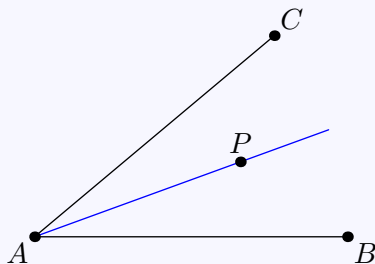


## 0.1 Definisjoner

### 0.1 Halveringslinje

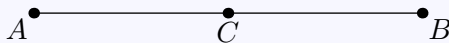
Gitt  $\angle BAC$ . For et punkt  $P$  som ligger på **halveringslinja** til vinkelen (blå linje i figuren), er

$$\angle BAP = PAC = \frac{1}{2}\angle BAC \quad (1)$$



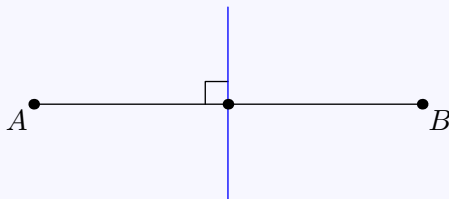
### 0.2 Midtpunkt

**Midtpunktet**  $C$  til  $AB$  er punktet på linjestykket slik at  $AC = CB$ .



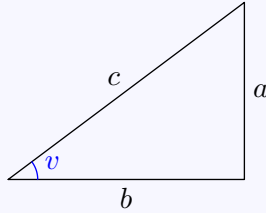
### 0.3 Midtnormal

**Midtnormalen** til  $AB$  (blå linje i figuren) står normalt på, og går gjennom midtpunktet til,  $AB$ .



## 0.4 sin, cos og tan

Gitt en rettvinklet trekant med katetene  $a$  og  $b$ , hypotenus  $c$ , og vinkel  $v$ , som vist i figuren under.



Da er

$$\sin v = \frac{a}{c} \quad (2)$$

$$\cos v = \frac{b}{c} \quad (3)$$

$$\tan v = \frac{a}{b} \quad (4)$$

### Språkboksen

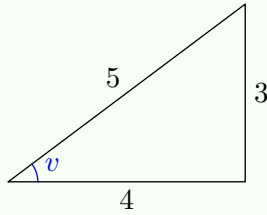
I figuren over blir  $a$  kalt den **motstående** kateten til vinkel  $v$ , og  $b$  den **hosliggende**.

sin, cos og tan er forkortelser for henholdsvis **sinus**, **cosinus** og **tangens**.

### Eksaktverdier

De aller fleste sinus-, cosinus- og tangensverdier er irrasjonale tall, i praktiske anvendelser av verdiene er det derfor vanlig å benytte digitale hjelpemidler. Verdiene som er viktigst for teoretiske formål er gitt i **vedlegg ??**.

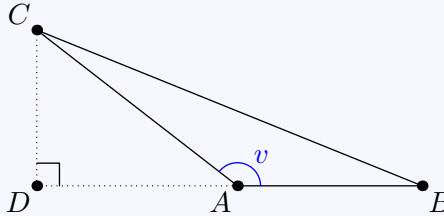
### Eksempel



$$\sin v = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos v = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan v = \frac{3}{4}$$

### 0.5 Sinus, cosinus og tangens I

Gitt  $\triangle ABC$ , hvor  $v = \angle BAC > 90^\circ$ , som vist i figuren under.



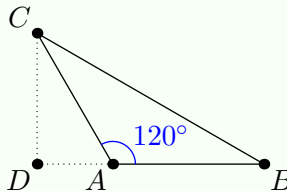
Da er

$$\sin v = \frac{CD}{AC} \tag{5}$$

$$\cos v = -\frac{AD}{AC} \tag{6}$$

$$\tan v = -\frac{CD}{AD} \tag{7}$$

### Eksempel



I figuren over er  $CD = \sqrt{3}$ ,  $AD = 1$  og  $AC = 2$ . Da er

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad , \quad \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

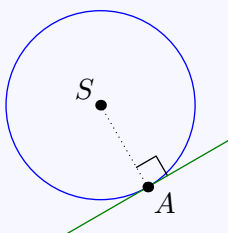
## 0.2 Egenskaper til sirkler

### 0.6 Tangent

En linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt, kalles en **tangent** til sirkelen.

La  $S$  være sentrum i en sirkel, og la  $A$  være skjæringspunktet til denne sirkelen og en linje. Da har vi at

linja er en tangent til sirkelen  $\iff \overrightarrow{AS}$  står vinkelrett på linja



### Språkboksen

Når to geometriske former skjærer hverandre i bare ett punkt, sier vi at de "tangerer hverandre".

### 0.7 Sentral- og periferivinkel

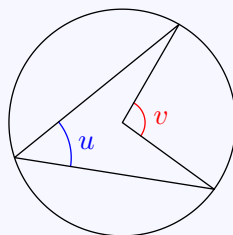
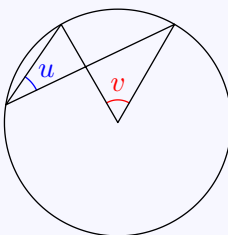
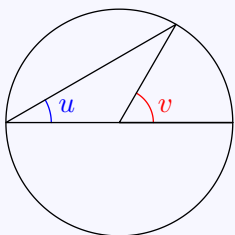
Både periferi- og sentralvinkler har vinkelbein som ligger (delvis) inni en sirkel.

En **sentralvinkel** har toppunkt i sentrum av en sirkel.

En **periferivinkel** har toppunkt på sirkelbuen.

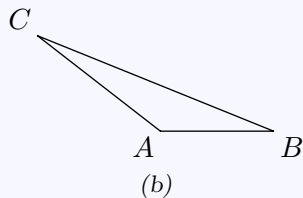
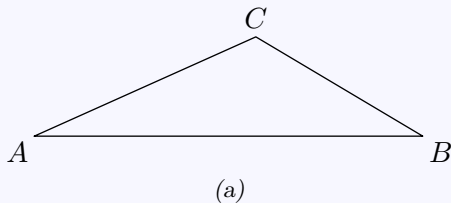
Gitt en periferivinkel  $u$  og en sentralvinkel  $v$ , som er innskrevet i samme sirkel og som spanner over samme sirkelbue. Da er

$$v = 2u \quad (8)$$



## 0.3 Egenskaper til trekanter

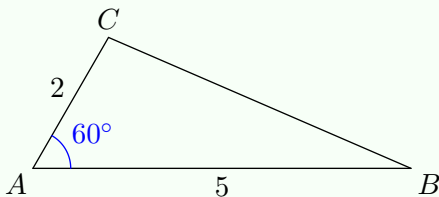
### 0.8 Arealsetningen



Arealet  $T$  til  $\triangle ABC$  er

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A \quad (9)$$

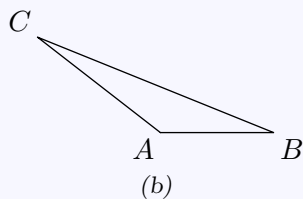
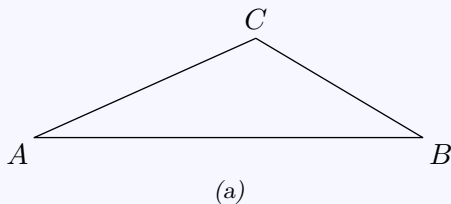
### Eksempel



Da  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  Arealet  $T$  til  $\triangle ABC$  er

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

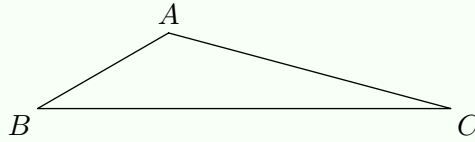
### 0.9 Sinussetningen



$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle C}{AB} \quad (10)$$

### Eksempel

$BC = \sqrt{2}$ ,  $\angle A = 135^\circ$ , og  $\angle B = 30^\circ$ . Finn lengden til  $AC$ .



### Svar

Vi har at

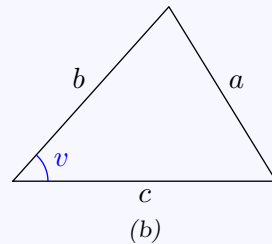
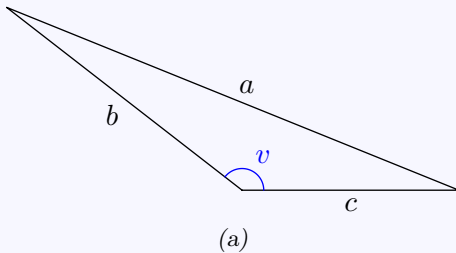
$$AC = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} BC$$

Da  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  og  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , har vi at

$$AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

### 0.10 Cosinussetningen

Gitt en trekant med sidelengder  $a$ ,  $b$  og  $c$ , og vinkel  $v$ , som vist i figurene under.

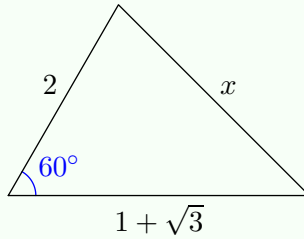


Da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v \quad (11)$$

### Eksempel

Finn verdien til  $x$ .



### Svar

Vi har at

$$x^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2(1 + \sqrt{3}) \cos 60^\circ$$

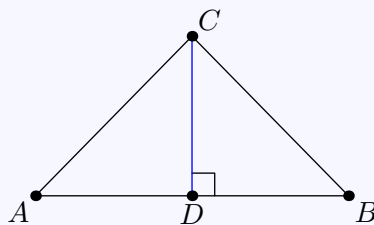
Da  $\cos 60 = \frac{1}{2}$ , har vi at

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Altså er  $x = \sqrt{6}$ .

### 0.11 Midtnormalen i en likebeint trekant

Gitt en likebeint trekant  $\triangle ABC$ , hvor  $AC = BC$ , som vist i figuren under.

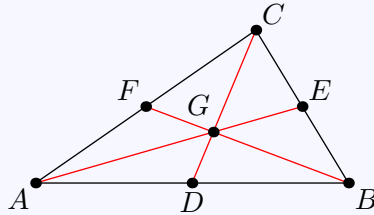


Høgda  $DC$  ligger da på midtnormalen til  $AB$ .

### 0.12 Median

En **median** er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden i trekanten.

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt.

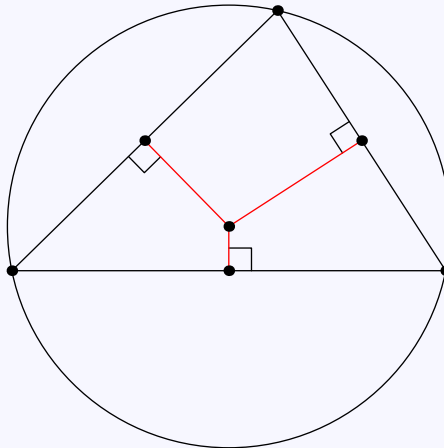


Gitt  $\triangle ABC$  med medianer  $CD$ ,  $BF$  og  $AE$ , som skjærer hverandre i  $G$ . Da er

$$\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = 2$$

### 0.13 Midtnormal (i trekant)

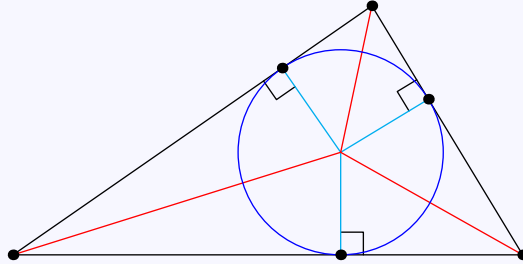
Midtnormalene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i den **omskrevne sirkelen** til trekanten, som har hjørnene til trekanten på sin bue.





### 0.14 Innskrevet sirkel

Halveringslinjene til vinklene i en trekant møtes i ett og samme punkt. Dette punktet er sentrum i trekantens **innskrevne sirkel**, som tangerer hver av sidene til trekanten.



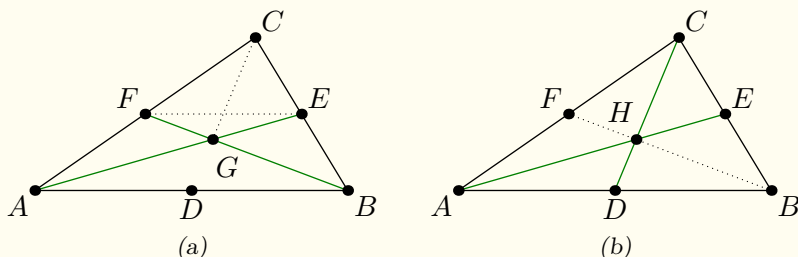
## 0.4 Forklaringer

### 0.11 Midtnormalen i en likebeint trekant (forklaring)

Da både  $\triangle ADC$  og  $\triangle DBC$  er rettvinklede og har  $CD$  som korteste katet, og  $AC = BC$ , følger det av Pytagoras' setning at  $AD = BD$ .

### 0.12 Median (forklaring)

Vi vil her skrive arealet til en trekant  $\triangle ABC$  som  $ABC$ .



Vi lar  $G$  være skjæringspunktet til  $BF$  og  $AE$ , og tar det for gitt at dette ligger inne i  $\triangle ABC$ . Da  $AF = \frac{1}{2}AC$  og  $BE = \frac{1}{2}BC$ , er  $ABF = BAE = \frac{1}{2}ABC$ . Dermed har  $F$  og  $E$  lik avstand til  $AB$ , som betyr at  $FE \parallel AB$ . Videre har vi også at

$$\begin{aligned} ABG + AFG &= ABG + BGE \\ AFG &= BGE \end{aligned}$$

$G$  har lik avstand til  $AF$  og  $FC$ , og  $AF = FC$ . Dermed er  $AFG = GFC$ . Tilsvarende er  $BGE = GEC$ . Altså har disse fire trekantene likt areal. Videre er

$$\begin{aligned} AFG + GFC + GEC &= AEC \\ GEC &= \frac{1}{6}ABC \end{aligned}$$

La  $H$  være skjæringspunktet til  $AE$  og  $CD$ . Med samme framgangsmåte som over kan det vises at

$$HEC = \frac{1}{6}ABC$$

Da både  $\triangle GEC$  og  $\triangle HEC$  har  $CE$  som side, likt areal, og både  $G$  og  $H$  ligger på  $AE$ , må  $G = H$ . Altså skjærer medianene hverandre i ett og samme punkt.

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$  fordi de har parvis parallelle sider. Dermed er

$$\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{CE} = 2$$

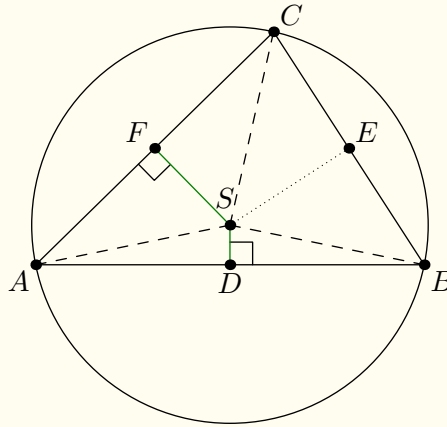
$\triangle ABG \sim \triangle EFG$  fordi  $\angle EGF$  og  $\angle AGB$  er toppvinkler og  $AB \parallel FE$ . Dermed er

$$\frac{GB}{FG} = \frac{AB}{FE} = 2$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = 2$$

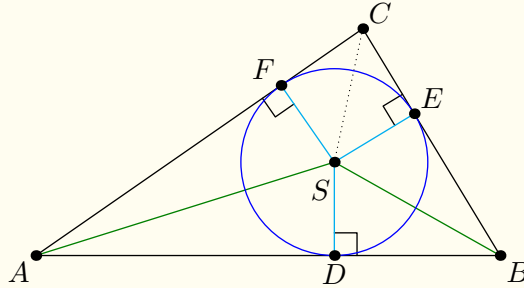
### 0.13 Midtnormal (i trekant) (forklaring)



Gitt  $\triangle ABC$  med midtpunktene  $D$ ,  $E$  og  $F$ . Vi lar  $S$  være skjæringspunktet til de respektive midtnormalene til  $AC$  og  $AB$ .  $\triangle AFS \sim \triangle CFS$  fordi begge er rettvinklede, begge har  $FS$  som korteste katet, og  $AF = FC$ . Tilsvarende er  $\triangle ADS \sim \triangle BDS$ . Følgelig er  $CS = AS = BS$ . Dette betyr at

- $\triangle BSC$  er likebeint, og da går midtnormalen til  $BC$  gjennom  $S$ .
- $A$ ,  $B$  og  $C$  må nødvendigvis ligge på sirkelen med sentrum  $S$  og radius  $AS = BS = CS$

### 0.14 Innskrevet sirkel (forklaring)

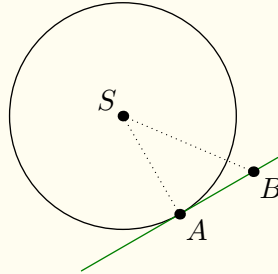


Gitt  $\triangle ABC$ . Vi lar  $S$  være skjæringspunktet til de respektive halveringslinjene til  $\angle BAC$  og  $\angle CBA$ . Videre plasserer vi  $D$ ,  $E$  og  $F$  slik at  $DS \perp AB$ ,  $ES \perp BC$  og  $FS \perp AC$ .  $\triangle ASD \cong \triangle ASF$  fordi begge er rettvinklede og har hypotenus  $AS$ , og  $\angle DAS = \angle SAF$ . Tilsvarende er  $\triangle BSD \cong \triangle BSE$ . Dermed er  $SE = SD = SF$ . Følgelig er  $F$ ,  $C$  og  $E$  de respektive tangeringspunktene til  $AB$ ,  $BC$  og  $AC$  og sirkelen med sentrum  $S$  og radius  $SE$ .

Videre har vi at  $\triangle CSE \cong \triangle CSF$ , fordi begge er rettvinklede og har hypotenus  $CS$ , og  $SF = SE$ . Altså er  $\angle FCS = \angle ECS$ , som betyr at  $CS$  ligger på halveringslinja til  $\angle ACB$ .

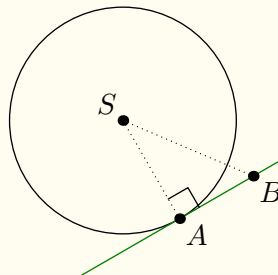
## 0.6 Tangent (forklaring)

Linja er en tangent til sirkelen  $\Rightarrow \overrightarrow{AS}$  står vinkelrett på linja



Vi antar at vinkelen mellom linja og  $\overrightarrow{AS}$  er ulik  $90^\circ$ . Da må det finnes et punkt  $B$  på linja slik at  $\angle BAS = \angle SBA$ , som betyr at  $\triangle ASB$  er likebeint. Følgelig er  $AS = BS$ , og da  $AS$  er lik radien i sirkelen, må dette bety at  $B$  også ligger på sirkelen. Dette motsier det faktum at  $A$  er det eneste skjæringspunktet til sirkelen og linja, og dermed må vinkelen mellom linja og  $\overrightarrow{AS}$  være  $90^\circ$ .

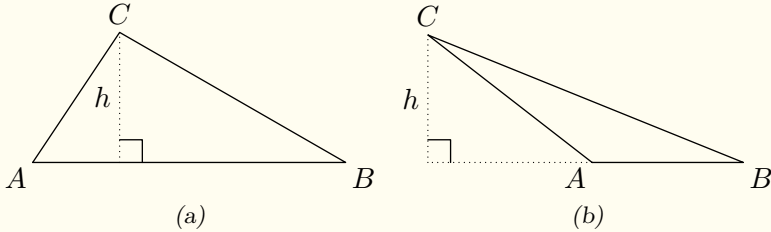
Linja er en tangent til sirkelen  $\Leftarrow \overrightarrow{AS}$  står vinkelrett på linja



Gitt et vilkårlig punkt  $B$ , som ikke samsvarer med  $A$ , på linja. Da er  $BS$  hypotenusen i  $\triangle ABS$ . Dette innebærer at  $BS$  er større enn radien til sirkelen ( $BS > AS$ ), og da kan  $B$  umulig ligge på sirkelen. Altså er  $A$  det eneste punktet som ligger på både linja og sirkelen, og dermed er linja en tangent til sirkelen.

### 0.8 Arealsetningen (forklaring)

Gitt to tilfeller av  $\triangle ABC$ , som vist i figuren under. Det éne hvor  $\angle BAC \in (0^\circ, 90^\circ]$ , det andre hvor  $\angle BAC \in (90^\circ, 0^\circ)$  og la  $h$  være høyden med grunnlinje  $AB$ .



Arealet  $T$  til  $\triangle ABC$  er i begge tilfeller

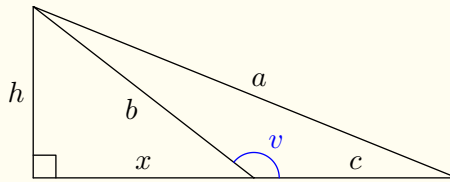
$$T = \frac{1}{2}AB \cdot h \quad (12)$$

Av henholdsvis (2) og (5) har vi at  $h = AC \cdot \sin \angle BAC$ , og da er

$$T = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

## 0.10 Cosinussetningen (forklaring)

Tilfellet hvor  $v \in (90^\circ, 180^\circ]$



Av Pytagoras' setning har vi at

$$x^2 = b^2 - h^2 \quad (13)$$

og at

$$a^2 = (x + c)^2 + h^2 \quad (14)$$

$$a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + h^2 \quad (15)$$

Ved å sette uttrykket for  $x^2$  fra (13) inn i (15), får vi at

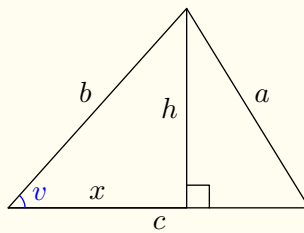
$$a^2 = b^2 - h^2 + 2xc + c^2 + h^2 \quad (16)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc \quad (17)$$

Av (6) har vi at  $x = -b \cos v$ , og da er

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

Tilfellet hvor  $v \in [0^\circ, 90^\circ]$



Dette tilfellet skiller seg ut fra tilfellet hvor  $v \in (90^\circ, 180^\circ]$  på to måter:

(i) I (14) får vi  $(c - x)^2$  i stedet for  $(x + c)^2$ . I (17) får vi da  $-2xc$  i stedet for  $+2xc$ .

(ii) Av (3) er  $x = b \cos v$ . Av punkt (i) følger det da at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$$

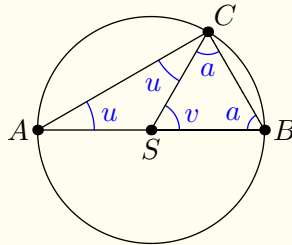


## 0.7 Sentral- og periferivinkel (forklaring)

Tilhørende periferi- og sentralvinkler kan deles inn i tre tilfeller.

### (i) En diameter i sirkelen er høyre eller venstre vinkelbein i begge vinklene

I figuren under er  $S$  sentrum i sirkelen,  $\angle BAC = u$  en periferivinkel og  $\angle BSC = v$  den tilhørende sentralvinkelen. Vi setter  $\angle SCB = a$ .  $\angle ACS = \angle SAC = u$  og  $\angle CBS = \angle SCB = a$  fordi både  $\triangle ASC$  og  $\triangle SBC$  er likebeinte.



Vi har at

$$2a = 180^\circ - v \quad (18)$$

$$2u + 2a = 180^\circ \quad (19)$$

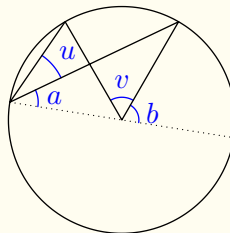
Vi setter uttrykket for  $2a$  fra (18) inn i (19):

$$2u + 180^\circ - v = 180^\circ$$

$$2u = v$$

### (ii) Vinklene ligger innenfor samme halvdel av sirkelen

I figuren under er  $u$  en periferivinkel og  $v$  den tilhørende sentralvinkelen. I tillegg har vi tegnet inn en diameter, som er med på å danne vinklene  $a$  og  $b$ . Både  $u$  og  $v$  ligger i sin helhet på samme side av denne diameteren.



Ettersom  $u + a$  er en periferivinkel, og  $v + b$  den tilhørende sentralvinkelen, vet vi av tilfelle 1 at

$$2(u + a) = v + b$$

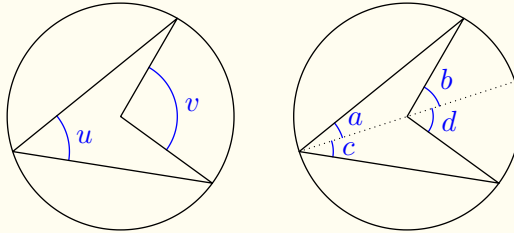
Men ettersom  $a$  og  $b$  også er samhørende periferi- og sentralvinkler, er  $2a = b$ . Det betyr at

$$2u + b = v + b$$

$$2u = v$$

**(iii) Vinklene ligger ikke innenfor samme halvdel av sirkelen**

I figuren under er  $u$  en periferivinkel og  $v$  den tilhørende sentralvinkelen. I figuren til høyre har vi tegnet inn en diameter. Den deler  $u$  inn i vinklene  $a$  og  $c$ , og  $v$  inn i  $b$  og  $d$ .



$a$  og  $c$  er begge periferivinkler, med henholdsvis  $b$  og  $d$  som tilhørende sentralvinkler. Av tilfelle i) har vi da at

$$2a = b$$

$$2c = d$$

Dermed er

$$2a + 2c = b + d$$

$$2(a + c) = v$$

$$2u = v$$