

MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta



Diplomová práce
Bc. Milan MACHALEC

**Modely časových radov s aplikáciami v
ekonómii**

Vedúci práce: Ing. Daniel NĚMEC, Ph.D.
Študijný program: Aplikovaná matematika
Študijný odbor: Matematika - ekonomie
2011

Meno a priezvisko autora:	Bc. Milan Machalec
Názov diplomovej práce:	Modely časových radov s aplikáciami v ekonómii
Názov práce v angličtine:	Time series models with applications in economics
Ústav matematiky a statistiky	Prírodovědecké fakulty, MU
Študijný odbor:	Matematika - ekonomie
Vedúci diplomovej práce:	Ing. Daniel Němec, Ph.D., Ekonomicko-správní fakulta MU, katedra ekonomie
Rok obhajoby:	2011

Anotácia

Diplomová práca sa zaoberá schopnosťami informačných a predikčných kritérií pri výbere modelov a analýzou ekonomických časových radov HDP Česka, miery nezamestnanosti Česka a výmenného kurzu CZK/EUR. Dôraz je kladený na lineárne ARMA modely. Prezentované sú výsledky odhadov týchto modelov a je testovaná predikčná schopnosť viacerých modelov pre tieto časové rady. Súčasťou práce je aj rekurzívny odhad parametrov.

Annotation

The thesis is focused on the ability of information and prediction criteria for model selection and the analysis of economic time series of Czech GDP, Czech unemployment rate and CZK/EUR exchange rate. We put emphasis on linear models like ARMA. We present estimation results of these models and we test the forecast performance of several models for these time series. Thesis contains recursive parameters estimates as well.

Klíčové slová

ARMA model, časové rady, informačné kritéria, predikčné kritéria, rekurzívny odhad parametrov

Keywords

ARMA model, time series, information criteria, prediction criteria, recursive parameters estimates

Prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu napísal samostatne pod vedením Ing. Daniela Němca, Ph.D. a uviedol v nej všetky použité literárne a iné odborné zdroje.

V Brne, dňa 5. mája 2011

vlastnoručný podpis autora

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som rád poďakoval Ing. Danielovi Němcovi, Ph.D. za cenné pripomienky, zapožičanie výkonného notebooku, odhad simulovaných procesov, venovaný čas a odborné rady, ktorými prispel k vypracovaniu tejto diplomovej práce.

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy	3
1.1 Stochastický proces a časová rada	3
1.2 Stacionárny proces	3
1.3 Autokorelačná funkcia (ACF) a parciálna autokorelačná funkcia (PACF)	5
1.4 Biely šum a iid proces	6
1.5 Výberové charakteristiky	7
1.6 Operátor spätného posunutia a diferenčný operátor	8
2 Lineárne modely	10
2.1 Modely stacionárnych časových radov	10
2.1.1 $AR(1)$ proces	10
2.1.2 $AR(p)$ proces	12
2.1.3 $MA(1)$ proces	14
2.1.4 $MA(q)$ proces	15
2.1.5 $ARMA(1, 1)$ proces	16
2.1.6 $ARMA(p, q)$ proces	17
2.2 Modely nestacionárnych a sezónnych časových radov	17
2.2.1 $ARIMA(p, d, q)$ proces	18
2.2.2 $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ proces	18
3 Proces tvorby modelu	19
3.1 Transformácia dát a voľba rádu modelu	19
3.2 Odhad parametrov modelu	23
3.3 Diagnostická kontrola	23
3.4 Tvorba predpovedí	24
4 Simulácia	27
4.1 Simulácia-všetky modely	28

4.2	Simulácia-vybrané modely	31
5	Analýza vybraných časových radov	34
5.1	Popis dát	34
5.2	Transformácia dát	37
5.3	Výsledky odhadov	40
5.3.1	Diagnostická kontrola	41
5.3.2	Predikčné schopnosti modelov	42
5.3.3	Rekurzívny odhad parametrov	49
	Záver	52
	Literatúra	54
	Zoznam obrázkov	54
	Zoznam tabuliek	56
A	Výsledky simulácií - všetky modely	59
B	Výsledky simulácií - vybrané modely	76
C	Histogramy reziduí	85
D	Výberová ACF reziduí	86
E	Rekurzívne predikcie	87
F	Predpovede vyhodenených pozorovaní	88

Úvod

V ekonomickej praxi sa veľmi často stretávame s rozličnými časovými radami. Medzi najbežnejšie ekonomické ukazovatele patrí hrubý domáci produkt, miera nezamestnanosti a výmenný kurz. Často nás u týchto ukazovateľoch zaujíma aj ich budúci vývoj. Preto je nevyhnutné vedieť časové rady správne namodelovať nielen na popisné účely, ale aj predikčné¹.

Hoci analýza časových radov pomocou autoregresných procesov a procesov kľzavých priemerov bola objavená už v 30. rokoch 20. storočia, tak o popularitu týchto procesov sa postarali Box a Jenkins, ktorý v 70. rokoch 20. storočia vytvorili postup, ako tieto modely používať. V ďalších rokoch sa s rozvojom ekonometrie rozširovali aj možnosti pre správne identifikovanie modelov pre analyzované časové rady.

Práve identifikácia správneho modelu hrá dôležitú úlohu pri analýze časových radov. Existuje niekoľko kritérií pre výber modelu. Kritéria môžeme rozdeliť na dve skupiny a to informačné kritéria a predikčné kritéria. V predkladanej práci sa tak budeme zaoberať schopnosťami jednotlivých kritérií pri výbere modelov. Ďalej aplikujeme teóriu lineárnych modelov na reálne české dáta HDP, miery nezamestnanosti a výmenného kurzu CZK/EUR a zistíme, ktoré modely sú najvhodnejšie pre ich modelovanie. Prostredníctvom rekurzívnych odhadov parametrov sa pokúsime zistiť či kríza, ktorá sa začala prejavovať v roku 2009, mala nejaký vplyv na parametre, alebo nie. Cieľ práce by sa tak dal zhrnúť ako test schopnosti jednotlivých kritérií pri výbere modelov a následná aplikácia teórie časových radov na reálne dáta s prevedením kompletnej analýzy vybraných časových radov.

Štruktúra práce je nasledovná. Práca je rozdelená do piatich kapitol. V prvej kapitole si zadefinujeme základné pojmy teórie časových radov, ktoré sú základom pre ďalšie kapitoly. V druhej kapitole si vcelku podrobne predstavíme matematické pozadie lineárnych modelov. V tretej kapitole sa pokúsime prezentovať doposiaľ známe techniky využívané pri analýze časových radou prostredníctvom lineárnych modelov. V štvrtej kapitole sa prostred-

¹V celej práci budeme slová predikcia a predpoveď bežne zamieňať, ale význam bude však vždy rovnaký.

níctvom Monte Carlo simulácie pozrieme na schopnosti jednotlivých kritérií pri výbere modelov. V poslednej piatej kapitole aplikujeme nadobudnutú teóriu na už spomenuté dáta. Obsahovať bude odhad lineárnych modelov, tri druhy predikcií a taktiež sa pozrieme aj na stabilitu parametrov v čase, tj. prevedieme rekurzívny odhad parametrov.

Kapitola 1

Základné pojmy

V úvodnej kapitole si zavedieme základnú terminológiu teórie časových radov, ktorá bude potrebná pre pochopenie modelov uvažovaných v nasledujúcich kapitolách diplomovej práce. Potrebná teória, ktorá je obsahom tejto kapitoly bola čerpaná prevažne z kníh Forbelská [6], Arlt, Arltová [1] a Brockwell, Davis [3].

1.1 Stochastický proces a časová rada

V čase usporiadaná rada náhodných veličín $\{X_t, t \in T\}$, kde T je indexová množina, sa nazýva *stochastický proces*. Ak $T = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, alebo $T \subset Z$, tak hovoríme o stochastickom procese s *diskrétnym časom*. Ak $T =]t_1, t_2[$, kde $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$, tak hovoríme o procese so *spojitým časom*. V prípade, že množina všetkých hodnôt, ktoré môže náhodná veličina X_t nadobudnúť, je diskrétna, tak hovoríme o procese s *diskrétnou množinou stavov*. Ak nadobúda hodnoty z nejakého intervalu, tak hovoríme o procese so *spojitou množinou stavov*.

Pod pojmom *časová rada* budeme rozumieť realizáciu stochastického procesu s diskrétnym časom. V ďalšom texte preto budeme uvažovať len stochastické procesy s diskrétnym časom.

1.2 Stacionárny proces

V teórii stochastických procesov rozlišujeme viacej druhov stacionarity. Postupne si zdefinujeme *striktne stacionárny*, *stacionárny v strednej hodnote*, *kovariančne stacionárny* a *slabo stacionárny* proces. Predtým si ale definujeme pojem *distribučná funkcia* stochastického procesu, *funkcia stredných hodnôt* a *autokovariančná funkcia*.

Definícia 1.1 *Nech T^n je množina všetkých vektorov*

$$T^n = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' : t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n; t_i \in T; i = 1, \dots, n\}.$$

Potom distribučnou funkciou stochastického procesu rozumieme funkciu

$$F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

pre $\forall \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in T^n$ a $\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$.

Definícia 1.2 *Ak existuje pre $\forall t \in T$ stredná hodnota $E(X_t)$, tak funkciu*

$$\mu_t = E(X_t)$$

nazývame strednou hodnotou stochastického procesu.

Definícia 1.3 *Nech $\{X_t, t \in T\}$ je stochastický proces, ktorý má konečné druhé momenty, tj. $E(X_t^2) < \infty$ pre $\forall t \in T$. Potom funkciu*

$$\gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = E[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)]$$

nazývame autokovariančnou funkciou.

Poznamenajme, že kovariancia meria lineárnu závislosť medzi náhodnými veličinami. V prípade, že v definícii 1.3 $s = t$, tak hovoríme o *variančnej funkcii*

$$\sigma_t^2 = D(X_t) = E(X_t - \mu_t)^2.$$

Definícia 1.4 *Stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ je striktne stacionárny, ak pre $\forall \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ a pre $\forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in T^n$ platí*

$$F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\tau_1, \dots, \tau_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}).$$

Definíciu 1.4 je možné interpretovať tak, že základné pravdepodobnostné charakteristiky procesu sa nemenia pri posunutí v čase.

Definícia 1.5 *Stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ nazývame stacionárny v strednej hodnote, pokiaľ pre $\forall t \in T$ je stredná hodnota konštantná, tj.*

$$E(X_t) = \mu.$$

V prípade procesu stacionárneho v strednej hodnote nám variančná funkcia prechádza do tvaru

$$\sigma^2 = D(X_t) = E(X_t - \mu)^2.$$

Ak v definícii 1.5 je $E(X_t) = 0$, tak proces nazývame *centrovaný*. Je zrejmé, že každý proces $\{X_t, t \in T\}$ je možné transformáciou $Y_t = X_t - \mu$ transformovať na proces centrovaný. Preto budeme v ďalších častiach práce uvažovať centrované stochastické procesy ak nebude výslovne určené inak.

Definícia 1.6 *Stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ sa nazýva kovariančne stacionárny, ak pre $\forall t, s \in T$ platí*

$$\gamma(s, t) = \gamma(0, |s - t|). \quad (1.1)$$

Vzťah (1.1) budeme zapisovať

$$\gamma(s, t) = \gamma(s - t).$$

Čiže autokovariančná funkcia závisí iba na časovej vzdialenosti dvoch veličín. Z definície ďalej plynie, že

$$D(X_t) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \gamma(t - t) = \gamma(0).$$

Definícia 1.7 *Stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ sa nazýva (slabo) stacionárny, ak je kovariančne stacionárny a stacionárny v strednej hodnote.*

Namiesto slabo stacionárneho procesu budeme v ďalšom texte používať označenie stacionárny proces.

1.3 Autokorelačná funkcia (ACF) a parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

Pri výbere vhodného modelu pre analyzovanú časovú radu hrajú dôležitú úlohu *autokorelačná funkcia* (ACF) a *parciálna autokorelačná funkcia* (PACF). K ich vlastnostiam, ktoré sú charakteristické pre konkrétne modely sa dostaneme v ďalšej kapitole.

Definícia 1.8 *Nech stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ je stacionárny. Potom funkcia*

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{D(X_t)}\sqrt{D(X_{t-k})}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

sa nazýva autokorelačná funkcia stacionárneho stochastického procesu.

Vzhľadom k tomu, že platí

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \text{Cov}(X_{t-k}, X_t),$$

tak

$$\gamma(k) = \gamma(-k)$$

a ACF je tým pádom symetrická okolo $k = 0$. Vďaka tomu je ACF vyjadrovaná iba pre $k \geq 0$ a jej graf sa nazýva *korelogram*. Zo Schwarzovej nerovnosti (viď Forbelská [6]) ďalej plynie, že ACF nadobúda hodnôt z intervalu $< -1, 1 >$.

Parciálna autokorelačná funkcia vyjadruje koreláciu medzi veličinami X_t a X_{t-k} po odstránení závislosti na veličinách $X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}$. Parciálna autokorelácia ϕ_{kk} je daná autoregresiou

$$X_t = \phi_{k1}X_{t-1} + \dots + \phi_{kk}X_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (1.2)$$

Pre ϕ_{kk} potom platí

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(k-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-3) & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \dots & \rho(1) & \rho(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(k-2) & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-3) & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \dots & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}. \quad (1.3)$$

Odvozenie vzťahu (1.3) je možné nájsť v Arlt, Arltová [1].

1.4 Biely šum a iid proces

Základným stavebným prvkom pri výstavbe modelov časových radov je *biely šum* (White noise).

Definícia 1.9 *Stochastický proces $\{\varepsilon_t, t \in T\}$, kde ε_t sú nekorelované náhodné veličiny so strednou hodnotou $E(\varepsilon_t) = 0$ a rozptylom $D(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ nazývame biely šum. Značíme ho $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$.*

Z definície plynie, že biely šum je centrovaný stacionárny stochastický proces s autokovariančnou funkciou $\gamma(k) = 0$ pre $k \neq 0$, autokorelačnou funkciou

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & \text{ak } k = 0 \\ 0 & \text{ak } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

a parciálnou autokorelačnou funkciou

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & \text{ak } k = 0 \\ 0 & \text{ak } k \neq 0. \end{cases}$$

Pokiaľ sú v definícii 1.9 ε_t nezávislé, tak sa jedná o *IID* proces (independent and identically distributed) a značíme ho $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Biely šum je *gaussovský*, ak jeho združené rozdelenie pravdepodobnosti je normálne.

Teraz si zdefinujeme pojem *lineárny proces*, ktorý ide interpretovať tak, že každý centrováný stacionárny stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ môže byť vyjadrený v tvare lineárnej kombinácie nekorelovaných rovnako rozdelených náhodných veličín.

Definícia 1.10 *Nech $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ je postupnosť reálnych čísiel taká, že $\sum_{j=0}^\infty \psi_j^2 < \infty$, potom lineárny proces je definovaný vzťahom*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

Dá sa ukázať, že lineárny proces je stacionárny (viď napríklad Arlt, Arltová [1]) a podmienkou stacionarity je podmienka $\sum_{j=0}^\infty \psi_j^2 < \infty$.

1.5 Výberové charakteristiky

Keďže vo väčšine prípadov μ , $\gamma(k)$, $\rho(k)$ a ϕ_{kk} stacionárneho procesu $\{X_t, t \in T\}$ nepoznáme, snažíme sa ich odhadovať z jeho realizácií. Odhadom strednej hodnoty μ stacionárneho procesu je *výberový priemer*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t,$$

kde n je počet hodnôt časovej rady.

Odhadom $\gamma(k)$ je *výberová autokovariančná funkcia*

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X}) (X_{t-k} - \bar{X}).$$

Odhadom $\rho(k)$ je *výberová autokorelačná funkcia*

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X}) (X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2},$$

pre $k = 1, 2, \dots, n-1$. Aby odhady $\hat{\gamma}$ a $\hat{\rho}$ podávali spoľahlivé výsledky, tak sa požaduje $n \geq 50$ a $k \leq \frac{n}{4}$ (Box, Jenkins [2]). Pre veľké n môže byť $\hat{\rho}(k)$ dobre aproximované normálnym rozdelením. Platí

$$\hat{\rho} \approx N(\boldsymbol{\rho}, n^{-1}\mathbf{W}),$$

kde $\hat{\rho} = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(k))'$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho(1), \dots, \rho(k))'$ a \mathbf{W} je kovariančná matica, ktorej prvky (i, j) sú dané Bartlettovou formulou

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \{\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k)\} \times \\ \times \{\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)\}. \quad (1.5)$$

V prípade $\{X_t, t \in T\} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ vďaka (1.4) pre (1.5) platí

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Preto pre veľké n sú $\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(k)$ približne nezávislé normálne rozdelené náhodné veličiny so strednou hodnotou 0 a rozptylom n^{-1} . Tento výsledok využijeme pri teste, či sa jedná o proces bieleho šumu. Ako už vieme pre tento proces platí $\rho(k) = 0$ pre $k \neq 0$, takže ak $|\hat{\rho}(k)| \leq 1,96/\sqrt{n}$ tak na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ ACF nie je signifikantne rozdielna od nuly.

Nakoniec odhadom ϕ_{kk} je *výberová parciálna autokorelačná funkcia* $\hat{\phi}_{kk}$ a je tvaru (1.3), kde jednotlivé autokorelácie sú nahradené ich odhadmi. Odhad ϕ_{kk} je možné taktiež získať aj z regresie (1.2).

1.6 Operátor spätného posunutia a diferenčný operátor

Na záver tejto kapitoly si zavedieme pojmy *operátor spätného posunutia* (backward shift operator) a *diferenčný operátor* (lag difference operator), ktoré budú užitočné pri zjednodušovaní zápisov modelov.

Definícia 1.11 *Nech $\{X_t, t \in T\}$ je stochastický proces. Pre operátor spätného posunutia B platí*

$$BX_t = X_{t-1}$$

a *diferenčný operátor Δ*

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t.$$

Obidva operátory B a Δ je možné aplikovať niekoľkokrát za sebou. Platí

$$B^j X_t = X_{t-j}$$

a

$$\Delta^j X_t = (1 - B)^j X_t.$$

Operácie s operátormi sú rovnaké ako v prípade polynomických funkcií. Napríklad

$$\Delta^2 X_t = \Delta(\Delta X_t) = (1 - B)(1 - B)X_t = (1 - 2B + B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}.$$

Poznamenajme, že v prípade konštanty $c \in \mathbb{R}$ platí $B^j c = c$. Diferenčný operátor budeme využívať na odstránenie trendu z nestacionárneho procesu, kde diferencovaním prevedieme tento proces na proces stacionárny.

Kapitola 2

Lineárne modely

V tejto kapitole si predstavíme základné modely Box-Jenkinsovej metodológie vytvorenej Boxom a Jenkinsom v sedemdesiatych rokoch 20. storočia. Pochoopenie týchto modelov, najmä autoregresného procesu, je dôležitým predpokladom pre pokročilejšie typy modelov ako sú napríklad nelineárne modely a modely volatility. Podkladom pre túto kapitolu boli prevažne publikácie Forbelská [6], Arlt, Arltová [1], Brockwell, Davis [3] a Cryer, Chan [4].

2.1 Modely stacionárnych časových radov

Začneme stacionárnymi modelmi časových radov a to konkrétne *autoregresným procesom* rádu 1 ($AR(1)$), ktorý následne zobecníme na rád p ($AR(p)$). Ďalej sa budeme zaoberať *procesmi kľzavých priemerov* rádu 1 ($MA(1)$) a rádu q ($MA(q)$). Na koniec podkapitoly si predstavíme zmiešané procesy $ARMA(1, 1)$ a $ARMA(p, q)$. Úlohou v každej triede modelov bude určiť podmienky stacionarity a odpovedajúce tvary ACF a PACF.

2.1.1 $AR(1)$ proces

Autoregresný proces rádu 1 je daný vzťahom

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.1)$$

Ak však $E(X_t) = \mu \neq 0$, tak $AR(1)$ proces má tvar

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde $\phi_0 = \mu - \phi_1 \mu$. S použitím operátora spätného posunu môžeme (2.1) zapísať ako

$$(1 - \phi_1 B)X_t = \varepsilon_t.$$

Pozrime sa teraz na podmienky stacionarity. Uvažujme najskôr prípad $|\phi_1| < 1$. Postupnou iteráciou (2.1) dostaneme

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t = \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots = \phi_1^{k+1} X_{t-k-1} + \sum_{j=0}^k \phi_1^j \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

Keďže $|\phi_1| < 1$, tak $\phi_1^{k+1} X_{t-k-1}$ konverguje k nule pre $k \rightarrow \infty$. Preto proces môžeme vyjadriť v tvare lineárneho procesu

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}, \quad (2.2)$$

ktorý je stacionárny.

Pozrime sa teraz na prípad $|\phi_1| > 1$. Pretože v tomto prípade by rada $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j$ nekonvergovala, prepíšeme (2.1) do tvaru

$$X_t = \frac{1}{\phi_1} X_{t+1} - \frac{1}{\phi_1} \varepsilon_{t+1}$$

a postupnou iteráciou ako v prípade $|\phi_1| < 1$ dostaneme

$$X_t = \frac{1}{\phi_1^{k+1}} X_{t+k+1} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{\phi_1^{j+1}} \varepsilon_{t+j+1},$$

takže pre $k \rightarrow \infty$ konverguje $\frac{1}{\phi_1^{k+1}} X_{t+k+1}$ k nule a preto

$$X_t = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\phi_1^{j+1}} \varepsilon_{t+j+1}.$$

Toto riešenie je neprirodzené, pretože X_t je závislé na budúcich hodnotách ε_s , kdežto riešenie (2.2) je nezávislé na ε_s pre každé $s > t$. Preto sa obmedzíme na prípad $|\phi_1| < 1$ a povieme, že proces je *kauzálny*.

V poslednom prípade, keď $|\phi_1| = 1$, neexistuje stacionárne riešenie a jedná sa o *náhodnú prechádzku*.

Pre vyjadrenie autokorelačnej funkcie najskôr vynásobme rovnicu (2.1) veličinou X_{t-k} pre $k \geq 0$ a spočítame strednú hodnotu

$$E(X_t X_{t-k}) = \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + E(X_{t-k} \varepsilon_t). \quad (2.3)$$

Platí

$$E(X_{t-k}\varepsilon_t) = E\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-k-j}\right) \varepsilon_t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j E(\varepsilon_{t-k-j}\varepsilon_t) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & k=0 \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

takže (2.3) pre $k=0$ sa dá písať ako

$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.4)$$

a pre $k > 0$ ako

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1). \quad (2.5)$$

Dosadením (2.5) pre $k=1$ do (2.4) získame vzťah pre rozptyl

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

a vydelením rovnice (2.5) rozptylom $\gamma(0)$ získame autokorelačnú funkciu v tvare diferenčnej rovnice

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1),$$

ktorú postupnou iteráciou upravíme na tvar

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) = \phi_1^2 \rho(k-2) = \dots = \phi_1^k \rho(0) = \phi_1^k \text{ ak } k \geq 0.$$

Ak $0 < \phi_1 < 1$, tak ACF klesá exponenciálne k 0 a všetky autokorelácie sú kladné. V prípade $-1 < \phi_1 < 0$ ACF klesá k nule, ale znamienko každej nasledujúcej autokorelácie je opačné.

PACF má podľa (1.3) tvar

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho(1) = \phi_1 & \text{ak } k=1 \\ 0 & \text{ak } k \geq 2. \end{cases}$$

2.1.2 $AR(p)$ proces

Autoregresný proces rádu p je daný tvarom

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (2.6)$$

Obdobne ako v prípade $AR(1)$ procesu ak stredná hodnota μ je rozdielna od nuly, tak $AR(p)$ proces má tvar

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

kde $\phi_0 = \mu(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j)$. V operátorovom tvare ide (2.6) zapísať ako

$$\Phi(B)X_t = \varepsilon_t,$$

kde

$$\Phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p). \quad (2.7)$$

Definícia 2.1 *Ak existuje absolutne konvergentná postupnosť reálnych čísiel $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ taká, že*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (2.8)$$

tak $AR(p)$ proces sa nazýva kauzálny.

Pretože (2.8) je lineárny proces, tak kauzálny $AR(p)$ proces je stacionárny. Kauzalita je ekvivalentná podmienke

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0 \text{ pre } \forall |z| \leq 1, \quad (2.9)$$

tj. všetky korene polynómu $\Phi(z)$ musia ležať mimo jednotkovej kružnice. Odvodenie tohoto záveru vypláva z rozkladu polynómu $\Phi(z)$ na súčin koreňových činiteľov a z rozkladu $\frac{1}{\Phi(z)}$ na parciálne zlomky. Podrobnosti je možné nájsť v Forbelská [6].

K odvodeniu autokorelačnej funkcie postupujeme obdobne ako v prípade $AR(1)$ procesu, tj. najskôr vynásobíme rovnicu (2.6) veličinou X_{t-k} pre $k \geq 0$ a spočítame strednú hodnotu a následne vydelením rozptylom $\gamma(0)$ získame autokorelačnú funkciu v tvare *Yule-Walkerových rovníc*. Platí

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho(1) - \dots - \phi_p \rho(p)}$$

a Yule-Walkerove rovnice majú tvar

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \dots + \phi_p \rho(k-p) \text{ pre } k \geq 1, \quad (2.10)$$

čo je možné zapísať v operátorovom tvare

$$\Phi(B)\rho(k) = 0, \quad (2.11)$$

kde $\Phi(B)$ je dané (2.7) a $B\rho(k) = \rho(k-1)$. Z teórie riešenia homogénnych diferenčných rovníc vyplýva, že riešením (2.11) je

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{s=0}^{p_j-1} c_{js} k^s \right) \lambda_j^k,$$

kde $\frac{1}{\lambda_j}$ sú rôzne korene polynómu $\Phi(z)$ s násobnosťami p_j a $p = \sum_{j=1}^m p_j$, c_{js} sú konštanty určené počiatočnými podmienkami. Pretože $|\lambda_j| < 1$, tak $\rho(k)$ je kombináciou exponenciálne klesajúcich pohybov a exponenciálne klesajúcich sinusoidných pohybov v závislosti na koreňoch polynómu $\Phi(z)$.

Tvar ϕ_{kk} závisí na oneskorení k . Ak $k \leq p$, tak ϕ_{kk} je rozdielna od nuly a pre $k > p$ je ϕ_{kk} rovné nule.

2.1.3 $MA(1)$ proces

Proces kľzavých priemerov rádu 1 je daný vzťahom

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (2.12)$$

Ak stredná hodnota procesu $\mu \neq 0$, tak $MA(1)$ proces má tvar

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

V operátorovom tvare sa dá zapísať ako

$$X_t = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t.$$

V podstate sa jedná o prípad lineárneho procesu, kde $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \theta_1$ a $\psi_k = 0$ pre $k > 1$. Takže model je tým pádom stacionárny.

Pokiaľ by sme si označili $\theta_1 = -\theta$, predpokladali $|\theta| < 1$ a postupne upravovali

$$\varepsilon_t = X_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

tak dostaneme

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^k \theta^j X_{t-j} + \theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}.$$

Pretože $|\theta| < 1$, tak $\theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}$ konverguje k nule pre $k \rightarrow \infty$ a

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j}.$$

V tomto prípade je ε_t vyjadrená prostredníctvom X_s pre $s \leq t$ a povieme, že proces je *invertibilný*. Pokiaľ by však $|\theta| > 1$, tak proces je neinvertibilný a ε_t je vyjadrené pomocou budúcich hodnôt X_s pre $s > t$.

Autokovariančná funkcia procesu (2.12) je

$$\gamma(k) = E(X_t X_{t-k}) = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2) & \text{ak } k = 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 \theta_1 & \text{ak } k = 1 \\ 0 & \text{ak } k > 1. \end{cases}$$

Autokorelačná funkcia má potom tvar

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & \text{ak } k = 1 \\ 0 & \text{ak } k > 1. \end{cases}$$

Poznamenajme, že existujú dva procesy s rovnakou ACF a to konkrétne proces (2.12) a proces

$$X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\theta_1} \varepsilon_{t-1},$$

avšak invertibilný je iba jeden z nich.

Parciálna autokorelačná funkcia procesu $MA(1)$ má tvar

$$\phi_{kk} = -\frac{(-\theta_1)^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}} \text{ ak } k \geq 1.$$

PACF sa správa podobne ako ACF $AR(1)$ procesu, tj. klesá exponenciálne k nule prípadne klesá k nule oscilačne.

2.1.4 $MA(q)$ proces

Proces klzavých priemerov rádu q je tvaru

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (2.13)$$

Opäť ak stredná hodnota procesu $\mu \neq 0$, potom proces má tvar

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Za pomoci operátora spätného posunu je možné (2.13) zapísať ako

$$X_t = \Theta(B)\varepsilon_t,$$

kde

$$\Theta(B) = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q). \quad (2.14)$$

Model $MA(q)$ taktiež vychádza z lineárneho procesu a je stacionárny.

Definícia 2.2 Ak existuje absolutne konvergentná postupnosť reálnych čísiel $\{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$ taká, že

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j},$$

tak $MA(q)$ proces sa nazýva invertibilný.

Invertibilita je ekvivalentná podmienke

$$\Theta(z) = (1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q) \neq 0 \text{ pre } |z| \leq 1, \quad (2.15)$$

tj. všetky korene polynómu $\Theta(z)$ musia ležať mimo jednotkového kruhu. Odvodenie je analogické ako v prípade kauzálneho $AR(p)$ procesu a podrobnosti je možné opäť nájsť v Forbelská [6].

Autokovariančná funkcia procesu (2.13) je

$$\gamma(k) = E(X_t X_{t-k}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^q \theta_j \theta_{j+k} = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 (1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2) & \text{ak } k = 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} & \text{ak } 1 \leq k \leq q \\ 0 & \text{ak } k > q, \end{cases}$$

pričom $\theta_0 = 1$. Autokorelačná funkcia má potom tvar

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} & \text{ak } 1 \leq k \leq q \\ 0 & \text{ak } k > q. \end{cases}$$

Dôležitá vlastnosť je, že ACF je pre $k > q$ nulová.

PACF je tvorená kombináciou exponenciálne klesajúcich pohybov a exponenciálne klesajúcich sinusoidných pohybov podobne ako ACF u $AR(p)$ procesov.

2.1.5 $ARMA(1, 1)$ proces

Zmiešaný $ARMA(1, 1)$ proces obsahuje zložku $AR(1)$ aj $MA(1)$ a je definovaný ako

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.16)$$

a v prípade $\mu \neq 0$ tvaru

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1},$$

kde $\phi_0 = \mu - \phi_1 \mu$. Za pomoci operátora spätného posunu má tvar

$$(1 - \phi_1 B)X_t = (1 + \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

Analogicky ako v prípade $AR(1)$ a $MA(1)$ si definujeme kauzalitu a invertibilitu procesu (2.16). Ak $|\phi_1| < 1$, tak povieme, že $ARMA(1, 1)$ proces je kauzálny a ak $|\theta_1| < 1$, tak proces je invertibilný (viď Brockwell, Davis [3]).

Odvozenie autokorelačnej funkcie vychádza z vynásobenia rovnice (2.16) veličinou X_{t-k} a z následného vypočítania jej strednej hodnoty (bližšie viď Cryer, Chan [4]). ACF je potom daná vzťahom

$$\rho(k) = \frac{(1 + \theta_1\phi_1)(\phi_1 + \theta_1)}{(1 + 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2)}\phi_1^{k-1} \text{ ak } k \geq 1.$$

Tvar ACF teda závisí na znamienku $\rho(1)$ a znamienku ϕ_1 . Ak $\phi_1 > 0$, tak klesá k nule exponenciálne a v prípade $\phi_1 < 0$ klesá k nule oscilačne. Tvar PACF v prípade $\phi_1 > 0$ klesá k nule oscilačne a v prípade $\phi_1 < 0$ klesá k nule exponenciálne.

2.1.6 $ARMA(p, q)$ proces

Tento proces je definovaný vzťahom

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.17)$$

a v operátorovom tvare ako

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.18)$$

kde $\Phi(B)$ je definované ako (2.7) a $\Theta(B)$ ako (2.14). Pokiaľ $\mu \neq 0$, tak (2.18) je tvaru

$$\Phi(B)X_t = \mu \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j \right) + \Theta(B)\varepsilon_t.$$

Proces je kauzálny ak platí (2.9) a invertibilný ak platí (2.15). Poznamenajme, že pokiaľ by $\Theta(z)$ a $\Phi(z)$ mali spoločné korene, tak je možné rády $ARMA(p, q)$ procesu znížiť.

Tvar ACF klesá k nule exponenciálne alebo oscilačne od oneskorenia q . Obdobne sa chová aj PACF, ktorá klesá k nule exponenciálne alebo oscilačne od oneskorenia p .

2.2 Modely nestacionárnych a sezónnych časových radov

Jedná sa o modeli charakterické prítomnosťou trendu prípadne sezónnej zložky. V oboch prípadoch predpokladáme ich stochastický charakter.

2.2.1 $ARIMA(p, d, q)$ proces

Integrovaný autoregresný proces kľzavých priemerov rádu p, d, q definujeme ako

$$\Phi(B)\Delta^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t.$$

Proces sa stáva stacionárnym diferencovaním rádu d , tj.

$$W_t = \Delta^d X_t,$$

kde W_t je stacionárny $ARMA(p, q)$. Vynechaním niektorých zložiek procesu môže vzniknúť $ARI(p, d)$, $IMA(d, q)$, $AR(p)$, $MA(q)$ a $I(d)$ proces.

Označme polynóm stupňa $p + d$ ako

$$\Gamma(z) = \Phi(z)(1 - z)^d.$$

Potom $\Gamma(z)$ má p koreňov ležiacich mimo jednotkového kruhu a d koreňov rovných 1. Práve tieto jednotkové korene spôsobujú nestacionaritu procesu a ACF $ARIMA(p, d, q)$ procesu má lineárne a pomaly klesajúci tvar.

2.2.2 $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ proces

Sezónny model s dĺžkou sezón S sa dá vyjadriť v tvare

$$\Phi(B)\Pi(B^S)(1 - B)^d(1 - B^S)^D X_t = \Theta(B)\Psi(B^S)\varepsilon_t, \quad (2.19)$$

kde $\Phi(B)$ je dané (2.7), $\Theta(B)$ je dané (2.14), $\Pi(B^S)$ ako

$$\Pi(B^S) = (1 - \pi_1 B^S - \dots - \pi_P B^{PS})$$

a $\Psi(B^S)$ ako

$$\Psi(B^S) = (1 + \psi_1 B^S + \dots + \psi_Q B^{QS}).$$

Kapitola 3

Proces tvorby modelu

Na to aby sme identifikovali správny model pre časovú radu je vhodné vytvoriť určitú postupnosť krokov. Jednotlivé kroky je možné zhrnúť nasledovne (podľa Greene [7]):

1. Vhodná transformácia dát za účelom dosiahnutia stacionárnej rady. Väčšinou sa jedná o prvé diferencie alebo logaritmy časovej rady. Do tohto kroku môžeme zahrnúť aj výber rádu modelov, tj. určiť hodnoty p , q a v prípade sezónnych modelov aj P a Q .
2. Odhad parametrov modelu.
3. Diagnostická kontrola zameraná hlavne na reziduá odhadnutého modelu, ktoré by mali vykazovať proces bieleho šumu. V prípade nevyhovujúceho modelu je nutné sa vrátiť na krok 1.
4. Použitie modelu na popisné účely a tvorbu predpovedí.

Táto kapitola vychádza najmä z knihy Heij et. al [8] a Enders [5]. Časti týkajúce sa identifikácie sezónnych modelov boli čerpané z Forbelská [6].

3.1 Transformácia dát a voľba rádu modelu

Na začiatok je vhodné si časovú radu vykresliť a pozrieť sa na prítomnosť trendu a variabilitu dát. Vykreslenie výberovej ACF nám tiež napomôže k identifikácii nestacionarity. Ak výberová ACF klesá pomaly a lineárne, tak aspoň jeden koreň polynómu (2.9) je blízky 1 a je vhodné urobiť diferencovanie časovej rady. Formálne je možné prítomnosť jednotkového koreňa testovať pomocou *Dickey-Fullerových testov*. Rozšírený Dickey-Fullerov test

vychádza z modelu

$$\Delta X_t = \alpha + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + \beta_2 \Delta X_{t-1} + \cdots + \beta_p \Delta X_{t-p+1} + \varepsilon_t. \quad (3.1)$$

Ak proces obsahuje jednotkový koreň, tak $\gamma = 0$. Ďalej nás môže zaujímať či $\gamma = \beta_1 = 0$ alebo $\alpha = \gamma = \beta_1 = 0$. Jedná sa v podstate o klasický t -test s testovou štatistikou

$$t = \frac{\gamma}{s_\gamma},$$

kde s_γ je smerodajná odchýlka parametru γ , prípadne F -test s testovou štatistikou

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_u)/r}{SSR_u/(n - k)},$$

kde SSR_r a SSR_u je súčet štvorcov reziduí obmedzeného a neobmedzeného modelu, r je počet obmedzení, n je počet pozorovaní a k je počet odhadovaných parametrov v neobmedzenom modeli, s tým rozdielom, že za platnosti nulovej hypotézy nemá t prípadne F -štatistika štandardné rozdelenie, ale tzv. *Dickey-Fullerovo rozdelenie*. Kritické hodnoty pre tieto testy boli tabelované Dickey a Fullerom. Model (3.1) je možné modifikovať vynechaním deterministického trendu $\beta_1 t$ alebo úrovňovej konštanty (driftu) α a testovať prítomnosť jednotkového koreňa prípadne odpovedajúce obmedzenia. Jednotlivé modely s nulovými hypotézami a k nim odpovedajúce kritické hodnoty s hladinou významnosti 5% pre rozsah 100 pozorovaní je obsahom tabuľky 3.1. Ďalšie kritické hodnoty pre rôzne hladiny významnosti a rozsahy je možné nájsť napríklad v Enders [5].

Tabuľka 3.1: Tabuľka Dickey-Fullerových testov

Model	Hypotéza	Kritická hodnota
$\Delta X_t = \alpha + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta X_{t-i+1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	-3,45
	$\gamma = \beta_1 = 0$	6,49
	$\alpha = \gamma = \beta_1 = 0$	4,88
$\Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta X_{t-i+1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	-2,89
	$\alpha = \gamma = 0$	4,71
$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta X_{t-i+1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	-1,95

Zdroj: Enders [5]

Dôležitým prvkom v Dickey-Fullerových testoch je stanovenie správneho počtu spoždení, tzn. určiť hodnotu p . Jednou z možností je začať s relatívne

veľkou hodnotou p a odhadnúť model. Klasickým t -testom sa otestuje štatistická významnosť koeficientu u posledného oneskorenia. Ak je nevýznamný, tak odhadneme model s hodnotou $p-1$ a opäť otestujeme štatistickú významnosť koeficientu u posledného oneskorenia. Takto pokračujeme až kým nie je koeficient štatisticky významný. Ďalšou možnosťou je použitie informačných kritérií, ktoré budú predstavené neskôr. Pri každej metóde sa je treba uistiť, že reziduá sa chovajú ako biely šum.

Možnosťou ako stabilizovať rozptyl je logaritmická transformácia prípadne obecná *Box-Coxova transformácia*

$$f_{\lambda}(X_t) = \begin{cases} \lambda^{-1}(X_t^{\lambda} - 1) & \text{ak } \lambda \neq 0 \\ \ln(X_t) & \text{ak } \lambda = 0. \end{cases}$$

Parameter λ sa získa metódou maximálnej vierohodnosti.

Na základe výberovej ACF a PACF môžeme určiť vhodné rády p a q porovnaním s teoretickými ACF a PACF popísanými v druhej kapitole. Tabuľka 3.2 obsahuje prehľad teoretických vlastností ACF a PACF pre rôzne procesy.

Výberová ACF a PACF nie je na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ významne rozdielna od nuly ak leží v intervale $< -2/\sqrt{n}, 2/\sqrt{n} >$. Týmto spôsobom môžu byť vybrané vhodné $AR(p)$ a $MA(q)$ modely, ale nie tak ľahko $ARMA(p, q)$ modely. Namiesto toho sa odhadnú rôzne $ARMA(p, q)$ modely a porovnávajú sa na základe minimalizácie informačných kritérií ako sú *Akaikeho informačné kritérium* (AIC), *Schwarzovo (Bayesovo) informačné kritérium* (SIC) a *Hannan-Quinnovo informačné kritérium* (HQIC). Akaikeho kritérium má tvar

$$\text{AIC} = n \ln(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2) + 2k,$$

kde $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ je odhad rozptylu náhodnej zložky ε_t a k je počet vysvetľujúcich premenných. Schwarzovo informačné kritérium má tvar

$$\text{SIC} = n \ln(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2) + k \ln(n)$$

a Hannan-Quinnovo informačné kritérium tvar

$$\text{HQIC} = n \ln(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2) + 2k \ln[\ln(n)].$$

Obecne sa dajú tieto informačné kritéria vyjadriť pomocou logaritmu vierohodnostnej funkcie, kde člen $n \ln(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2)$ je nahradený $-2 \ln(L)$, kde L je maximálna hodnota vierohodnostnej funkcie. Ďalšou možnosťou výberu vhodného modelu je, že každý koeficient by mal byť štatisticky významný na

Tabuľka 3.2: Vlastnosti ACF a PACF

Proces	ACF	PACF
Biely šum	$\rho(k) = 0$ pre $k \neq 0$	$\phi_{kk} = 0$ pre $k > 0$
$AR(1); \phi_1 > 0$	Exponenciálny pokles k nule	$\phi_{11} = \rho(1);$ $\phi_{kk} = 0$ pre $k \geq 2$
$AR(1); \phi_1 < 0$	Oscilačný pokles k nule	$\phi_{11} = \rho(1);$ $\phi_{kk} = 0$ pre $k \geq 2$
$AR(p)$	Pokles k nule (aj oscilačne)	$\phi_{kk} = 0$ pre $k > p$
$MA(1); \theta_1 > 0$	$\rho(1) > 0;$ $\rho(k) = 0$ pre $k \geq 2$	Oscilačný pokles; $\phi_{11} > 0$
$MA(1); \theta_1 < 0$	$\rho(1) < 0;$ $\rho(k) = 0$ pre $k \geq 2$	Exponenciálny pokles; $\phi_{11} < 0$
$MA(q)$	$\rho(k) = 0$ pre $k > q$	Pokles k nule (aj oscilačne)
$ARMA(1, 1); \phi_1 > 0$	Exponenciálny pokles od $k = 1;$ $\text{sgn}\rho(1) = \text{sgn}(\phi_1 + \theta_1)$	Oscilačný pokles od $k = 1; \phi_{11} = \rho(1)$
$ARMA(1, 1); \phi_1 < 0$	Oscilačný pokles od $k = 1;$ $\text{sgn}\rho(1) = \text{sgn}(\phi_1 + \theta_1)$	Exponenciálny pokles od $k = 1; \phi_{11} = \rho(1);$ $\text{sgn}(\phi_{kk}) = \text{sgn}(\phi_{11})$
$ARMA(p, q)$	Pokles (exponenciálny alebo oscilačný) začínajúci od $k = q$	Pokles (exponenciálny alebo oscilačný) začínajúci od $k = p$

Zdroj: Enders [5]

5% hladine významnosti prípadne pozrieť sa na významnosť koeficientov pri poslednom oneskorení.

V prípade sezónnych modelov sa opäť pozrieme na tvar $\hat{\rho}(k)$ a pokiaľ táto funkcia pre $k \in \{S, 2S, \dots\}$ pomaly klesá je nutné previesť sezónne diferencovanie ($D=1$). Ak je pomalý pokles výberovej ACF aj medzi jS a $(j+1)S$, tak tiež treba radu nesezónne diferencovať ($d=1$). Ak je $\hat{\rho}(k)$ pre $k \in \{1, \dots, q, S-q, \dots, S+q, \dots, QS-q, \dots, QS+q\}$ významne rozdielna od nuly, v ostatných prípadoch sa významne nelíši od nuly a pokiaľ výberová PACF medzi jS a $(j+1)S$ klesá prípadne oscilačne klesá a aj v bodoch jS klesá tak volíme model $SARIMA(0, d, q) \times (0, D, Q)_S$. Pokiaľ $\hat{\rho}(k)$ klesá prípadne oscilačne klesá medzi jS a $(j+1)S$, klesá v bodoch jS a ϕ_{kk} je významne nenulová pre $k \in \{1, \dots, p, S, \dots, S+p, \dots, PS, \dots, PS+p\}$ a v ostatných prípadoch sa významne nelíši od nuly tak volíme model $SARIMA(p, d, 0) \times (P, D, 0)_S$. Voľba obecných modelov $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ nie je jednoduchá a opäť je možno využiť informačných kritérií.

3.2 Odhad parametrov modelu

V prípade $AR(p)$ modelu sa jedná o regresný model a je možné použiť klasický odhad metódou najmenších štvorcov. Ak sa bude jednať o $MA(q)$ alebo $ARMA(p, q)$ model využijeme metódu *maximálnej vierohodnosti*. Predpokladajme, že náhodné chyby ε_t sú normálne rozdelené so strednou hodnotou 0 a rozptylom σ_ε^2 , tj. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, tak podmienená (prvých p počiatočných hodnôt považujeme za fixných) logaritmickej vierohodnostná funkcia procesu $ARMA(p, q)$ je daná

$$\ln(L(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)) = -\frac{n-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{n-p}{2} \ln(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2.$$

Maximálne vierohodné odhady odpovedajú maximalizácii tejto funkcie vzhľadom k neznámym parametrom.

3.3 Diagnostická kontrola

Diagnostická kontrola sa týka testovania predpokladov kladených na náhodnú zložku, konkrétne $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a schopnosti modelu predikovať adekvátne výsledky. Ako prvý vhodný nástroj na overenie nekorelovanosti, konštantného rozptylu a normality nám pomôže vykreslenie grafu reziduí, ACF reziduí a histogramu reziduí. V správne špecifikovanom modeli by reziduí mali byť nekorelované a teda ACF reziduí by mali byť v intervale

$< -2/\sqrt{n}, 2/\sqrt{n} >$. Ďalšou možnosťou je testovanie nulovosti prvých m autokorelácií pomocou *Ljung-Boxova* testu, ktorého testová štatistika má tvar

$$LB = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{(\hat{\rho}(k))^2}{n-k}.$$

Za platnosti nulovej hypotézy (prvých m autokorelácií je rovných 0) má testová štatistika asymptoticky $\chi^2(m)$ rozdelenie. Ak hodnota LB prekročí kritickú hodnotu, tak aspoň jedna hodnota $\rho(k)$ je štatisticky rozdielna od nuly na danej hladine významnosti.

Pre test konštantného rozptylu (homoskedasticity) náhodnej zložky existuje viacero testov. Uvedieme si test *podmienenej heteroskedasticity* náhodnej zložky. Pre tento test použijeme regresiu

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + \varepsilon_t, \quad (3.2)$$

kde $\hat{\varepsilon}_t, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-q}$ sú reziduá a štatistiku

$$LM = nR^2,$$

kde R^2 je koeficient determinácie regresie (3.2). Za platnosti nulovej hypotézy (homoskedasticity) má štatistika asymptoticky $\chi^2(q)$ rozdelenie.

Na otestovanie normality náhodnej zložky použijeme *Jarque-Berov* test, ktorý je založený na tom, že normálne rozdelenie má šikmosť 0 a špičatosť 3. Testová štatistika má tvar

$$JB = \left(\sqrt{\frac{n}{6}} S \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{n}{24}} (K - 3) \right)^2,$$

kde

$$S = m_3 / (m_2)^{3/2}, \quad K = m_4 / m_2^2$$

a

$$m_j = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\varepsilon}_i^j}{n}.$$

Za platnosti nulovej hypotézy (šikmosť $S = 0$ a špičatosť $K = 3$) má štatistika asymptoticky $\chi^2(2)$ rozdelenie.

3.4 Tvorba predpovedí

Majme kauzálny a invertibilný $ARMA(p, q)$ proces daný vzťahom (2.18). Potom proces môžeme zapísať v tvare

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \Psi(B) \varepsilon_t$$

a platí

$$\Phi(z)\Psi(z) = \Theta(z).$$

Z invertibility procesu vyplíva, že ε_t sú známe pre $t \leq n$ a teda akákoľvek h -kroková lineárna predpoveď môže byť zapísaná v tvare

$$\hat{X}_{n+h} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \varepsilon_{n-k}.$$

Stredná kvadratická chyba predikcie má potom tvar

$$E(X_{n+h} - \hat{X}_{n+h})^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2 + \sum_{k=h}^{\infty} (\psi_k - \beta_{k-h})^2 \right) \quad (3.3)$$

a $\psi_0 = 1$. Táto chyba je minimálna pokiaľ $\beta_{k-h} = \psi_k$ pre $k \geq h$, takže h -kroková predpoveď s minimálnou stredne kvadratickou chybou je

$$\hat{X}_{n+h} = E(X_{n+h} | X_n, X_{n-1}, \dots) = \psi_h \varepsilon_n + \psi_{h+1} \varepsilon_{n-1} + \dots,$$

pretože

$$E(\varepsilon_{n+j} | X_n, X_{n-1}, \dots) = \begin{cases} \varepsilon_{n+j} & \text{ak } j \leq 0 \\ 0 & \text{ak } j > 0. \end{cases}$$

Z (3.3) plynie, že rozptyl predpovedi je

$$D(X_{n+h} - \hat{X}_{n+h}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2.$$

V prípade normálne rozdeleného stochastického procesu je 95% predpovedný interval pre X_{n+h}

$$\hat{X}_{n+h} - 1,96\sqrt{D(X_{n+h} - \hat{X}_{n+h})} \leq X_{n+h} \leq \hat{X}_{n+h} + 1,96\sqrt{D(X_{n+h} - \hat{X}_{n+h})}.$$

Pri praktických výpočtoch predpovedí sa vychádza zo vzťahu

$$\hat{X}_{n+h} = E(X_{n+h} | X_n, X_{n-1}, \dots),$$

kde namiesto neznámych hodnôt parametrov sa dosadia ich odhady.

Predikčné schopnosti modelu je možné hodnotiť na základe počtu m pozorovaní, ktoré boli vyhodnené z výberu (neboli použité na odhad modelu) a nachádzajú sa vnútri 95% predpovedného intervalu. Ďalšou možnosťou je porovnávať predikčné schopnosti modelov pomocou odmocniny zo *strednej kvadratickej chyby predikcie* (root mean squared prediction error) alebo

priemernej absolútnej chyby predikcie (mean absolute prediction error) a sú definované nasledovne

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{h=1}^m (X_{n-m+h} - \hat{X}_{n-m+h})^2},$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m |X_{n-m+h} - \hat{X}_{n-m+h}|.$$

Predikčnú schopnosť dvoch modelov je možné testovať aj na základe nevychýlenosti predpovedí. Najskôr odhadneme obidva modeli na základe prvých $n - m$ pozorovaní, kde n je celkový počet pozorovaní a m je počet vynechaných pozorovaní. Následne spravíme jednokrokovú predpoveď X_{n-m+1} u oboch modelov. Predpoveď prvého modelu označíme f_{11} a druhého f_{21} . V ďalšom kroku znova odhadneme obidva modeli, ale teraz na základe prvých $n - m + 1$ pozorovaní a spravíme jednokrokové predpovede, ktoré označíme f_{12} pre prvý model a f_{22} pre druhý model. Týmto spôsobom pokračujeme až do poslednej predpovede X_n . Celkovo teda budeme mať postupnosť predpovedí prvého modelu $\{f_{1i}\}_{i=1}^m$ a druhého modelu $\{f_{2i}\}_{i=1}^m$. Nakoniec odhaneme model

$$X_{n-m+i} = \alpha + \beta f_{1i} + \varepsilon_{1i}$$

a

$$X_{n-m+i} = \gamma + \delta f_{2i} + \varepsilon_{2i}.$$

Ak sú predpovede nevychýlené, tak F -test by nemal zamietnuť združenú hypotézu, že $\alpha = 0$ a $\beta = 1$ prípadne $\gamma = 0$ a $\delta = 1$. V prípade nezamietnutia nevychýlenosti u oboch modelov sa vyberie model s nižším rozptylom náhodnej zložky.

Kapitola 4

Simulácia

Na určenie vhodného modelu pre analyzovanú časovú radu máme niekoľko možností. Môžeme použiť informačné kritéria, predikčné kritéria, štatistickú významnosť regresných koeficientov alebo tvar ACF a PACF. V tejto kapitole sa prostredníctvom Monte Carlo simulácie pozrieme na schopnosť jednotlivých kritérií pri výbere modelov. Na simulácie sme použili program MATLAB a všetky trvali dokopy minimálne týždeň čistého času, čo je 168 hodín. Je otázkou, koľko času bolo potrebné v 70. rokoch 20. storočia na určenie kritických hodnôt Dickey-Fullerových testov pri vtedajších výkonoch počítačov.

Najskôr si popíšeme ako sme postupovali. Na začiatku sme vygenerovali $n = 50$ alebo $n = 1000$ pseudo-náhodných čísiel e_t z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a rozptylom 1. Následne sme vygenerovali časovú radu spĺňajúcu $AR(1)$ proces v tvare

$$X_t = 0,2X_{t-1} + e_t,$$

$AR(2)$ proces v tvare

$$X_t = 0,2X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + e_t,$$

$AR(5)$ proces v tvare

$$X_t = 0,2X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + 0,3X_{t-3} + 0,1X_{t-4} - 0,3X_{t-5} + e_t,$$

$MA(1)$ proces v tvare

$$X_t = 2e_{t-1} + e_t,$$

$MA(2)$ proces v tvare

$$X_t = 2e_{t-1} - 0,5e_{t-2} + e_t,$$

$MA(5)$ proces v tvare

$$X_t = 6e_{t-1} - 2e_{t-2} + 2, 2e_{t-3} + 0, 1e_{t-4} - 0, 3e_{t-5} + e_t,$$

$ARMA(1, 1)$ proces v tvare

$$X_t = 0, 2X_{t-1} - 0, 6e_{t-1} + e_t,$$

a $ARMA(2, 2)$ proces v tvare

$$X_t = 0, 2X_{t-1} - 0, 6X_{t-2} + 2e_{t-1} - 1, 2e_{t-2} + e_t.$$

Počiatkové hodnoty sme stanovili na hodnotu 0. V ďalšom kroku sme odhadli 14 modelov a to konkrétne $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$, $AR(4)$, $AR(5)$, $MA(1)$, $MA(2)$, $MA(3)$, $MA(4)$, $MA(5)$, $ARMA(1, 1)$, $ARMA(1, 2)$, $ARMA(2, 1)$ a $ARMA(2, 2)$ model. Tento celý postup sme zopakovali ešte 1000 krát (spravili 1000 iterácií).

4.1 Simulácia-všetky modely

Výsledky simulácií sú v prílohe v tabuľkách A.1 až A.16. V stĺpcoch máme jednotlivé kritéria a v riadkoch odhadované modely. Predikčné kritéria boli počítané na základe jednokrokových predikcií od 10 pozorovania s použitím koeficientov získaných z odhadnutého modelu na celej dĺžke časovej rady. Každý stĺpec je ešte rozdelený na 3 časti A/B/C, kde A znamená, že vyberáme medzi všetkými odhadnutými modelmi, B znamená, že vyberáme iba medzi modelmi, ktoré majú koeficient u posledného oneskorenia štatisticky významný, tj. v prípade $AR(p)$ procesu musí byť štatisticky významný koeficient u X_{t-p} , u $MA(q)$ procesu štatisticky významný koeficient u ε_{t-q} a u $ARMA(p, q)$ procesu musia byť štatisticky významné koeficienty u X_{t-p} a ε_{t-q} . C znamená, že vyberáme iba medzi modelmi, ktoré majú všetky koeficienty štatisticky významné okrem úrovňovej konštanty. Čísla v tabuľke nám značia počty vybraných modelov a zvýraznené čísla označujú najväčšiu hodnotu v danom stĺpci a časti. Len pre ujasnenie sa pozrime na tabuľku A.1. Časová rada bola generovaná $AR(1)$ procesom s 50 pozorovaniami. Hodnota 8 v stĺpci AIC, časti B a riadku $AR(2)$ znamená, že 8 $AR(2)$ modelov, ktoré majú koeficient u posledného oneskorenia štatisticky významný, bolo vybraných podľa Akaikeho informačného kritéria. Posledný riadok Suma v tisícoch nám dáva súčet stĺpca a jednotlivých častí. Konkrétne v našom prípade to je 865. Toto číslo nie je rovné 1000, tak nám to tiež podáva informáciu, že v 135 iteráciách žiadny zo 14 odhadovaných modelov nemal štatisticky významný koeficient u posledného oneskorenia. Hodnota 58

v stĺpci UNBIASED, časti C a riadku $AR(1)$ znamená, že 58 $AR(1)$ modelov, ktoré majú všetky koeficienty okrem úrovňovej konštanty štatisticky významné, bolo vybraných na základe nevychýlených jednokrokových predpovedí.

Pozrime sa teraz na konkrétne výsledky z tabuliek A.1 až A.16, ktoré sú v prílohe. V prípade generovanej časovej rady $AR(1)$ procesom s 50 pozorovaniami najlepšie výsledky medzi informačnými kritériami dosiahlo Schwarzovo informačné kritérium, ktoré trafilo skutočný proces 392/105/108 krát. Avšak podobné čísla nám poskytuje aj model $MA(1)$ a najväčšie počty v časti B/C dosahuje model $ARMA(2, 2)$. Najhoršie výsledky dosahovalo Akaikeho informačné kritérium. Vidíme tiež, že v 135 iteráciách ani jeden z modelov nemal posledný koeficient štatisticky významný a v 293 iteráciách ani jeden z modelov nemal všetky koeficienty okrem úrovňovej konštanty štatisticky významné. Predikčné kritéria vo väčšine prípadov uprednostnili $ARMA(2, 2)$ model alebo $MA(5)$ model. Čo sa týka simulácie s $n = 1000$, tak takmer všetky kritéria uprednostňujú $AR(1)$ model až na časť A u RMSE a MAE, ktoré uprednostili $MA(5)$ model. Ovšem u predikčných kritérií je ich relatívna početnosť veľmi nízka. Najlepšie opäť dopadlo Schwarzovo informačné kritérium.

U časovej rady generovanej $AR(2)$ procesom s 50 pozorovaniami najlepšie výsledky medzi informačnými kritériami dosiahlo opäť Schwarzovo informačné kritérium, ktoré vybralo skutočný model 508/517/202 krát a najhoršie dopadlo Akaikeho informačné kritérium. Oproti generovanému $AR(1)$ procesu sa nám teda o niečo zvýšila relatívna početnosť pre výber skutočného modelu. U predikčných kritérií sú uprednostňované $AR(2)$, $MA(1)$ a $MA(5)$ modely, ale relatívna početnosť nepresahuje ani 50%. Simulácia s $n = 1000$ uprednostňuje vo väčšine $AR(2)$ model okrem časti A u predikčných kritérií, kde bol vybraný model $AR(5)$. Najlepšie opäť dopadlo Schwarzovo informačné kritérium, kde relatívna početnosť je rovná 99,1%.

Simulácia $AR(5)$ procesu s 50 pozorovaniami dopadla veľmi rozpačito. Vo väčšine prípadov najviac krát bol vybraný $ARMA(2, 2)$ model s relatívnymi početnosťami od 32,4% do približne 60%. Jedine predikčné kritéria v časti A vybrali $AR(5)$ model s relatívnou početnosťou nad 50%. Simulácia s $n = 1000$ dopadla naproti tomu veľmi dobre. Všetky kritéria vybrali $AR(5)$ model s relatívnou početnosťou nad 87% a v niektorých prípadoch až 100%.

V prípade časovej rady generovanej $MA(1)$ procesom s 50 pozorovaniami vo väčšine prípadov bol vybraný $MA(1)$ model. Jedine predikčné kritéria v časti A vybrali najviac krát $MA(5)$ model. Najlepšie dopadlo Schwarzovo informačné kritérium, kde sa relatívna početnosť $MA(1)$ modelu pohybovala okolo 61% až 64%. Čo sa týka $n = 1000$, tak najviac krát boli vybrané $MA(1)$ a $MA(5)$ modely rovnako ako v prípade $n = 50$, ale s

omnoho vyššími relatívnymi početnosťami u informačných kritérií. Veľmi dobre obstálo Schwarzovo a Hannan-Quinnovo informačné kritérium, kde sa relatívna početnosť pohybovala nad úrovňou 90%. Horšie to je už s Akaikeho informačným kritériom, kde sa relatívna početnosť pohybuje pod 75%.

V simulovanej časovej rade spĺňajúcej $MA(2)$ proces Akaikeho informačné kritérium najviac krát vybralo $ARMA(2, 2)$ proces s počtami 192/248/220, Schwarzovo informačné kritérium najviac krát vybralo $MA(1)$ model s počtami 540/243/268. Ostatné kritéria vybrali najviac krát $MA(1)$, $MA(5)$ a $ARMA(2, 2)$ modely s relatívnymi početnosťami pod 50%. Žiadne kritérium však neobsahuje výber $MA(2)$ modelu s početnosťou vyššou ako 10%. Pre $n = 1000$ je situácia opačná, ale nie veľmi dobrá. Takmer všetky kritéria vybrali najviac krát $MA(2)$ model, len predikčné kritéria v časti A vybrali nviac krát $AR(5)$ model. Relatívna početnosť je vo všetkých prípadoch pod 50% a najlepšie dopadlo Hannan-Quinnovo informačné kritérium s počtami 490/489/490.

Pre simuláciu $MA(5)$ procesu s $n = 50$ nie sú výsledky veľmi priaznivé. Akaikeho informačné kritérium vybralo najviac krát $ARMA(2, 2)$ model s počtami 235/277/266. Schwarzovo informačné kritérium vybralo najviac krát $AR(1)$ a $MA(2)$ model s relatívnymi početnosťami pod 50%. Hannan-Quinnovo informačné kritérium vybralo v prípade A $AR(1)$ model s relatívnou početnosťou 29,6% a v prípade B/C vybralo $ARMA(2, 2)$ model. Jedine predikčné kritéria vybrali najviac krát $MA(5)$ model v prípade A, kde sa relatívna početnosť pohybovala od 37,9% do 48,2%. V prípadoch B/C predikčné kritéria najviac krát vybrali $ARMA(2, 2)$ model s relatívnymi početnosťami okolo 30%. Pre $n = 1000$ to nie je o moc lepšie. $MA(5)$ model najviac krát vybrali iba predikčné kritéria v časti A a najlepšie výsledky dosiahlo RMSE a MAE s početnosťou približne 56%. Schwarzovo informačné kritérium s počtami 658/658/667 vybralo $MA(2)$ model. Ostatné kritéria vybrali modely s relatívnymi početnosťami pod 35%.

V prípade generovanej časovej rady $ARMA(1, 1)$ procesom s 50 pozorovaniami takmer všetky kritéria najviac krát vybrali $MA(1)$ model, len predikčné kritéria v prípade A vybrali najviac krát $MA(5)$ model. Schwarzovo informačné kritérium vybralo $MA(1)$ model 574/534/553 krát a RMSE vybralo $MA(5)$ model v časti A 498 krát. $ARMA(1, 1)$ model bol vo všetkých kritériách vybraný s relatívnou početnosťou nižšou ako 25%. Pre $n = 1000$ sa situácia v prospech výberu $ARMA(1, 1)$ modelu trošku zlepšila. Akaikeho kritérium ho vybralo s počtami 343/337/375 a Hannan-Quinnovo kritérium ho vybralo s počtami 438/440/455. Schwarzovo informačné kritérium naďalej najviac krát vybralo $MA(1)$ model. Predikčné kritéria vyberali $ARMA(1, 1)$ model s relatívnou početnosťou nižšou ako 21%.

Posledný simulovaný proces je $ARMA(2, 2)$. Pre $n = 50$ všetky informačné

kritéria vybrali $ARMA(2, 2)$ model s relatívnou početnosťou nižšou ako 16, 5%. V informačných kritériách boli najviac krát vyberané v prípade A a B $AR(2)$ modely a v prípade C $MA(1)$ modely. Predikčné kritéria v závislosti na A/B/C najviac vybrali $AR(2)$, $MA(1)$ a $MA(5)$ modely s relatívnymi početnosťami nižšími ako 45%. Pre $n = 1000$ takmer všetky kritéria najviac krát vybrali $ARMA(2, 2)$ model. Iba Schwarzovo a Hannan-Quinnovo informačné kritérium v prípade C vybrali najviac krát $AR(2)$ model. Relatívne početnosti však nepresiahli 70%.

4.2 Simulácia-vybrané modely

Ako vidíme spoliehať sa čisto iba na jednotlivé kritéria by nie vždy viedlo k voľbe správneho modelu. I keď v niektorých prípadoch pre $n = 1000$ boli výsledky veľmi dobré, tak v praxi s takým množstvom pozorovaní moc často nepracujeme. V skutočnosti máme ešte veľmi užitočnú ACF a PACF pomocou ktorých vyberieme pár potenciálnych modelov a až následne na výber konečného modelu použijeme niektoré z kritérií. Na ukážku sme ešte raz generovali časové rady splňajúce rovnaké procesy ako vyššie spomínané, ale odhadovali sme iba tie potenciálne modely akou bola časová rada generovaná. Keď sme generovali $AR(p)$ proces, tak sme odhadovali iba $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$, $AR(4)$ a $AR(5)$ model. Ak bol generovaný $MA(q)$ model, tak sme odhadovali iba $MA(1)$, $MA(2)$, $MA(3)$, $MA(4)$ a $MA(5)$ model. Nakoniec ak sa jednalo o $ARMA(p, q)$ proces, tak sme odhadovali $ARMA(1, 1)$, $ARMA(1, 2)$, $ARMA(2, 1)$ a $ARMA(2, 2)$ model. Výsledky sú v prílohe v tabuľkách B.1 až B.16.

Pre simuláciu $AR(1)$ procesu s $n = 50$ takmer všetky kritéria vybrali generovaný proces až na predikčné kritéria v prípade A. Tie vybrali $AR(5)$ proces. Najlepšie výsledky dosiahlo Schwarzovo informačné kritérium, kde v prípade A vybralo $AR(1)$ model s relatívnou početnosťou nad 92%. Z tabuľky tiež vidíme, že v 679 iteráciách žiadny z 5 odhadovaných modelov nemal štatisticky významný koeficient u posledného oneskorenia a v 793 iteráciách nemal žiadny model všetky koeficienty štatisticky významné okrem úrovňovej konštanty. V prípade $n = 1000$ vždy aspoň 1 model mal štatisticky významný koeficient u posledného oneskorenia a tak isto aspoň jeden model mal všetky koeficienty štatisticky významné okrem úrovňovej konštanty. Opäť dopadlo najlepšie Schwarzovo informačné kritérium s relatívnou početnosťou 99,2%.

U simulovaného $AR(2)$ procesu s $n = 50$ opäť takmer všetky kritéria vybrali generovaný proces až na predikčné kritéria v prípade A, ktoré vybrali $AR(5)$ proces. Najlepšie dopadlo opäť Schwarzovo informačné kritérium, ktoré vybralo $AR(2)$ model s relatívnou početnosťou nad 87% vo všetkých 3

prípadoch. Pre $n = 1000$ nám najlepšie výsledky taktiež podáva Schwarzovo kritérium, kde relatívna početnosť je 98,8% vo všetkých 3 prípadoch.

Čo sa týka simulovaného $AR(5)$ procesu s $n = 50$, tak výber modelu nie je až tak jednoznačný. Akaikeho informačné kritérium vybralo $AR(5)$ model s počtami 597/419/0. Schwarzovo informačné kritérium uprednostňovalo $AR(3)$ model s počtami 498/490/237. Hannan-Quinnovo informačné kritérium a predikčné kritéria uprednostňovali $AR(3)$ a $AR(5)$ model. V prípade $n = 1000$ je situácia jednoznačná. Všetky kritéria jednoznačne vybrali $AR(5)$ model.

Pre simuláciu $MA(1)$ procesu s $n = 50$ dávalo najlepšie výsledky Schwarzovo informačné kritérium, ktoré vybralo $MA(1)$ model s počtami 892/810/-846. Ostatné informačné kritéria taktiež vybrali $MA(1)$ model, ale s niečo horšími výsledkami. Predikčné kritéria vyberali $MA(1)$ model okrem prípadu A, kde uprednostnili $MA(5)$ model. Pre $n = 1000$ dopadlo najlepšie Schwarzovo informačné kritérium, ktoré vybralo $MA(1)$ model s relatívnymi početnosťami okolo 99,4%.

V simulácii $MA(2)$ procesu s $n = 50$ všetky informačné kritéria uprednostňujú $MA(1)$ model. Predikčné kritéria uprednostňujú $MA(5)$ model v prípade A a B. V prípade C najviac krát vyberali $MA(1)$ model. Skutočný model bol vo všetkých kritériách uprednostňovaný len s malými počtami. V prípade $n = 1000$ hovoria výsledky už v prospech výberu $MA(2)$ modelu. Jedine predikčné kritéria uprednostňovali $MA(5)$ model. Najlepšie výsledky podávalo Hannan-Quinnovo informačné kritérium, ktoré vybralo $MA(2)$ model s počtami 825/823/835.

U simulácie $MA(5)$ procesu s $n = 50$ sa výsledky prikláňajú na stranu $MA(2)$ procesu s relatívnymi početnosťami do 60%. Jedine predikčné kritéria v prípade A vyberali najviac krát $MA(5)$ proces. Relatívne početnosti sa pohybovali od 64,4% do 92,2%. Pre $n = 1000$ iba predikčné kritéria v prípade A vybrali najviac krát $MA(5)$ model. Najväčšia relatívna početnosť je u RMSE a to 99,2%. Ostatné kritéria v ostatných prípadoch preferovali $MA(2)$, $MA(3)$ alebo $MA(4)$ model.

Pre simulovaný $ARMA(1,1)$ proces všetky informačné kritéria najviac krát vyberali generovaný proces vo všetkých prípadoch. Predikčné kritéria v niektorých prípadoch uprednostňujú aj $ARMA(2,2)$ model. Najlepšie výsledky podáva Schwarzovo informačné kritérium, ktoré generovaný proces vybral s relatívnou početnosťou nad 55% vo všetkých prípadoch a v prípade A až 83,9%. Pre $n = 1000$ takmer všetky kritéria uprednostňovali generovaný proces až na predikčné kritéria v prípade A, ktoré uprednostňujú $ARMA(2,2)$ model. Najlepšie výsledky vo všetkých prípadoch dáva Schwarzovo informačné kritérium s relatívnymi početnosťami nad 90%.

V simulácii $ARMA(2,2)$ procesu s $n = 50$ takmer všetky kritéria upred-

nostňujú $ARMA(2, 1)$ model až na predikčné kritéria v prípade A, ktoré najviac krát vybrali generovaný proces. Pre $n = 1000$ je situácia o poznanie lepšia. Všetky kritéria najviac krát vybrali generovaný proces. Počty sú takmer rovnaké, ale spomedzi informačných kritérií je na tom najlepšie Akaikeho informačné kritérium s počtami 996/989/460 a spomedzi predikčných kritérií RMSE prípadne UNBIASED s počtami 1000/989/460.

Na záver tejto kapitoly je možné povedať, že pri výbere vhodného modelu je dobré sa najskôr pozrieť na tvary výberovej ACF a PACF a vybrať potenciálne modely, ktoré sa odhadnú a na základe Schwarzovho informačného kritéria, ktorý podával najlepšie výsledky, sa vyberie najvhodnejší model. Treba však dodať, že pri výbere modelu hrá dôležitú úlohu dĺžka časovej rady, ktorá v praxi často nepresahuje ani 100 pozorovaní a aj preto je výber modelu vo väčšine prípadov robený na základe skúseností, intuície a subjektívneho posúdenia analytika.

Kapitola 5

Analýza vybraných časových radov

V poslednej kapitole si vybudovanú teóriu z prvých troch kapitol aplikujeme na reálne dáta. Konkrétne sa bude jednať o dáta HDP a miery nezamestnanosti Česka a výmenného kurzu CZK/EUR. Na všetky odhady a prezentované výsledky sme opäť použili program MATLAB. Najskôr si ale popíšeme jednotlivé dáta.

5.1 Popis dát

Dáta HDP a miery nezamestnanosti pochádzajú z webovej stránky OECD¹ a výmenný kurz zo stránky ČNB².

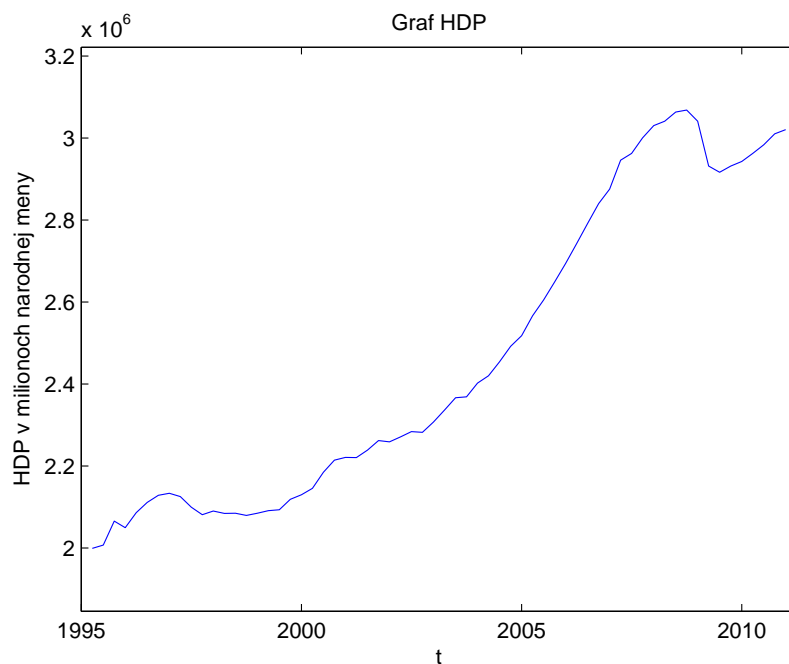
HDP Česka je štvrťročný a začína 1. štvrťročím roku 1995 a končí 4. štvrťročím roku 2010. Časová rada tak obsahuje celkovo 64 pozorovaní. Graf vývoja je na obrázku 5.1. Z grafu vidieť prítomnosť rastúceho trendu s prepadom HDP po roku 2008 v dôsledku krízy. Je zrejmé, že dáta budú nestacionárne a bude nutné ich pred ďalšou analýzou transformovať.

Časová rada miery nezamestnanosti Česka je taktiež štvrťročná a začína 1. štvrťročím roku 1993 a končí 4. štvrťročím roku 2010. Má tak celkovo 72 pozorovaní a jej vývoj je na obrázku 5.2. Z grafu nie je na prvý pohľad zrejmé či bude nutné radu stacionarizovať a bude potrebné si to overiť príslušnými nástrojmi. Miera nezamestnanosti po celú dobu neprekročila 10% a pohybovala sa zhruba od 3,5% do 9,2%.

Dáta výmenného kurzu CZK/EUR sú mesačné priemery a začínajú januárom roku 2000 a končia decembrom roku 2010. K dispozícii tak máme celkom

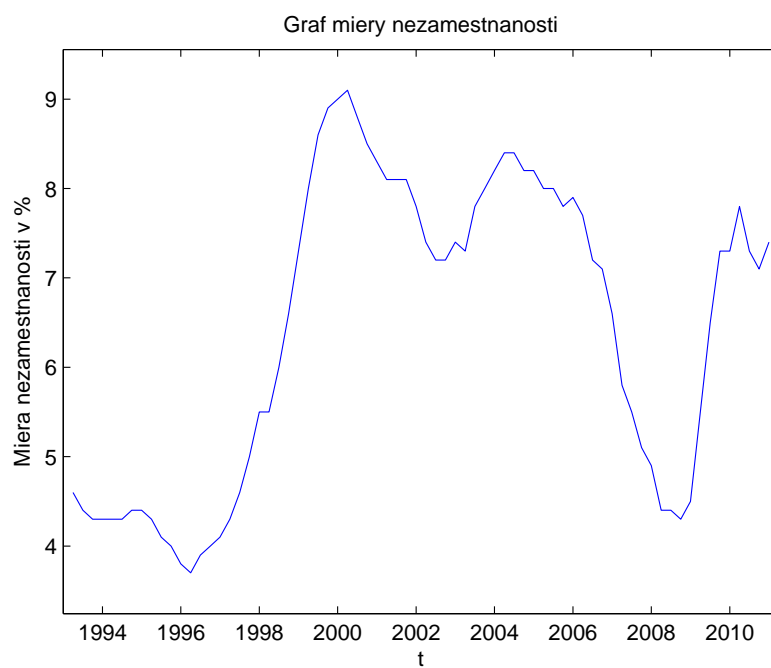
¹<http://stats.oecd.org/>

²<http://www.cnb.cz/>

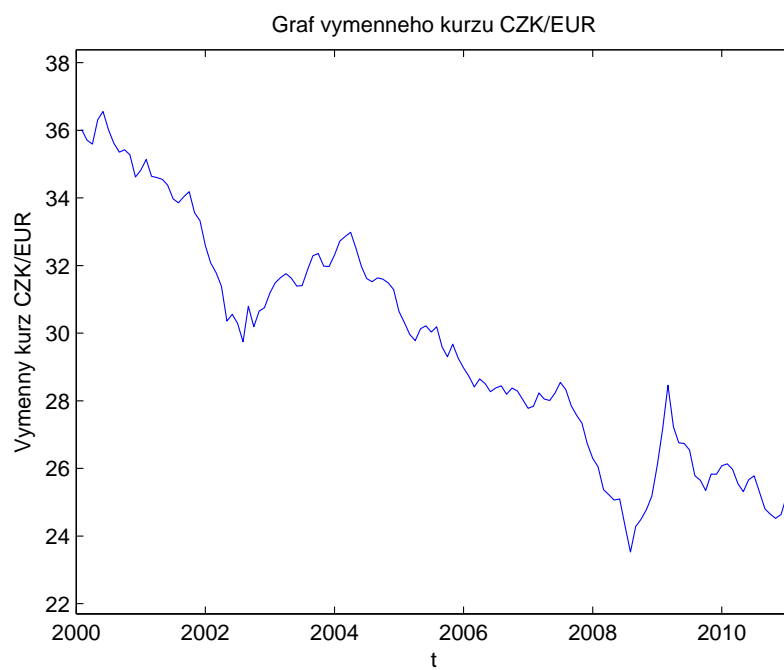


Obr. 5.1: Graf vývoja HDP Česka

132 pozorovaní. Graf vývoja kurzu je na obrázku 5.3. Z grafu vidieť postupné zhodnocovanie kurzu českej koruny voči euru. Koruna bola najsilnejšia po roku 2008, keď sa kurz dostal pod hranicu 24 korún za euro. Dáta bude zrejme nutné transformovať.



Obr. 5.2: Graf vývoja miery nezamestnanosti Česka

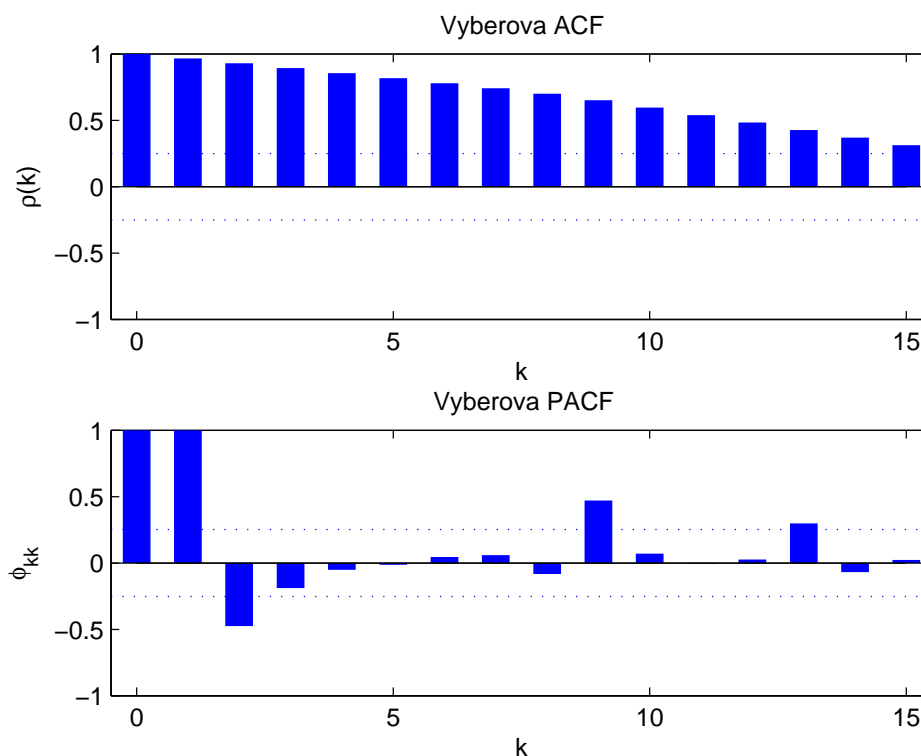


Obr. 5.3: Graf vývoja výmenného kurzu CZK/EUR

5.2 Transformácia dát

Ako sme už spomínali u HDP a výmenného kurzu bude nutná transformácia avšak v prípade miery nezamestnanosti to nie je celkom zrejmé. Preto aplikujeme nástroje, ktoré nám to potvrdia prípadne vyvrátia. Budeme používať výberovú ACF, PACF a Dickey-Fullerove testy jednotkového koreňa. V celej práci budú testy vždy prevedené na hladine významnosti 5%.

Graf výberovej ACF a PACF pre časovú radu HDP Česka je na obrázku 5.4. Z tvaru ACF je zrejmé, že je prítomná silná autokorelácia až do oneskorenia 15 a všetky autokorelácie sú štatisticky rozdielne od 0. V tabuľke 5.1 a riadku HDP CZ sú uvedené hodnoty jednotlivých testových štatistík postupne pre test jednotkového koreňa s úrovňovou konštantou a deterministickým trendom, iba s úrovňovou konštantou a bez deterministického trendu a úrovňovej konštanty. Za lomítkom hodnota 0 znamená, že rada je nestacionárna a 1 značí radu stacionárnu. Dickey-Fullerove testy nám potvrdzujú prítomnosť jednotkového koreňa. Spolu s grafom ACF môžeme konštatovať, že radu je nutné transformovať.

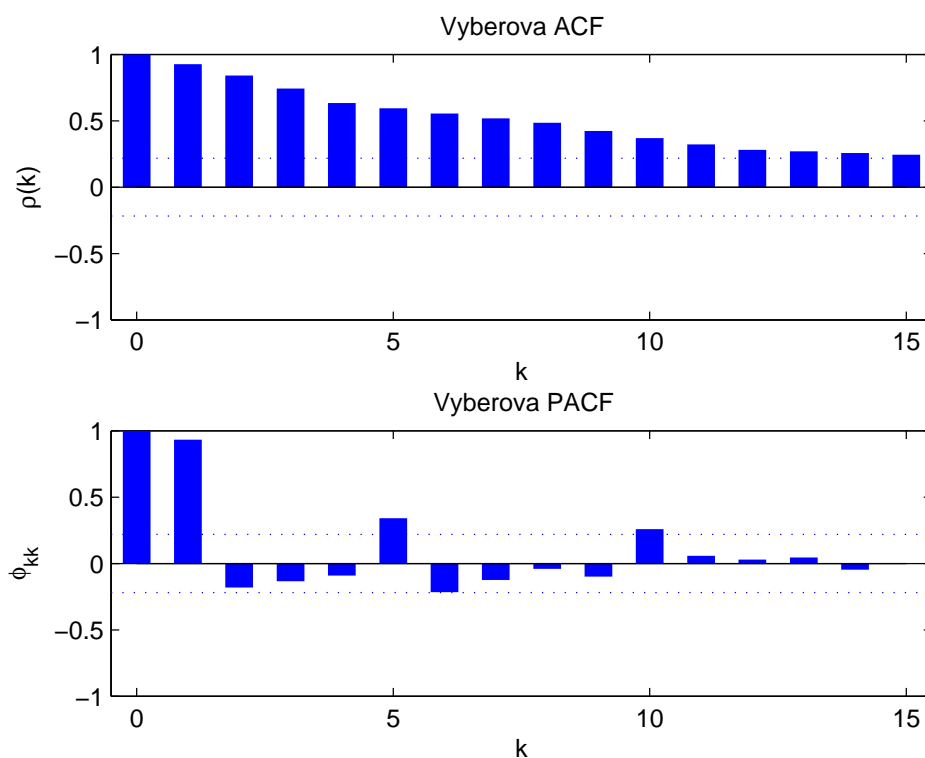


Obr. 5.4: Výberová ACF a PACF HDP Česka

Tabuľka 5.1: Prehľad testov jednotkového koreňa

	$\alpha \neq 0, \beta_1 \neq 0$	$\alpha \neq 0, \beta_1 = 0$	$\alpha = \beta_1 = 0$
HDP CZ	-1,5740/0	-0,2839/0	2,7628/0
Nezam. CZ	-0,9707/0	-1,0930/0	0,6168/0
CZK/EUR	-2,8542/0	-1,1919/0	-1,6548/0

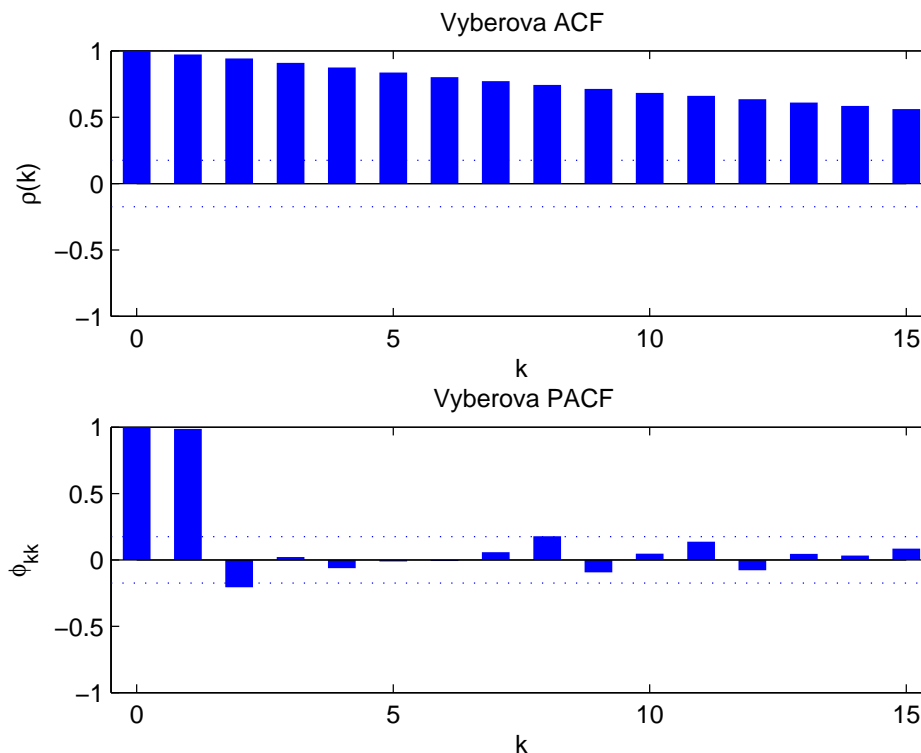
Graf výberovej ACF a PACF pre mieru nezamestnanosti Česka je na obrázku 5.5. Hodnoty testových štatistík testov jednotkového koreňa sú opäť uvedené v tabuľke 5.1. Výberová ACF Česka pozvoľne klesá k nule a všetkých prvých 15 autokorelácií je štatisticky rozdielných od 0. Testy jednotkového koreňa nám potvrdzujú, že rada je nestacionárna. Radu budeme transformovať.



Obr. 5.5: Výberová ACF a PACF miery nezamestnanosti Česka

Graf výberovej ACF a PACF výmenného kurzu CZK/EUR je na obrázku 5.6. Z grafu výberovej ACF je zrejma nestacionarita a spolu s výsledkami

testov jednotkového koreňa v tabuľke 5.1 konštatujeme, že radu budeme transformovať.

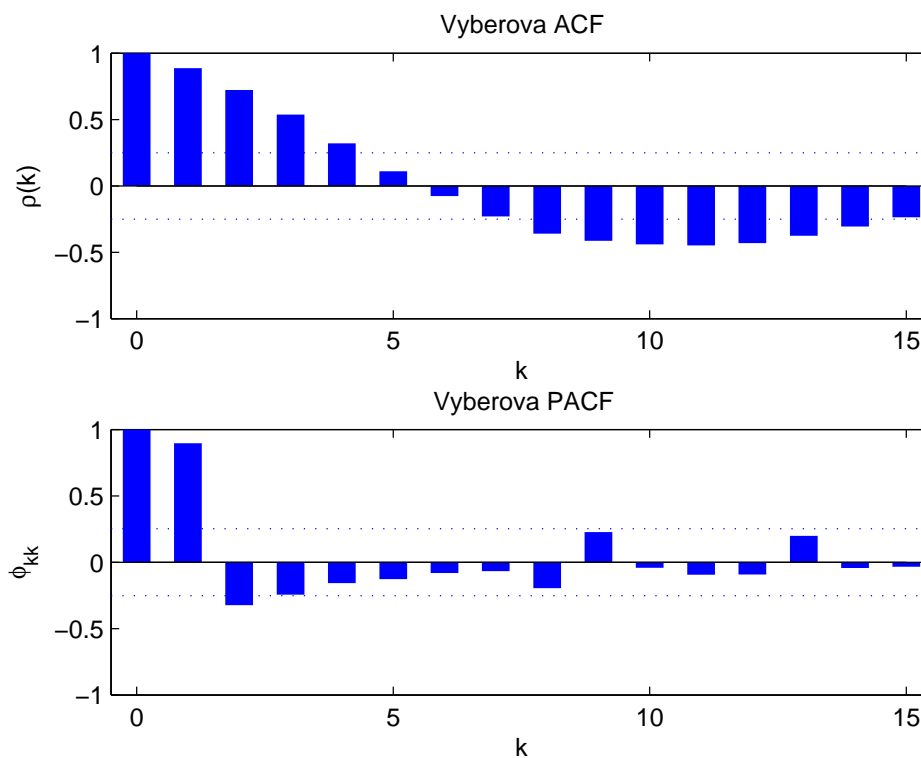


Obr. 5.6: Výberová ACF a PACF výmenného kurzu CZK/EUR

HDP sme transformovali tak, že sme radu najskôr logaritmovali a potom pomocou Hodrick-Prescottova filtru rozdelili radu na trend a cyklickú komponentu. Ďalej sme pracovali už iba s cyklickou komponentou, tj. s odchylkami HDP od trendu v %. Mieru nezamestnanosti sme transformovali diferencovaním. Výmenný kurz sme sa pokúšali najskôr diferencovať, ale po diferencovaní sa rada správala ako proces bieleho šumu, čiže kurz sa chová ako náhodná prechádzka a nebolo by možné ho modelovať. Preto sme výmenný kurz transformovali rovnako ako HDP, tj. radu sme najskôr logaritmovali a potom pomocou HP filtru získali cyklickú komponentu. Pracovať tak budeme s odchylkami výmenného kurzu od rovnovážneho kurzu v %. V ďalšej časti práce sa budeme zaoberať už len transformovanými časovými radami.

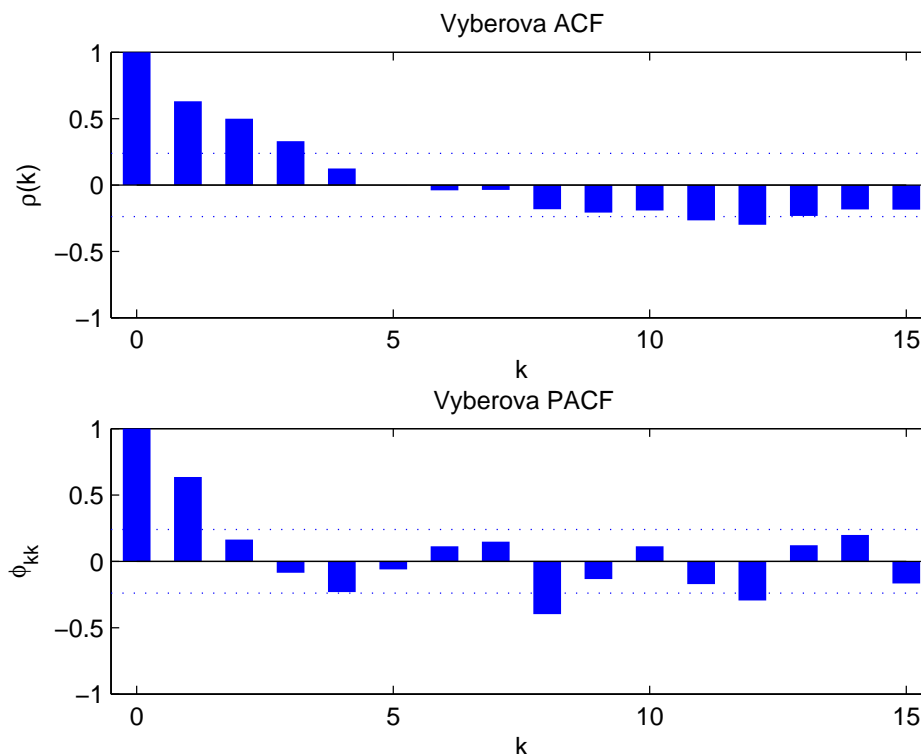
5.3 Výsledky odhadov

Na základe tvarov výberovej ACF, PACF a v kombinácii so Schwarzovým informačným kritériom sme vybrali najvhodnejšie lineárne modely pre analyzované časové rady. Grafy výberových ACF a PACF transformovaných časových radov sú na obrázkoch 5.7 až 5.9. Z grafov je zrejmé, že HDP a výmenný kurz CZK/EUR budeme modelovať $AR(2)$ modelom, čo nám potvrdilo aj Schwarzovo informačné kritérium. Mieru nezamestnanosti by sme podľa grafov mohli modelovať buď $AR(1)$ modelom, alebo $MA(3)$ modelom. Schwarzovo informačné kritérium nám uprednostnilo $MA(3)$ model a vzhľadom aj na nižší súčet štvorcov reziduí tohoto modelu budeme mieru nezamestnanosti modelovať $MA(3)$ modelom.



Obr. 5.7: Výberová ACF a PACF transformovaného HDP Česka

Výsledky odhadov lineárnych modelov sú uvedené v tabuľke 5.2 a stĺpec označený ako SIC obsahuje hodnoty Schwarzovho informačného kritéria. V zátvorkách pod hodnotami odhadnutých koeficientov sú uvedené smerodajné odchýlky. Pre všetky tri odhadované modely je úrovnňová konštanta



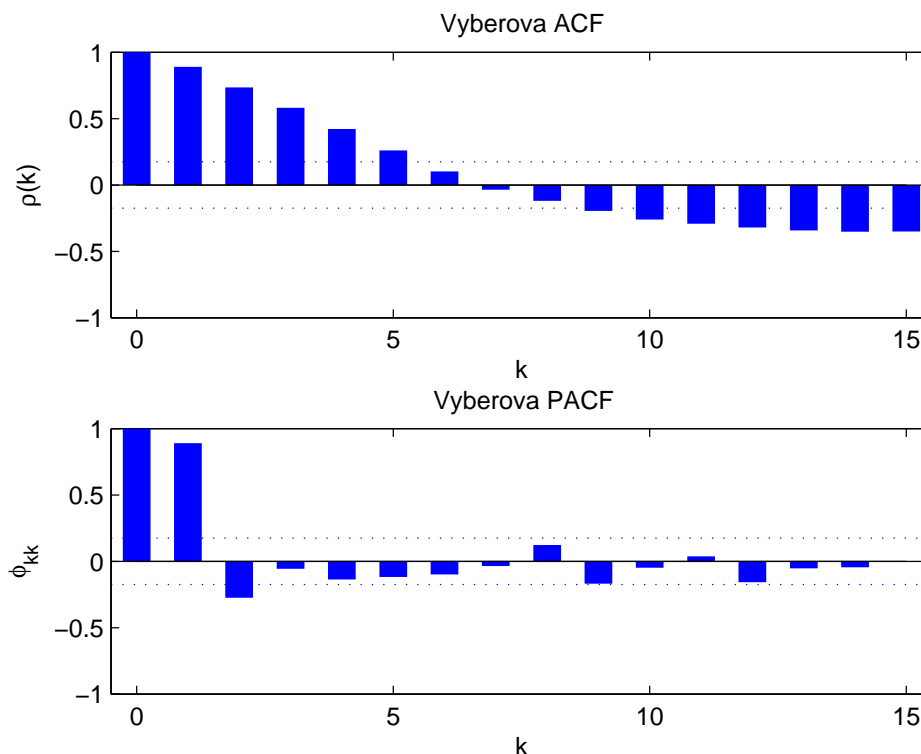
Obr. 5.8: Výberová ACF a PACF transformovanej miery nezamestnanosti Česka

štatisticky nevýznamná, ale zvyšné koeficienty sú už štatisticky významné. Na obrázkoch 5.10 až 5.12 sú pre porovnanie grafy transformovanej časovej rady a lineárneho modelu.

5.3.1 Diagnostická kontrola

Pozrime sa teraz na diagnostickú kontrolu lineárnych modelov. Hodnoty testovej štatistiky Jarque-Berovho testu normality sú uvedené v tabuľke 5.3, v stĺpci JB a hodnota 1 za lomítkom znamená, že normalita platí a 0 neplatí. Hodnoty testovej štatistiky Ljung-Boxova testu nekorelovanosti reziduí sú taktiež v tabuľke 5.3, v stĺpci LB a hodnota 1 za lomítkom znamená, že reziduá sú korelované a 0 značí nekorelovanosť reziduí. Hodnoty testovej štatistiky testu konštantného rozptylu náhodnej zložky sú opäť v tabuľke 5.3, v stĺpci Homoskedasticita a hodnota 1 znamená, že rozptyl je konštantný a 0 značí meniaci sa rozptyl náhodnej zložky.

Normalitu nám testy v prípade HDP a výmenného kurzu CZK/EUR za-



Obr. 5.9: Výberová ACF a PACF transformovaného výmenného kurzu CZK/EUR

mietli. Spôsobené je to pár veľkými reziduami. Túto skutočnosť nám potvrdzujú aj histogramy reziduí, ktoré je možné nájsť v prílohe na obrázku C.1. Na druhej strane normalita miery nezamestnanosti platí. Čo sa týka testu nekorelovanosti reziduí, tak u všetkých analyzovaných modeloch sú reziduá nekorelované. Tento záver potvrdzujú aj grafy výberovej ACF reziduí, ktoré je možné nájsť v prílohe na obrázku D.1. Konštantný rozptyl náhodnej zložky nám test potvrdil iba v prípade HDP.

5.3.2 Predikčné schopnosti modelov

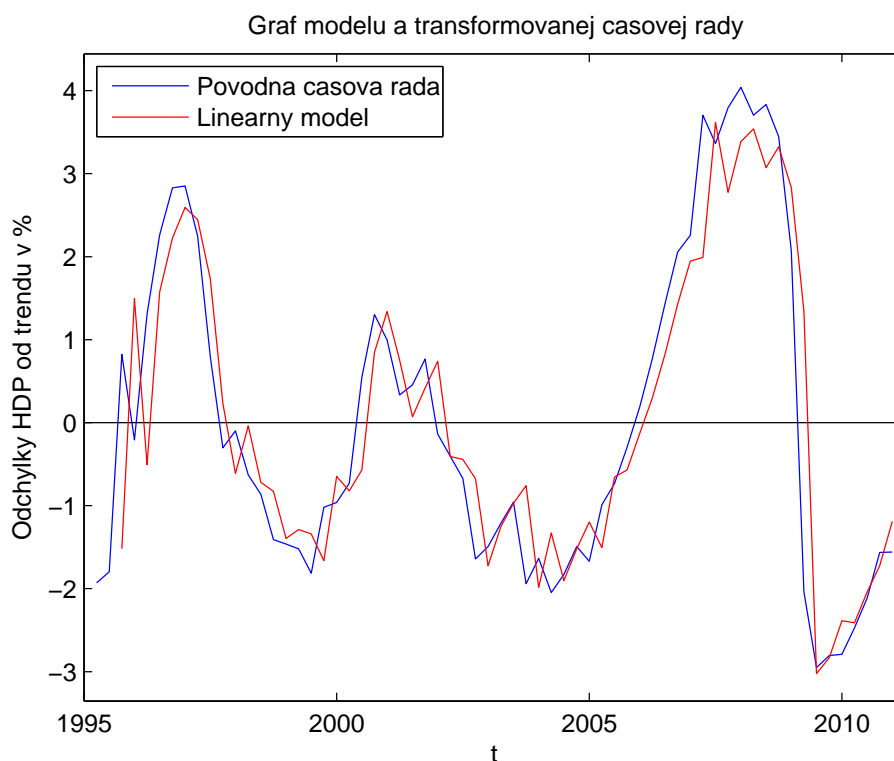
Ďalej sme porovnávali predikčné schopnosti viacerých lineárnych modelov. Konkrétne $AR(1)$, $AR(2)$, $MA(3)$ a $ARMA(1,1)$ modelu. Predikcie sme robili tromi spôsobmi. Jeden spočíval v tom, že sme odhadli model s pozorovaniami do roku 2004 u HDP a miery nezamestnanosti a do roku 2006 u kurzu. Následne sme spravili 4-krokovú predpoveď. Potom sme počet pozorovaní zvýšili o jedno, znova preodhadli model a spravili 4-krokovú predik-

Tabuľka 5.2: Výsledky odhadov lineárnych modelov

	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	–	SIC
HDP CZ	-0,0135 (0,1139)	1,1669 (0,1351)	-0,3062 (0,1068)	–	170,8916
CZK/EUR	0,0072 (0,1359)	1,1347 (0,0524)	-0,2754 (0,0696)	–	462,8648
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	SIC
Nezam. CZ	0,0232 (0,0791)	0,4801 (0,0761)	0,6018 (0,0959)	0,5251 (0,1080)	25,7257

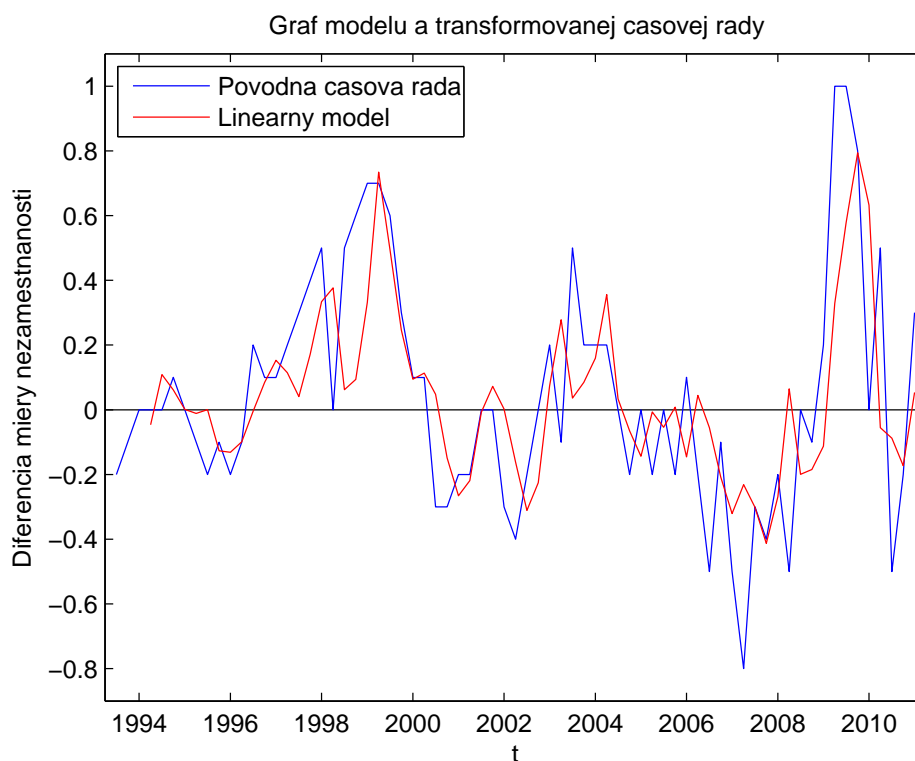
Tabuľka 5.3: Výsledky Jarque-Berovho testu, Ljung-Boxova testu a testu heteroskedasticity

	JB	LB	Homoskedasticita
HDP CZ	58,5791/0	14,2728/0	0,7062/1
Nezam. CZ	0,3559/1	9,2405/0	17,9823/0
CZK/EUR	12,3148/0	14,3188/0	38,8506/0



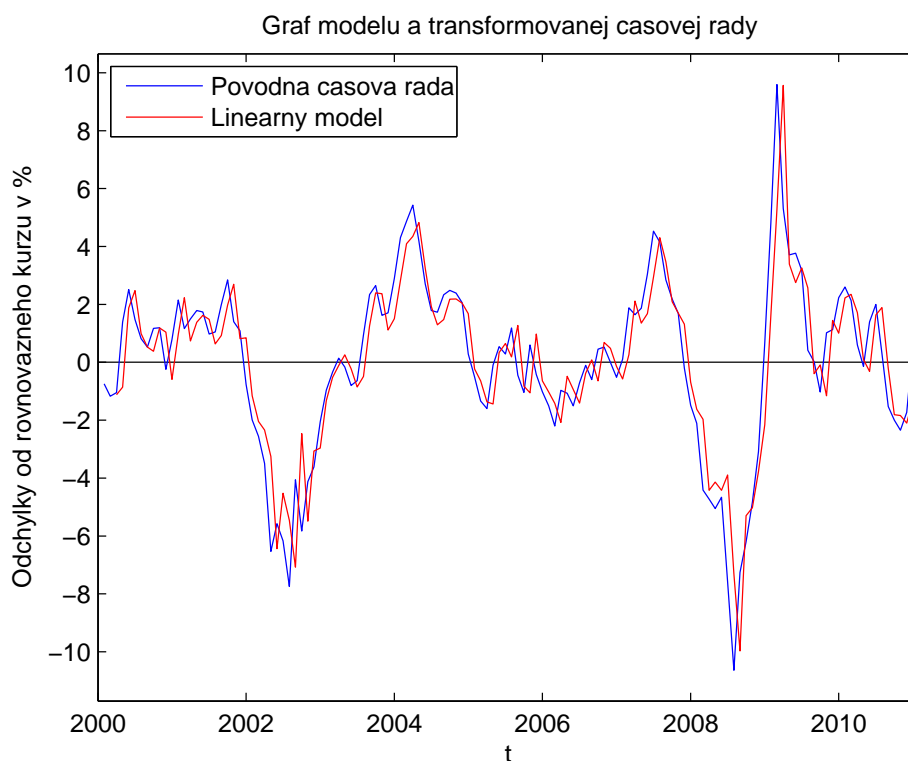
Obr. 5.10: Graf transformovanej časovej rady a lineárneho modelu HDP Česka

ciu. Tento postup sme opakovali až do roku 2010. Celkovo sme tak získali 25 alebo 57 1 až 4-krokových predpovedí. Následne sme vyrátali RMSE a MAE pre jednotlivé predikcie. Túto metódu predikcií je možné nazvať ako rekurzívne predikcie. Výsledky rekurzívnych predikcií sú v tabuľke 5.4, kde v stĺpcoch označených $AR(1)$, $AR(2)$, $MA(3)$ a $ARMA(1, 1)$ sú výsledky RMSE a MAE odpovedajúcich modelov. Druhý spôsob bol založený na tom, že sme odhadli model s pozorovaniami do roku 2004 u HDP a miery nezamestnanosti a do roku 2006 u kurzu a spravili sme 4-krokovú predpoveď, tj. získali sme predpoveď pre HDP a mieru nezamestnanosti na rok 2004 a pre kurz do apríla 2006. Následne sme už model nepreodhadovávali, ale brali odhadnutý model s pozorovaniami do roku 2004, pre kurz do roku 2006 a spravili 4-krokovú predikciu začínajúcu 2. štvrtročím roku 2004 a u kurzu začínajúcu februárom 2006, tj. získali sme predpoveď na 2., 3., 4. štvrtročie roku 2004 a 1. štvrtročie roku 2005 a u kurzu od februára 2006 do mája 2006. Tento postup sme opakovali až do roku 2010. Celkovo sme tak opäť obdržali 25 alebo 57 1 až 4-krokových predpovedí. Taktiež sme vyrátali RMSE a



Obr. 5.11: Graf transformovanej časovej rady a lineárneho modelu miery nezamestnanosti Česka

MAE pre jednotlivé predikcie. Túto metódu je možné nazvať ako predpoveď vyhodenených pozorovaní. Výsledky predpovedí vyhodenených pozorovaní sú v tabuľke 5.5. Grafy rekurzívnych predikcií $AR(2)$ modelu HDP, výmenného kurzu CZK/EUR a $MA(3)$ modelu miery nezamestnanosti je možné nájsť v prílohe na obrázku E.1 a grafy predpovedí vyhodenených pozorovaní týchto modelov na obrázku F.1. Vykreslené sú však pre prehľadnosť iba 4-krokové predpovede začínajúce každé 4 kroky. Popisovať si budeme výsledky len na základe RMSE, ktoré sa najbežnejšie používa. Závěry je možné analogicky spraviť aj pre MAE. Na overenie, či je vôbec vhodné predikovať vybrané časové rady pomocou lineárnych modelov, využijeme tretí spôsob predikcií. Založený je na tom, že neodhadujeme žiadny model, ale ako predpoveď berieme vždy poslednú známu hodnotu. Napríklad ak sme u HDP chceli spraviť 4-krokovú predpoveď na rok 2004, tak 1.-4. štvrťrobie roku 2004 bolo vždy rovné hodnote 4. štvrťrobia roku 2003. Túto metódu predikcií môžeme nazvať ako naivné predikcie. Z týchto predikcií sme taktiež vyrátali RMSE a MAE.



Obr. 5.12: Graf transformovanej časovej rady a lineárneho modelu výmenného kurzu CZK/EUR

Výsledky je možné nájsť pre prehľadnosť porovnávania v tabuľke 5.4 a 5.5 a v stĺpci označenom NAIVE. V oboch tabuľkách sú však hodnoty RMSE a MAE rovnaké.

Podľa rekurzívnych predikcií HDP je na tom zo všetkých modelov pre 1, 2, 3 aj 4-krokové predikcie najlepšie $AR(2)$ model. Na základe predpovedí vyhodnených pozorovaní je na tom $AR(2)$ model najlepšie taktiež vo všetkých h -krokových predpovediach. Tento záver nám nemenia ani naivné predikcie z tabuľky 5.4 a 5.5, ktoré sú oproti lineárnemu $AR(2)$ modelu vždy horšie.

Pre mieru nezamestnanosti sú výsledky RMSE rekurzívnych predikcií $AR(1)$, $AR(2)$, $MA(3)$ a $ARMA(1, 1)$ modelu takmer totožné pre 1-krokové predikcie a najnižšiu hodnotu dosiahol $AR(1)$ model. Avšak pre 2, 3 a 4-krokové predikcie už je na tom najlepšie $MA(3)$ model. Obdobne to vyzerá aj v prípade predpovedí vyhodnených pozorovaní, kde však najnižšiu hodnotu RMSE pre 1-krokové predikcie dosiahol $AR(2)$ model a v ostatných krokoch predikcií bol na tom zas najlepšie $MA(3)$ model. Tento záver nám tak isto

Tabuľka 5.4: RMSE a MAE rekurzívnych predikcií

	h	NAIVE		$AR(1)$		$AR(2)$		$MA(3)$		$ARMA(1, 1)$	
		RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
HDP CZ	1	0,9996	0,6106	1,0180	0,6396	0,9616	0,5912	1,0788	0,8390	0,9694	0,6050
	2	1,6963	1,0667	1,6953	1,1108	1,6533	1,1053	1,8472	1,5598	1,6669	1,1219
	3	2,2811	1,5844	2,2343	1,5842	2,1937	1,5758	2,3285	2,0402	2,2052	1,5953
	4	2,7800	2,0861	2,6645	2,0217	2,6151	2,0248	2,7106	2,4123	2,6237	2,0095
Nezam. CZ	1	0,3594	0,3000	0,3397	0,2846	0,3437	0,2749	0,3449	0,2646	0,3424	0,2760
	2	0,4363	0,3040	0,4001	0,2777	0,4061	0,2884	0,3823	0,2718	0,4088	0,2910
	3	0,5448	0,4320	0,4620	0,3642	0,4787	0,3778	0,4373	0,3492	0,4802	0,3786
	4	0,6174	0,4600	0,4891	0,3629	0,5146	0,3692	0,4705	0,3655	0,5161	0,3735
CZK/EUR	1	1,6953	1,2627	1,6815	1,2360	1,6219	1,1516	1,7713	1,3237	1,6180	1,1538
	2	2,7268	2,0116	2,6358	1,9343	2,5728	1,8689	2,7059	2,0047	2,5624	1,8674
	3	3,4583	2,5656	3,2587	2,3700	3,1530	2,3109	3,2227	2,3541	3,1611	2,3017
	4	4,0782	2,9974	3,7648	2,7460	3,5824	2,5892	3,5172	2,5859	3,6117	2,6276

Tabuľka 5.5: RMSE a MAE predpovedí vyhodnotených pozorovaní

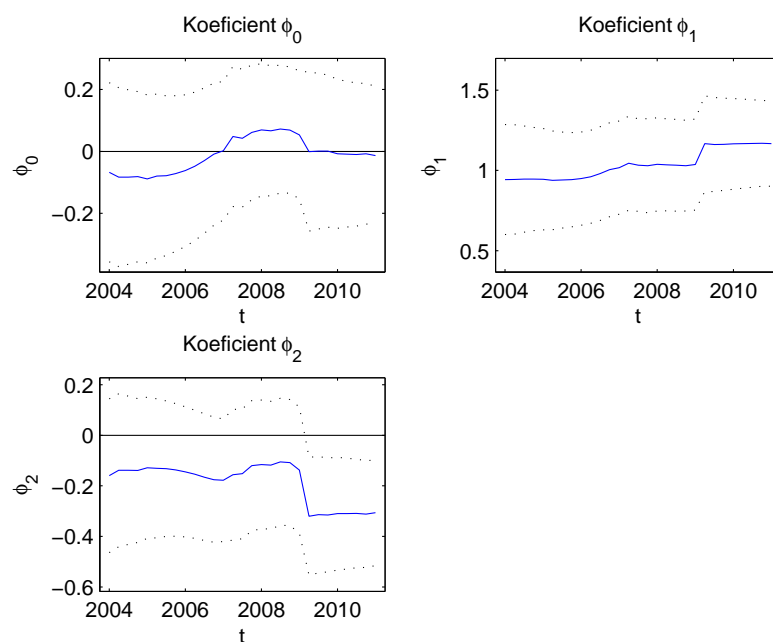
	h	NAIVE		$AR(1)$		$AR(2)$		$MA(3)$		$ARMA(1, 1)$	
		RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
HDP CZ	1	0,9996	0,6106	1,0314	0,7345	0,9863	0,7082	1,1307	0,8769	0,9946	0,7151
	2	1,6963	1,0667	1,6476	1,2516	1,6350	1,2821	1,8687	1,5874	1,6520	1,2946
	3	2,2811	1,5844	2,0725	1,6516	2,0666	1,7088	2,2967	1,9913	2,0789	1,7095
	4	2,7800	2,0861	2,3683	1,9527	2,3443	1,9894	2,6359	2,2871	2,3570	1,9920
Nezam. CZ	1	0,3594	0,3000	0,3322	0,2796	0,3286	0,2667	0,3355	0,2660	0,3293	0,2706
	2	0,4363	0,3040	0,3927	0,2754	0,3971	0,2768	0,3801	0,2774	0,3977	0,2776
	3	0,5448	0,4320	0,4506	0,3593	0,4590	0,3630	0,4327	0,3512	0,4588	0,3629
	4	0,6174	0,4600	0,4734	0,3625	0,4848	0,3621	0,4619	0,3712	0,4838	0,3631
CZK/EUR	1	1,6953	1,2627	1,6476	1,2041	1,6005	1,1510	2,6387	2,0450	1,6061	1,1568
	2	2,7268	2,0116	2,5505	1,8745	2,5038	1,8272	2,7541	2,0338	2,5129	1,8361
	3	3,4583	2,5656	3,1134	2,2656	3,0537	2,2105	3,5102	2,6857	3,0662	2,2216
	4	4,0782	2,9974	3,5337	2,5949	3,4485	2,5271	3,4810	2,5713	3,4655	2,5398

potvrdzujú aj naivné predikcie, ktoré sú oproti lineárnemu $MA(3)$ modelu vždy horšie.

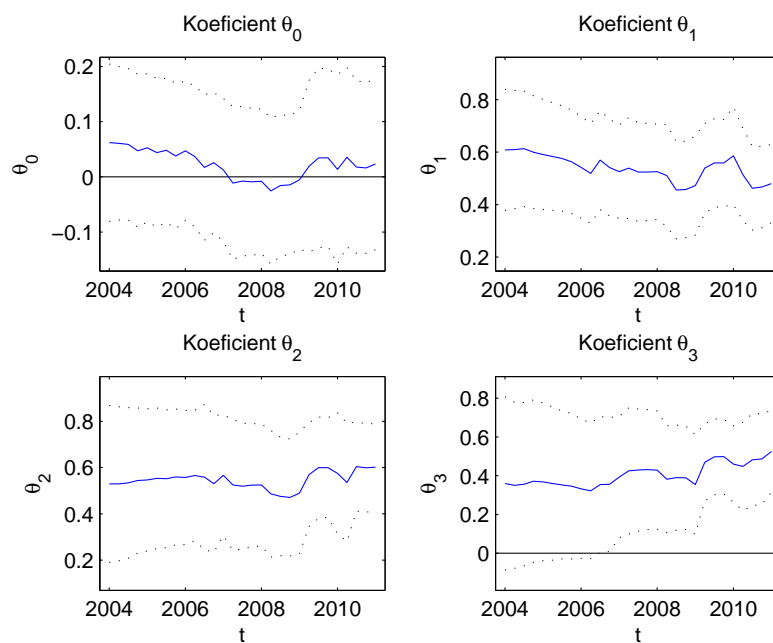
Pre výmenný kurz CZK/EUR sú v prípade rekurzívnych predikcií hodnoty RMSE pre 1 a 2-krokové predpovede najnižšie u $ARMA(1, 1)$ modelu. Pre 3-krokové predpovede sú najnižšie u $AR(2)$ modelu a pre 4-krokové predpovede u $MA(3)$ modelu. V prípade predpovedí vyhodenených pozorovaní najnižšie hodnoty dosiahol vo všetkých krokoch predpovedí $AR(2)$ model. Opäť aj u výmenného kurzu podávali naivné predikcie najhoršie predpovede. Dôvodom, že v prípade rekurzívnych predikcií vychádzal u 1 a 2-krokových predikciách najlepšie $ARMA(1, 1)$ model môže byť ten, že približne na začiatku roku 2009 došlo k zmene v generovaní časovej rady z $AR(1)$ procesu na $AR(2)$ proces. Bližšie o stabilite parametrov v čase si povieme v nasledujúcej podkapitole.

5.3.3 Rekurzívny odhad parametrov

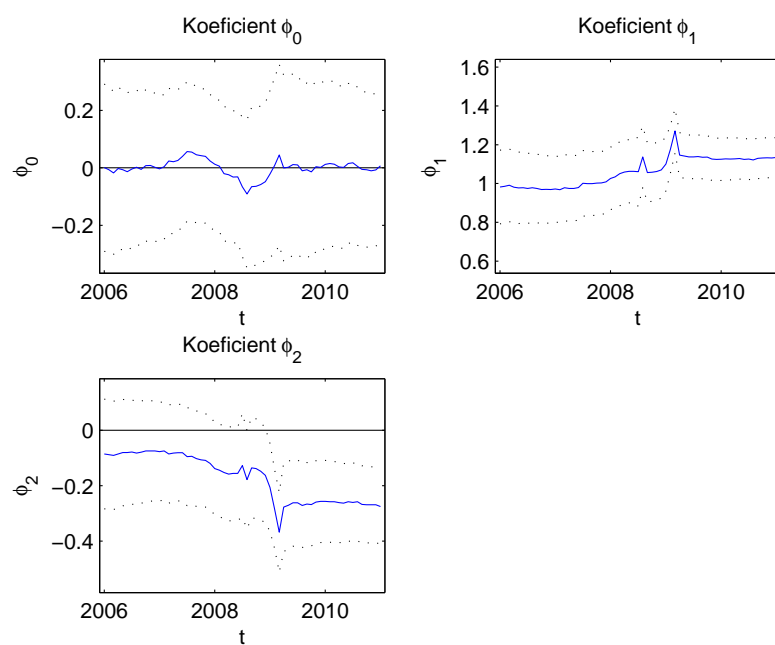
Na záver našej analýzy sa pozrieme na rekurzívny odhad parametrov pre jednotlivé časové rady. Grafy rekurzívnych odhadov parametrov sú na obrázkoch 5.13 až 5.15. Prerušovanou čiernou čiarou je znázornená horná a dolná medza 95% intervalu spoľahlivosti. Rekurzívny odhad parametrov začína vždy od roku 2004 v prípade HDP a miery nezamestnanosti a od roku 2006 v prípade výmenného kurzu CZK/EUR, tak ako boli robené aj predikcie. Z grafov vidíme, že úrovňové konštanty boli vždy štatisticky nevýznamné. Koeficienty ϕ_1 u HDP a výmenného kurzu CZK/EUR sú celé sledované obdobie štatisticky významné. To však neplatí u koeficientov ϕ_2 pre tieto časové rady, ktoré boli zhruba do roku 2009 štatisticky nevýznamné. To znamená, že do tohto roku je postačujúci $AR(1)$ model a po tomto roku je prítomný $AR(2)$ model. Pre mieru nezamestnanosti sú koeficienty θ_1 a θ_2 štatisticky významné. Koeficient θ_3 je na začiatku sledovaného obdobia až do polovice roku 2006 štatisticky nevýznamný, ale intervaly spoľahlivosti sú v tomto období pomerne široké. Aj tu je možné pozorovať mierny zlom v parametroch po roku 2009. Tieto zlomy v parametroch môžeme teda takmer s určitosťou pripísať kríze.



Obr. 5.13: Vývoj parametrov v čase HDP Česka lineárneho modelu



Obr. 5.14: Vývoj parametrov v čase miery nezamestnanosti Česka lineárneho modelu



Obr. 5.15: Vývoj parametrov v čase výmenného kurzu CZK/EUR lineárneho modelu

Záver

Predložená práca sa zaoberala informačnými a predikčnými kritériami pre výber modelu a modelovaním vybraných časových radov lineárnymi modelmi. Na základe 8 simulovaných procesov sme zisťovali schopnosti týchto kritérií vybrať skutočný model. V poslednej kapitole sme spravili kompletnú analýzu časových radov HDP Česka, miery nezamestnanosti Česka a výmenného kurzu CZK/EUR.

Z prevedených simulácií sme zistili, že ak by sme sa spoliehali iba na jednotlivé kritériá bez iných podporných nástrojov, tak by to veľa krát neviedlo k voľbe správneho modelu. Najmä pri malých dĺžkach pozorovaní sa to citelne prejavovalo. Avšak aj pre pozorovania dĺžky 1000 a generované procesy $MA(2)$, $MA(5)$, $ARMA(1, 1)$ a $ARMA(2, 2)$ nedosahovalo žiadne kritérium relatívnu početnosť nad 70% pre výber generovanej rady.

Preto sme ďalej uskutočnili rovnaké simulácie, ale vyberali sme už iba medzi typmi modelov akou bola časová rada generovaná, pretože tvary výberových ACF a PACF nám napovedia potenciálny typ modelu. Z našich simulácií môžeme teda urobiť všeobecný záver a doporučiť najskôr sa pozrieť na tvary výberovej ACF a PACF a vybrať potenciálne modely, ktoré sa odhadnú a následne sa na základe Schwarzovho informačného kritéria, ktoré podávalo najlepšie výsledky, vyberie najvhodnejší model. Treba však dodať, že výber modelu nie je vo väčšine prípadov jednoduchý, najmä pri malom počte pozorovaní, kde hlavne pre $MA(q)$ a zmiešané $ARMA(p, q)$ procesy nepodávali kritéria adekvátne výsledky a preto je vhodný model vyberaný aj na základe skúseností, intuície a subjektívneho posúdenia analytika.

Ako najvhodnejší model pre % odchylky HDP Česka od trendu nám vyšiel $AR(2)$ model, diferencie miery nezamestnanosti Česka $MA(3)$ model a % odchylky výmenného kurzu CZK/EUR od rovnovážneho kurzu $AR(2)$ model. Na porovnanie predikčných schopností viacerých modelov sme použili tri metódy predikcií. Konkrétne sa jednalo o rekurzívne predikcie, predpoveď vyhodnotených pozorovaní a naivné predikcie. Výsledky nám potvrdili vhodnosť použitia odhadnutých modelov aj na tvorbu predpovedí.

Z rekurzívneho odhadu parametrov sme zistili, že u HDP a výmenného

kurzu CZK/EUR došlo približne po roku 2009 k zmene $AR(1)$ modelu na $AR(2)$ model. Tak isto aj u miery nezamestnanosti sme spozorovali mierny zlom v parametroch po roku 2009. Tieto zlomy v parametroch boli tak s najväčšou pravdepodobnosťou spôsobené krízou.

Na úplný záver je vhodné spomenúť možné rozšírenia a vylepšenia lineárnych modelov. I keď diagnostická kontrola nedopadla najhoršie, tak prejavená heteroskedasticita a zmena modelu po roku 2009 by mohla byť vyriešená s použitím nelineárnych modelov, ktoré by umožnili uvažovať dva režimy. Jeden pre expanziu ekonomiky a druhý pre kontrakciu. K použitiu nelineárnych modelov sa prikláňajú aj empirické zistenia, že v prípade kontrakcie ekonomiky miera nezamestnanosti prudko rastie, ale v prípade expanzie už je pokles tejto miery nezamestnanosti pomalší a pozvoľný.

Literatúra

- [1] Arlt, J.; Arltová, M.: *Ekonomické časové rady*. Professional Publishing, 2009.
- [2] Box, G. E. P.; Jenkins, G. M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control, Revised Edition*. HOLDEN-DAY, 1976.
- [3] Brockwell, P. J.; Davis, R. A.: *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag New York, 2002.
- [4] Cryer, J. D.; Chan, K.-S.: *Time Series Analysis: With Applications in R*. Springer Science+Business Media, 2008.
- [5] Enders, W.: *Applied Econometric Time Series*. Wiley, 2010.
- [6] Forbelská, M.: *Stochastické modelování jednorozměrných časových řad*. Masarykova univerzita, 2009.
- [7] Greene, W. H.: *Econometric Analysis*. Prentice Hall, 2003.
- [8] Heij, Ch.; de Boer, P.; Franses, P. H.; Kloek, T.; van Dijk, H. K.: *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*. Oxford University Press, 2004.

Zoznam obrázkov

5.1	Graf vývoja HDP Česka	35
5.2	Graf vývoja miery nezamestnanosti Česka	36
5.3	Graf vývoja výmenného kurzu CZK/EUR	36
5.4	Výberová ACF a PACF HDP Česka	37
5.5	Výberová ACF a PACF miery nezamestnanosti Česka	38
5.6	Výberová ACF a PACF výmenného kurzu CZK/EUR	39
5.7	Výberová ACF a PACF transformovaného HDP Česka	40
5.8	Výberová ACF a PACF transformovanej miery nezamestnanosti Česka	41
5.9	Výberová ACF a PACF transformovaného výmenného kurzu CZK/EUR	42
5.10	Graf transformovanej časovej rady a lineárneho modelu HDP Česka	44
5.11	Graf transformovanej časovej rady a lineárneho modelu miery nezamestnanosti Česka	45
5.12	Graf transformovanej časovej rady a lineárneho modelu výmenného kurzu CZK/EUR	46
5.13	Vývoj parametrov v čase HDP Česka lineárneho modelu	50
5.14	Vývoj parametrov v čase miery nezamestnanosti Česka lineárneho modelu	50
5.15	Vývoj parametrov v čase výmenného kurzu CZK/EUR lineárneho modelu	51
C.1	Histogram reziduí lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)	85
D.1	Výberová ACF reziduí lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)	86

E.1	Rekurzívne predikcie lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)	87
F.1	Predpoveď vyhodенých pozorování lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)	88

Zoznam tabuliek

3.1	Tabuľka Dickey-Fullerových testov	20
3.2	Vlastnosti ACF a PACF	22
5.1	Prehľad testov jednotkového koreňa	38
5.2	Výsledky odhadov lineárnych modelov	43
5.3	Výsledky Jarque-Berovho testu, Ljung-Boxova testu a testu heteroskedasticity	43
5.4	RMSE a MAE rekurzívnych predikcií	47
5.5	RMSE a MAE predpovedí vyhodnených pozorovaní	48
A.1	Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 50$	60
A.2	Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 1000$	61
A.3	Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 50$	62
A.4	Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 1000$	63
A.5	Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 50$	64
A.6	Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 1000$	65
A.7	Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 50$	66
A.8	Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 1000$	67
A.9	Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 50$	68
A.10	Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 1000$	69
A.11	Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 50$	70
A.12	Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 1000$	71
A.13	Výsledky simulácie $ARMA(1, 1)$ procesu pre $n = 50$	72
A.14	Výsledky simulácie $ARMA(1, 1)$ procesu pre $n = 1000$	73
A.15	Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 50$	74
A.16	Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 1000$	75
B.1	Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 50$ s AR odhadmi	77
B.2	Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 1000$ s AR odhadmi	77
B.3	Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 50$ s AR odhadmi	78
B.4	Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 1000$ s AR odhadmi	78

B.5	Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 50$ s AR odhadmi .	79
B.6	Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 1000$ s AR odhadmi	79
B.7	Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 50$ s MA odhadmi	80
B.8	Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 1000$ s MA odhadmi	80
B.9	Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 50$ s MA odhadmi	81
B.10	Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 1000$ s MA odhadmi	81
B.11	Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 50$ s MA odhadmi	82
B.12	Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 1000$ s MA odhadmi	82
B.13	Výsledky simulácie $ARMA(1, 1)$ procesu pre $n = 50$ s $ARMA$ odhadmi	83
B.14	Výsledky simulácie $ARMA(1, 1)$ procesu pre $n = 1000$ s $ARMA$ odhadmi	83
B.15	Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 50$ s $ARMA$ odhadmi	84
B.16	Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 1000$ s $ARMA$ odhadmi	84

Príloha A

Výsledky simulácií - všetky modely

Tabuľka A.1: Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	202/62/81	392/105/108	293 /81/91	0/32/63	6/42/70	1/32/58
$AR(2)$	17/8/2	12/9/0	17/10/0	3/8/5	8/8/4	3/7/4
$AR(3)$	13/10/0	1/2/0	6/7/0	3/8/1	11/10/1	6/8/1
$AR(4)$	11/9/0	1/2/0	6/7/0	13/14/0	38/15/0	13/14/0
$AR(5)$	5/4/0	0/0/0	0/0/0	128/14/0	120/11/0	118/14/0
$MA(1)$	163/53/76	401 /125/137	255/81/99	3/37/57	9/39/63	2/32/56
$MA(2)$	39/32/15	38/55/14	44/42/16	1/26/18	10/28/15	3/26/18
$MA(3)$	34/46/7	30/57/7	36/46/7	9/41/9	28/40/8	13/43/9
$MA(4)$	62/73/2	14/51/1	44/68/1	49/94/3	88/84/3	61/103/4
$MA(5)$	66/77/0	7/39/0	34/56/0	420 /139/0	327 /125/0	421 /143/0
$ARMA(1,1)$	80/97/127	46/115/133	73/106/132	15/59/131	29/68/129	12/55/126
$ARMA(1,2)$	44/37/55	8/25/31	29/35/45	29/33/62	29/32/58	26/35/62
$ARMA(2,1)$	58/40/50	15/23/32	44/33/43	34/32/54	30/30/53	31/30/56
$ARMA(2,2)$	206/317/292	33/ 250/244	117/ 290/273	293/ 328/304	267/ 333/303	290/ 321/311
Suma v tis.	1/0,865/0,707	1/0,865/0,707	1/0,865/0,707	1/0,865/0,707	1/0,865/0,707	1/0,863/0,705

Tabuľka A.2: Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	485/511/555	726/726/726	666/666/672	0/274/333	22/ 291/348	0/272/331
$AR(2)$	21/9/10	1/1/1	10/10/10	0/13/14	16/8/9	0/12/13
$AR(3)$	18/17/2	0/0/0	4/4/0	0/11/2	24/10/2	0/11/2
$AR(4)$	15/16/0	0/0/0	1/1/0	4/28/0	42/27/0	4/28/0
$AR(5)$	13/11/0	0/0/0	1/1/0	349/35/0	213/30/0	349/35/0
$MA(1)$	208/210/222	267/267/267	255/255/258	0/127/148	33/169/194	0/131/152
$MA(2)$	45/51/60	1/1/1	19/19/19	0/98/123	15/94/114	0/98/123
$MA(3)$	13/13/8	0/0/0	1/1/3	0/19/20	27/19/16	0/19/20
$MA(4)$	19/18/0	0/0/0	4/4/0	4/30/0	50/27/0	5/30/0
$MA(5)$	13/10/0	0/0/0	0/0/0	383/34/0	256/33/0	382/34/0
$ARMA(1,1)$	25/18/22	2/2/2	13/14/14	0/8/15	9/11/15	0/8/15
$ARMA(1,2)$	29/28/34	1/1/1	7/6/6	24/94/111	56/82/99	23/94/111
$ARMA(2,1)$	52/54/57	2/2/2	13/13/13	31/150/179	64/132/154	32/149/178
$ARMA(2,2)$	44/34/30	0/0/0	6/6/5	205/79/55	173/67/49	205/79/55
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka A.3: Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	332/364 /176	508/517 /202	424/438 /188	3/ 188 /138	25/ 213 /145	2/170/133
$AR(3)$	28/10/9	9/8/6	20/10/8	4/8/7	20/9/6	6/8/7
$AR(4)$	17/12/0	5/5/0	11/9/0	13/20/0	42/16/0	15/17/0
$AR(5)$	14/7/0	1/1/0	4/2/0	192/17/0	149/8/0	178/16/0
$MA(1)$	6/9/ 229	67/43/ 283	19/18/ 240	0/7/ 228	3/9/ 232	0/7/ 227
$MA(2)$	100/121/49	163/163/54	132/135/53	4/84/48	18/116/45	4/99/53
$MA(3)$	128/123/55	89/88/46	109/110/52	13/143/71	42/132/74	26/153/75
$MA(4)$	63/61/11	28/27/5	51/44/9	58/98/13	101/86/13	80/107/12
$MA(5)$	83/70/6	9/11/3	46/46/5	508 /178/9	369 /158/8	494 / 184 /9
$ARMA(1,1)$	5/8/122	8/13/118	8/10/122	3/12/122	7/13/122	3/11/120
$ARMA(1,2)$	103/86/107	52/46/82	81/70/99	38/87/113	43/86/118	39/80/114
$ARMA(2,1)$	39/41/85	27/29/72	35/36/79	8/44/94	33/51/86	8/39/93
$ARMA(2,2)$	82/83/81	34/44/59	60/67/75	156/109/87	148/98/81	145/104/87
Suma v tis.	1/0,995/0,93	1/0,995/0,93	1/0,995/0,93	1/0,995/0,93	1/0,995/0,93	1/0,995/0,93

Tabuľka A.4: Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	725/840/909	991/991/991	926/929/940	1/698/761	91/645/708	1/688/748
$AR(3)$	66/22/29	5/5/5	24/22/28	1/21/27	44/20/25	0/21/27
$AR(4)$	33/19/2	0/0/0	4/4/1	12/17/2	96/17/3	11/17/2
$AR(5)$	39/29/0	0/0/0	2/2/0	811/39/0	454/33/0	807/39/0
$MA(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(3)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(4)$	1/3/5	0/0/0	0/0/0	0/7/12	8/20/23	0/8/14
$MA(5)$	19/17/24	0/0/0	5/5/5	67/149/173	127/208/222	73/158/184
$ARMA(1,1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(1,2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(2,1)$	70/30/27	4/4/4	31/30/24	0/27/23	53/18/16	0/27/23
$ARMA(2,2)$	47/40/4	0/0/0	8/8/2	108/42/2	127/39/3	108/42/2
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka A.5: Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	1/0/0	1/0/0	1/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	24/50/63	82/93/67	41/64/64	0/33/64	2/36/65	0/28/63
$AR(3)$	172/192/116	330/327/158	226/238/133	1/111/77	17/116/87	2/99/74
$AR(4)$	32/22/15	27/14/11	37/22/15	12/21/16	48/22/15	11/20/14
$AR(5)$	322/245/2	143/138/1	240/203/2	639/315/2	502/281/2	592/295/2
$MA(1)$	4/2/38	17/12/50	7/6/43	0/1/36	0/1/39	0/1/36
$MA(2)$	11/13/17	29/30/21	17/17/19	0/8/15	3/11/17	0/9/15
$MA(3)$	12/12/43	24/24/46	16/18/44	2/8/38	4/10/37	1/9/45
$MA(4)$	17/15/14	13/14/13	17/16/14	7/20/13	18/26/13	12/23/15
$MA(5)$	70/76/6	30/30/6	50/53/6	137/137/6	141/149/6	174/172/8
$ARMA(1,1)$	1/1/46	4/4/45	2/2/47	0/1/46	2/2/45	0/0/46
$ARMA(1,2)$	4/6/11	4/5/9	6/6/10	1/2/12	3/6/16	0/2/12
$ARMA(2,1)$	15/17/65	16/18/75	16/16/69	2/12/65	12/14/70	1/12/64
$ARMA(2,2)$	315/ 347/549	280/289/ 483	324/337/519	199/ 329/595	248/ 324/573	207/ 328/591
Suma v tis.	1/0,998/0,985	1/0,998/0,985	1/0,998/0,985	1/0,998/0,985	1/0,998/0,985	1/0,998/0,985

Tabuľka A.6: Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(3)$	0/0/1	0/0/1	0/0/1	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(4)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(5)$	998/998/875	993/993/870	994/994/871	1000/1000/877	993/993/871	1000/1000/877
$MA(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(3)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(4)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(5)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(1, 1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(1, 2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(2, 1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(2, 2)$	2/2/124	7/7/129	6/6/128	0/0/123	7/7/129	0/0/123
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka A.7: Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	95/94/107	141/131/132	123/113/118	1/49/84	12/64/110	1/39/72
$AR(2)$	52/50/68	34/30/26	49/42/50	4/52/104	10/54/99	2/48/100
$AR(3)$	10/7/3	1/1/1	7/5/2	5/13/12	18/17/15	5/14/11
$AR(4)$	7/8/3	1/1/0	1/1/0	20/18/9	35/16/9	16/18/9
$AR(5)$	8/7/0	0/0/0	1/4/0	204/17/0	161/14/0	192/16/0
$MA(1)$	318/342/414	644/610/641	454/451/502	0/212/327	8/219/333	2/206/322
$MA(2)$	35/20/20	18/19/13	25/20/18	0/17/24	14/24/26	0/22/28
$MA(3)$	30/32/9	25/27/10	24/26/9	9/37/12	25/45/9	12/42/14
$MA(4)$	38/38/13	8/10/4	22/24/9	47/88/19	95/83/17	57/95/21
$MA(5)$	46/43/1	3/5/0	17/17/1	433/132/2	343/115/2	448/139/2
$ARMA(1, 1)$	41/47/62	38/42/44	50/53/60	2/39/70	12/34/60	4/36/67
$ARMA(1, 2)$	136/135/109	42/46/36	105/106/82	63/135/121	67/135/120	55/141/138
$ARMA(2, 1)$	49/45/57	19/24/27	43/44/49	39/64/90	44/61/82	38/57/88
$ARMA(2, 2)$	135/117/109	26/39/41	79/79/75	173/112/101	156/104/93	168/112/103
Suma v tis.	1/0,985/0,975	1/0,985/0,975	1/0,985/0,975	1/0,985/0,975	1/0,985/0,975	1/0,985/0,975

Tabuľka A.8: Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	7/10/14	0/0/0	8/9/9	0/14/29	7/33/47	0/13/26
$AR(3)$	35/35/44	0/0/0	13/13/15	0/162/209	39/203/235	0/148/194
$AR(4)$	21/26/29	0/0/0	1/1/1	8/180/214	64/169/191	10/175/210
$AR(5)$	19/16/9	0/0/0	4/4/0	371/87/60	264/68/47	370/87/60
$MA(1)$	617/708/743	993/993/993	901/906/910	0/247/277	31/254/287	0/262/295
$MA(2)$	54/20/24	4/4/4	24/24/24	0/13/15	11/7/8	0/13/15
$MA(3)$	20/15/7	0/0/0	5/5/3	1/11/3	19/12/6	1/11/3
$MA(4)$	19/17/0	0/0/0	1/1/0	9/35/0	79/31/1	8/35/0
$MA(5)$	15/12/0	0/0/0	0/0/0	438 /41/0	270 /36/0	439 /41/0
$ARMA(1,1)$	45/12/13	1/1/1	14/14/15	0/9/11	13/15/17	0/9/11
$ARMA(1,2)$	86/93/85	1/1/1	20/20/20	37/151/141	57/124/123	38/156/145
$ARMA(2,1)$	23/23/17	1/1/1	3/3/3	3/27/18	23/25/18	3/27/18
$ARMA(2,2)$	39/13/15	0/0/0	6/0/0	133/23/23	123/23/20	131/23/23
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka A.9: Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	70/23/29	131/41/42	102/32/35	1/11/21	6/17/31	0/10/20
$AR(2)$	42/29/12	37/39/8	42/32/9	0/27/17	8/34/20	0/27/16
$AR(3)$	12/7/0	5/7/0	10/7/0	0/7/1	12/8/1	1/5/1
$AR(4)$	6/7/0	0/1/0	1/2/0	14/15/1	30/14/1	14/13/1
$AR(5)$	4/5/0	0/4/0	0/4/0	144/7/0	123/7/0	130/6/0
$MA(1)$	187/112/156	540/243/268	346/166/199	0/66/130	3/71/131	0/64/126
$MA(2)$	67/58/28	69/76/23	70/64/26	1/40/25	10/40/21	0/43/30
$MA(3)$	24/33/5	23/40/5	32/38/5	7/34/7	29/35/6	8/36/7
$MA(4)$	43/51/3	18/33/1	29/39/3	37/88/4	70/83/6	46/93/6
$MA(5)$	83/86/2	10/33/1	43/57/1	448/156/2	366/141/3	449/158/3
$ARMA(1,1)$	95/109/177	76/133/176	103/132/180	6/57/176	14/63/171	11/56/172
$ARMA(1,2)$	111/91/96	37/46/51	81/77/79	46/81/107	47/79/106	51/82/107
$ARMA(2,1)$	64/47/68	32/35/53	49/41/60	22/39/74	41/45/76	19/34/72
$ARMA(2,2)$	192/248/220	22/175/168	92/ 215/199	274/ 278/231	241/ 269/223	271/ 279/235
Suma v tis.	1/0,906/0,796	1/0,906/0,796	1/0,906/0,796	1/0,906/0,796	1/0,906/0,796	1/0,906/0,796

Tabuľka A.10: Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	1/1/1	0/0/0
$AR(2)$	141/163/176	138/138/138	169/169/171	0/126/158	24/159/205	0/126/158
$AR(3)$	72/62/64	5/5/5	27/27/27	0/96/117	39/100/114	0/95/116
$AR(4)$	19/20/6	0/0/0	6/6/2	5/76/40	65/65/35	5/76/40
$AR(5)$	16/12/2	0/0/0	1/1/0	398 /45/9	264 /42/9	397 /45/9
$MA(1)$	17/33/36	228/228/228	74/77/78	0/5/7	5/21/24	0/5/7
$MA(2)$	411/407/425	461/461/461	490/489/490	0/ 239/315	26/ 201/251	0/ 242/317
$MA(3)$	10/6/5	0/0/0	0/0/0	0/27/32	25/18/22	0/27/32
$MA(4)$	17/18/1	0/0/0	2/2/0	8/41/5	57/37/5	8/41/5
$MA(5)$	15/15/0	0/0/0	0/0/0	390/43/0	224/36/0	389/43/0
$ARMA(1,1)$	163/160/180	165/165/165	198/198/201	1/73/114	37/132/174	1/72/112
$ARMA(1,2)$	44/44/42	2/2/2	16/16/16	11/56/58	41/50/40	11/56/58
$ARMA(2,1)$	7/1/0	0/0/0	0/0/0	2/29/6	26/25/9	2/27/6
$ARMA(2,2)$	68/59/63	1/1/1	17/15/15	185/144/139	166/113/111	187/145/140
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka A.11: Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	165/99/152	482 /221/ 249	296 /153/193	0/30/99	6/42/112	0/28/96
$AR(2)$	41/31/2	42/43/1	40/35/2	0/20/3	6/22/3	0/17/2
$AR(3)$	23/20/5	8/17/3	16/20/5	0/23/4	9/20/5	1/22/4
$AR(4)$	17/21/0	3/5/0	10/11/0	6/32/0	35/34/0	6/31/0
$AR(5)$	19/14/0	3/5/0	10/9/0	169/37/1	136/34/1	153/34/1
$MA(1)$	25/18/27	68/34/40	44/23/33	0/10/18	2/16/30	1/14/23
$MA(2)$	170/180/157	221/ 272 /144	208/222/148	1/111/156	20/127/152	2/110/155
$MA(3)$	57/48/21	38/47/14	52/49/17	2/40/23	21/43/20	3/47/23
$MA(4)$	78/84/6	30/47/3	60/66/6	34/114/8	99/103/6	58/120/9
$MA(5)$	104/101/2	14/36/1	59/70/2	482 /174/5	379 /167/5	482 /182/5
$ARMA(1,1)$	33/37/84	25/50/84	34/47/88	1/14/84	4/17/83	0/16/81
$ARMA(1,2)$	23/21/45	11/12/36	21/20/46	6/19/54	19/26/56	9/21/57
$ARMA(2,1)$	10/11/15	2/5/7	7/7/9	12/19/26	15/15/23	11/20/27
$ARMA(2,2)$	235 / 277 / 266	53/168/200	143/ 230 / 233	287/ 319 / 301	249/ 296 / 286	274/ 300 / 299
Suma v tis.	1/0,962/0,782	1/0,962/0,782	1/0,962/0,782	1/0,962/0,782	1/0,962/0,782	1/0,962/0,782

Tabuľka A.12: Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/1/1	0/0/0
$AR(3)$	13/20/24	13/13/13	17/17/18	0/31/41	10/43/71	0/30/37
$AR(4)$	14/13/14	1/1/1	7/7/7	0/22/31	24/29/35	0/20/29
$AR(5)$	83/92/82	0/0/1	26/26/29	280/ 335 /209	275/ 323 /203	280/ 331 /202
$MA(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(2)$	117/203/ 304	658/658/667	329/335/370	0/73/197	11/91/206	0/76/206
$MA(3)$	247 /207/280	228/228/234	311/305/324	0/102/ 225	50/112/ 208	0/104/ 227
$MA(4)$	206/154/202	41/41/59	127/127/187	3/122/178	93/111/157	7/124/179
$MA(5)$	53/33/4	0/0/0	9/9/3	560 /43/8	336 /40/9	556 /44/8
$ARMA(1,1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(1,2)$	33/22/23	13/13/13	22/22/22	0/16/21	16/22/28	0/16/22
$ARMA(2,1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(2,2)$	234/ 256 /67	46/46/12	152/152/40	157/256/90	185/228/82	157/255/90
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka A.13: Výsledky simulácie $ARMA(1, 1)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	50/48/61	105/85/87	80/69/76	2/28/52	5/40/74	2/25/46
$AR(2)$	28/29/28	25/24/16	23/22/22	1/31/51	7/36/49	1/26/45
$AR(3)$	16/13/12	6/6/6	13/12/12	4/17/20	10/17/20	5/17/20
$AR(4)$	12/11/5	2/2/0	6/5/1	13/28/12	36/26/12	14/23/12
$AR(5)$	15/14/1	0/3/0	3/5/0	152/27/2	138/26/3	137/26/2
$MA(1)$	298/342/420	574/534/553	404/413/465	1/187/311	9/204/319	0/192/320
$MA(2)$	75/61/46	59/60/40	78/67/48	2/40/44	15/39/47	4/45/48
$MA(3)$	44/47/9	21/27/4	37/38/6	13/58/10	35/55/13	16/60/11
$MA(4)$	60/61/11	9/14/5	36/39/9	61/85/13	114/74/13	74/92/15
$MA(5)$	74/59/4	3/7/1	29/30/3	498/153/5	363/126/5	486/157/5
$ARMA(1, 1)$	199/183/240	178/185/205	207/191/228	18/113/234	29/127/218	20/111/229
$ARMA(1, 2)$	23/19/17	4/3/4	16/14/11	40/50/56	49/54/48	40/47/55
$ARMA(2, 1)$	41/20/30	2/4/5	22/15/18	24/30/47	27/29/39	24/28/44
$ARMA(2, 2)$	65/75/71	12/28/29	46/62/56	171/135/98	163/129/95	177/133/103
Suma v tis.	1/0,982/0,955	1/0,982/0,955	1/0,982/0,955	1/0,982/0,955	1/0,982/0,955	1/0,982/0,955

Tabuľka A.14: Výsledky simulácie $ARMA(1, 1)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	0/0/1	1/1/1	1/1/2	0/1/2	2/4/6	0/1/2
$AR(3)$	21/22/28	6/6/6	15/15/16	0/66/92	21/96/120	0/59/86
$AR(4)$	25/35/44	0/0/0	4/4/5	5/ 154 /180	57/144/176	4/ 154 /180
$AR(5)$	28/23/24	0/0/0	1/1/2	281/126/113	236/114/103	282/126/113
$MA(1)$	56/110/115	402/402/403	161/165/168	0/26/29	12/48/54	0/32/35
$MA(2)$	262/238/258	224/224/224	288/286/287	0/119/142	29/123/139	0/120/143
$MA(3)$	46/34/6	3/3/1	18/18/3	0/28/12	30/29/10	0/28/12
$MA(4)$	22/22/2	0/0/0	5/5/0	18/29/2	53/23/2	17/30/2
$MA(5)$	19/15/1	0/0/0	3/3/1	469 /46/1	255 /34/0	469 /46/1
$ARMA(1, 1)$	343/337/375	353/353/353	438/440/455	0/142/ 203	37/ 157/200	0/141/ 202
$ARMA(1, 2)$	86/89/84	6/6/6	39/38/37	24/92/98	60/86/80	25/92/98
$ARMA(2, 1)$	35/24/18	3/3/4	14/14/15	2/26/21	31/21/18	2/26/21
$ARMA(2, 2)$	57/51/44	2/2/2	13/10/9	201/145/105	177/121/92	201/145/105
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka A.15: Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 50$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	342/406 /176	570/576 /203	436/473 /186	3/ 223 /153	22/ 241 /156	1/186/143
$AR(3)$	24/6/3	9/6/2	19/6/3	2/7/3	16/4/3	3/5/3
$AR(4)$	42/31/1	11/10/0	33/26/1	34/40/2	58/36/2	35/37/2
$AR(5)$	21/10/0	2/2/0	6/3/0	265/13/0	196/14/0	233/13/0
$MA(1)$	0/0/ 255	0/0/ 265	0/0/ 256	0/0/ 255	0/0/ 261	0/0/ 262
$MA(2)$	88/127/51	163/169/59	123/143/52	0/100/46	13/117/47	5/116/46
$MA(3)$	78/63/112	51/48/107	75/62/110	12/81/122	39/87/122	19/95/129
$MA(4)$	92/91/15	55/54/14	72/71/14	76/173/18	99/160/17	97/187/19
$MA(5)$	93/76/21	19/18/15	56/53/17	433 /184/26	341 /164/26	442/198 /28
$ARMA(1, 1)$	0/0/128	0/0/118	0/0/127	0/0/128	0/2/123	0/0/121
$ARMA(1, 2)$	15/7/11	7/5/11	13/6/11	4/6/12	12/12/15	9/7/14
$ARMA(2, 1)$	99/95/184	78/80/171	98/93/182	7/68/188	45/71/183	7/57/186
$ARMA(2, 2)$	106/88/37	35/32/29	69/64/35	164/105/41	159/92/39	149/99/41
Suma v tis.	1/1/0,994	1/1/0,994	1/1/0,994	1/1/0,994	1/1/0,994	1/1/0,994

Tabuľka A.16: Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 1000$

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	4/5/400	129/129/ 547	21/21/ 471	0/5/373	0/7/352	0/5/339
$AR(3)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	1/0/0	13/0/0
$AR(4)$	230/261/34	237/237/31	257/258/33	11/260/33	128/324/44	465/260/33
$AR(5)$	93/47/21	3/3/1	25/24/8	467/64/30	390/55/27	0/64/30
$MA(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(3)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(4)$	0/0/2	0/0/1	0/0/1	0/0/0	0/0/2	0/0/1
$MA(5)$	0/0/40	0/0/10	0/0/27	0/0/73	1/1/107	0/0/112
$ARMA(1, 1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(1, 2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$ARMA(2, 1)$	1/4/95	10/10/10	6/6/39	0/3/91	5/8/81	0/3/85
$ARMA(2, 2)$	672/683/408	621/621/400	691/691/421	522/668/400	475/605/387	522/668/400
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Príloha B

Výsledky simulácií - vybrané modely

Tabuľka B.1: Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 50$ s AR odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	695/176/193	923/192/193	825/184/193	12/172/193	58/174/193	14/172/193
$AR(2)$	126/38/13	55/39/13	94/39/13	19/36/13	61/36/13	17/36/13
$AR(3)$	71/38/1	15/36/1	42/37/1	45/38/1	106/37/1	46/38/1
$AR(4)$	70/39/0	6/31/0	28/34/0	114/42/0	203/41/0	122/42/0
$AR(5)$	38/30/0	1/23/0	11/27/0	810/33/0	572/33/0	801/33/0
Suma v tis.	1/0,321/0,207	1/0,321/0,207	1/0,321/0,207	1/0,321/0,207	1/0,321/0,207	1/0,321/0,207

Tabuľka B.2: Výsledky simulácie $AR(1)$ procesu pre $n = 1000$ s AR odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	732/845/945	992/992/992	927/931/948	0/806/945	62/810/948	0/806/945
$AR(2)$	127/49/52	8/8/8	54/50/51	0/48/52	66/45/49	0/48/52
$AR(3)$	66/49/3	0/0/0	16/16/1	7/51/3	107/51/3	7/51/3
$AR(4)$	47/35/0	0/0/0	1/1/0	30/45/0	172/44/0	30/45/0
$AR(5)$	28/22/0	0/0/0	2/2/0	963/50/0	593/50/0	963/50/0
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka B.3: Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 50$ s AR odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	10/1/2	45/3/4	21/1/2	0/1/2	4/3/4	0/1/2
$AR(2)$	712/840/284	877/889/283	815/858/284	18/ 829/284	83/ 830/284	25/ 829/284
$AR(3)$	130/40/14	55/34/13	97/40/14	25/40/14	113/38/12	31/40/14
$AR(4)$	96/40/0	19/17/0	47/33/0	98/44/0	202/43/0	100/44/0
$AR(5)$	52/27/1	4/5/1	20/16/1	859/34/1	598/34/1	844/34/1
Suma v tis.	1/0,948/0,301	1/0,948/0,301	1/0,948/0,301	1/0,948/0,301	1/0,948/0,301	1/0,948/0,301

Tabuľka B.4: Výsledky simulácie $AR(2)$ procesu pre $n = 1000$ s AR odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/4	0/0/2
$AR(2)$	750/861/946	988/988/988	928/931/947	0/ 842/946	108/ 849/946	0/ 842/946
$AR(3)$	129/49/51	12/12/12	53/50/50	0/49/51	116/49/51	0/49/51
$AR(4)$	75/57/2	0/0/0	14/14/2	27/59/2	210/55/2	27/59/2
$AR(5)$	46/33/1	0/0/0	5/5/1	973/50/1	566/47/1	973/50/1
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka B.5: Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 50$ s AR odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	3/1/3	18/1/3	7/1/3	0/1/3	0/1/3	0/1/3
$AR(2)$	45/110/211	140/171/211	71/120/211	0/108/211	5/115/211	0/108/211
$AR(3)$	273/398/ 237	498/490/237	382/ 424/237	2/ 394/237	45/393/ 237	2/394/ 237
$AR(4)$	82/59/33	59/53/33	77/58/33	13/59/33	89/61/33	18/59/33
$AR(5)$	597/419/0	285/272/0	463/384/0	985/425/0	861/417/0	980/425/0
Suma v tis.	1/0,987/0,484	1/0,987/0,484	1/0,987/0,484	1/0,987/0,484	1/0,987/0,484	1/0,987/0,484

Tabuľka B.6: Výsledky simulácie $AR(5)$ procesu pre $n = 1000$ s AR odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$AR(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(2)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$AR(3)$	0/0/0.114	0/0/0.118	0/0/0.114	0/0/0.114	0/0/0.114	0/0/0.114
$AR(4)$	0/0/0.004	0/0/0	0/0/0.004	0/0/0.004	0/0/0.004	0/0/0.004
$AR(5)$	1/1/0.882	1/1/0.882	1/1/0.882	1/1/0.882	1/1/0.882	1/1/0.882
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Hodnoty v tabuľke sú uvedené v tisícoch

Tabuľka B.7: Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 50$ s MA odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$MA(1)$	604/622/798	892/810/846	742/710/816	9/ 499/788	44/ 526/796	19/ 501/791
$MA(2)$	92/60/59	58/50/36	87/60/53	21/54/60	52/55/55	24/52/57
$MA(3)$	81/56/19	19/27/10	53/43/13	34/69/20	82/66/19	29/70/20
$MA(4)$	90/84/23	19/28/10	57/56/18	119/119/30	197/107/29	128/121/30
$MA(5)$	133/119/4	12/26/1	61/72/3	817/200/5	625/187/4	800/197/5
Suma v tis.	1/0,941/0,903	1/0,941/0,903	1/0,941/0,903	1/0,941/0,903	1/0,941/0,903	1/0,941/0,903

Tabuľka B.8: Výsledky simulácie $MA(1)$ procesu pre $n = 1000$ s MA odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$MA(1)$	754/861/944	994/994/995	948/951/958	0/ 813/944	55/ 818/946	0/ 813/944
$MA(2)$	117/39/45	5/5/5	38/36/38	1/39/45	68/38/43	1/39/45
$MA(3)$	58/42/10	1/1/0	12/11/4	5/45/10	92/43/10	5/45/10
$MA(4)$	40/32/1	0/0/0	2/2/0	33/52/1	202/50/1	30/52/1
$MA(5)$	31/26/0	0/0/0	0/0/0	961/51/0	583/51/0	964/51/0
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka B.9: Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 50$ s MA odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$MA(1)$	473/222/335	790/288/349	642/255/339	4/180/ 332	30/186/ 336	5/180/ 332
$MA(2)$	185/120/48	125/137/44	158/131/48	12/105/49	49/110/48	10/105/49
$MA(3)$	106/96/11	49/97/8	81/96/10	27/94/11	94/100/10	32/96/11
$MA(4)$	100/122/8	19/97/1	58/111/5	126/136/10	222/132/8	136/136/10
$MA(5)$	136/156/1	17/97/1	61/123/1	831/201/1	605/188/1	817/199/1
Suma v tis.	1/0,716/0,403	1/0,716/0,403	1/0,716/0,403	1/0,716/0,403	1/0,716/0,403	1/0,716/0,403

Tabuľka B.10: Výsledky simulácie $MA(2)$ procesu pre $n = 1000$ s MA odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$MA(1)$	25/90/103	283/283/283	106/111/112	0/85/103	11/97/116	0/85/103
$MA(2)$	696/757/835	710/710/711	825/823/835	0/739/835	85/ 736/825	0/739/835
$MA(3)$	147/60/56	6/6/6	55/52/50	2/60/56	106/56/53	4/60/56
$MA(4)$	82/57/6	1/1/0	10/10/3	25/62/6	216/59/6	23/62/6
$MA(5)$	50/36/0	0/0/0	4/4/0	973/54/0	582/52/0	973/54/0
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka B.11: Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 50$ s MA odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$MA(1)$	200/85/127	495 /133/150	309/99/134	0/61/125	15/66/129	2/64/127
$MA(2)$	353/323/248	380/ 426/240	393/364/247	1/ 278/244	58/ 294/245	4/ 276/243
$MA(3)$	132/101/37	58/89/26	103/105/31	5/97/39	81/95/35	7/98/38
$MA(4)$	134/144/10	44/91/8	101/125/10	72/163/12	202/162/11	102/167/12
$MA(5)$	181/180/4	23/94/2	94/140/4	922 /234/6	644 /216/6	885 /228/6
Suma v tis.	1/0,833/0,426	1/0,833/0,426	1/0,833/0,426	1/0,833/0,426	1/0,833/0,426	1/0,633/0,426

Tabuľka B.12: Výsledky simulácie $MA(5)$ procesu pre $n = 1000$ s MA odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$MA(1)$	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0	0/0/0
$MA(2)$	145/273/366	671/671/672	347/357/ 391	0/266/366	24/285/382	0/266/366
$MA(3)$	333/ 380/396	259/259/259	380/381 /387	0/ 379/396	98/ 373/389	0/ 379/396
$MA(4)$	410 /295/227	70/70/69	245/235/213	8/298/227	262/290/219	17/298/227
$MA(5)$	112/52/11	0/0/0	28/27/9	992 /57/11	616 /52/10	983 /57/11
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Tabuľka B.13: Výsledky simulácie $ARMA(1,1)$ procesu pre $n = 50$ s $ARMA$ odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$ARMA(1,1)$	592/311/326	839/336/341	691/322/332	68/218/ 294	125/ 236/307	74/221/ 296
$ARMA(1,2)$	107/90/52	44/89/52	85/90/52	103/93/55	147/94/54	119/92/54
$ARMA(2,1)$	155/45/44	74/43/40	123/46/43	141/50/48	183/47/45	145/49/46
$ARMA(2,2)$	146/155/93	43/133/82	101/143/88	688/240/118	545/224/109	662/239/119
Suma v tis.	1/0,601/0,515	1/0,601/0,515	1/0,601/0,515	1/0,601/0,515	1/0,601/0,515	1/0,601/0,515

Tabuľka B.14: Výsledky simulácie $ARMA(1,1)$ procesu pre $n = 1000$ s $ARMA$ odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$ARMA(1,1)$	713/653/695	978/790/795	896/735/755	3/ 492/609	151/ 532/626	3/ 492/609
$ARMA(1,2)$	121/109/89	13/55/44	52/78/62	77/122/103	151/114/97	81/122/103
$ARMA(2,1)$	89/45/26	9/19/12	34/37/23	44/43/25	168/46/27	44/43/25
$ARMA(2,2)$	77/70/52	0/13/11	18/27/22	876/220/125	530/185/112	872/220/125
Suma v tis.	1/0,877/0,862	1/0,877/0,862	1/0,877/0,862	1/0,877/0,862	1/0,877/0,862	1/0,877/0,862

Tabuľka B.15: Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 50$ s $ARMA$ odhadmi

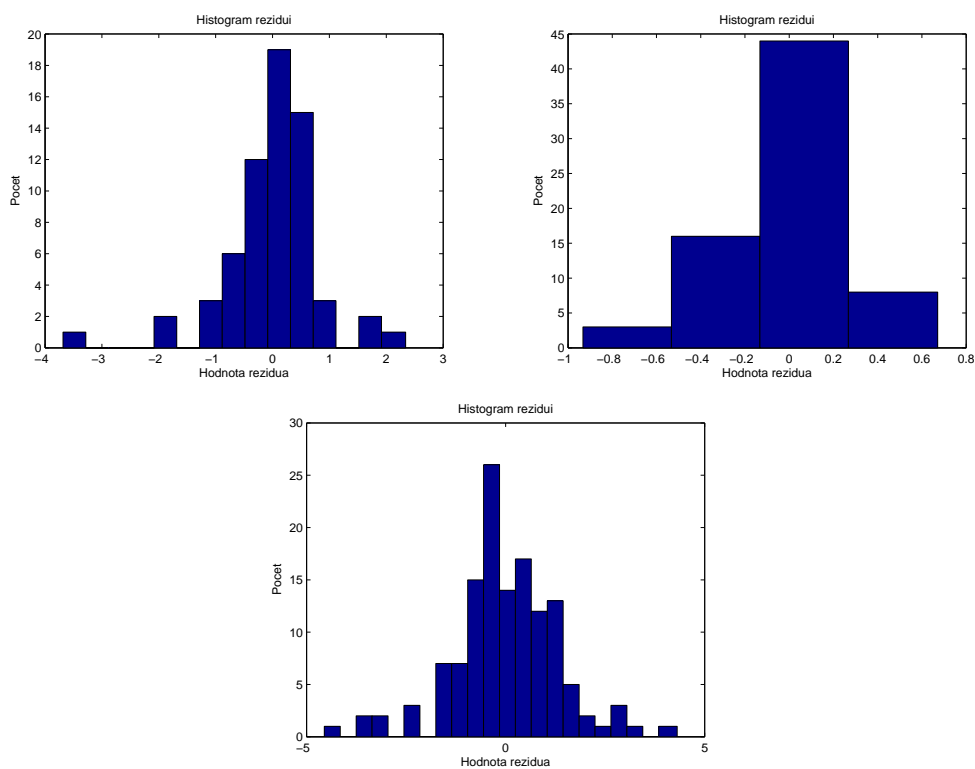
	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$ARMA(1, 1)$	0/119/165	1/122/166	1/120/165	0/119/164	1/119/165	0/119/164
$ARMA(1, 2)$	145/67/29	187/69/29	169/68/29	60/67/28	100/64/28	99/69/28
$ARMA(2, 1)$	508/222/205	646/242/204	570/226/205	127/220/207	232/ 224/206	123/ 217/207
$ARMA(2, 2)$	347/201/39	166/176/39	260/195/39	813/203/39	667/202/39	778/204/39
Suma v tis.	1/0,609/0,438	1/0,609/0,438	1/0,609/0,438	1/0,609/0,438	1/0,609/0,438	1/0,609/0,438

Tabuľka B.16: Výsledky simulácie $ARMA(2, 2)$ procesu pre $n = 1000$ s $ARMA$ odhadmi

	AIC A/B/C	SIC A/B/C	HQIC A/B/C	RMSE A/B/C	MAE A/B/C	UNBIASED A/B/C
$ARMA(1, 1)$	0/1/418	0/1/418	0/1/418	0/1/418	0/1/418	0/1/418
$ARMA(1, 2)$	0/4/8	0/4/8	0/4/8	0/4/8	0/4/8	0/4/8
$ARMA(2, 1)$	4/6/114	51/27/134	11/6/114	0/6/114	10/11/119	0/6/114
$ARMA(2, 2)$	996/989/460	949/968/440	989/989/460	1000/989/460	990/984/455	1000/989/460
Suma v tis.	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1

Príloha C

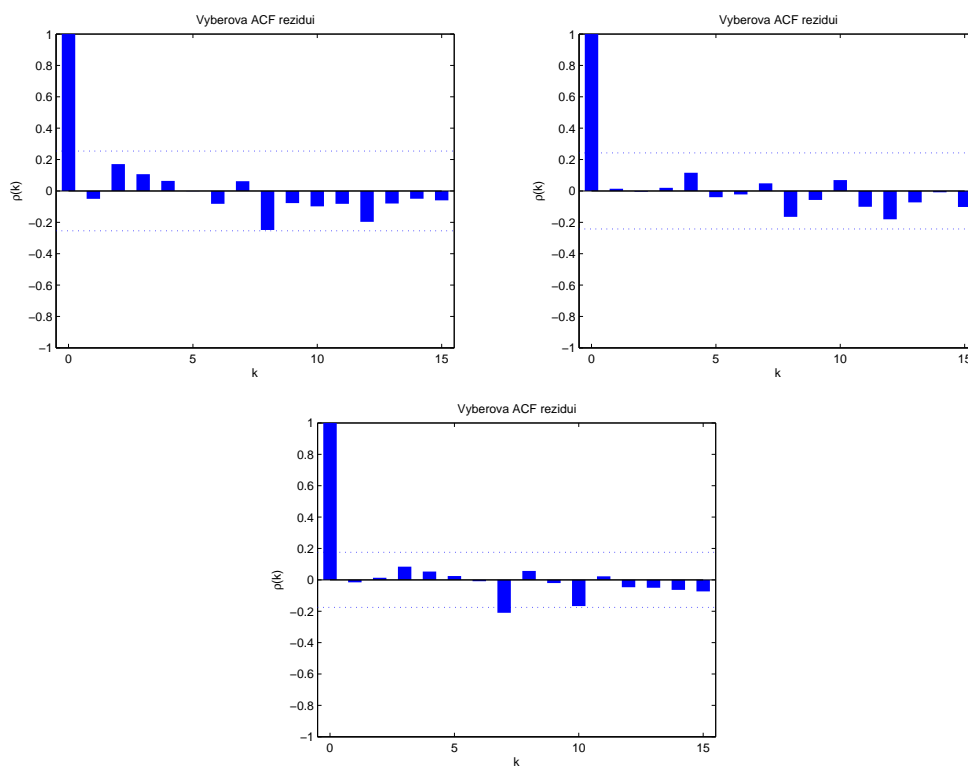
Histogramy reziduí



Obr. C.1: Histogram reziduí lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)

Príloha D

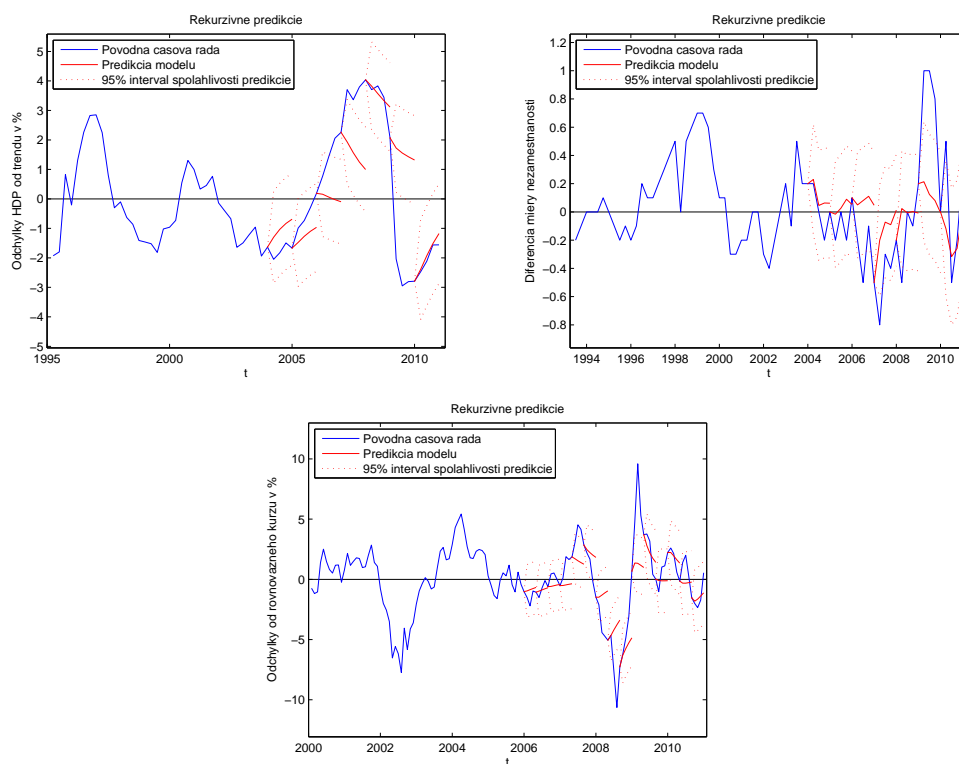
Výberová ACF reziduí



Obr. D.1: Výberová ACF reziduí lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)

Príloha E

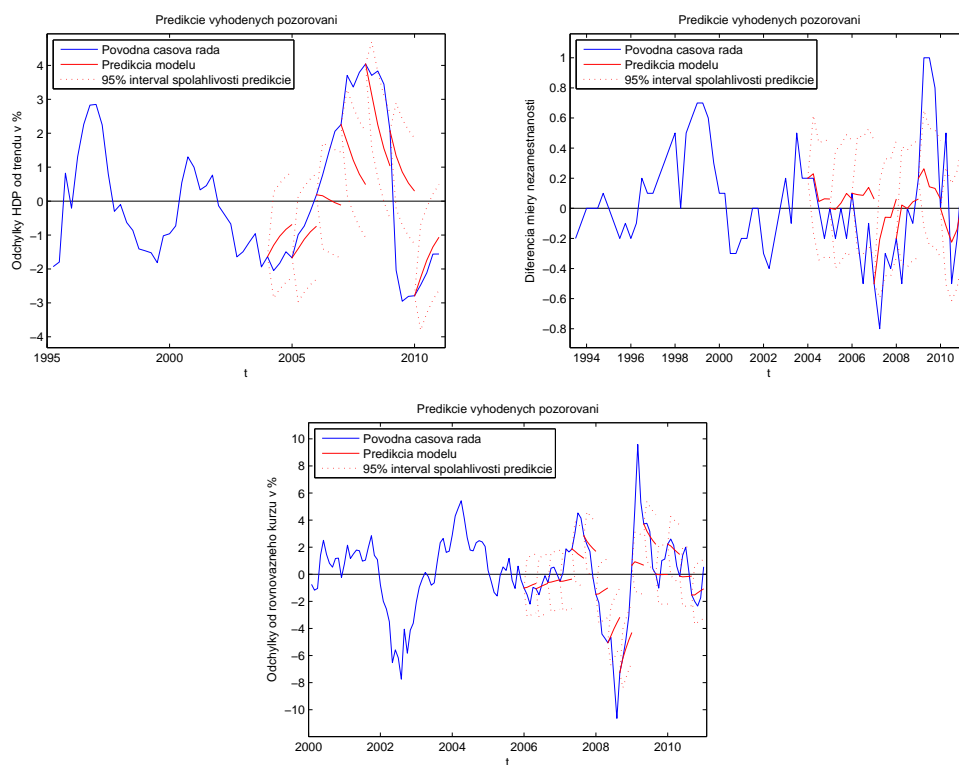
Rekurzívne predikcie



Obr. E.1: Rekurzívne predikcie lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)

Príloha F

Predpovede vyhodnených pozorovaní



Obr. F.1: Predpoveď vyhodnených pozorovaní lineárneho modelu HDP Česka (vľavo hore), miery nezamestnanosti Česka (vpravo hore) a výmenného kurzu CZK/EUR (dole)