Lê Văn Luyện
email: lvluyen@yahoo.com

TOÁN RỜI RẠC

www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/trr

Chương II: PHÉP ĐẾM

- Các nguyên lý
- Giải tích tổ hợp
- Hoán vị lặp, tổ hợp lặp
- Hệ thức đệ qui

I. Các nguyên lý

1. Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc A có 2 phương pháp

- Phương pháp 1 có n cách làm
- Phương pháp 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n+m

Ví dụ. An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn 1 cái áo thì An có mấy cách

I. Các nguyên lý

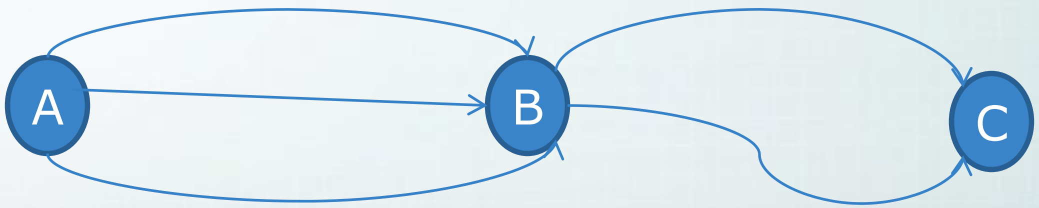
2. **Nguyên lý nhân**

Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước

- Bước 1 có n cách làm
- Bước 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n.m

Ví dụ:



Có 3.2 =6 con đường đi từ A đến C

I. Các nguyên lý

Ví dụ: Cho tập X ={1,2,3,4,5,0}

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2

Giải. Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$

TH1 . c=0. Khi đó

c có 1 cách chọn

a có 5 cách chọn ($a \in X \setminus \{0\}$)

b có 4 cách chọn ($b \in X \setminus \{a, 0\}$)

TH1 có 1.4.5 =20

TH2 . c≠0. Khi đó

c có 2 cách chọn

a có 4 cách chọn ($a \in X \setminus \{c, 0\}$)

b có 4 cách chọn ($b \in X \setminus \{a, c\}$)

TH2 có 2.4.4 =32

Vậy có 20+32 =52

I. Các nguyên lý

3. **Nguyên lý chuồng bồ câu** (Derichlet)

Gọi $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng x.

Giả sử có n chim bồ câu ở trong k chuồng. Khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ $\lceil n/k \rceil$ bồ câu trở lên.

Ví dụ. Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con bồ câu trở lên

- Trong 1 nhóm có 367 người thì ít nhất có 2 người sinh cùng ngày

I. Các nguyên lý

Ví dụ. Cho tập X ={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Lấy A là tập hợp con của X gồm 6 phần tử. Khi đó trong A sẽ có hai phần tử có tổng bằng 10.

Giải.

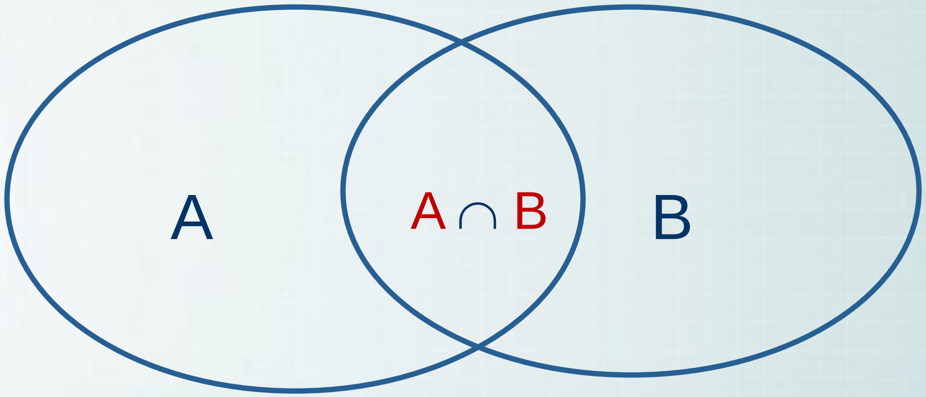
Ta lập các chuồng như sau: {1,9} {2,8} {3,7} {4,6} {5}
Do A có 6 phần tử nên trong 6 phần tử đó sẽ có 2 phần tử trong 1 chuồng. Suy ra đpcm

I. Các nguyên lý

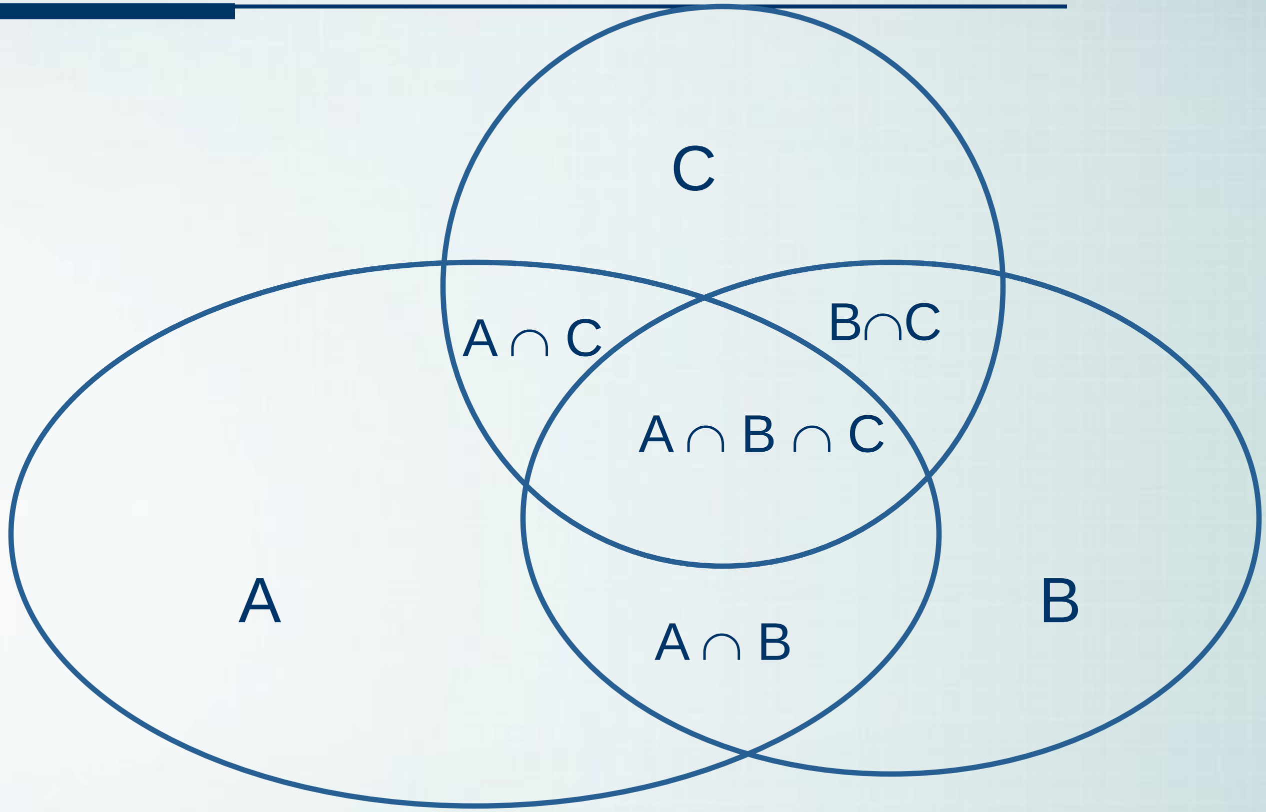
4. **Nguyên lý bù trừ.**

Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



I. Các nguyên lý



$|A \cup B \cup C|=?$

I. Các nguyên lý

Ví dụ. Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp. Có 24 HS học Tiếng Pháp, 26 học sinh học Tiếng Anh. 15 học sinh học Tiếng Anh và Tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu người

Giải.

Gọi A là những học sinh học Tiếng Pháp

B là những học sinh học Tiếng Anh

Khi đó. Số học sinh của lớp là $|A \cup B|$. Theo nguyên lý bù trừ ta có $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 24 + 26 - 15 = 35$

II. Giải tích tổ hợp

1. Hoán vị

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một *hoán vị của n* phần tử. Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2)\dots 1$$

Quy ước $0! = 1$

Ví dụ. Cho A ={a,b,c}. Khi đó A có các hoán vị sau

abc,acb,

bac,bca,

cab,cba

Ví dụ. Nếu A là tập hợp n phần tử thì số song ánh từ A vào A là n!

Cho X ={1,2,3,4,5}. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X ➔ 5!

II. Giải tích tổ hợp

2. Chỉnh hợp.

Định nghĩa. Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n* phần tử.

Số các chỉnh hợp chập k của n ký hiệu là A_n^k

- Công thức

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ. Cho X ={abc}. Khi đó X có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là: ab, ba, ac, ca, bc, cb.

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 1,2,3,4,5,6.

Kết quả: A_6^3

II. Giải tích tổ hợp

3.Tổ hợp.

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử.*

Số *tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là* C_n^k *hay* $\binom{n}{k}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tính chất $\quad C_n^{n-k} = C_n^k \qquad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Cho X = {1,2,3,4}. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X là {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4} , {2,3,4}

Một lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn

- Số cách chọn là tổ hợp chập 10 của 30. C_{30}^{10}

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

1. Hoán vị lặp

Định nghĩa. Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1,2,…,k ; $n_1 + n_2, \ldots + n_k = n$).

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một *hoán vị lặp* của n.

Số hoán vị của n đối tượng, trong đó có
n_1 đối tượng giống nhau thuộc loại 1,
n_2 đối tượng giống nhau thuộc loại 2,…,
n_k đối tượng giống nhau thuộc loại k, là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

Giải. Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là

.

$$\frac{7!}{3!1!2!1!} = 420$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

2. Tổ hợp lặp

Định nghĩa. Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là *tổ hợp lặp chập k của n*

Số các tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là K_n^k

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ. Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn.

Ta có mỗi cách chọn là mỗi tổ hợp lặp chập 2 của 3. Cụ thể AA, AB, AC, BB, BC, CC

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$$

Hệ quả. Số nghiệm nguyên không âm $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ (mỗi x_i đều nguyên không âm) của phương trình

$$x_1+x_2+\dots+x_n = k \text{ là}$$

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Số cách chia k vật đồng chất nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (1)$$

Thỏa điều kiện $x_1 \le 3; x_2 \ge 2; x_3 > 4$ $(*)$.

Giải. Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \le 3; x_2 \ge 2; x_3 \ge 5$.

Xét các điều kiện sau:

$$x_2 \ge 2; x_3 \ge 5 \qquad (**)$$

$$x_1 \ge 4; x_2 \ge 2; x_3 \ge 5 \quad (***)$$

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện $(*)$, $(**)$, $(***)$. Ta có:

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

$p = q – r$.

Trước hết ta tìm q.

Đặt

$$x_1' = x_1;\ x_2' = x_2 – 2;\ x_3' = x_3 - 5;\ x_4' = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13 \ (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$

Vậy $q = C_{16}^{13}$.

Lý luận tương tự, ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$$

Suy ra. Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (*) là 340

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$

Vậy $q = C_{16}^{13}$.

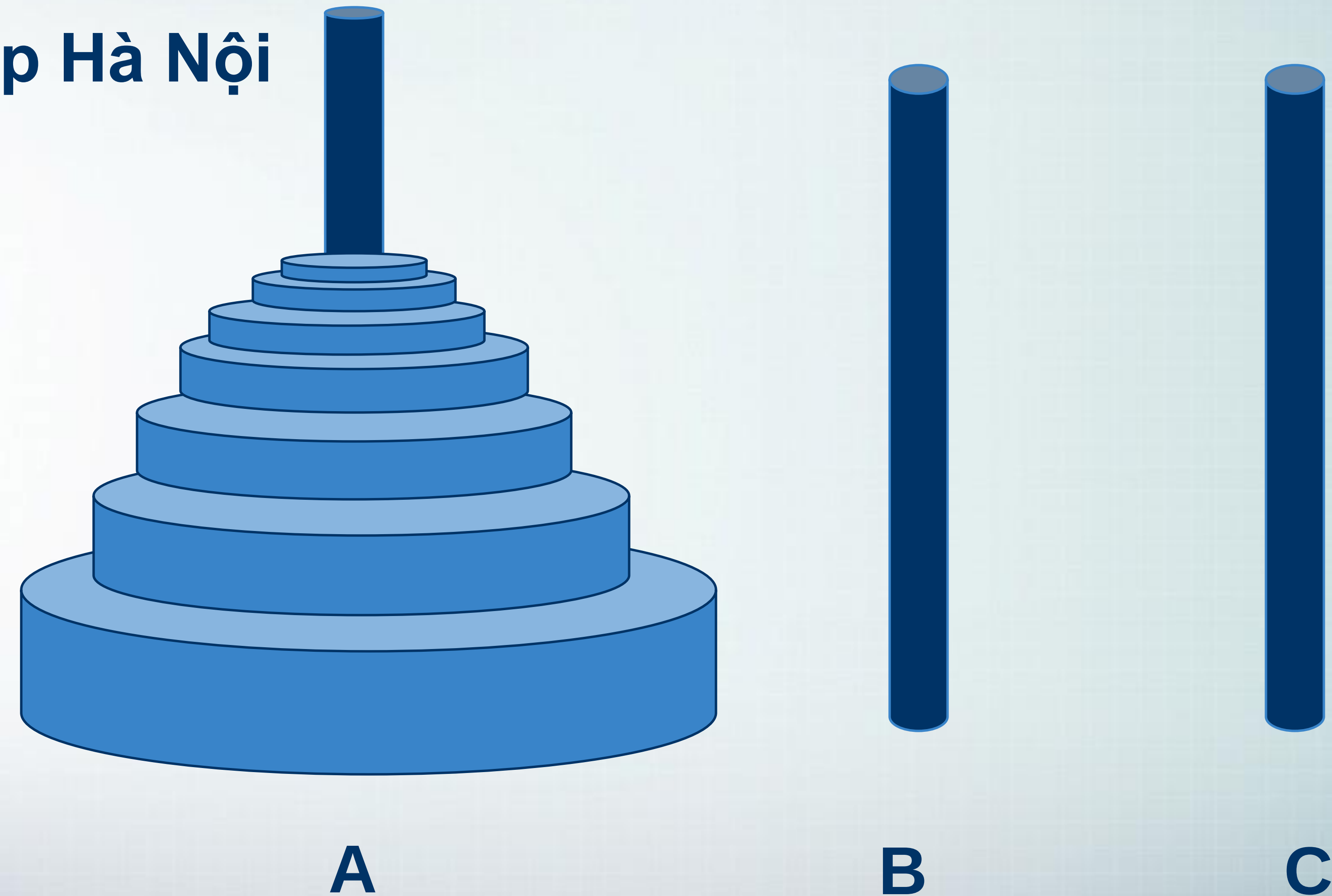
Lý luận tương tự, ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^{9} = 560 - 220 = 340.$$

Suy ra. Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (*) là 340

Hệ thức đệ qui

Tháp Hà Nội



Tháp Hà Nội

Gọi x_n là số lần duy chuyển đĩa trong trường hợp có n đĩa.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 1; \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

$$\longrightarrow x_n = 2^n - 1$$

IV. Hệ thức đệ qui

1. Định nghĩa Một *hệ thức đệ qui tuyến tính cấp k* là một hệ thức có dạng:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = f_n \quad (1)$$

trong đó $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ là các hệ số thực;

$\{f_n\}$ là một dãy số thực cho trước và

$\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

Trường hợp dãy $f_n = 0$ với mọi n thì (1) trở thành

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = 0 \quad (2)$$

Ta nói (2) là một *hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp k*.

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ

$$2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3$$

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 20 + n2^{n-2} + 3^n$$

$$2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$$

IV. Hệ thức đệ qui

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

2. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng.

Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa (1) được gọi là một *nghiệm* của (1). Nhận xét rằng mỗi nghiệm $\{x_n\}$ của (1) được hoàn toàn xác định bởi k giá trị ban đầu $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$.

Họ dãy số $\{ x_n = x_n(C_1, C_2, \dots, C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2, \dots, C_k$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của (1) nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của (1)

IV. Hệ thức đệ qui

Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$$x_0 = y_0,\ x_1 = y_1, \ldots,\ x_{k-1} = y_{k-1} \qquad (*)$$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi *nghiệm riêng* ứng với điều kiện ban đầu (*).

Giải một hệ thức đệ qui là đi tìm nghiệm tổng quát của nó; nhưng nếu hệ thức đệ qui có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải tìm nghiệm riêng thỏa điều kiện ban đầu đó.

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ.

$2x_n - 3x_{n-1} = 0$ có nghiệm tổng quát $x_n = C\left(\frac{3}{2}\right)^n$

$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0$ có nghiệm tổng quát

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm một hệ thức đệ qui cho x_n*

Giải.

Với n = 1, ta có $x_1 = 1$.

Với n = 2, ta có $x_2 = 2$.

Với n > 2, để khảo sát x_n ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:

IV. Hệ thức đệ qui

- Trường hợp 1: Bước đầu tiên gồm 1 bậc.

  Khi đó, cầu thang còn n-1 bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là x_{n-1}.

- Trường hợp 2: Bước đầu tiên gồm 2 bậc.

  Khi đó, cầu thang còn n-2 bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là x_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó ta có:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{hay} \quad x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$$

IV. Hệ thức đệ qui

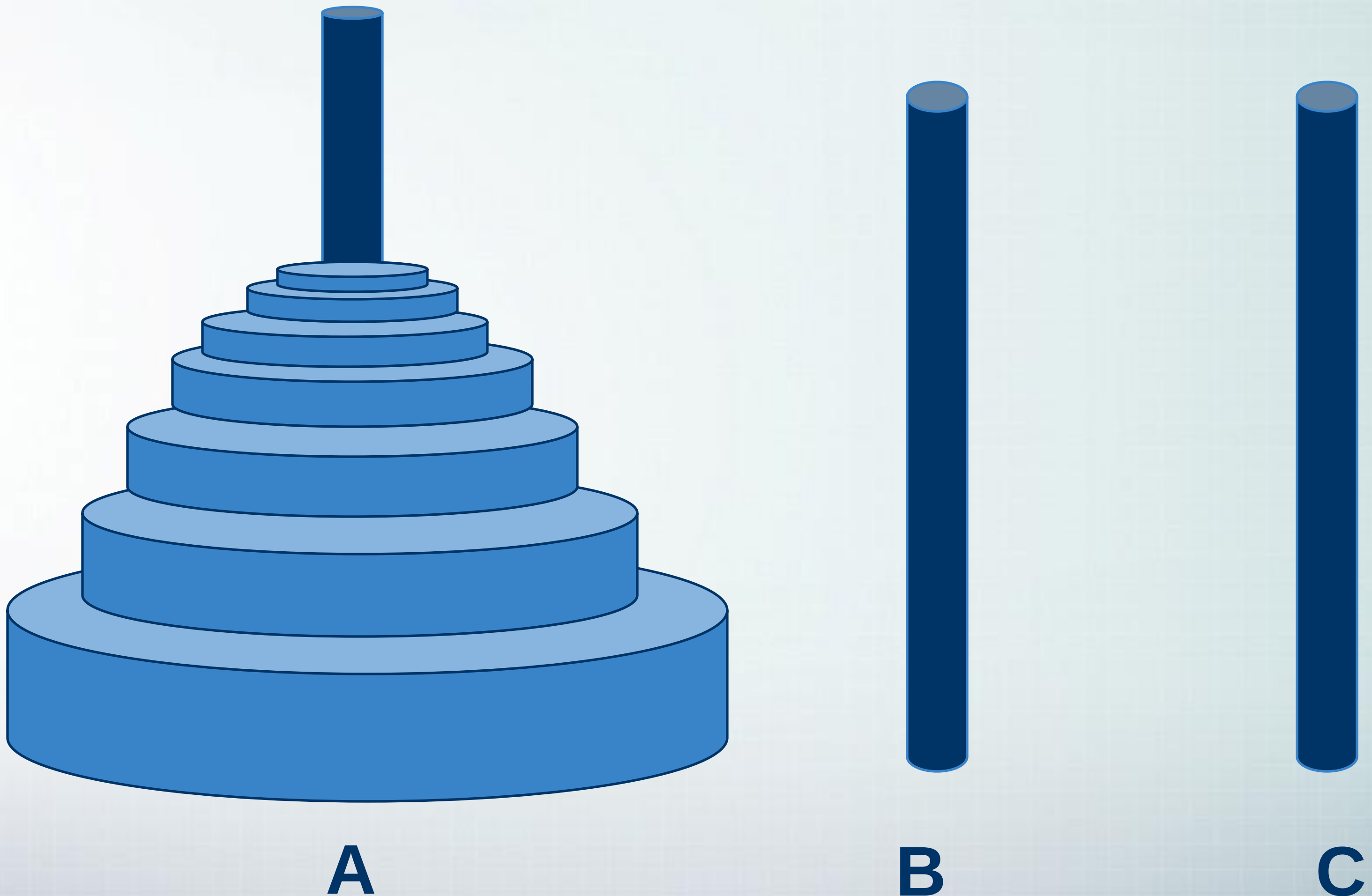
$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$

Vậy ta có hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$\begin{cases} x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0; \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ 2. Tháp Hà Nội



IV. Hệ thức đệ qui

Có 3 cọc A, B, C và n đĩa (có lỗ để đặt vào cọc) với đường kính đôi một khác nhau. Nguyên tắc đặt đĩa vào cọc là: mỗi đĩa chỉ được chồng lên đĩa lớn hơn nó. Ban đầu, cả n đĩa được đặt chồng lên nhau ở cọc A, hai cọc B và C để trống. Vấn đề đặt ra là chuyển cả n đĩa ở cọc A sang cọc C (có thể qua trung gian cọc B), mỗi lần chỉ chuyển một đĩa. Gọi x_n *là số lần chuyển đĩa. Tìm một hệ thức đệ qui cho* x_n

IV. Hệ thức đệ qui

Giải.

- Với n = 1 ta có $x_1 = 1$.

- Với n > 1, trước hết ta chuyển n-1 đĩa bên trên sang cọc B qua trung gian cọc C (giữ nguyên đĩa thứ n dưới cùng ở cọc A). Số lần chuyển n-1 đĩa đó là x_{n-1}. Sau đó ta chuyển đĩa thứ n từ cọc A sang cọc C. Cuối cùng ta chuyển n-1 đĩa từ cọc B sang cọc C. Số lần chuyển n-1 đĩa đó lại là x_{n-1}.

IV. Hệ thức đệ qui

Như vậy số lần chuyển tòan bộ n đĩa từ A sang C là:

$x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1.$

Nghĩa là $x_n = 2x_{n-1} + 1$, ta có hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất cấp 1:

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 1; \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

IV. Hệ thức đệ qui

4. *Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất*

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là phương trình bậc k định bởi:

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \qquad (*)$$

Trường hợp k = 1

Phương trình đặc trưng (*) trở thành $a_0\lambda + a_1 = 0$ nên có nghiệm là $\lambda_0 = - a_1/a_0$. Khi đó, (2) có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = C\lambda_0^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ.

$$\begin{cases} 2x_n - 3x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng: **2λ - 3 = 0** có nghiệm là $\lambda_0 = 3/2$.

Nên hệ thức có nghiệm tổng quát là: $x_n = C\left(\frac{3}{2}\right)^n$

Từ điều kiện $x_0 = 1$, ta có C=1. Vậy nghiệm của hệ thức là:

$$x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0$$

Trường hợp k = 2

Phương trình đặc trưng (*) trở thành

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (*)$$

Người ta chứng minh được kết quả sau:

a) Nếu (*) có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n}$$

b) Nếu (*) có nghiệm kép thực λ_0 thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)\lambda_0^n}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ. Giải các hệ thức đệ qui

$$a)\ 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0$$

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$b)\ \begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 4. \end{cases}$$

$$\boxed{x_n = (3+n)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

IV. Hệ thức đệ qui

$$a)\quad 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

IV. Hệ thức đệ qui

$$\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 2; x_1 = 4. \end{cases} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$$

có nghiệm thực kép là $\lambda_0 = 3/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

4. *Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất*

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất tương ứng là

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

Nghiệm tổng quát của (2)

Nghiệm tổng quát của (1) =

+

Một nghiệm riêng của (1)

IV. Hệ thức đệ qui

Cách tìm một nghiệm riêng của (1) khi vế phải f_n của (1) có *dạng đặc biệt như sau:*

Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$, trong đó $P_r(n)$ là một đa thức bậc r theo n; β là một hằng số

Dạng 2. $f_n = f_{n1} + f_{n2} + \ldots + f_{ns}$, trong đó các $f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{ns}$ thuộc dạng 1 đã xét ở trên

IV. Hệ thức đệ qui

Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$. Có ba trường hợp nhỏ xảy ra:

TH 1. β không là nghiệm của phương trình đặc trưng

TH 2. β là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng

TH 3. β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

.

TH1. Nếu β *không là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$\boxed{x_n = \beta^n Q_r(n)}$$

IV. Hệ thức đệ qui

TH 2. Nếu β là *nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:*

.

$$\boxed{x_n = n\beta^n Q_r(n)}$$

TH 3. Nếu β là *nghiệm kép của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$\boxed{x_n = n^2\beta^n Q_r(n)}$$

Chú ý $Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_0$ là đa thức tổng quát có cùng bậc r với $P_r(n)$, trong đó $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_0$ là r+1 hệ số cần xác định.

IV. Hệ thức đệ qui

$$Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_0$$

Để xác định các hệ số trên ta cần thế x_n, x_{n-1},…, x_{n-k} vào (1) và cho n nhận r + 1 giá trị nguyên nào đó hoặc đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế để được một hệ phương trình. Các hệ số trên là nghiệm của hệ phương trình này.

IV. Hệ thức đệ qui

Dạng 2. $f_n = f_{n1} + f_{n2} + \ldots + f_{ns}$

Bằng cách như trên ta tìm được nghiệm riêng x_{ni} $(1 \leq i \leq s)$ của hệ thức đệ qui:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_{ni}$$

Khi đó $x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{ns}$ là một nghiệm riêng của (1)

IV. Hệ thức đệ qui

$$a)\quad 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1.$$

$$b)\quad \begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}; \\ x_0 = 1;\ x_1 = -2. \end{cases}$$

$$d)\quad x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

$a)\ 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1$ (1)

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\mathbf{x_n = C_1 + C_2(1/2)^n}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là $f_n = 4n+1$ có dạng $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$ theo n.

Vì $\beta = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng: $x_n = n(an + b)$ (4)

Thế (4) vào (1) ta được:

$$2n(an+b) - 3(n-1)[a(n-1)+b] + (n-2)[a(n-2) + b] = 4n + 1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị n = 0; n = 1 ta được hệ:

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ 3a + b = 5. \end{cases}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Giải hệ trên ta được a = 2; b = -1. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:

$$\boxed{x_n = n(2n - 1)} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2(1/2)^n + n(2n - 1)}$$

Ví Dụ 2

b) $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$

Xét hệ thức đệ qui:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n. \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (*)$$

có một nghiệm thực kép là $\lambda = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2).3^n.} \qquad (3)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là $f_n = (18n + 12)3^n$ có dạng $\beta^n P_r(n)$ với $\beta = 3$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$ theo n.

Vì $\beta = 3$ *là* nghiệm kép của *phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$x_n = n^2(an + b)3^n \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

$$(n+1)^2[a(n+1) + b]3^{n+1} - 6n^2[an+b]3^n + 9(n-1)^2[a(n-1) + b]3^{n-1} = (18n+12)3^n$$

Cho n lần lượt nhận hai *giá trị* $n = 0$; $n = 1$ *ta được hệ:*

$$\begin{cases} 6b = 12; \\ 54a + 18b = 90. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được a = 1; b = 2. *Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:*

$$\boxed{x_n = n^2(n+2)\,3^n} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)3^n + n^2(n+2)\,3^n} \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 2$; $x_1 = 0$ *vào (6) ta được:*

$$\begin{cases} C_1 = 2; \\ 3C_1 + 3C_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$$C_1 = 2;\ C_2 = -5.$$

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$\boxed{x_n = (n^3 + 2n^2 - 5n + 2)3^n}$$

$$c)\begin{cases}4x_{n+1}-12x_n+9x_{n-1}=(2n^2+29n+56)2^{n-1}\\ x_0=1;\ x_1=-2\end{cases}$$

Xét hệ thức đệ qui:

$$4x_{n+1}-12x_n+9x_{n-1}=(2n^2+29n+56)2^{n-1} \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$4x_{n+1}-12x_n+9x_{n-1}=0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0 \qquad (*)$$

có một nghiệm thực kép là $\lambda = 3/2$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n.} \qquad (3)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}$$

có dạng $\beta^n P_r(n)$ với $\beta = 2$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc r = 2 theo n.

Vì $\beta = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = (an^2 + bn + c)2^n \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được :

$4[a(n+1)^2 + b(n+1) + c)2^{n+1} -12[an^2 + bn + c]\, 2^n + 9[a(n-1)^2 + b(n-1) + c]\, 2^{n-1} = (2n^2 + 29n +56)2^{n-1}$

IV. Hệ thức đệ qui

Cho n lần lượt nhận ba giá trị n = -1; n = 0; n = 1 ta được hệ:

$$\begin{cases} 3a + \dfrac{3}{2}b + \dfrac{1}{4}c = \dfrac{29}{4}; \\ \dfrac{25}{2}a + \dfrac{7}{2}b + \dfrac{1}{2}c = 28; \\ 40a + 8b + c = 87. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được a = 2; b = 1; c = -1. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là

$$\boxed{x_n = (2n^2 + n - 1)2^n} \qquad (5)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1)\, 2^n \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 1$; $x_1 = -2$ vào (6) ta được:

$$\begin{cases} C_1 - 1 = 1; \\ \frac{3}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 + 4 = -2. \end{cases}$$

Từ đó ta có: $C_1 = 2$; $C_2 = -6$.

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$x_n = (2 - 6n)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1)\, 2^n$$

$$d)\ \ x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n \quad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3.$

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2 . 3^n.} \qquad (3)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n$$

có dạng ở Trường hợp 4.

Xét các hệ thức đệ qui:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 \qquad (1')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = (2-n)2^{n-2} \qquad (1'')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3.4^n \qquad (1''')$$

Lý luận tượng tự như trên ta tìm được:

Một nghiệm riêng của (1’) là $\boxed{x_{n1} = -10n}$

Một nghiệm riêng của (1’’) là $\boxed{x_{n2} = n2^n}$

Một nghiệm riêng của (1’’’) là $\boxed{x_{n3} = 4^{n+2}}$

Suy ra một nghiệm riêng của (1) là:

$$\boxed{x_{n1} = -10n + n2^n + 4^{n+2}} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2.3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}}$$

Bài tập

$$\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128.8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2.5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$$