LOGIC MỆNH ĐỀ

1. Mệnh đề

1.1. Khái niệm mệnh đề

Chúng ta bắt đầu nghiên cứu môn Toán rời rạc bằng việc làm quen với một khái niệm cơ sở của logic học đó là **mệnh đề.** Ta sẽ lần lượt tìm hiểu các vấn đề liên quan đến nó như khái niệm, phép toán, biểu thức mệnh đề và sự tương đương logic của hai biểu thức mệnh đề. Trước hết mời bạn xem các phát biểu dưới đây:

(i).	10 là số nguyên chẵn.	*Có giá trị chân lý đúng*
(ii).	8 là số nguyên tố.	*Có giá trị chân lý sai*
(iii).	7 + 3 = 10.	*Có giá trị chân lý đúng*
(iv).	Hôm nay trời có mưa.	*Có thể đúng chỗ này nhưng lại sai nơi khác*
(v).	$x^2 - 3x + 2 = 0$.	*Đúng với x = 1 nhưng lại sai với x = 3*
(vi).	Ôi cô ấy mới đẹp làm sao!	*Không đúng, không sai vì không là câu trần thuật*

Ta thấy trong các phát biểu trên, có phát biểu là đúng, có phát biểu là sai, có phát biểu lúc đúng lúc sai phụ thuộc không gian và thời gian, có phát biểu thì không cho ta sự đúng sai được vì không là câu trần thuật. Trong phần này chúng ta quan tâm đến chỉ những phát biểu mà giá trị chân lý của nó là đúng hoặc sai không phụ thuộc vào các yếu tố không gian thời gian gọi nó là mệnh đề.

Như vậy, mệnh đề là một phát biểu khẳng định luôn nhận giá trị chân lý đúng hoặc sai không phụ thuộc vào không gian thời gian hay tình cảm. Các câu cảm, câu cầu khiến hay câu hỏi không phải là mệnh đề. Trong các phát biểu trên thì phát biểu (i), (ii) và (iii) là mệnh đề; các phát biểu còn lại không là mệnh đề.

Sau này ta thường quan tâm đến giá trị chân lý của mệnh đề mà không quan tâm đến nội dung của mệnh đề ấy nên:

+ thường ký hiệu bởi các chữ cái in hoa: P, Q, R,...
+ số hoá mệnh đề để thuận tiện cho việc biểu diễn bằng cách sử dụng các số 0 và 1 và đưa ra khái niệm chân trị như sau:
    - Mệnh đề có giá trị chân lý *đúng* được nói rằng nó có *chân trị = 1*,

- Mệnh đề có giá trị chân lý *sai* được nói rằng nó có *chân trị = 0.*

Có nhiều mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác bằng cách sử dụng trạng từ "không" hay các liên từ: và, hay, hoặc, nếu ... thì.... Các mệnh đề này gọi là mệnh đề phức. Dưới đây là ví dụ về các mệnh đề phức:

- An học giỏi Toán *và* An học giỏi Tin học
- *Nếu* Bình đạt kết quả cao trong năm học này *thì* Bình được khen thưởng vào cuối năm học.
- 8 *không* là số nguyên tố.
- Bình học giỏi môn Đại số *hay* Khoa là người chăm chỉ.

Mục đích của phép tính mệnh đề là việc nghiên cứu chân trị của mệnh đề phức phụ thuộc vào các mệnh đề đơn như thế nào? Người ta xây dựng lên hệ thống các phép toán thao tác trên các mệnh đề và gọi là các phép nối.

1.2. Các phép toán mệnh đề (phép nối)

1.2.1. phép phủ định

- Giả sử đã cho mệnh đề P.
- Câu " không phải là P" là một mệnh đề khác gọi là phủ định của P.
- Phủ định của P kí hiệu là ¬P (đôi khi còn kí hiệu là $\overline{P}$). bảng chân trị dưới đây mô tả quan hệ giữa mệnh đề P và phủ định của nó:

P	¬P
1	0
0	1

1.2.2. phép nối liền

- Mệnh đề nối liền của hai mệnh đề P, Q ký hiệu là P ∧ Q (đọc là: P và Q).
- Sử dụng liên từ: "và".
- Bảng chân trị:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2.3. phép nối rời

- Mệnh đề nối rời của hai mệnh đề P, Q ký hiệu là P ∧ Q (đọc là: P hay Q).
- Sử dụng liên từ:"hay".
- Bảng chân trị:

P	Q	PVQ
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.2.4. phép kéo theo (một chiều)

- Mệnh đề "Nếu P thì Q" ký hiệu là: P→ Q (đọc là: P kéo theo Q).
- Sử dụng liên từ:"nếu ... thì...".
- Bảng chân trị:

P	Q	P→Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.2.5. phép kéo theo hai chiều

- Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" ký hiệu là: P↔ Q (đọc là: P kéo theo hai chiều Q).
- Sử dụng liên từ:"nếu và chỉ nếu ".
- Bảng chân trị:

P	Q	P↔Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Chú ý rằng mệnh đề P↔ Q chỉ đúng khi cả hai mệnh đề P→Q và Q → P đều đúng.

1.3. Biểu thức mệnh đề (dạng mệnh đề)

Trước đây chúng ta đã biết một loạt biểu thức đó là biểu thức đại số. Biểu thức đại được xây dựng từ các con số (gọi là hằng số), các biến có thể nhận giá trị là số và các phép toán: +, -, x, ÷... Ví dụ như: $F(x,y,z) = 3x + 2yz - \frac{x-z}{y}$ là biểu thức đại số của 3 biến số x, y và z; các biến này nhận giá trị số thực.

Nay chúng ta làm quen biểu thức logic gọi là Dạng mệnh đề (biểu thức mệnh đề). Là biểu thức xây dựng từ: Các mệnh đề (còn gọi là hằng mệnh đề), các biến nhận giá trị là mệnh đề và các phép nối: ¬, Λ, V, →, ↔. Thứ tự ưu tiên thể hiện thông qua dấu (). Ví dụ:

E(p,q) = (p Λ q)V(¬q →P)

F(p,q,r) = (p Λ q)Vr

E là biểu thức của hai biến p, q. P là hằng mệnh đề (là một mệnh đề).

F là biểu thức của 3 biến p,q và r.

Chú ý rằng nếu E, F là các dạng mệnh đề thì ¬E, EΛF, EVF, E→F, E↔F là các dạng mệnh đề. Bằng cách này có thể xây dựng được các dạng mệnh đề lớn hơn. Mặt khác, điều ta quan tâm là mệnh đề E(P,Q), F(P,Q,R) sẽ có chân trị thế nào khi thay các biến p, q,r,... bằng các mệnh đề P, Q, R,... xác định. Nghĩa là quan tâm đến sự phụ thuộc về chân trị của E, F vào các biến p, q, r,... thông qua mỗi thể hiện (P,Q,R,...). Nói cách khác thì mỗi dạng mệnh đề sẽ có một bảng chân trị mà mỗi dòng của bảng cho biết chân trị của dạng mệnh đề thông qua chân trị của (p,q,r,...).

Ví dụ : Xây dựng bảng chân trị cho các dạng mệnh đề:

(pΛq)Vr và pΛ(qVr) theo các biến p, q, r.

p	q	r	pΛq	(pΛq)Vr	qVr	pΛ(qVr)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0

Bảng trên cho ta thấy các dạng mệnh đề:(p∧q)∨r và p∧(q∨r) nhận giá trị khác nhau. Điều này chứng tỏ thứ tự các phép toán là quan trọng và sự cần thiết của dấu (), còn dấu ¬ ta quy ước rằng nó đặt trước đơn vị nào sẽ tác động vào cả đơn vị đó. Chẳng hạn viết ¬p∧q thì thực hiện ¬p rồi mới thực hiện ∧; còn nếu muốn thực hiện ¬ sau thì phải viết ¬(p∧q).

Ví dụ 2: Xây dựng bảng chân trị cho các dạng mệnh đề:

E(p,q) = p→ q , F(p,q)= ¬p∨q

p	q	¬p	p→q	¬p∨q
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Nhận xét rằng E và F có giá trị chân trị như nhau. Ta sẽ định nghĩa chúng là tương đương logic như sau:

1.4. Tương đương logic:

Hai dạng mệnh đề (biểu thức mệnh đề) E, F được gọi là tương đương logic nếu chúng nhận giá trị như nhau ứng với từng thể hiện. Khi đó ta viết E⇔ F.

Ví dụ 3: Lập bảng chân trị cho dạng mệnh đề: E(p,q) =((p∨q)∧¬p)→ q

p	q	¬p	p∨q	(p∨q)∧¬p	((p∨q)∧¬p)→q
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Định nghĩa:

- Một dạng mệnh đề được gọi là *hằng đúng* nếu nó luôn nhận giá trị = 1.
- Một dạng mệnh đề được gọi là *hằng sai* nếu nó luôn nhận giá trị = 0.
- Một dạng mệnh đề không phải hằng đúng cũng không phải hằng sai được gọi là *tiếp liên*.
- Nếu dạng mệnh đề E → F là một hằng đúng thì ta nói F là *hệ quả logic* của E (còn nói E *suy ra* F). Khi đó ta viết: E⇒ F.

Ví dụ 4: Lập bảng chân trị cho dạng mệnh đề: $(p\wedge q)\to p$

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Bảng chân trị cho ta thấy $(p\wedge q)\to p$ là hằng đúng nên p là hệ quả logic của $p\wedge q$. Ta có thể viết $(p\wedge q)\Rightarrow p$. Có nghĩa rằng mệnh đề: $(p\wedge q)\Rightarrow p$ là đúng.

Trong phép tính mệnh đề ta chỉ quan tâm đến chân trị của mệnh đề mà bỏ qua nội dung của mệnh đề và vì thế ta cũng không phân biệt hai dạng mệnh đề tương đương logic. Ta có:

Quy tắc thay thế 1: Trong dạng mệnh đề E ta thay thế dạng mệnh đề con F bởi dạng mệnh đề tương đương logic thì mệnh đề thu được vẫn tương đương logic với E.

Quy tắc thay thế 2: Nếu dạng mệnh đề E(p,q,r,...) là một hằng đúng thì khi ta thay những nơi p xuất hiện bởi một dạng mệnh đề F(p',q',r',...) ta vẫn thu được một hằng đúng.

Ví dụ 5: (i). Dựa vào ví dụ 2 ta có $p\to q$ tương đương logic với $\neg p\vee q$ nên:

$$p\wedge(p\to q)\Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q).$$

(ii). Theo ví dụ 3 thì $E(p,q) = ((p\vee q)\wedge\neg p)\to q$ là hằng đúng nên

$E(r\vee t,q) = ((r\vee t)\vee q)\wedge\neg(r\vee t))\to q$ cũng là hằng đúng.

Hai quy tắc thay thế trên cùng với các luật tương đương logic dưới đây cần thiết cho việc biến đổi tương tương nhằm rút gọn một dạng mệnh đề:

1.5. Các luật logic:

Với p, q, r là các biến mệnh đề, 1 là hằng đúng, 0 là hằng sai.

(i). Luật phủ định kép: $\neg\neg p\Leftrightarrow p$

(ii). Luật giao hoán: $p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$;

$p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$.

(iii). Luật kết hợp	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$;
	$(p \wedge q \wedge) r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
(iv). Luật phân phối	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (p \vee r)$
	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (p \wedge r)$
(v). Luật De Morgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$
	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg q \vee \neg p$
(vi). Luật trung hoà	$p \vee 0 \Leftrightarrow p$
	$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
(vii). Luật nuốt (thống trị)	$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$
	$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
(viii). Luật luỹ đẳng	$p \vee p \Leftrightarrow p$
	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
(ix). Luật về phần tử bù	$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$
(x). Luật hấp thụ	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Bạn hoàn toàn có thể kiểm chứng các tương đương logic trên bằng cách lập bảng chân trị. Sau này có thể sử dụng trực tiếp mà không cần phải giải thích.

Trong nhiều tình huống, việc lập một bảng chân trị có thể sẽ đem đến nhiều phiền toái ví dụ như số biến nhiều hay bảng cần lập có quá nhiều cột. Khi đó có thể sử dụng các luật tương đương logic và các quy tắc thay thế để rút gọn một biểu thức mệnh đề đến mức cần thiết. Xem ví dụ dưới đây, ta chứng minh dạng mệnh đề: $E(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow p$ là hằng đúng.

Theo <u>ví dụ 2</u> ta có:	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p$	do $E \rightarrow F$ tương đương với $\neg E \vee F$
		$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p$	theo luật De Morgan
		$\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee p$	theo luật giao hoán
		$\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee p)$	theo luật kết hợp
		$\Leftrightarrow \neg q \vee 1$	theo luật về phần tử bù
		$\Leftrightarrow 1$	theo luật thống trị

Do đó $E(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow p$ là môt hằng đúng.

2. Quy tắc suy diễn

Trong thực tế cuộc sống nhiều khi ta không thể kiểm tra trực tiếp đối tượng để xem xét tính chất nào đó của đối tượng này được bởi những lý do khách quan. Ta thường phải đưa ra phán quyết dựa vào các thuộc tính khác cấu thành mà việc kiểm tra các thuộc tính này thực hiện được.

Trong một chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p_1, p_2, ..., p_n$ gọi là tiền đề, ta áp dụng các dạng mệnh đề là hằng đúng gọi là các quy tắc suy diễn để suy ra chân lý của khẳng định q mà ta gọi là kết luận. Nghĩa là dạng mệnh đề $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \rightarrow q$ là một hằng đúng; trong đó $p_1, p_2, ..., p_n$ và q là các dạng mệnh đề theo các biến nào đó.

Ví dụ 1: Từ các tiền đề :

p_1 := Nếu An học chăm thì An đạt môn Toán rời rạc.

p_2 := Nếu An không đi chơi thì An học chăm.

p_3 := An trượt môn Toán rời rạc.

Ta muốn đưa ra kết luận sau là đúng: q = An hay đi chơi. Để làm được như vậy ta trừu tượng hoá các mệnh đề nguyên thuỷ:

p = An chăm học, q = An hay đi chơi, r = An đạt môn Toán rời rạc.

Như vậy các tiền đề trở thành:

$p_1 := p \rightarrow r$

$p_2 := \neg q \rightarrow p$

$p_3 := \neg r$

Ta phải chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng:

$$[(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r] \rightarrow q.$$

Dễ dàng kiểm tra được dạng mệnh đề trên là hằng đúng bằng cách lập bảng chân trị. Tuy vậy cách làm này không mấy hiệu quả khi số biến mệnh đề lớn. Một phương pháp khác được đề xuất sử dụng là dùng các quy tắc suy diễn đã được khẳng định là đúng để chia bài toán thành các modul nhỏ, nghĩa là từ một số tiền đề suy ra một số kết luận trung gian trước khi sứ dụng các quy tắc suy diễn để suy ra kết luận cuối cùng. Để thuận tiện người ta thường mô hình hoá phép suy diễn thành sơ đồ sau:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

Dưới đây là bảng liệt kê các quy tắc suy diễn quan trọng. Việc kiểm chứng tính đúng đắn của các quy tắc này chính là việc chứng minh các hằng đúng tương ứng mà bạn đọc nên tự thực hiện bằng cách đơn giản là lập bảng chân trị.

2.1. Các quy tắc suy diễn

Các quy tắc suy diễn		
Tên gọi	Quy tắc	Hằng đúng cơ sở
Luật cộng	$\dfrac{p}{\therefore\ p \vee q}$	$p \to (p \vee q)$
Luật rút gọn	$\dfrac{p \wedge q}{\therefore\ p}$	$(p \wedge q) \to p$
Phương pháp khẳng định	$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\;} \\ \therefore\ q \end{array}$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
Phương pháp phủ định	$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \therefore\ \neg p \end{array}$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg q$
Tam đoạn luận giả định	$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore\ p \to r \end{array}$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
Tam đoạn luận rời	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \quad\;} \\ \therefore\ q \end{array}$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$

Ví dụ 2: Trở lại bài toán trong <u>ví dụ 1</u> ta có mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg q \to p \\ \underline{\neg r \qquad\quad} \\ \quad \therefore q \end{array}$$

Ta đi chứng minh suy luận trên là đúng bằng cách sử dụng các luật suy diễn để suy ra kết luận từ các tiền đề.

Từ tiền đề thứ nhất và tiền đề thứ 3, áp dụng quy tắc phủ định ta được kết luận trung gian $\neg p$

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \underline{\neg r} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Bây giờ ta kết hợp kết luận trung gian và tiền đề còn lại, áp dụng phương pháp phủ định một lần nữa:

$$\begin{array}{l} \neg q \to p \\ \underline{\neg p} \\ \therefore \neg(\neg q) \end{array}$$

Nhưng theo luật phủ định kép thì $\neg(\neg q) \Leftrightarrow q$. Vậy ta được kết luận q.

2.2. Ngụy biện:

Trong thực tế có nhiều khi người ta suy diễn không dựa trên một hằng đúng mà dựa vào một tiếp liên. Suy luận sai này được gọi là nguỵ biện. Có hai kiểu nguỵ biện thường vi phạm nhất là:

(i). Ngụy biện *phủ nhận giả thiết:*

+ Sử dụng tiếp liên: $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$

+ Mô hình: $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore \neg q \end{array}$

Ví dụ suy luận sau đây là một ngụy biện phủ nhận giả thiết.

Nếu An học chăm thì An đạt điểm cao môn Toán rời rạc.

An không học chăm.

Vậy An không đạt điểm cao môn toán rời rạc.

Trong thực tế An vẫn có thể đạt điểm cao mà không cần phải học chăm chỉ (!). Có thể do An học giỏi, cũng có thể do nguyên nhân khác nữa. Bởi thế nên Bộ GD - ĐT mới phải phát động phong trào chống tiêu cực trong thi cử.?!

(ii). Ngụy biện *ngộ nhận kết luận*:

+ Sử dụng tiếp liên: $[(p \to q) \wedge q] \to p$

+ Mô hình:
$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Ví dụ: suy luận sau đây là một ngụy biện ngộ nhận kết luận.

Nếu An học chăm thì An đạt điểm cao môn Toán rời rạc.

An đạt điểm cao môn toán rời rạc.

Vậy An đã học chăm chỉ.

Thực tế có thể điểm cao mà An đạt được không do An tự làm!.

2.3. Phản ví dụ:

Trên đây ta xem xét cách chứng tỏ một suy luận đúng. Làm thế nào để chứng tỏ một suy luận không đúng? Nghĩa là phải kiểm tra dạng mệnh đề $(p_1 \land p_2 \land ... \land p_n) \to q$ không là hằng đúng. Ta chỉ cần chỉ ra một thể hiện làm cho chân trị của dạng mệnh đề này là 0. Cách tốt nhất là chọn thể hiện: $(p_1, p_2, ..., p_n, q) = (1,1,...,1, 0)$, nghĩa là chọn bộ thể hiện sao cho tất cả các tiền đề đều đúng còn kết luận q là sai. Ta nói bộ thể hiện được chọn như trên là một phản ví dụ.

Ví dụ 1: Tìm phản ví dụ cho ngụy biện ngộ nhận kết luận:
$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Dễ dàng nhận thấy thể hiện (p,q) = (0,1) chính là phản ví dụ cần tìm.

Ví dụ 2: Thể hiện p =0, q = 1 là phản ví dụ cho nguỵ biện phủ nhận giả thiết.

Ví dụ 3: hãy tìm phãn ví dụ cho suy luận

Ông Minh đã khẳng định rằng nếu không được tăng lương thì ông sẽ nghỉ việc. Mặt khác nếu ông ta nghỉ việc và vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì sẽ mất việc. Cuối cùng ông đã được tăng lương. Vậy suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông không đi làm trễ.

Ta đặt các biến mệnh đề như sau:

p := Ông Minh được tăng lương

q := Ông Minh nghỉ việc.

r := Vợ ông Minh bị mất việc.

s := Ông Minh phải bán xe.

t := Vợ ông Minh đi làm trễ.

Mô hình suy luận sẽ là

$$\begin{array}{l} \neg p \to q \\ (q \wedge r) \to s \\ t \to r \\ \underline{p \qquad\qquad\quad} \\ \therefore \neg s \to \neg t \end{array}$$

Ta cần tìm một thể hiện (p,q,r,s,t) để cho các tiền đề là đúng còn kết luận là sai. Trước tiên ta chọn được ngay p = 1. Để kết luận sai ta cần ¬s đúng và ¬t sai, nghĩa là s = 0 và t = 1. Với t =1, để t → r đúng ta cần chọn r = 1. Để tiền đề thứ hai đúng ta cần có q = 0 do s = 0. Tóm lại phản ví dụ ứng với chân trị của các biến là p =1, q = 0, r = 1, s = 0, và t = 1. Đó là trường hợp: Ông Minh được tăng lương (p = 1), Ông Minh không nghỉ việc (q=0), vợ ông Minh bị mất việc (r=1), ông Minh không bán xe (s=0) và vợ ông Minh hay đi làm trễ (t=1).

3. Vị từ và lượng hóa vị từ

3.1. Vị từ

Phát biểu $x^2 - 3x + 2 = 0$ chưa phải là mệnh đề. Tuy vậy, khi cho x = 1 thì ta được một mệnh đề đúng. Cũng giống như vậy, phát biểu chứa biến p(x,y) := "x + y = 3" chưa phải mệnh đề nhưng nó trở thành mệnh đề sai khi cho x = 2 và y = 5. Trong các chương trình máy tính ta hay gặp các biểu thức chứa biến như vậy cùng với việc các biến thuộc về một tập hợp nào đó. Ta gọi chúng là các vị từ theo nghĩa dưới đây:

Một *vị từ* là một khẳng định dạng p(x,y,…) trong đó có chứa một số biến x, y, … lấy giá trị trong các tập hợp cho trước A, B, … sao cho:

+ Bản thân p(x,y,…) chưa phải mệnh đề.
+ Nếu thay x, y, … bởi các giá trị cố định a,b,... thì p(a,b,…) là một mệnh đề, nghĩa là nó có chân trị xác định. Khi đó x,y,… gọi là các biến của vị từ.

Ví dụ 1: p(n) = " n là số nguyên tố" với $n \in N$ là một vị từ theo một biến n. Khi n=3 ta có p(3) = "3 là số nguyên tố" là mệnh đề đúng; khi n=10 ta có p(10) = " 10 là số nguyên tố" là mệnh đề sai.

Ví dụ 2: q(x,y) = "x + y = 3" với $x \in R$, $y \in R$ là vị từ theo hai biến x, y.
Khi x=1, y=2 ta có q(1,2) = "1+2 = 3" là mệnh đề đúng;
khi x = - 4, y = 5 ta có mệnh đề q(- 4, 5) ="-4+ 5 = 3" là mệnh đề sai.

3.2. Lượng hóa vị từ

Quan sát ví dụ dưới đây:

Cho tập hợp A = { 1,2,3,4,5}.

(i) Liên kết với A vị từ: p(x) = "x là số nguyên chẵn". Lần lượt cho x nhận giá trị trong A ta có các mệnh đề:

x = 1: p(1) = " 1 là số nguyên chẵn" là mệnh đề sai
x = 2: p(2) = " 2 là số nguyên chẵn" là mệnh đề đúng
x = 3: p(3) = " 3 là số nguyên chẵn" là mệnh đề sai
x = 4: p(4) = " 4 là số nguyên chẵn" là mệnh đề đúng
x = 5: p(5) = " 5 là số nguyên chẵn" là mệnh đề sai

(ii) Liên kết với A vị từ: q(y) = " y > 0 ". Lần lượt cho y nhận giá trị trong A ta có các mệnh đề:

y = 1: q(1) = " 1 > 0 " là mệnh đề đúng
y = 2: q(2) = " 2 > 0 " là mệnh đề đúng
y = 3: q(3) = " 3 > 0 " là mệnh đề đúng
y = 4: q(4) = " 4 > 0 " là mệnh đề đúng
y = 5: q(5) = " 5 > 0 " là mệnh đề đúng

(iii) Liên kết với A vị từ: r(z) = " $z^2 = 10$ ". Lần lượt cho z nhận giá trị trong A ta có các mệnh đề:

z = 1: r(1) = " $1^2 = 10$ " là mệnh đề sai
z = 2: r(2) = " $2^2 = 10$ " là mệnh đề sai
z = 3: r(3) = " $3^2 = 10$ " là mệnh đề sai
z = 4: r(4) = " $4^2 = 10$ " là mệnh đề sai
z = 5: r(5) = " $5^2 = 10$ " là mệnh đề sai

Qua ví dụ trên ta có nhận xét:

[1]. Tìm được (ít nhất một) phần tử x = a trong A để p(a) là mệnh đề đúng.

[2]. Lấy bất kỳ y = a trong A thì mệnh đề q(a) đúng.

[3]. Thay bất kỳ z = a trong a thì mệnh đề r(a) sai. Nghĩa là không tìm được z_0 nào trong A để mệnh đề có được tương ứng $r(z_0)$ là mệnh đề đúng.

Các phát biểu [1], [2] và [3] cho ta một ước lượng về mức độ phổ biến của phần tử trong tập A làm cho vị từ liên kết tương ứng trở thành mệnh đề đúng. Ta gọi chúng là *lượng hóa vị từ*. Thông thường được viết kí hiệu dưới dạng biểu thức trong đó sử dụng các kí hiệu *lượng từ hóa phổ dụng*: ∀, ∃.

Trường hợp 1: Nếu mọi phần tử x của tập A làm cho vị từ liên kết tương ứng p(a) là mệnh đề đúng thì ta viết: $\forall x \in A \to p(x)$ đúng.

(viết gọn là: $\forall x \in A, p(x)$).

Trường hợp 2: Nếu có (ít nhất một) phần tử x của tập A làm cho vị từ liên kết tương ứng p(a) là mệnh đề đúng thì ta viết: $\exists x \in A \to p(x)$ đúng.

(viết gọn là $\exists x \in A, p(x)$).

Định nghĩa: Các mệnh đề $\forall x \in A, p(x)$ và $\exists x \in A, p(x)$ được gọi là *lượng từ hóa* của vị từ p(x).

Chú ý: - Trở lại ví dụ trên thì ta có:

$\exists x \in A, p(x)$ là mệnh đề đúng

$\forall y \in A, q(y)$ là mệnh đề đúng

$\exists z \in A, r(z)$ là mệnh đề sai

$\forall z \in A, r(z)$ là mệnh đề sai

- Trong các biểu thức lượng từ hóa vị từ p(x) thì x không còn tự do nữa. ta nói nó đã bị ràng buộc bởi lượng từ: $\forall$, $\exists$.
- Tất nhiên nếu mệnh đề $\forall x \in A, p(x)$ là đúng thì mệnh đề $\exists x \in A, p(x)$ cũng đúng. Ngược lại thì không được.(!)

Bây giờ ta xét đến vị từ theo hai biến p(x,y) với x $\in$A, y$\in$B. Khi ta thay x bởi một giá trị a cố định nhưng tùy ý trong A thì p(a,y) là vị từ theo một biến y$\in$B nên ta có thể lượng hóa nó theo biến y được hai mệnh đề: $\forall y \in B, p(a, y)$ và $\exists y \in B, p(a, y)$. Bằng cách này ta được hai vị từ theo biến x là: "$\forall y \in B, p(x, y)$" với x $\in$A và "$\exists y \in B, p(x, y)$" với x $\in$A. Lượng hóa hai vị từ này theo x ta được:

$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ (i)

$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ (ii)

$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$ (iii)

$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$. (iv)

Tất nhiên có thể lượng hóa theo x trước rồi theo y sau ta sẽ được 4 biểu thức lượng hóa nữa.
Bằng cách trên ta có thể lượng hóa các vị từ có nhiều hơn hai biến.

Chú ý rằng nếu mệnh đề (i) đúng thì mệnh đề (ii), (iii) và (iv) cũng đúng.
nếu (ii) đúng thì (iv) đúng; nếu (iii) đúng thì (iv) cũng đúng.

3.3. Phủ định mệnh đề chứa dấu lượng hóa: $\forall$, $\exists$.

Quy tắc của việc phủ định một mệnh đề chứa dấu lượng từ hóa là thay thế vai trò của dấu lượng hóa $\forall$, $\exists$; thay thế "$\rightarrow$" bởi "$\wedge$" và thay p(x,y,…) bởi $\neg$p(x,y,…).

Ví dụ:

- Phủ định của mệnh đề: $\forall x \in A, p(x)$ là mệnh đề: $(\exists x \in A) \wedge (\neg p(x))$

  (ở đây mệnh đề đầu thức sự là $\forall x \in A \rightarrow p(x)$).

- Phủ định của mệnh đề $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$

  là mệnh đề: $\forall x \in A, \exists y \in B \text{ và } \neg p(x, y)$.

- Định nghĩa một hàm thực f(x) liên tục tại x_0 là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : (|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Theo quy tắc trên ta có hàm thực f(x) không liên tục tại x_0 nếu

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R : (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

4. BÀI TẬP

1./ Trong các phát biểu sau, cho biết phát biểu nào là mệnh đề. Khi là mệnh đề, cho biết chân trị của nó:

a) 11 là số nguyên chẵn.

b) 23 là số nguyên tố.

c) x – 2y = 10.

d) $\log_2 3 > \log_3 2$.

e) $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ và } 4 > 5$.

f) nếu 2 + 3 = 4 thì Hồ Chí Minh và Trần Hưng Đạo là một người.

2./ Đặt P, Q lần lượt là các mệnh đề:

P := " Minh học chăm", Q:= " Minh có kết quả học tập tốt"

R:= " Minh học giỏi môn Tóan".

Hãy việt lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức trong đó có sử dụng các phép nối.

a) Minh học chăm và có kết quả học tập tốt.

b) Minh học chăm nhưng không có kết quả học tập tốt.

c) Minh học chăm hay Minh có kết quả học tập tốt.

d) Nếu Minh học chăm thì Minh có kết quả học tập tốt.

e) Minh có kết quả học tập tốt khi và chỉ khi Minh học chăm.

3./ Phủ định các mệnh đề sau

a) 4 là số nguyên tố.

b) 3 > 4.

c) nếu tam giác có hai cạnh bằng nhau thì là tam giác cân.

d) nếu ngày mai trời mưa hay trời lạnh thì tôi sẽ không ra ngoài.

4./ Lập bảng chân trị cho các dạng mệnh đề sau và cho biết dạng mệnh đề nào là hằng đúng.

a) $p \to (p \vee q)$ b) $p \to (p \wedge q)$

c) $(p \wedge q) \to p$ d) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

e) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ f) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

5./ Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng:

a) $p \Rightarrow (p \vee q)$ b) $p \Rightarrow (p \wedge q)$

c) $q \Rightarrow (p \to q)$ d) $\neg(p \to q) \Rightarrow p$

e) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ f) $p \wedge (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

6./ Trong các biến đổi tương đương dưới đây hãy cho biết đã sử dụng quy luật tương đương logic nào?

Biểu thức	Quy luật logic
a) $p \to (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q)$	
$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q$	
$\Leftrightarrow 1 \vee q$	
$\Leftrightarrow 1$	
b) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q \Leftrightarrow [(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)] \to q$	
$\Leftrightarrow [0 \vee (q \wedge \neg p)] \to q$	
$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \to q$	
$\Leftrightarrow \neg(q \wedge \neg p) \vee q$	
$\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg\neg p) \vee q$	
$\Leftrightarrow (\neg q \vee p) \vee q$	
$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee q$	
$\Leftrightarrow p \vee (\neg q \vee q)$	
$\Leftrightarrow p \vee 1$	
$\Leftrightarrow 1$	

7./ Quy tắc suy diễn nào đã được dùng trong các suy luận dưới đây?

a) Minh học giỏi môn Toán. Vậy Minh học giỏi môn Tóan hay Minh học giỏi môn Tin học.

b) Bình chơi được cả cờ vua và cờ tướng. Vậy Bình chơi được cờ vua.

c) Bố An khẳng định cho An tiền mua xe máy hay điện thoại di động. Mà An đã không mua điện thoại di động vì thấy chưa cần thiết. Vậy An mua xe máy.

d) Vào đầu năm học bố Nga hứa chắc sẽ cho Nga đi Đà lạt nghỉ mát nếu Nga đạt kết quả cao vào cuối năm học. Nga đã đạt kết quả cao vào cuối năm học. Vậy Nga được Bố cho đi Đà lạt nghỉ mát vào cuối năm học.

e) Nếu đạt kết quả học tập cao Nga sẽ được đi Đà lạt. Nếu đi Đà lạt Nga sẽ thăm Suối vàng. Vậy, nếu đạt kết quả cao trong học tập Nga sẽ thăm suối vàng.

8./ Hãy kiểm tra các suy luận sau và cho biết đã sử dụng quy tắc suy diễn nào?

a) $$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg r \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg(p \vee r) \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \neg q \\ r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ \neg q \to \neg p \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

d) $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to (r \wedge q) \\ r \to (s \vee t) \\ \neg s \\ \hline \therefore t \end{array}$$

e) $$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

f) $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \neg r \\ \hline \therefore q \end{array}$$

9./ Tìm phản ví dụ chứng tỏ suy luận sau là sai.

a) Một hình thang cân thì có hai cạnh bên bằng nhau. ABCD là một hình thang có hai cạnh bên AD = BC. Vậy ABCD là hình thang cân.

b) $$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \to r \\ r \vee \neg s \\ \neg s \to q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} p \\ p \to r \\ p \to (q \vee \neg r) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

10./ a) Cho tập A = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

Liên kết với A các vị từ: p(x) = “x^2 -3x + 2 = 0”; q(x) = “ x là số nguyên tố”

- Cho biết chân trị các mệnh đề sau: p(1); p(2); p(5); q(2); q(5); q(8).

- Mệnh đề nào sau là đúng:
    - o $\forall x \in A, p(x)$,
    - o $\exists x \in A, p(x)$,
    - o $\exists x \in A, \neg p(x)$,
    - o $\forall x \in A, q(x)$,
    - o $\exists x \in A, q(x)$.

b) Xét vị từ theo hai biến nguyên dương: p(x,y) = “x là ước của y ”.

Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

- p(3,9); p(2,3); p(6,36).
- $\forall y, p(1, y)$.
- $\forall x, p(x, x)$.
- $\forall x, \exists y, p(x, y)$.
- $\exists x, \forall y, p(x, y)$.