $7 \cdot 8 = 56$, er $(-7) \cdot 8 = -56$

Eksempel 2

Rekn ut $3 \cdot (-9)$.

Answer

Sidan $3 \cdot 9 = 27$, er $3 \cdot (-9) = -27$

5.7 Gonging med negative tal II

Produktet av to negative tal er eit positivt tal.

Talverdien til faktorane gonga saman gir verdien til produktet.

Eksempel 1

$$(-5) \cdot (-10) = 5 \cdot 10 = 50$$

Eksempel 2

$$(-2) \cdot (-8) = 2 \cdot 8 = 16$$

Divisjon

Definisjonen av divisjon (sjå [seksjon 2.4](#)), kombinert med det vi veit om multiplikasjon med negative tal, gir oss no dette:

$$-18 : 6 = \text{"Talet eg må gonge 6 med for å få } -18\text{"}$$

$$6 \cdot (-3) = -18, \text{ altså er } -18 : 6 = -3$$

$$42 : (-7) = \text{"Talet eg må gonge } -7 \text{ med for å få } 42\text{"}$$

$$(-7) \cdot (-8) = 42, \text{ altså er } 42 : (-7) = -8$$

$$-45 : (-5) = \text{"Talet eg må gonge } -5 \text{ med for å få } -45\text{"}$$

$$(-5) \cdot 9 = -45, \text{ altså er } -45 : (-5) = 9$$

5.8 Divisjon med negative tal

Divisjon mellom eit positivt og eit negativt tal gir eit negativt tal.

Divisjon mellom to negative tal gir eit positivt tal.

Talverdien til dividenden delt med talverdien til divisoren gir talverdien til kvotienten.

Eksempel 1

$$-24 : 6 = -4$$

Eksempel 2

$$24 : (-2) = -12$$

Eksempel 3

$$-24 : (-3) = 8$$

Eksempel 4

$$\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Eksempel 5

$$\frac{-10}{7} = -\frac{10}{7}$$

5.3 Negative tal som mengde

Obs! Denne tolkinga av negative tal blir først brukt i [seksjon 9.2](#), som er ein seksjon nokre leserar utan tap av forståing kan hoppe over.

Så langt har vi sett på negative tal ved hjelp av tallinjer. Å sjå på negative tal ved hjelp av mengder er i første omgang vanskeleg, fordi vi har likestilt mengder med antal, og negative antal gir ikkje meining! For å skape ei forståing av negative tal ut ifrå eit mengdeperspektiv, nyttar vi det vi skal kalle *vektprinsippet*. Dette inneber at vi ser på tala som krefter. Dei positive tala er antal krefter som verkar nedover og dei negative tala er antal krefter som verkar oppover¹. Svara på reknestykker med positive og negative tal kan ein da sjå på som resultatet av ei veiing av dei forskjellige mengdene. Slik vil altså eit positivt tal og eit negativt tal med same talverdi *utlikne* kvarandre.

5.9 Negative tal som mengde

Negative tal vil vi indikere som ei lyseblå mengde:

$$\boxed{} = -1$$

Eksempel

$$1 + (-1) = 0$$

$$\boxed{} + \boxed{} = 0$$

¹Frå verkelegheita kan ein sjå på dei positive og negative tala som ballongar fylt med høvesvis luft og helium. Ballongar fylt med luft verkar med ei kraft nedover (dei dett), mens heliumballongar verkar med ei kraft oppover (dei stig).

Oppgaver for kapittel 5

5.1.1

Eksempel

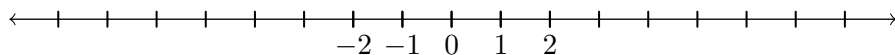
8 har retning mot høyre og lengde 8.

-7 har retning mot venstre og lengde 7.

Fyll inn ordene som mangler.

- a) 9 har retning mot og lengde
- b) 4 har retning mot og lengde
- c) -3 har retning mot og lengde
- d) 12 har retning mot og lengde
- e) -11 har retning mot og lengde
- f) -25 har retning mot og lengde

5.1.2



Tegn av tallinja over og plasser tallene.

- a) 3 b) -4 c) -8 d) 7 e) -3 f) 5 g) -5

5.1.3

Se tilbake på tallene fra [oppgave 5.1.2](#). Skriv ned hvilke av tallene som er

- a) positive tall b) negative tall

5.2.1

Regn ut.

- a) $8 + (-7)$ b) $12 + (-5)$ c) $9 + (-3)$ d) $7 + (-7)$
e) $-5 + 8$ f) $-9 + 10$ g) $-1 + 11$ h) $-4 + 9$

5.2.2

Regn ut.

- a) $3 + (-19)$ b) $7 + (-15)$ c) $-20 + (-3)$ d) $7 + (-7)$
e) $-4 + (-19)$ f) $-2 + (-15)$ g) $-8 + 5$ h) $-6 + 6$

5.2.3

Regn ut.

- a) $8 - (-7)$ b) $12 - (-5)$ c) $9 - (-3)$ d) $7 - (-7)$
e) $-5 - 8$ f) $-9 - 10$ g) $-1 - 11$ h) $-4 - 9$

5.2.4

Regn ut.

- a) $3 - (-19)$ b) $7 - (-15)$ c) $-20 - (-3)$ d) $7 - (-7)$
e) $-4 - (-19)$ f) $-2 - (-15)$ g) $-8 - 5$ h) $-6 - 6$

5.2.5

Regn ut.

- a) $3 \cdot (-4)$ b) $5 \cdot (-10)$ c) $7 \cdot (-9)$ d) $4 \cdot (-6)$
e) $(-7) \cdot 8$ f) $(-3) \cdot 9$ g) $(-1) \cdot 12$ h) $(-10) \cdot 4$
i) $(-3) \cdot (-7)$ j) $(-5) \cdot (-5)$ k) $(-6) \cdot (-2)$ l) $(-8) \cdot (-9)$

5.2.6

Regn ut.

- a) $(-32) : 8$ b) $(-42) : 7$ c) $(-30) : 6$ d) $(-20) : 5$
e) $72 : (-9)$ f) $63 : (-7)$ g) $50 : (-10)$ h) $25 : (-5)$
i) $(-72) : (-9)$ j) $(-63) : (-7)$ k) $(-50) : (-10)$

Kapittel 6

Utrekningsmetodar

6.1 Addisjon

Oppstilling

Denne metoden baserer seg på plassverdisystemet, der ein trinnvis reknar ut summen av einarane, tiarane, hundrerane, o.l.

Eksempel 1

$$\begin{array}{r} 234 \\ + 612 \\ \hline = 846 \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{r} 273 \\ + 86 \\ \hline = 359 \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{r} 85 \\ + 79 \\ \hline = 164 \end{array}$$

Eksempel 4

$$\begin{array}{r} 397,2 \\ + 85,9 \\ \hline = 482,1 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

$$\begin{array}{r} 234 \\ + 612 \\ \hline \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r} 234 \\ + 612 \\ \hline 46 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 234 \\ + 612 \\ \hline = 846 \end{array}$$

(c)

a) Vi legg saman einarane: $4 + 2 = 6$

b) Vi legg saman tiarane: $3 + 1 = 4$

c) Vi legg saman hundra: $2 + 6 = 8$

Eksempel 2 (forklaring)

$$\begin{array}{r} 273 \\ + 86 \\ \hline \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r} 1273 \\ + 86 \\ \hline \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 1273 \\ + 86 \\ \hline = 359 \end{array}$$

(c)

- a) Vi legg saman einarane: $3 + 6 = 9$
- b) Vi legg saman tiarane: $7 + 8 = 15$. Sidan 10 tiarar er det same som 100, legg vi til 1 på hundreplassen, og skriv opp dei resterande 5 tiarane på tiarplassen.
- c) Vi legg saman hundra: $1 + 2 = 3$.

Språkboksen

Det å skrive 1 på neste sifferplass kallast "å skrive 1 i mente".

6.2 Subtraksjon

Oppstilling

Subtraksjon med oppstilling baserer seg på plassverdisystemet, der ein trinnvis reknar differansen mellom einarane, tiarane, hundra, o.l. Metoden tar også utgangspunkt i eit mengdeperspektiv, og tillet derfor ikkje differansar med negativ verdi (sjå forklaringa til *Eksempel 2*).

Eksempel 1

$$\begin{array}{r} 789 \\ - 324 \\ \hline = 465 \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{r} 93 \\ - 57 \\ \hline = 36 \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{r} 504 \\ - 478 \\ \hline = 86 \end{array}$$

Eksempel 4

$$\begin{array}{r} 206,1 \\ - 317 \\ \hline = 174,4 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

$$\begin{array}{r} 789 \\ - 324 \\ \hline \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r} 789 \\ - 324 \\ \hline \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 789 \\ - 324 \\ \hline \end{array}$$

(c)

(a) Vi finn differansen mellom einarane: $9 - 4 = 5$

(b) Vi finn differansen mellom tiarane: $8 - 2 = 6$.

(c) Vi finn differansen mellom hundra: $7 - 3 = 4$.

Eksempel 2 (forklaring)

$$\begin{array}{r}
 \overset{10}{\cancel{9}} \overset{10}{3} \\
 - 5 \overset{10}{7} \\
 \hline
 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overset{10}{\cancel{9}} \overset{10}{3} \\
 - \overset{10}{5} \overset{10}{7} \\
 \hline
 \overset{10}{3} \overset{10}{6}
 \end{array}$$

(a) (b)

- (a) Vi merkar oss at 7 er større enn 3, derfor tar vi 1 tiar frå dei 9 på tiarplassen. Dette markerer vi ved å sette ein strek over 9. Så finn vi differansen mellom einarane: $13 - 7 = 6$
- (b) Sidan vi tok 1 frå dei 9 tiarane, er der no berre 8 tiarar. Vi finn differansen mellom tiarane: $8 - 5 = 3$.

Tabellmetoden

Tabellmetoden for subtraksjon tek utgangspunkt i at subtraksjon er ein omvend operasjon av addisjon. For eksempel, svaret på spørsmålet "Kva er $789 - 324$?" er det same som svaret på spørsmålet "Kor mykje må eg legge til på 324 for å få 789?". Med tabellmetoden følg du ingen spesiell regel underveis, men velg sjølv talla du meiner passar best for å nå målet.

Eksempel 1

$$789 - 324 = 465$$

| | |
|-----|-----|
| | 324 |
| 6 | 330 |
| 70 | 400 |
| 389 | 789 |
| 465 | |

Eksempel 2

$$83 - 67 = 16$$

| | |
|----|----|
| | 67 |
| 3 | 70 |
| 13 | 83 |
| 16 | |

Eksempel 3

$$564 - 478 = 86$$

| | |
|----|-----|
| | 478 |
| 2 | 480 |
| 20 | 500 |
| 64 | 564 |
| 86 | |

Eksempel 4

$$206,1 - 31,7 = 174,4$$

| | |
|-------|-------|
| | 31,7 |
| 0,3 | 32 |
| 70 | 102 |
| 104,1 | 206,1 |
| 174,4 | |

Eksempel 1 (forklaring)

$$789 - 324 = 465$$

| | |
|--|-----|
| | 324 |
| | |
| | |

(a)

| | |
|---|-----|
| | 324 |
| 6 | 330 |
| | |
| | |

(b)

| | |
|----|-----|
| | 324 |
| 6 | 330 |
| 70 | 400 |
| | |
| | |

(c)

| | |
|-----|-----|
| | 324 |
| 6 | 330 |
| 70 | 400 |
| 389 | 789 |
| | |
| | |

(d)

| | |
|-----|-----|
| | 324 |
| 6 | 330 |
| 70 | 400 |
| 389 | 789 |
| 465 | |
| | |
| | |

(e)

- (a) Vi starter med 324.
- (b) Vi legg til 6, og får $324 + 6 = 330$
- (c) Vi legg til 70, og får $70 + 330 = 400$
- (d) Vi legg til 389, og får $389 + 400 = 789$. Da er vi framme på 789.
- (e) Vi summerer tala vi har lagt til: $6 + 70 + 389 = 465$

6.3 Ganging

Ganging med 10, 100, 1 000 osv.

6.1 Å gonge heiltal med 10, 100 osv.

- Når ein gongar eit heiltal med 10, får ein svaret ved å legge til sifferet 0 bak heiltalet.
- Når ein gongar eit heiltal med 100, får ein svaret ved å legge til sifra 00 bak heiltalet.
- Det same mønsteret gjelder for talla 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$6 \cdot 10 = 60$$

$$79 \cdot 10 = 790$$

$$802 \cdot 10 = 8020$$

Eksempel 2

$$6 \cdot 100 = 600$$

$$79 \cdot 100 = 7900$$

$$802 \cdot 100 = 80200$$

Eksempel 3

$$6 \cdot 1\,000 = 6\,000$$

$$79 \cdot 10\,000 = 790\,000$$

$$802 \cdot 100\,000 = 80\,200\,000$$

6.2 Å gonge desimaltal med 10, 100 osv.

- Når ein gongar eit desimaltal med 10, får ein svaret ved å flytte komma en plass til høgre.
- Når ein gongar eit heiltal med 100, får ein svaret ved å flytte komma to plasser til høgre.
- Det same mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$7,9 \cdot 10 = 79, = 79$$

$$38,02 \cdot 10 = 380,2$$

$$0,57 \cdot 10 = 05,7 = 5,7$$

$$0,194 \cdot 10 = 01,94 = 1,94$$

Eksempel 2

$$7,9 \cdot 100 = 790, = 790$$

$$38,02 \cdot 100 = 3802, = 3\,802$$

$$0,57 \cdot 100 = 057, = 57$$

$$0,194 \cdot 100 = 019,4 = 19,4$$

Eksempel 3

$$7,9 \cdot 1\,000 = 7900, = 7\,900$$

$$38,02 \cdot 10\,000 = 380200, = 380\,200$$

$$0,57 \cdot 100\,000 = 57000, = 57\,000$$

Merk

[regel 6.1](#) er berre eit spesialtilfelle av [regel 6.2](#). For eksempel, å bruke [regel 6.1](#) på reknestykket $7 \cdot 10$ gir same resultat som å bruke [regel 6.2](#) på reknestykket $7,0 \cdot 10$.

Å gonge tall med 10, 100 osv. (forklaring)

Titalsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tidelar, hundredelar og tusendelar osv. (sjå [regel 1.2](#)). Når ein gongar eit tall med 10, vil alle einarane i talet bli til tiarar, alle tiarar bli til hundra osv. Kvart siffer forskyvast altså éin plass mot venstre. Tilsvarende forskyvast kvart siffer to plassar mot venstre når ein gongar med 100, tre plassar når ein gongar med 1 000 osv.

Utvida form

Gonging på utvida form bruker vi for å rekne multiplikasjon mellom fleirsifra tall. Metoden baserer seg på distributiv lov (sjå [regel 3.2](#)).

Eksempel 1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | · | 3 | = | 7 | 2 |
| 2 | 0 | · | 3 | = | 6 | 0 |
| 4 | · | 3 | = | 1 | 2 | |
| | | | | | 7 | 2 |

Eksempel 2

$$279 \cdot 34 = 9486$$

| | | |
|--------------------------------|------------------------------|------|
| $200 \cdot 30 = 6000$ | $200 \cdot 4 = 800$ | 8370 |
| $70 \cdot 30 = 2100$ | $70 \cdot 4 = 280$ | 1116 |
| $9 \cdot 30 = \underline{270}$ | $9 \cdot 4 = \underline{36}$ | 9486 |
| 8370 | 1116 | |

Eksempel 1 (forklaring)

24 kan skrivast som $20 + 4$, altså er

$$24 \cdot 3 = (20 + 4) \cdot 3$$

Av [regel 3.2](#) har vi at

$$\begin{aligned}(20 + 4) \cdot 3 &= 20 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \\ &= 60 + 12 \\ &= 72\end{aligned}$$

Eksempel 2 (forklaring)

Vi har at

$$279 = 200 + 70 + 9$$

$$34 = 30 + 4$$

Altså er

$$279 \cdot 34 = (200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4)$$

Vidare er

$$\begin{aligned}(200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4) &= 200 \cdot 30 + 70 \cdot 30 + 9 \cdot 30 + 200 \cdot 4 + 70 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \\ &= 9486\end{aligned}$$

Kompaktmetoden

Kompaktmetoden bygger på dei same prinsippa som gonging på utvida form, men har ein skrivemåte som gjer utrekninga kortare.

Eksempel 1

$$279 \cdot 34 = 9486$$

$$\begin{array}{r} ^2 ^3 \\ ^2 ^3 \\ 886 \\ ^2 ^2 \\ \hline 617 \\ 9486 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

Vi startar med å gonge sifra i 279 enkeltvis med 4:

- $9 \cdot 4 = 36$, da skriv vi 6 på einarlassen og 3 i mente.
- $7 \cdot 4 = 28$, da skriv vi 8 på tiarlassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 4 = 8$, da skriv vi 8 på hundrerlassen.

Så gongar vi sifra i 279 enkeltvis med 30. Dette kan forenklast til å gonge med 3, så lenge vi plasserer sifra én plass forskyvde til venstre i forhold til da vi gonga med 4:

- $9 \cdot 3 = 27$, da skriv vi 7 på tiarlassen og 2 i mente.
- $7 \cdot 3 = 21$, da skriv vi 1 på hundrerlassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 3 = 6$, da skriv vi 6 på tusenlassen.

6.4 Divisjon

Deling med 10, 100, 1 000 osv.

6.3 Deling med 10, 100, 1 000 osv.

- Når ein deler eit desimaltal med 10, får ein svaret ved å flytte komma en plass til venstre.
- Når ein deler eit desimaltal med 10, får ein svaret ved å flytte komma to plasser til venstre.
- Det same mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}200 : 10 &= 200,0 : 10 \\&= 20,00 \\&= 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}45 : 10 &= 45,0 : 10 \\&= 4,50 \\&= 4,5\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}200 : 100 &= 200,0 : 100 \\&= 2,000 \\&= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}45 : 100 &= 45,0 : 100 \\&= 0,450 \\&= 0,45\end{aligned}$$

Eksempel 3

$$143,7 : 10 = 14,37$$

$$143,7 : 100 = 1,437$$

$$143,7 : 1\,000 = 0,1437$$

$$93,6 : 10 = 9,36$$

$$93,6 : 100 = 0,936$$

$$93,6 : 1\,000 = 0,0936$$

Deling med 10, 100, 1 000 osv. (forklaring)

Titalsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tideler, hundredeler og tusendeler osv (sjå [regel 1.2](#)). Når ein deler eit tall med 10, vil alle einare i tallet bli til tidelar, alle tiarar bli til einarar osv. Kvart siffer forskyvast altså éin plass mot høgre. Tilsvarende forskyvast kvart siffer to plassar mot høgre når ein deler med 100, tre plassar når ein deler med 1 000 osv.

Oppstilling

Divisjon med oppstilling baserer seg på divisjon tolka som inndeling av mengder (sjå s.28)

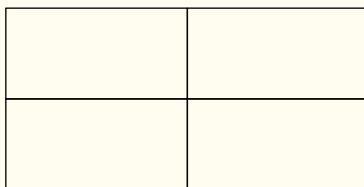
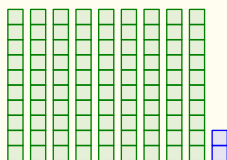
Eksempel 1

$$\begin{array}{r} 92 : 4 = 23 \\ \underline{8} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

Eksempel 2

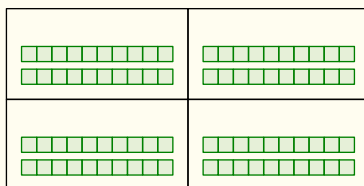
$$\begin{array}{r} 894 : 3 = 298 \\ \underline{6} \\ 29 \\ \underline{27} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

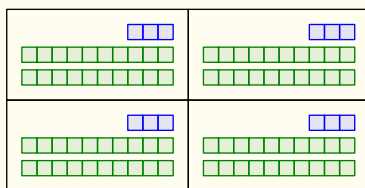


Figuren over illustrerer mengda 92, som vi skal dele inn i 4 like store grupper.

- Vi startar med å fordele så mange av tiarane som mogleg. Av dei 9 tiarane, kan kvar gruppe få 2. Da har vi totalt fordelt $2 \cdot 4 = 8$ tiarar.



- Vi står no igjen med 1 tiar og 2 einarar, altså 12 einarar. Av dei 12 einarane, kan kvar gruppe få 3. Da har vi totalt fordelt $3 \cdot 4 = 12$ einarar.



- No er heile mengda 92 fordelt, og da er vi ferdige med utrekninga. I kvar gruppe endte vi opp med mengda 23.

Tabellmetoden

Tabellmetoden baserer seg på divisjon som omvend operasjon av ganging. For eksempel er svaret på spørsmålet "Kva er $76 : 4$ " det same som svaret på spørsmålet "Kva tal må eg gonge 4 med for å få 76?". På same vis som for tabellmetoden ved subtraksjon, er det opp til ein sjølv å velge passende tal for å nå målet.

Eksempel 1

$$92 : 4 = 23$$

| | | |
|-----|----|----|
| · 4 | | |
| 10 | 40 | 40 |
| 10 | 40 | 80 |
| 3 | 12 | 92 |
| 23 | | |

Eksempel 2

$$894 : 3 = 298$$

| | | |
|-----|-----|-----|
| · 3 | | |
| 200 | 600 | 600 |
| 30 | 90 | 690 |
| 30 | 90 | 780 |
| 30 | 90 | 870 |
| 8 | 24 | 894 |
| 298 | | |

Eksempel 3

$$894 : 3 = 298$$

| | | |
|-----|-----|-----|
| · 3 | | |
| 300 | 900 | 900 |
| -2 | -6 | 894 |
| 298 | | |

Merk: same reknestykke som i *Eksempel 2*, men ei anna utrekning.

Eksempel 1 (forklaring)

Sidan vi skal dele 92 med 4, gongar vi med 4 fram til vi når 92.

| | | |
|-----|----|----|
| · 4 | | |
| 10 | 40 | 40 |
| | | |
| | | |

(a)

| | | |
|-----|----|----|
| · 4 | | |
| 10 | 40 | 40 |
| 10 | 40 | 80 |
| | | |
| | | |

(b)

| | | |
|-----|----|----|
| · 4 | | |
| 10 | 40 | 40 |
| 10 | 40 | 80 |
| 3 | 12 | 92 |
| | | |
| | | |

(c)

| | | |
|-----|----|----|
| · 4 | | |
| 10 | 40 | 40 |
| 10 | 40 | 80 |
| 3 | 12 | 92 |
| 23 | | |
| | | |

(d)

- (a) Vi gongar 10 med 4, som er lik 40. Da har vi så langt komme til 40.
- (b) Vi gongar 10 med 4, som er lik 40. Da har vi så langt komme til $40 + 40 = 80$.
- (c) Vi gongar 3 med 4, som er lik 12. Da har vi komme til $80 + 12 = 92$, som var målet.
- (d) Vi legg saman tala vi gonga med, og får $10 + 10 + 3 = 23$.

Tips

Det kan vere lurt å sjå tilbake på utrekningar gjort med tabellmetoden for å tenke over om ein kunne valt tal på ein betre måte. I *Eksempel 1* på side ?? kunne vi starta med å gonge med 20. Dette er omlag like enkelt som å gonge med 10, og det ville ha bringa oss nærare målet.

Divisjon med rest

Det er langt ifrå alltid at svaret ved divisjon blir eit heiltal. Ein måte å uttrykke slike svar på, er å ved å bruke omgrepet *rest*. Omgrepet er best forklart ved eksempel:

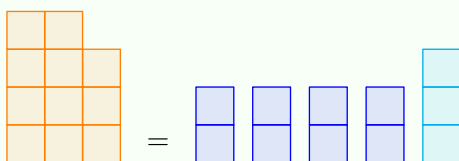
Eksempel 1

Rekn ut $11 : 4$ med rest.

Answer

Det største heiltallet vi kan gonge med 4 utan at produktet blir større enn 11, er 2. $2 \cdot 4 = 8$, så da har vi $11 - 8 = 3$ i rest.

$$11 = 2 \cdot 4 + 3$$



Dette betyr at

$$11 : 4 = 2 \text{ og } 3 \text{ i rest}$$

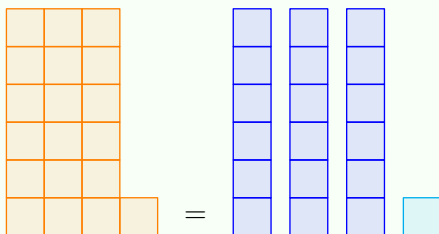
Eksempel 2

Rekn ut $19 : 3$ med rest.

Answer

Det største heiltallet vi kan gonge med 3 utan at produktet blir større enn 19, er 6. $6 \cdot 3 = 18$, så da har vi $19 - 18 = 1$ i rest.

$$19 = 6 \cdot 3 + 1$$



Dette betyr at

$$19 : 3 = 6 \text{ og } 1 \text{ i rest}$$

Eksempel 3

Rekn ut $94 : 4$ med rest.

Answer

Med oppstilling

$$94 : 4 = 23 \text{ og } 2 \text{ i rest}$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 4 | : | 4 | → | 2 | 3 |
| 8 | | | | | | |
| 1 | 4 | | | | | |
| 1 | 2 | | | | | |
| | 2 | | | | | |

Merk: Da det blir feil å bruke `=` i figuren over, har vi valt å bruke `→`.

Med tabellmetoden

$$94 : 4 = 23 \text{ og } 2 \text{ i rest}$$

| | | | |
|-----|----|----|--|
| · 4 | | | |
| 20 | 80 | 80 | |
| 3 | 12 | 92 | |
| 23 | | | |

$$94 - 92 = 2$$

Språkboksen

Viss vi utfører ein *modulo-operasjon*, finn vi resten i eit delestykke. Dette blir ofte vist ved forkortinga `mod`. For eksempel er

$$11 \bmod 4 = 3, \quad 19 \bmod 3 = 1$$

I tillegg til `mod`, blir også `%` og `//` brukt som symbol for denne operasjonen i programmeringsspråk.

Divisjon med blanda tal som svar

Eksempel 1

Rekn ut $11 : 4$. Skriv svaret som eit blanda tal.

Answer

$$11 : 4 = 2 \text{ og } 3 \text{ i rest} = 2 + \frac{3}{4}$$

Eksempel 2

Rekn ut $19 : 3$. Skriv svaret som eit blanda tal.

Answer

$$19 : 3 = 6 \text{ og } 1 \text{ i rest} = 6 + \frac{1}{3}$$

Eksempel 1 (forklaring)

Vi startar med å legge merke til at $4 = \frac{4}{1}$. Dette betyr at

$$11 : 4 = 11 : \frac{4}{1}$$

Av [regel 4.10](#) har vi at

$$11 : \frac{4}{1} = 11 \cdot \frac{1}{4}$$

Vidare er $11 = 2 \cdot 4 + 3$, og da er

$$11 \cdot \frac{1}{4} = (2 \cdot 4 + 3) \cdot \frac{1}{4}$$

Av [regel 3.2](#) har vi at

$$\begin{aligned} (2 \cdot 4 + 3) \cdot \frac{1}{4} &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Divisjon med desimaltal som svar

Eksempel 1

Rekn ut $11 : 4$. Oppgi svaret som desimaltal.

Answer

Med oppstilling

$$11 : 4 = 2,75$$

$$\begin{array}{r|l} 11 & : 4 = 2,75 \\ \hline 8 & \\ \hline 30 & \\ \hline 28 & \\ \hline 20 & \\ \hline 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Med tabellmetoden

$$11 : 4 = 2,75$$

| $\cdot 4$ | | |
|-----------|---|----|
| 2 | 8 | 8 |
| 0,5 | 2 | 10 |
| 0,25 | 1 | 11 |
| 2,75 | | |

Eksempel 1; oppstilling (forklaring)

Sidan vi deler med 4, er det snakk om å fordele 11 likt i 4 grupper.

- 8 av dei 11 einarane kan vi fordele likt i 4 grupper. Da har vi igjen 3 einarar. Dette er det same som 30 tidelar.
- 28 av dei 30 tidelane kan vi fordele likt i 4 grupper. Da har vi igjen 2 tidelar. Dette er det same som 20 hundredelar.
- 20 av dei 20 hundredelane kan vi fordele likt i 4 grupper.
- Heile mengda 11 er no fordelt, og da er vi ferdige med utrekninga.

6.5 Regning med tid

Sekunder, minutter og timer er organisert i grupper på 60:

$$1 \text{ minutt} = 60 \text{ sekund}$$

$$1 \text{ time} = 60 \text{ minutt}$$

Dette betyr at *overganger* oppstår i utregninger når vi når 60.

Eksempel 1

$$2 \text{ t } 25 \text{ min} + 10 \text{ t } 45 \text{ min} = 13 \text{ t } 10 \text{ min}$$

Utrekningsmetode 1

| | | |
|--------|------------|-------------|
| | | 10 t 45 min |
| 15 min | 15 min | 11 t 00 min |
| 10 min | 25 min | 11 t 10 min |
| 2 t | 2 t 25 min | 13 t 10 min |

Utrekningsmetode 2

| | | |
|-------|-------|-------|
| | | 10:45 |
| 00:15 | 00:15 | 11:00 |
| 00:10 | 00:25 | 11:10 |
| 02:00 | 02:25 | 13:10 |

Eksempel 2

$$14 \text{ t } 18 \text{ min} - 9 \text{ t } 34 \text{ min} = 4 \text{ t } 44 \text{ min}$$

Utrekningsmetode 1

| | |
|------------|-------------|
| | 9 t 34 min |
| 26 min | 10 t 00 min |
| 18 min | 10 t 18 min |
| 4 t | 14 t 00 min |
| 4 t 44 min | |

Utrekningsmetode 2

| | |
|-------|-------|
| | 09:34 |
| 00:26 | 10:00 |
| 00:18 | 10:18 |
| 04:00 | 14:18 |
| 04:44 | |

6.6 Avrunding og overslagsregning

Avrunding

Ved **avrunding** av et tall minker vi antall siffer forskjellige fra 0 i tallet. Videre kan man runde av til *nærmeste ener*, *nærmeste tier* og lignende.

Eksempel 1

Ved avrunding til *nærmeste tier* avrundes

- 1, 2, 3 og 4 *ned* til 0 fordi de er nærmere 0 enn 10.
- 6, 7, 8 og 9 *opp* til 10 fordi de er nærmere 10 enn 0.

5 avrundes også opp til 10.



Eksempel 2

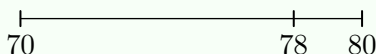
- **63 avrundet til nærmeste tier = 60**

Dette fordi 63 er nærmere 60 enn 70.



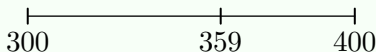
- **78 avrundet til nærmeste tier = 80**

Dette fordi 78 er nærmere 80 enn 70.



- **359 avrundet til nærmeste hundrer = 400**

Dette fordi 359 er nærmere 400 enn 300.



- **11,8 avrundet til nærmeste ener = 12**

Dette fordi 11,8 er nærmere 12 enn 11.



Overslagsregning

Det er ikke alltid vi trenger å vite svaret på regnestykker helt nøyaktig, ofte er det viktigere at vi fort kan avgjøre hva svaret *omtrent* er det samme som, aller helst ved hoderegning. Når vi finner svar som omtrent er riktige, sier vi at vi gjør et **overslag**. Et overslag innebærer at vi avrunder¹ tallene som inngår i et regnestykke slik at utregningen blir enklere.

Språkboksen

At noe er "omtrent det samme som" skriver vi ofte som "cirka" ("ca."). Tegnet for "cirka" er \approx .

Overslag ved addisjon og ganging

La oss gjøre et overslag på regnestykket

$$98,2 + 24,6$$

Vi ser at $98,2 \approx 100$. Skriver vi 100 istedenfor 98,2 i regnestykket vårt, får vi noe som er litt mer enn det nøyaktige svaret. Skal vi endre på 24,6 bør vi derfor gjøre det til et tall som er litt mindre. 24,6 er ganske nærme 20, så vi kan skrive

$$98,2 + 24,6 \approx 100 + 20 = 120$$

Når vi gjør overslag på tall som legges sammen, bør vi altså prøve å gjøre det ene tallet større (runde opp) og et tall mindre (runde ned).

Det samme gjelder også hvis vi har ganging, for eksempel

$$1\,689 \cdot 12$$

Her avrunder vi 12 til 10. For å "veie opp" for at svaret da blir litt mindre enn det egentlige, avrunder vi 1 689 opp til 1 700. Da får vi

$$1\,689 \cdot 12 \approx 1\,700 \cdot 10 = 17\,000$$

Overslag ved subtraksjon og deling

Skal et tall trekkes fra et annet, blir det litt annerledes. La oss gjøre et overslag på

$$186,4 - 28,9$$

¹Obs! Avrunding ved overslag trenger ikke å innebære avrunding til nærmeste tier og lignende.

Hvis vi runder 186,4 opp til 190 får vi et svar som er større enn det egentlige, derfor bør vi også trekke ifra noe. Det kan vi gjøre ved også å runde 28,9 oppover (til 30):

$$\begin{aligned}186,4 - 28,9 &\approx 190 - 30 \\ &= 160\end{aligned}$$

Samme prinsippet gjelder for deling:

$$145 : 17$$

Vi avrunder 17 opp til 20. Deler vi noe med 20 istedenfor 17, blir svaret mindre. Derfor bør vi også runde 145 oppover (til 150):

$$145 : 17 \approx 150 : 20 = 75$$

Overslagsrekning oppsummert

6.4 Overslagsregning

- Ved addisjon eller multiplikasjon mellom to tall, avrund gjerne et tall opp og et tall ned.
- Ved subtraksjon eller deling mellom to tall, avrund gjerne begge tall ned eller begge tall opp.

Eksempel

Rund av og finn omtrentlig svar for regnestykkene.

- a) $23,1 + 174,7$ b) $11,8 \cdot 107,2$
c) $37,4 - 18,9$ d) $1054 : 209$

Answer

- a) $32,1 + 174,7 \approx 30 + 170 = 200$
b) $11,8 \cdot 107,2 \approx 10 \cdot 110 = 1\,100$
c) $37,4 - 18,9 \approx 40 - 20 = 20$
d) $1\,054 : 209 \approx 1\,000 : 200 = 5$

Kommentar

Det finnes ingen konkrete regler for hva man *kan* eller ikke *kan* tillate seg av forenklinger når man gjør et overslag, det som er kalt [regel 6.4](#) er strengt tatt ikke en regel, men et nyttig tips.

Man kan også spørre seg hvor langt unna det faktiske svaret man kan tillate seg å være ved overslagsregning. Heller ikke dette er det noe fasitsvar på, men en grei føring er at overslaget og det faktiske svaret skal være av samme **størrelsesorden**. Litt enkelt sagt betyr dette at hvis det faktiske svaret har med tusener å gjøre, bør også overslaget ha med tusener å gjøre. Mer nøyaktig sagt betyr det av det faktiske svaret og ditt overslag bør ha samme tierpotens når de er skrevet på standardform¹.

¹Se [seksjon 6.7](#)

6.7 Standardform

Obs! Denne seksjonen tar utgangspunkt i at leseren er kjent med potenser, som vi ser på i [seksjon ??](#).

Vi kan utnytte [regel 6.2](#) og [regel 6.3](#), og det vi kan om potenser, til å skrive tall på **standardform**.

La oss se på tallet 6 700. Av [regel 6.2](#) vet vi at

$$6\,700 = 6,7 \cdot 1\,000$$

Og siden $1000 = 10^3$, er

$$6\,700 = 6,7 \cdot 1\,000 = 6,7 \cdot 10^3$$

$6,7 \cdot 10^3$ er 6 700 skrevet på standardform fordi

- 6,7 er større eller lik 1 og mindre enn 10.
- 10^3 er en potens med grunntall 10 og eksponent 3, som er et heltall.
- 6,7 og 10^3 er ganget sammen.

La oss også se på tallet 0,093. Av [regel 6.3](#) har vi at

$$0,093 = 9,3 : 100$$

Men å dele med 100 er det samme som å gange med 10^{-2} , altså er

$$0,093 = 9,3 : 100 = 9,3 \cdot 10^{-2}$$

$9,3 \cdot 10^{-2}$ er 0,093 skrevet på standardform fordi

- 9,3 er større eller lik 1 og mindre enn 10.
- 10^{-2} er en potens med grunntall 10 og eksponent -2 , som er et heltall.
- 9,3 og 10^{-2} er ganget sammen.

6.5 Standardform

Et tall skrevet som

$$a \cdot 10^n$$

hvor $1 \leq |a| < 10$ og n er et heltall, er et tall skrevet på standardform.

Eksempel 1

Skriv 980 på standardform.

Answer

$$980 = 9,8 \cdot 10^2$$

Eksempel 2

Skriv 0,00671 på standardform.

Answer

$$0,00671 = 6,71 \cdot 10^{-3}$$

Tips

For å skrive om tall på standardform kan du gjøre følgende:

1. Flytt komma slik at du får et tall som ligger mellom 0 og 10.
2. Gang dette tallet med en tierpotens som har eksponent med tallverdi lik antallet plasser du flyttet komma. Flyttet du komma mot venstre/høgre, er eksponenten positiv/negativ.

Eksempel 3

Skriv 9 761 432 på standardform.

Answer

1. Vi flytter komma 6 plasser til venstre, og får 9,761432
2. Vi ganger dette tallet med 10^6 , og får at

$$9\,761\,432 = 9,761432 \cdot 10^6$$

Eksempel 4

Skriv 0,00039 på standardform.

Answer

1. Vi flytter komma 4 plasser til høyre, og får 3,9.
2. Vi ganger dette tallet med 10^{-4} , og får at

$$0,00039 = 3,9 \cdot 10^{-4}$$

Oppgaver for kapittel 6

6.1.1

Regn ut.

- a) $12 + 84$ b) $36 + 51$ c) $328 + 571$ d) $242 + 56$

6.1.2

Regn ut.

- a) $19 + 84$ b) $86 + 57$ c) $529 + 471$ d) $202 + 808$

6.2.1

Regn ut.

- a) $84 - 23$ b) $286 - 52$ c) $529 - 401$ d) $782 - 131$

6.2.2

Regn ut.

- a) $78 - 19$ b) $824 - 499$ c) $731 - 208$ d) $1078 - 991$

6.3.1

Regn ut.

- a) $12 \cdot 3$ b) $28 \cdot 4$ c) $76 \cdot 5$ d) $43 \cdot 6$
e) $109 \cdot 7$ f) $98 \cdot 8$ g) $213 \cdot 9$

6.3.2

Regn ut.

- a) $29 \cdot 12$ b) $83 \cdot 31$ c) $91 \cdot 76$ d) $14 \cdot 83$

6.3.3

Regn ut.

- a) $531 \cdot 56$ b) $83 \cdot 701$ c) $91 \cdot 673$ d) $731 \cdot 67$

6.3.4

- a) Bruk kalkulator til å regne ut $27 \cdot 5$ og $2,7 \cdot 5$.
- b) Bruk kalkulator til å regne ut $247 \cdot 192$ og $24,7 \cdot 19,2$.
- c) Bruk kalkulator til å regne ut $928 \cdot 74$ og $9,28 \cdot 7,4$.
- d) Bruk kalkulator til å regne ut $134 \cdot 4\,249$ og $1,34 \cdot 42,49$.
- e) Sammenlign parene av svar fra oppgave a)–c), og lag en regel for hvordan du kan regne ut ganging med desimaltall.

6.3.5

Regn ut

- a) $82,3 \cdot 5$ b) $9,51 \cdot 7$ c) $22,4 \cdot 1,7$

6.4.1

Regn ut.

- a) $98 : 2$ b) $87 : 3$ c) $92 : 4$ d) $85 : 5$ e) $72 : 6$

6.4.2

Regn ut.

- a) $378 : 2$ b) $224 : 4$ c) $495 : 5$
e) $133 : 7$ f) $208 : 8$ g) $873 : 9$

6.5.1

Skriv tallet på standardform.

- a) 98 000 b) 167 000 000 c) 4 819 d) 21
e) 9 132,27 f) 893,7 g) 18 002,1 h) 302,4

6.5.2

Skriv tallet på standardform.

- a) 0,027 b) 0,0001901 c) 0,32 d) 0,00000020032

6.5.3

Gitt regnestykket

$$900\,000\,000 \cdot 0,00007$$

- a) Forklar hvorfor regnestykket kan skrives som

$$9 \cdot 10^8 \cdot 7 \cdot 10^{-5}$$

- b) Bruk potensregler (se [seksjon ??](#)) og finn svaret på regnestykket fra a).

6.5.4 (T1H21D1)

Rekn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{6,2 \cdot 10^7 + 2,5 \cdot 10^8}{0,000002}$$

Gruble 6

Et tall kan ganges med 25 ved å

- dele tallet med 4
- gange kvotienten med 100

Metoden virker (selvsagt) best hvis tallet er delelig med 4.

- a) Forklar hvorfor denne metoden fungerer.
- b) Forklar hvordan metoden kan brukes til å rekne ut 24^2 .

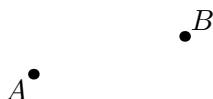
Kapittel 7

Geometri

7.1 Omgrep

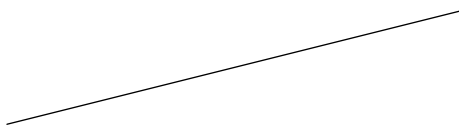
Punkt

Ei bestemt plassering kallast eit¹ *punkt*. Eit punkt markerer vi ved å teikne ein prikk, som vi gjerne set namn på med ein bokstav. Under har vi teikna punkta A og B .



Linje og linjestykke

Ein rett strek som er uendeleg lang (!) kallar vi ei *linje*. At linja er uendeleg lang, gjer at vi aldri kan *teikne* ei linje, vi kan berre *tenke* oss ei linje. Å tenke seg ei linje kan ein gjere ved å lage ein rett strek, og så forestille seg at endane til streken vandrar ut i kvar si retning.



Ein rett strek som går mellom to punkt kallar vi eit *linjestykke*.



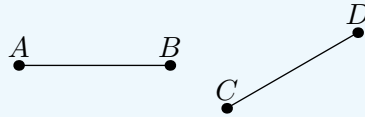
Linjestykket mellom punkta A og B skriv vi som AB .

Merk

Eit linjestykke er eit utklipp (eit stykke) av ei linje, derfor har ei linje og eit linjestykke mange felles eigenskapar. Når vi skriv om linjer, vil det bli opp til lesaren å avgjere om det same gjeld for linjestykker, slik sparar vi oss for heile tida å skrive "linjer/linjestykker".

¹Sjå også [seksjon 1.3](#).

Linjestykke eller lengde?

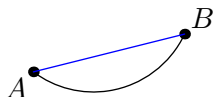


Linjestykka AB og CD har lik lengde, men dei er ikkje det same linjestykket. Likevel kjem vi til å skrive $AB = CD$. Vi bruker altså dei same namna på linjestykker og lengdene deira (det same gjeld for vinklar og vinkelverdiar, sjå side 128 - 130). Dette gjer vi av følgjande grunnar:

- Kva tid vi snakkar om eit linjestykke og kva tid vi snakkar om ei lengde vil komme tydeleg fram av samanhengen omgrepet blir brukt i.
- Å heile tida måtte ha skrive "lengda til AB " o.l. ville gitt mindre leservenlege setningar.

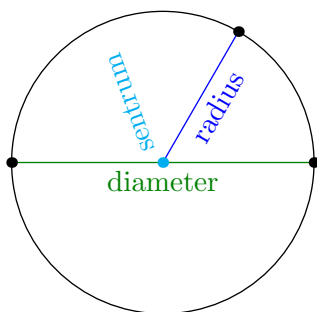
Avstand

Det er uendeleg med vegar ein kan gå fra eitt punkt til eit anna, og nokre vegar vil vere lengre enn andre. Når vi snakkar om avstand i geometri, meiner vi helst den *kortaste* avstanden. For geometriar vi skal ha om i denne boka, vil den kortaste avstanden mellom to punkt alltid vere lengda til linjestykket (blått i figuren under) som går mellom punkta.



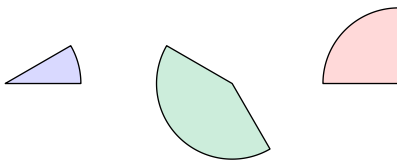
Sirkel; sentrum, radius og diameter

Om vi lagar ein lukka boge der alle punkta på bogen har same avstand til eit punkt, har vi ein *sirkel*. Punktet som alle punkta på bogen har lik avstand til er *sentrum* i sirkelen. Eit linjestykke mellom sentrum og eit punkt på bogen kallar vi ein *radius*. Eit linjestykke mellom to punkt på bogen, og som går via sentrum, kallar vi ein *diameter*¹.



Sektor

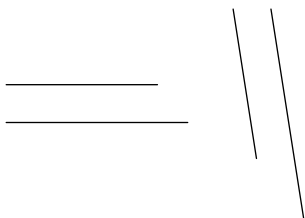
Ein bit som består av ein sirkelboge og to tilhøyrande radier kallast ein *sektor*. Bildet under viser tre forskjellige sektorar.



¹Som vi har vore inne på kan *radius* og *diameter* like gjerne bli brukt om lengda til linjestykka.

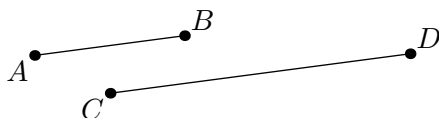
Parallele linjer

Når linjer går i same retning, er dei *parallelle*. I figuren under visast to par med parallelle linjer.



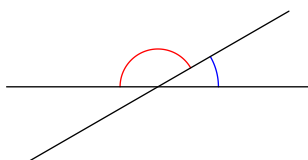
Vi bruker symbolet \parallel for å vise til at to linjer er parallelle.

$$AB \parallel CD$$



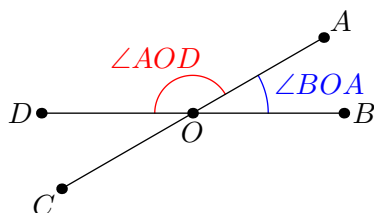
Vinklar

To linjer som ikkje er parallelle, vil før eller sidan krysse kvarandre. Gapet to linjer dannar seg imellom kallast ein *vinkel*. Vinklar teiknar vi som små sirkelboger:



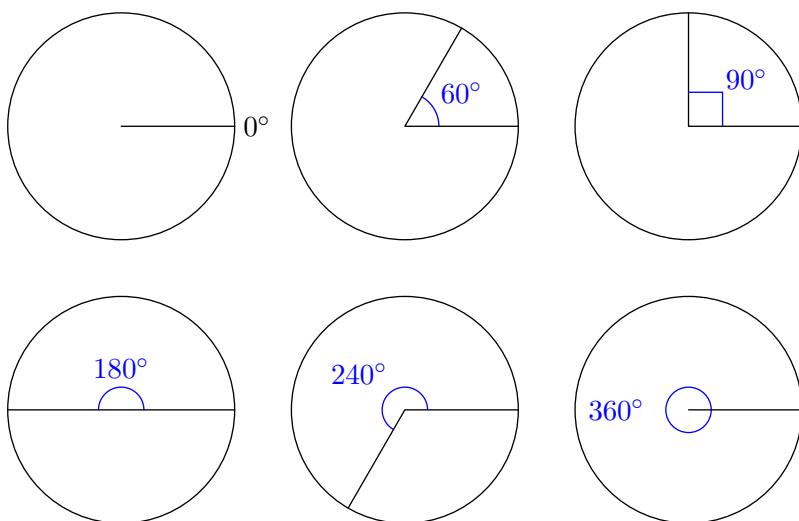
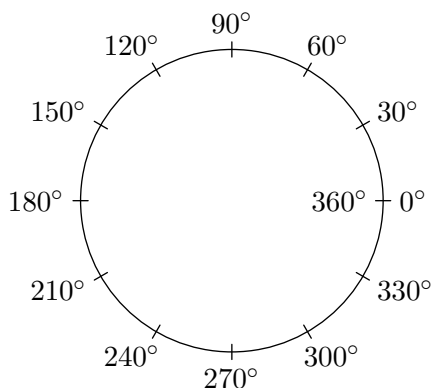
Linjene som dannar ein vinkel kallar vi *vinkelbein*. Punktet der linjene møtast kallar vi *toppunktet* til vinkelen. Ofte bruker vi punktnamn og vinkelsymbolet \angle for å gjere tydeleg kva vinkel vi meiner. I figuren under er det slik at

- vinkelen $\angle BOA$ har vinkelbein OB og OA og toppunkt O .
- vinkelen $\angle AOD$ har vinkelbein OA og OD og toppunkt O .

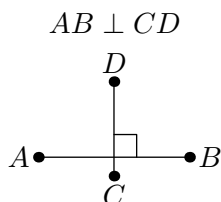


Mål av vinklar i grader

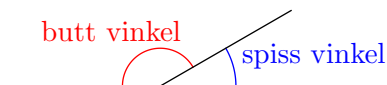
Når vi skal måle ein vinkel i grader, tenker vi oss at ein sirkelboge er delt inn i 360 like lange bitar. Ein slik bit kallar vi ein *grad*, som vi skriv med symbolet $^{\circ}$.



Legg merke til at ein 90° vinkel markerast med symbolet \square . Ein vinkel som måler 90° kallast ein *rett* vinkel. Linjer/linjestykker som danner rette vinklar seier vi står *vinkelrett* på kvarandre. Dette indikerer vi med symbolet \perp .

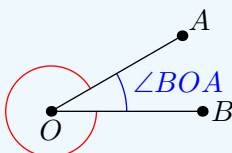


Ein vinkel som er større enn 90° kallast ein **butt/stump vinkel**, og ein vinkel som er mindre enn 90° kallast ein **spiss vinkel**.

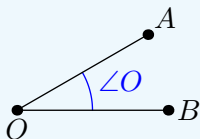


Kva vinkel?

Når to linjestykker møtast i eit felles punkt, dannar dei strengt tatt to vinklar; den eine større eller lik 180° , den andre mindre eller lik 180° . I dei aller fleste samanhengar er det den minste vinkelen vi ønsker å studere, og derfor er det vanleg å definere $\angle AOB$ som den *minste* vinkelen danna av linjestykka OA og OB .

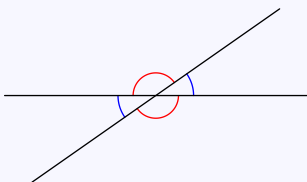


Så lenge det berre er to linjestykker/linjer til stades, er det også vanleg å bruke berre éin bokstav for å vise til vinkelen:

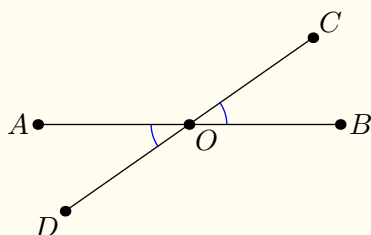


7.1 Toppvinklar

To motstående vinklar med felles toppunkt kallast **toppvinklar**.
Toppvinklar er like store.



7.1 Toppvinklar (forklaring)



Vi har at

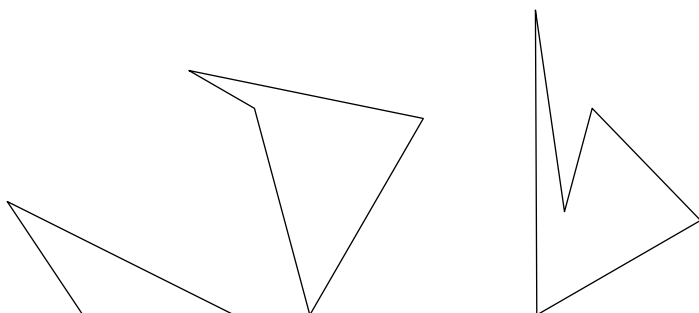
$$\angle BOC + \angle DOB = 180^\circ$$

$$\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$$

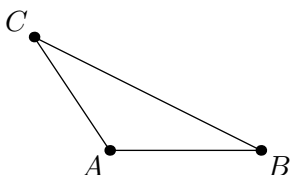
Dette må bety at $\angle BOC = \angle AOD$. Tilsvarende er $\angle COA = \angle DOB$.

Kantar og hjørner

Når linjestykker danner ei lukka form, har vi ein *mangekant*. Under ser du (fra venstre mot høgre) ein trekant, ein firkant og ein femkant.

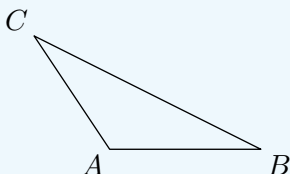


Linjestykka ein mangekant består av kallast *kantar* eller *sider*. Punkta der kantane møtast kallar vi *hjørner*. Trekanten under har altså hjørna A , B og C og sidene (kantane) AB , BC og AC .



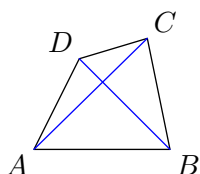
Merk

Ofte kjem vi til å skrive berre ein bokstav for å markere eit hjørne i ein mangekant.



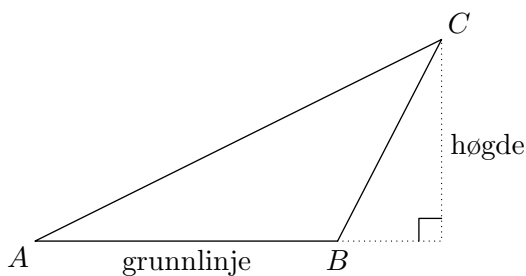
Diagonalar

Eit linjestykke som går mellom to hjørner som ikkje høyrer til same side av ein mangekant kallast ein *diagonal*. I figuren under ser vi diagonalane AC og BD .

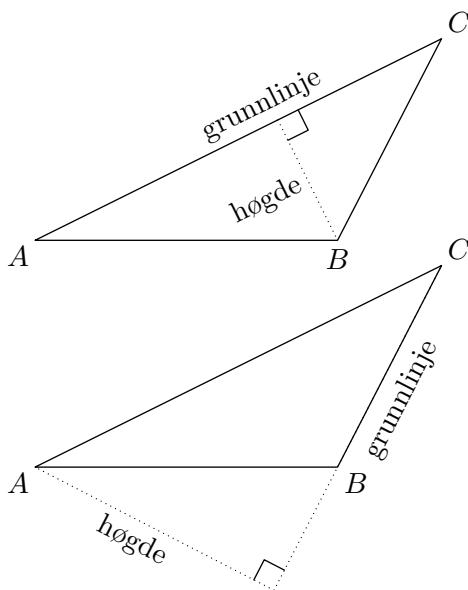


Høgde og grunnlinje

Når vi i [seksjon 7.4](#) skal finne areal, vil omgrepa *grunnlinje* og *høgde* vere viktige. For å finne ei høgde i ein trekant, tar vi utgangspunkt i ei av sidene. Sida vi velg kallar vi *grunnlinja*. La oss starte med AB i figuren under som grunnlinje. Da er *høgda* linjestykket som går fra AB (eventuelt, som her, forlengelsen av AB) til C , og som står vinkelrett på AB .



Da det er tre sider vi kan velge som grunnlinje, har ein trekant tre høgder.



Merk

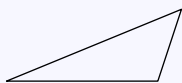
Høgde og grunnlinje kan også på liknande vis bli brukt i samband med andre mangekantar.

7.2 Eigenskapar for trekantar og firkantar

I tillegg til å ha eit bestemt antal sider og hjørner, kan mangekantar også ha andre eigenskapar, som for eksempel sider eller vinklar av lik størrelse, eller sider som er parallelle. Vi har egne namn på mangekantar med spesielle eigenskapar, og desse kan vi sette opp i ei oversikt der nokre "arvar"¹ eigenskapar fra andre.

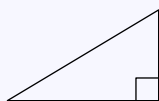
7.2 Trekantar

Trekant $\begin{cases} \rightarrow \text{Rettvinkla trekant} \\ \rightarrow \text{Likebeint trekant} \rightarrow \text{Likesida trekant} \end{cases}$



Trekant

Har tre sider og tre hjørner.



Rettvinkla trekant

Har ein vinkel som er 90° .



Likebeint trekant

Minst to sider er like lange.
Minst to vinklar er like store.



Likesida trekant

Sidene er like lange.
Vinklane er 60° .

Eksempel

Da ein likesida trekant har tre sider som er like lange og tre vinklar som er 60° , er den også ein likebeint trekant.

Språkboksen

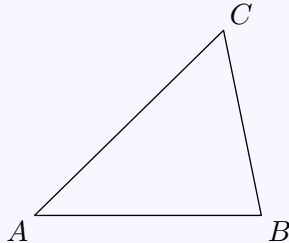
Den lengste sida i ein rettvinkla trekant blir gjerne kalla *hypotenus*.
Dei kortaste sidene blir gjerne kalla *katetar*.

¹I [regel 7.2](#) og [regel 7.4](#) er dette indikert med piler.

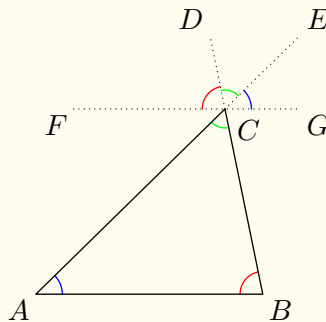
7.3 Summen av vinklane i ein trekant

I ein trekant er summen av vinkelverdiane 180° .

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



7.3 Summen av vinklane i ein trekant (forklaring)



Vi teiknar eit linjestykke FG som går gjennom C og som er parallell med AB . Vidare sett vi punktet E og D på forlengelsen av høvesvis AC og BC . Da er $\angle A = \angle GCE$ og $\angle B = \angle DCF$. $\angle ACB = \angle ECD$ fordi dei er toppvinklar. Vi har at

$$\angle DCF + \angle ECD = \angle GCE = 180^\circ$$

Altså er

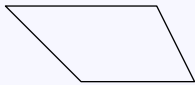
$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$$

7.4 Firkantar



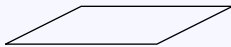
Firkant

Har fire sider og fire hjørner.



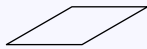
Trapez

Har minst to sider som er parallelle.



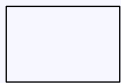
Parallelogram

Har to par med parallelle sider.
Har to par med like vinklar.



Rombe

Sidene er like lange.



Rektangel

Alle vinklane er 90° .



Kvadrat

Eksempel

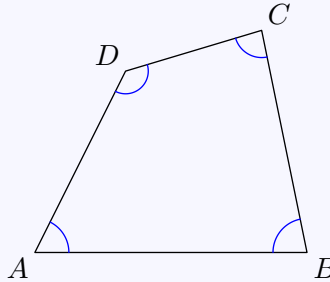
Kvadratet er både ei rombe og eit rektangel, og "arvar" derfor eigenskapane til desse. Dette betyr at i eit kvadratet er

- alle sidene like lange
- alle vinklane 90° .

7.5 Summen av vinklane i ein firkant

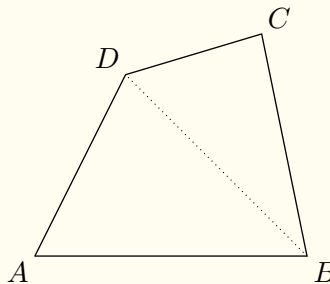
I ein firkant er summen av vinkelverdiane 360° .

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



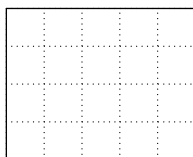
7.5 Summen av vinklane i ein firkant (forklaring)

Den samla vinkelsummen i $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$ utgjer vinkelsummen i $\square ABCD$. Av [regel 7.3](#) veit vi at vinkelsummen i alle trekanter er 180° , altså er vinkelsummen i $\square ABCD$ lik $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

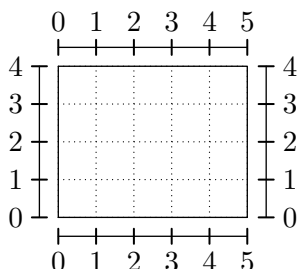


7.3 Omkrins

Når vi måler kor langt det er rundt ei lukka form, finn vi *omkrinsen* til figuren. La oss starte med å finne omkrinsen til dette rektangelet:



Rektangelet har to sider med lengde 4 og to sider med lengde 5:



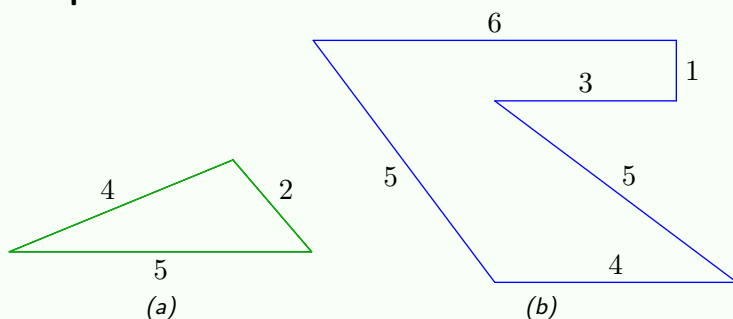
Dette betyr at

$$\begin{aligned}\text{Omkrinsen til rektangelet} &= 4 + 4 + 5 + 5 \\ &= 18\end{aligned}$$

7.6 Omkrins

Omkrinsen er lengda rundt ein lukka figur.

Eksempel



I figur (a) er omkrinsen $5 + 2 + 4 = 11$.

I figur (b) er omkrinsen $4 + 5 + 3 + 1 + 6 + 5 = 24$.

7.4 Areal

Overalt rundt oss kan vi sjå *overflater*, for eksempel på eit golv eller eit ark. Når vi ønsker å seie noko om kor store overflater er, må vi finne *arealet* deira. Idéen bak omgrepet areal er denne:

Vi tenker oss eit kvadrat med sidelengder 1. Dette kallar vi *einarkvadratet*.

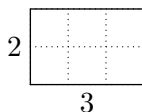


Så ser vi på overflata vi ønsker å finne arealet til, og spør:

"Kor mange einarkvadrat er det plass til på denne overflata?"

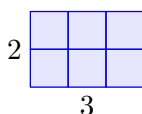
Arealet til eit rektangel

La oss finne arealet til eit rektangel som har grunnlinje 3 og høgde 2.



Vi kan da telle oss fram til at rektangelet har plass til 6 einarkvadrat:

Arealet til rektangelet = 6

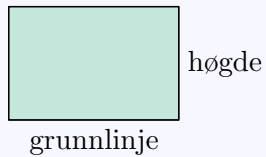


Ser vi tilbake til [seksjon 2.3](#), legg vi merke til at

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 3 \cdot 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

7.7 Arealet til eit rektangel

$$\text{Areal} = \text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}$$



Breidde og lengde

Ofte blir orda *breidde* og *lengde* brukt om grunnlinja og høgda i eit rektangel.

Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet¹.

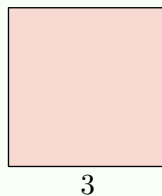


Answer

$$\text{Arealet til rektangelet} = 4 \cdot 2 = 8$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Answer

$$\text{Arealet til kvadratet} = 3 \cdot 3 = 9$$

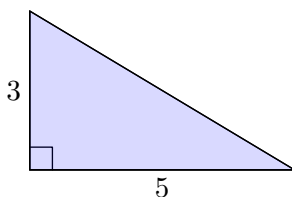
¹Merk: Lengdene vi bruker som eksempel i ein figur vil ikkje naudsynleg samsvare med lengdene i ein anna figur. Ei sidelengde lik 1 i ein figur kan altså vere kortare enn ei sidelengde lik 1 i ein anna figur.

Arealet til ein trekant

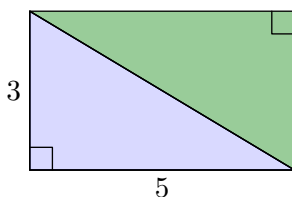
For trekantar er det tre forskjellige tilfelle vi må sjå på:

1) Tilfellet der grunnlinja og høgda har eit felles endepunkt

La oss finne arealet til ein rettvinkla trekant med grunnlinje 5 og høgde 3.



Vi kan no lage eit rektangel ved å ta ein kopi av trekanten vår, og så legge langsidedene til dei to trekantane saman:



Av [regel 7.7](#) veit vi at arealet til rektangelet er $5 \cdot 3$. Arealet til éin av trekantane må utgjere halvparten av arealet til rektangelet, altså er

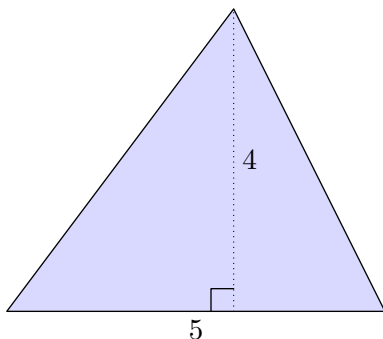
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 3}{2}$$

For den blå trekanten er

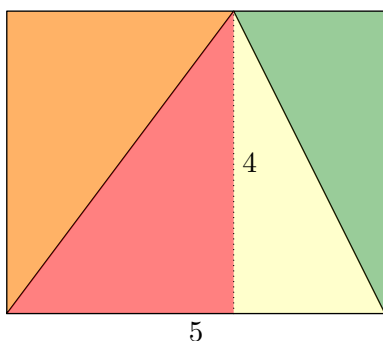
$$\frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

2) Tilfellet der høgda ligg inni trekanten, men ikkje har felles endepunkt med grunnlinja

Trekanten under har grunnlinje 5 og høgde 4.



Med denne trekanten (og høgda) som utgangspunkt, dannar vi denne figuren:



Vi legg no merke til at

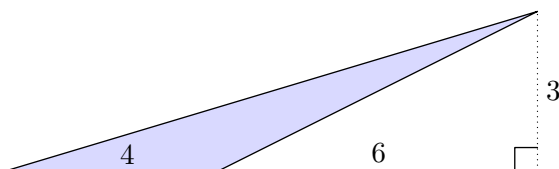
- arealet til den raude trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den raude og den gule trekanten.
- arealet til den gule trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den gule og den grønne trekanten.

Summen av areala til den gule og den raude trekanten utgjør altså halvparten av arealet til rektangelet som består av alle dei fire farga trekantene. Arealet til dette rektangelet er $5 \cdot 4$, og da vår opprinnelige trekant (den blå) består av den raude og den oransje trekanten, har vi at

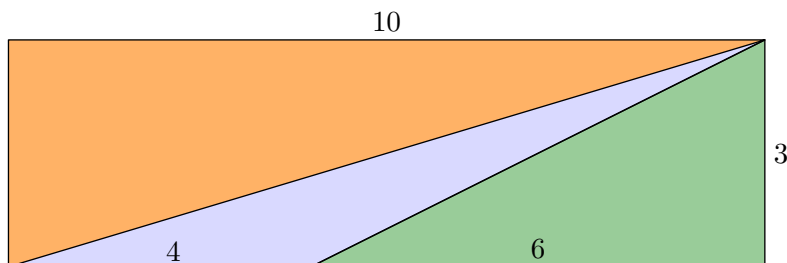
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

3) Tilfellet der høgda ligg utanfor trekanten

Trekanten under har grunnlinje 4 og høgde 3.



Med denne trekanten som utgangspunkt, danner vi eit rektangel:



Vi gir no areala følgande namn:

Arealet til rektangelet = R

Arealet til den blå trekanten = B

Arealet til den oransje trekanten = O

Arealet til den grønne trekanten = G

Da har vi at (både den oransje og den grønne trekanten er rettvinkla)

$$R = 3 \cdot 10 = 30$$

$$O = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

$$G = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Vidare er

$$\begin{aligned} B &= R - O - G \\ &= 30 - 15 - 9 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Legg no merke til at vi kan skrive

$$6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

I den blå trekanten gjenkjenner vi dette som

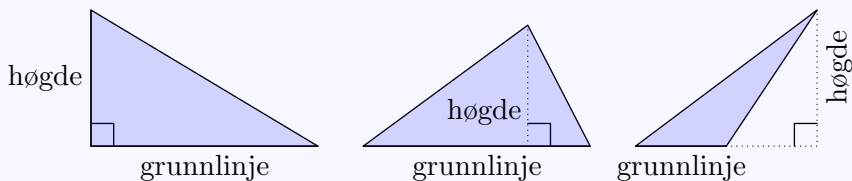
$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

Alle tilfella oppsummert

Ein av dei tre tilfella vi har studert vil alltid gjelde for ei valgt grunnlinje i ein trekant, og alle tilfella resulterte i det same uttrykket.

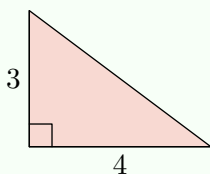
7.8 Arealet til ein trekant

$$\text{Areal} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{h\AA}gde}{2}$$



Eksempel 1

Finn arealet til trekanten.

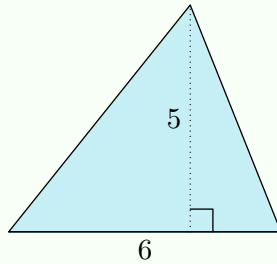


Answer

$$\begin{aligned}\text{Arealet til trekanten} &= \frac{4 \cdot 3}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$

Eksempel 2

Finn arealet til trekanten.

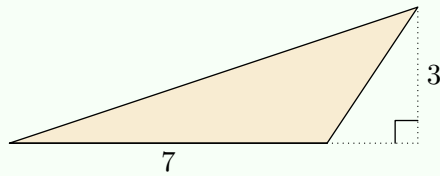


Answer

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Eksempel 3

Finn arealet til trekanten.

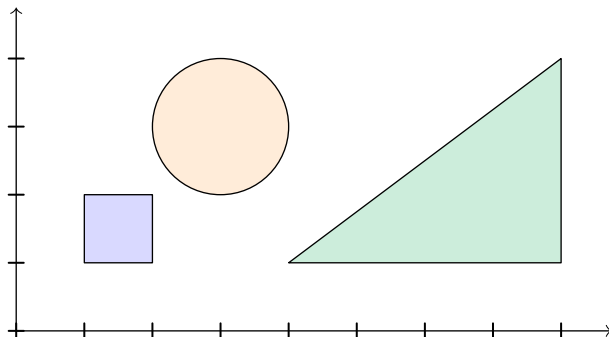


Answer

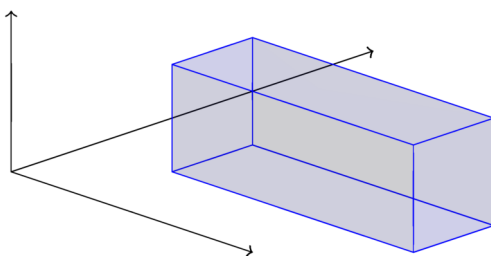
$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

7.5 Tredimensjonal geometri

Så langt har vi sett på todimensjonale figurar som trekantar, firkantar, sirklar o.l. Alle todimensjonale figurar kan teiknast inn i et koordinatsystem med to akser.



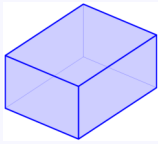
For å teikne *tredimensjonale* figurar trengs derimot tre aksar:



Mens eit rektangel seiast å ha ei breidde og ei høgde, kan vi seie at boksen over har ei breidde, ei høgde *og* ei lengde (dybde).

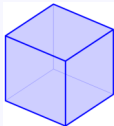
Området som "ligg utanpå" ein tredimensjonal figur kallar vi *overflata*. Overflata til boksen over består av 6 rektangel. Mangekantar som er delar av ei overflate kallast *sideflater*.

7.9 Tredimensjonale figurer



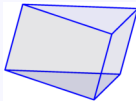
Firkanta prisme

Har to like og fire like rektangel som sideflater. Alle sideflatene som er i kontakt, står vinkelrette på kvarandre.



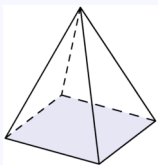
Kube

Firkanta prisme med kvadrat som sideflater.



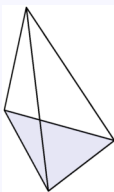
Trekanta prisme

To av sideflatene er like trekanter som er parallelle. Har tre sideflater som er trekantar.



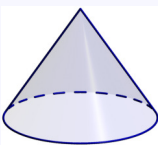
Firkanta pyramide

Har ett rektangel og fire trekanter som sideflater.



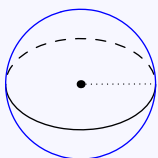
Trekanta pyramide

Har fire trekanter som sideflater.



Kjegle

Ein del av overflata er ein sirkel, den resterende delen er ein samanbretta sektor.



Kule

Alle punkt på overflata har lik avstand til sentrum.

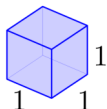
Tips

Det er ikkje så lett å se for seg kva ein *samanbretta sektor* er, men prøv dette:

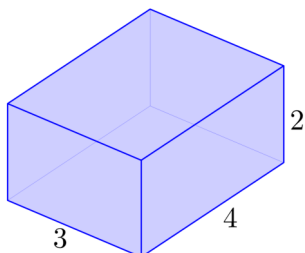
Teikn ein sektor på eit ark. Klipp ut sektoren, og føy saman dei to kantene på sektoren. Da har du ei kjegle utan bunn.

7.6 Volum

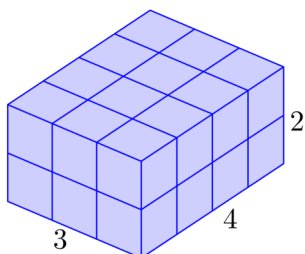
Når vi ønsker å seie noko om kor mykje det er plass til inni ein gjenstand, snakkar vi om *volumet* til den. Som eit mål på volum tenker vi oss ei kube med sidelengde 1.



Ei slik kube kan vi kalle 'einarkuba'. Sei vi har ei firkanta prisme med breidde 3, lengde 4 og høgde 2.



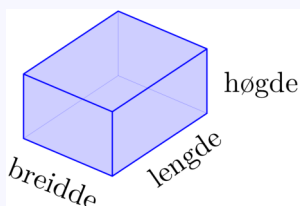
I denne er det plass til akkurat 24 einarkuber.



Dette kunne vi ha rekna slik:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

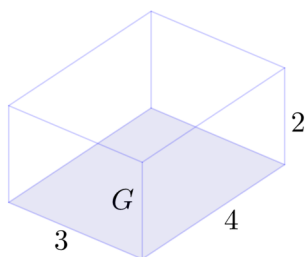
7.10 Volumet til ei firkanta prisme I



$$\text{volum} = \text{breidde} \cdot \text{lengde} \cdot \text{høgde}$$

Grunnflate

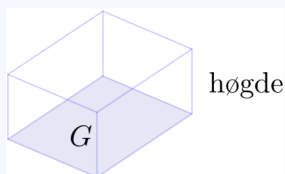
For å rekne ut volumet til dei mest elementære formene vi har, er det lurt å bruke omgrepet *grunnflate*¹. Slik som for ei grunnlinje¹, er det vårt valg av grunnflate som avgjer kva som er høgda. For prisma fra førre side er det naturleg å velge den flata som ligg horisontalt til å vere grunnflata. For å indikere dette skriv ein ofte bokstaven G :



Grunnflata har arealet $3 \cdot 4 = 12$, mens høgda er 2. Volumet til heile prisma er grunnflata sitt areal gonga med høgda:

$$\begin{aligned} V &= 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= G \cdot 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

7.11 Volumet til ei firkanta prisme II



$$\text{volum} = G \cdot \text{høgde}$$

Grunnflata eller grunnflatearealet?

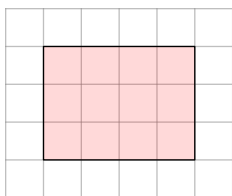
I teksten over har vi først kalla sjølve grunnflata for G , og så brukt G for *grunnflatearealet*. I denne boka er omgrepet *grunnflate* så sterkt knytt til *grunnflatearealet* at vi ikkje skiller mellom desse to.

¹Sjå side 133.

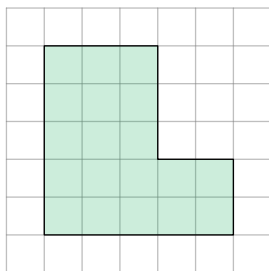
Oppgaver for kapittel 7

7.1.1

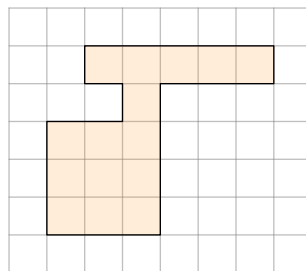
Finn omkretsen til figurene.



(a)



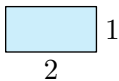
(b)



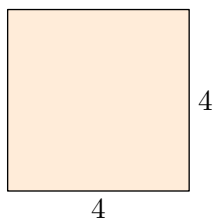
(c)

7.1.2

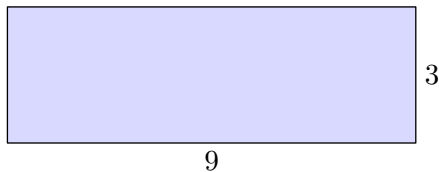
Finn omkretsen til rektanglene.



(a)



(b)



(c)

7.1.3

Finn arealet til figurene fra [oppgave 7.1.1](#)

7.1.4

Finn arealet til firkantene fra [oppgave 7.1.2](#)

7.1.5

Finn bredden og høgden til rektangelet ut ifra opplysningene.

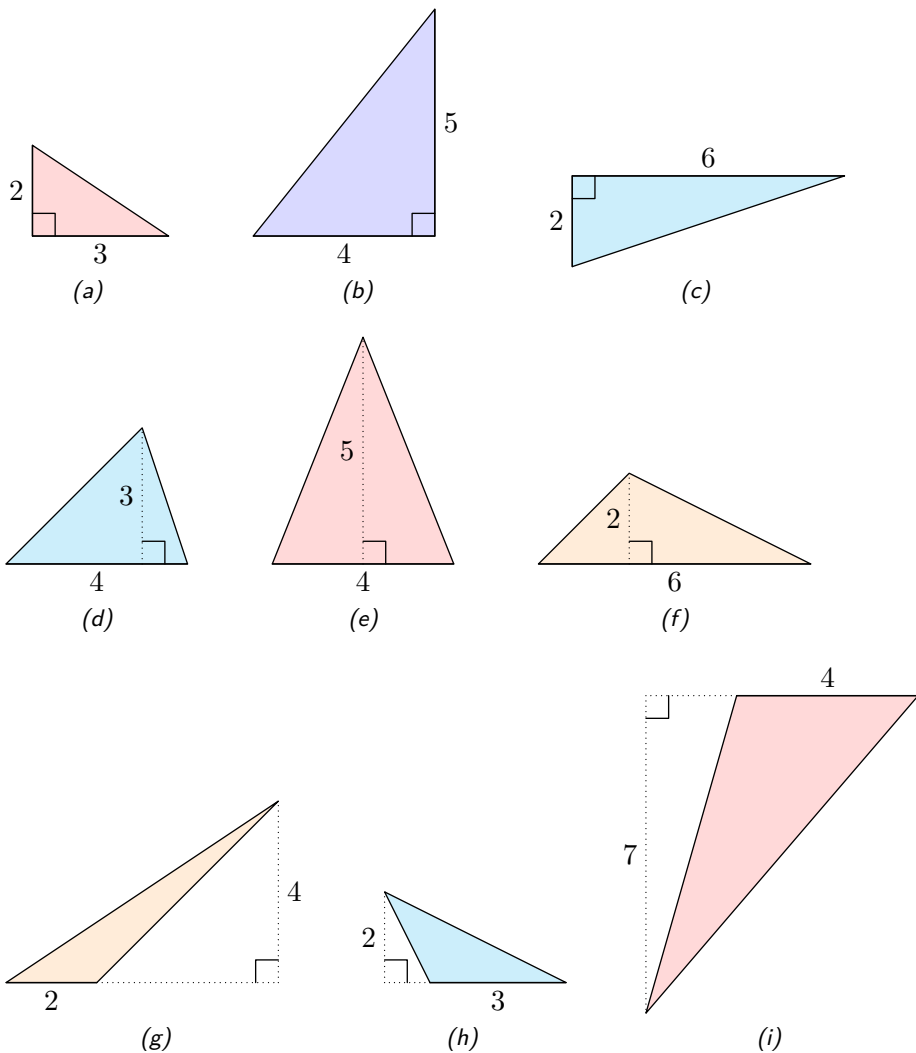
- a) Arealet er 16 og omkretsen er 20.
- b) Arealet er 12 og omkretsen er 14.
- c) Arealet er 18 og omkretsen er 18

7.1.6

- a) Finn arealet til et kvadrat med omkrets 36.
- b) Gi tre eksempler på rektangler som har omkrets 36. Oppgi svaret ved bredden, høyden og arealet til rektanglene.

7.1.7

Regn ut arealet til trekanten.

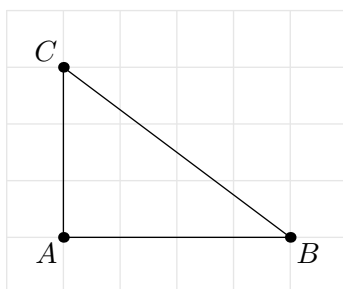


7.1.8

En prisme har lengde 9, bredde 10 og høgde 8.

- Finn grunnflaten til prismet.
- Finn volumet til prismet.

7.2.1

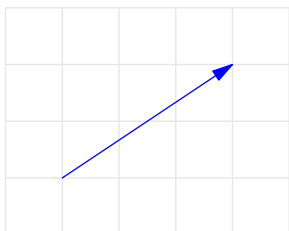


Forskyv trekanten med vektorene vist under

a)



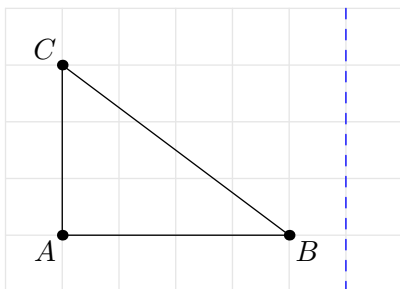
b)



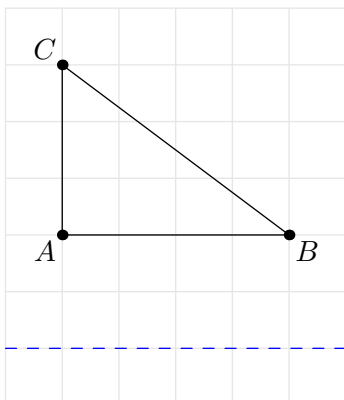
7.2.2

Speil trekanten om symmetrilinja.

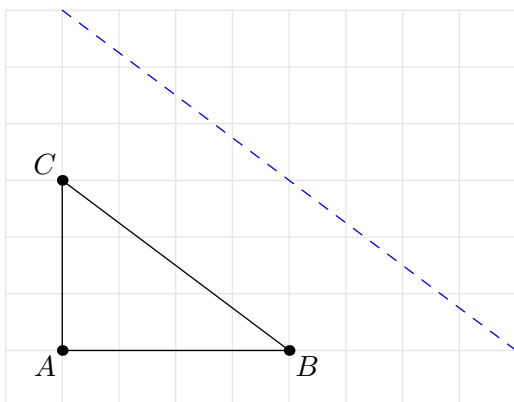
a)



b)



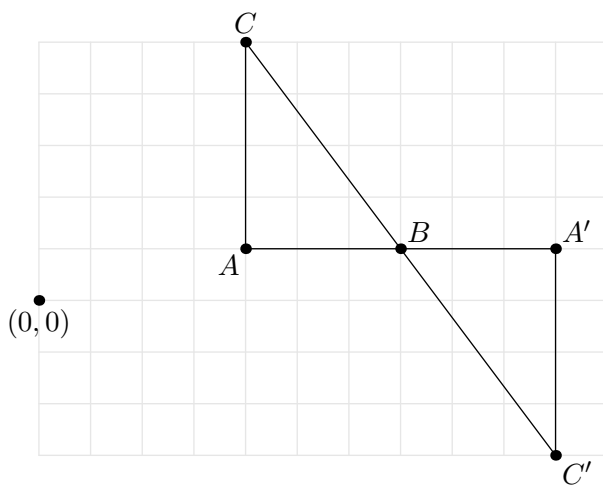
c)



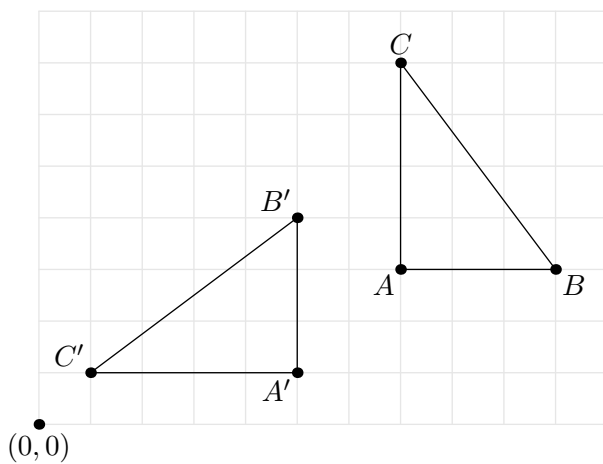
7.2.3

Finn rotasjonsvinkelen og rotasjonspunktet.

a)



b)

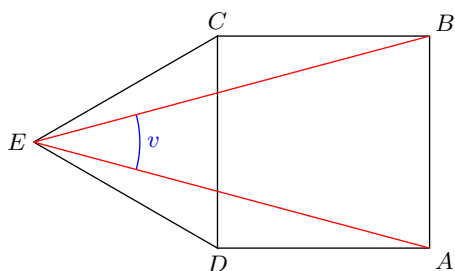


Gruble 7

- a) Forklar hvorfor omkretsen til et rektangel alltid er et partall.
- b) "Hvis både bredden og høyden i et rektangel er oddetall, er det umulig at arealet og omkretsen til rektangelet har samme verdi." Forklar hvorfor påstanden er riktig/ikke riktig.
- c) Hva er sidelengden til det eneste kvadratet hvor areal og omkrets har samme verdi?

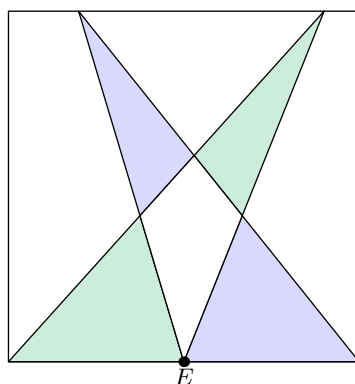
Gruble 8

$\square ABCD$ er et kvadrat og $\triangle DEC$ er likesidet. Finn verdien til v .



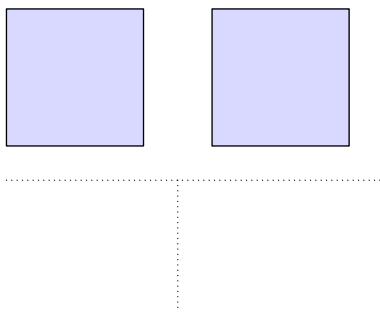
Gruble 9

E er midtpunktet på den ene siden til kvadratet. Forklar hvorfor det blå området og det grønne området har likt areal.



Gruble 10

De stiplede linjene skiller tre områder; øvre område, nedre venstre område, og nedre høyre område. De to like store kvadratene ligger i det øvre området. Forklar hvordan kvadratene kan flyttes slik at de tre områdene inneholder like stort areal.



Del II

Algebra og geometri

Kapittel 8

Algebra

8.1 Introduksjon

Algebra er kort og godt matematikk der bokstavar representerer tal. Dette gjer at vi lettare kan jobbe med *generelle* tilfelle. For eksempel er $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ og $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$, men desse er berre to av dei uendeleg mange eksempla på at multiplikasjon er kommutativ! Ei av hensiktene med algebra er at vi ønsker å gi *eitt* eksempel som forklarar *alle* tilfelle, og sidan sifra våre (0-9) er uløseleg knytta til bestemte tal, bruker vi bokstavar for å nå dette målet.

Verdien til tala som er representert ved bokstavar vil ofte variere ut ifrå ein samanheng, og da kallar vi desse bokstavtala for *variablar*. Viss bokstavtala derimot har ein bestemd verdi, kallar vi dei for *konstantar*.

I *Del I* av boka har vi sett på rekning med konkrete tal, likevel er dei fleste reglane vi har utleda *generelle*; dei gjeld for alle tal. På side 160-163 har vi gjengitt mange av desse reglane på ei meir generell form. Ein fin introduksjon til algebra er å samanlikne reglane du finn her med slik du finn dei¹ i *Del I*.

8.1 Addisjon er kommutativ (2.1)

$$a + b = b + a$$

Eksempel

$$7 + 5 = 5 + 7$$

8.2 Multiplikasjon er kommutativ (2.2)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Eksempel 1

$$9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$$

Eksempel 2

$$8 \cdot a = a \cdot 8$$

¹Reglane sine nummer i *Del I* står i parentes.

Gonging med bokstavuttrykk

Når ein gongar saman bokstavar, er det vanleg å utelate gongeteiknet. Og om ein gongar saman ein bokstav og eit konkret tal, skriv ein det konkrete talet først. Dette betyr for eksempel at

$$a \cdot b = ab$$

og at

$$a \cdot 8 = 8a$$

I tillegg skriv vi også

$$1 \cdot a = a$$

Det er også vanleg å utelate gongeteikn der parentesuttrykk er ein faktor:

$$3 \cdot (a + b) = 3(a + b)$$

8.3 Brøk som omskriving av delestykke (4.1)

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Eksempel

$$a : 2 = \frac{a}{2}$$

8.4 Brøk gonga med brøk (4.8)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Eksempel 1

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{13}{21} = \frac{2 \cdot 13}{11 \cdot 21} = \frac{26}{231}$$

Eksempel 2

$$\frac{3}{b} \cdot \frac{a}{7} = \frac{3a}{7b}$$

8.5 Deling med brøk (4.10)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Eksempel 1

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}\frac{a}{13} : \frac{b}{3} &= \frac{a}{13} \cdot \frac{3}{b} \\ &= \frac{3a}{13b}\end{aligned}$$

8.6 Gonging med parentes (distributiv lov) (3.2)

$$(a + b)c = ac + bc$$

Eksempel 1

$$(2 + a)b = 2b + ab$$

Eksempel 2

$$a(5b - 3) = 5ab - 3a$$

8.7 Gonging med negative tal I (5.6)

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}3 \cdot (-4) &= -(3 \cdot 4) \\ &= -12\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(-a) \cdot 7 &= -(a \cdot 7) \\ &= -7a\end{aligned}$$

8.8 Gonging med negative tal II (5.7)

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}(-2) \cdot (-8) &= 2 \cdot 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$(-a) \cdot (-15) = 15a$$

Språkboksen

Viss vi i eit uttrykk har éin variabel isolert på den eine sida av lik-skapsteiknet, og konstantar og variablar på den andre sida, seier vi at den isolerte variabelen er **uttrykt ved** dei andre tala. For eksempel, om vi har uttrykket $a = 2b - 4$, seir vi at " a er uttrykt ved b ". Har vi uttrykket $q = 9y - x$, seier vi at " q er uttrykt ved x og y ".

Utvidingar av reglane

Noko av styrken til algebra er at vi kan lage oss kompakte reglar som det er lett å utvide også til andre tilfelle. La oss som eit eksempel finne eit anna uttrykk for

$$(a + b + c)d$$

regel 8.6 fortel oss ikkje direkte korleis vi kan rekne mellom parentesuttrykket og d , men det er ingenting som hindrar oss i å omdøpe $a + b$ til k :

$$a + b = k$$

Da er

$$(a + b + c)d = (k + c)d$$

Av regel 8.6 har vi no at

$$(k + c)d = kd + cd$$

Om vi sett inn att uttrykket for k , får vi

$$kd + cd = (a + b)d + cd$$

Ved å utnytte regel 8.6 enda ein gong kan vi skrive

$$(a + b)d + cd = ad + bc + cd$$

Altså er

$$(a + b + c)d = ad + bc + cd$$

Obs! Dette eksempelet er ikkje meint for å vise korleis ein skal gå fram når ein har uttrykk som ikkje direkte er omfatta av Regel 8.1 - 8.8, men for å vise kvifor det alltid er nok å skrive reglar med færrest moglege ledd, faktorar og liknande. Oftast vil ein bruke utvidingar av reglane utan eingong å tenke over det, og i alle fall langt ifrå så pertentleg som det vi gjorde her.

Oppgaver for kapittel 8

8.1.1

Utnytt koblingen mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon (se [regel 2.3](#) og [regel 5.5](#)) til å skrive uttrykkene mer kompakt.

- a) $a + a + a$ b) $a + a + a + a$ c) $a + a + a + a + a + a + a$
d) $-b - b$ e) $-b - b - b - b - b$ f) $-k - k - k$

8.1.2

Skriv uttrykkene så kompakt som mulig

- a) $2a + b - a$ b) $-4a + 2b + 3a$ c) $7b - 3a + 2b$

8.1.3

Skriv uttrykkene så kompakt som mulig

- a) $4c + 2b - 5a - 3c$ b) $-9a - 3c + 3b + 3c$ c) $9b - 3a + 2b$

8.1.4

Bruk [regel 3.2](#) til å skrive om uttrykket til et uttrykk uten parenteser.

- a) $7(a + 2)$ b) $9(b + 3)$ c) $8(b - 3c)$ d) $(-2)(3a + 5b)$
e) $(9a + 2)$ f) $(3b + 8)a$ g) $(b - 3c)(-a)$
h) $2(a + 3b + 4c)$ i) $9(3b - c + 7a)$ j) $(3b - c + 7a)(-2)$

8.1.5

Bruk [regel 3.2](#) til å faktorisere uttrykket.

- a) $2a + 2b$ b) $4ab + 5b$ c) $9bc - c$ d) $4ac - 2a$

8.1.6

Vis at

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Merk: De tre likningene over kalles henholdsvis for **1. kvadratsetning**, **2. kvadratsetning** og **3. kvadratsetning** (3. kvadratsetning kalles også **konjugatsetningen**)

8.1.7

Bruk 3. kvadratsetning til å regne ut $26^2 - 24^2$ uten å kvadrere 26 og 24.

8.1.8 (GV21D1)

a) Skriv så enkelt som mulig.

$$\frac{a + a + a + a}{4a}$$

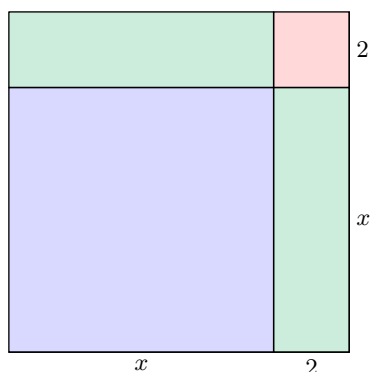
b) Hvilken verdi har uttrykket $\frac{y^2 - 2y}{y^2}$ dersom $x = 4$ og $y = -2$?

8.1.9 (EG22D1)

Gitt uttrykket $(a + b)^2 = 16$. Vurder om alternativene nedenfor gjør at uttrykket stemmer.

- $a = 2$ og $b = 2$
- $a = 8$ og $b = 4$
- $a = 8$ og $b = -4$

8.1.10 (GV23D1)



Erlend og Oline arbeider med areal av figurer. Oline mener at arealet av kvadrat $ABCD$ med sider $(x + 2)$, kan uttrykkes slik:

$$x^2 + 4x + 4$$

Vis hvordan Oline kan forklare Erlend at det stemmer.

8.2.1

Skriv som potensstall

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ b) $5 \cdot 5$ c) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

d) $a \cdot a \cdot a$ e) $b \cdot b$ f) $(-c)(-c)(-c)(-c)$

8.2.2

Finn verdien til potensstallet.

a) 8^2 b) 2^5 c) 4^3 d) $(-2)^3$ e) $(-3)^5$ f) $(-4)^4$

8.2.3

Skriv om uttrykket til et potensstall.

a) $2^7 \cdot 2^9$ b) $3^4 \cdot 3^7$ c) $9 \cdot 9^5$ d) $6^8 \cdot 6^{-3}$ e) $5^3 \cdot 5^{-7}$

f) $10^8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6$ g) $a^9 \cdot a^7$ h) $k^5 \cdot k^2$ i) $x^5 \cdot x^{-2}$

k) $x^{-4} \cdot x^5$ l) $a^{-5} \cdot a \cdot a^4$ m) $a^3 \cdot b^5 \cdot a^2 \cdot b^{-8}$

8.2.4

Regn ut.

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{100}$

c) $\sqrt{144}$

d) $\sqrt[3]{27}$

e) $\sqrt[3]{729}$

f) $\sqrt[5]{100000}$

Gruble 11

(1TH21D1)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-1} + 9^0}{8^{\frac{3}{4}}}$$

Gruble 12

Ved å addere sifrene i et tall, finner vi **tverrsummen** til tallet. For eksempel er tverrsummen til 14 lik $1 + 4 = 5$, og tverrsummen til 918 er lik $9 + 1 + 8 = 18$. Vis at hvis tverrsummen i et tresifret heltall er delelig med 3, så er også tallet delelig med 3.

Merk: Det er ganske lett å generalisere dette tilfellet, og slik vise at det gjelder for et heltall med et hvilket som helst antall siffer.

Kommentar (for den spesielt interesserte)

Matematikk er såkalla *aksiomatisk* oppbygd. Dette betyr at vi erklærer nokre¹ påstandar for å vere sanne, og desse kallar vi for *aksiom* eller *postulat*. I rekning har ein om lag 12 aksiom², men i denne boka har vi holdt oss til å nemne desse 6:

Aksiom

For tala a , b og c har vi at

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\text{A1})$$

$$a + b = b + a \quad (\text{A2})$$

$$a(bc) = (ab)c \quad (\text{A3})$$

$$ab = ba \quad (\text{A4})$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (\text{A5})$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0) \quad (\text{A6})$$

-
- (A1) Assosiativ lov ved addisjon
 - (A2) Kommutativ lov ved addisjon
 - (A3) Assosiativ lov ved multiplikasjon
 - (A4) Kommutativ lov ved multiplikasjon
 - (A5) Distributiv lov
 - (A6) Eksistens av multiplikativ identitet

Aksioma legg sjølve fundamentet i eit matematisk system. Ved hjelp av dei finn vi fleire og meir komplekse sanningar som vi kallar *teorem*. I denne boka har vi valgt å kalle både aksiom, definisjonar og teorem for *reglar*. Dette fordi aksiom, definisjonar og teorem alle i praksis gir føringar (reglar) for handlingsrommet vi har innanfor det matematiske systemet vi opererer i.

¹Helst så få som mogleg.

²Talet avheng litt av korleis ein formulerer påstandane.

I *Del I* har vi forsøkt å presentere *motivasjonen* bak aksioma, for dei er sjølv sagt ikkje tilfeldig utvalde. Tankerekka som leder oss fram til dei nemnde aksioma kan oppsummerast slik:

1. Vi definerer positive tal som representasjonar av enten ei mengde eller ei plassering på ei tallinje.
2. Vi definerer kva addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon inneber for positive heiltal (og 0).
3. Ut ifrå punkta over tilseier all fornuft at (A1)-(A6) må gjelde for alle positive heiltal.
4. Vi definerer også brøk som representasjonar av ei mengde eller som ei plassering på ei tallinje. Kva dei fire rekneartane inneber for brøkar bygger vi på det som gjeld for positive heiltal.
5. Ut ifrå punkta over finn vi at (A1)-(A6) gjeld for alle positive, rasjonale tal.
6. Vi innfører negative heiltal, og utvider tolkinga av addisjon og subtraksjon. Dette gir så ei tolking av multiplikasjon og divisjon med negative heiltal.
7. (A1)-(A6) gjeld også etter innføringa av negative heiltal. Å vise at dei også gjeld for negative, rasjonale tal er da ein rein formalitet.
8. Vi kan aldri skrive verdien til eit irrasjonalt tal heilt eksakt, men verdien kan tilnærmast ved eit rasjonalt tal¹. Alle utrekningar som inneber irrasjonale tal er derfor i *praksis* utrekningar som inneber rasjonale tal, og slik kan vi seie at² (A1)-(A6) gjeld også for irrasjonale tal.

Ei liknande tankerekke kan nyttast for å argumentere for potensreglane vi fann i [seksjon ??](#).

¹For eksempel kan ein skrive $\sqrt{2} = 1.414213562373\dots \approx \frac{1414213562373}{1000000000000}$

²*Obs!* Denne forklaringa er god nok for boka sitt formål, men er ei ekstrem forenkling. Irrasjonale tal er eit komplisert tema som mange bøker for avansert matematikk bruker mange kapittel for å forklare i full dybde.

Kapittel 9

Likningar

9.1 Introduksjon

Eit kvart matematisk uttrykk som inneheld $=$ er ei *likning*, likevel er ordet likning tradisjonelt knytt til at vi har eit *ukjend* tal.

Sei at vi ønsker å finne eit tal som er slik at viss vi legg til 4, så får vi 7. Dette talet kan vi kalle for kva som helst, men det vanlegaste er å kalle det for x , som altså er det ukjende talet vårt. Likninga vår kan no skrivast slik:

$$x + 4 = 7$$

x -verdien¹ som gjer at det blir same verdi på begge sider av likskapsteiknet kallast *løysinga* av likninga. Det er alltid lov til å sjå eller prøve seg fram for å finne verdien til x . Kanskje har du allereie merka at $x = 3$ er løysinga av likninga, sidan

$$3 + 4 = 7$$

Men dei fleste likningar er det vanskelig å sjå eller gjette seg fram til svaret på, og da må vi ty til meir generelle løysingsmetodar. Eigentleg er det berre eitt prinsipp vi følg:

Vi kan alltid utføre ein matematisk operasjon på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi utfører den også på den andre sida.

Dei matematiske operasjonane vi har presentert i denne boka er dei fire rekneartane. Med desse lyd prinsippet slik:

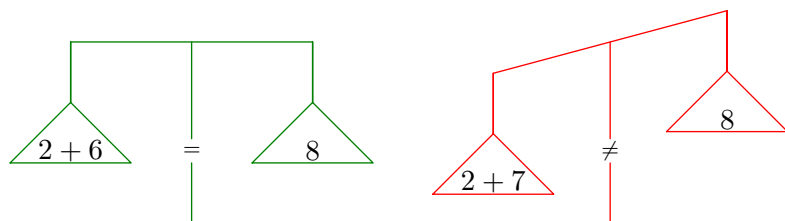
Vi kan alltid legge til, trekke ifrå, gonge eller dele med eit tal på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi gjer det også på den andre sida.

Prinsippet følg av tydinga til $=$. Når to uttrykk har same verdi, må dei naudsynleg fortsette å ha lik verdi, så lenge vi utfører dei same matematiske operasjonane på dei. I komande seksjon skal vi likevel konkretisere dette prinsippet for kvar enkelt rekneoperasjon, men viss du føler dette allereie gir god meining kan du med fordel hoppe til [seksjon 9.3](#).

¹I andre tilfelle kan det vere fleire verdier.

9.2 Løysing ved dei fire rekneartane

I figurane til denne seksjonen skal vi forstå likningar ut ifrå eit vektprinsipp. $=$ vil da indikere¹ at det er like mykje vekt (lik verdi) på venstre side som på høgre side.

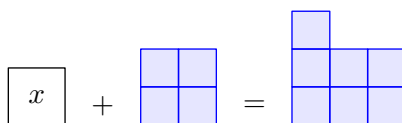


Addisjon og subtraksjon; tal som skifter side

Første eksempel

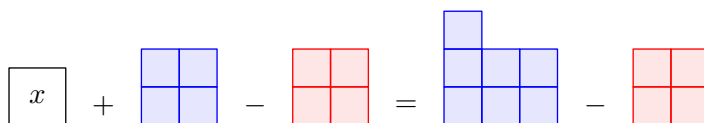
Vi har allereie funne løysinga på denne likninga, men lat oss løyse den på ein annan måte²:

$$x + 4 = 7$$



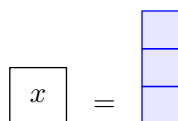
Det blir tydeleg kva verdien til x er viss x står aleine på ei av sidene, og x blir isolert på venstresida viss vi tar bort 4. Men skal vi ta bort 4 fra venstresida, må vi ta bort 4 fra høgresida òg, skal begge sidene ha same verdi.

$$x + 4 - 4 = 7 - 4$$



Da $4 - 4 = 0$ og $7 - 4 = 3$, får vi at

$$x = 3$$



¹ \neq er symbolet for "er ikkje lik".

² Merk: I tidlegare figurar har det vore samsvar mellom størrelsen på rutene og (tal)verdien til talet dei symboliserer. Dette gjeld ikkje rutene som representerer x .

Dette kunne vi ha skrive noko meir kortfatta slik:

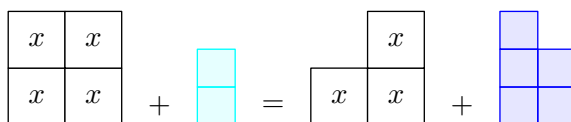
$$\begin{aligned}x + 4 &= 7 \\x &= 7 - 4 \\x &= 3\end{aligned}$$

Mellom første og andre linje er det vanleg å seie at 4 har skifta side, og derfor også fortegn (fra + til -).

Andre eksempel

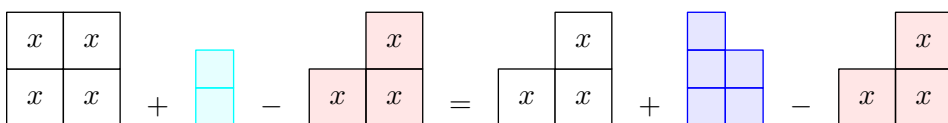
La oss gå vidare til å sjå på ei litt vanskelegare likning¹:

$$4x - 2 = 3x + 5$$



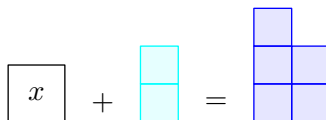
For å skaffe eit uttrykk med x berre på éi side, tar vi vekk $3x$ på begge sider:

$$4x - 2 - 3x = 3x + 5 - 3x$$



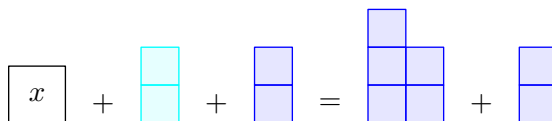
Da får vi at

$$x - 2 = 5$$



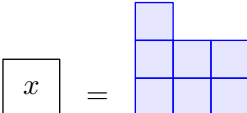
For å isolere x , legg vi til 2 på venstre side. Da må vi også legge til 2 på høgre side:

$$x - 2 + 2 = 5 + 2$$



¹Legg merke til at figuren illustrerer $4x + (-2)$ (sjå [seksjon 5.3](#)) på venstre side. Men $4x + (-2)$ er det same som $4x - 2$ (sjå [seksjon 5.2](#)).

Da får vi at

$$x = 7$$


The diagram shows a box containing the variable x followed by an equals sign and a grid of 6 blue squares. The grid is arranged in 3 rows and 2 columns.

Stega vi har tatt kan oppsummerast slik:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 3x + 5 && 1. \text{ figur} \\ 4x - \textcolor{red}{3x} - 2 &= 3x - \textcolor{red}{3x} + 5 && 2. \text{ figur} \\ x - 2 &= 5 && 3. \text{ figur} \\ x - 2 + \textcolor{blue}{2} &= 5 + \textcolor{blue}{2} && 4. \text{ figur} \\ x &= 7 && 5. \text{ figur} \end{aligned}$$

Dette kan vi på ein forenkla måte skrive slik:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 3x + 5 \\ 4x - \textcolor{red}{3x} &= 5 + 2 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

9.1 Flytting av tal over likskapsteiknet

I ei likning ønsker vi å samle alle x -ledd og alle kjente ledd på kvar si side av likskapsteiknet. Skifter eit ledd side, skifter det forteikn.

Eksempel 1

Løys likninga

$$3x + 5 = 2x + 9$$

Answer

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 9 - 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

Answer

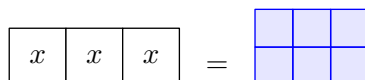
$$\begin{aligned} -4x + 5x &= 12 + 3 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Gonging og deling

Deling

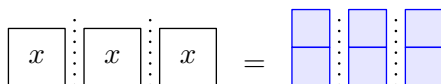
Hittil har vi sett på likningar der vi endte opp med éin x på den eine sida av likhetsteiknet. Ofte har vi fleire x -ar, som for eksempel i likninga

$$3x = 6$$


$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & x & x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \end{array}$$

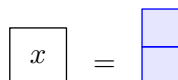
Deler vi venstresiden vår i tre like grupper, får vi éin x i kvar gruppe. Deler vi også høgresida inn i tre like grupper, må alle gruppene ha den same verdien

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$


$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \vdots \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \vdots \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \text{blue} \\ \hline \end{array} \vdots \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \text{blue} \\ \hline \end{array} \vdots \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \text{blue} \\ \hline \end{array}$$

Altså er

$$x = 2$$


$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \text{blue} \\ \hline \end{array}$$

La oss oppsummere utrekninga vår:

$$3x = 6$$

1. figur

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

2. figur

$$x = 2$$

3. figur

Du huskar kanskje at vi gjerne skriv

$$\cancel{3x}$$

$$\cancel{6}$$

9.2 Deling på begge sider av ei likning

Vi kan dele begge sider av ei likning med det same talet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$4x = 20$$

Answer

$$\begin{aligned}\cancel{4}x &= \frac{20}{\cancel{4}} \\ x &= 5\end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$2x + 6 = 3x - 2$$

Answer

$$\begin{aligned}2x - 3x &= -2 - 6 \\ -x &= -8 \\ \cancel{-1}x &= \frac{-8}{\cancel{-1}} & (-x = -1x) \\ x &= 8\end{aligned}$$

Gonging

Det siste tilfellet vi skal sjå på er når likningar inneheld brøkdeler av den ukjende, som for eksempel i likninga

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\boxed{\frac{x}{3}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Vi kan få éin x på venstresida viss vi legg til to eksemplar av $\frac{x}{3}$. Likninga fortel oss at $\frac{x}{3}$ har same verdi som 4. Dette betyr at for kvar $\frac{x}{3}$ vi legg til på venstresida, må vi legge til 4 på høgresida, skal sidene ha same verdi.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$

$$\boxed{\frac{x}{3}} + \boxed{\frac{x}{3}} + \boxed{\frac{x}{3}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Vi legger no merke til at $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \cdot 3$ og at $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$:

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{x}{3} & \frac{x}{3} & \frac{x}{3} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

Og da $\frac{x}{3} \cdot 3 = x$ og $4 \cdot 3 = 12$, har vi at

$$x = 12$$

$$\boxed{x} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

Ei oppsummering av stega våre kan vi skrive slik:

$$\frac{x}{3} = 4$$

1. figur

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$

2. figur

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

3. figur

$$x = 12$$

4. figur

Dette kan vi kortare skrive som

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

9.3 Gonging på begge sider av ei likning

Vi kan gonge begge sider av ei likning med det same talet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$\frac{x}{5} = 2$$

Answer

$$\begin{aligned}\frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} &= 2 \cdot 5 \\ x &= 10\end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

Answer

$$\frac{7x}{10} - \frac{x}{10} = 13 + 5$$

$$\frac{6x}{10} = 18$$

$$\frac{6x}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 18 \cdot 10$$

$$6x = 180$$

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{180}{6}$$

$$x = 30$$

9.3 Løysingsmetodane oppsummert

9.4 Løysingsmetodar for likningar

Vi kan alltid

- addere eller subtrahere begge sider av ei likning med det same talet. Dette er ekvivalent til å flytte eit ledd fra den eine sida av likninga til den andre, så lenge vi også skiftar forteikn på leddet.
- gonge eller dele begge sider av ei likning med det same tallet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Answer

$$\begin{aligned}3x - 2x &= 6 + 4 \\x &= 10\end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$9 - 7x = -8x + 3$$

Answer

$$\begin{aligned}9 - 7x &= -8x + 3 \\8x - 7x &= 3 - 9 \\x &= -6\end{aligned}$$

Eksempel 3

Løys likninga

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Answer

$$10x - 7x = 20 - 5$$

$$3x = 15$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

Eksempel 4

Løys likninga

$$15 - 4x = x + 5$$

Answer

$$15 - 5 = x + 4x$$

$$10 = 5x$$

$$\frac{10}{5} = \frac{5x}{5}$$

$$2 = x$$

Merk: I dei andre eksempla har vi valgt å samle x -ane på venstre side av likninga, men ein kan likså gjerne samle dei på høgre side. Ved å gjere det her har vi unngått utrekningar med negative tal.

Eksempel 5

Løys likninga

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

Answer

$$\frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} = 20 + 8$$

$$\frac{7x}{9 \cdot 7} = \frac{28}{7}$$

$$\frac{x}{9} \cdot 9 = 4 \cdot 9$$

$$x = 36$$

Eksempel 6

Løys likninga

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Answer

Får å unngå brøkar, gongar vi begge sider med fellesnemnaren 12:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) 12 = \left(\frac{5}{12}x + 2\right) 12 \quad (9.1)$$

$$\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \quad (*)$$

$$4x + 2 = 5x + 24 \quad (9.2)$$

$$4x - 5x = 24 - 2 \quad (9.3)$$

$$-x = 22 \quad (9.4)$$

$$\frac{\cancel{1}x}{\cancel{1}} = \frac{22}{-1} \quad (9.5)$$

$$x = -22 \quad (9.6)$$

Tips

Mange liker å lage seg ein regel om at "vi kan gonge eller dele alle ledd med det same talet". I eksempelet over kunne vi da hoppa direkte til andre linje i utrekninga.

Eksempel 7

Løys likninga

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

Answer

Vi gongar begge sider med fellesnemnaren $2x$:

$$2x \left(3 - \frac{6}{x}\right) = 2x \left(2 + \frac{5}{2x}\right)$$

$$6x - 12 = 4x + 5$$

$$6x - 4x = 5 + 12$$

$$2x = 17$$

$$x = \frac{17}{2}$$

9.4 Potenslikningar

La oss løyse likninga

$$x^2 = 9$$

Dette kallast ei *potenslikning*. Potenslikningar er vanlegvis vanskelege å løyse berre ved hjelp av dei fire rekneartane, så her må vi også nytte oss av potensreglar. Vi opphøg begge sidene av likninga med den omvende brøken¹ til 2:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Av regel ?? er

$$x^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 9^{\frac{1}{2}}$$

Sidan $3^2 = 9$, er $9^{\frac{1}{2}} = 3$. No legg vi merke til dette:

Prinsippet erklært på side 173 seier at vi kan, som vi no gjorde, utføre ein matematisk operasjon på begge sider av likninga. Men, å følge dette prinsippet garanterer ikkje at alle løysingar er funne.

Når det kjem til vår likning, er $x = 3$ ei løysing. For orden si skuld kan vi bekrefte dette med utrekninga

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Men vi har også at

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Altså er -3 også ei løysing av likninga vi starta med!

9.5 Potenslikningar

Ei likning som kan bli skriven som

$$x^a = b$$

der a og b er konstantar, er ei *potenslikning*.

Likninga har a forskjellige løysingar.

¹Hugs at $2 = \frac{2}{1}$.

Eksempel 1

Løys likninga

$$x^2 + 5 = 21$$

Answer

$$x^2 = 21 - 5$$

$$x^2 = 16$$

Sidan $4 \cdot 4 = 16$ og $(-4) \cdot (-4) = 16$, har vi at

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -4$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$3x^2 + 1 = 7$$

Answer

$$3x^2 = 7 - 1$$

$$3x^2 = 6$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x^2 = 2$$

Altså er

$$x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}$$

Merk

Sjølv om likninga

$$x^a = b$$

har a løysingar, er ikkje alle naudsynleg *reelle*¹. I denne boka nøyer vi oss med å finne alle rasjonale eller irrasjonale tal som løyser likninga. For eksempel har likninga

$$x^3 = 8$$

3 løysingar, men vi nøyer oss med å finne at $x = 2$ er ei løysing.

¹Som tidlegare nemnd, *reelle* og *imaginære* tal er noko vi ikkje går nærare inn på i denne boka

9.5 Ulikskapar

9.5.1 Introduksjon

Mens ei likning viser to uttrykk som er like, vil ein *ulikskap* vise to uttrykk som er ulike. For å skrive ulikskapar har vi desse symbola:

| | |
|--------|---------------------------|
| $<$ | "er mindre enn" |
| $>$ | "er større enn" |
| \leq | "er mindre enn eller lik" |
| \geq | "er større enn eller lik" |

Ein ulikskap mellom to tal er avgjort av verdien og forteiknet til tala:

9.6 Ulikskapar

- Eit positivt tal er større enn eit negativt tal.
- For tal med same forteikn, er det talet med størst absoluttverdi som er størst.
- 0 er større enn eit kvart negativt tal og mindre enn eit kvart positivt tal.

Eksempel 1

$$9 > 8$$

Eksempel 2

$$-9 < -8$$

Eksempel 3

$$-7 < 1$$

Eksempel 4

$$a - 3 \geq 1$$

Undersøk om ulikskapen er sann viss

a) $a = 5$

b) $a = 4$

c) $a = 3$

Answer

a) Når $a = 5$, har vi at

$$5 - 3 \geq 1$$

$$2 \geq 1$$

Sidan $2 < 1$, er ulikskapen sann.

b) Når $a = 4$, har vi at

$$4 - 3 \geq 1$$

$$1 \geq 1$$

Sidan 1 er lik 1, er ulikskapen sann.

c) Når $a = 3$, har vi at

$$3 - 3 \geq 1$$

$$0 \geq 1$$

Sidan 0 er mindre enn 1, er ulikskapen usann.

9.5.2 Løysing av ulikskapar

Vi kan løyse ulikskapar ved å bruke metodane fra [regel 9.4](#), men med eitt unntak; *om vi gongar eller deler med negative tal, skiftar ulikskapen symbol.* For å forklare kva som skjer, lat oss bruke den enkle ulikskapen

$$9 > 8$$

Om vi gongar begge sider av ulikskapen med -1 , får vi -9 på venstre side og -8 på høgre side. Men $-9 < -8$. Symbolet fra vår opprinnelege ulikskap har altså endra seg frå $>$ til $<$.

9.7 Løysing av ulikskapar

Ulikskapar kan løysast på same måte som likningar, men med eit unntak: Viss ein gongar eller deler begge sider av ein ulikskap med eit negativt tal, vil $>$ endre seg til $<$, og omvend.

Eksempel 1

Løys ulikskapen

$$5x - 3 \geq 2x + 6$$

Answer

$$5x - 3 \geq 2x + 6$$

$$3x \geq 9$$

$$x \geq 3$$

Eksempel 2

Løys ulikskapen

$$4x - 8 \leq 6x + 12$$

Answer

$$4x - 8 \leq 6x + 12$$

$$-2x \leq 20$$

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{20}{-2}$$

$$x \geq -10$$

Merk: Her kan ein sjølvsgatt unngå å dele med -2 ved å isolere x -ane på høgre side av ulikskapen i staden for venstre.

Oppgaver for kapittel 9

9.2.1

Løs likningene.

- a) $x + 8 = 18$ b) $x - 3 = 2$ c) $x - 8 = 1$
d) $x + 12 = 14$ e) $x - 1 = 2$ f) $x - 3 = 1$
g) $21 = x + 11$ h) $24 = x + 16$ i) $4 = x - 6$

9.2.2

Løs ligningene.

- a) $16x - 20 = 15x + 17$ b) $18x - 11 = 17x + 18$
c) $17x - 15 = 16x + 8$ d) $4x - 9 = 6 + 3x$
e) $12x - 6 = 11x + 2$ f) $2x + 10 = 3x - 1$
g) $5 + 8x = 9x - 18$ h) $15 + 2x = 3x - 4$
i) $9x + 8 = 10x - 2$ j) $17x + 9 = 18x - 19$

9.2.3

Løs ligningene.

- a) $3x = 12$ b) $10x = 50$ c) $7x = 63$ d) $2x = 30$

9.2.4

Løs ligningene.

- a) $\frac{x}{4} = 2$ b) $\frac{x}{9} = 8$ c) $\frac{x}{7} = 7$ d) $\frac{x}{15} = 10$

9.2.5

Løs ligningene.

- a) $18x - 27 = 9x + 36$ b) $7x - 27 = 4x + 3$
c) $15x - 16 = 7x + 32$ d) $13x - 42 = 7x + 12$
e) $4 + 9x = 13x - 32$ f) $7x + 8 = 11x - 24$
g) $5x + 4 = 8x - 11$ h) $7 + 10x = 14x - 9$

9.2.6

Gitt en rettvinklet trekant $\triangle ABC$, hvor $\angle C = 90^\circ$. Vis at

$$\angle A = 90^\circ - \angle B$$

9.2.7 (E22)

Løs ligningen

$$3 \cdot 24 \cdot 9 = 4 \cdot 9 \cdot x$$

9.5.1 (1TV21D1)

Løs ligningssystemet

$$2x - y = 4$$

$$x - 2y = 5$$

Gruble 13

a) Vis at

$$0,2626\dots = \frac{26}{99}$$

Gitt

$$a = b \left(\frac{1}{10^c} + \frac{1}{10^{2c}} + \frac{1}{10^{3c}} + \dots \right)$$

hvor b er et tall med c siffer.

b) Vis at hvis $b = 26$, er $a = 0,2626\dots$.

c) Vis at

$$a = \frac{b}{10^c - 1}$$

Kapittel 10

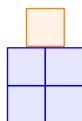
Funksjonar

10.1 Introduksjon

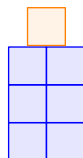
Variablar er verdiar som forandrar seg. Ein verdi som forandrar seg i takt med at ein variabel forandrar seg, kallar vi ein *funksjon*.



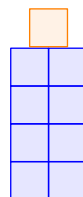
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

I figurane over forandrar antalet ruter seg etter eit bestemt mønster. Matematisk kan vi skildre dette mønsteret slik:

$$\text{Antal ruter i Figur 1} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$\text{Antal ruter i Figur 2} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$\text{Antal ruter i Figur 3} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\text{Antal ruter i Figur 4} = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

For ein figur med eit vilkårleg nummer x har vi at

$$\text{Antal ruter i Figur } x = 2x + 1$$

Antal ruter forandrar seg altså i takt med at x forandrar seg, og da seier vi at

"Antal ruter i Figur x " er ein funksjon av x

$2x + 1$ er *funksjonsuttrykket* til funksjonen "Antal ruter i Figur x "

Generelle uttrykk

Skulle vi jobba vidare med funksjonen vi akkurat har sett på, ville det blitt tungvint å heile tida måtte skrive "Antal ruter i *Figur x*". Det er vanleg å kalle også funksjonar berre for ein bokstav, og i tillegg skrive variabelen funksjonen er avhengig av i parentes. La oss no omdøpe funksjonen "Antal ruter i *Figur x*" til $a(x)$. Da har vi at

$$\text{Antal ruter i Figur } x = a(x) = 2x + 1$$

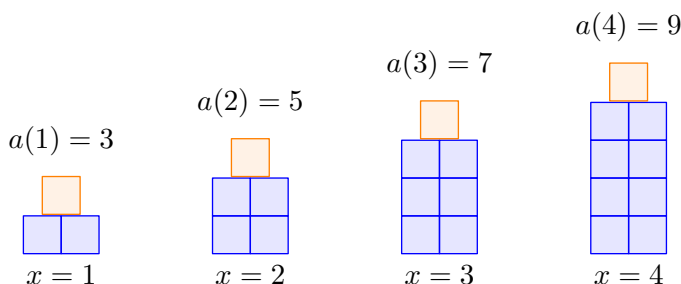
Viss vi skriv $a(x)$, men erstattar x med eit bestemt tal, betyr det at vi skal erstatte x med dette talet i funksjonsuttrykket vårt:

$$a(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

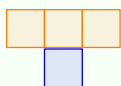
$$a(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$a(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

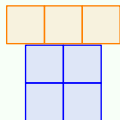


Eksempel

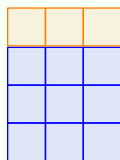
La antal ruter i mønsteret under være gitt av funksjonen $a(x)$.



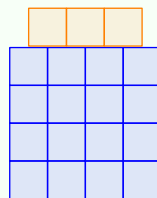
$x = 1$



$x = 2$



$x = 3$



$x = 4$

- a) Finn uttrykket for $a(x)$.
- b) Kor mange ruter er det når $x = 10$?
- c) Kva er verdien til x når $a(x) = 628$?

Answer

a) Vi legg merke til at

- Når $x = 1$, er det $1 \cdot 1 + 3 = 4$ ruter.
- Når $x = 2$, er det $2 \cdot 2 + 3 = 7$ ruter.
- Når $x = 3$, er det $3 \cdot 3 + 3 = 12$ ruter.
- Når $x = 4$, er det $4 \cdot 4 + 3 = 17$ ruter.

Altså er

$$a(x) = x \cdot x + 3 = x^2 + 3$$

b)

$$a(10) = 10^2 + 3 = 100 + 3 = 103$$

Når $x = 10$, er det 103 ruter.

c) Vi har likninga

$$x^2 + 3 = 628$$

$$x^2 = 625$$

Altså er

$$x = 15 \quad \vee \quad x = -15$$

Sidan vi søker ein positiv verdi for x , er $x = 15$.

10.2 Lineære funksjonar og grafar

Når vi har ein variabel x og ein funksjon $f(x)$, har vi heile tida to verdier; verdien til x og den tilhøyrande verdien til $f(x)$. Desse para av verdier kan vi sette inn i eit koordinatsystem¹ for å lage *grafen* til $f(x)$.

La oss bruke funksjonen

$$f(x) = 2x - 1$$

som eksempel. Vi har at

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Desse para av verdier kan vi sette opp i ein tabell:

| | | | | |
|--------|----|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | -1 | 1 | 3 | 5 |

Tabellen over gir punkta

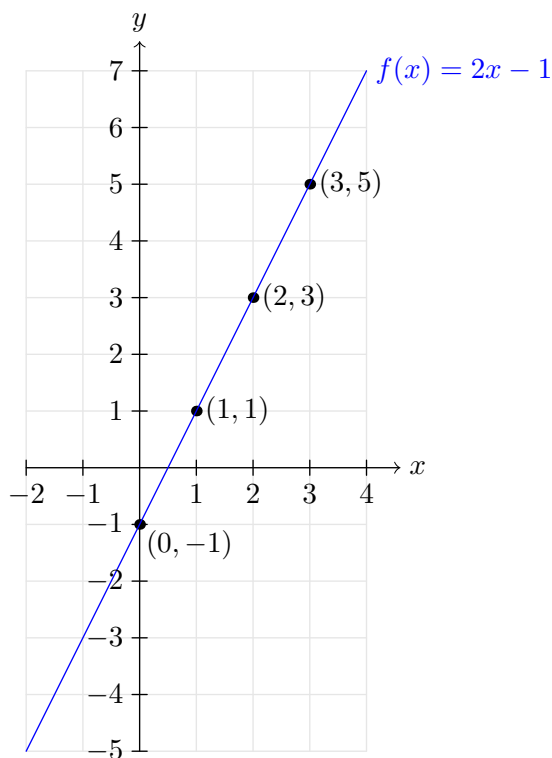
$$(0, -1) \quad (1, 1) \quad (2, 3) \quad (3, 5)$$

Vi plasserer no punkta i eit koordinatsystem (sjå figur på side 197). I samband med funksjonar er det vanleg å kalle horisontalaksen og vertikalaksen for høvesvis x -aksen og y -aksen. Grafen til $f(x)$ er no ein tenkt strek som går gjennom alle dei uendeleg mange punkta vi kan lage av x -verdier og dei tilhøyrande $f(x)$ -verdiane. Vår funksjon er ein *lineær* funksjon, noko som betyr at grafen er ei rett linje. Altså kan grafen teiknast ved å teikne linja som går gjennom punkta vi har funne.

Som vi har vore inne på før, kan vi aldri teikne ei heil linje, berre eit utklipp av ho. Dette gjeld som regel også for grafar. I figuren på side 197 har vi teikna grafen til $f(x)$ for x -verdier mellom -2 og 4 . At x er i dette *intervallet* kan vi skrive som² $-2 \leq x \leq 4$ eller $x \in [-2, 4]$.

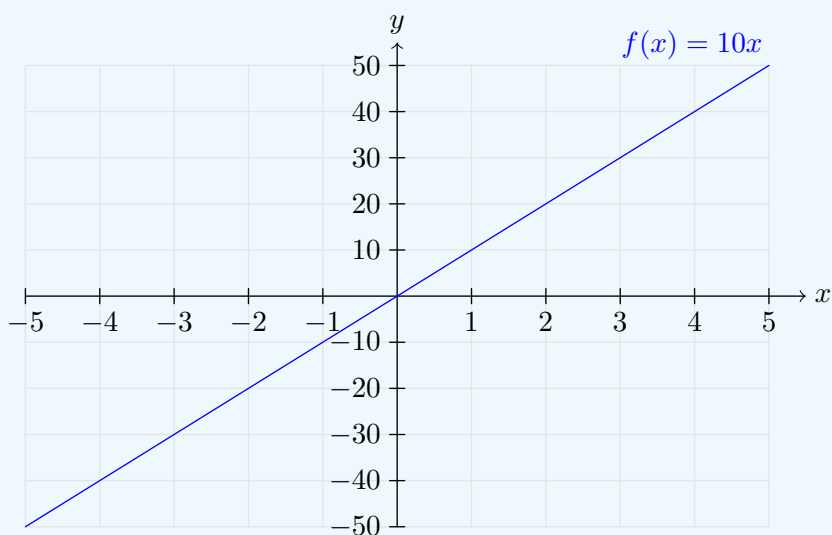
¹Sjå [seksjon 1.3](#).

²Sjå symbolforklaringar på side 4.



Merk

Ei lengde på x -aksen treng ikkje å svare til same verdi som ei lengde på y -aksen.



10.1 Lineære funksjonar

Ein funksjon på forma

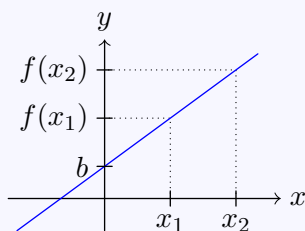
$$f(x) = ax + b$$

der a og b er konstanter, er ein *lineær* funksjon med *stigingstal* a og *konstantledd* b .

Grafen til ein lineær funksjon er ei rett linje som går gjennom punktet $(0, b)$.

For to forskjellige x -verdiar, x_1 og x_2 , er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Eksempel 1

Finn stigingstalet og konstantleddet til funksjonane.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = -3 + \frac{7}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}$$

$$j(x) = 4 - \frac{1}{2}x$$

Answer

- $f(x)$ har stigingstal 2 og konstantledd 1.
- $g(x)$ har stigingstal -3 og konstantledd $\frac{7}{2}$.
- $h(x)$ har stigingstal $\frac{1}{4}$ og konstantledd $-\frac{5}{6}$.
- $j(x)$ har stigingstal $-\frac{1}{2}$ og konstantledd 4.

Eksempel 2

Teikn grafen til

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

for $x \in [-5, 6]$.

Answer

For å teikne grafen til ein linjeær funksjon treng vi berre å finne to punkt som ligg på grafen. Kva to punkt dette er, er det fritt å velge, så for enklast mogleg utrekning startar vi med å finne punktet der $x = 0$:

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$$

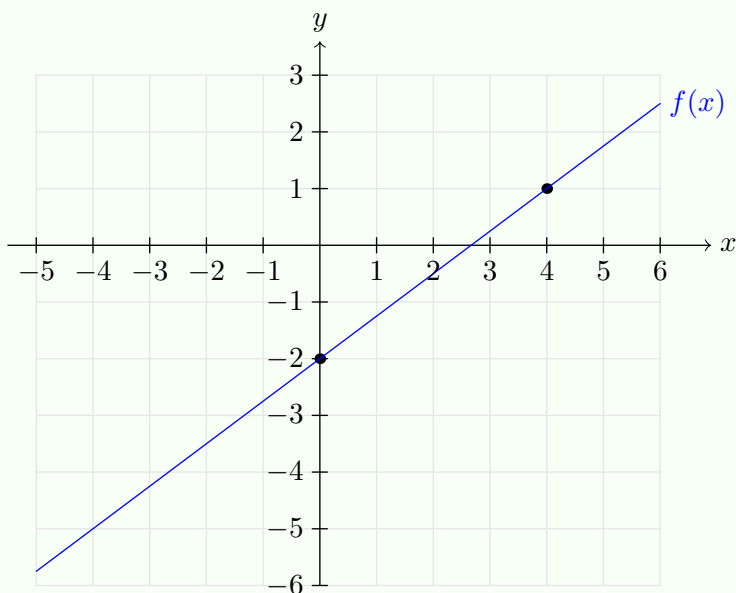
Vidare velg vi $x = 4$, sidan dette også gir oss ei enkel utrekning:

$$f(4) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$$

No har vi informasjonen vi treng, og for ordens skuld set vi han inn i ein tabell:

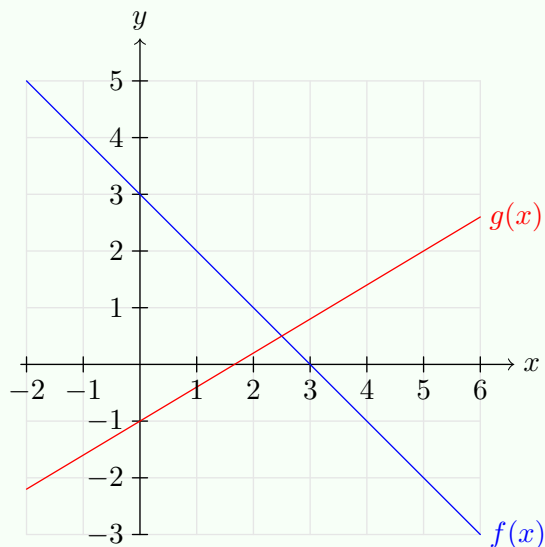
| | | |
|--------|----|---|
| x | 0 | 4 |
| $f(x)$ | -2 | 1 |

Vi teiknar punkta og trekk ei linje gjennom dei:



Eksempel 3

Finn funksjonsuttrykka til $f(x)$ og $g(x)$.



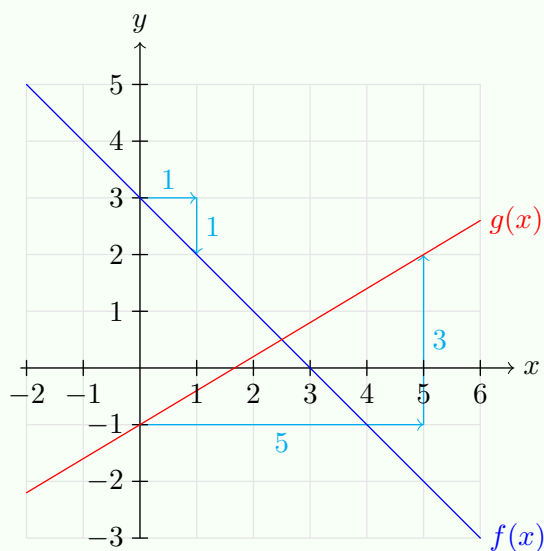
Answer

Vi startar med å finne funksjonsuttrykket til $f(x)$. Punktet $(0, 3)$ ligg på grafen til $f(x)$ (sjå også figur på neste side). Da veit vi at $f(0) = 3$, og dette må bety at 3 er konstantleddet til $f(x)$. Vidare ser vi at punktet $(1, 2)$ også ligg på grafen til $f(x)$. Stigingstalet til $f(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2 - 3}{1 - 0} = -1$$

Altså er

$$f(x) = -x + 3$$



Vi går så over til å finne uttrykket til $g(x)$. Punktet $(0, -1)$ ligg på grafen til $g(x)$. Da veit vi at $f(0) = -1$, og dette må bety at -1 er konstantleddet til $g(x)$. Vidare ser vi at punktet $(5, 2)$ også ligg på grafen til $g(x)$. Stigingstalet til $g(x)$ er da gitt ved brøken

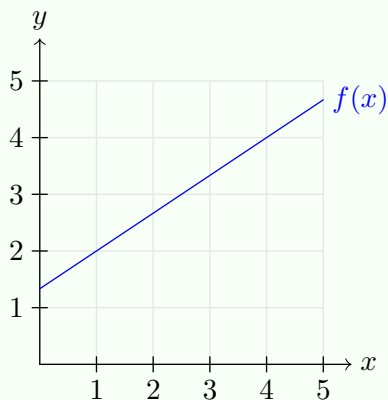
$$\frac{2 - (-1)}{5 - 0} = \frac{3}{5}$$

Altså er

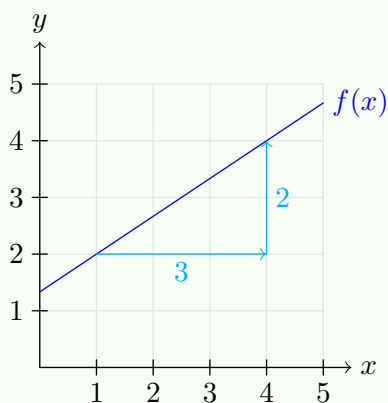
$$g(x) = \frac{3}{5}x + 1$$

Eksempel 4

Finn stigningstalet til $f(x)$.



Answer



Vi legg merke til at punkta $(1, 2)$ og $(4, 4)$ ligg på grafen til $f(x)$.
Altså er stigningstalet til $f(x)$ gitt ved brøken

$$\frac{4 - 2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

10.1 Lineære funksjonar (forklaring)

Uttrykk for a

Gitt ein lineær funksjon

$$f(x) = ax + b$$

For to forskjellige x -verdiar, x_1 og x_2 , har vi at

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad (10.1)$$

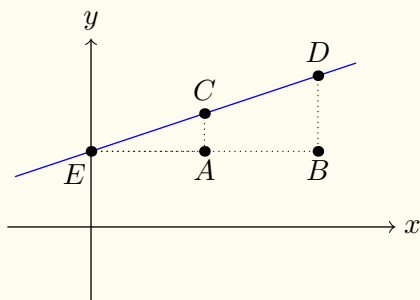
$$f(x_2) = ax_2 + b \quad (10.2)$$

Vi trekk (10.1) fra (10.2), og får at

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - (ax_1 + b) \\ f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 - ax_1 \\ f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2 - x_1) \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= a \end{aligned} \quad (10.3)$$

Grafen til ein lineær funksjon er ei rett linje

Gitt ein lineær funksjon $f(x) = ax + b$, og to forskjellige x -verdiar x_1 og x_2 . Vi set $A = (x_1, b)$, $B = (x_2, b)$, $C = (x_1, f(x_1))$, $D = (x_2, f(x_2))$ og $E = (0, b)$.



Av (10.3) har vi at

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} &= a \\ \frac{ax_1 + b - b}{x_1} &= a \\ \frac{ax_1}{x_1} &= a \end{aligned} \quad (10.4)$$

Tilsvarande er

$$\frac{ax_2}{x_2} = a \quad (10.5)$$

Vidare har vi at

$$AC = f(x_1) - b = ax_1$$

$$BD = f(x_2) - b = ax_2$$

$$EA = x_1$$

$$EB = x_2$$

Av (10.4) og (10.5) har vi at

$$\frac{ax_1}{x_1} = \frac{ax_2}{x_2}$$

Dette betyr at

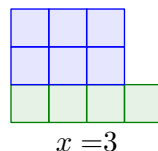
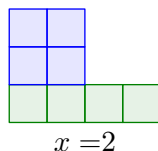
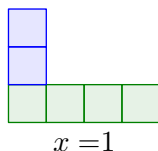
$$\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{EB}$$

I tillegg er $\angle A = \angle B$, altså oppfyller $\triangle EAC$ og $\triangle EBD$ vilkår iii fra [regel 11.15](#), og dermed er trekantene formlike. Dette betyr at C og D ligg på linje, og denne linja må vere grafen til $f(x)$.

Oppgaver for kapittel 10

10.1.1

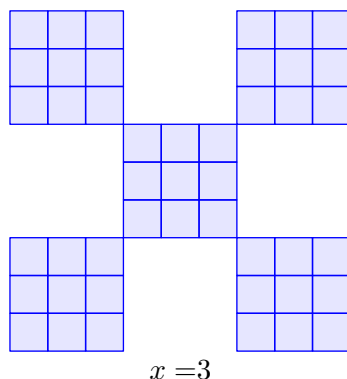
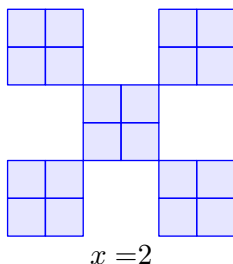
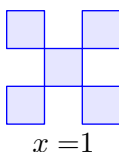
La antall ruter i figuren under være gitt ved $f(x)$.



- Finn et uttrykk for $f(x)$.
- Hvor mange ruter er der når $x = 100$?
- Hva er x når $f(x) = 24$.

10.1.2

La antall ruter i figuren under være gitt ved $a(x)$.



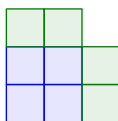
- Finn et uttrykk for $a(x)$.
- Hvor mange ruter er der når $x = 20$?
- Hva er x når $a(x) = 405$?

10.1.3

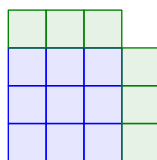
La antall ruter i figuren under være gitt ved $b(x)$.



$x = 1$



$x = 2$

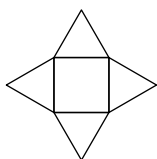


$x = 3$

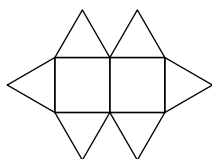
- a) Finn et uttrykk for $b(x)$.
- b) Hvor mange ruter er der når $x = 20$?
- c) Hva er x når $b(x) = 80$?

10.1.4 (EGV22D1)

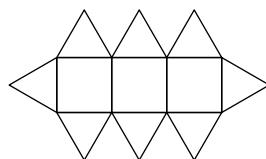
Under vises de tre første figurene i et mønster. Figurene er satt sammen av trekanter og kvadrater.



1



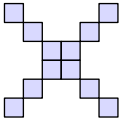
2



3

Hvor mange trekanter og hvor mange firkanter vil det være i figur nummer 10?

10.1.5 (GV23D1)

| FIGURNUMMER | FIGUR 1 | FIGUR 2 | FIGUR 3 |
|--------------------------|---------|---|---------|
| TEGNING AV FIGUREN | |  | |
| ANTALL BRIKKER I FIGUREN | 5 | 12 | 21 |

- Tegn Figur 1 og Figur 3 inn i tabellen.
- Lag en formel for antall brikker i Figur n , og forklar hvordan du kom fram til formelen.

10.1.6

La x være et positivt heltall.

- Lag en funksjon $p(x)$ som gir verdien til positivt partall nr. x .
- Lag en funksjon $o(x)$ som gir verdien til positivt oddetall nr. x .

10.2.1

Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonene.

a) $f(x) = 5x + 10$ b) $g(x) = 3x - 12$

c) $h(x) = -\frac{1}{7}x - 9$ d) $i(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

10.2.2

Tegn grafen til disse funksjonene på intervallet $x \in [-5, 5]$:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = -3x + 5$

10.3.1

Gitt likningsettet

$$x - y = 5 \quad (\text{I})$$

$$x + y = 9 \quad (\text{II})$$

- a) Forklar hvorfor løsningen av likningssettet er skjæringspunktet til funksjonene

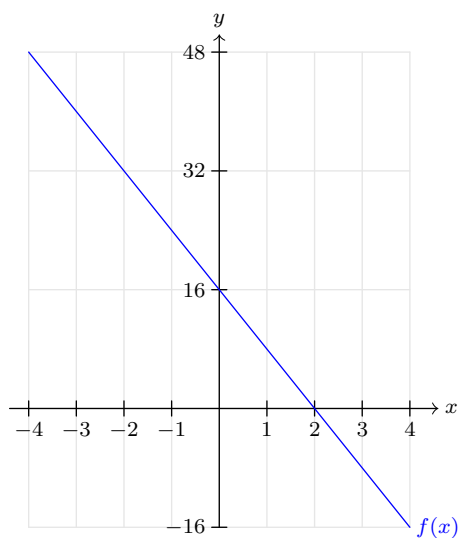
$$f(x) = x - 5$$

$$g(x) = 9 - x$$

- b) Løs likningssettet.

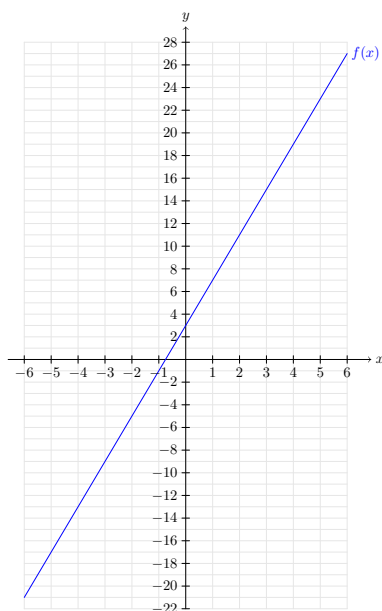
10.3.2

Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$



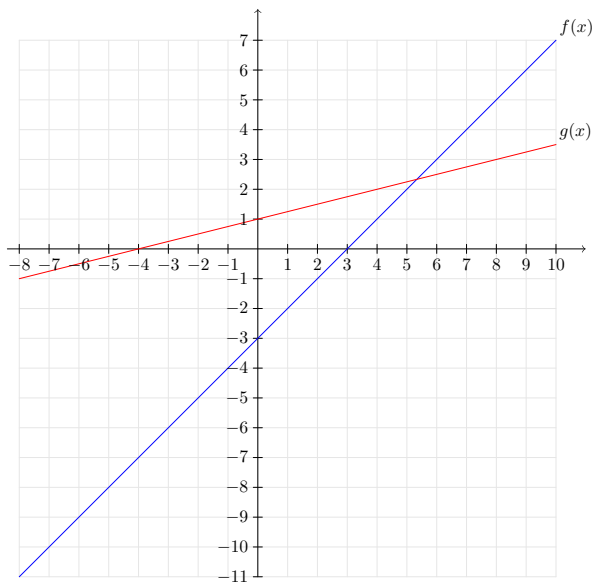
10.3.3

Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$



10.3.4

Finn funksjonsuttrykkene til $f(x)$ og $g(x)$.



Gruble 14

Bruk formlene fra [oppgave 10.1.6](#) til å vise at

- a) summen/differansen mellom to partall er et partall.
- b) summen/differansen mellom to oddetall er et partall.
- c) summen/differansen mellom et partall og et oddetall er et oddetall.

Gruble 15

Funksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$ går gjennom punktene $(-3, 49)$, $(0, 4)$ og $(10, 149)$. Finn verdiene til a , b og c .

Gruble 16

- a) Gitt at en lineær funksjon $f(x)$ har stigningstall 3, og at punktet $(2, 1)$ ligger på grafen til $f(x)$. Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$.
- b) Gitt en lineær funksjon $f(x)$ med stigningstall a , og punktet (x_1, y_1) , som ligger på grafen til $f(x)$. Vis at¹

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1$$

(Denne formelen kalles **ettpunktsformelen**.)

Gruble 17

Gitt funksjonene $f(x)$ og $g(x)$, hvor grafen til g er linja som går gjennom $A = (a, f(a))$ og $B = (b, f(b))$. Vis at

$$f - g = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

¹Denne formelen kalles *ettpunktsformelen*.

Kapittel 11

Geometri

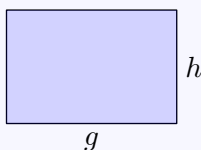
11.1 Formlar for areal og omkrins

I [seksjon 7.4](#) såg vi på formlar for arealet til rektangel og trekantar, men da brukte vi ord i staden for symbol. Her skal vi gjengi desse to formlane i ei meir algebraisk form, etterfulgt av andre klassiske formlar for areal, omkrins og volum.

11.1 Arealet til eit rektangel (7.4)

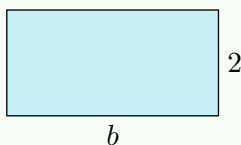
Arealet A til eit rektangel med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet.



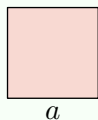
Answer

Arealet A til rektangelet er

$$A = b \cdot 2 = 2b$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Answer

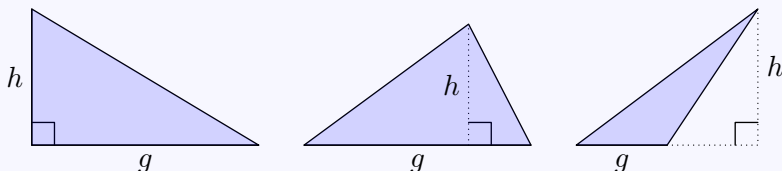
Arealet A til kvadratet er

$$A = a \cdot a = a^2$$

11.2 Arealet til ein trekant (7.4)

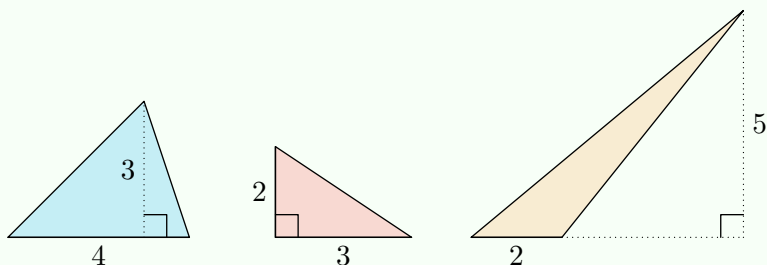
Arealet A til ein trekant med grunnlinje g og høyde h er

$$A = \frac{gh}{2}$$



Eksempel

Kven av trekantane har størst areal?



Answer

Vi let A_1 , A_2 og A_3 vere areala til høvesvis trekanten til venstre, i midten og til høgre. Da har vi at

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

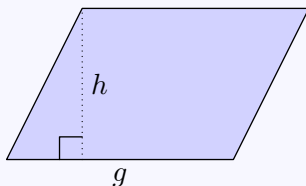
$$A_3 = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Altså er det trekanten til venstre som har størst areal.

11.3 Arealet til eit parallelogram

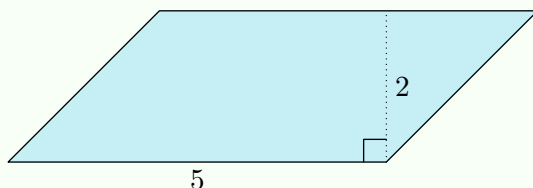
Arealet A til eit parallelogram med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel

Finn arealet til parallelogrammet



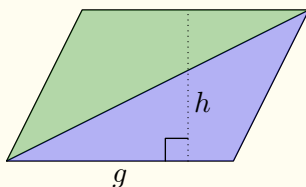
Answer

Arealet A til parallelogrammet er

$$A = 5 \cdot 2 = 10$$

11.3 Arealet til eit parallelogram (forklaring)

Av eit parallelogram kan vi alltid lage oss to trekantar ved å teikne inn ein av diagonalane:



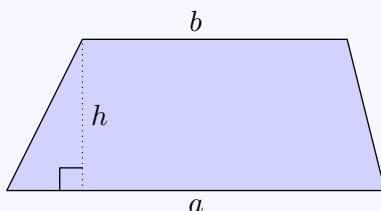
Dei farga trekantane på figuren over har begge grunnlinje g og høgde h . Da veit vi at begge har areal lik $\frac{gh}{2}$. Arealet A til parallelogrammet blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} + \frac{gh}{2} \\ &= g \cdot h \end{aligned}$$

11.4 Arealet til eit trapes

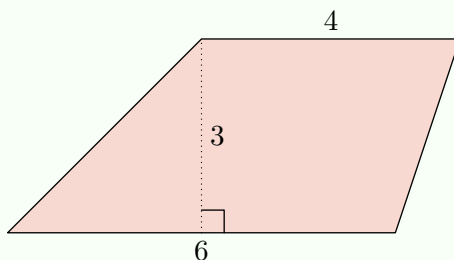
Arealet A til eit trapes med parallelle sider a og b og høgde h er

$$A = \frac{h(a + b)}{2}$$



Eksempel

Finn arealet til trapeset.



Answer

Arealet A til trapeset er

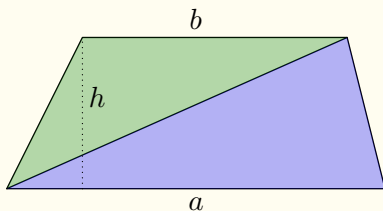
$$\begin{aligned} A &= \frac{3(6 + 4)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Merk

Når ein tek utgangspunkt i ei grunnlinje og ei høgde, er arealformlane for eit parallellogram og eit rektangel identiske. Å anvende [regel 11.4](#) på eit parallellogram vil også resultere i eit uttrykk tilsvarande gh . Dette er fordi eit parallellogram berre er eit spesialtilfelle av eit trapes (og eit rektangel er berre eit spesialtilfelle av eit parallellogram).

11.4 Arealet til eit trapes (forklaring)

Også for eit trapes får vi to trekanten viss vi teikner ein av diagonalene:



I figuren over er

$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{ah}{2}$$

$$\text{Arealet til den grønne trekanten} = \frac{bh}{2}$$

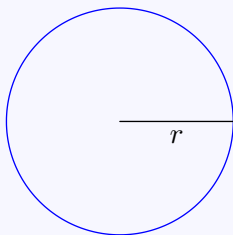
Arealet A til trapeset blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} \\ &= \frac{h(a+b)}{2} \end{aligned}$$

11.5 Omkrinsen til ein sirkel (og π)

Omkrinsen O til ein sirkel med radius r er

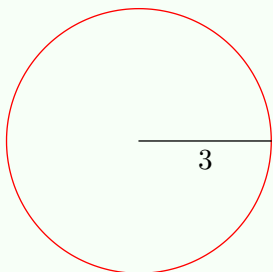
$$O = 2\pi r$$



$$\pi = 3.141592653589793....$$

Eksempel 1

Finn omkrinsen til sirkelen.



Answer

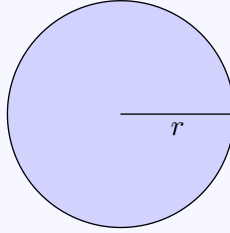
Omkrinsen O er

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \cdot 3 \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

11.6 Arealet til ein sirkel

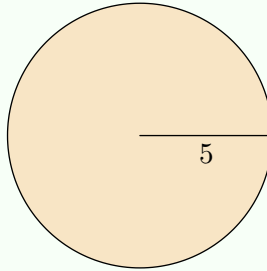
Arealet A til ein sirkel med radius r er

$$A = \pi r^2$$



Eksempel

Finn arealet til sirkelen.



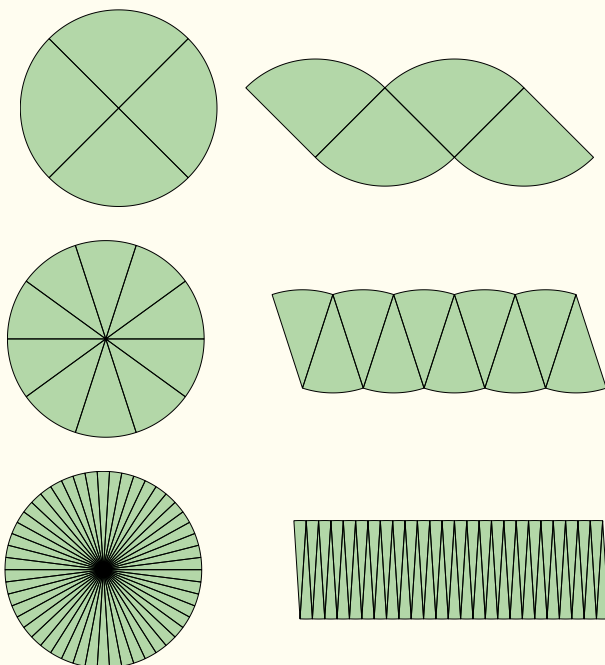
Answer

Arealet A til sirkelen er

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

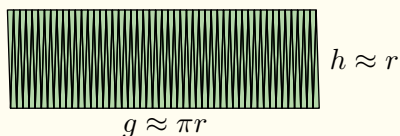
11.6 Arealet til ein sirkel (forklaring)

I figuren under har vi delt opp ein sirkel i 4, 10 og 50 (like store) sektorar, og lagt desse bitene etter kvarandre.



I kvart tilfelle må dei små sirkelbogene til saman utgjere heile boga, altså omkrinsen, til sirkelen. Viss sirkelen har radius r , betyr dette at summen av bogene er $2\pi r$. Og når vi har like mange sektorar med bogen vendt opp som sektorar med bogen vend ned, må total-lengda av bogenene vere πr både oppe og nede.

Men jo fleire sektorar vi deler sirkelen inn i, jo meir liknar sam-manssettinga av dei på eit rektangel (i figuren under har vi 100 sektorar). Grunnlinja g til dette "rektangelet" vil vere tilnærma lik πr , mens høgda vil vere tilnærma lik r .



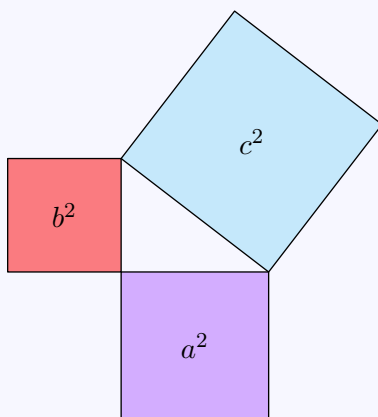
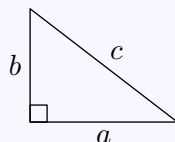
Arealet A til "rektangelet", altså sirkelen, blir da

$$A \approx gh \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$$

11.7 Pytagoras' setning

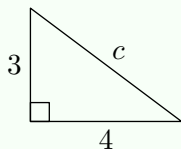
I ein rettvinkla trekant er arealet til kvadratet danna av hypotenusen lik summen av areala til kvadrata danna av katetane.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Eksempel 1

Finn lengda til c .



Answer

Vi veit at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

der a og b er lengdene til dei kortaste sidene i trekanten. Dermed er

$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

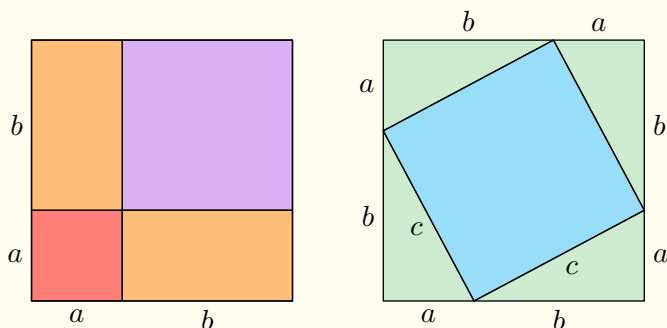
Altså har vi at

$$c = 5 \quad \vee \quad c = -5$$

Da c er ei lengde, er $c = 5$.

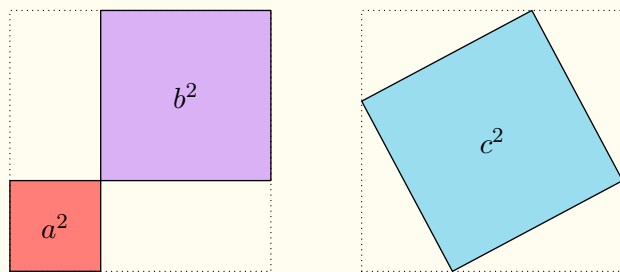
11.7 Pytagoras' setning (forklaring)

Under har vi teikna to kvadrat som er like store, men som er inndelt i forskjellige former.



Vi observerer no følgende:

1. Arealet til det raude kvadratet er a^2 , arealet til det lilla kvadratet er b^2 og arealet til det blå kvadratet er c^2 .
2. Arealet til eit oransje rektangel er ab og arealet til ein grøn trekant er $\frac{ab}{2}$.
3. Om vi tek bort dei to oransje rektangla og dei fire grønne trekantane, er det igjen (av pkt. 2) eit like stort areal til venstre som til høgre.



Dette betyr at

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (11.1)$$

Gitt ein trekant med sidelengder a , b og c , der c er den lengste sidelengda. Så lenge trekanten er rettvinkla, kan vi alltid lage to kvadrat med sidelengder $a+b$, slik som i første figur. (11.1) gjeld dermed for alle rettvinkla trekanter.

11.8 Pytagoras' setning (omvendt versjon)

Gitt en trekant med sidelengder a , b og c , der c er den lengste siden. Da er trekanten rettvinklet bare hvis $a^2 + b^2 = c^2$.

Eksempel

Undersøk om en trekant er rettvinklet når den har

- a) sidelengder 2, 4 og 9.
- b) sidelengder 6, 8 og 10.

Answer

a)

$$2^2 + 4^2 = 20 \neq 9^2 = 81$$

Altså er ikke trekanten rettvinklet i dette tilfellet.

b)

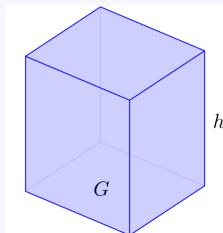
$$6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$$

Altså er trekanten rettvinklet i dette tilfellet.

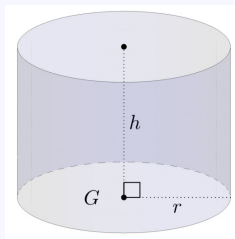
11.9 Volumet til tredimensjonale former

Volumet V til ei firkanta prisme eller ein sylinder med grunnflate G og høgde h er

$$V = G \cdot h$$



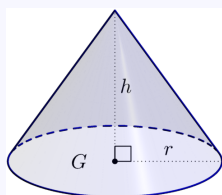
Firkanta prisme



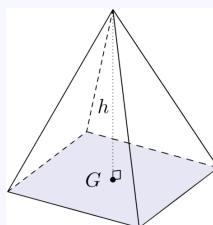
Sylinder

Volumet V til ei kjegle eller ei pyramide med grunnflate G og høgde h er

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



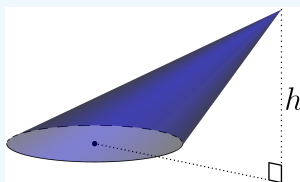
Kjegle



Firkanta pyramide

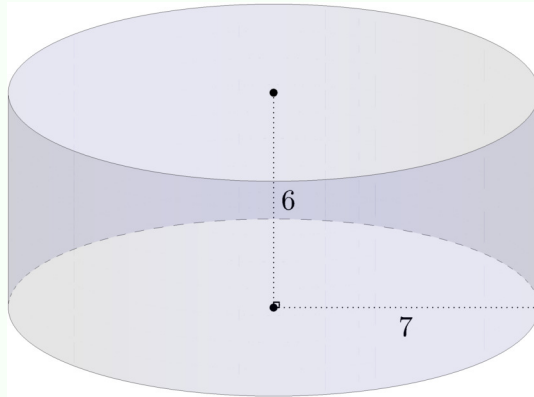
Merk

Formlane frå [regel 11.9](#) gjeld også for prismet, sylindrar, kjegler og pyramider som heller (er skeive). Vis grunnflata er plassert horison-talt, er høgda den vertikale avstanden mellom grunnflata og toppen til figuren.



(For spisse gjenstandar som kjegler og pyramider finst det sjølvsagt bare eitt valg av grunnflate.)

Eksempel 1



Ein sylinder har radius 7 og høgde 5.

- a) Finn grunnflata til sylindren.
- b) Finn volumet til sylindren.

Answer

- a) Av [regel 11.1](#) har vi at

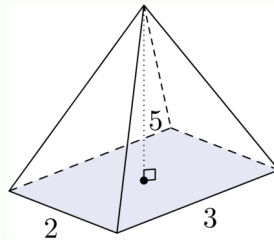
$$\begin{aligned}\text{grunnflate} &= \pi \cdot 7^2 \\ &= 49\pi\end{aligned}$$

- b) Dermed er

$$\begin{aligned}\text{volumet til sylindren} &= 49\pi \cdot 6 \\ &= 294\pi\end{aligned}$$

Eksempel 2

Ei firkanta pyramide har lengde 2, bredde 3 og høyde 5.



- a) Finn grunnflata til pyramiden.
- b) Finn volumet til pyramiden.

Answer

- a) Av [regel 11.1](#) har vi at

$$\begin{aligned}\text{grunnflate} &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

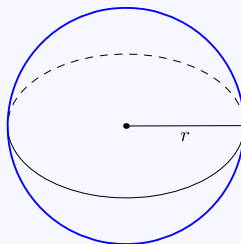
- b) Dermed er

$$\begin{aligned}\text{volumet til pyramiden} &= 6 \cdot 5 \\ &= 30\end{aligned}$$

11.10 Volumet til ei kule

Volumet V til ei kule med radius r er:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

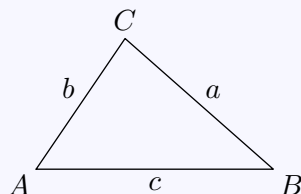


11.2 Kongruente og formlike trekantar

11.11 Konstruksjon av trekantar

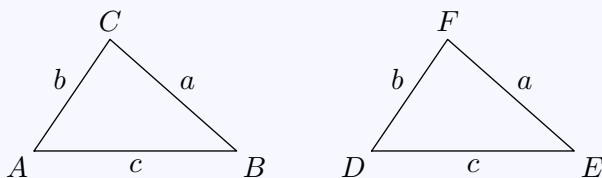
Ein trekant $\triangle ABC$, som vist i figuren under, kan bli unikt konstruert viss ein av følgande kriterium er oppfylt:

- i) c , $\angle A$ og $\angle B$ er kjende.
- ii) a , b og c er kjende.
- iii) b , c og $\angle A$ er kjende.



11.12 Kongruente trekantar

To trekantar som har same form og størrelse er kongruente.

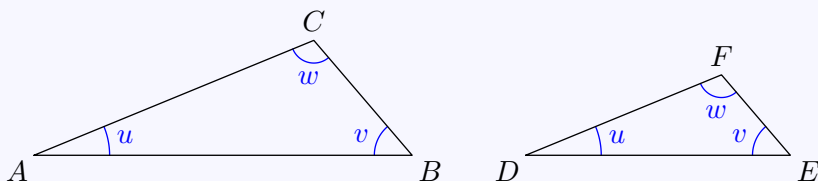


At trekantane i figuren over er kongruente skrivast

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

11.13 Formlike trekantar

Formlike trekantar har tre vinklar som er parvis like store.

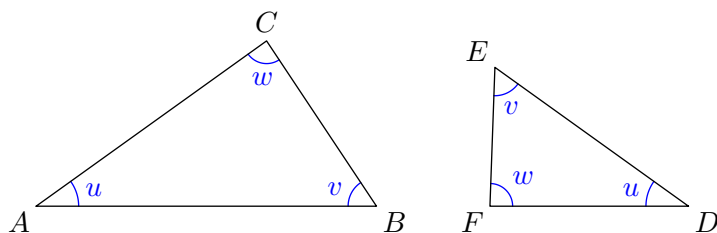


At trekantane i figuren over er formlike skrivast

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Samsvarande sider

Når vi studerer formlike trekantar er *samsvarande sider* eit viktig omgrep. Samsvarande sider er sider som i formlike trekantar står *motstående* den same vinkelen.



For dei formlike trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ har vi at

I $\triangle ABC$ er

- BC motstående til u .
- AC motstående til v
- AB motstående til w .

I $\triangle DEF$ er

- FE motstående til u .
- FD motstående til v
- ED motstående til w .

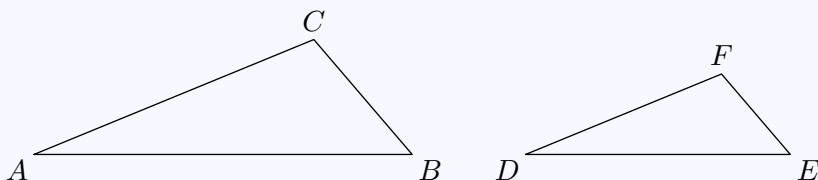
Dette betyr at desse er samsvarande sider:

- BC og FE
- AC og FD
- AB og ED

11.14 Forhold i formlike trekantar

Når to trekantar er formlike, er forholdet mellom samsvarande¹ sider det same.

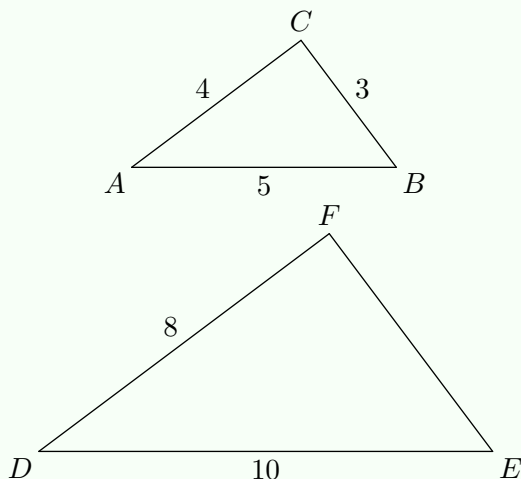
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



¹Vi tek det her for gitt at kva sider som er samsvarande kjem fram av figuren.

Eksempel

Trekantene i figuren under er formlike. Finn lengda til EF .



Answer

Vi observerer at AB samsvarer med DE , BC med EF og AC med DF . Det betyr at

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{EF}{3}$$

$$2 \cdot 3 = \frac{EF}{3} \cdot 3$$

$$6 = EF$$

Merk

Av [Regel 11.14](#) har vi at for to formlike trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

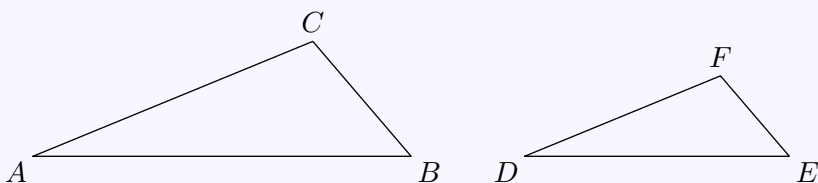
11.15 Vilkår i formlike trekantar

To trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike viss ein av desse vilkåra er oppfylt:

i) To vinklar i trekantane er parvis like store.

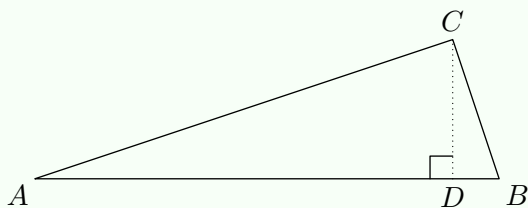
ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

iii) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ og $\angle A = \angle D$.



Eksempel 1

$\angle ACB = 90^\circ$. Vis at $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.



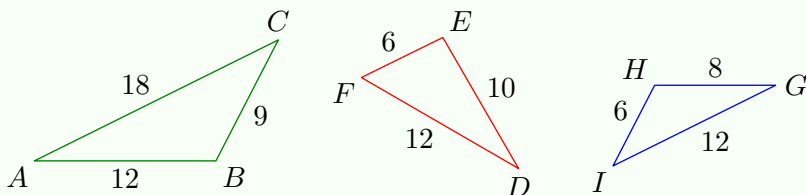
Answer

$\triangle ABC$ og $\triangle ACD$ er begge rettvinkla og dei har $\angle DAC$ felles. Dermed er vilkår *i* fra [regel 11.15](#) oppfylt, og trekantane er da formlike.

Merk: På ein tilsvarande måte kan ein vise at $\triangle ABC \sim \triangle CBD$.

Eksempel 2

Undersøk om trekantene er formlike.



Answer

Vi har at

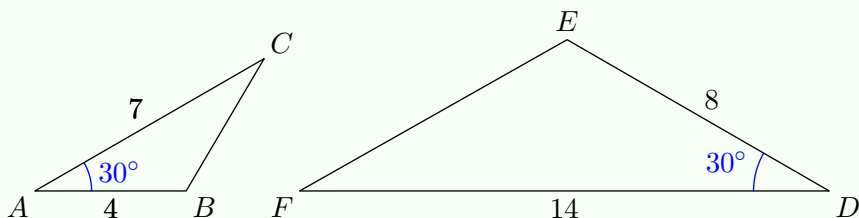
$$\frac{AC}{FD} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, \quad \frac{BC}{FE} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AB}{DE} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, \quad \frac{BC}{IH} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Dermed oppfylder $\triangle ABC$ og $\triangle GHI$ vilkår ii fra [regel 11.15](#), og trekantene er da formlike.

Eksempel 3

Undersøk om trekantene er formlike.



Answer

Vi har at $\angle BAC = \angle EDF$ og at

$$\frac{ED}{AB} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{FD}{AC} = \frac{14}{7} = 2$$

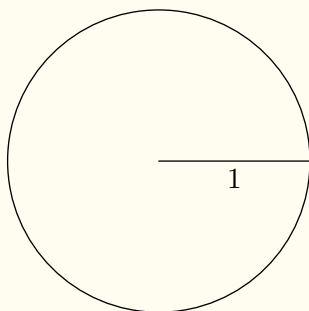
Altså er vilkår iii fra [regel 11.15](#) oppfylt, og da er trekantene formlike.

11.3 Forklaringar

11.5 Omkrinsen til ein sirkel (og π) (forklaring)

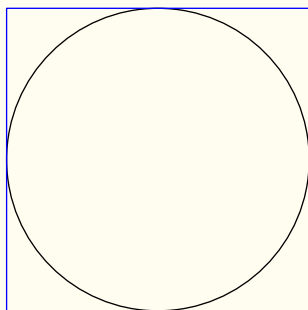
Vi skal her bruke regulære mangekantar langs vegen til ønska resultat. I regulære mangekantar har alle sidene lik lengde. Da det er utelukkande regulære mangekantar vi kjem til å bruke, vil dei bli omtala berre som mangekantar.

Vi skal starte med sjå på tilnærmingar for å finne omkrinsen O_1 av ein sirkel med radius 1.



Øvre og nedre grense

Ein god vane når ein skal prøve å finne ein størrelse, er å spørre seg om ein kan vite noko om kor stor eller liten ein *forventar* at han er. Vi startar derfor med å omslutte sirkelen med eit kvadrat med sidelengde 2:

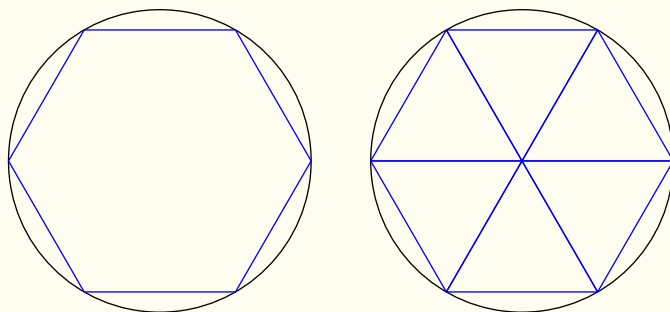


Omkrinsen til sirkelen må vere mindre enn omkrinsen til kvadratet, derfor veit vi at

$$\begin{aligned} O_1 &< 2 \cdot 4 \\ &< 8 \end{aligned}$$

Vidare innskriv vi ein sekskant. Sekskanten kan delast inn i 6 likesida trekantar som alle må ha sidelengder 1. Omkrinsen til sirkelen må vere større enn omkrinsen til sekskanten, noko som gir at

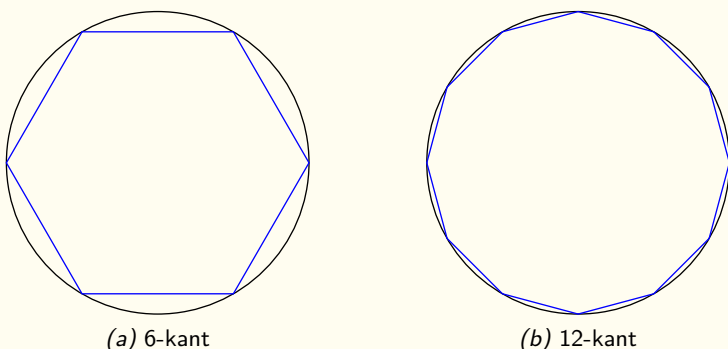
$$\begin{aligned} O_1 &> 6 \cdot 1 \\ &> 6 \end{aligned}$$



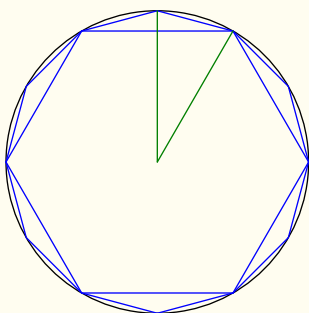
Når vi no skal gå over til ei mykje meir nøyaktig jakt etter omkrinsen, veit vi altså at vi søker ein verdi mellom 6 og 8.

Stadig betre tilnærmingar

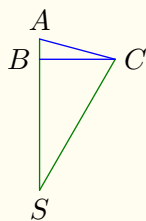
Vi fortsett med tanken om å innskrive ein mangekant. Av figurane under let vi oss overbevise om at dess fleire sider mangekanten har, dess betre estimat vil omkretsen til mangekanten vere for omkrinsen til sirkelen.



Da vi veit at sidelengda til ein 6-kant er 1, er det fristande å undersøke om vi kan bruke denne kunna til å finne sidelengda til andre mangekantar. Om vi innskriv også ein 12-kant i sirkelen vår (og i tillegg ein trekant), får vi ein figur som denne:



(a) Ein 6-kant og ein 12-kant i lag med ein trekant danna av sentrum i sirkelen og ein av sidene i 12-kanten.



(b) Utklipp av trekant fra figur (a).

La oss kalle sidelengda til 12-kanten for s_{12} og sidelengda til 6-kanten for s_6 . Vidare legg vi merke til at punkta A og C ligg på sirkelbogen og at både $\triangle ABC$ og $\triangle BSC$ er rettvinkla trekantar (forklar for deg sjølv kvifor!). Vi har at

$$SC = 1$$

$$BC = \frac{s_6}{2}$$

$$SB = \sqrt{SC^2 - BC^2}$$

$$BA = 1 - SB$$

$$AC = s_{12}$$

$$s_{12}^2 = BA^2 + BC^2$$

For å finne s_{12} må vi finne BA , og for å finne BA må vi finne SB . Vi startar derfor med å finne SB . Da $SC = 1$ og $BC = \frac{s_6}{2}$, er

$$\begin{aligned} SB &= \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \end{aligned}$$

Vi går så vidare til å finne s_{12} :

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= (1 - SB)^2 + \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 \\ &= 1^2 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4} \end{aligned}$$

Ved første augekast ser det ut som vi ikkje kan komme særleg lengre i å forenkle uttrykket på høgre side, men ein liten operasjon vil endre på dette. Hadde vi berre hatt -1 som eit ledd kunne vi slått saman -1 og $\frac{s_6^2}{4}$ til å bli $-SB^2$. Derfor "skaffar" vi oss -1 ved å både addere og subtrahere 1 på høgresida:

$$\begin{aligned}
 s_{12}^2 &= 1 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4} - 1 + 1 \\
 &= 2 - 2SB + SB^2 - \left(1 - \frac{s_6^2}{4}\right) \\
 &= 2 - 2SB + SB^2 - SB^2 \\
 &= 2 - 2SB \\
 &= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
 &= 2 - \sqrt{4} \sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
 &= 2 - \sqrt{4 - s_6^2}
 \end{aligned}$$

Altså er

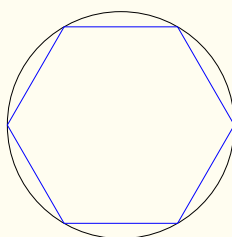
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$

Sjølv om vi her har utleda relasjonen mellom sidelengdene s_{12} og s_6 , er dette ein relasjon vi kunne vist for alle par av sidelengder der den eine er sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den andre. La s_n og s_{2n} høvesvis være sidelengda til ein mangekant og ein mangekant med dobbelt så mange sider. Da er

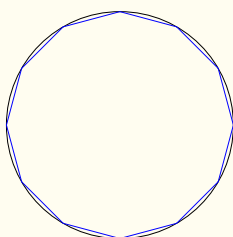
$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad (11.2)$$

Når vi kjenner sidelengda til ein innskriven mangekant, vil tilnærminga til omkrinsen til sirkelen vere denne sidelengda gonga med antal sidelengder i mangekanten. Ved hjelp av (11.2) kan vi stadig finne sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den forrige, og i tabellen under har vi funne sidelengda og tilnærminga til omkrinsen til sirkelen opp til ein 96-kant:

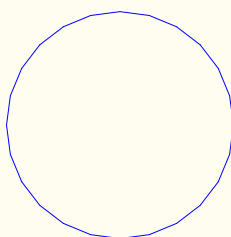
| Formel for sidelengde | Sidelengde | Tilnærming for omkrins |
|---|---------------------|------------------------------|
| | $s_6 = 1$ | $6 \cdot s_6 = 6$ |
| $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$ | $s_{12} = 0.517...$ | $12 \cdot s_{12} = 6.211...$ |
| $s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$ | $s_{24} = 0.261...$ | $24 \cdot s_{24} = 6.265...$ |
| $s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24}^2}}$ | $s_{48} = 0.130...$ | $48 \cdot s_{48} = 6.278...$ |
| $s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{48}^2}}$ | $s_{96} = 0.065...$ | $96 \cdot s_{96} = 6.282...$ |



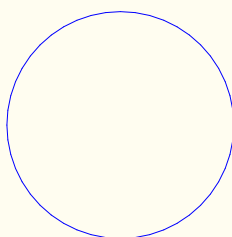
(a) 6-kant



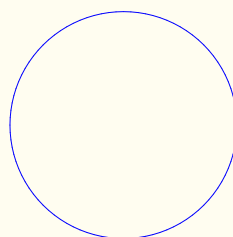
(b) 12-kant



(c) 24-kant



(d) 48-kant



(e) 96-kant

Utrekningane over er faktisk like langt som matematikaren [Arkimedes](#) kom allereie ca 250 f. kr!

For ei datamaskin er det ingen problem å rekne ut¹ dette for ein mangekant med ekstremt mange sider. Reknar vi oss fram til ein 201 326 592-kant finn vi at

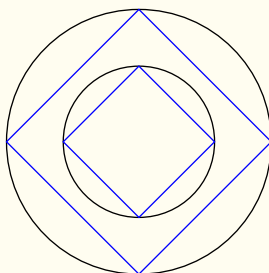
Omkrins av sirkel med radius 1 = 6.283185307179586...

(Ved hjelp av meir avansert matematikk kan det visast at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 er eit irrasjonalt tal, men at alle desimalane vist over er korrekte, derav likskapsteiknet.)

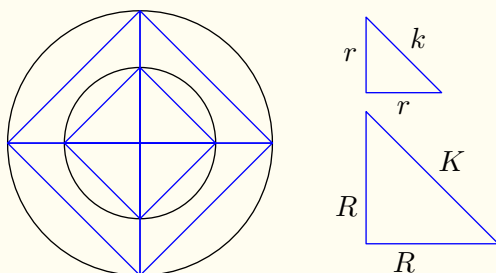
Den endelege formelen og π

Vi skal no komme fram til den kjende formelen for omkrinsen til ein sirkel. Også her skal vi ta for gitt at summen av sidelengdene til ein innskrevne mangekant er ei tilnærming til omkrinsen som blir betre og betre dess fleire sidelengder det er.

For enkelheita si skuld skal vi bruke innskrivne firkantar for å få fram poenget vårt. Vi teiknar to sirklar som er vilkårleg store, men der den eine er større enn den andre, og innskriv ein firkant (eit kvadrat) i begge. Vi let R og r vere radien til høvesvis den største og den minste sirkelen, og K og k vere sidelengda til høvesvis den største og den minste firkanten.



Begge firkantane kan delast inn i fire likebeinte trekantar:



Da trekantane er formlike, har vi at

$$\frac{K}{R} = \frac{k}{r} \quad (11.3)$$

Vi let $\tilde{O} = 4K$ og $\tilde{o} = 4k$ vere tilnærminga av omkrinsen til høvesvis den største og den minste sirkelen. Ved å gonge med 4 på begge sider av (11.3) får vi at

$$\frac{4K}{R} = \frac{4k}{r} \quad (11.4)$$

$$\frac{\tilde{O}}{R} = \frac{\tilde{o}}{r} \quad (11.5)$$

Og no merker vi oss dette:

Sjølv om vi i kvar av dei to sirklane innskriv ein mangekant med 4, 100 eller kor mange sider det skulle vere, vil mangekantane alltid kunne delast inn i trekantar som oppfyller (11.3). Og på same måte som vi har gjort i eksempelet over kan vi omskrive (11.3) til (11.5) i staden.

La oss derfor tenke oss mangekantar med så mange sider at vi godtek deira omkrins som lik omkrinsane til sirklane. Om vi da skriv omkrinsen til den største og den minste sirkelen som høvesvis O og o , får vi at

$$\frac{O}{R} = \frac{o}{r}$$

Da dei to sirklane våre er heilt vilkårlig valgt, har vi no komme fram til at *alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og radiusen*. Ei enda vanlegare formulering er at *alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og diameteren*. Vi let D og d vere diameteren til høvesvis sirkelen med radius R og r . Da har vi at

$$\frac{O}{2R} = \frac{o}{2r}$$

$$\frac{O}{D} = \frac{o}{d}$$

Forholdstalet mellom omkrinsen og diameteren i ein sirkel blir kalla π (uttalast "pi"):

$$\frac{O}{D} = \pi$$

Likninga over fører oss til formelen for omkrinsen til ein sirkel:

$$\begin{aligned} O &= \pi D \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

Tidlegare fann vi at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 (og diameter 2) er 6.283185307179586... . Dette betyr at

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{6.283185307179586...}{2} \\ &= 3.141592653589793... \end{aligned}$$

¹For den datainteresserte skal det seiast at iterasjonsalgoritma må skrivast om for å unngå instabilitetar i utrekningane når antal sider blir mange.

11.8 Pytagoras' setning (omvendt versjon) (forklaring)

Same kva verdien til a og b måtte vere, kan ein openbart alltid lage ein rettvinkla trekant med katetar a og b . Av Pytagoras' setning er hypotenusen da $\sqrt{a^2 + b^2}$. Av vilkår ii) i [regel 11.11](#) er dette ein unik trekant, og det betyr at alle trekantar med sidelengder a , b og $\sqrt{a^2 + b^2}$ er rettvinkla.

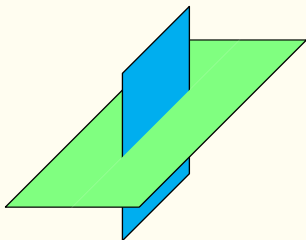
11.9 Volumet til tredimensjonale former (forklaring)

Sjå boka *Elementary geometry from an advanced standpoint* av E. E. Moise.

11.10 Volumet til ei kule (forklaring)

Førkunnskapar

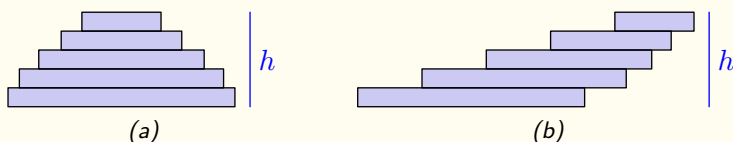
For å finne formelen for volumet til ei kule, introduserer vi tre omgrep: *vertikalt tverrsnitt*, *horisontalt tverrsnitt* og *Cavalieris prinsipp*. Eit tverrsnitt er ei tenkt overflate som kjem til syne når ein skjær i ei tredimensjonal form. Eit vertikalt/horisontalt tverrsnitt er ei tenkt overflate som kjem til syne viss vi skjær ei tredimensjonal form enten rett vertikalt eller rett horisontalt.



Cavalieris prinsipp lyd slik:

Viss tverrsnittsareala til to tredimensjonale former er dei same langs den same høgda, har formene same volum.

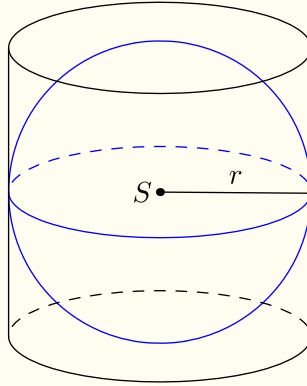
Dette prinsippet er illustrert i figuren under, som viser eit vertikalt tverrsnitt av to former bygd av fem prismer. Prismene i dei to formene er parvis like.



Det er opplagt at viss ein startar med forma vist i (a), så vil ikkje volumet endre seg om ein forskyv prismene mot høgre, slik som i (b).

Volumet til ei kule

Vi starter med å sjå for oss ei kule eksakt omslutta av ein sylinder. La radiusen til kula og sylindere være r , da er høgda til sylindere $2r$.



Figur 11.1

Vi innfører følgende størrelser:

V_s = volumet til sylindere

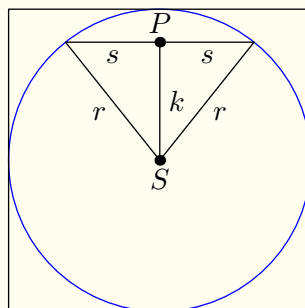
V_k = volumet til kula

V_i = volumet til forma inneklemt mellom sylindere og kula

Da har vi at

$$V_k = V_s - V_i \quad (11.6)$$

Tenk no at vi skjær forma fra figur 11.1 frå toppen og rett ned gjennom sentrum av kula. Da får vi eit vertikalt. Ser vi på dette tverrsnittet rett horisontalt, vil sylindere sjå ut som ein firkant, og kula som ein sirkel.

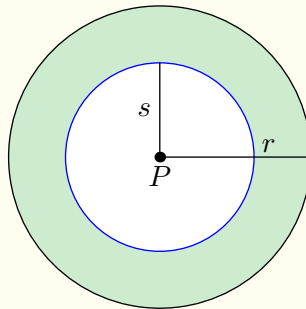


Figur 11.2

På dette tverrsnittet vandrer vi en lengde k rett opp fra sentrum til et punkt P . Den halve bredden til kula i dette punktet kaller vi s . Av Pytagoras' setning har vi at

$$s^2 = r^2 - k^2 \quad (11.7)$$

Videre forestiller vi oss at vi igjen skjærer formen i figur 11.1, men denne gangen rett fra siden og gjennom punktet P . Da får vi et horisontalt tverrsnitt. Studerer vi dette tverrsnittet rett ovenfra, får vi en figur som dette:



Figur 11.3: Horisontalt tverrsnitt. Den svarte sirkelen er buen til sylindere og den blå er buen til kula.

Vi definerer følgende:

A_s = arealet til tverrsnittsoverflaten til sylindere

A_k = arealet til tverrsnittsoverflaten til kula

A_i = arealet til tverrsnittsoverflaten mellom
sylindere og kula (grønn i figuren over)

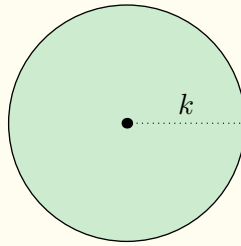
Da er

$$A_i = A_s - A_k \quad (11.8)$$

Av regel 11.6 har vi at $A_s = \pi r^2$ og $A_k = \pi s^2$ (se tilbake til figur 11.1). Av (11.7) og (11.8) er

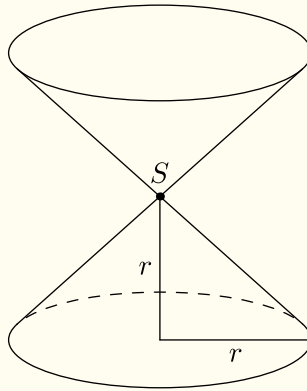
$$\begin{aligned} A_i &= \pi r^2 - \pi s^2 \\ &= \pi r^2 - \pi(r^2 - k^2) \\ &= \pi r^2 - \pi r^2 + \pi k^2 \\ &= \pi k^2 \end{aligned}$$

A_i tilsvarer altså arealet til en sirkel med radius k .



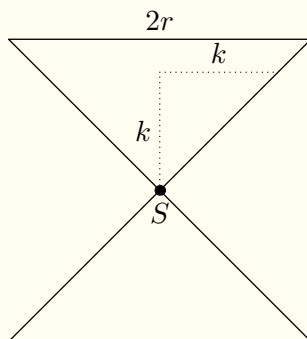
Figur 11.4: Samme areal som det grønne arealet i figur 11.3.

Vi tenker oss nå to kjegler, begge med høyde og radius lik r , satt med spissene mot hverandre. Denne formen vil være like høy som formen fra figur 11.1, og kan plasseres slik at punktet hvor spissene møtes sammenfaller med S .



Figur 11.5

Det vertikale tverrsnittet gjennom S av denne formen ser slik ut:



Figur 11.6

Om vi vandrar k rett opp eller ned fra S , så er den horisontale avstanden ut til sida også k (dette er overlatt til lesaren å vise). Dette betyr at det horisontale tverrsnittsarealet til kjeglene er $\pi k^2 = A_i$. Altså har den innklemte forma fra figur 11.1 og forma fra figur 11.6 same tverrsnittsareal langs den same høgden (begge har høgde $2r$). Av Cavalieris prinsipp og regel 11.9 har vi da at

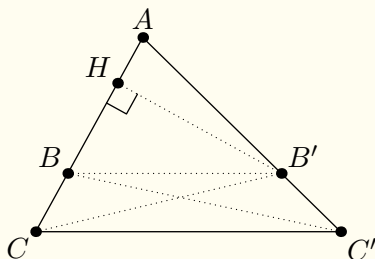
$$\begin{aligned} V_i &= \frac{2(\pi r^2 \cdot r)}{3} \\ &= \frac{2\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

Av (11.6), (??) og regel 11.9 er

$$\begin{aligned} V_k &= 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{6\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

11.14 Forhold i formlike trekantar (forklaring)

I figuren under er $BB' \parallel CC'$. Arealet til ein trekant $\triangle ABC$ skriv vi her som ABC .



Med BB' som grunnlinje er HB' høgda i både $\triangle CBB'$ og $\triangle CBB'$. Derfor er

$$CBB' = C'BB' \quad (11.9)$$

Vidare har vi at

$$ABB' = AB \cdot HB'$$

$$CBB' = BC \cdot HB'$$

Altså er

$$\frac{ABB'}{CBB'} = \frac{AB}{BC} \quad (11.10)$$

På liknande vis er

$$\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \quad (11.11)$$

Av (11.9), (11.10) og (11.11) følg det at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ABB'}{CBB'} \frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \quad (11.12)$$

For dei formlike trekantane $\triangle ACC'$ og $\triangle ABB'$ er

$$\begin{aligned} \frac{AC}{AB} &= \frac{AB + BC}{AB} \\ &= 1 + \frac{BC}{AB} \end{aligned}$$

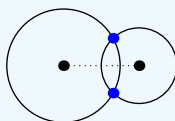
$$\begin{aligned} \frac{AC'}{AB'} &= \frac{AB' + B'C'}{AB'} \\ &= 1 + \frac{B'C'}{AB'} \end{aligned}$$

Av (11.12) er dermed forholdet mellom dei samsvarande sidene likt.

Merk

I dei komande forklaringane av vilkåra *ii* og *iii* fra [regel 11.11](#) tek ein utgangspunkt i følgande:

- To sirkclar skjær kvarandre i maksimalt to punkt.
- Gitt at eit koordinatsystem blir plassert med origo i senteret til den eine sirkelen, og slik at horisontalaksen går gjennom begge sirkelsentera. Viss (a, b) er det eine skjæringspunktet, er $(a, -b)$ det andre skjæringspunktet.

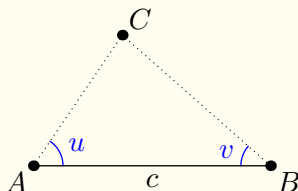


Punkta over kan enkelt visast, men er såpass intuitivt sanne at vi tek dei for gitt. Punkta fortel oss at trekanten som består av dei to sentera og det eine skjæringspunktet er kongruent med trekanten som består av dei to sentera og det andre skjæringspunktet. Med dette kan vi studere eigenskapar til trekantar ved hjelp av halvsirkclar.

11.11 Konstruksjon av trekantar (forklaring)

Vilkår i

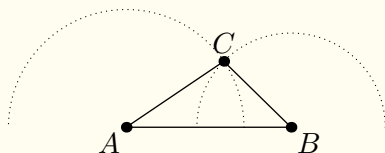
Gitt ei lengde c og to vinklar u og v . Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c . Så stiplar vi to vinkelbein slik at $\angle A = u$ og $\angle B = v$. Så lenge desse vinkelbeina ikkje er parallelle, må dei naudsynleg skjære kvarandre i eitt, og berre eitt, punkt (C i figuren). I lag med A og B vil dette punktet danne ein trekant som er unikt gitt av c , u og v .



Vilkår ii

Gitt tre lengder a , b og c . Vi lagar eit linjestykket AB med lengde c . Så lagar vi to halvsirkclar med høvesvis radius a og b og sentrum

B og A . Skal no ein trekant $\triangle ABC$ ha sidelengder a , b og c , må C ligge på begge sirkelbogene. Da bogane berre kan møtast i eitt punkt, er forma og størrelsen til $\triangle ABC$ unikt gitt av a , b og c .

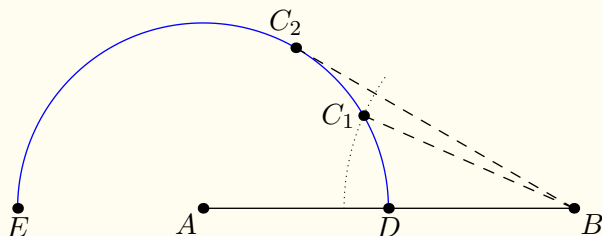


Vilkår iii

Gitt to lengder b og c og ein vinkel u . Vi startar med følgande:

1. Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c .
2. I A teiknar vi ein halvsirkel med radius b .

Ved å la C vere plassert kor som helst på denne sirkelbua, har vi alle moglege variantar av ein trekant $\triangle ABC$ med sidelengdene $AB = c$ og $AC = b$. Å plassere C langs bogen til halvsirkelen er det same som å gi $\angle A$ ein bestemt verdi. Det gjenstår no å vise at kvar plassering av C gir ei unik lengde av BC .



Vi let C_1 og C_2 vere to potensielle plasseringar av C , der C_2 langs halvsirkelen ligg nærare E enn C_1 . Vidare stiplar vi ein sirkelboge med radius BC_1 og sentrum i B . Da den stipla sirkelbogen og halvsirkelen berre kan skjære kvarandre i C_1 , vil alle andre punkt på halvsirkelen ligge enten innanfor eller utanfor den stipla sirkelbogen. Slik vi har definert C_2 , må dette punktet ligge utanfor den stipla sirkelbogen, og dermed er BC_2 lengre enn BC_1 . Av dette kan vi konkludere med at BC blir lengre dess nærare C beveger seg mot E langs halvsirkelen. Å sette $\angle A = u$ vil altså gi ein unik verdi for BC , og da ein unik trekant $\triangle ABC$ der $AC = b$, $c = AB$ og $\angle BAC = u$.

11.15 Vilkår i formlike trekantar (forklaring)

Vilkår i

Gitt to trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$. Av [regel 7.3](#) har vi at

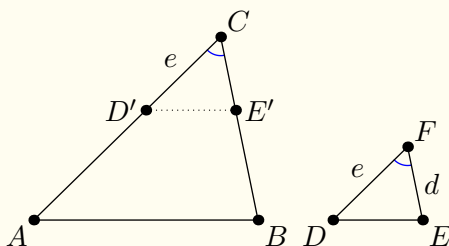
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$$

Viss $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$, følger det at $\angle C = \angle F$.

Vilkår ii

Vi tek utgangspunkt i trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}, \quad \angle C = \angle F \quad (11.13)$$



Vi sett $a = BC$, $b = AC$, $d = EF$ og $e = DF$. Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC , slik at $D'C = e$ og $AB \parallel D'E'$. Da er $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$, altså har vi at

$$\begin{aligned} \frac{E'C}{BC} &= \frac{D'C}{AC} \\ E'C &= \frac{ae}{b} \end{aligned}$$

Av (11.13) har vi at

$$EF = \frac{ae}{b}$$

Altså er $E'C = EF$. No har vi av vilkår ii fra [regel 11.12](#) at $\triangle D'E'C \cong \triangle DEF$. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Vilkår iii

Vi tek utgangspunkt i to trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad (11.14)$$

Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC , slik at $D'C = e$ og $E'C = d$. Av vilkår i fra [regel 11.15](#) har vi da at $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$. Altså er

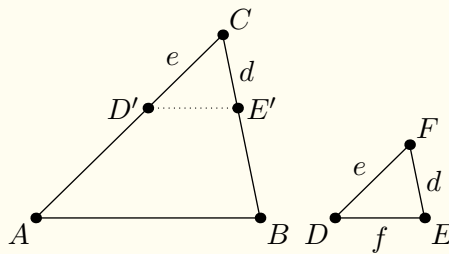
$$\frac{D'E'}{AB} = \frac{D'C}{AC}$$

$$D'E' = \frac{ae}{c}$$

Av (11.14) har vi at

$$f = \frac{ae}{c}$$

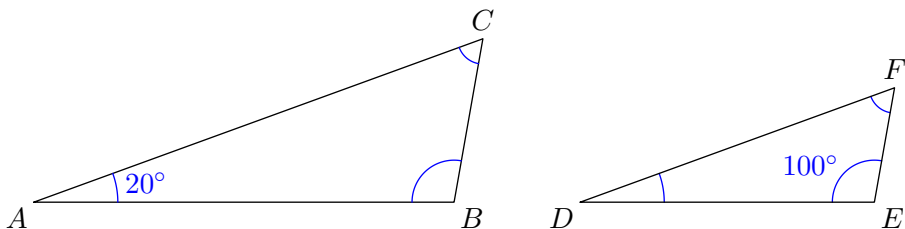
Altså har $\triangle D'E'C$ og $\triangle DEF$ parvis like sidelengder, og av vilkår i fra [regel 11.12](#) er dei da kongruente. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



Oppgaver for kapittel 11

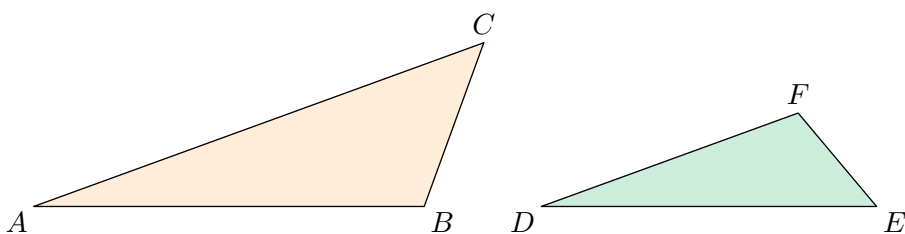
11.1.1

Trekantene er formlike. Bestem verdien til $\angle ACB$.



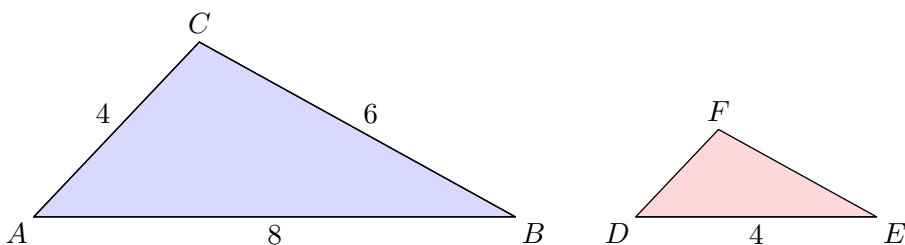
11.1.2

Trekantene er formlike. Finn de tre parene med samsvarende sider.



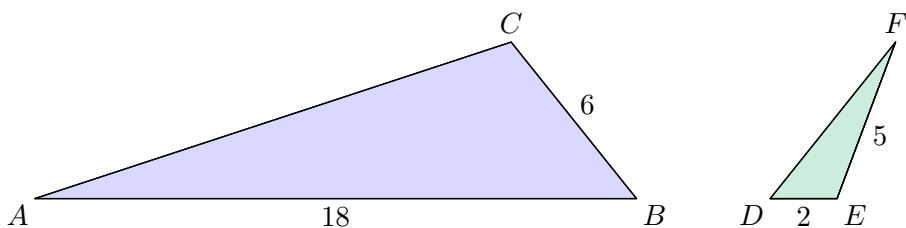
11.1.3

Trekantene er formlike. Finn lengden til EF og lengden til DF .



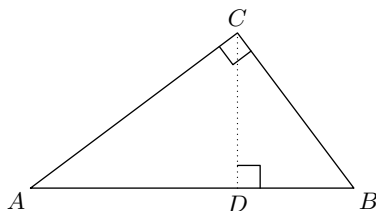
11.1.4

Trekantene er formlike. Finn lengden til AC og lengden til DF .



11.1.5

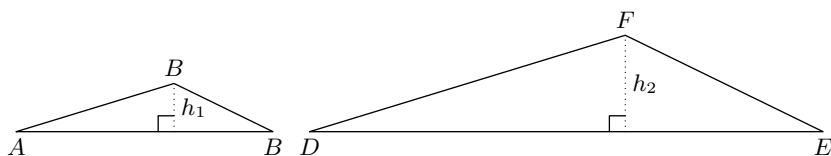
Finn alle formlike trekanter definert av A , B , C og D .



11.1.6

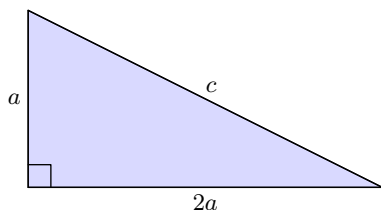
$\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike. Hva er forholdet mellom arealet til $\triangle DEF$ og arealet til $\triangle ABC$ hvis $h_1 = 2$ og $h_2 = 6$?

(Se også **Gruble 20**)



11.1.7

Finn lengden til c uttrykt ved a .



11.1.8

En kjele har radius 10 og høgde 4.

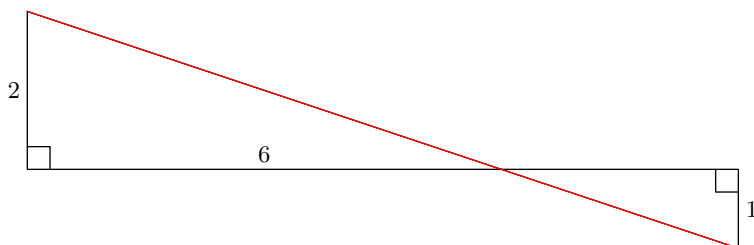
- a) Finn grunnflaten til kjele.
- b) Finn volumet til kjele.

11.1.9

- a) En kule har radius 2 og en annen kule har radius 6. Hva er forholdet mellom volumet til den største kula og volumet til den minste kula?
- b) En kule har radius r og en annen kule har radius ar , hvor $a > 1$. Hva er forholdet mellom volumet til den største kula og volumet til den minste kula?

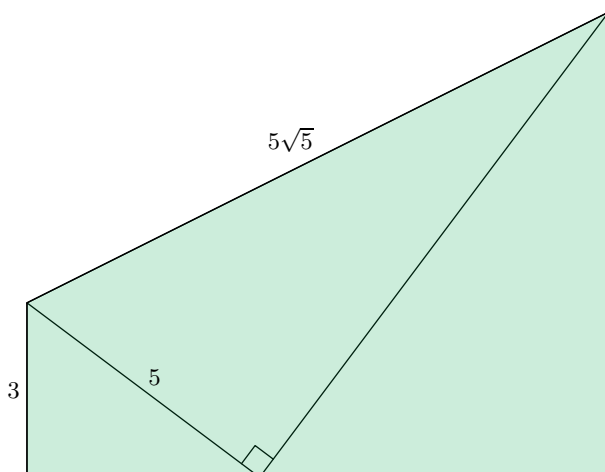
Gruble 18

Finn lengden til den røde linja.



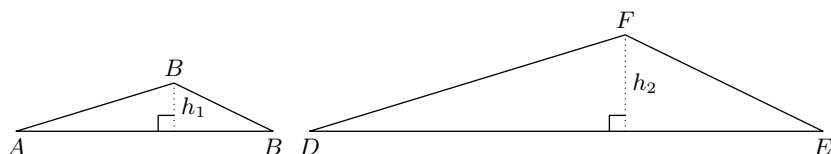
Gruble 19

Finn arealet til det grønne området.



Gruble 20

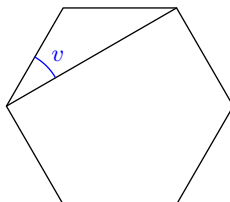
$\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike. Gitt et tall a , og at $h_2 = ah_1$. Finn $\frac{A_{\triangle DEF}}{A_{\triangle ABC}}$ uttrykt ved a .



Gruble 21

(GV21D1)

Figuren under viser en regulær¹ sekskant. Bestem hvor mange grader v er.

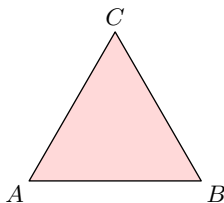


Gruble 22

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$ hvor $AC = BC$. Vis at halveringslinja² til $\angle ACB$ er midtnormalen til AB .

Gruble 23

$\triangle ABC$ er likesidet og har sidelengde s .



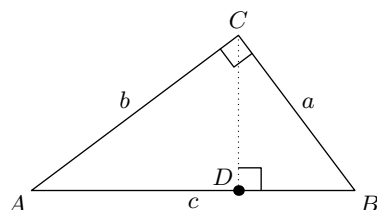
- Vis at i en trekant med vinklene 30° , 60° , 90° , så er hypotenusen dobbelt så lang som den korteste kateten.
- Vis at høyda i $\triangle ABC$ er $\frac{\sqrt{3}}{2}s$.

¹I regulære mangekanter har alle sidene lik lengde.

²Definisjonen av halveringslinja til en vinkel og midtnormalen til ei linje finner du i [TM1](#).

Gruble 24

- a) Finn AD uttrykt ved a , b og c .
- b) Finn DB uttrykt ved a , b og c .
- c) Bruk uttrykkene du fant til å bevise Pytagoras' setning.



Gruble 25

Gitt en mangekant med n sider. Finn en formel for vinkelsummen til mangekanten uttrykt ved n .

Gruble 26

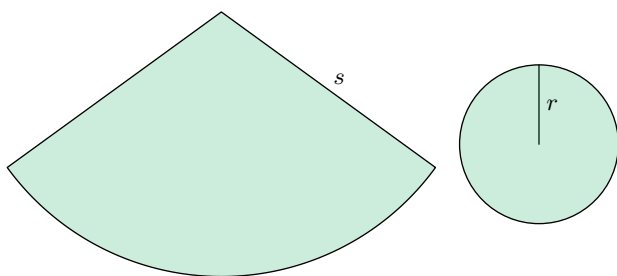
En rettvinklet trekant har omkrets 40. Den ene siden i trekanten har lengde 8. Finn de to andre sidelengdene til trekanten.

Gruble 27

Overflaten til en (vilkårlig) kjegle består av en sektor med radius s og en sirkel med radius r .

- Skriv s som et uttrykk av r og høyden h til kjeglen.
- Vis at overflatearealet A_O til kjeglen er gitt ved formelen

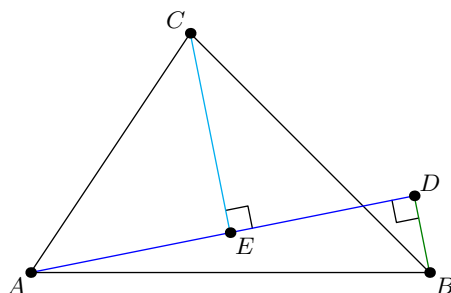
$$A_O = \pi r(r + s)$$



Gruble 28

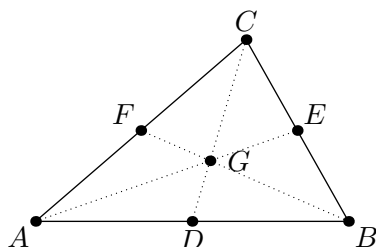
Vis at det doble arealet til $\triangle ABC$ er gitt som

$$AE \cdot BD + CE \cdot AD$$



Gruble 29

En **median** i en trekant er et linjestykke som går fra et hjørne til midten av den motstående siden.



Gitt en vilkårlig trekant $\triangle ABC$ med medianer AE , BF og CD .

a) Vis at AE , BF og CD skjærer hverandre i samme punkt (G på figuren).

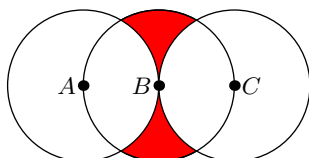
b) Vis at

$$\frac{GC}{DG} = \frac{GB}{FG} = \frac{GA}{EG} = 2$$

Merk: Oppgave b) er nok lettere enn oppgave a).

Gruble 30

De tre sirklene har radius 2, og A , B og C ligger på linje. Finn arealet til det røde området.

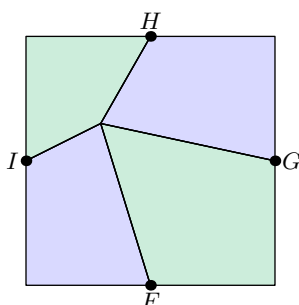


Hint: Her kan du nok få bruk for at arealet til en sektor med vinkel v utgjør $\frac{v}{360^\circ}$ av arealet til sirkelen med samme radius.

Gruble 31

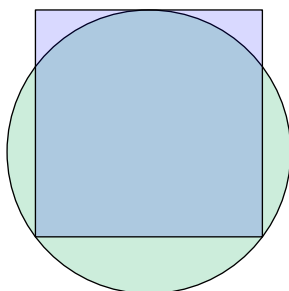
De fargede områdene utgjør et kvadrat, og F , G , H og I er de respektive midpunktene på sidene til dette kvadratet.

Vi at arealet til det blåfargede området er det samme som arealet til det grønnfargede området.



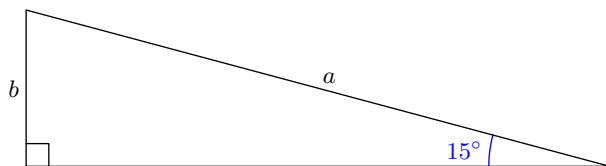
Gruble 32

Kvadratet har sidelengde 4. Finn radien til sirkelen.



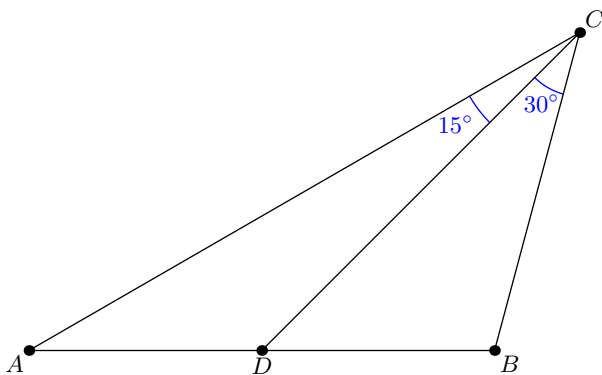
Gruble 33

- a) Vis at $\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.



Merk: For å løse denne oppgaven er det mulig (men ikke nødvendigvis) du vil få bruk for abc -formelen, som du finner i [TM1](#).

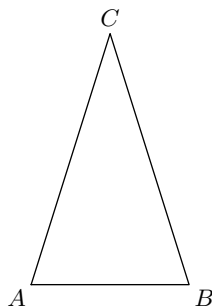
- b) $AD = BC$. Bestem verdien til $\angle A$.



Gruble 34

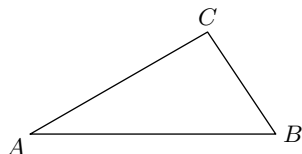
Merk: Denne oppgaven tar for seg resultater som intuitivt virker helt opplagte, men som kan være krevende å bevise.

- a) Vis at hvis $AC = BC$, er $\angle A = \angle B$.

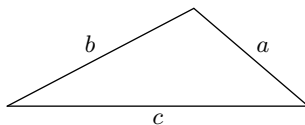


Merk: Vi har tidligere erklært at en likebeint trekant har to vinkler som er like store, men strengt tatt kan vi ikke bare gå ut ifra at det er slik.

- b) Vis at hvis $AC > BC$, er $\angle B > \angle C$.



- c) Gitt $\triangle ABC$, hvor AB er den lengste siden. Vis at når AB er grunnlinje, ligger høyden inni trekanten.
- d) I figuren under er c den lengste siden i trekanten.



Bevis at

$$c > a + b \quad , \quad b + c > a \quad , \quad a + c > b$$

Merk: Disse tre ulikhetene samlet kalles gjerne **trekantulikheten**.

Kommentar (for den spesielt interesserte)

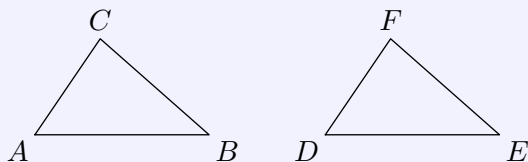
Også i geometri har vi aksiom (sjå kommentar på side 170) som legg grunnlaget for det matematiske systemet vi skapar, men den aksiomatiske oppbygginga av geometri er mykje meir omstendeleg og uoversiktleg enn den vi har innanfor rekning. I tillegg er nokre teorem innanfor geometri så intuitivt sanne, at det i ei bok som dette ville blitt meir forvirrende enn oppklarande å skulle forklart alt i detalj.

Det som likevel bør nemnast, er at vi i [regel 11.11](#) opplyser om tre vilkår for å unikt konstruere ein trekant, og i [regel 11.12](#) gir eit vilkår for kongruens. I meir avanserte geometritekstar vil ein helst finne att innhaldet i desse to reglane som aksiom og teorem for kongruens:

Kongruens

To trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente viss ein av desse vilkåra er oppfylt:

- i) $AB = DE$, $BC = EF$ og $\angle A = \angle D$.
- ii) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $AB = DE$.
- iii) $AB = DE$, $BC = EF$ og $AC = FD$.
- iv) $\angle A = \angle D$ and $\angle B = \angle E$, i tillegg er $AB = DE$ eller $BC = EF$ eller $AC = FD$.



-
- i) Side-vinkel-side (SAS) aksiomet
 - ii) Vinkel-side-vinkel (ASA) teoremet
 - iii) Side-side-side (SSS) teoremet
 - iv) Side-vinkel-vinkel (SAA) teoremet

Merk: Forkortingane over er gitt ut ifrå dei engelske namna for høvesvis side og vinkel; *side* og *angle*.

I tekstboksen på førre side gir også vilkår i) - iii) tilstrekkeleg informasjon om når ein trekant kan bli unikt konstruert, men i denne boka har vi valgt å skille unik konstruksjon og kongruens fra kvarandre. Dette er gjort i den tru om at dei fleste vil ha ein intuitiv tanke om kva trekantar som er kongruente eller ikkje, men ha større problem med å svare på kva som må til for å unikt konstruere ein trekant — og det er ikkje naudsynleg så lett å sjå dette direkte ut ifrå kongruensvilkåra.

Legg også merke til at vilkår iv) berre er ei meir generell form av vilkår ii), men altså ikkje kan brukast som eit vilkår for unik konstruksjon. Dette vilkåret finn ein derfor ikkje att i korkje [regel 11.11](#) eller [regel 11.12](#).

Fasit

Kapittel1

- 1.1.1 a) 22 b) 13 c) 36
1.1.2 a) 17 b) 29 c) 11
1.1.3 a) 1,7 b) 2,3
1.1.4 a) 13,9 b) 32,8 c) 0,7 d) 2,4
1.1.5 a)
1.1.6 c)
1.1.7 b)
1.1.8 a)
1.1.7 c)

Kapittel2

- 2.1.1 *Merk:* Flere mulige svar. a) $4 = 1 + 3$ b) $5 = 2 + 3$ c) $6 = 2 + 4$
d) $7 = 1 + 6$ e) $8 = 3 + 5$ f) $9 = 2 + 7$
2.1.2 a) $5 = 2 + 2 + 1$ b) $6 = 1 + 3 + 2$ c) $7 = 3 + 2 + 2$ d) $8 = 1 + 1 + 6$
e) $9 = 3 + 3 + 3$ f) $2 + 5 + 3$
2.1.3
1) a) 8 b) 7 c) 6 d) 5
2) Fordi de er svarene i oppgave 1a), 1b) og 1c).
2.1.4 a) 1) b) 1) c) 2)
2.2.1 *Merk:* Flere mulige svar. a) $2 = 7 - 5$ b) $3 = 10 - 7$ c) $4 = 5 - 1$
d) $5 = 10 - 5$ e) $6 = 9 - 3$ f) $7 = 9 - 2$ g) $8 = 10 - 2$
2.2.2 a) 1) b) 1) c) 2)
2.3.1
a) $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 4 = 4 + 4$
b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6$
c) $4 + 4 = \cdot 4 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2$
d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \cdot 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$
e) $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
f) $7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

2.3.2 a) 20 b) 24 c) 18 d) 30 e) 56

2.3.3 a) partall b) partall, 0 c) oddetall, 5

Kapittel3

3.2.1 *Merk:* Flere mulige svar. a) $5 \cdot 20$ b) $3 \cdot 10$ c) $2 \cdot 20$ d) $2 \cdot 35$

e) $7 \cdot 6$ f) $8 \cdot 4$ g) $42 \cdot 2$ h) $3 \cdot 30$

3.2.2 a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ b) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ c) $2 \cdot 5$

3.2.4 28

Gruble 1

Gruble 2 Se løsningsforslag.

3.1.1 a) 34 b) 177 c) 100 d) 664 e) 2943

Kapittel4

4.1.1 a) 6 b) 5 c) 2 d) 7 e) 9 f) 4

4.1.2 a) 0,5 b) 0,25 c) 0,2 d) 0,75 e) 0,4 f) 0,6
g) 0,8 h) 1,5 i) 0,33... j) 2,5 k) 0,833... l) 1,4 m) 2,75
n) 0,7

4.1.3 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{2}{5}$

4.1.4 a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{13}{2}$ c) $\frac{11}{5}$

4.2.1 a) $\frac{20}{6}$ b) $\frac{9}{12}$ c) $\frac{12}{28}$ d) $\frac{45}{40}$ e) $\frac{54}{30}$ f) $\frac{77}{28}$

4.2.2 a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{2}{7}$

4.3.1 a) $\frac{10}{3}$ b) $\frac{14}{4}$ c) $\frac{11}{6}$ d) $\frac{10}{7}$ e) 1

Merk: Éin av brøkane kan forkortast.

4.3.2 a) $\frac{22}{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{17}{7}$

4.3.3 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{4}$ c) $\frac{9}{6}$ d) 1 e) 0

Merk: To av brøkane kan forkortast.

4.3.4 a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{5}{7}$ c) 4

4.3.5 a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{73}{63}$ c) $\frac{101}{24}$ d) $\frac{73}{20}$ e) $\frac{5}{6}$

4.3.6 a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{29}{36}$ c) $\frac{71}{72}$ d) $\frac{11}{20}$ e) $\frac{5}{6}$

4.3.7 a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{157}{30}$ c) $\frac{229}{56}$

4.4.1 a) $\frac{20}{3}$ b) $\frac{40}{7}$ c) $\frac{54}{10}$ d) $\frac{80}{7}$ e) $\frac{21}{2}$ f) $\frac{28}{3}$ g) $\frac{35}{3}$

h) $\frac{30}{7}$ i) $\frac{5}{11}$ j) $\frac{72}{17}$

4.5.1 a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{5}{56}$ c) $\frac{9}{60}$ d) $\frac{8}{70}$ e) $\frac{3}{14}$ f) $\frac{9}{110}$ g) $\frac{1}{60}$

h) $\frac{9}{290}$ i) $\frac{8}{459}$ j) $\frac{4}{158}$

4.6.1 a) $\frac{20}{27}$ b) $\frac{7}{32}$ c) $\frac{18}{21}$ d) $\frac{60}{5}$ e) $\frac{21}{10}$ f) $\frac{10}{21}$ g) $\frac{16}{21}$

h) $\frac{80}{9}$ i) $\frac{36}{35}$ j) $\frac{35}{12}$

4.7.1 a) $\frac{15}{40}$ b) $\frac{153}{32}$ c) $\frac{46}{32}$ d) $\frac{21}{648}$ e) $\frac{203}{328}$

4.8.1 a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{35}{8}$ c) $\frac{1}{9}$ d) 4

4.8.2 a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{8}{7}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{7}{2}$

4.8.3 a) 49 b) 54 c) 70 d) 16 e) 30 f) 12 g) 25
h) 14 i) 7 j) 63

4.9.3 a) $\frac{14}{15}$ b) $\frac{24}{45}$ c) $\frac{30}{21}$ d) $\frac{7}{20}$ e) $\frac{66}{15}$

4.9.4 a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{15}{4}$ c) $\frac{14}{5}$

Gruble 3 a) 2 b) 4 c) 5 d) 2 e) 4 f) 5 g) 3, 4
h) 2, 5 i) 3, 5 j) 4, 5

Gruble 4 a) 2 b) 4 c) 5 d) 4, 3 e) 5, 2 f) 5, 3 g) 5, 4

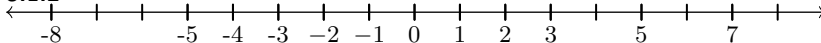
Gruble 5 a) $\frac{403}{6732}$ b) $\frac{269}{3150}$

Kapittel5

5.1.1

- a) 9 har retning mot høyre og lengde 9.
- b) 4 har retning mot høyre og lengde 4
- c) -3 har retning mot venstre og lengde 3
- d) 12 har retning mot høyre og lengde 12
- e) -11 har retning mot venstre og lengde 11
- f) -25 har retning mot venstre og lengde 25

5.1.2



5.1.3 a) 9, 4 og 12. b) -3, -11 og -25.

5.2.1 a) 1 b) 8 c) 6 d) 0

e) 3 f) 1 g) 10 h) 5

5.2.2 a) -16 b) -8 c) -23 d) 0

e) -23 f) -17 g) -3 h) 0

5.2.3 a) 15 b) 17 c) 12 d) 14

e) -12 f) -19 g) -12 h) -13

5.2.4 a) 22 b) 22 c) -17 d) 14 e) 15 f) 13 g) -13
h) -12

5.2.5 a) -12 b) -50 c) -63 d) -24 e) -56 f) -27
g) -12 h) -40 i) 21 j) 25 k) 12 l) 72

5.2.6 a) -4 b) -6 c) -5 d) -4 e) -8 f) -9 g) -5
h) -5 i) 8 j) 9 k) 5

Kapittel7

7.1.1 a) 14 b) 20 c) 24

7.1.4 a) 2 b) 16 c) 27

7.1.5 a) 2 og 8 b) 3 og 4 c) 3 og 6

7.1.6 a) 81 b) 1) Et åpenbart eksempel er kvadratet fra oppgave a), som har bredde og høyde 9, og areal 81. 2) Bredde 15 og høyde 3, areal 45. 3) Bredde 12 og høyde 6, areal 72. *Merk:* Flere mulige svar.

7.1.7 a) 3 b) 10 c) 6 d) 6 e) 10 f) 6 g) 4
h) 3 i) 28

7.1.8 a) 90. *Merk:* Grunnflaten kan også være 72 eller 80, avhengig av hvilken side man velger ut som grunnflate.

7.2.1 Se løsningsforslag.

7.2.2 Se løsningsforslag.

Gruble 7 Se løsningsforslag.

Gruble 8 Se løsningsforslag.

Gruble 31 Se løsningsforslag.

Kapittel8

8.1.1 a) $3a$ b) $4a$ c) $7a$ d) $-2b$ e) $-5b$ f) $-3k$

8.1.2 a) $a + b$ b) $a + 2b$ c) $9b - 3a$

8.1.3 a) $2b - 5a + c$ b) $3b - 9a$ c) $11b - 3a$

8.1.4 a) $7a + 14$ b) $9b + 27$ c) $8b - 24c$ d) $-6a - 10b$ e) $(9a + 2)$
f) $(3b + 8)a$ g) $3ac - ab$ h) $2a + 6b + 8c$ i) $27b - 9c + 63a$
j) $2c - 6b - 14a$

8.1.5 Bruk [regel 3.2](#) til å faktorisere uttrykket.

a) $2(a + b)$ b) $b(4a + 5)$ c) $c(9b - 1)$ d) $2a(2c - 1)$

8.1.6

8.1.8 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ når $x = 4$ og 2 når $x = -2$.

8.1.9 Uttrykkene gitt av a) og c) stemmer.

8.2.1 a) 3^4 b) 5^2 c) 7^6 d) a^3 e) b^2 f) $(-c)^4$ *Merk:*
 $(-c)^4 = c^4$

8.2.2 a) 64 b) 32 c) 64 d) -8 e) -243 f) 256

8.2.3 a) 2^{16} b) 3^{11} c) 9^6 d) 6^5 e) 5^{-4} f) 10^{11} g) a^{16}
h) k^7 i) x^3 j) x k) 1 l) $a^5 \cdot b^{-3}$

8.2.4 a) 5 b) 10 c) 12 d) 3 e) 9 f) 10

Gruble 11 $2^{-\frac{5}{4}}$

Kapittel9

9.2.1 a) $x = 10$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 2$ e) $x = 3$
f) $x = 4$ g) $x = 10$ h) $x = 8$ i) $x = 10$

9.2.2 a) $x = 37$ b) $x = 29$ c) $x = 23$ d) $x = 15$ e) $x = 8$
f) $x = 11$ g) $x = 23$ h) $x = 19$ i) $x = 10$ j) $x = 28$

9.2.3

a) $x = 4$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 15$

- 9.2.4 a) $x = 8$ b) $x = 72$ c) $x = 49$ d) $x = 150$
 9.2.5 a) $x = 7$ b) $x = 10$ c) $x = 6$ d) $x = 9$ e) $x = 9$
 f) $x = 8$ g) $x = 5$ h) $x = 2$

9.2.6 Se løsningsforslag.

9.2.7 $x = 18$

9.5.1 $x = 1, y = -2$

Gruble 13 Se løsningsforslag.

Kapittel10

10.1.1 a) $f(x) = 2x + 4$. b) 204 c) $x = 24$.

10.1.2 a) $a(x) = 5x^2$. b) $x = 2000?$ c) $x = 9?$

10.1.3 a) $b(x) = x^2 + 2x$ b) 440? c) $x = 8?$

10.1.4 22 trekanter og 10 firkanter.

10.1.6 La x være et positivt heltall. a) $p(x) = 2n$ b) $o(x) = 2n - 1$

10.2.1

a) Stigningstall 5 og konstantledd 10. b) Stigningstall 3 og konstantledd -12 .

c) Stigningstall $-\frac{1}{7}$ og konstantledd -9 . d) Stigningstall $\frac{3}{2}$ og konstantledd $-\frac{1}{4}$.

10.2.2 Se løsningsforslag.

10.3.1 a) (I) og (II) gir hver for seg en ligning som bekrfter en rett linje. Disse linjene kan også representeres ved f og g slik som de er definert. b) $x = 7$ og $y = 2$.

10.3.2 $f(x) = -8x + 16$

10.3.3 $f(x) = 4x + 3$

10.3.4 $f(x) = x - 3$ og $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

Gruble 14 Se løsningsforslag.

Kapittel11

11.1.1 80°

11.1.2 AC og DE , BC og EF , AB og DF .

11.1.3 $EF = 3$ og $DF = 2$.

11.1.4 $AC = 15$ og $DF = 6$.

11.1.6 a) 9 b) a^2

11.1.8 a) 100π b) 400π

11.1.9 a) 27 b) a^3

Gruble 22 Se side ?? i [TM1](#).

Gruble ?? Se løsningsforslag.

Gruble ?? Se løsningsforslag.

Gruble 28 Se løsningsforslag.

Gruble 29 Se løsningsforslag.

Gruble 30 Se løsningsforslag.

Gruble 21 Se løsningsforslag.

Litteratur

Kiselev, A. (2006). *Kiselev's Geometry: Book 1. Planimetry* (A. Givental, Overs.). Sumizdat. (Opprinnelig utgitt 1892).

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press

Notis: Teksten, i alle fall en veldig lignende en, om Pytagoras' setning på side 222 stod første gang på trykk i Skage Hansens bok Tempelgeometri (2020).

Indeks

π , 239

absoluttverdi, 83

algebra, 161

areal, 140

til rektangel, 214

til sirkel, 220

til trapes, 217

breidde, 141

brøk, 48

forkorting av, 52

omvend, 69

utviding av, 52

diameter, 128

differanse, 23

dividend, 28

divisor, 28

ettpunktsformelen, 212

faktor, 25

faktorisering, 42

fellesnemnar, 57

firkant, 133

forhold, 28

forholdstal, 28

forteikn, 83

funksjon, 194

grafen til, 197

lineær, 197

funksjonsuttrykk, 194

grad, 130

grunnflate, 151

grunnlinje, 134

hypotenus, 135

høgde, 134

intervall, 197

kansellering, 64

kant, 133

katet, 135

konstant, 161

konstantledd, 199

koordinatsystem, 16

kvotient, 28

ledd, 21, 23

lengde, 82, 141

likning, 174

likskapsteiknet, 10

linje, 126

linjestykke, 126

mangekant, 133

hjørner i, 133

nemnar, 48

oddetal, 15

omkrins, 139

til sirkel, 219

overflate, 140

parallel, 129

- partal, 15
- positive heiltal, 11
- potenslikning, 185
- primal, 42
- primtalsfaktorisering, 43
- produkt, 25
- punkt, 16, 126
- radius, 128
- rest, 109
- sektor, 128
- side
 - i mangekant, 133
 - samsvarande, 229
- siffer, 12
- sirkel, 128
 - sentrum i, 128
- stigingstal, 199
- sum, 21
- tal, 10
 - blanda, 71
 - naturlege, 11
 - negativt, 82
 - positivt, 82
 - rasjonalt, 71
- talverdi, 83
- tellar, 48
- til parallelogram, 216
- til trekant, 215
- toppvinkel, 132
- trekant, 133
 - formlik, 228
 - kongruet, 228
- ulikskap, 187
- variabel, 161
- verdi, 12
- vinkel, 129
 - butt, 131
 - rett, 130
 - spiss, 131
 - toppunkt til, 129
- vinkelbein, 129
- vinkelrett, 130

Om forfattere

Sindre Sogge Heggen har ein mastergrad i anvendt matematikk fra Universitetet i Oslo og ei årseining i praktisk-pedagogisk utdanning fra NTNU. I tillegg har han fleire års erfaring med undervising i både grunnskule og vidaregåande skule.