

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ  
ΠΡΩΤΟ ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2017-18  
ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ: 06.10.2017, ΔΕΝ ΘΑ ΠΑΡΑΔΟΘΟΥΝ, ΘΑ ΛΥΘΟΥΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΣΤΙΣ 11.10.2017

Είναι χρήσιμο να δουλέψετε σε ομάδες. Τηρήστε τη μαθηματική αυστηρότητα. Δοκιμάστε όσες περισσότερες μπορείτε, οπωσδήποτε όμως τις 0, 1, 3.

**Άσκηση 0.** Δείξτε ότι κάθε κλειστός περίπατος περιττού μήκους περιέχει έναν περιττό κύκλο. Υπόδειξη: με επαγωγή στο μήκος  $l$  του περιπάτου.

**Άσκηση 1.** Δείξτε ότι ένα γράφημα είναι διμερές ανν δεν περιέχει περιττό κύκλο. Μπορεί να σας φανεί χρήσιμη η πρόταση από την Άσκηση 0.

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι αν σε ένα γράφημα  $G$  ισχύει ότι  $\delta(G) \geq n/2$ , τότε το  $G$  είναι συνεκτικό.

**Άσκηση 3.** Θεωρήστε τους δύο ορισμούς της συνεκτικότητας (Ορισμός 2.4 και Ορισμός 2.5 από τις σημειώσεις). Δείξτε τυπικά ότι είναι ισοδύναμοι.

**Άσκηση 4.** Βρείτε παράδειγμα συνεκτικού γραφήματος  $G$  στο οποίο  $\kappa(G) < \delta(G)$ . Μπορείτε να δώσετε παράδειγμα όπου  $\frac{\delta(G)}{\kappa(G)} \geq \frac{n+1}{2}$ ;

**Άσκηση 5.** Δίνεται συνεκτικό γράφημα  $G$ . Ναδειχθεί ότι αν  $\delta(G) \geq 2n/3$ , τότε  $\kappa(G) \geq n/6$ .