Aufgabe 2

Wir verwenden einen Seperationsansatz:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung fuehrt auf

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \tag{2}$$

Mit der ueblichen Argumentation (λ muss negativ sein, weil es sich sonst mit den Randwerten nicht ausgeht) erhalten wir, dass

$$X(x) = a \cos \sqrt{-\lambda} x + b \sin \sqrt{-\lambda} x \tag{3}$$

Mit den Anfangswerten folgt nun, dass nur die Loesung $b \sin -\sqrt{\lambda} x$ relevant sein kann und dass $\lambda = -n^2\pi^2$ gilt. Mit diesem Wissen koennen wir die Gleichung fuer $T(t)$ loesen und erhalten

$$T(t) = d \sin \frac{n\pi}{c} t + e \cos \frac{n\pi}{c} t \tag{4}$$

Wegen $u_t(x,0) = 0$ gilt $d = 0$ und $T(t) = e \cos n\pi ct$. Zusammengefasst

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \sin n\pi x \cos \frac{n\pi}{c} t \tag{5}$$

Nehmen wir nun an, dass $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$. Indem wir unsere Loesungen ueberlagern, erhalten wir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x \cos \frac{n\pi}{c} t \tag{6}$$

Abschliessend zeigen wir noch, dass man die Funktion $A_n \sin n\pi x \cos \frac{n\pi}{c} t$ (die Elementarloesung) als Ueberlagerung von ausbreitenden Wellen darstellen kann. Unsere Loesung schreit nach den Summensaetzen und tatsaechlich

$$A_n \sin n\pi x \cos \frac{n\pi}{c} t = \frac{A_n}{2} (\sin (n\pi x + \frac{n\pi}{c} t) + \sin (n\pi x - \frac{n\pi}{c} t) \tag{7}$$