0.1 Vektorer i rommet

I TM1 har vi sett på todimensjonale vektorer beskrevet ved hjelp av en x- og en y-akse. Når vi skal beskrive en **tredimensjonal vektor**, innfører vi i tillegg en z-akse som står normalt på de to andre aksene.

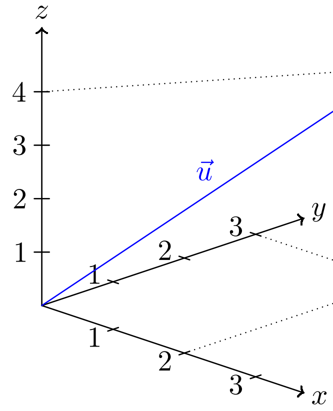


Figure 1: $\vec{u} = [2, 3, 4]$

0.1 Vektoren mellom to punkt

En vektor $\vec{v}$ med startpunkt $A = (x_1, y_1, z_1)$ og endepunkt $B = (x_2, y_2, z_2)$ er gitt som

$$\vec{u} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] \tag{1}$$

Eksempel

Finn vektoren $\vec{u}$ mellom punktet $A = (1, 2, 0)$ og $B = (3, 0, 1)$.

Svar

$$\begin{aligned}\vec{u} &= [3 - 1, 0 - 2, 1 - 0] \\ &= [2, -2, 1]\end{aligned}$$

Merk

Seksjon 0.2 - 0.4 handler om visse egenskaper og regneregler for tredimensjonale vektorer. Det er mange likheter ved todimensjonale og tredimensjonale vektorer, så i tilfeller hvor en regel mangler forklaring, er det fordi forklaringen for det todimensjonale tilfellet (som du finner i TM1) enkelt kan generaliseres til det tredimensjonale tilfellet.

0.2 Lengden til en vektor

La oss prøve å finne lengden til en vektor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, som skissert i *figur 2*. Grafisk er lengden avstanden fra den butte enden til pilspissen.

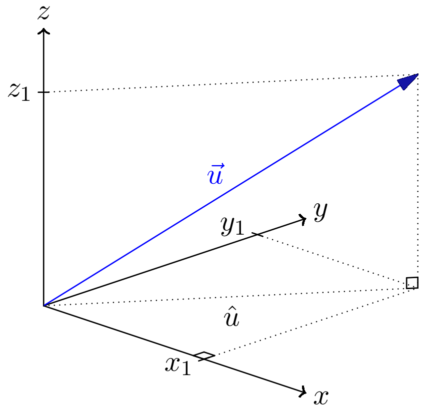


Figure 2

Vi kan alltid lage en rettvinklet trekant med sidelengder $|\vec{u}|$, z_1 og $\hat{u} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Av Pytagoras' setning har vi da at

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{\hat{u}^2 + z_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}
\end{aligned}
$$

0.2 lengden til en vektor

Lengden $|\vec{u}|$ av en vektor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ er gitt som

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{2}$$

Eksempel

Finn lengden til vektoren $\vec{u} = [-2, 4, 1]$.

Svar

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{4 + 16 + 1} \\
&= \sqrt{21}
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Finn lengden til vektoren $\vec{a} = [-9, 18, 27]$.

Svar

Ved å bruke (6) sparer vi oss for kvadrater av store tall:

$$[-9, 18, 27] = 9[-1, 2, 3]$$

Lengden blir da (se oppgave **??**)

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 9\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \\ &= 9\sqrt{14} \end{aligned}$$

0.3 Regneregler og skalarprodukt

0.3 Regneregler for vektorer

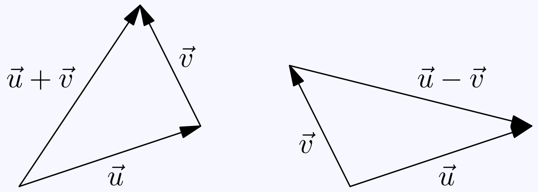
Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$, punktet $A = (x_0,y_0,z_0)$ og en konstant t. Da er

$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) \tag{3}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] \tag{4}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2] \tag{5}$$

Summen eller differansen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan vi tegne slik:



0.4 Regneregler for vektorer

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$, og et tall t, har vi at

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \tag{6}$$

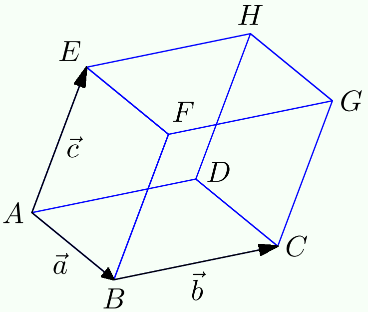
$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \tag{7}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{8}$$

$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \tag{9}$$

Eksempel

Et parallellogram er tegnet inn i figuren under.



Vis at midpunktet M til diagonalen AG også er midtpunktet til diagonalen CE.

Svar

Vektoren $\overrightarrow{AG}$ er gitt som

$$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

Vi kaller midpunktet til CE for M_1. Da har vi at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b})\end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_1} &= \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CM_1} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

Dette må bety at $M = M_1$.

0.5 Skalarproduktet I

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ kan skrives som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \tag{10}$$

For særtilfellet $\vec{u} \cdot \vec{u}$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2} \tag{11}$$

Eksempel

Finn skalarproduktet av vektorene $\vec{a} = [1, 2, 3]$ og $\vec{b} = [4, -3, -2]$.

Svar

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) \\ &= -8 \end{aligned}$$

0.6 Skalarproduktet II

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \tag{12}$$

hvor $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Eksempel 1

En vektor $\vec{a}$ har lengde 3 og en vektor $\vec{b}$ har lengde 2. De utspenner vinkelen 45°. Finn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Svar

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \cdot 2 \cos(45^\circ) \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Finn vinkelen v utspent av vektorene $\vec{a} = [-5, 4, -3]$ og $\vec{b} = [-2, 5, -5]$.

Svar

Vi starter med å finne lengdene og skalarproduktene av vektorene:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{50} \\
&= 5\sqrt{2} \\
|\vec{b}| &= \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{54} \\
&= 3\sqrt{6} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (-5) \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5) \\
&= 45
\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos v \\
45 &= 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cos v \\
\cos v &= \frac{5 \cdot 9}{5 \cdot 3\sqrt{12}} \\
&= \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Siden $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$, er $v = 30°$.

0.7 Regneregler for skalarproduktet

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har vi at

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \vec{v}\cdot\vec{u} \\
\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \\
(\vec{u}+\vec{v})^2 &= \vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}
\end{aligned}$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^2$$

når du vet at $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Svar

$$\begin{aligned}
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^2 &= \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 \\
&= \vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 \\
&= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2
\end{aligned}$$

0.4 Vinkelrette og parallelle vektorer

0.8 Vinkelrette vektorer

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett på hverandre hvis skalarproduktet av dem er null:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \tag{13}$$

Eksempel 1

Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5, -3, 2]$ og $\vec{b} = [2, 4, 1]$ er ortogonale.

Svar

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [5, -3, 2] \cdot [2, 4, 1] \\ &= 10 - 12 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{a} \perp \vec{b}$.

0.9 Parallelle vektorer

To vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ har vi at

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{14}$$

Alternativt, for et tall t har vi at

$$\vec{u} = t\vec{v} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{15}$$

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{u} = [1, 2, 3]$ og $\vec{v} = [3, 2(1-t), 11+t]$, finn t slik at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

Svar

Vi starter med å kreve at forholdet mellom korresponderende komponenter er likt. Vi dividerer x- og y-komponenten i $\vec{v}$ med henholdsvis x- og y-komponenten i $\vec{u}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{1} &= \frac{2(1-t)}{2} \\ 3 &= 1-t \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Siden forholdet mellom de to x-komponentene og de to y-koordinatene er 3, må dette også stemme for z-koordinatene for at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skal være parallelle:

$$\begin{aligned} \frac{11+t}{3} &= \frac{11+(-2)}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{u} \parallel \vec{v}$ hvis $t = -2$.

Eksempel 2

Finn s og t slik at vektorene $\vec{u} = [-1, 2s, 4]$ og $\vec{v} = [3, 18, 4t+4]$ er parallelle.

Svar

Vi observerer at forholdet mellom x-komponeten i $\vec{v}$ og $\vec{u}$ er $\frac{3}{-1} = -3$. Hvis $\vec{u} \parallel \vec{v}$, er altså $\vec{v} = -3\vec{u}$. Vi kan derfor sette opp følgende ligning for s:

$$\begin{aligned} 18 &= -3(2s) \\ s &= -3 \end{aligned}$$

Videre må vi ha at

$$\begin{aligned} 4t+4 &= -3(4) \\ t &= -4 \end{aligned}$$

0.5 Determinanter

0.10 3×3 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ av tre vektorer $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$ er gitt som

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ h & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ h & i \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$= a(ej - fi) - b(dj - fh) + c(di - eh) \tag{17}$$

Eksempel

Finn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ til vektorene $\vec{a} = [1, -2, 2], \vec{b} = [2, 2, -3]$ og $\vec{c} = [4, -1, 2]$.

Svar

Vi skal altså regne ut følgende:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Å gå rundt å huske (17) er ikke bare bare, så vi skal her bruke et triks som gjør det enklere for oss å komme fram til høyresiden i (16).

Vi starter med å finne tallet i første rad og kolonne, i vårt tilfelle 1. Deretter danner vi en 2×2 determinant ved å utelukke raden og kolonnen dette tallet tilhører:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 2 & -3 \\ \cancel{4} & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Når vi ganger 1 med denne determinanten, har vi funnet det første leddet fra (16):

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi går så over til tallet i første rad og andre kolonne, altså -2, og finner den tilhørende 2×2 determinanten:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{2} & -3 \\ 4 & \cancel{-1} & 2 \end{vmatrix}$$

Når vi setter et minustegn foran -2 ganger denne determinanten, har vi funnet andre ledd fra (16):

$$-(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi avslutter med determinanten vi får ved å utelukke første rad og tredje kolonne:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ 2 & 2 & \cancel{-3} \\ 4 & -1 & \cancel{2} \end{vmatrix}$$

Ganger vi denne med tallet som står i både raden og kolonnen som er utelatt, altså 2, får vi siste ledd i (16):

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Vi har nå funnet alle ledd vi trenger og kan da skrive

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1) + 2(2 \cdot 2 - (-3) \cdot 4) + 2(2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) \\ &= 13 \end{aligned}$$

0.6 Vektorproduktet

Vi har sett hvordan vi ved skalarproduktet kan sjekke om to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står normalt på hverandre, men ofte kan vi isteden være interessert i å finne en vektor som står normalt på begge disse. En slik vektor får vi ved **vektorproduktet** av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, som vi skriver som $\vec{u} \times \vec{v}$.

0.11 Vektorproduktet

Vektorpruduktet av vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$ er gitt som

$$\vec{u} \times \vec{v} = [bf - ce, -(af - cd), ae - bd] \tag{18}$$

Eventuelt kan man skrive

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \tag{19}$$

hvor $\vec{e}_x = [1, 0, 0], \vec{e}_y = [0, 1, 0]$ og $\vec{e}_z = [0, 0, 1]$.

Videre har vi at[1]

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \tag{20}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \tag{21}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \tag{22}$$

[1]Kryssprodukt må regnes ut før skalarprodukt.

Språkboksen

Et vektorprodukt kalles også et **kryssprodukt**.

Merk

For skalarproduktet får vi en skalar (et tall), mens vi for vektorproduktet får en vektor. Det er derfor veldig viktig å skille symbolet $\cdot$ fra $\times$.

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{a} = [-3, 2, 3]$ og $\vec{b} = [2, -2, 1]$.

a) Finn $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Vis at vektoren du fant i a) står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar

a) Vi bruker uttrykket fra (19), og regner ut følgende 3×3 determinant:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi får da at (se gjerne tilbake til eksempelet på side 12)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) - \vec{e}_y(-3 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + \vec{e}_z(-3 \cdot (-2) - 2 \cdot 2) \\ &= 8\vec{e}_x + 9\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \\ &= [8, 9, 2] \end{aligned}$$

b) To vektorer står normalt på hverandre dersom skalarproduktet av dem er 0:

$$[8, 9, 2] \cdot [-3,2,3] = -24 + 18 + 6 = 0$$

$$[8, 9, 2] \cdot [2, -2,1] = 16 - 18 + 2 = 0$$

0.12 Regneregler for vektorproduktet

For vektorene $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ og en konstant t har vi at

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \tag{23}$$

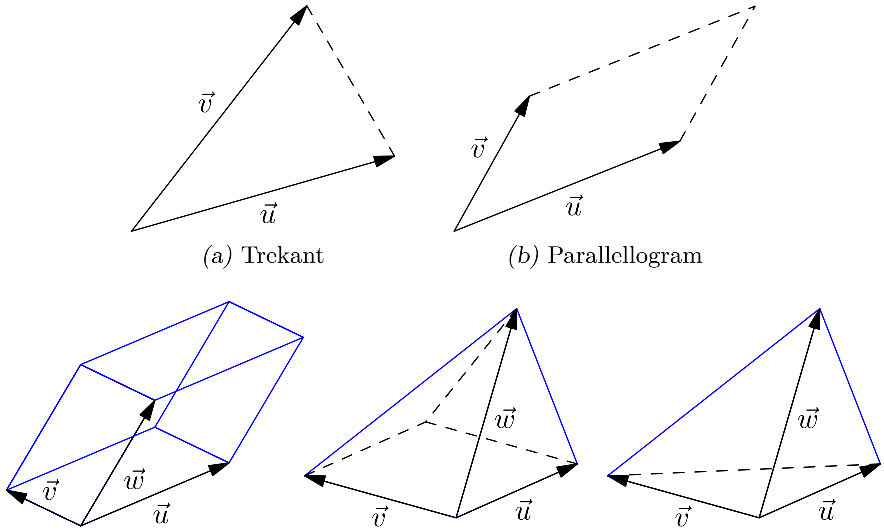
$$\vec{u} \times (t\vec{v}) = t(\vec{u} \times \vec{v}) \tag{24}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \tag{25}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v} \tag{26}$$

0.6.1 Vektorprodukt som areal og volum

En anvendelse av vektorproduktet (og skalarproduktet) er å finne arealet og volumet av noen geometriske former som kan sies å være *utspent* av vektorer. Med dette mener vi at to eller tre vektorer som starter i samme utgangspunkt, utgjør grunnlaget for en trekant, et parallellogram, et **parallellepiped**, en pyramide eller et **tetraeder**.



(a) Trekant *(b)* Parallellogram *(c)* Parallellepiped *(d)* Pyramide *(e)* Tetraeder

Figure 3: Geometriske former utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

0.13 Vektorproduktet som areal og volum

Arealet A av et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{27}$$

Arealet A av en trekant utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| \tag{28}$$

Volumet V av parallellepipedet utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{29}$$

Volumet V av pyramiden utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = \frac{1}{3}|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{30}$$

Volumet V til tetraedet utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = \frac{1}{6}|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{31}$$

Forklaringer

0.9 Parallelle vektorer (forklaring)

Ligning (27) forteller oss at $|\vec{u} \times \vec{v}|$ tilsvarer arealet av parallellogramet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Dette arealet kan bare ha verdien 0 hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, og den eneste vektoren med lengde 0 er nullvektoren $[0, 0, 0]$. Kombinerer vi dette kravet med (0.11), får vi at

$$[y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2] = [0, 0, 0]$$

Uttrykket over gir oss tre ligninger

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0$$

$$x_1 z_2 - z_1 x_2 = 0$$

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$$

som vi kan omskrive til

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Til slutt kan vi samle alle tre til én ligning:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

0.11 Vektorproduktet (forklaring)

Hensikten med vektorproduktet er å innføre en regneoperasjon som gir oss en vektor $\vec{w} = [x, y, z]$ som står normalt på to andre vektorer $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$. For at dette skal være sant, vet vi av (13) at

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= 0 \\ ax + by + cz &= 0 \\ ax + by &= -cz \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= 0 \\ dx + ey + fz &= 0 \\ dx + ey &= -fz \end{aligned} \tag{33}$$

Vi har altså to forskjellige ligninger som kan hjelpe oss med å finne de tre ukjente størrelsene x, y og z. Dette kalles at man har en ligning med *én fri variabel.* Hvis vi velger z som fri variabel betyr dette kort fortalt at vi kan finne et uttrykk for x og y som vil oppfylle (32) og (33) for et hvilket som helst valg av z.

Vi starter med å finne et uttrykk for x. Først multipliserer vi (33) med $\frac{b}{e}$, og subtraherer deretter venstre- og høyresiden fra denne ligningen med henholdsvis venstre- og høyresiden fra ligning (32):

$$\begin{aligned} ax + by - \left(\frac{bdx}{e} + by\right) &= -cz - \left(-\frac{bfz}{e}\right) \\ ax - \frac{bdx}{e} &= -cz - \left(-\frac{bfz}{e}\right) \end{aligned}$$

Hvis vi videre multipliserer med e, og deretter antar at $ae - bd \neq 0$, får vi at

$$\begin{aligned} aex - bdx &= bfz - cez \\ (ae - bd)x &= (bf - ce)z \\ x &= \frac{bf - ce}{ae - bd}z \qquad (34) \end{aligned}$$

Med omtrent samme framgangsmåte og identisk antakelse finner vi et uttrykk for y:

$$\begin{aligned} ax + by - \left(ax + \frac{aey}{d}\right) &= -cz - \left(-\frac{afz}{d}\right) \\ (bd - ae)y &= (af - cd)z \\ y &= \frac{af - cd}{bd - ae}z \qquad (35) \end{aligned}$$

Som nevnt kan z velges fritt, og vi ser av (34) og (35) at valget $z = ae - bd$ gir oss følgende fine uttrykk:

$$\begin{aligned} x &= bf - ce \\ y &= -(af - cd) \\ z &= ae - bd \end{aligned}$$

Dette samsvarer med (0.11).

For å komme fram til likhetene over har vi antatt at $z = ae - bd \neq 0$, men det er fristende å sjekke om uttrykkene vi nettopp har funnet oppfyller (32) og (33) også når $z = ae - bd = 0$:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ a(bf - ce) + -b(af - cd) &= 0 \\ -(ae - bd)c &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx + ey &= 0 \\ d(bf - ce) - e(af - cd) &= 0 \\ -(ae - db)f &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Med z som fri variabel er altså (32) og (33) oppfylt for alle $z = ae - bd$, dermed har vi funnet et uttrykk som alltid vil gi oss en vektor $\vec{w}$ som er ortogonal med både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Så lenge man bruker uttrykkene fra (34) og (35), vil $\vec{w}$ være parallell med vektoren gitt ved (0.11), uansett valg av z. I tillegg kan vi få uttrykket fra (0.11) også om vi velger x eller y som fri variabel (det får bli opp til leseren å konstatere disse to påstandene). Av dette kan vi konkludere med at alle vektorer som står ortogonalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle med vektoren gitt ved (0.11).

Lengden til vektorproduktet

For å komme fram til det vi ønsker, skal vi benytte oss av **Lagranges identitet**[1]. Denne sier at vi for to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ har at

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \quad \text{(Lagranges identitet)}$$

Ved å anvende (12) og (**??**) kan vi skrive

$$\begin{aligned} |\vec{v} \times \vec{u}|^2 &= |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \cos^2\theta \\ |\vec{v} \times \vec{u}|^2 &= |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ |\vec{v} \times \vec{u}| &= |\vec{v}||\vec{u}| \sin\theta \end{aligned}$$

[1] Den spesielt interesserte finner utledningen for identieten i vedlegg **??**

0.13 Vektorproduktet som areal og volum (forklaring)

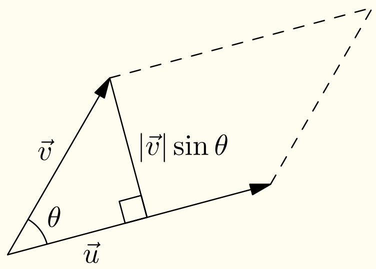


Figure 4: Parallellogram med grunnlinje $|\vec{u}|$ og høyde $|\vec{v}|\sin\theta$.

Arealet av et paralellogram er gitt som grunnlinja ganger høyden. For et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, tilsvarer dette produktet $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$, som er det samme som lengden $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Arealet av trekanten utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er halvparten av arealet av parallellogrammet.

Vektorproduktet som volum

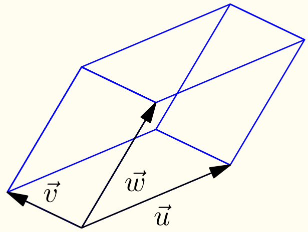


Figure 5

Volumet V av et parallellepiped tilsvarer grunnflaten A ganger høyden h:

$$V = Ah \tag{36}$$

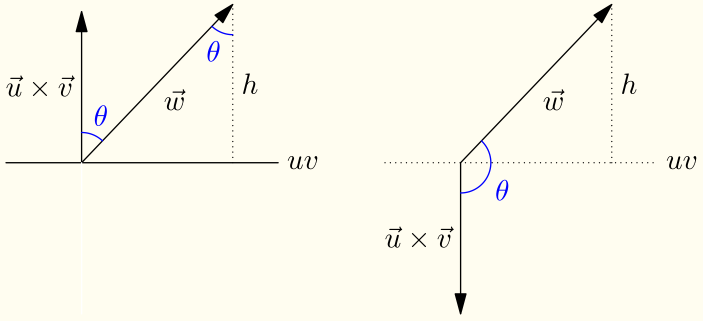


Figure 6

I *figur 5* er grunnflaten A utspent av vektorene $\vec{v}$ og $\vec{v}$, og vi vet fra (27) at

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{37}$$

La θ være vinkelen mellom $\vec{u} \times \vec{v}$ og $\vec{w}$. Hvis $90° \geq \theta \geq 0$, får vi en figur som skissert i *figur 6a*. Da er høyden h gitt som

$$h = |\vec{w}\,| \cos\theta$$

Er derimot $180° \geq \theta > 90°$, får vi en figur som skissert i *figur 6b*. Da er

$$h = -|\vec{w}\,| \cos\theta$$

For alle $\theta \in [0°, 180°]$ kan vi derfor skrive

$$h = \big||\vec{w}\,| \cos\theta\big| \tag{38}$$

Av (12), (36), (37) og (38), og har vi derfor at

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| &= \big||\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}\,| \cos\theta\big| \\ &= Ah \\ &= V \end{aligned}$$

Av klassisk geometri har vi videre at

- volumet av pyramiden utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\frac{1}{3}$ av volumet av parallellepipedet.
- volumet av tetraedet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\frac{1}{6}$ av volumet av parallellepipedet.