

?? Se eksempel på side ??

?? Vi bruker kravet for  $x$  og  $z$ -koordinaten for å sette opp et ligningssystem:

$$-3 - 2t = -7 - 3s \quad (\text{I})$$

$$1 - t = s \quad (\text{II})$$

Av (II) har vi et uttrykk for  $s$ . Setter vi dette inn i (I) får vi:

$$-3 - 2t = -7 + 3(1 - t)$$

$$-3 - 2t = -7 + 3 - 3t$$

$$t = -1$$

Altså er  $t = -1$  og  $s = 2$ . For disse verdiene gir begge parameteriseringene punktet  $A = (-1, 1, 2)$ .

?? Se eksempel på side ??

?? Se eksempel på side ??

?? Se eksempel på side ??

??

**a)** Av parameteriseringen ser vi at to retningsvektorer må være  $[2, 3, 0]$  og  $[0, 2, -1]$ .

**b)** En normalvektor for planet er gitt ved vektorproduktet av retningsvektorene:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(-3 - 0) - \vec{e}_y(-2 - 0) + \vec{e}_z(4 - 0) \\ &= [-3, -2, 4] \end{aligned}$$

Av parameteriseringen ser vi at  $(-4, 2, 1)$  er et punkt i planet, derfor kan vi skrive:

$$-3(x - (-4)) - 2(y - 2) + 4(z - 1) = 0$$

$$-3x - 12 - 2y + 4 + 4z - 4 = 0$$

$$-3x - 2y + 4z - 12 = 0$$

??

Vi krever at:

$$(-2, 1, 1) \cdot [3t, 5, t] = 0$$

$$-6t + 5 + t = 0$$

$$t = 1$$

Altså er  $[3, 5, 1]$  en retningsvektor for planet. Ligningen til planet blir da:

$$\begin{aligned}3(x - (-2)) + 5(y - 1) + (z - 1) &= 0 \\3x + 5y + z &= 0\end{aligned}$$

?? Se eksempel på side ??

??

a) Vi starter med å skrive de fullstendige kvadratene:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x &= (x^2 - 3)^2 - 3^2 \\y^2 + 2y &= (y + 1)^2 - 1^2 \\z^2 - 10z &= (z - 5)^2 - 5^2\end{aligned}$$

Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned}(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 - 14 - 9 - 1 - 25 &= 0 \\(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 &= 49 \\(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 &= 7^2\end{aligned}$$

Altså har kula sentrom i  $S = (3, -1, 5)$  og radius  $r = 7$ .

b) Vi setter koordinatene til  $A$  faktoriserste venstresiden av kuleligningen og får:

$$(4 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + (6 - 5)^2 = 6$$

Ligningen over representerer den kvadrerte avstanden mellom  $S$  og  $A$ , siden  $6 < 49$  må  $A$  ligge inni kula.

For  $B$  får vi:

$$(-6 - 3)^2 + (-4 + 1)^2 + (1 - 5)^2 = 106$$

Siden  $106 > 49$  ligger  $B$  utenfor kula.

??

a) Av ligningen ser vi at  $[3, -2, 1]$  er en normalvektor.

b) I ligningen for  $\beta$  ser vi at hvis  $x = y = 0$ , så må også  $z = 0$ .  $\beta$  inneholder derfor origo.

c) Avstanden  $h$  mellom  $\alpha$  og  $\beta$  må tilsvare avstande mellom  $\alpha$  og et punkt i  $\beta$ . Vi bruker svaret fra b) og får:

$$\begin{aligned}h &= \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 12|}{|[3, -2, 1]|} \\&= \frac{12}{\sqrt{9 + 4 + 1}} \\&= \frac{12}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

??

a) For å finne  $S$  skriver vi de fullstendige kvadratene:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x &= (x - 3)^2 - 3^2 \\y^2 + 4y &= (y + 2)^2 - 2^2 \\z^2 &= z^2\end{aligned}$$

Kuleligningen kan vi derfor skrive som:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 - 23 - 3^2 - 2^2 &= 0 \\(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 &= 36 \\(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 &= 6^2\end{aligned}$$

Altså har vi  $S = (3, -2, 0)$ .

b) Av ligningen til planet ser vi at  $[2, -1, -2]$  er en normalvektor for  $\alpha$ . Dette må være en retningsvektor for linja som går gjennom  $A$  og  $S$ , som dermed kan parameteriseres ved:

$$l : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

c) *Løsningsmetode 1:* Linja og kuleflata skjærer der parameteriseringen til linja oppfyller kuleligningen:

$$\begin{aligned}((3 + 2t) - 3)^2 + ((-2 - t) + 2)^2 + (-2t - 0)^2 &= 36 \\(2t)^2 + (-t)^2 + (-2t)^2 &= 36 \\9t^2 &= 36 \\t^2 &= 4 \\t &= \pm 2\end{aligned}$$

For  $t = -2$  gir parameteriseringen punktet  $(-1, 0, 4)$  mens for  $t = 2$  får vi punktet  $(7, -4, -4)$ .

*Løsningsmetode 2:* Vi har funnet at  $[2, -1, -2]$  er en retningsvektor for linja gjennom  $A$  og  $S$ , denne vektoren har lengde 3. Vi kan derfor lage oss en retningsvektor med lengde 1 ved å skrive  $\frac{1}{3}[2, -1, 2]$ . Siden avstanden mellom  $S$  og de to punktene vi søker er lik radiusen 6, må de være gitt ved uttrykket

$$S \pm 6 \cdot \frac{1}{3}[2, -1, -2] = S \pm 2[2, -1, -2]$$

Regner man ut dette får man (selvølgelig) samme svar som for *Løsningsmetode 1*.

**d)** Se eksempel på side ?? eller bruk lignende resonnement som *Løsningsmetode 2* i opg. c).

**e)** Radiusen  $R$  til sirkelen, radiusen  $r$  til kula og linjestykket  $AS$  utgjør en rettvinklet trekant. Av Pytagoras' setning har vi da at:

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 - |\overrightarrow{AS}|^2 \\ &= 6^2 - 3^2 \\ &= 36 - 9 \\ &= 27 \\ R &= \pm\sqrt{27} \end{aligned}$$

$R$  har altså lengden  $\sqrt{27}$ .