HÀM BOOL

Các phép tóan trên hai con số 0 và 1 được nhà tóan học người Anh George Boole đề xướng vào giữa thế kỷ XIX. Lý thuyết về hàm bool ngày nay phát triển rực rỡ về ứng dụng của nó và được giảng dạy cho sinh viên các ngành Điện, Điện tử và Tin học.

1. Biến bool & các phép toán

1.1. Biến bool

Xét tập hợp B ={0, 1}. Các biến chỉ nhận giá trị trong tập B được gọi là biến Bool (còn gọi là biến logic). Như vậy gọi x là biến Bool thì x chỉ có thể nhận giá trị là 0 hoặc 1.

1.2. Các phép toán

Trên tập B{0,1} ta trang bị (định nghiã) ba phép toán gọi là tổng bool, tích bool và phần bù của biến bool như sau:

- Tổng của hai biến bool a và b là một biến bool kí hiệu là a $\oplus$ b (còn kí hiệu khác là: a$\vee$ b, nếu không sợ nhầm lẫn ta cũng viết a + b).
- Tích của hai biến bool a và b là một biến bool kí hiệu là a $*$ b (còn kí hiệu khác là: a$\wedge$ b, nếu không sợ nhầm lẫn ta cũng viết ab).
- Phần bù của biến bool a là một biến bool kí hiệu là $\bar{a}$.

Giá trị của tổng bool, tích bool và phần bù được thể hiện trong bảng sau:

Tổng

a	b	a $\oplus$ b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tích

a	b	a $*$ b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Phần bù

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Theo bảng trên ta có: 0 $\oplus$ 0 = 0; 0 $\oplus$ 1 = 1; 1 $\oplus$ 0=1; 1$\oplus$1=1.

0$*$0=0; 0$*$1=0; 1$*$0=0; 1$*$1=1.

$\bar{1} = 0$; $\bar{0} = 1$.

Từ nay trở đi ta sẽ viết a+b, ab thay cho a $\oplus$ b và a $*$ b. Như vậy ta sẽ được 1+1=1 và 1.1 = 1

Nếu không sử dụng các dấu ngoặc thì thứ tự ưu tiên các phép toán sẽ là: trước hết, thực hiện tất cả các phép lấy phần bù, sau đó lấy tích bool rồi mới đến tổng bool. Điều này được thể hiện qua ví dụ sau:

Ví dụ 1: 0.1+ $\overline{(0+1)}$ = (0.1) + $\overline{(0+1)}$ = 0+ $\bar{1}$ = 0 + 0 = 0

1.3. Các tính chất quan trọng

Tính chất	Biểu thức
[1]. Bù kép	$\overline{\overline{a}} = a$
[2]. Giao hoán	a+b = b+a a.b = b.a
[3]. Kết hợp	a + (b+c) = (a+b) + c a(bc) = (ab)c
[4]. Phân phối	a(b+c) = ab + ac a + (bc) = (a+b)(a+c)
[5]. De Morgan	$\overline{(a+b)} = \bar{a}.\bar{b}$ $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$
[6]. Trung hòa (đồng nhất)	a + 0 = a a.1 = a
[7]. Thống trị (nuốt)	a + 1 = 1 a.0 = 0
[8]. Lũy đẳng	a + a = a a.a = a

Ngoài ra ta còn có: [9]. $a + \bar{a} = 1;$ $a.\bar{a} = 0;$

[10]. $a + ab = a;$ $a + \bar{a}b = a + b$

[11]. $a = a.1 = a(b + \bar{b}) = ab + a\bar{b}$

1.4. Biểu thức Bool

Tương tự như trong đại số thông thường, ta gọi biểu thức xây dựng từ các con số mà ta gọi là hằng số bool: 0, 1; các biến bool và các phép toán được gọi là biểu thức bool.

Ví dụ 2: với a, b $\in$B{0,1},

F(a,b) = a + (a$\bar{b}$).$\overline{ab}$ + ab + 1 là biểu thức bool của hai biến a và b.

Ví dụ 3: với x, y, z ∈B{0,1},

F(x,y,z) =xy + xz + $\overline{xyz}$ là biểu thức bool của ba biến x,y và z.

Khi thay tất cả các biến trong biểu thức bằng giá trị nhận trong B{0,1} thì biểu thức có giá trị duy nhất.

Ví dụ 4: Cho biểu thức bool: F(x,y) = x+y + xy. Khi đó

F(0,0) = 0 + 0 + 0.0 = 0

F(0,1) = 0 + 1 + 0.1 = 1

F(1,0) = 1 + 0 + 1.0 = 1

F(1,1) = 1 + 1 + 1.1 = 1

2. Hàm bool

Các biến bool chủ yếu dùng để biểu thị hai trạng thái logic khác nhau (đối lập) như: đúng và sai, thật và giả, cao và thấp, có và không, mở và đóng,…. Trong phần này ta xem xét mối quan hệ về sự phụ thuộc của một biến bool vào các biến bool khác. Ta gọi quan hệ như vậy là hàm bool theo dưới đây:

2.1. Định nghĩa hàm bool

- B = {0,1}; B^n = {(x_1, x_2, …, x_n)/ x_i ∈B với 1≤ i ≤ n}. Một hàm bool f (n biến) từ B^n vào B là quy tắc gán mỗi bộ (x_1, x_2, …, x_n) trong B^n một giá trị 0 hoặc 1 trong B. x_1, x_2, …, x_n gọi là biến, f gọi là hàm. Đó là ánh xạ:

$$f : B^n \to B$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- Do với n hữu hạn thì $|B^n|$ hữu hạn nên giá trị của hàm bool thường được cho dạng bảng.

  Ví dụ 1: bảng dưới đây là bảng giá trị của hàm bool f(x,y):

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Với bảng bên ta được:

f(0,0) = 0; f(0,1) = 1; f(1,0) = 0 và f(1,1) = 1.

- Có $2^{|B^n|} = 2^{(2^n)}$ hàm bool khác nhau của n biến. Hai hàm bool gọi là bằng nhau nếu nó có bảng giá trị như nhau.

Ví dụ 2: dưới đây cho thấy hai hàm bool f(x,y) và g(x,y) là bằng nhau. Ta viết f(x,y) = g(x,y).

x	y	f(x,y)	g(x,y)
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

- Hàm bool còn được cho bằng biểu thức của các biến. Bằng cách thay các biến bởi giá trị và thực hiện các phép toán ta cũng tìm được bảng giá trị của hàm bool tương ứng.

Ví dụ 3: Bảng sau cho biết giá trị của các hàm bool: f(x,y,z) = x + yz và

$g(x,y,z) = xy + x\bar{y} + yz$

x	y	z	f(x,y,z)=x+yz	$g(x,y,z)=xy+x\bar{y}+yz$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Mặc dù có biểu thức khác nhau nhưng rõ ràng hai hàm f và g là bằng nhau. Như vậy, ta có: $f(x,y,z)= x + yz = g(x,y,z) = xy + x\bar{y} + yz$.

Ví dụ 4: (Hàm bỏ phiếu) Một ủy ban gồm 3 thành viên phải quyết định các vấn đề của một tổ chức. Mỗi thành viên bỏ phiếu tán thành hay không tán thành cho mỗi đề nghị được đưa ra. Một đề nghị được thông qua nếu nó nhận được ít nhất hai phiếu tán thành. Thiết lập hàm mô tả sự phụ thuộc của việc được thông qua một đề nghị vào các thành viên của ủy ban.

Giải:

Đặt biến x đại diện cho đại biểu thứ nhất. x = 1 nếu đại biểu thứ nhất tán thành, x = 0 nếu đại biểu này không tán thành. y là biến đại diện cho đại biểu thứ hai. y = 1 nếu đại biểu thứ hai tán thành và y = 0 nếu đại biểu này không tán tnành. Tương tự z đại diện cho đại biểu thứ ba, z =1 nếu đại biểu thứ ba tán thành thông qua và z = 0 nếu đại biểu thứ ba không tán thành. f(x,y,z) là biến đại diện cho biết đề nghị có được thông qua; f(x,y,z) = 1 nếu đề nghị được thông qua và f(x,y,z) = 0 nếu đề nghị này không được thông qua. Theo đề bài ta có bảng giá trị của f là:

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2.2. Các phép toán trên hàm bool

Cho f, g là các hàm bool của n biến; với a $\in B^n$ ta định nghĩa các phép tóan trên hàm bool:

Tổng: (f+g)(a) = f(a) + g(a)

Tích: (fg)(a) = f(a).g(a)

Phần bù: $\overline{f}(a) = \overline{f(a)}$

2.3. Dạng nối rời chính tắc

Xét hàm bool f của n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta định nghĩa:

- $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots, x_n, \overline{x_n}$ là các <u>từ đơn</u>. Có 2n từ đơn cho hàm bool n biến.
- Tích khác 0 của các từ đơn gọi là <u>đơn thức.</u>
- Đơn thức có đủ n từ đơn được gọi là <u>từ tối tiểu</u>.
- Tổng các đơn thức gọi là đa thức.
- Nếu biểu thức hàm bool f được viết dạng tổng của các từ tối tiểu đôi một khác thì gọi là <u>dạng nối rời chính tắc</u> (tổng các tích). Chú ý rằng mỗi hàm bool có một biểu diễn dạng nối rời chính tắc duy nhất.

<u>Ví dụ 5</u>: Xét hàm bool f của 3 biến x, y và z. Khi đó:

- $x, \overline{x}, y, \overline{y}, z, \overline{z}$ là các từ đơn.
- x, $\overline{y}$, xy, xz, xyz, … là các đơn thức.
- xyz, $\overline{x}yz$, $x\overline{y}z$, $\overline{x}y\overline{z}$, … là các từ tối tiểu.

- $F(x,y,z) = xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$, $E(x,y,z) = yz + x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$

  E, F là hai công thức đa thức của f nhưng chỉ F là công thức dạng nối chính tắc của f.

Bây giờ ta đi xem xét cách tìm dạng nối rời chính tắc của một hàm bool. Ngay từ đầu khi định nghĩa hàm bool ta đã nói có hai cách cho hàm. Vì vậy ta xem xét cách xác định dạng nối rời chính tắc từ hai cách cho đó.

TH 1: Hàm cho bởi bảng chân trị

Xét hàm bỏ phiếu trong ví dụ 4. Bảng giá trị của hàm là:

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tập các thể hiện làm cho giá trị của f(x,y,z) bằng 1 là: {011, 101, 110, 111}. Từ tập các thể hiện này ta lập các từ tối tiểu tương ứng : $\bar{x}yz$, $x\bar{y}z$, $xy\bar{z}$, xyz. Đến đây ta có được dạng nối rời chính tắc của f là: $f(x,y,z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$.

TH 2: Hàm cho bởi biểu thức

Khi hàm cho bởi biểu thức ta có thể lập bảng giá trị rồi áp dụng TH1. Cách khác để tìm biểu thức dạng nối rời chính tắc là sử dụng các tính chất của phép toán:

Chẳng hạn, cho $f(x,y) = x + \bar{y}$. Tìm biểu thức dạng nối rời chính tắc của f:

Cách 1: lập bảng chân trị của f ta được:

x	y	$f(x,y) = x + \bar{y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Các thể hiện làm cho f bằng 1 là: 00, 10 và 11. Lập được các từ tối tiểu tương ứng là: $\bar{x}\bar{y}, x\bar{y}, xy$. Vậy dạng nối rời chính tắc của f là:

$$f(x,y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} + xy$$

Cách 2: biến đổi dựa vào các tính chất của phép toán:

$f(x,y) = x + \bar{y} = x.1 + 1.\bar{y}$ tính trung hòa: $x = x.1$

$= x(y + \bar{y}) + (x + \bar{x})\bar{y}$ phần tử bù: $1 = x + \bar{x}$

$= xy + x\bar{y} + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$ phân phối $x(y+z) = xy+xz$

$= xy + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$ lũy đẳng $x + x = x$

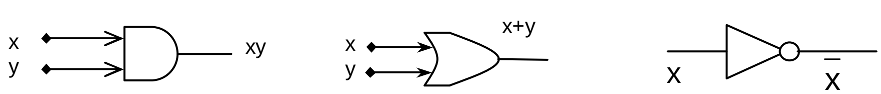
Ta cũng thu được dạng nối rời chính tắc của f.

3. Mạng các cổng logic

Theo truyền thống, để biết một đề nghị có được thông qua không người ta tiến hành lấy ý kiến của các ủy viên bằng đề nghị giơ tay biểu quyết. Nếu đa số (> 50%) đồng tình thì đề nghị được thông qua. Cách làm này xem ra không khách quan và như vậy sự công bằng không được đảm bảo. Để khắc phục ngày nay đã sử dụng nhiều phương pháp tự động hóa trong đó việc lập một mạch điện tử gọi là mạch bỏ phiếu như đã nói trong ví dụ 4 ở trên. Mỗi ủy viên được trang bị một thiết bị để thực thi việc bỏ phiếu của mình (có thể là cầu dao, nút bấm, …); các thiết bị này được thiết kế kết nối vào mạch dẫn đến một thiết bị phát tín hiệu cho biết đề nghị có được thông qua không (có thể là bóng đèn, kèn, …). Cần có các thiết bị vật lý để tổng hợp các tín hiệu đầu vào từ các thiết bị gắn cho mỗi ủy viên của ủy ban và cho tín hiệu đầu ra tại thiết bị phát như đã nói. Thiết bị vật lý tổng hợp này gọi là các cổng logic và mạch kết nối các thiết bị trên gọi là mạch tổ hợp. Ở đây ta không quan tâm đến chi tiết các thiết bị vật lý ấy mà chỉ xem xét nhiệm vụ và cách thức kết nối chúng để có tín hiệu đầu ra dạng hình thức là một hàm bool.

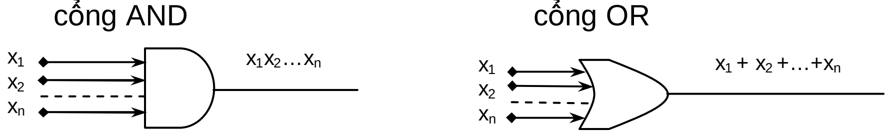
Mỗi hàm bool được tổng hợp từ các biến bool bằng các phép toán: $\vee, \wedge, \bar{\ }$. Do đó trước hết ta cần các thiết bị thực hiện các phép tóan trên, các thiết bị này gọi là các cổng logic cơ bản và được biểu diễn hình thức như sau:

cổng AND cổng OR cổng NOT



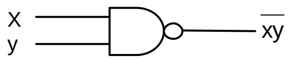
Cổng NOT có một đầu vào, các cổng AND và OR ở trên có 2 đầu vào và tất cả đều có 1 đầu ra duy nhất. Trong thực tế, tùy theo mục đích sử dụng mà người ta thiết kế các cổng AND và cổng OR có nhiều hơn 2 đầu vào. Dưới đây là hình ảnh các cổng có n đầu vào:

cổng AND cổng OR

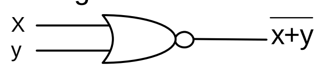


Ngoài các cổng cơ bản trên, để thuận tiện người ta còn thiết kế các cổng khác chẳng hạn mắc nối tiếp cổng AND với cổng NOT được cổng NAND, mắc nối tiếp cổng OR và cổng NOT được cổng NOR:

cổng NAND



cổng NOR



Ví dụ 1: Mạch điều khiển bóng đèn hai công tác (đèn cầu thang).

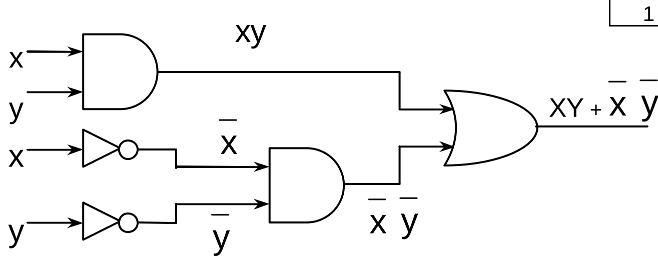
Gọi x, y là trạng thái hai công tác, x =1 nếu công tác thứ nhất đóng còn x = 0 nếu công tác này mở; y = 1 nếu công tác thứ hai đóng, y = 0 nếu công tác này mở. gọi F(x,y) là trạng thái bóng đèn; F = 1 khi bóng đèn sáng, F =0 khi bóng đèn tắt. Bóng đèn sẽ sáng khi cả hai công tác cùng đóng hay cùng mở và bóng đèn tắt khi một trong hai công tác đóng trong khi công tác còn lại là mở. Bảng giá trị:

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

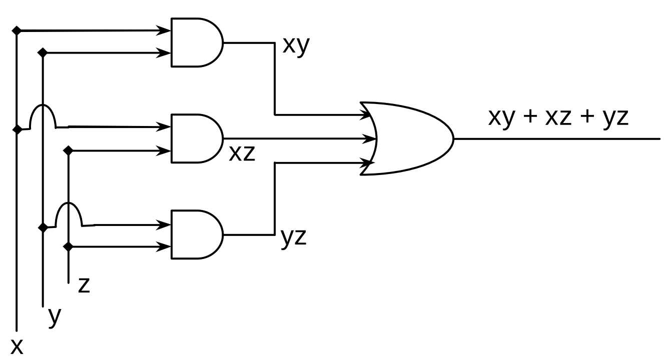
Dạng nối rời chính tắc của hàm là:

$F(x,y) = xy + \bar{x}\bar{y}$

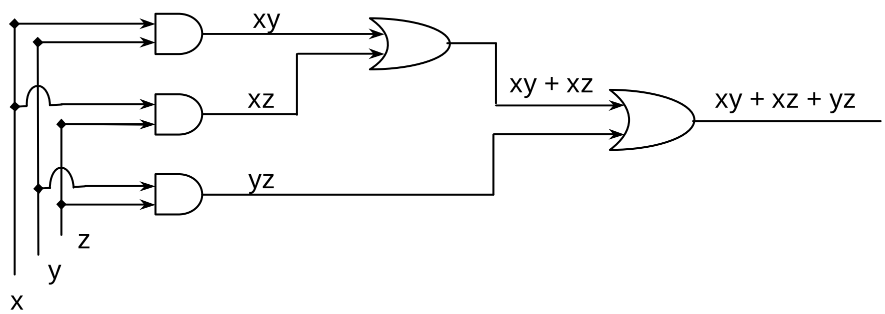
Mạch tổng hợp:



Ví dụ 2: mạch tổng hợp hàm bool: f(x,y,z) = xy + xz + yz



Lưu ý rằng một kết quả đã được tổng hợp thì có thể sử dụng nhiều lần mà không phải tổng hợp lại. Mạch trong ví dụ 2 đã dùng 3 cổng AND và 1 cổng OR. Trong trường hợp chỉ dùng các cổng có 2 chân vào ta được sơ đồ mạch như sau:



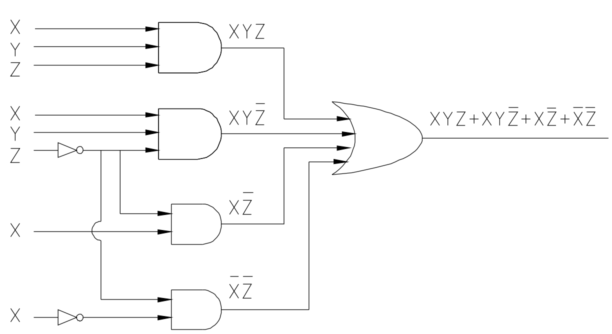
Khi thiết kế mạch tổ hợp nhất thiết chúng ta phải tính toán đến tính hiệu quả của mạch. Có 2 yếu tố quan tâm chính:

(i). Số lượng các cổng được sử dụng; điều này đảm bảo hiệu quả kinh tế.

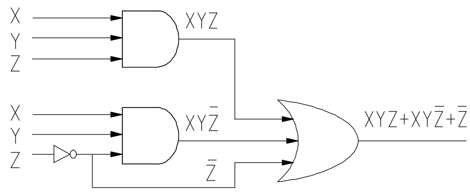
(ii). Thời gian thực thi. Mặc dù thời gian tổng hợp qua mỗi cổng là rất bé (phần nghìn giây), xong số lượng cổng trong mỗi mạch thường rất lớn nên thời gian tổng cộng sẽ lớn.

Cả hai đòi hỏi trên sẽ được đáp ứng khi mà số cổng sử dụng là tối ưu. Vì lí do cổng NOT dễ sản xuất nên có giá thành không đáng kể và thời gian thự thi cũng rất nhỏ (so với các cổng khác) nên ta không quan tâm đến cổng NOT. Như vậy ta sẽ đi xem xét vấn đề tối ưu số cổng AND và cổng OR. Đã biết một hàm bool thì có nhiều công thức biểu diễn. Ta đi tìm công thức dạng đa thức (tổng các tích) giúp tối ưu hai yếu tố được nêu ở trên. Để đạt được yêu cầu tối ưu ta cần hai tiêu chí là: biểu thức có ít phép cộng và có ít phép nhân; nghĩa là trong biểu thức đa thức mà có ít đơn thức, hơn nữa trong mỗi đơn thức cần có ít từ đơn. Trước nhất hãy so sánh 3 mạch:

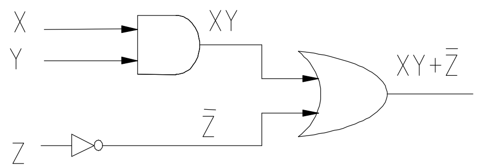
a)



b)



c)



Mạch a) dùng 4 cổng AND, 1 cổng OR và 2 cổng NOT, đầu ra: f(x,y,z) = $xyz+xy\bar{z}+x\bar{z}+\bar{x}\bar{z}$.

Mạch b) dùng 2 cổng AND, 1 cổng OR và 1 cổng NOT, đầu ra: g(x,y,z) = $xyz+xy\bar{z}+\bar{z}$.

Mạch c) dùng 1 cổng AND, 1 cổng OR và 1 cổng NOT, đầu ra: h(x,y,z) = $xy+\bar{z}$.

Rõ ràng mạch c) là tiết kiệm nhất trong khi ta có:

$$f(x,y,z) = xyz+xy\bar{z}+x\bar{z}+\bar{x}\bar{z} = xyz + xy\bar{z} + (x+\bar{x})\bar{z} = xyz+xy\bar{z}+\bar{z} = g(x,y,z)$$

$$= xy(z+\bar{z}) + \bar{z} = xy + \bar{z} = h(x,y,z)$$

Và vì vậy công dụng của cả 3 mạch là như nhau. Ta cũng nhận xét rằng đa thức đầu ra ứng với mạch c) có ít phép cộng và ít phép nhân nhất. Ta sẽ gọi nó là đa thức tối tiểu theo định nghĩa dưới đây:

4. Quan hệ đơn giản hơn & công thức đa thức tối tiểu

Xét hai đa thức biểu diễn của cùng một hàm f và được viết dưới dạng:

$E = m_1 + m_2 + \ldots + m_p$

$F = M_1 + M_2 + \ldots + M_q$

Ta nói E đơn giản hơn F nếu tồn tại một đơn ánh $\sigma:\{1,2,...,p\} \mapsto \{1,2,...,q\}$ *sao cho với* $1 \le i \le p$ *thì số thừa số là từ đơn của* m_i *không nhiều hơn số thừa số là từ đơn của* M_i*.*

<u>Chú ý:</u>

[1]. Nếu E đơn giản hơn F thì $p \le q$.

[2]. Quan hệ "*đơn giản hơn* " giữa các đa thức của hàm f có tính phản xạ và bắc cầu nhưng không có tính phản xứng, cũng không có tính đối xứng.

[3]. Nếu E đơn giản hơn F và F đơn giản hơn E thì ta nói E và F là đơn giản như nhau. Quan hệ " *đơn giản như nhau* " là một quan hệ tương đương. Hơn nữa hai công thức đa thức đơn giản như nhau thì mạch tổ hợp chúng sử dụng cùng số cổng AND và cùng số cổng OR.

Ví dụ:

(i). Cho hàm 3 biến f(x,y,z). E và F là hai công thức đa thức của f, với

$$E = xy + yz + xz \qquad F = xy + yz + xz + xyz$$

E là đơn giản hơn F.

(ii). Hai công thức đa thức E = x + xy + yz + xyz và F = xyz + $x\overline{y}z$ là không so sánh được với nhau.

(iii). Hai công thức đa thức E = xy + zt + xyt và F = xz + yt + xyz là đơn giản như nhau.

Định nghĩa: *Công thức đa thức E của hàm bool f được gọi là công thức đa thức tối tiểu nếu với mọi công thức F khác E của f và F đơn giản hơn E thì suy ra E và F đơn giản như nhau*.

5. Phương pháp bản đồ Karnaugh cực tiểu hóa hàm bool

5.1. Bản đồ Karnaugh

Đối với mỗi hàm bool, điều chúng ta mong muốn là tìm được công thức dạng biểu thức sao cho sử dụng để lập mạch tổ hợp sẽ cho mạch kinh tế nhất. Nghĩa là ta cần tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm. Quá trình tìm công thức đa thức tối tiểu ta gọi là cực tiểu hóa hàm. Phương pháp bản đồ Karnaugh cho phép ta cực tiểu hóa các hàm 2, 3 và 4 biến một cách dễ dãng. Vì hàm 2 biến quá đơn giản và vì vậy ta sẽ nói nhiều cho hàm 3 và 4 biến.

Cho đến thời điểm này ta đã biết mỗi hàm bool có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng nối rời chính tắc là tổng các từ tối tiểu. Mặt khác một hàm bool của n biến sẽ có tối đa 2^n từ tối tiểu. Vậy nên có một cách khác (so với các cách đã biết) biểu diễn hàm bool đó là dùng một bảng hình chữ nhậu gồm 2^n ô, mỗi ô sẽ đại diện cho một phần tử của B^n mà ứng với nó có một từ tối tiểu lập được. Bản đồ Karnaugh của một hàm là tập hợp các ô mà nó đại diện cho từ tối tiểu có trong biểu thức dạng nối rời chính tắc của hàm. Kí hiệu bản đồ Karnaugh của hàm f là Kar(f) hay k(f).

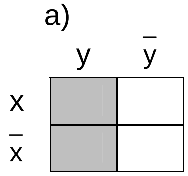
- Hàm 2 biến được biểu diễn bằng hình chữ nhật 4 ô:

	y	$\overline{y}$
x	xy	$x\overline{y}$
$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{x}\,\overline{y}$

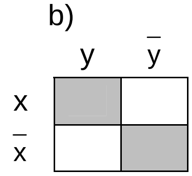
Ví dụ 1: Lập bản đồ Karnaugh của các hàm bool:

a) $f = xy + \overline{x}y$ b) $g = xy + \overline{x}\,\overline{y}$ c) $h = \overline{x}y + x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}$

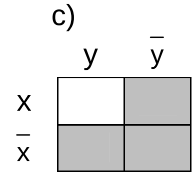
a)



b)



c)

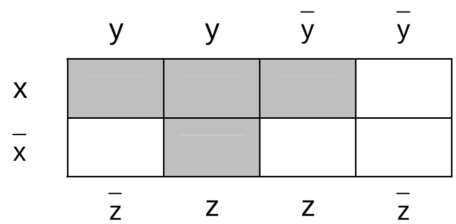


Ô tô đen là ô được chọn. Cách viết trên là của <u>Veitch và Karnaugh</u>

- Hàm 3 biến được biểu diễn bằng bảng 8 ô:

	y	y	$\overline{y}$	$\overline{y}$
x	$xy\overline{z}$	xyz	$x\overline{y}z$	$x\overline{y}\,\overline{z}$
$\overline{x}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}yz$	$\overline{x}\,\overline{y}z$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
	$\overline{z}$	z	z	$\overline{z}$

<u>Ví dụ 2</u>: Bản đồ Karnaugh của hàm f(x,y,z) = $\overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz$.



- Hàm 4 biến dừng bảng 16 ô:

	y	y	$\overline{y}$	$\overline{y}$	
x	1100	1110	1010	1000	$\overline{w}$
x	1101	1111	1011	1001	w
$\overline{x}$	0101	0111	0011	0001	w
$\overline{x}$	0100	0110	0010	0000	$\overline{w}$
	$\overline{z}$	z	z	$\overline{z}$	

Cách viết của Vietch và Karnaugh (trình tự các biến: xyzw)

Ví dụ 3: Bản đồ Karnaugh của hàm f(x,y,z,w) = $xyzw+\bar{x}yzw+x\bar{y}zw+xy\bar{z}w+xyz\bar{w}+\bar{x}y\bar{z}w$ là:

	y	y	$\bar{y}$	$\bar{y}$	
x		1110			$\bar{w}$
x	1101	1111	1011		w
$\bar{x}$	0101	0111			w
$\bar{x}$					$\bar{w}$
	$\bar{z}$	z	z	$\bar{z}$	

5.2. Tế bào

- Hai ô trong bản đồ Karnaugh có chung biên giới gọi là kề nhau (theo nghĩa hẹp – thông thường). Ta định nghĩa hai ô đại diện cho hai từ tối tiểu chỉ sai khác nhau đúng một từ đơn là hai ô kề nhau (theo nghĩa rộng).
- Hình chữ nhật gồm 2^k ô kề nhau (theo nghĩa rộng) là tế bào, với $1 \le k \le n$. Theo đó ta có các tế bào 1,2,4,8,16,…ô.
- Tế bào không bị chứa trong tế bào khác được gọi là *tế bào lớn*. Chú ý rằng ta không hiểu lớn là gồm nhiều ô, tuy nhiên nhiều ô có nhiều cơ hội là lớn hơn.

Ví dụ 4: Xét hàm bool 3 biến f có bản đồ Kar(f) gồm các ô được đánh số sau:

	y	Y	$\bar{y}$	$\bar{y}$
x	1	2	3	
$\bar{x}$		4		5
	$\bar{z}$	z	z	$\bar{z}$

- Các tế bào 1 ô: mỗi ô là một tế bào
- Các tế bào 2 ô: 1_2, 2_3, 2_4.
- Tế bào lớn: 1_2, 2_3, 2_4, 5.

Ví dụ 5: xét hàm bool 4 biến f(x,y,z,w) có bản đồ Kar(f) gồm các ô được đánh số sau:

	y	y	$\bar{y}$	$\bar{y}$	
x	1	2		3	$\bar{w}$
x			4		w
$\bar{x}$	5	6			w
$\bar{x}$	7			8	$\bar{w}$
	$\bar{z}$	z	z	$\bar{z}$	

Các tế bào lớn: 1_3_7_8 4 ô

1_2 2 ô

5_6	2 ô
5_7	2 ô
4.	1 ô

Rõ ràng ta thấy hội các tế bào lớn ta thu được chính bản đồ Kar. Nhận xét thêm rằng công thức đa thức của mỗi tế bào lớn có thể thu gọn thành đơn thức. Chẳng hạn xét ví dụ:

Ví dụ 6: - Trong ví dụ 4, công thức đa thức của tế bào lớn 1_2 là: $xyz+xy\overline{z}$. Do hai đơn thức trong tổng chung nhau tích xy, vậy nên dùng tính chất phân phối và tính chất về phần tử bù ta được:

$$xyz+xy\overline{z} = xyz + xy\overline{z} = xy(z + \overline{z}) = xy.1 = xy.$$

-Trong ví dụ 5, công thức đa thức của tế bào lớn 4 ô: 1_3_7_8 là $xy\overline{z}\,\overline{w} + x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$. Giống như trên ta được:

$$\begin{aligned} xy\overline{z}\,\overline{w} + x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} &= (xy + x\overline{y} + \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{y})\overline{z}\,\overline{w} \\ &= \left[x\left(y+\overline{y}\right) + \overline{x}\left(y+\overline{y}\right)\right]\overline{z}\,\overline{w} \\ &= \left(x+\overline{x}\right)\overline{z}\,\overline{w} = \overline{z}\,\overline{w}. \end{aligned}$$

Đến đây ta thấy việc đi tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm bool f đưa về việc giải quyết hai vấn đề:

- Tìm tất cả các tế bào lớn nằm trong bản đồ Kar(f), xác định đơn thức tương ứng.
- Tìm một phép phủ tối tiểu bản đồ Kar(f) bằng các tế bào lớn, nghĩa là một họ tế bào lớn có hội chính là Kar(f) mà khi rút trong họ này tế bào lớn bất kỳ thì họ còn lại không phủ kín Kar(f) nữa. Ta có một thuật toán để tìm công thức đa thức tối tiểu.

5.3. Thuật tóan

[1]. Lập bản đồ Kar(f), chỉ ra các tế bào lớn và xác định các đơn thức tương ứng.

[2]. Phủ bản đồ Kar(f) bằng các tế bào lớn

[2.1]. a) Chọn 1 ô chỉ nằm trong một tế bào lớn, chọn tế bào lớn chứa ô này để phủ. (Ta đưa tế bào lớn này vào danh sách L).

b) Lặp lại a) trong phần còn lại của bản đồ Kar(f) đến khi không làm được nữa. Đến đây nếu bản đồ Kar(f) đã được phủ kín thì chuyển sang bước [3], ngược lại chuyển qua bước [2.2]

[2.2]. a) Chọn 1 ô chưa được phủ, phủ ô này bằng tế bào lớn chứa nó (có nhiều hơn một cách).

b) Lặp lại a) trong phần còn lại của bản đồ Kar(f) cho đến khi Kar(f) được phủ kín thì chuyển sang bước [3].

[3]. Ứng với mỗi cách phủ kín bản đồ Kar(f) ở bước [2], lập công thức đa thức là tổng các đơn thức của các tế bào lớn tương ứng trong danh sách L. So sánh và giữ lại các công thức đơn giản.

Chú ý:

(i). Nếu bước [2.2] bị bỏ qua thì không có lựa chọn tùy ý. Trong trường hợp này ta được một phép phủ duy nhất ứng với một công thức đa thức tối tiểu duy nhất.

(ii). Để tiện việc xem xét ta gạch chéo mỗi tế bào lớn được dùng để phủ bản đồ Kar(f). Đương nhiên hai cách chọn khác nhau dẫn đến hai quá trình phủ khác nhau và cho ta hai công thức đa thức khác nhau.

Ví dụ 1: Xét hàm bool f có bản đồ Kar(f) dưới đây (các ô chọn được đánh số)

Bước [1]: Có 3 tế bào lớn

Tế bào lớn	Đơn thức
1_2	xy
2_3	yz
4	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

	y	y	$\bar{y}$	$\bar{y}$
x	1	2		
$\bar{x}$		3		4
	$\bar{z}$	z	z	$\bar{z}$

Bước [2]: [2.1]. Ô 1 chỉ nằm trong duy nhất tế bào lớn 1_2

Ô 3 chỉ nằm trong duy nhất tế bào lớn 2_3

Ô 4 chỉ nằm trong duy nhất tế bào lớn 4.

Ta có danh sách L = {1_2, 2_3, 4}.

Ba tế bào trong L đã phủ kín bản đồ Kar(f) nên ta chuyển thẳng qua bước [3] mà bỏ qua bước [2.2].

Bước [3]. Ta chỉ có một phép phủ duy nhất, và vì vậy có duy nhất công thức đa thức tối tiểu:

$$f = xy + yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

<u>Ví dụ 2</u>: Cực tiểu hóa hàm bool f có bản đồ Kar(f) dưới đây (các ô chọn được đánh số):

	y	y	$\bar{y}$	$\bar{y}$	
x					$\bar{w}$
x			1	2	w
$\bar{x}$		3	4		w
$\bar{x}$		5			$\bar{w}$
	$\bar{z}$	z	z	$\bar{z}$	

Bước [1]:

<u>TBL</u>	<u>Đơn thức</u>
1_2	$x\bar{y}w$
1_4	$\bar{y}zw$
3_4	$\bar{x}zw$
3_5	$\bar{x}yz$

Bước [2]: [2.1]. ô 2 chỉ trong TBL 1_2

ô 5 chỉ trong TBL 3_5

Danh sách L = {1_2, 3_5}. Lần lượt phủ Kar(f) bằng các TBL trong L ta sẽ thấy còn ô 4 chưa được phủ. Ô này nằm trong 2 tế bào lớn nên chuyển qua bước [2.2].

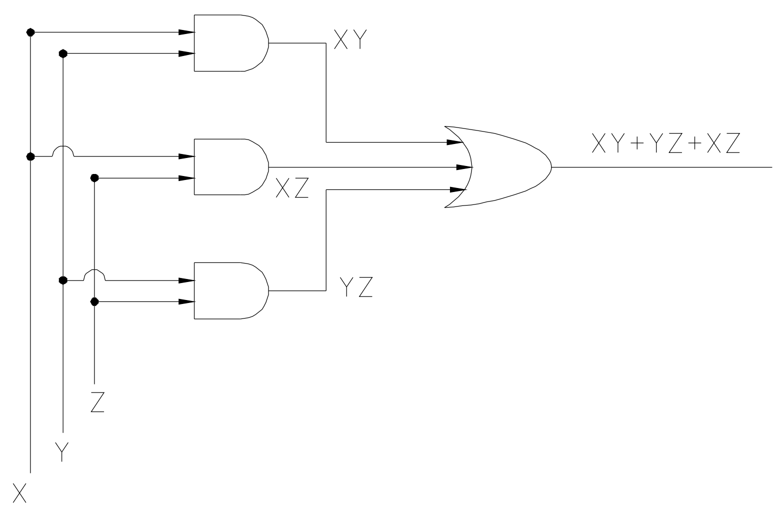
[2.2]. Có 2 cách phủ ô 4, chọn TBL 1_4 hoặc chọn TBL 3_4 thì đến đây bản đồ Kar(f) đều được phủ kín. Có 2 danh sách ứng với 2 cách phủ kín Kar(f): L_1 = {1_2, 3_5, 1_4}, L_2 = {1_2, 3_5, 3_4}. Chuyển sang bước [3].

Bước [3]: Lập công thức đa thức

- Ứng với L_1 : $f_1 = x\bar{y}w + \bar{x}yz + \bar{y}zw$
- Ứng với L_2 : $f_2 = x\bar{y}w + \bar{x}yz + \bar{x}zw$

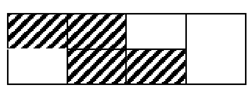
So sánh thấy hai công thức đa thức trên đơn giản như nhau nên tìm được hai công thức đa thức tối tiểu.

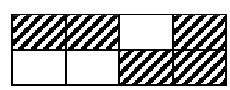
Chú ý: Sử dụng các công thức trên để tổ hợp hàm f ta được hai mạng tổng hợp sử dụng cùng số cổng AND và cùng số cổng OR. Cụ thể là 3 cổng AND và 1 cổng OR.

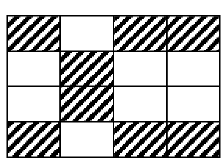


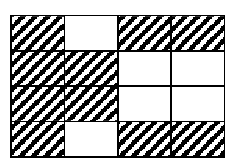
Bài Tập

1. Tìm giá trị của biểu thức:
   a) $1.\overline{0}$ b) $1+\overline{1}$ c) $\overline{(1+0)}$ d) $\overline{0}.0$
2. Tìm các giá trị (nếu có) của biến bool x thoả mãn các phương trình:
   a) x.1=0 b) x+x =0 c) x.1=x d) $x.\overline{x}=1$
3. Lập bảng giá trị cho biểu thức bool:
   a) F(x,y,z) = xy + yz + xz b) G(x,y,z) = x + y + z
4. Cho các hàm bool F(x,y,z), G(x,y,z) trong bài 3. Tính giá trị:
   F(1,0,1), F(0,1,0), F(0,0,1), F(1,1,1), G(0,1,0), G(1,0,1), G(1,1,1), G(0,0,0).
5. Tìm dạng nối rời chính tắc của các hàm bool:
   a) f(x,y) = x + y b) g(x,y,z) = xy + yz + xz c) h(x,y,z) = x
   d) $\varphi(x,y,z)=x+\overline{y}(\overline{x}+z)$ e) $(x+y+z).\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
6. Vẽ mạch tổ hợp các hàm bool:
   a) $xy+\overline{x}y$ b) $(x+y)\overline{x}$ c) $\overline{x}\overline{\left(y+\overline{z}\right)}$ d) $(x+y+z).\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
7. Vẽ bản đồ Karnaugh của các hàm bool sau:
   a) f(x,y,z) = $xy\overline{z}+x\overline{y}\overline{z}+\overline{x}yz+\overline{x}\overline{y}\overline{z}$
   b) g(x,y,z) = $xy\overline{z}+x\overline{y}\overline{z}+\overline{x}yz+\overline{x}\overline{y}\overline{z}$
   c) h(x,y,z,w) = $xyzw+x\overline{y}zw+x\overline{y}\overline{z}w+\overline{x}y\overline{z}w+\overline{x}\overline{y}zw$
8. Cực tiểu hoá các hàm bool có bản đồ Karnaugh dưới đây:

a) 

b) 

c) 

d) 

9. Cực tiểu hoá các hàm bool ở bài tập 7.
10. Cực tiểu hoá các hàm bool
    a) $xyzt+\overline{x}\overline{y}+x\overline{z}t+y\overline{z}\overline{t}$
    b) $xyzt+x\overline{y}+x\overline{z}+yz+xy(\overline{z}+\overline{t})$