

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Evidenčné číslo:

**ANALÝZA VÝVOJA CIEN VYBRANÝCH KOMODÍT A**  
**AKCIÍ NA MEDZINÁRODNÝCH TRHOCH**

**(Diplomová práca)**

**2018**

**Bc. Dávid Slaninka**

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

**ANALÝZA VÝVOJA CIEN VYBRANÝCH KOMODÍT A**  
**AKCIÍ NA MEDZINÁRODNÝCH TRHOCH**

**(Diplomová práca)**

**Študijný program:** Štatistické metódy v ekonómii  
**Študijný odbor:** Kvantitatívne metódy v ekonómii  
**Školiace pracovisko:** Katedra štatistiky FHI  
**Vedúci záverečnej práce:** doc. Ing. Ľubica Sipková, PhD.

**Bratislava, 2018**

**Bc. Dávid Slaninka**

Zadanie:

### **Čestné vyhlásenie**

**Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.**

**Dátum:**

.....

(podpis autora práce)

## ABSTRAKT

SLANINKA, Dávid: *Analýza vývoja cien vybraných komodít a akcií na medzinárodných trhoch*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra štatistiky. – doc. Ing. Ľubica Sipková, PhD.. – Bratislava: FHI EU, 2018, xx strán.

Cieľom diplomovej práce je navrhnúť vhodný prognostický model vývoja časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a časového radu ceny ropy a vytvoriť prognózu na nasledujúce obdobie na základe modelu. To znamená priblížiť prístupy odborníkov v danej oblasti v odbornej literatúre, definovať základné pojmy zo spracovanej oblasti, popísať a vysvetliť metodiku analýzy a predikcie časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy pomocou SARIMA modelov a následné analyzovanie a prognózovanie časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy. Práca je rozdelená do piatich kapitol. Obsahuje x grafov, x obrázkov, x tabuľky a x schému. Prvá kapitola je venovaná definovaniu základných pojmov zo spracovanej oblasti a priblíženiu prístupov odborníkov v oblasti analyzovania a modelovania ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy. V ďalšej časti sa charakterizujú použité metódy analyzovania a prognózovania časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy použitím SARIMA modelov. Ďalšia kapitola sa zaoberá analyzovaním a prognózovaním časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy pomocou štatistického softvéru. V záverečnej kapitole sumarizujeme výsledky práce. Výsledkom riešenia v práci je prognóza na nasledujúce obdobie použitím SARIMA modelov.

## Kľúčové slová:

Akcie, komodity, SARIMA model

## ABSTRACT

SLANINKA, Dávid: *Analysis of the price development of selected commodities and stocks on the international markets.* – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Statistics. doc. Ing. Ľubica Sipková, PhD.. – Bratislava: FHI EU, 2018, xx p.

The aim of the thesis is to design useful prognostic model of Tesla Motors, Inc. share price and crude oil price and create a forecast based on the prognostic model. It means to elucidate specialists approaches in given field in professional literature, define basic terms of given field, define and explain the methodology of time series analyzing and prediction of Tesla Motors, Inc. share price and crude oil price using SARIMA models and after that analyze and forecast Tesla Motors, Inc. share price and crude oil price. This thesis is divided into five chapters. **Theses includes x charts, x pictures, x tables and x scheme.** The first chapter includes defining basic terms of given field and elucidation specialists approaches to analyzing and modeling of Tesla Motors, Inc. share price and crude oil price. Next chapter includes the explanation of used methods and techniques in analyzing time series and forecasting of Tesla Motors, Inc. share price and crude oil price using SARIMA models. Next chapter looks into time series analyzing and forecasting of Tesla Motors, Inc. share price and crude oil price using statistical software. In last chapter, we summarize a result of the thesis. As a result of this thesis is a forecast of Tesla Motors, Inc. share price and crude oil price in future using SARIMA models.

### Key words:

Shares, commodities, SARIMA model

# Obsah

Úvod .....	9
1 Súčasný stav riešenej problematiky .....	10
1.1 Prognóza ceny ropy použitím modelov ARIMA, GARCH a SVM podľa Abdullaha a Shabriho (2014) .....	10
1.2 Modelovanie a prognóza ceny ropy podľa Mensaha (2015).....	11
1.3 O spoločnosti Tesla Motors, Inc. ....	14
1.3.1 Významné pohyby trhovej ceny akcie Tesla Motors, Inc. ....	15
1.4 Model ceny akcie Tesla Motors, Inc. podľa Dale W. Wahla.....	15
1.5 Index Standard and Poor's 500 .....	17
2 Cieľ práce.....	18
3 Metodika práce a metódy skúmania .....	19
3.1 Boxova – Jenkinsova metodológia modelovania časových radov .....	19
3.1.1 Iteračný spôsob hľadania vhodného modelu ARIMA .....	19
3.1.2 Identifikácia modelu .....	21
3.1.3 Odhad parametrov identifikovaného modelu .....	29
3.1.4 Verifikácia modelu.....	29
3.1.5 Prognóza.....	31
3.2 Modely volatility .....	33
3.2.1 ARCH model .....	33
3.2.2 GARCH model .....	35
3.3 Technická (grafická) analýza .....	35
4 Výsledky práce.....	38
4.1 Premenné použité v aplikačnej časti.....	38
4.2 Časový rad ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. na burze.....	38
4.2 Modelovanie a prognóza časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc. metodológiou ARIMA modelov.....	40
4.2.1 Identifikácia modelu .....	40

4.2.2 Odhad parametrov modelu a overenie rezíduí.....	46
4.2.2 Overenie predpokladov o náhodnej zložke modelu.....	49
4.2.3 Prognóza ceny akcie Tesla Motors, Inc. modelom ARIMA .....	53
4.3 Technická (grafická) analýza ceny akcie Tesla Motors, Inc.....	55
4.5 Modelovanie a prognóza časového radu ceny ropy v USD.....	57
4.6.1 Identifikácia modelu .....	57
4.6.2 Overenie predpokladov o náhodnej zložke modelu.....	61
4.6.3 Prognóza ceny ropy modelom ARIMA .....	62
5 Diskusia .....	65
5.1 Fundamentálna analýza firmy Tesla Motors, Inc. ....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Záver.....	67
Použitá literatúra .....	69
Prílohy .....	70



# Úvod

Akcie a komodity sú neoddeliteľnou súčasťou medzinárodného finančného trhu už niekoľko desaťročí. Na svete je čoraz viac ľudí, ktorí investujú do akcií a komodít za účelom vybudovania majetku alebo dosiahnutia zisku za predpokladu, že ich nakúpia lacnejšie ako následne predajú. Nikto nevie s určitosťou predpovedať, či cena akcie alebo komodity bude v budúcnosti rásť, resp. klesať. Jedným zo spôsobov ako možno predpovedať budúci vývoj cien akcií a komodít je modelovanie časových radov cien akcií alebo komodít. Po splnení určitých kritérií a podmienok pri budovaní modelu časového radu nám model poskytne prognózu vývoja cien v budúcom období.

Cieľom diplomovej práce bolo navrhnúť model vývoja časových radov vybranej akcie a komodity a pomocou nich predikovať vývoj ceny danej akcie a komodity. Za analyzovanú akciu sme zvolili akciu Americkej spoločnosti vyrábajúcej elektrické autá Tesla Motors, Inc. a z komodít sme sa rozhodli analyzovať cenu ropy West Texas Intermediate (WTI). Dáta o cenách sme získali z webových stránok Yahoo Finance<sup>1</sup> a Investing.com<sup>2</sup>.

V nasledujúcich kapitolách sa budeme venovať najskôr prístupom odborníkov v oblasti analyzovania a modelovania ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ceny ropy, kde sa napr. pozrieme na modely cien ropy, ktoré vybudovali dátový vedci. Ďalej popíšeme metodiku zvolených modelov časových radov SARIMA a metodiku grafickej analýzy časových radov akcií a komodít. V ďalších kapitolách zanalyzujeme cenu akcie Tesla Motors, Inc. a ropy a následne vytvoríme model a prognózu na nasledujúce obdobie.

Na analýzu a modelovanie časových radov sme použili štatistický softvér STATGRAPHICS Centurion a Microsoft Excel.

---

<sup>1</sup> <https://finance.yahoo.com/quote/TSLA/history?p=TSLA>

<sup>2</sup> <https://www.investing.com/commodities/crude-oil-historical-data>

# 1 Súčasný stav riešenej problematiky

V poslednej dobe sa vedci zaoberajú novými spôsobmi analyzovania, modelovania a prognózovania časových radov cien akcií a komodít, pretože klasické zaužívané prognostické modely ako napr. ARIMA, SARIMA alebo ARCH a GARCH poskytujú nepresné prognózy aj napriek tomu, že pri modelovaní spĺňajú všetky podmienky a predpoklady modelov a javia sa ako vhodné na prognózovanie. Príčinou môže byť aj veľké množstvo faktorov, ktoré pôsobia na trhovú cenu akcií a komodít. Medzi tieto faktory môžeme zaradiť napr. novinky, správy alebo emócie, ktoré môžu spôsobiť výrazné výkyvy trhovými cien. Odborníci a vedci sa preto v súčasnosti viac prikláňajú k používaniu novších a pokročilejších metód, medzi ktoré patria napr. Support Vector Machines (SVM) alebo neurónové siete, ktoré sa používajú pri vývoji umelej inteligencie. Sofistikované modely neurónových sietí umožňujú začleniť do modelu aj vplyv rôznych faktorov (ak je možné ich kvantifikovať), ktoré ovplyvňujú cenu a následne modelovať a analyzovať časový rad spolu s týmito faktormi.

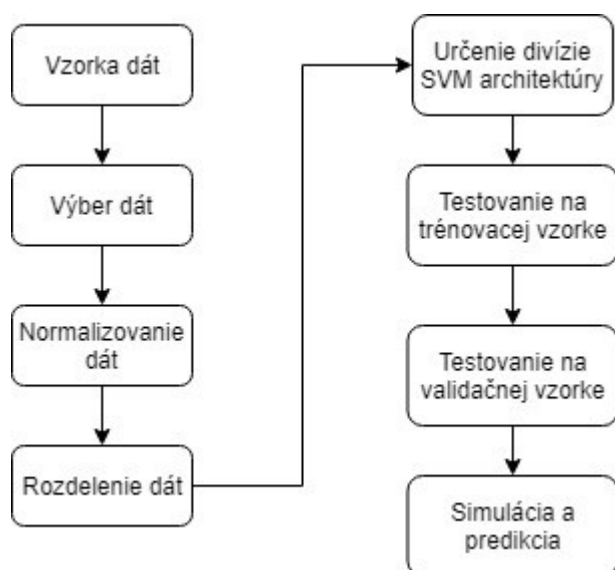
## 1.1 Prognóza ceny ropy použitím modelov ARIMA, GARCH a SVM podľa Abdullaha a Shabriho (2014)<sup>3</sup>

Na svete je stále väčší záujem o predpovede cien ropy. Tento záujem je spôsobený najmä ekonomickou hodnotou tohto produktu. Z toho dôvodu sa v literatúrach objavujú nové prognostické metódy. Abdullah a Shabri sa v svojej štúdií pokúsili porovnať prognostickú presnosť klasických známych modelov ARIMA (kap. 3.1) a GARCH (kap. 3.2) s novou metódou Support Vector Machines (SVM) na denných dátach cien ropy WTI od 1. Januára 1986 do 30. Septembra 2006 (5237 pozorovaní). SVM patrí k metódam strojového učenia, ktoré sa používajú k vývoju umelej inteligencie. Vývojový diagram navrhovanej metódy SVM je zobrazený na obrázku 1.

---

<sup>3</sup> Spracované podľa <https://pdfs.semanticscholar.org/2b34/1ac27473a1f64e4e492342d521501dfb2ff2.pdf>

Obrázok 1 Vývojový diagram metódy SVM



Zdroj: <https://pdfs.semanticscholar.org/2b34/1ac27473a1f64e4e492342d521501dfb2ff2.pdf>

, vlastné spracovanie

Abdullah a Shabri porovnávali modely na základe ich hodnôt štandardnej chyby (RMSE) a priemernej absolútnej chyby (MAE). Výsledky ich zistení sú v tabuľke 1.

Tabuľka 1 Porovnanie RMSE a MAE modelov ARIMA, GARCH a SVM

Methodology	RMSE	MAE
ARIMA	0.9856	0.7204
GARCH	1.0134	0.7392
SVM	0.8684	0.6304

Zdroj: <https://pdfs.semanticscholar.org/2b34/1ac27473a1f64e4e492342d521501dfb2ff2.pdf>

V tabuľke 1 môžeme vidieť, že nová metodológia SVM je na prognózovanie najvhodnejšia, kvôli najnižšej hodnote  $RMSE = 0,8684$  aj  $MAE = 0,6304$ . Druhým najvhodnejším modelom je ARIMA model s hodnotou  $RMSE = 0,9856$  a hodnotou  $MAE = 0,7204$ . Na poslednom mieste sa umiestnil GARCH model s hodnotou  $RMSE = 1,0134$  a  $MAE = 0,7392$ . Táto štúdia odporúča metódu SVM na prognózovanie ceny ropy v budúcnosti.

## 1.2 Modelovanie a prognóza ceny ropy podľa Mensaha (2015)<sup>4</sup>

Volatilita ceny ropy na medzinárodnom trhu zvýšila záujem o skúmanie kolísania jej cien. Mensah v svojej práci skúmal dynamiku mesačných cien ropy Brent za posledné

<sup>4</sup> Spracované podľa [https://mpra.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPra\\_paper\\_67748.pdf](https://mpra.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPra_paper_67748.pdf)

dva desaťročia pomocou Boxovej – Jenkinsovej metodológie ARIMA modelov a poukázal, že ARIMA modely nie sú schopné zachytiť volatilitu ceny ropy. Mensah rozdelil dáta na 2 podmnožiny. Prvých 17 rokov použil na budovanie modelu a posledné 3 roky použil na validáciu presnosti prognóz.

Na stacionarizáciu časového radu Mensah použil prvú nesezónnu diferenciu a logaritmickú transformáciu. Následne zamenil tento stacionarizovaný časový rad za pôvodný časový rad, čiže v jeho práci model ARIMA(1,1) v skutočnosti pri použití pôvodných dát predstavuje model ARIMA(1,1,1) s použitím logaritmickú transformácie.

Navrhnuté modely porovnával pomocou Akaikého (AIC) a Baysesovského (BIC) informačného kritéria. Hodnoty týchto informačných kritérií sú v tabuľke 2.

Tabuľka 2 Porovnanie AIC a BIC navrhnutých modelov

Order	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2
AIC	-400.94	-399.12	-401.41	-399.83	-397.86	-399.63	-397.85	-396.72
BIC	-394.23	-389.23	-394.78	-389.89	-384.59	-389.67	-384.58	-380.13

Zdroj: [https://mpra.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPRA\\_paper\\_67748.pdf](https://mpra.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPRA_paper_67748.pdf)

Podľa Boxa a Darpera (1987) „Všetky modely sú zlé, ale niektoré sú vhodné“. Mensah si zvolil za užitočné modely ARIMA(0,1), ARIMA(1,1), ARIMA(1,0) a ARIMA(2,0).

Pri verifikácii modelu na grafe ACF a PACF zistil, že 13. koeficient autokorelačnej a aj parciálnej autokorelačnej funkcie je štatisticky významný. Príčinu štatistickej významnosti týchto koeficientov pripisoval finančnej kríze z roku 2008. Normalitu náhodnej zložky overil pomocou Ljung – Boxovho testu, ktorého p - hodnota bola väčšia ako 0,05.

Po verifikácii modelov použil modely ARIMA(0,1), ARIMA(1,1), ARIMA(1,0) a ARIMA(2,0) na porovnanie presnosti prognóz na podmnožine dát na to určených. Na porovnanie modelov použil 2 miery presnosti prognóz – priemernú absolútnu chybu (MAE) a priemernú štvorcovú chybu (MSE). Podmnožina dát na validáciu presnosti predstavovala posledné 3 roky pozorovaní. V tabuľke 3 môžeme vidieť porovnanie presnosti prognóz štyroch modelov pre jednotlivé roky z podmnožiny.

Tabuľka 3 Porovnanie MAE a MSE na validačnej podmnožine dát

1. ROK	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)	ARMA(2,0)
MSE	0.0048102	0.0048106	0.0048184	0.0048132
MAE	0.05013	0.050176	0.050123	0.050104

2. ROK	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)	ARMA(2,0)
MSE	0.0034038	0.0034174	0.003378	0.0033874
MAE	0.042573	0.042689	0.042353	0.042431

3. ROK	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)	ARMA(2,0)
MSE	0.0078316	0.0078705	0.0077459	0.0077799
MAE	0.055297	0.05553	0.05479	0.054989

Zdroj: [https://mpira.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPRA\\_paper\\_67748.pdf](https://mpira.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPRA_paper_67748.pdf), vlastné spracovanie

Mensah porovnal hodnoty MSE a MAE v jednotlivých rokoch pre jednotlivé modely v tabuľke 3, tak prišiel k záveru, že model ARIMA(1,1) má v druhom a treťom roku pozorovaní z validačnej podmnožiny údajov najnižšie hodnoty MSE a MAE. V prvom roku pozorovaní z validačnej podmnožiny údajov má najnižšiu hodnotu MSE model AR(1) a najnižšiu hodnotu MAE model ARIMA(2,0). V tomto prípade model ARIMA(1,1) vyprodukoval chyby, ktoré nie sú významne odlišné od ostatných modelov, ale v konečnom dôsledku ho zvolil za najvhodnejší.

Parametre modelu ARIMA (1,1) Mensah odhadol metódou maximálnej vierohodnosti a ich hodnoty sú v tabuľke 4.

Tabuľka 4 Hodnoty parametrov modelu ARIMA (1,1)

Variable	Coefficient	Standard Error	z-Statistics	p-value
$\phi$	0.437833	0.296988	1.474	0.1404
$\theta$	-0.261620	0.318373	-0.8217	0.4112

Zdroj: [https://mpira.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPRA\\_paper\\_67748.pdf](https://mpira.ub.uni-muenchen.de/67748/14/MPRA_paper_67748.pdf)

V poslednom stĺpci v tabuľke 4 vidíme, že p – hodnoty parametrov sú väčšie ako hladina významnosti 0,05, čiže parametre nemôžeme považovať sa štatisticky významné. Výsledný model Mensah zapísal nasledovne:

$$(1 - 0,437B)y_t = (1 - 0,262B)\varepsilon_t$$

$$y_t = 0,437y_{t-1} - 0,262\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

kde  $y_t = (1 - B) \log(x_t)$  a  $x_t$  predstavuje pôvodný časový rad.

Na záver Mensah skonštatoval, že modely ARIMA môžu byť vhodné na prognózovanie niektorých časových radov, no presnosť prognóz za prítomnosti väčších odchýlok a väčšej volatility v časovom rade je väčšinou zlá. Na modelovanie časových radov s týmito vlastnosťami odporúča ARCH modely od Engla (1982) a ich variácie GARCH, EGARCH a APARCH, alebo novšie metódy ako napríklad Support Vector Machines (SVM).

### **1.3 O spoločnosti Tesla Motors, Inc.**

Investori, ktorí chcú nakúpiť akcie určitej spoločnosti sa v prvom rade musia oboznámiť so spoločnosťou, jej vývojom, víziou a produktmi, aby mohli následne identifikovať riziká a faktory, ktoré môžu vplývať na vývoj trhovej ceny danej akcie.

Tesla Motors, Inc. bola založená v roku 2003 skupinou technikov na čele s Elonom Muskem, ktorí chceli dokázať ľuďom, že elektrické autá môžu byť lepšie, rýchlejšie, zábavnejšie ako klasické autá poháňané benzínom alebo dieslom. Misia spoločnosti Tesla je urýchliť svetový prechod na udržateľnú energiu. Tesla verí, že čím rýchlejšie sa svet prestane spoliehať na fosílna palivá a prejde k alternatívam bez emisií, tým lepšie. Dnes Tesla vyrába nie len čisto elektrické autá, ale aj nekonečne škálovateľné produkty na výrobu a skladovanie čistej energie.

V roku 2008 Tesla odhalila prototyp vozidla, Tesla Roadster, s elektrickým pohonom a špičkovou technológiou batérií. Ďalším modelom elektrického auta, ktoré Tesla začala vyrábať je Model S, ktorý sa stal najlepším autom vo svojej triede v každej kategórii. Tesla rozšírila svoju produktovú radu v roku 2015 Modelom X. Tento model je považovaný za najbezpečnejší, najrýchlejší športový úžitkový automobil, ktorý dosiahol hodnotenie 5 hviezdíček za bezpečnosť v každej kategórii organizácie National Highway Traffic Safety Administration. Ďalším míľnikom pre Teslu bolo predstavenie najlacnejšieho Modelu 3 v roku 2016. V tom roku 2017 Tesla predstavila najbezpečnejší a najkomfortnejší kamión sveta s názvom Tesla Semi, ktorý bol navrhnutý aby ušetril majiteľom na palive približne 200 000 USD za milión míľ.

Tesla vyrába aj unikátne energetické riešenia aby vytvorila udržateľný ekosystém energie. Medzi tieto energetické riešenia patrí Powerwall, Powerpack, Solar Panels a Solar Roof, ktoré umožňujú majiteľom domov, firiem spravovať výrobu, skladovanie a spotrebu obnoviteľnej energie.

### *1.3.1 Významné pohyby trhovej ceny akcie Tesla Motors, Inc.*

Medzi významné pohyby trhovej ceny akcie Tesla Motors, Inc. určite patrí najväčší absolútny medzimesačný pokles ceny akcie Tesla Motors, Inc. bol zaznamenaný v Januári 2016 oproti Decembru 2015, kedy cena akcie klesla o 48,81 USD, čo v relatívnom vyjadrení predstavuje pokles o 20,34% (viď príloha 1). V tomto období bola zvýšená volatilita celého trhu (viď graf 1, str. 34). Príčinou týchto nepokojov na trhu boli udalosti ako pokles ceny ropy na 12 ročné minimum, výrazné oslabenie čínskej meny Yuan oproti iným menám a s tým spojené poklesy cien čínskych akcií<sup>5</sup>. Tesla vyrába výhradne iba elektrické autá, čiže výrazný pokles ceny ropy nevyplýval pozitívne na ceny akcií Tesla Motors, Inc., čo mohla byť jedna z príčin poklesu ceny akcií<sup>6</sup>. Ďalšou príčinou bolo zverejnenie podnikových výsledkov Tesla Motors, Inc., kde za 4. kvartál roku 2016 bola firma v strate viac ako sa očakávalo<sup>7</sup>.

V prvých piatich mesiacoch roku 2017 Tesla Motors, Inc. zaznamenala 43,54% nárast ceny akcií (viď príloha 2). Prispel k tomu najmä stále sa zvyšujúci dopyt po elektrických autách Tesla, najmä po Modeli 3 a rekordný kvartálny počet doručených áut<sup>8</sup>. K nárastu ceny dopomohol aj nárast príjmov firmy. V 2. kvartáli 2017 príjmy narástli o viac ako dvojnásobok oproti 1. kvartálu roku 2017<sup>9</sup>.

### **1.4 Model ceny akcie Tesla Motors, Inc. podľa Dale W. Wahla<sup>10</sup>**

Na tému analyzovania a modelovania ceny akcie Tesla Motors, Inc. nie sú verejne publikované žiadne vedecko-odborné práce. Jedným z dátových vedcov, ktorý sa pokúsili modelovať cenu akcie Tesla Motors, Inc. štatistickými modelmi a uverejnili to na internete je Dale W. Wahl. Jeho plánom bolo vytvoriť ARIMA model, ktorý čo najdôvernejšie kopíruje cenu akcie Tesla Motors, Inc. a zakomponovať ho do druhého modelu, ktorý zahŕňa spracovanie prirodzeného jazyka v príspevkoch Elona Muska na sociálnej sieti Twitter, ale aj správ a noviniek z iných zdrojov. Vyjadrenia zakladateľov firiem na Twitteri, ale aj správy majú v krátkodobom horizonte značný vplyv na trhovú cenu akcií ich firiem. Podľa názoru Wahla je cena akcií Tesla Motors, Inc. špekulatívna a mala by byť

---

<sup>5</sup> <https://www.reuters.com/article/us-usa-stocks/dow-sp-off-to-worst-four-day-jan-start-ever-as-china-fears-grow-idUSKBN0UL1BD20160107>

<sup>6</sup> <http://money.cnn.com/2016/02/03/investing/tesla-stock-earnings-elon-musk/index.html>

<sup>7</sup> <http://www.businessinsider.com/why-tesla-stock-is-down-2017-3>

<sup>8</sup> <https://techcrunch.com/2017/07/03/tesla-delivered-22k-vehicles-in-q2-47k-in-the-first-half-of-2017/>

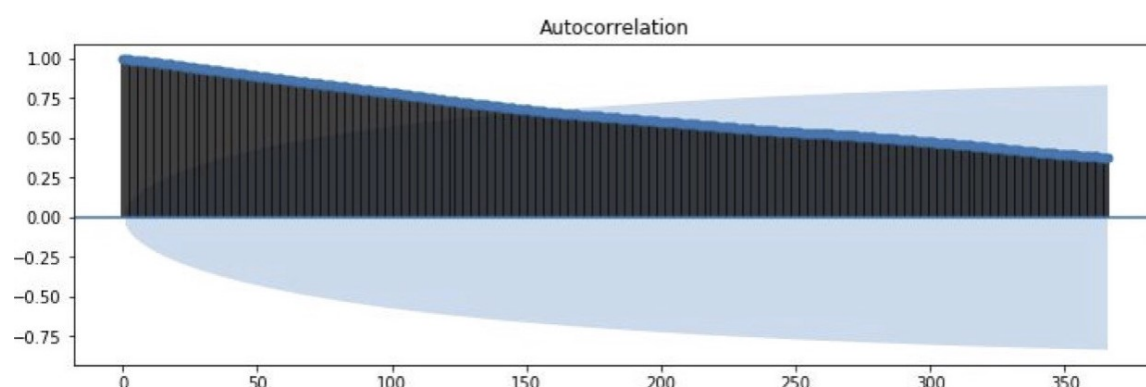
<sup>9</sup> <https://www.cnbc.com/2017/05/03/tesla-first-quarter-2017-earnings.html>

<sup>10</sup> Spracované podľa <https://towardsdatascience.com/tesla-stock-price-prediction-f16a702f67d7>

založená na novinkách (Tesla nikdy nemala ziskový rok a len niekoľko ziskových kvartálov).

Wahl použil k analyzovaniu a modelovaniu denné ceny akcie Tesla Motors, Inc od 29.6.2010 do 22.11.2017, čo spolu predstavovalo 1866 pozorovaní. Dáta rozdelil na 2 podskupiny, kde prvá predstavovala vývoj ceny do roku 2017, na ktorej budoval model. Druhá podskupina predstavovala vývoj ceny v roku 2017, na ktorej testoval prognostickú schopnosť modelu. Z pôvodných dát zostrojil graf autokorelačnej funkcie, ktorá zobrazená je na grafe č.1.

*Graf 1 Autokorelačná funkcia časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc.*



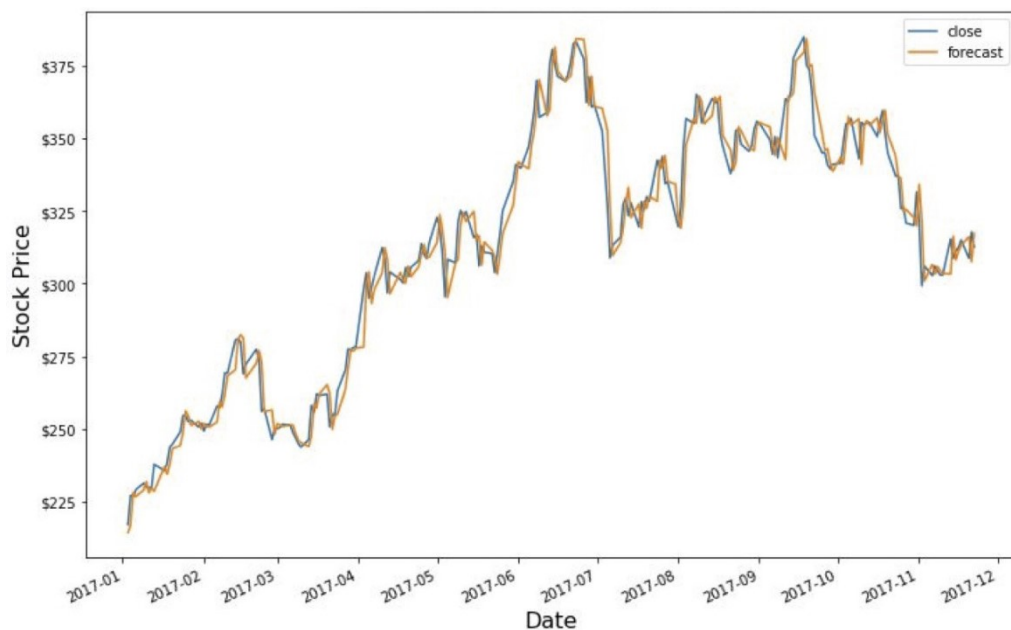
Zdroj: <https://towardsdatascience.com/tesla-stock-price-prediction-f16a702f67d7>

Z grafu autokorelačnej funkcie na grafe č.1 vidíme postupný pokles koeficientov autokorelácie, čo značí prítomnosť trendu v pôvodnom časovom rade. Stacionarizovať sa ho pokúšal rôznymi stupňami diferencovania s rôznou dĺžkou sezónneho diferencovania. Stacionaritu posudzoval Dickey – Fullerovým testom. Nakoniec sa Wahl rozhodol vytvoriť 2 modely, kde vyskúšal 1. sezónnu diferenciu dĺžky 80 a 1. sezónnu diferenciu dĺžky 366. Nie je úplne jasné, ktorú diferenciu považoval za vhodnejšiu.

Na prognózu ceny zo stacionarizovaných dát Wahl použil model ARIMA(1,0,3). Na grafe č.2 môžeme vidieť testovaciu podskupinu dát cien akcie Tesla Motors, Inc. za rok 2017 s ich predikciami na základe modelu ARIMA(1,0,3).



Graf 2 *Porovnanie pôvodných cien a predikcií na základe modelu ARIMA(1,0,3)*



Zdroj: <https://towardsdatascience.com/tesla-stock-price-prediction-f16a702f67d7>

Porovnaním vývoja cien generovaných modelom ARIMA(1,0,3) a pôvodných cien v roku 2017 na grafe č.2 môžeme konštatovať, že model relatívne dobrú prognostickú schopnosť, pretože vývoj ceny generovanej modelom približne kopíruje vývoj reálnej ceny.

### 1.5 Index Standard and Poor's 500

V kapitole 4.2 porovnávame vývoj ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. s indexom Standard and Poor's 500 (S&P 500), ktorý meria vývoj cien Amerických akcií 500 najväčších spoločností. Jednotlivé spoločnosti vyberá tím analytikov a ekonómov agentúry Standard and Poor podľa trhovej kapitalizácií, likvidity, typu odvetvia a ďalších faktorov. S&P 500 je indexom váženej trhovej kapitalizácií, teda váha každej akcie v indexe je úmerná jej trhovej kapitalizácii. Index S&P 500 sa často používa ako meradlo celého Amerického akciového trhu a aj ako benchmark portfólií investičných spoločností.

## 2 Cieľ práce

Hlavným cieľom práce bolo navrhnuť prognostické modely vývoja časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy, ktoré tieto časové rady čo najvernejšie popisujú a pomocou nich predikovať vývoj ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy.

K splneniu hlavného cieľa bolo potrebné naplniť nasledovné čiastkové cieľe:

1. Spracovať a priblížiť prístupy odborníkov v oblasti analyzovania a modelovania ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy a popísať a vysvetliť základné pojmy zo spracovanej oblasti.
2. Spracovať a vysvetliť vhodné metódy na analýzu a modelovanie časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy. Ďalej, spracovať a vysvetliť metódu grafickej (technickej) analýzy.
3. Prakticky aplikovať metódy analýzy časových radov, napr. stacionarizovať časový rad, identifikovať typ modelu, overiť kvalitu modelu pomocou testov na to určených a pokúsiť sa nájsť vhodný model časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy a následne vytvoriť prognózy. Ďalej, prakticky aplikovať metódu grafickej (technickej) analýzy a vyvodiť z nej závery.

## 3 Metodika práce a metody skúmania

### 3.1 Boxova – Jenkinsova metodológia modelovania časových radov

Východiskom pre modelovanie sezónnych časových radov a stacionárnych modelov je Boxova – Jenkinsova metodológia stochastickej koncepcie tvorby modelov. Podľa Rubíkovej (2007) Boxova – Jenkinsova metodológia ARIMA a SARIMA modelov „služi na modelovanie stochastického vývoja časového radu, t.j. na modelovanie náhodnej zložky časového radu (po vylúčení trendu a sezónnosti z časového radu)“. Táto metodológia pripúšťa, že rezíduá môžu byť vzájomne korelované, preto je korelačná analýza, či už grafická alebo číselná, dôležitým nástrojom pomocou ktorého môžeme analyzovať závislosť medzi pozorovaniami prostredníctvom chýb.

Modelovať náhodnú zložku časového radu môžeme vtedy, ak predpokladáme jej stacionaritu. Náhodná zložka časového radu teda musí spĺňať podmienky stacionarity, t.j.<sup>11</sup>:

- náhodné premenné majú strednú hodnotu konštantnú v čase,  $\mu = E(y_t)$
- rozptyl konštantný v čase,  $\sigma^2 = D(y_t) = E(y_t - \mu)^2$
- lineárnu závislosť medzi časovo posunutými náhodnými premennými (kovarianciu), ktorá závisí len od vzdialenosti  $k$  medzi náhodnými premennými,  $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = \gamma_k$

#### 3.1.1 Iteračný spôsob hľadania vhodného modelu ARIMA<sup>12</sup>

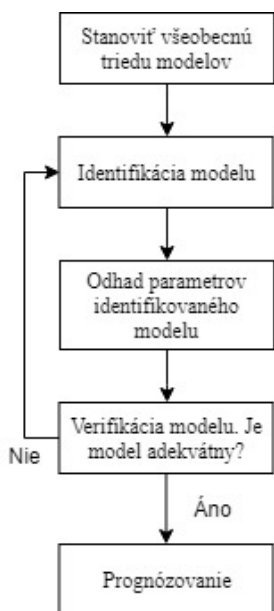
Pri používaní dynamických modelov nám niekedy môže teoretická analýza objasniť nielen vhodný typ modelu, ale môže nám tiež poskytnúť dobré odhady počtu parametrov a hodnôt parametrov. Tie je potom možné skontrolovať analýzou dát. Obrázok 30 sumarizuje iteratívny prístup budovania modelu pre prognózu časového radu.

---

<sup>11</sup> RUBÍKOVÁ, E. Analýza časových radov. 2007 s.195

<sup>12</sup> Spracované podľa Box s. 13

Obrázok 30 Iteratívny postup budovania modelu



Zdroj: Box s 16, vlastné spracovanie

1. Z poznatkov z teórie a praxe stanoviť všeobecnú triedu modelov.
2. Všeobecná trieda modelov je príliš rozsiahla, preto je potrebné identifikovať vhodnú kombináciu parametrov  $(p, d, q)(P, D, Q)$  modelu, ktorá je vhodná na použitie. Uskutočňuje sa to pomocou autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie, kde skúmame ich štatisticky významné koeficienty.
3. Pre predbežne vhodný identifikovaný model sa odhadnú parametre. Predbežné odhady získané počas fázy identifikácie modelu môžu byť v tomto kroku použité ako východiskové hodnoty v rafinovanejších iteračných metódach na odhad parametrov, ako napr. metóda najmenších štvorcov alebo metóda maximálnej vierohodnosti.
4. Cieľom verifikácie modelu je odhaliť prípadné nedostatky vhodnosti modelu a diagnostikovať príčinu. Kontroluje štatistická významnosť parametrov a overujú sa podmienky kladené na náhodnú zložku. Ak nie je identifikovaný žiaden nedostatok, model je pripravený na prognózovanie. Ak zistíme, že model nie je vhodný, iteračný cyklus identifikácie, odhadu parametrov a verifikácie opakujeme, až kým sa nenájde vhodný model.
5. Verifikovaný model použijeme na prognostické účely.

### 3.1.2 Identifikácia modelu

Cieľom identifikácie modelu je získanie prvotnej predstavy o hodnotách parametrov ARIMA alebo SARIMA modelu  $p, d, q$  a  $P, D, Q$  a predbežne odhadnúť hodnoty týchto parametrov. Predbežný špecifikovaný model poskytuje začiatkový bod pre aplikáciu formálnejšej a efektívnejšej metódy odhadu<sup>13</sup>.

S cieľom vybrať čo najvhodnejší model, musíme najskôr časový rad stacionarizovať v rozptyle pomocou vhodného stupňa diferencovania a/alebo použitím logaritmickej transformácie časového radu. Následne pomocou vhodného stupňa diferencovania odstrániť z časového radu trend v prípade, ak sa tam nachádza. Pre sezónne časové rady môžeme použiť 2 druhy diferencií:

1. Nesezónne diferenciie stupňa  $d$ 
  - Lineárny trend možno vylúčiť pomocou prvých diferencií, čiže  $d = 1$ .
2. Sezónne diferenciie stupňa  $D$ 
  - Sezónne diferenciie odstraňujú z časového radu trend aj sezónnosť.

V modeli môžeme kombinovať sezónne aj nesezónne diferenciie. Optimálny stupeň diferencovania časového radu je taká kombinácia nesezónneho stupňa  $d$  a sezónneho stupňa  $D$ , pri ktorom má diferencovaný časový rad najmenší rozptyl. V praxi teda zvyšujeme stupne diferencovania, dokiaľ rozptyl klesá.

#### Autokorelačná a výberová autokorelačná funkcia

Autokorelačná funkcia  $\rho_k$  pre  $k = 1, 2, \dots$  meria silu lineárnej závislosti medzi hodnotami časového radu  $y_t$  a  $y_{t-k}$ . Sledovaná závislosť môže byť zapríčinená koreláciou s ďalšími hodnotami radu  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ . Medzi hodnotami radu  $y_t$  a  $y_{t-k}$  možno v prípade stacionárneho procesu vyjadriť autokorelačnú funkciu (ACF) nasledovne<sup>14</sup>:

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{D(y_t)} \sqrt{D(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Kde  $\gamma_0$  je autokovariančná funkcia definovaná ako:

$$\gamma_k = \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)$$

---

<sup>13</sup> Box s.179

<sup>14</sup> RUBÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 20

a vzhľadom na stacionaritu platí  $D(y_t) = D(y_{t-k}) = \gamma_0$ .

Zvyčajne sú parametre  $\mu$ ,  $\gamma_0$  a  $\rho_k$  neznáme. Strednú hodnotu  $\mu$  stacionárneho procesu odhadujeme výberovým priemerom:

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

kde  $T$  predstavuje počet hodnôt časového radu a  $y_t$  sú hodnoty pozorovaní.

Rozptyl procesu môžeme odhadnúť výberovým rozptylom:

$$s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2$$

Potom odhadom koeficienta autokorelácie  $\rho_k$  je koeficient výberovej autokorelačnej funkcie  $r_k$  definovaný ako<sup>15</sup>:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

Pre  $k = 0, 1, 2, \dots$ , kde

$r_k$  je koeficient autokorelácie v  $k$ -tom oneskorení,

$y_t$  je hodnota pozorovania časového radu v pozorovaní  $t$ ,

$\bar{y}$  je priemer hodnôt pozorovaní časového radu,

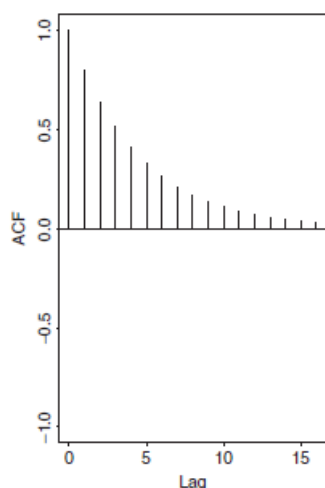
$T$  je celkový počet pozorovaní.

Výberovú autokorelačnú funkciu (VACF) teda chápeme ako autokorelačnú funkciu určenú z hodnôt pozorovaní časového radu  $y_t$ . Pomocou grafického znázornenia VACF dokážeme posúdiť, ktoré koeficienty autokorelácie sú štatisticky významné na zvolenej hladine významnosti, môžeme identifikovať trend v časovom rade, posúdiť stacionaritu a predbežne určiť a predbežne určiť typ modelu a počet jeho parametrov. V prípade nestacionárneho radu s prítomnosťou trendu bude  $r_1$  štatisticky významný a veľmi blízky jednej. Nasledujúce koeficienty autokorelácie budú pomaly klesať k nule. Pre lepšiu predstavu pridávame grafické znázornenie.

---

<sup>15</sup> RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 23

Graf 30 VACF s prítomnosťou trendu v časovom rade



Zdroj: AoFinS s 40

### Parciálna a výberová parciálna autokorelačná funkcia

Parciálna autokorelačná funkcia (PACF) sa líši od ACF tým, že informuje o závislosti medzi hodnotami časového radu  $y_t$  a  $y_{t-k}$  očistenej o vplyv hodnôt ležiacich medzi nimi. Durbin definoval výpočet koeficientov parciálnej autokorelačnej funkcie takto<sup>16</sup>:

$$\phi_{k+1,k+1} = \frac{\rho_{k+1} - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_k \rho_{j,k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_k \rho_{j,j}}$$

$$\phi_{k+1,j} = \phi_{kj} - \phi_{k+1,k+1} \phi_{k,k+1-j}, \text{ pre } j = 1, 2, \dots, p$$

Výberovú parciálnu autokorelačnú funkciu (VPACF)  $f_{k+1, k+1}$  získame nahradením  $\rho_k$  jeho odhadom  $r_k$ . Prvý výberový parciálny koeficient autokorelácie má rovnakú hodnotu ako prvý výberový koeficient autokorelácie, pretože medzi prvými dvomi hodnotami pozorovaní nie sú žiadne ďalšie pozorovania, ktorých vplyv by sme mohli vylúčiť.

### Autoregresný proces p-teho stupňa AR(p)

„Autoregresný proces p-teho stupňa hovorí, že minulé  $p$  hodnoty pozorovaní  $y_{t-i}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) spoločne ovplyvňujú očakávanú hodnotu  $y_t$ , t.j. hodnota  $y_t$  závisí od jej vlastných oneskorených hodnôt. Model AR(p) je podobný modelu viacnásobnej lineárnej

<sup>16</sup> Box J s.86

regresie s oneskorenými hodnotami slúžiacimi ako vysvetľujúce premenné. Všeobecne môžeme model AR(p) zapísať nasledovne<sup>17</sup>:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t$$

kde  $p > 0$ ,  $a_t$  je biely šum s nulovou strednou hodnotou a rozptylom  $\sigma_a^2$ .

Pomocou spätného operátora B, ktorý predstavuje oneskorenie o jedno obdobie ( $B^p y_t = y_{t-p}$ ) možno tento proces zapísať:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) y_t = a_t$$

„Parameter  $\phi_1$  možno chápať ako indikátor pamäti procesu. Čím viac sa jeho absolútna hodnota blíži k jednej, tým je pamäť procesu dlhšia a naopak. Ak sa hodnota parametra rovná nule, proces nemá žiadnu pamäť a ide o proces typu bieleho šumu“.<sup>18</sup>

Proces AR(p) musí spĺňať podmienky stacionarity. Môžeme ho považovať za stacionárny, ak platí:

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_k < 1$$

Pre proces AR(2) je potrebné doplniť ešte tieto podmienky:

$$-\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

Pomocou VPACF stacionárneho časového radu môžeme predbežne identifikovať počet parametrov AR(p). Keď je jediný štatisticky významný prvý koeficient  $f_{1,1}$ , môžeme predbežne uvažovať o modeli AR(1); v prípade štatistickej významnosti prvých dvoch koeficientov  $f_{1,1}$  a  $f_{1,2}$ , môžeme predbežne určiť model AR(2).

### Sezónny autoregresný model P-teho stupňa SAR(P)

Ak sa v časovom rade nachádza štatisticky významná sezónnosť dĺžky  $s$ , potom existuje závislosť medzi hodnotami radu  $y_t$  a hodnotami radu posunutými o  $s$  pozorovaní  $y_{t-s}$ . Proces SAR(P)<sub>s</sub> zapíšeme:

<sup>17</sup> Spracované podľa AoFinTS s 38

<sup>18</sup> RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 29



$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-s} + \dots + \phi_p y_{t-ps} + a_t$$

Pomocou spätného operátora proces SAR(P)<sub>s</sub> zapíšeme:

$$(1 - \phi_1 B^s - \dots - \phi_p B^{ps})y_t = a_t$$

Proces SAR(P) je stacionárny, ak je možné ho prepísať do tvaru sezónneho lineárneho procesu:

$$Y_t = \Psi(B^s)a_t$$

Pomocou VPACF stacionárneho časového radu s prítomnou sezónnosťou dĺžky  $s$  môžeme predbežne identifikovať počet parametrov SAR(P). Ak je koeficient  $f_{1,s}$  štatisticky významný a hodnoty koeficientov  $f_{1,2s}, f_{1,3s}, \dots$ , pomaly klesajú k nule, môžeme predbežne uvažovať o modeli SAR(1).

### Proces kľavých priemerov q-teho stupňa MA(q)

„Existuje niekoľko spôsobov ako popísať MA(q) modely. Jednou z možností je chápať ho ako jednoduché rozšírenie bieleho šumu. Ďalším prístupom je zaobchádzať s ním ako s modelom AR(p) s veľkým alebo nekonečným stupňom  $q$  s parametrickými obmedzeniami“.<sup>19</sup> Každopádne, takýto AR(p) model nie je reálny, preto namiesto vysokého stupňa AR(p) procesu je vhodné zaradiť do modelu proces kľavých priemerov MA(q). „Podstata procesov kľavých priemerov sa zakladá na myšlienke opísať vývoj hodnôt časového radu  $y_t$  prostredníctvom časového radu náhodných porúch  $a_t$ “.<sup>20</sup> Hodnoty časového radu  $y_t$  teda lineárne závisia od  $q$  oneskorených hodnôt náhodných porúch  $a_t$ .

Ak  $E(y_t) = 0$ , potom MA(q) model môžeme zapísať v tvare<sup>21</sup>:

$$y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Spätný operátor umožňuje aj takýto zápis:

$$y_t = \theta_q(B)a_t$$

<sup>19</sup> AofFinTS s 57

<sup>20</sup> RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 35

<sup>21</sup> BOX, G. E. P., JENKINS, G. M., REISNEL, G. C.: *Time Series... s 68*

K jednoznačnej interpretácii výsledkov musí byť proces MA(q) invertibilný. Podmienka invertibility je splnená, ak korene polynomickej rovnice  $(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) = 0$  ležia mimo jednotkového kruhu, resp. ak platí:

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q < 1$$

Pre proces MA(2) je potrebné doplniť ešte tieto podmienky invertibility:

$$-\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

Z VACF stacionárneho časového radu môžeme predbežne určiť počet parametrov MA(q). Napr., keď je jediný štatisticky významný koeficient  $r_1$ , môžeme predbežne určiť model MA(1); keď sú štatisticky významné koeficienty  $r_1$  a  $r_2$ , môžeme predbežne určiť model MA(2).

### Sezónny proces kľzavých priemerov SMA(Q)

Ak je v časovom rade prítomná štatisticky významná sezónnosť dĺžky  $s$ , potom existuje závislosť medzi hodnotami radu  $y_t$  a oneskorenými hodnotami náhodných porúch  $a_{t-s}$ . Proces SMA(Q)<sub>s</sub> zapíšeme<sup>22</sup>:

$$y_t = a_t - \theta_1 a_{t-s} - \theta_2 a_{t-2s} - \dots - \theta_P a_{t-Qs}$$

S použitím spätného operátora ho môžeme zapísať v tvare:

$$y_t = (1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s} - \dots - \theta_P B^{Qs}) a_t = \theta_Q(B)^s a_t$$

„Z predchádzajúceho zápisu môžeme konštatovať, že proces SMA(Q)<sub>s</sub> je vždy stacionárny a autokorelačná funkcia bude nadobúdať nenulové hodnoty len v sezónnych posunoch  $s, 2s, \dots, Qs$ . Proces je invertibilný, ak korene rovnice  $\theta_Q(B)^s = 0$  ležia vnútri jednotkového kruhu.“<sup>23</sup>

Z VACF stacionárneho časového radu s prítomnou sezónnosťou dĺžky  $s$  môžeme predbežne určiť počet parametrov SMA(Q). Keď je koeficient autokorelácie  $r_s$  štatisticky

<sup>22</sup> RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 80

<sup>23</sup> RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 80

významný a hodnoty koeficientov  $r_{2s}, r_{3s}, \dots$ , pomaly klesajú k nule, môžeme predbežne uvažovať o modeli SMA(1).

### Zmiešané procesy ARIMA(p, d, q)

Časové rady s krátkou pamäťou považujeme za stacionárne časové rady a nestacionárne časové rady v ktorých sa vplyv poruchy z minulého obdobia neustále prejavuje označujeme ako procesy s dlhou pamäťou. Rozdiely v generujúcich procesov časových radov spôsobujú ich odlišnosti a to následne zohráva úlohu vo výbere správneho modelu. Nestacionarita je často prítomná v časových radoch vývoja finančných ukazovateľov. Preto sa pri ich modelovaní a prognózovaní využívajú modely ARIMA(p, d, q), kedy pomocou diferencie  $d$  časový rad stacionarizujeme. ARIMA predstavuje skrátený názov pre autoregresný integrovaný proces kľzavých priemerov. Výsledný proces môžeme zapísať vo forme<sup>24</sup>:

$$\varphi(B)z_t = \phi(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$$

kde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

kde

1.  $\phi(B)$  je autoregresný operátor; predpokladá sa, že je stacionárny, t.j. korene rovnice  $\phi(B) = 0$  ležia mimo jednotkového kruhu,
2.  $\theta(B)$  je operátor kľzavých priemerov; predpokladá sa, že je invertibilný, t.j. korene rovnice  $\theta(B) = 0$  ležia mimo jednotkového kruhu.

„Keď  $d = 0$ , tento model bude reprezentovať stacionárny proces,“<sup>25</sup> čiže časový rad s krátkou pamäťou: Takýto model sa označuje ako ARMA (p, q).

### Zmiešané procesy SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)<sub>s</sub>

---

<sup>24</sup> Box s 94

<sup>25</sup> Box s 94

Kombinovaním procesov AR(p), MA(q), SAR(P), SMA(Q) pri modelovaní nestacionárnych časových radoch nám vzniká zmiešaný proces SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)<sub>s</sub>. Výsledný model zapíšeme nasledovne<sup>26</sup>:

$$\Phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d\nabla_s^D y_t = \theta_q(B)\theta_Q(B^s)a_t$$

kde

$$\nabla^d y_t = (1 - B)y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\nabla_s^D y_t = (1 - B^s)y_t = y_t - y_{t-s}$$

$$\Phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) - \text{nesezónny operátor procesu AR(p)}$$

$$\Phi_P(B^s) = (1 - \phi_1 B^s - \phi_2 B^{2s} - \dots - \phi_Q B^{Qs}) - \text{sezónny operátor procesu SAR(P)}$$

$$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) - \text{nesezónny operátor procesu MA(q)}$$

$$\theta_Q(B^s) = (1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s} - \dots - \theta_Q B^{Qs}) - \text{sezónny operátor procesu MA(Q)}$$

Pri sezónnych časových radoch je najskôr potrebné určiť, či časový rad stacionarizujeme pomocou sezónnej diferencie, alebo bude nutné použiť aj nesezónnu diferenciu. Zvyčajne sa nepoužíva vyššia ako prvá sezónna diferencia a zároveň viac ako dve diferencie spolu, t.j. sezónna aj nesezónna. Neodporúča sa ani kombinovať SAR a SMA procesy v jednom modeli<sup>27</sup>. Ak v časovom rade so sezónnosťou dĺžky  $s$  použijeme sezónne diferencie stupňa  $D$ , počet pozorovaní radu sa skráti o  $D * s$  hodnôt. Po nesezónnych diferenciách stupňa  $d$  sa počet pozorovaní časového radu skráti o  $d$  hodnôt.

Sezónne integrované procesy SARIMA ponímame ako rozšírenie modelov ARIMA, ale aj ako špeciálne tvary modelov ARIMA. Postupy na identifikáciu modelov, odhadovanie parametrov modelov a prognózovanie pomocou SARIMA modelov sú podobné ako postupy v ARIMA modeloch.

<sup>26</sup> Box s 310

<sup>27</sup> RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 83

### 3.1.3 Odhad parametrov identifikovaného modelu

Na odhad parametrov modelov časových radov sa používajú rôzne metódy. Pre ARIMA modely sa na odhad parametrov najčastejšie používa nelineárna metóda najmenších štvorcov, ktorá vychádza z prvotných odhadov parametrov, ktoré sa iteratívne inovujú tak dlho, pokiaľ sa nedosiahnu vopred špecifikované kritéria konvergenzie. Metóda najmenších štvorcov je založená na princípe minimalizovania sumy štvorcov diferencií. Pri modeloch ARIMA(p, d, q) bude k získaniu odhadov parametrov potrebné minimalizovať  $\sum \hat{a}_t^2$ . Nelineárnu metódu najmenších štvorcov sme použili v aplikačnej časti tejto práce.

Metódy odhadov parametrov s iteračnými cyklami umožňujú získanie odhadov smerodajných odchýlok odhadov parametrov, s pomocou ktorých je možné konštruovať t-testy, ktoré slúžia na testovanie parametrov modelu. Negatívom týchto testov je nesprávna vypovedacia schopnosť v niektorých prípadoch práve kvôli iteračnému spôsobu získania odhadu smerodajných odchýlok<sup>28</sup>.

Ďalšou metódou na odhad parametrov ARIMA modelov je metóda maximálnej vierohodnosti, ktorej výhodou je, „že pri odhade parametrov modelu využíva všetku informáciu obsiahnutú v dátach, nie len prvé a druhé momenty, ako je to v prípade metódy najmenších štvorcov. Je to metóda, ktorú možno aplikovať vo veľmi rozmanitých situáciách a odhady, získané použitím tejto metódy, majú dobré vlastnosti v porovnaní s inými metódami“.<sup>29</sup>

### 3.1.4 Verifikácia modelu

V tejto fáze Boxovej – Jenkinsovej iteračnej metódy sa zameriavame hlavne na štatistickú významnosť parametrov modelu a splnenie podmienok bieleho šumu o náhodnej zložke. Parametre modelu sú štatisticky významné, ak ich p – hodnota je menšia ako zvolená hladina významnosti  $\alpha$ .

Biely šum je pravdepodobnostný model náhodných premenných  $a_t$  s podmienkami: Pre každé  $t$  platí:

#### 1. Stredná hodnota $a_t$ je nula:

---

<sup>28</sup> ARLT, J. 1999. *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*. Praha : Grada, 1999. s 66

<sup>29</sup> RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 54

$$E(a_t) = 0$$

## 2. Rozptyl $\varepsilon_t$ je konštanta:

$$D(a_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

Splnenie tohto predpokladu sa nazýva homoskedasticita.

## 3. Vzájomná lineárna nezávislosť:

$$\text{cov}(a_t, a_{t-k}) = \text{cov}(a_t, a_{t+k}) = 0$$

## 4. Náhodné premenné majú normálne rozdelenie:

$$a_t \sim N(0; \sigma_a^2)$$

Detailné informácie o testoch, ktoré určujú, či model spĺňa podmienky bieleho šumu o náhodnej zložke nájdete v RUBÍKOVÁ, E. Analýza časových radov. 2007.

### Informačné kritériá na zvolenie vhodného modelu

Ak máme viac vhodných modelov, ktoré spĺňajú podmienky o náhodnej zložke a ich parametre sú štatisticky významné, tak na výber najvhodnejšieho modelu môžeme použiť informačné kritériá, akým je AIC (Akaikeho informačné kritérium) navrhnuté Akaikeom alebo BIC (Bayesovo informačné kritérium) navrhnuté Schwarzom. Myšlienkou týchto informačných kritérií je hľadanie kompromisu medzi príliš nízkym rádom modelu, ktorý zvyšuje rozptyl rezíduí a príliš vysokým rádom modelu, ktorý znižuje rozptyl rezíduí. Lepším modelom je model s nižšou hodnotou informačného kritéria.

AIC je jedno z najpoužívanějších kritérií, ktoré je založené na výbere parametrov modelu pri minimalizovaní zápornej hodnoty logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti penalizovanej počtom parametrov v modeli. Matematicky to vyjadríme ako<sup>30</sup>:

$$AIC_{p,q} = \frac{-2 \ln(\text{maximálna vierohodnosť}) + 2r}{n} \approx \ln(\hat{\sigma}_a^2) + r \frac{2}{n} + k$$

kde  $\hat{\sigma}_a^2$  je odhad maximálnej vierohodnosti,

$n$  je počet pozorovaní,

$r$  je počet odhadovaných parametrov v modeli

$k$  je konštanta.

---

<sup>30</sup> Box s193

BIC na rozdiel od AIC používa k penalizácii okrem informácií o počte parametrov aj logaritmus dĺžky časového radu, ktorý sa analyzuje. BIC definujeme rovnicou:

$$BIC_{p,q} = \ln(\hat{\sigma}_a^2) + r \frac{\ln(n)}{n}$$

kde  $\hat{\sigma}_a^2$  je odhad maximálnej vierohodnosti,  
 $n$  je počet pozorovaní,  
 $r$  je počet odhadovaných parametrov v modeli.

### 3.1.5 Prognóza<sup>31</sup>

V tejto kapitole sa budeme zaoberať prognózou a ukážeme si ako prognózy minimálnej priemernej štvorcovej chyby môžu byť generované z 3 rôznych tvaroch modelu. Pozorovanie  $y_{t+l}$ ,  $l \geq 1$  generované ARIMA procesom môžeme vyjadriť v 3 tvaroch:

#### 1. Z diferenčnej rovnice

Priame použitie diferenčnej rovnice nám umožňuje vyjadriť aktuálnu hodnotu procesu  $y_t$  z predchádzajúcich hodnôt  $y$  a aktuálnych a predchádzajúcich hodnôt  $a$ , teda náhodných šokov. Takže keď<sup>32</sup>

$$\varphi(B) = \Phi(B)(1-B)^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_1 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}$$

tak všeobecný ARIMA model s  $\theta_0 = 0$  môžeme zapísať ako

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_{p+d} y_{t-p-d} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t$$

a prognózu pozorovania  $y_{t+l}$  zapíšeme nasledovne:

$$y_{t+l} = \varphi_1 y_{t+l-1} + \dots + \varphi_{p+d} y_{t+l-p-d} - \theta_1 a_{t+l-1} - \dots - \theta_q a_{t+l-q} + a_{t+l}$$

#### 2. Ako nekonečne vážená suma súčasných a predchádzajúcich šokov $a_j$

Všeobecný zápis ARIMA modelu v tvare nekonečnej váženej sumy súčasných a predchádzajúcich šokov<sup>33</sup>:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (A_0 + A_1 \Phi^j) a_{t-j}$$

$$\text{kde } A_0 = \frac{1-\theta}{1-\Phi}; A_1 = \frac{\theta-\Phi}{1-\Phi}; \Psi_j = A_0 + A_1 \Phi^j$$

Prognózu pozorovania  $y_{t+l}$  zapíšeme ako:

<sup>31</sup> Spracované podľa box 129-131

<sup>32</sup> Box s 97

<sup>33</sup> Box s 99

$$y_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j a_{t+l-j}$$

kde  $\Psi_0 = 1$  a váhy  $\Psi$  získame z

$$\varphi(B)(1 + \Psi_1 B + \Psi_2 B^2 + \dots) = \theta(B)$$

### 3. Ako nekonečne vážená suma predchádzajúcich pozorovaní plus náhodný šok

ARIMA model môžeme v tvare nekonečne váženej sumy predchádzajúcich pozorovaní plus náhodný šok zapísať v tvaroch<sup>34</sup>:

$$y_{t-1}(\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$$

ak  $d \geq 1$ , kde  $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$ , alebo

$$\pi(B)y_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) y_t = a_t$$

ak  $d = 0$

Prognózu pozorovania  $y_{t+l}$  zapíšeme nasledovne:

$$y_{t+l} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t+l-j} + a_{t+l}$$

ak  $d=0$

$$y_{t+l-1}(\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t+l-j}$$

ak  $d \geq 1$ , kde  $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$  a váhy môžeme získať z

$$\varphi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)\theta(B)$$

### Prognóza sezónnych časových radov

Všeobecný zápis prognózy sezónnych časových radov je komplikovaný. Pomocou diferenčnej rovnice môžeme prognózu modelu použitého v kap. 4.2.3 všeobecne zapísať v tvare:

---

<sup>34</sup> Box s 105



$$y_{t+l} = \Phi_1 y_{t+l-s-d} + \dots + \Phi_P y_{t+l-Ps-d} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-s-d} - \dots - \theta_Q \varepsilon_{t+l-Qs-d} + \varepsilon_t \quad ????$$

$$y_{t+l} = \Phi_1 y_{t+l-s} + \dots + \Phi_P y_{t+l-Ps} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-s} - \dots - \theta_Q \varepsilon_{t+l-Qs} + \varepsilon_t$$

Zo získaných prognóz ďalej analyzujeme presnosť týchto prognóz, ktoré meriame mierami presnosti prognóz. Patria tu:

- Priemerná chyba (ME)
- Priemerná absolútna chyba (MAE)
- Priemerná štvorcová chyba - rozptyl chýb (MSE)
- Priemerná percentuálna chyba (MPE)
- Priemerná absolútna percentuálna chyba (MAPE)

Informácie o výpočtoch a popisy mier presnosti prognóz sú uvedené v RUBÍKOVÁ, E. Analýza časových radov. 2007.

### 3.2 Modely volatility<sup>35</sup>

Na modelovanie finančných časových radov sú vhodné aj modely volatility. Podľa Rublikovej a Prihodovej (2008) „v porovnaní s inými časovými radmi, majú časové rady finančných ukazovateľov určité charakteristické vlastnosti, ktoré sú dané finančným trhom a jeho mikroštruktúrou. Základným znakom finančných časových radov je vysoká frekvencia pozorovaní. To videlo k zosilneniu cplyvov nesystematických faktorov na vývoj týchto časových radov“. Modely finančných časových radov sa označujú aj ako modely podmienenej heteroskedasticity.

#### 3.2.1 ARCH model

Autoregresné podmienené heteroskedastické modely (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity – ARCH) sú založené na podmienenom rozptyle náhodných porúch  $a_t$ , ktorý sa v čase mení. Tieto modely nám umožňujú modelovať závislosť podmieneného rozptylu  $h_t$  od  $q$  oneskorených hodnôt náhodných porúch. Pre podmienený rozptyl tohto modelu platí:

$$h_t = \zeta + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q a_{t-q}^2$$

<sup>35</sup> Spracované podľa RUBLÍKOVÁ, E - PRÍHODOVÁ, I. 2008. *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s.85 - 97

Jeho kladné hodnoty zaručuje splnenie dvoch podmienok<sup>36</sup>:  $\zeta > 0$  a  $\alpha_j \geq 0$ , pre  $j = 1, 2, \dots, q$ .

V tvare autoregresného AR(q) modelu pre proces  $a_t^2$  môžeme ARCH model zapísať v tvare rovnice ako:

$$a_t^2 = \zeta + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q a_{t-q}^2 + v_t$$

kde  $v_t = a_t^2 - h_t$

S použitím spätného operátora ho môžeme zapísať v tvare:

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) a_t^2 = \zeta + v_t$$

Aj parametre modelu ARCH musia spĺňať podmienky stacionarity. Model považujeme za stacionárny ak korene rovnice

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) = 0$$

ležia vnútri jednotkového kruhu.

Pred odhadom parametrov modelu je potrebné otestovať prítomnosť lineárnej podmienenej heteroskedasticity v časovom rade náhodných porúch. Tento test je založený na princípe Langererových multiplikátorov, kde sa testuje nulová hypotéza o podmienenej homoskedasticite oproti alternatívnej hypotéze o podmienenej heteroskedasticite.

$$H_0 : \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_q$$

$$H_1 : \text{non } H_0$$

Testovacie kritérium:

$$F_{t,M} = \frac{\frac{ESS_0 - ESS_1}{q}}{\frac{ESS_1}{T - q - 1}}$$

kde ESS je súčet štvorcov rezíduí. Za predpokladu zamietnutia alternatívnej hypotézy môžeme rozdelenie testovacieho kritéria aproximovať rozdelením  $F(q, T - q - 1)$ . Tento test sa zvykne označovať aj ako ARCH effect test.

---

<sup>36</sup> MILLS, T. C.: *Time series techniques for economists*. Cambridge: Cambridge university Press, 1990, s. 326 - 336

### 3.2.2 GARCH model

Pri modelovaní finančných časových radov pomocou ARCH modelov je niekedy negatívom nutnosť odhadovania parametrov vysokého stupňa. Tento problém sa dá obísť použitím rozšírenia ARCH modelov o oneskorený podmienený rozptyl. Takéto modely nazývame zovšeobecnené podmienené heteroskedastické modely (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity – GARCH).<sup>37</sup>

Podmienený rozptyl všeobecného modelu GARCH(p, q) zapíšeme v tvare:

$$h_t = \zeta + \sum_{j=1}^q \alpha_j a_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

Jeho kladné hodnoty zaručujú podmienky<sup>38</sup>:  $\zeta > 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$ , pre  $j = 1, 2, \dots, q$  a  $\beta_i \geq 0$  pre  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Model GARCH(p, q) môžeme zapísať v tvare:

$$a_t^2 = \zeta + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \beta_i) a_{t-j}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} + v_i$$

Tento model je stacionárny, ak korene rovnice **hore** ležia vnútri jednotkového kruhu.

### 3.3 Technická (grafická) analýza<sup>39</sup>

Metóda technickej (grafickej) analýzy je založená na odhaľovaní pravidelne sa opakujúcich vzorov, resp. formácií. Túto metódu môžeme aplikovať buď na celkový trh, kedy je cieľom identifikácia primárneho trendu celého trhu, alebo aj na jednotlivé akcie, komodity a menové páry, kedy sa pokúšame získať predajný alebo nákupný signál. Metóda technickej analýzy sa využíva skôr na krátkodobé ako na dlhodobé obchodovanie.

Na základe historických analýz sa vytvorili štandardizované vzory chovania vývoja trhových cien, ktoré slúžia pri prognózovaní budúcich cien. Medzi tradičné grafické vzory môžeme zaradiť:

---

<sup>37</sup> Pozri tiež BOLLERSLEV, T.: *Generalized autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. In: Journal of Econometrics Vol. 31(1986), s.307 - 327

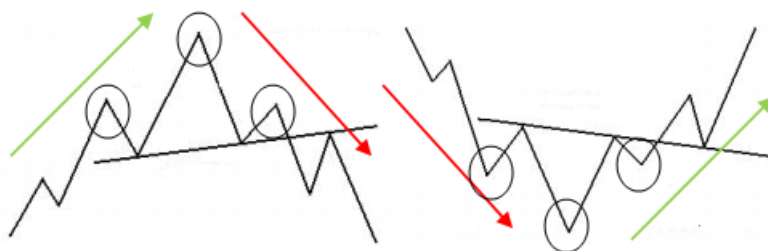
<sup>38</sup> BOLLERSLEV, T.: *A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return*. In: The Review of Economic and Statistics. S. 543 - 544

<sup>39</sup> Spracované podľa

## 1. Hlava a ramená

Tento vzor vrcholov a dien je najznámejší spomedzi všetkých formácií. Vzor obsahuje vrchol (hlavu), oddelenú dvoma menšími vrcholmi (ramenami), ktorých tvary nemusia byť úplne identické. Ľavé rameno je vytvorené z býčieho (stúpajúceho) trhu a pravé rameno je predzvesťou medvedieho (klesajúceho) trhu. V prípade inverzného, resp. obráteného formácie hlava a ramená je vývoj cien opačný.

Obrázok 33 Formácia hlava a ramená a inverzná hlava a ramená



Zdroj: Vlastné spracovanie

## 2. Trendový kanál

Najúspešnejší obchodníci obchodujú v smere trendu. Vzor trendového kanálu môžeme popísať ako pohyb ceny medzi dvoma rovnobežnými priamkami. Pre rastúci trend sa horná trendová priamka nakreslí spojením vrcholov a dolná trendová čiara sa rovnobežne umiestni na lokálne minimum. Pre klesajúci trend sa dolná trendová priamka nakreslí spojením dien a horná trendová čiara sa rovnobežne umiestni na lokálne maximum.

Obrázok 34 Stúpajúci a klesajúci trendový kanál



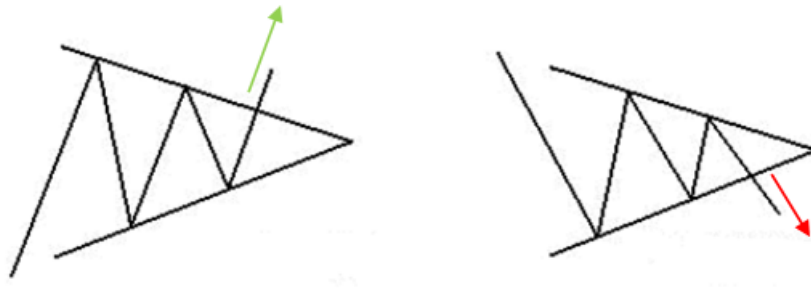
Zdroj: vlastné spracovanie

## 3. Trojuholník

Trojuholníkový vzor predstavuje osciláciu vývoja ceny s klesajúcou volatilitou medzi dvoma priamkami, ktoré získame spojením vrcholov a dien. Tieto 2

priamky predstavujú ramená trojuholníka. Prerazenie hornej priamky, chápeme ako signál rastu ceny v najbližšom období, a naopak, prerazenie dolnej priamky chápeme ako signál poklesu ceny v najbližšom období. Takýto pohyb je najspôľahlivejší ak sa objaví v okolí  $\frac{2}{3}$  trojuholníka. Zvyčajne je prerazenie hranice trojuholníka sprevádzané zvýšeným objemom obchodov.

Obrázok 35 Formácia trojuholník



Zdroj: vlastné spracovanie

## 4 Výsledky práce

V tejto časti práce sa budeme analyzovať časový rad ceny akcie Americkej spoločnosti Tesla Motors, Inc. na burze NASDAQ. Po vyhodnotení štatistickej analýzy ceny akcie a jej modelovania vykonáme technickú (grafickú) analýzu ceny akcie a všeobecnú analýzu akcie podľa Benjamina Grahama (1949).

### 4.1 Premenné použité v aplikačnej časti

V aplikačnej časti, hlavne v grafoch a obrázkoch, sú použité skrátené názvy pre jednotlivé premenné. Vysvetlivky skrátených názvov:

Stock_price	ceny akcie Tesla Motors, Inc v jednotlivých dňoch
S&P 500 price	ceny indexu S&P 500
Trading_days	obchodné dni, resp. pozorovania
lag	posun o obdobie
adjusted Stock_price	ceny akcie Tesla Motors, Inc v jednotlivých dňoch po diferenciácií
SP_1st_half	prvá polovica cien akcií Tesla Motors, Inc
SP_2nd_half	druhá polovica cien akcií Tesla Motors, Inc
ADJ_NOLN_1	prvá polovica cien akcií Tesla Motors, Inc po diferenciácií
ADJ_NOLN_2	druhá polovica cien akcií Tesla Motors, Inc po diferenciácií
Resid_NOLN_1_red	prvá polovica rezíduí modelu po redukcii extrémnych hodnôt rezíduí
Resid_NOLN_2_red	druhá polovica rezíduí modelu po redukcii extrémnych hodnôt rezíduí
Residuals_NOLN	rezíduá modelu
Crude_oil_price	ceny ropy v jednotlivých mesiacoch
adjusted Crude_oil_price	ceny ropy v jednotlivých mesiacoch po diferenciácií

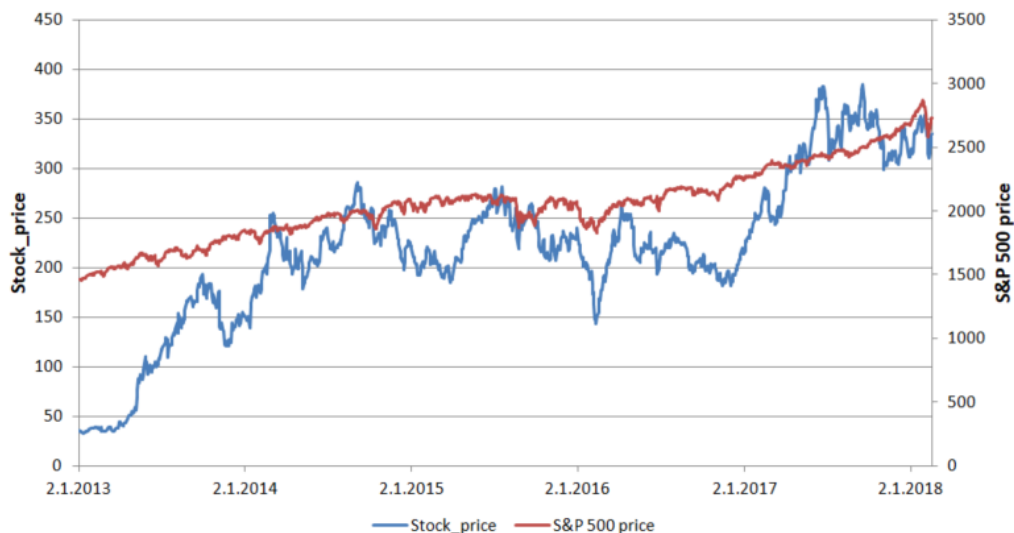
### 4.2 Časový rad ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. na burze

Na spracovanie dát a následné modelovanie a prognózu časového radu sme použili štatistický softvér STATGRAPHICS Centurion a Microsoft Excel.

Za vstupné dáta sme si zvolili denné ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. v USD pri uzatvorení trhu od 2.1.2013 do 16.2.2018, čo predstavuje celkom 1292 pozorovaní. Zdroj údajov je webový portál Yahoo Finance. Akcie sa na burze obchodujú

iba počas pracovných dní, čiže od pondelka do piatku okrem sviatkov. Počas jedného roka je celkovo 252 dní, kedy sa akcie obchodujú.

*Graf 1 Vývoj ceny akcie Tesla Motors, Inc. a indexu S&P 500 (v USD)*

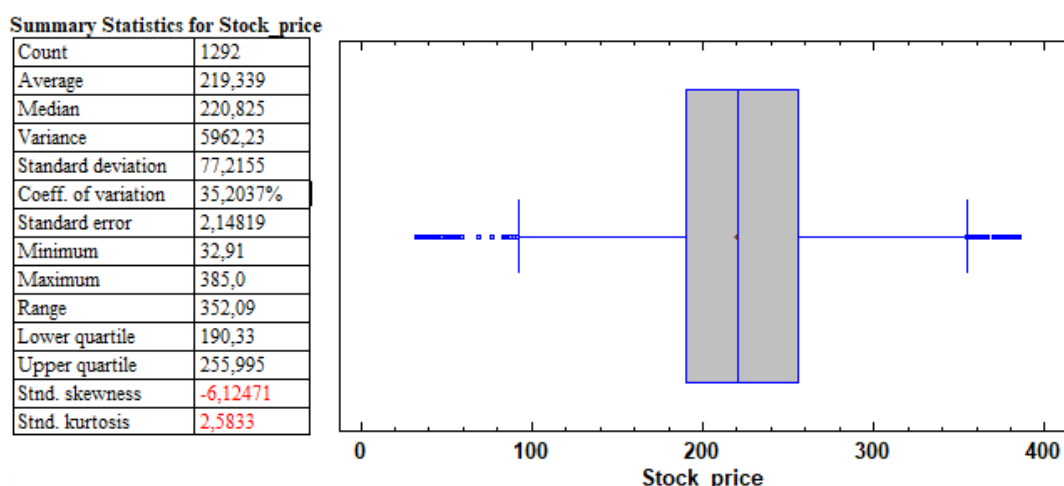


Zdroj: Yahoo Finance, vlastná grafická analýza v Microsoft Excel

Na grafe 1 je graficky znázornený vývoj ceny akcie Tesla Motors, Inc. a indexu S&P 500. Pri prvom pohľade môžeme zistiť, že cena akcie Tesla Motors, Inc. má relatívne vysokú volatilitu v porovnaní s indexom S&P 500 (bližšie k S&P 500 v kap. 1.5).

Najväčší absolútny medzimesačný pokles ceny akcie Tesla Motors, Inc. sme zaznamenali v Januári 2016 oproti Decembru 2015, kedy cena akcie klesla o 48,81 USD, čo v relatívnom vyjadrení predstavuje pokles o 20,34% (viď príloha 1). Naopak, v prvých piatich mesiacoch roku 2017 Tesla Motors, Inc. zaznamenala výrazný nárast ceny akcií o 43,54% (viď príloha 2).

Obrázok 1 Deskriptívne charakteristiky a Box – plot ceny akcie Tesla Motors, Inc.



Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Grafické znázornenie údajov pomocou kvartilov aj s popisnými charakteristikami sa nachádza na obrázku 1. V sledovanom období bola najvyššia cena akcie Tesla Motors, Inc. 385 USD a najnižšia 32,91 USD. Priemerná cena za sledované obdobie bola 219,34 USD. Cena sa od priemernej ceny počas sledovaného obdobia odchyľovala v priemere o 77,22 USD. V 25% sledovaných obchodných dní sa akcie obchodovali za 190,33 USD a menej a v 25% sledovaných obchodných dní sa akcie obchodovali za 256 USD.

## 4.2 Modelovanie a prognóza časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc. metodológiou ARIMA modelov

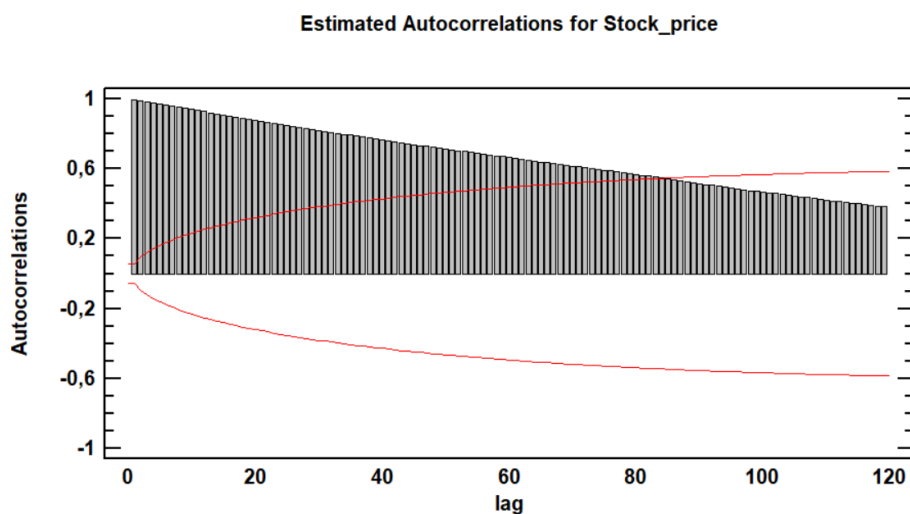
### 4.2.1 Identifikácia modelu

Ďalší krok pri modelovaní časového radu pomocou ARIMA modelov bola identifikácia modelu.

Pri pohľade na graf pôvodného časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. na grafe 1, vidíme mierny stochastický trend. Z grafu pôvodného časového radu predbežne konštatujeme, že časový rad nie je stacionárny v strednej hodnote. Potvrďuje nám to aj graf 2, ktorý indikuje postupný lineárny pokles koeficientov autokorelácie, čo svedčí o existencii trendu v časovom rade.



Graf 2 VACF ceny akcie Tesla Motors, Inc.



Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Pomocou F-testu sme zistili, že pôvodný časový rad nie je stacionárny ani v rozptyle. Na obrázku 2 vidíme, že  $p$  – hodnota F testu je blízka nule, čiže jedná sa o nestacionaritu v rozptyle. Logaritmická transformácia časového radu nám nepomohla stacionarizovať časový rad v rozptyle (viď príloha 3).

Obrázok 2  $F$  – test pôvodného časového radu

**Comparison of Standard Deviations**

	<i>SP_1st_half</i>	<i>SP_2nd_half</i>
Standard deviation	70,8458	58,4252
Variance	5019,13	3413,51
Df	645	645

Ratio of Variances = 1,47037

**95,0% Confidence Intervals**

Standard deviation of *SP\_1st\_half*: [67,1819; 74,9357]

Standard deviation of *SP\_2nd\_half*: [55,4037; 61,798]

Ratio of Variances: [1,2599; 1,71601]

**F-test to Compare Standard Deviations**

Null hypothesis:  $\sigma_1 = \sigma_2$

Alt. hypothesis:  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

F = 1,47037 P-value = 0,00000106873

Reject the null hypothesis for  $\alpha = 0,05$ .

Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Časový rad je potrebné stacionarizovať v strednej hodnote pomocou optimálneho stupňa diferencovania. Na obrázku 3 je porovnanie viacerých stupňov nesezónneho a sezónneho diferencovania.

Obrázok 3 Porovnanie rozptylov (RMSE) pri rôznych stupňoch diferencovania

**Models**

- (A) ARIMA(0,1,0)  
 (B) ARIMA(0,0,0) $\times$ (0,1,0)252  
 (C) ARIMA(0,1,0) $\times$ (0,1,0)252  
 (D) ARIMA(0,2,0) $\times$ (0,1,0)252  
 (E) ARIMA(0,1,0) $\times$ (0,2,0)252

**Estimation Period**

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	5,93789	4,18137	2,02153	0,232479	0,131042
(B)	87,9503	71,2456	28,5061	53,55	19,7917
(C)	8,38647	6,28169	2,62546	-0,0463908	-0,0510528
(D)	11,6478	8,96931	3,74007	0,0117341	0,00472462
(E)	14,5205	10,848	4,50167	0,0125667	-0,00395709

Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Najnižšiu hodnotu RMSE mala 1. nesezónna diferencia. Použitie tejto diferencie nám neumožňovalo stacionarizovať časový rad v rozptyle ani po logaritmickej transformácii radu (viď príloha 4). Druhú najnižšiu hodnotu RMSE mala kombinácia 1. nesezónnej a 1. Sezónnej diferencie. Táto kombinácia stacionarizovala časový rad v strednej hodnote, a dokonca aj v rozptyle.

Ako sme spomenuli v kap. 3.1.1, Boxova – Jenkinsova metodológia je založená na iteračnom postupe budovania modelu. Zistili sme, že nesezónna diferenciácia nestačila na stacionarizovanie časového radu a jednoduchšie modely neboli vhodné a štatisticky významné. Preto bolo potrebné do modelu zaradiť aj sezónnu diferenciu. Uvažovali sme o 3 rôznych dĺžkach sezónnej diferencie:

1. Dĺžka 252 – absolútna zmena v príslušných dňoch v posune o 1 rok (252 dní v roku sa obchoduje s akciami)
2. Dĺžka 63 – absolútna zmena v príslušných dňoch v posune o 1 kvartál ( $\frac{252}{4} = 63$ )
3. Dĺžka 21 – absolútna zmena v príslušných dňoch v posune o 1 mesiac ( $\frac{252}{12} = 21$ )

Iteračným postupom sme zistili, že dĺžky sezónnosti 63 a 21 síce stacionarizovali časový rad, ale k následnému modelovaniu už vhodné neboli pretože pri verifikácii modelov nespĺňali podmienky bieleho šumu (viď príloha 5). Zahrnutím zložky ročnej absolútnej zmeny v príslušnom dni do modelu, sa nám podarilo z dosiahnuť stacionaritu v rozptyle. Túto zložku modelu môžeme inými slovami popísať ako prírastok alebo úbytok ceny akcie

v danom dni oproti hodnote v predchádzajúcom roku, ktorý modelujeme sezónnou diferenciáciou dĺžky 252.

Obrázok 4 *F – test časového radu po 1. nesezónnej a 1. sezónnej diferenciácii*

**Comparison of Standard Deviations**

	<i>ADJ_NOLN_1</i>	<i>ADJ_NOLN_2</i>
Standard deviation	8,56952	8,21109
Variance	73,4367	67,422
Df	518	519

Ratio of Variances = 1,08921

95,0% Confidence Intervals

Standard deviation of *ADJ\_NOLN\_1*: [8,07797; 9,12526]

Standard deviation of *ADJ\_NOLN\_2*: [7,74053; 8,74304]

Ratio of Variances: [0,916788; 1,29408]

F-test to Compare Standard Deviations

Null hypothesis:  $\sigma_1 = \sigma_2$

Alt. hypothesis:  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

F = 1,08921 P-value = 0,330892

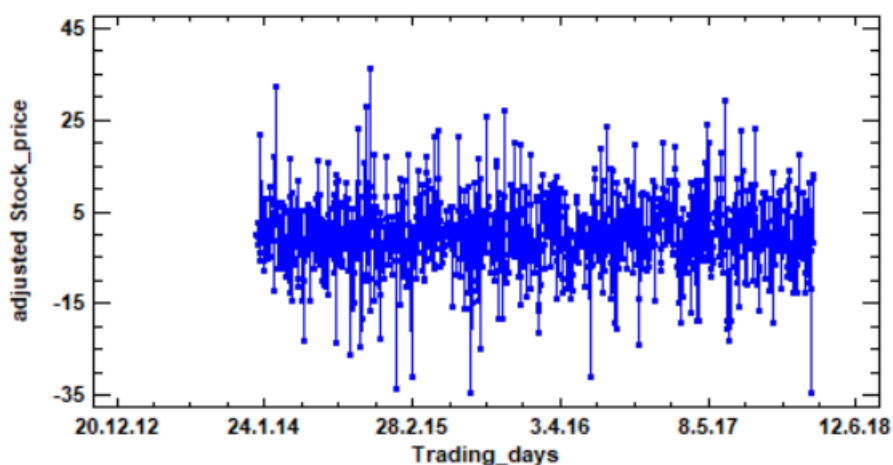
Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Obrázok 4, na ktorom sa nachádza F – test časového radu po 1. nesezónnej a 1. sezónnej diferenciácii, hovorí o prijatí hypotézy o rovnosti rozptylov prvej a druhej polovice diferencovaného časového radu na hladine významnosti 95%, pretože p – value (0,33) je väčšia ako hladina významnosti 0,05.

Pôvodný časový rad ceny akcie Tesla Motors, Inc. sme sa snažili upraviť na stacionárny časový rad pomocou 1. nesezónnej a 1. sezónnej diferencie. Táto kombinácia diferencií nám pomohla stacionarizovať časový rad v strednej hodnote, ale aj v rozptyle. Grafický priebeh stacionarizovaného časového radu je znázornený na grafe 3.

Graf 3 Vývoj ceny akcie Tesla Motors, Inc. po 1. nesezónnej a 1. sezónnej diferencií



Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

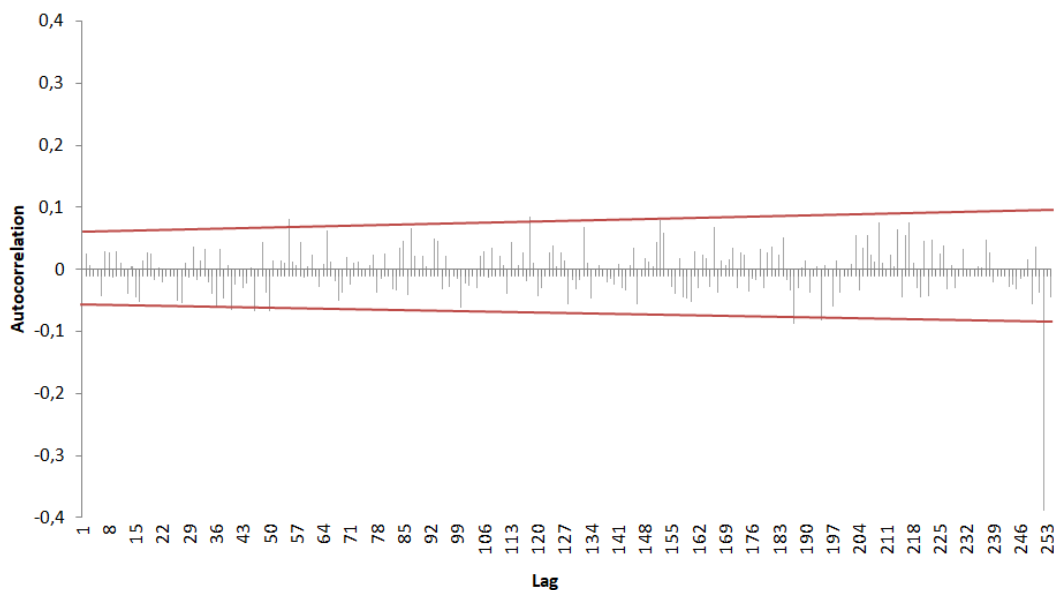
Časový rad ceny akcie Tesla Motors, Inc. sa v dôsledku diferencií skrátil o 253 najstarších (prvých) pozorovaní oproti pôvodnému časovému radu. 252 pozorovaní sa odstránilo vplyvom vykonanej sezónnej diferenciencie a 1 pozorovanie sa odstránilo vplyvom absolútnej diferenciencie.

Diferencovaný časový rad je stacionárny a pomocou spätného operátora B, ktorý predstavuje oneskorenie o jedno obdobie, môžeme upravený časový rad zapísať nasledovne:

$$z_t = (1-B)(1-B^{252})\text{Stock\_price}_t$$

Na predbežné určenie typu a stupňa procesu časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc. môžeme preskúmať priebeh výberovej autokorelačnej funkcie (VACF) a výberovej parciálnej autokorelačnej funkcie (VPACF) po diferencovaní.

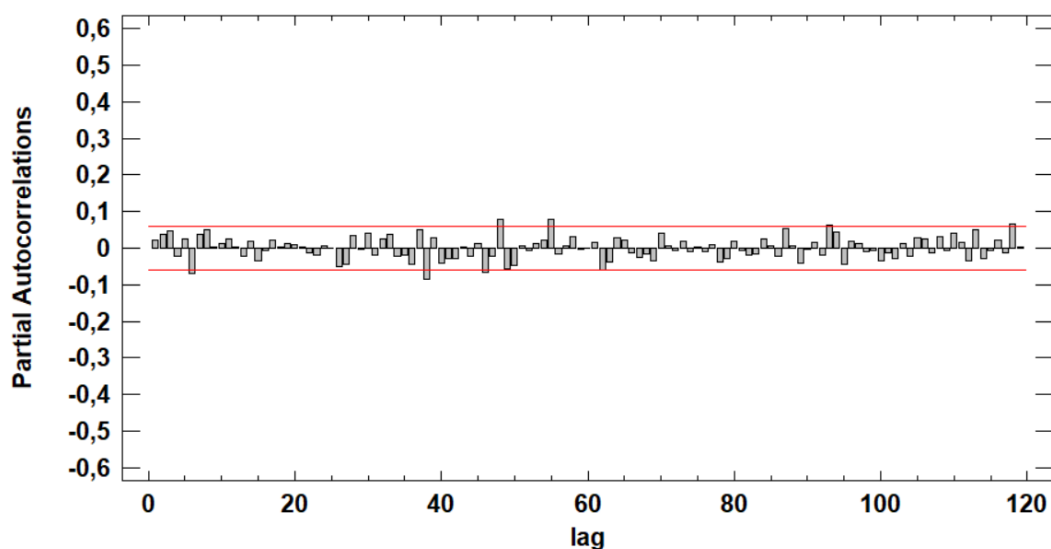
Graf 4  $VACF \ z_t = (1-B)(1-B^{252})Stock\_price_t$



Zdroj: vlastné spracovanie v Microsoft Excel

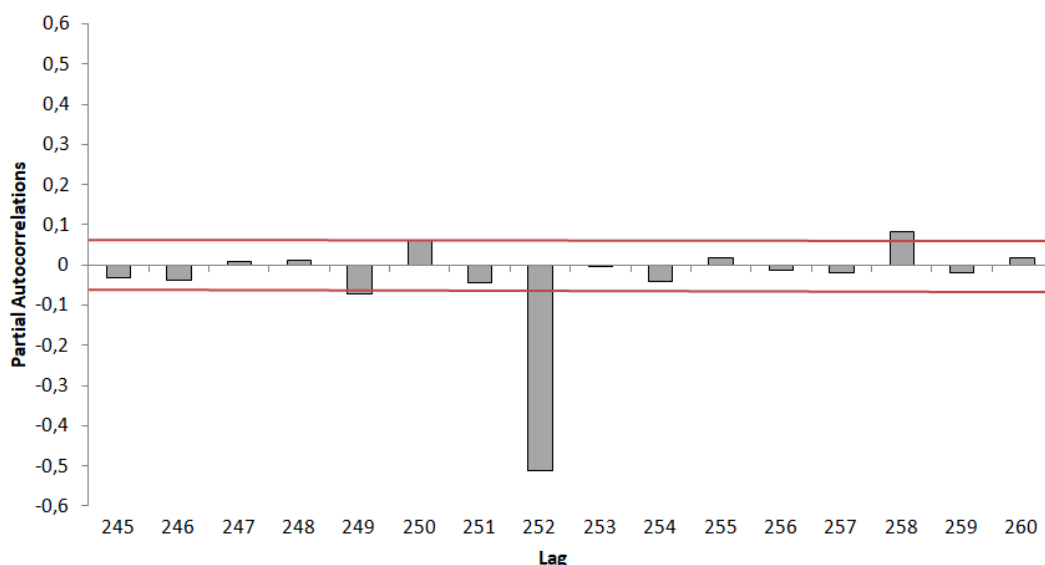
Štatistický softvér STATGRAPHIC Centurion nám neumožňuje vyrátať koeficient autokorelácie pre oneskorenie väčšie ako 120 období. Preto sme v softvéri Microsoft Excel vypočítali koeficienty autokorelácie a skonštruovali graf. Pri pohľade na graf VAFC na grafe 4 vidíme, že na 5% hladine významnosti je najviac štatisticky významný koeficient autokorelácie pri oneskorení o 252 období. Jeho hodnota je -0,39 (vid' príloha 6). Po analýze grafu VAFC časového radu ceny akcií Tesla Motors, Inc. môžeme predbežne identifikovať sezónny model kľzavých priemerov prvého stupňa SMA(1).

Graf 5  $VPACF \ z_t = (1-B)(1-B^{252})Stock\_price_t$  s oneskorením do 120 období



Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Graf 6 VPACF  $z_t = (1-B)(1-B^{252}) \text{ Stock\_price}_{t,t}$  s oneskorením od 245 do 260 období



Zdroj: vlastné spracovanie v Microsoft Excel

Pri výberovej parciálnej autokorelačnej funkcii je so softvérom STATGRAPHIC Centurion rovnaký problém ako pri výberovej autokorelačnej funkcii. Vzhľadom na zložitosť výpočtov výberovej parciálnej autokorelačnej funkcii Microsoft Excel ponúka iba 16 vstupných stĺpcov pre výpočet, preto sme si zvolili okolie 252. oneskorenia. Na grafoch 5 a 6 vidíme viac štatisticky významných parciálnych autokorelačných koeficientov. Najväčšia štatistická významnosť sa pripisuje znovu parciálnemu autokorelačnému koeficientu s oneskorením o 252 období. Môžeme konštatovať, že pri znížení hladiny významnosti na 1% by bol štatisticky významný iba parciálny autokorelačný koeficient 252. oneskorenia. Po analýze grafu VPAFC časového radu ceny akcií Tesla Motors, Inc. môžeme predbežne identifikovať sezónny autoregresný operátor prvého stupňa SAR(1).

#### 4.2.2 Odhad parametrov modelu a overenie rezíduí

V prechádzajúcej kapitole sme na základe grafickej analýze výberovej autokorelačnej funkcie a výberovej parciálnej autokorelačnej funkcie predbežne určili sezónny model kľzavých priemerov prvého stupňa SMA(1) alebo sezónny autoregresný operátor prvého stupňa SAR(1). Ako sme spomenuli v kap. 3.1.2, neodporúča sa kombinovať modely SAR a SMA, preto vyskúšame aj iné modely. Model vhodný na prognostické účely zvolíme na základe porovnania štandardnej chyby uvažovaných modelov (RMSE) a na základe Akaikeho informačného kritéria a štatistickej významnosti parametrov modelu.

Obrázok 5 Porovnanie modelov diferencovaného časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc.

**Models**

(A) ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)<sub>252</sub>

(B) ARIMA(1,1,0)x(1,1,0)<sub>252</sub>

(C) ARIMA(1,1,1)x(0,1,1)<sub>252</sub>

(D) ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)<sub>252</sub>

(E) ARIMA(0,1,0)x(1,1,1)<sub>252</sub>

**Estimation Period**

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE	AIC	HQC	SBIC
(A)	6,17342	4,64542	1,93054	-0,0710547	-0,0603004	3,37922	3,38222	3,38722
(B)	6,68244	4,81803	1,95232	-0,0274011	-0,048271	3,56411	3,56561	3,56811
(C)	6,17622	4,64548	1,93056	-0,0709579	-0,0602195	3,38027	3,38477	3,39226
(D)	4,94115	3,72331	1,52555	-0,0134388	-0,00908467	3,20139	3,20739	3,21738
(E)	6,06284	4,54735	1,86531	-0,0575181	-0,0557468	3,37773	3,38223	3,38972

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	6,17342	OK	OK	OK	OK	OK
(B)	6,68244	OK	OK	OK	OK	***
(C)	6,17622	OK	OK	OK	OK	OK
(D)	4,94115	OK	OK	OK	OK	OK
(E)	6,06284	OK	OK	OK	OK	***

Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Z výstupu programu STATGRAPHICS Centurion na obr. 5 vidíme porovnanie piatich uvažovaných ARIMA modelov. Najnižšiu hodnotu štandardnej chyby (RMSE) aj Akaikeho informačného kritéria má model (D) ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)<sub>252</sub>. Parametre tohto modelu sú štatisticky významné, takže tento model považujeme za vhodný na prognostické účely. Konštantu do modelu nezahrnieme, pretože stredná hodnota (Mean) nie je štatisticky významná, jej p – hodnota je rovná 0,76 (viď príloha 7).

Obrázok 6 Odhad modelu ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)<sub>252</sub>

**Forecast Summary**

Nonseasonal differencing of order: 1

Seasonal differencing of order: 1

Forecast model selected: ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)<sub>252</sub>

Number of forecasts generated: 30

Number of periods withheld for validation: 0

	Estimation	Validation
Statistic	Period	Period
RMSE	4,94115	
MAE	3,72331	
MAPE	1,52555	
ME	-0,0134388	
MPE	-0,00908467	

**ARIMA Model Summary**

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
SAR(1)	-0,228054	0,0299547	-7,61331	0,000000
SAR(2)	-0,79717	0,0157467	-50,6245	0,000000
SMA(1)	1,16131	0,0199708	58,1502	0,000000
SMA(2)	-0,521473	0,0168342	-30,9769	0,000000

Backforecasting: yes

Estimated white noise variance = 26,1716 with 1035 degrees of freedom

Estimated white noise standard deviation = 5,11582

Number of iterations: 12

Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Vo výstupe programu STATGRAPHIC Centurion na obr. 6 sú hodnoty odhadnutých parametrov modelu (D) ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)<sub>252</sub>. Hodnoty parametrov ARIMA modelu sú štatisticky významné na ľubovoľnej hladine významnosti ale musia ešte spĺňať podmienky stacionarity a invertibility.

Overenie podmienok stacionarity:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = (-0,228223) + (-0,797255) = (-1,025478) < 1$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (-0,797255) - (-0,228223) = (-0,569032) < 1$$

$$-1 < \Phi_2 (-0,797255) < 1$$

Overenie podmienok invertibility:

$$\theta_1 + \theta_2 = 1,16118 + (-0,521393) = 0,639787 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 = (-0,521393) - 1,16118 = -1,682573 < 1$$

$$-1 < \theta_2 (-0,521393) < 1$$



Pre model  $ARIMA(0,1,0) \times (2,1,2)_{252}$  sú podmienky stacionarity a invertibility splnené. Do modelu nezahrnieme konštantu, pretože stredná hodnota časového radu  $z_t$  nie je štatisticky významná, teda jej  $p$  – hodnota je väčšia ako 0,05. Priemerné charakteristiky rezíduí nám indukujú, že v období odhadu sa dopustíme v priemere 1,53% chyby (MAPE) a hodnoty odhadu sa budú od skutočných hodnôt v priemere odchyľovať o približne 4,94 USD (RMSE). Podľa hodnoty MPE zistujeme veľmi miernu systematicky nadhodnotenú skutočnosť modelu. Hodnoty odhadu sú každý obchodný deň v priemere nadhodnotené o približne 0,009%, teda 0,0013 USD.

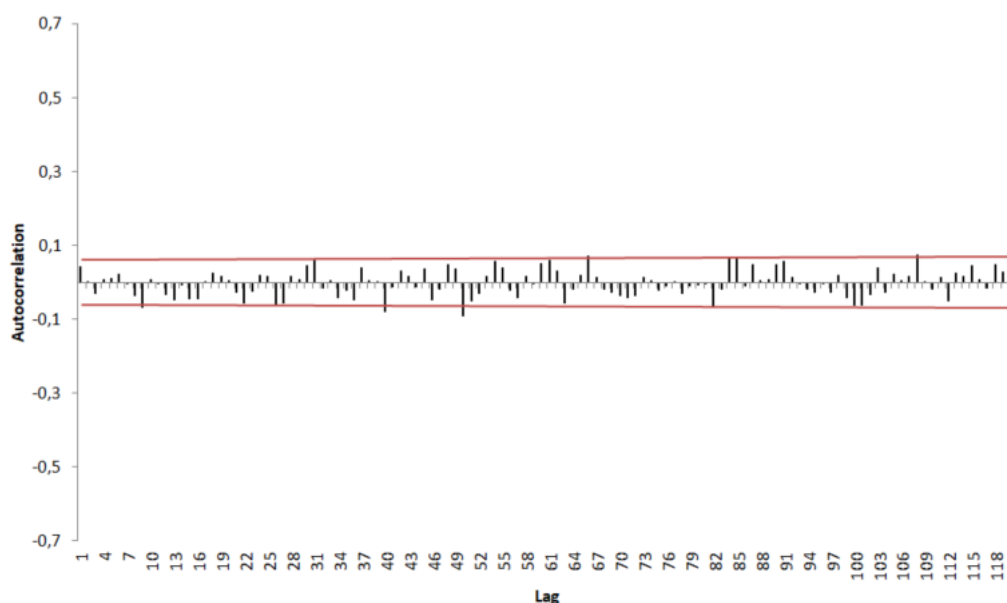
#### 4.2.2 Overenie predpokladov o náhodnej zložke modelu

Aby bol model ako celok adekvátny a vhodný na prognózovanie, nestačí, že má štatisticky významné koeficienty, spĺňa podmienky stacionarity a invertibility s nízkou štandardnou chybou. Ďalšou dôležitou podmienkou pre určenie vhodnosti modelu na prognózovanie je analýza rezíduí modelu, kde overíme podmienky bieleho šumu pre náhodné zložky modelu.

#### Test nezávislosti náhodnej zložky modelu

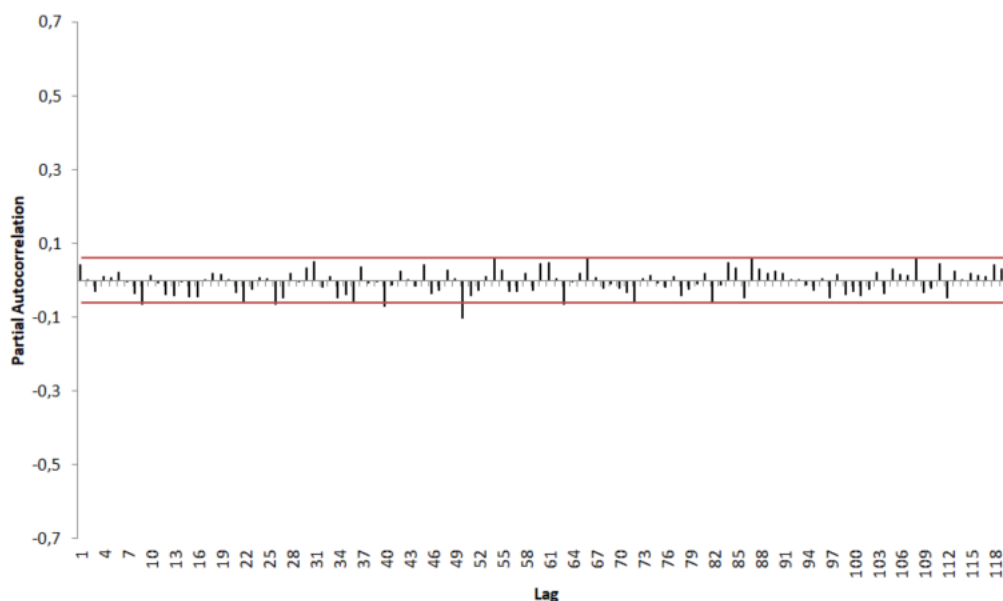
Nezávislosť náhodných zložiek zisťujeme prostredníctvom štatistickej závislosti (autokorelácie) rezíduí. Zistiť to môžeme pomocou grafov autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie rezíduí.

Graf 7 *ACF rezíduí modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,1,2)_{252}$*



Zdroj: vlastné spracovanie v Microsoft Excel

Graf 8 *PACF rezíduí modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,1,2)_{252}$*



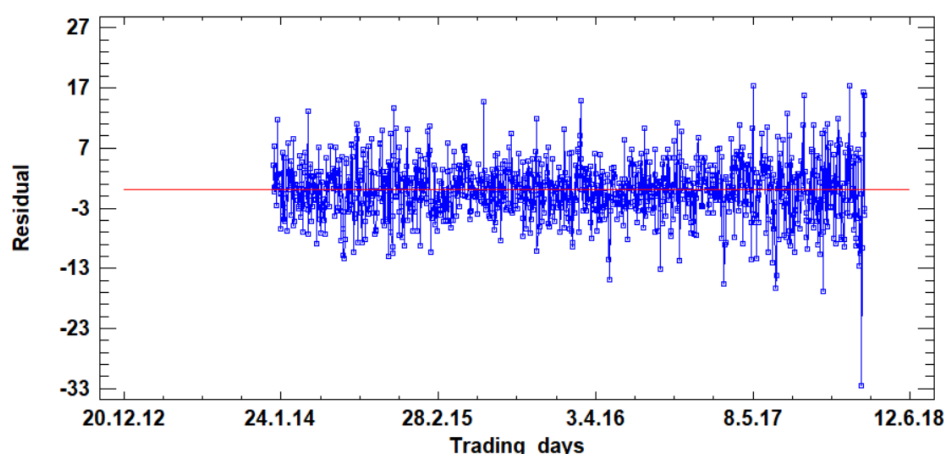
Zdroj: vlastné spracovanie v Microsoft Excel

Na grafe 6 a 7 môžeme vidieť, že niektoré koeficienty veľmi mierne presahujú 95% pravdepodobnostnú hranicu. Takýchto koeficientov je málo a všetky ostatné sa nachádzajú medzi hornou a dolnou 95% pravdepodobnostnou hranicou. P – hodnota Box – Pierce testu má hodnotu 0,15 (viď príloha 9). Podľa grafov ACF rezíduí, PACF rezíduí a Box – Pierce testu sme usúdili, že náhodná zložka modelu nie je lineárne korelovaná.

### Test heteroskedasticity náhodnej zložky modelu

Časové rady so sezónnou zložkou majú často rastúcu variabilitu pozorovaní v čase, t. j. heteroskedasticitu. Aby bol model časového radu vhodný na prognózovanie, je potrebné aby variabilita pozorovaní v čase nerástla, t.j. aby rezíduá v čase boli homoskedastické. Posúdiť heteroskedasticitu náhodnej zložky možno na základe grafu rezíduí v čase. Na grafe homoskedastických rezíduí sa hodnoty pohybujú okolo nuly v približne konštantne širokom pásme s hranicami  $\pm$  smerodajná odchýlka rezíduí.

Graf 9      *Reziduá modelu ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)<sub>252</sub>*



Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Grafické znázornenie rezíduí na grafe 9 nám hovorí o jemne rastúcej variability rezíduí v 4/5 obdobia. Z grafu nevieme jednoznačne určiť, či model ako celok má heteroskedastické reziduá, pretože celkový počet pozorovaní je veľký a nevieme, či tých pár hodnôt z konca grafu, ktoré sú pomerne ďaleko od nuly budú štatisticky významne vplývať na test heteroskedasticity modelu ako celku.

Otestovať heteroskedasticitu rezíduí môžeme pomocou aplikovania F - testu pri porovnaní prvej a druhej polovice rezíduí v čase, kde sa testuje platnosť nulovej hypotézy o rovnosti rozptylov.

Obrázok 7      *Test heteroskedasticity rezíduí modelu ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)<sub>252</sub> po redukcii extrémnych hodnôt rezíduí*

**Comparison of Standard Deviations**

	<i>Resid_NOLN_1_red</i>	<i>Resid_NOLN_2_red</i>
Standard deviation	4,37879	4,76324
Variance	19,1738	22,6885
Df	513	512

Ratio of Variances = 0,845089

**95,0% Confidence Intervals**

Standard deviation of *Resid\_NOLN\_1\_red*: [4,12647; 4,66422]

Standard deviation of *Resid\_NOLN\_2\_red*: [4,48852; 5,07406]

Ratio of Variances: [0,710584; 1,00504]

**F-test to Compare Standard Deviations**

Null hypothesis:  $\sigma_1 = \sigma_2$

Alt. hypothesis:  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

F = 0,845089 P-value = 0,0570128

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

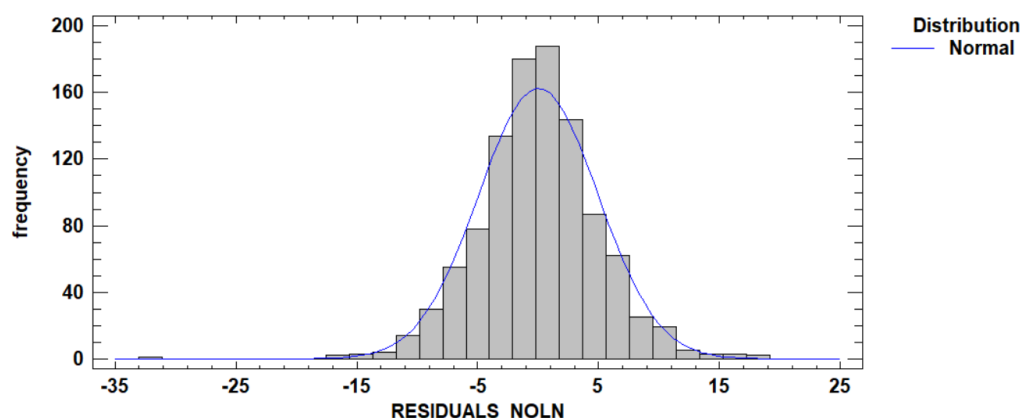
Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Testovanie heteroskedasticity všetkých rezíduí prinieslo neuspokojivý výsledok s  $p$ -hodnotou nižšou ako hladina významnosti 0,05, t.j. prítomnú heteroskedasticitu rezíduí (viď príloha 8). Avšak, po odstránení 7 extrémne nízkych a 5 extrémne vysokých hodnôt rezíduí môžeme konštatovať, že na hladine významnosti 5% sú rezíduá modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,1,2)_{252}$  homoskedastické, pretože  $p$ -hodnota na obrázku 7 je väčšia ako 0,05.

### Test normálneho rozdelenia náhodnej zložky

Normalitu rozdelenia náhodnej zložky, resp. normalitu rezíduí testujeme hlavne preto, že je dôležitým predpokladom pri viacerých štatistických testoch, pri interpretácii odhadu parametrov modelu alebo pri výpočte štandardných chýb odhadov parametrov. Normalitu otestujeme opäť pomocou grafu a následne pomocou Kolmogorov – Smirnovho testu, ktorého nulová hypotéza hovorí o zhode rezíduí s teoretickým normálnym rozdelením, Chí – kvadrát testu a Shapiro – Wilkov testu.

Graf 10      *Histogram rezíduí modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,1,2)_{252}$*



Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Na histograme rezíduí na grafe 10 vidíme, že rezíduá pomerne dobre kopírujú priebeh normálneho rozdelenia naznačeného modrou čiarou. Normalitu rozdelenia náhodnej zložky presnejšie overíme pomocou štatistických testov normality.

Obrázok 8 Testy normality rezíduí modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,1,2)_{252}$

Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>
DPLUS	0,0315819
DMINUS	0,0342512
DN	0,0342512
P-Value	0,174766

Tests for Normality for RESIDUALS\_NOLN

Test	Statistic	P-Value
Chi-Square	66,1039	0,217327
Shapiro-Wilk W	0,988453	0,784788

Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Z výstupu programu STATGRAPHIC Centurion na obrázku 8 môžeme vyčítať, že  $p$  – hodnota všetkých testov normality je väčšia ako hladina významnosti 0,05. Prijímame nulovú hypotézu o normalite rezíduí modelu.

#### 4.2.3 Prognóza ceny akcie Tesla Motors, Inc. modelom $ARIMA$

Predchádzajúcimi krokmi môžeme konštatovať, že všetky parametre modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,1,2)_{252}$  sú štatisticky významné, model spĺňa podmienky stacionarity a invertibility a rezíduá modelu spĺňajú podmienky bieleho šumu. Výsledný model môžeme matematicky zapísať nasledovne:

$$(1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s})(1 - B)(1 - B^s)y_t = (1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s})\varepsilon_t$$

$$(1 + 0,228B^{252} + 0,797B^{504})(1 - B)(1 - B^{252})\text{stock\_price}_t = (1 - 1,161B^{252} + 0,521B^{504})\varepsilon_t$$

$$\text{stock\_price}_t = -0,228\text{stock\_price}_{t-252} - 0,797\text{stock\_price}_{t-504} - 1,161\varepsilon_{t-252} + 0,521\varepsilon_{t-504} + \varepsilon_t$$

$$\text{stock\_price}_t = -0,228\text{stock\_price}_{t-253} - 0,797\text{stock\_price}_{t-505} - 1,161\varepsilon_{t-253} + 0,521\varepsilon_{t-505} + \varepsilon_t \text{ ???}$$

#### Prognóza ex-post

Tabuľka 1 Ex-post prognóza ceny akcie Tesla Motors, Inc

Obdobie	Skutočná cena (v USD)	Prognóza (v USD)	Chyba prognózy (v USD)	Chyba prognózy (v %)
---------	--------------------------	---------------------	---------------------------	-------------------------

2.1.2018	320,53	313,05	7,48	2,39%
3.1.2018	317,25	320,98	-3,73	-1,16%
4.1.2018	314,62	309,80	4,82	1,55%
5.1.2018	316,58	315,05	1,53	0,48%
8.1.2018	336,41	319,00	17,42	5,46%
9.1.2018	333,69	337,93	-4,24	-1,25%
10.1.2018	334,80	330,76	4,04	1,22%
11.1.2018	337,95	330,93	7,02	2,12%
12.1.2018	336,22	337,96	-1,74	-0,51%
16.1.2018	340,06	339,73	0,33	0,10%
17.1.2018	347,16	342,59	4,57	1,33%
18.1.2018	344,57	351,21	-6,64	-1,89%
19.1.2018	350,02	344,42	5,60	1,63%
22.1.2018	351,56	355,77	-4,21	-1,18%
23.1.2018	352,79	353,90	-1,11	-0,31%
24.1.2018	345,89	355,06	-9,17	-2,58%
25.1.2018	337,64	345,58	-7,94	-2,30%
26.1.2018	342,85	336,71	6,14	1,82%
29.1.2018	349,53	344,56	4,98	1,44%
30.1.2018	345,82	350,58	-4,76	-1,36%
31.1.2018	354,31	347,52	6,79	1,95%
<b>Priemer</b>			1,294	0,43%

Zdroj: vlastné výpočty

Na základe simulácie ex-post v období Januára 2018 overíme kvalitu modelu a presnosť prognózy. V tab. 1 sú výsledné údaje, na ktorých môžeme vidieť, že hodnoty ex-post prognózy zvoleným modelom  $ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)_{252}$  sa len veľmi mierne odlišujú od skutočných hodnôt ceny akcie Tesla Motors, Inc.. Najväčší rozdiel sme zaznamenali 8.1.2018, kde bol rozdiel 17,42 USD, resp. 5,46%. Hodnoty prognózy ceny sú v Januári 2018 nadhodnotené v priemere každý obchodný deň o 0,43%, teda o 1,29 USD.

Analýzou simulácie ex-post sme potvrdili relatívne dobrú vypovedaciu schopnosť modelu  $ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)_{252}$ .

### Prognóza ex-ante

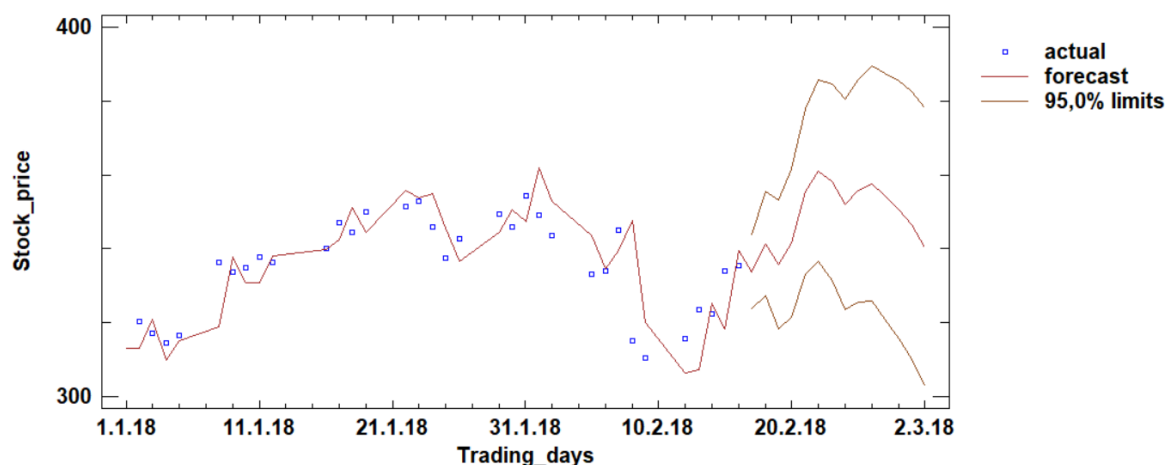
Tabuľka 2 Ex-ante prognóza ceny akcie Tesla Motors, Inc

Obdobie	Prognóza (v USD)	Spodná 95% hranica (v USD)	Horná 95% hranica (v USD)
17.2.2018	333,77	323,74	343,80
18.2.2018	341,43	327,25	355,61

19.2.2018	335,73	318,36	353,10
20.2.2018	341,55	321,49	361,60
21.2.2018	355,48	333,06	377,90
22.2.2018	361,13	336,57	385,69
23.2.2018	358,01	331,48	384,54
24.2.2018	352,04	323,68	380,40
25.2.2018	355,75	325,67	385,83
26.2.2018	357,64	325,93	389,35
27.2.2018	354,33	321,08	387,59
28.2.2018	350,60	315,86	385,33

Zdroj: Vlastné výpočty

Graf 11 Graf ex-ante prognózy ceny akcie Tesla Motors, Inc



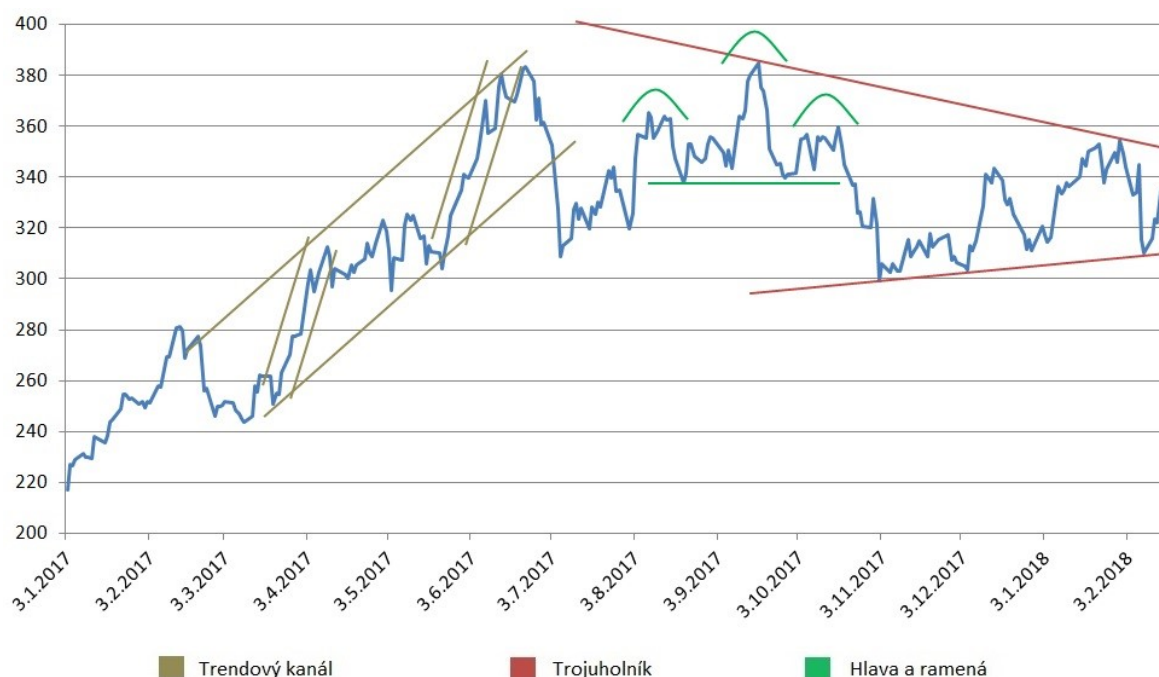
Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Prognóza ex-ante ceny akcie Tesla Motors, Inc. do konca mesiaca Február 2018 spolu s hornou a dolnou hranicou 95% intervalu spoľahlivosti sú v tab. 2. Grafické zobrazenie prognózy, ktoré zahŕňa aj skutočné hodnoty ceny akcie Tesla Motors, Inc. je na grafe 11. Po zvolení správneho modelu a podľa ex-ante prognózy môžeme s 95% pravdepodobnosťou povedať, že cena akcie Tesla Motors, Inc. nadobudne 28.2.2018 hodnotu v intervale od 315,86 USD po 385,33 USD.

### 4.3 Technická (grafická) analýza ceny akcie Tesla Motors, Inc.

V kapitole 3.3 sme spomenuli základné technické (grafické) vzory, resp. formácie vývoja, ktoré sa najčastejšie vyskytujú v grafoch cien akcií, komodít alebo kurzoch menových párov. V tejto kapitole sme sa pokúsili nájsť tieto vzory v grafe ceny akcie Tesla Motors, Inc. a vyvodit' z nich závery.

Graf 12      *Technické (grafické) vzory v grafe ceny akcie Tesla Motors, Inc.*



Zdroj: Vlastné spracovanie

Na grafe ceny akcie Tesla Motors, Inc. na obr. 18 sa nám podarilo nájsť 3 typy technických vzorov vývoja. Prvým typom, ktorý sa v grafe vyskytol je rastúci trendový kanál. Hlavný trendový kanál trval približne 3,5 mesiaca a obsahoval ďalšie 2 kratšie trendové kanály. V prvom prípade, od 21.3.2017 do 10.4.2017, cena akcie rástla každý deň v priemere o 1,61%. V druhom prípade, od 23.5.2017 do 23.6.2017, cena akcie rástla každý deň v priemere o 1,08%. Tento jedno mesačný rast bol v priebehu 8 dní vymazaný, nastala korekcia trhu a cena sa vrátila na približne rovnakú hodnotu akú mala 23.5.2017. Počas týchto ôsmich dní cena klesala denne v priemere o 2,63%.

Druhým typom technického vzoru, ktorý sa v grafe vyskytol je vzor nazývaný „hlava a ramená“. Trval približne 3,5 mesiaca a bol nasledovaný poklesom ceny akcie Tesla Motors, Inc.. Je to učebnicový príklad klasického vzoru hlava a ramená.

Tretím typom technického vzoru vyskytujúceho sa v grafe je trojuholník. Na obr. 18 vidíme klesajúcu volatilitu medzi dvoma hranami trojuholníka. V tomto prípade sa čaká na okamih prerazenia horného alebo dolného ramena trojuholníka a následne cena akcie začne významne klesať alebo rásť, až prerazí do rastúceho alebo klesajúceho trendového kanála. V čase písania tejto kapitoly, keď sa čaká na prerazenie jedného z ramien trojuholníka sa neodporúča zaujatie nových pozícií, či už long alebo short. Odporúča sa na



počkat' na signál, kedy cena začne významne klesať alebo stúpať a následne sa „zviest“ na trende.

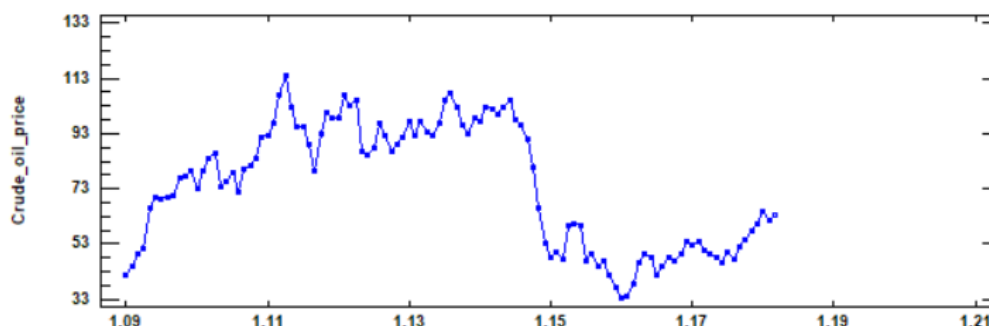
## 4.5 Modelovanie a prognóza časového radu ceny ropy v USD

V tejto kapitole sme si za vstupné dáta zvolili mesačné ceny Americkej WTI ropy za 1 barel v amerických dolároch. Obdobie sledovania ceny ropy bolo od Januára 2009 do Februára 2018, čo predstavovalo celkom 111 pozorovaní. Na spracovanie dát sme použili štatistický softvér STATGRAPHICS Centurion a Microsoft Excel. Toto modelovanie a prognóza časového radu bude vychádzať z rovnakej metodológie analýzy časových radov, podľa kapitoly 3.1, rovnako ako v prípade analyzovania cien akcií Tesla Motors, Inc.

### 4.6.1 Identifikácia modelu

Na grafe č. 10 je znázornený graf vývoja ceny ropy v danom pozorovacom okne. Z grafu môžeme vyčítať, že časový rad nie je stacionárny, pretože cena sa nepohybuje okolo strednej hodnoty. V grafickom znázornení taktiež vidíme v roku 2014 výrazný pokles ceny ropy na 12 ročné minimá, spomenutý v kapitole 1.2.

Graf č 10 Vývoj ceny ropy (v USD)



Zdroj: vlastná grafická analýza v STATGRAHPICS Centurion

Pôvodný časový rad bolo potrebné stacionarizovať pomocou vhodného stupňa diferencovania. Na obrázku 20 je porovnanie viacerých stupňov sezónneho a nesezónneho diferencovania.

Obrázok 20 Porovnanie rozptylov (RMSE) pri rôznych stupňoch diferencovania

**Models**

- (A) ARIMA(0,1,0)  
 (B) ARIMA(0,0,0)x(0,1,0)12  
 (C) ARIMA(0,1,0)x(0,1,0)12  
 (D) ARIMA(0,2,0)  
 (E) ARIMA(0,0,0)x(0,2,0)12

**Estimation Period**

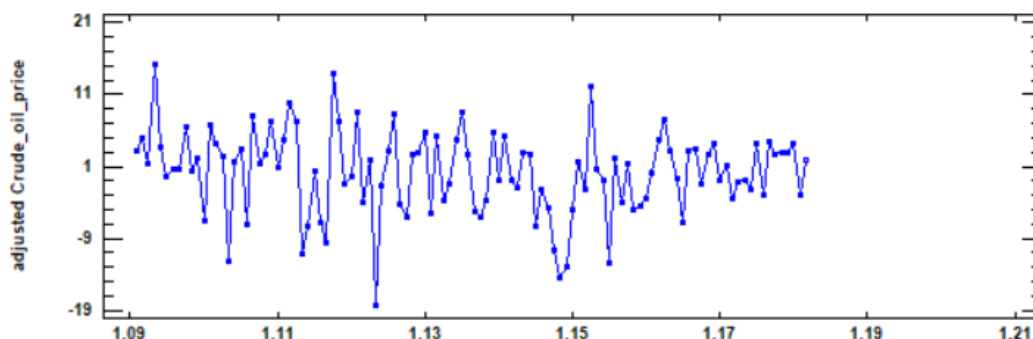
Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	5,83225	4,56127	6,49677	0,198545	0,0327384
(B)	20,3101	15,3466	24,3204	-1,13364	-6,61269
(C)	7,7058	5,92561	8,49652	-0,186633	0,0843592
(D)	7,61699	5,99358	8,42274	-0,0110092	0,101432
(E)	27,0266	22,0756	37,4734	-1,41632	1,36426

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	5,83225	OK	OK	OK	OK	OK
(B)	20,3101	***	***	***	***	**
(C)	7,7058	OK	OK	OK	OK	OK
(D)	7,61699	OK	**	**	OK	**
(E)	27,0266	***	***	***	OK	*

Zdroj: vlastné spracovanie v STATGRAHPICS Centurion

Najvhodnejší stupeň diferencovania pôvodného časového radu je 1. Nesezónna diferencia. Spomedzi uvažovaných diferencií má najnižšiu hodnotu RMSE. Grafické znázornenie diferencovaného časového radu je na grafe č.11.

Graf č.11 Vývoj ceny ropy po 1. absolútnej diferencii (v USD)



Zdroj: vlastná grafická analýza v STATGRAHPICS Centurion

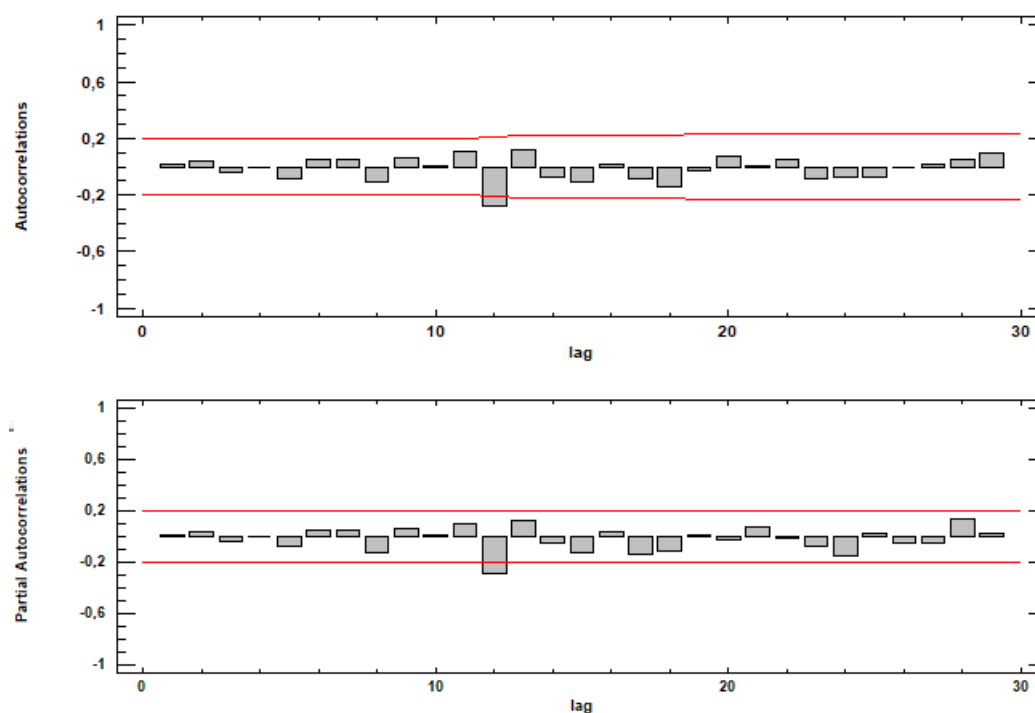
Podľa vývoja časového radu 1. diferencií cien ropy na grafe 11 môžeme predpokladať stacionaritu tohto časového radu. Hodnoty jednotlivých pozorovaní sa pohybujú okolo strednej hodnoty bez výrazných výkyvov. Stacionárny časový rad ceny ropy zapíšeme pomocou spätného operátora nasledovne:

$$z_t = (1-B)Crude\_oil\_price_t$$

Z grafu výberovej autokorelačnej funkcie (VACF) a výberovej parciálnej autokorelačnej (VPACF) môžeme predbežne určiť typ a stupeň procesu časového radu ceny ropy.

Graf č. 12 VACF (Autocorrelation) a VPACF (Partial autocorrelation) časového radu

$$z_t = (1-B)\text{Crude\_oil\_price}_t$$



Zdroj: vlastná grafická analýza v STATGRAHPICS Centurion

Z grafu č.12 usudzujeme, že vhodné modely by boli SMA(1) a SAR(1), kvôli štatisticky významným autokorelačným a parciálnym autokorelačným koeficientom v 12. oneskorení (lag). Následným porovnaním uvažovaných modelov zistíme, ktorý model má najlepšiu vypovedaciu a prognostickú schopnosť.

Obrázok 13 Porovnanie modelov diferencovaného časového radu ceny ropy

**Models**

- (A) ARIMA(0,1,0)x(1,0,1)<sub>12</sub>  
 (B) ARIMA(0,1,0)x(2,0,1)<sub>12</sub>  
 (C) ARIMA(0,1,0)x(1,0,2)<sub>12</sub>  
 (D) ARIMA(0,1,0)x(2,0,2)<sub>12</sub>  
 (E) ARIMA(0,1,1)x(0,0,1)<sub>12</sub>

**Estimation Period**

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE	AIC	HQC	SBIC
(A)	5,76754	4,40539	6,20847	0,17238	0,105687	3,02306	3,07257	3,14511
(B)	5,0338	3,98884	5,54911	0,173488	0,157577	3,01938	3,0887	3,19025
(C)	5,19083	3,93111	5,50496	0,389118	0,360303	3,02316	3,07267	3,14521
(D)	4,33264	3,43696	4,95557	-0,102523	-0,153009	3,00443	3,04404	3,10207
(E)	5,74586	4,44416	6,28094	0,164595	0,101766	3,02806	3,09738	3,19893

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	5,76754	OK	OK	OK	OK	*
(B)	5,0338	OK	OK	OK	OK	OK
(C)	5,19083	OK	OK	OK	OK	**
(D)	4,33264	OK	OK	OK	OK	*
(E)	5,74586	OK	OK	OK	OK	*

Zdroj: vlastná analýza v STATGRAHPICS Centurion

Z výstupu STATGRAPHICS Centurion na obrázku 13 vidíme porovnanie viacerých navrhnutých modelov. Ako najvhodnejší model na prognózovanie sa javí model (D) ARIMA(0,1,0)x(2,0,2)<sub>12</sub>, ktorý ma najnižšiu hodnotu štandardnej chyby (RMSE) a zároveň aj najnižšiu hodnotu Akaikeho informačného kritéria. Ako sme už spomínali, neodporúča sa kombinovať procesy SAR a SMA v jednom modeli, no jednoduchšie modely nemali dostatočne nízke RMSE alebo ich parametre neboli štatisticky významné (viď príloha 11 a 12).

Obrázok 14 Odhad modelu ARIMA(0,1,0)x(2,0,2)<sub>12</sub>

**Forecast Summary**

Nonseasonal differencing of order: 1  
 Forecast model selected: ARIMA(0,1,0)x(2,0,2)<sub>12</sub>  
 Number of forecasts generated: 10  
 Number of periods withheld for validation: 0

	Estimation	Validation
Statistic	Period	Period
RMSE	4,33264	
MAE	3,43696	
MAPE	4,95557	
ME	-0,102523	
MPE	-0,153009	

**ARIMA Model Summary**

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
SAR(1)	1,33914	0,0468181	28,6031	0,000000
SAR(2)	-0,758799	0,0441921	-17,1705	0,000000
SMA(1)	1,64993	0,0508438	32,4509	0,000000
SMA(2)	-0,698213	0,050416	-13,849	0,000000

Backforecasting: yes  
 Estimated white noise variance = 23,0718 with 106 degrees of freedom  
 Estimated white noise standard deviation = 4,80331  
 Number of iterations: 17

Zdroj: vlastná analýza v STATGRAHPICS Centurion

Hodnoty odhadnutých parametrov modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,0,2)_{12}$  sú na obr. 13. Vidíme, že všetky parametre sú štatisticky významné na akejkol'vek hladine významnosti. Splňajú aj požadované podmienky stacionarity a invertibility. Konštantu do modelu nemôžeme zahrnúť, pretože nie je štatisticky významná ( $p\text{-value} = 0,477$ , vid' príloha 10). Pri použití tohto modelu v období odhadu sa budú odhadované hodnoty odchyľovať od skutočných hodnôt v priemere 4,36 USD (RMSE) a dopustíme v priemere 4,95% chyby (MAPE).

#### 4.6.2 Overenie predpokladov o náhodnej zložke modelu

Na obrázku č. 13 môžete v spodnej tabuľke vidieť výsledky testov, ktoré overujú predpoklady o náhodnej zložke. V danej tabuľke sa nachádzajú nasledujúce testy:

RUNS = Test náhodnosti založený na bodoch obratu

RUNM = Znamienkový test sekvencií nad alebo pod mediánom – test nezávislosti rezíduí

AUTO = Box-Piercov test autokorelácie

MEAN = Test zhody strednej hodnoty rezíduí s nulovou konštantou

VAR = Test zhody rozptylov prvej a druhej polovice rezíduí

Testy o náhodnej zložke nadobúdajú určité hodnoty testovacej charakteristiky a  $p$  - hodnoty. Na obrázku 13 sú znázornené  $p$  – hodnoty testov o náhodnej zložke pre model  $ARIMA(0,1,0) \times (2,0,2)_{12}$  nasledujúcimi symbolmi:

OK – ( $p\text{-hodnota} \geq 0,05$ )

\* – ( $0,01 < p\text{-hodnota} \leq 0,05$ )

\*\* – ( $0,001 < p\text{-hodnota} \leq 0,01$ )

\*\*\* – ( $p\text{-hodnota} \leq 0,001$ )

Podľa výstupu zo STATGRAHPICS Centurion konštatujeme na obr. 13, že model spĺňa na hladine významnosti 5% všetky kritériá o náhodnej zložke, okrem homoskedasticity (test VAR). Tento test rozdielov v rozptyle hodnote prvej a druhej polovice údajov má  $p$  - hodnotu medzi 0,01 a 0,05.  $P$  - hodnota Box – Pierce testu autokorelácie rezíduí je rovná 0,54 (vid' príloha 13, v ktorej sú uvedené aj  $p$  – hodnoty testu RUNS a RUNM), čiže môžeme konštatovať, že rezíduá modelu nie sú lineárne korelované.

Normalitu náhodných chýb sme overili pomocou Kolmogorov – Smirnovho testu, ktorého výstup je na obrázku 15. Vidíme, že  $p$  - hodnota je blízka jednej, čiže prijímame nulovú hypotézu o normalite náhodnej zložky.

Obrázok 15 Kolmogorov – Smirnov test normality rezíduí modelu

**Goodness-of-Fit Tests for RESIDUALS**

**Kolmogorov-Smirnov Test**

	<i>Normal</i>
DPLUS	0,0415801
DMINUS	0,0364358
DN	0,0415801
P-Value	0,991246

Zdroj: vlastná analýza v STATGRAHPICS Centurion

#### 4.6.3 Prognóza ceny ropy modelom ARIMA

V predchádzajúcich krokoch sme potvrdili, že model  $ARIMA(0,1,0) \times (2,0,2)_{12}$  spĺňa podmienky stacionarity a invertibility, všetky parametre modelu sú štatisticky významné a rezíduá modelu spĺňajú podmienky bieleho šumu, s výnimkou homoskedasticity, ktorá je splnená na nižšej hladine významnosti  $\alpha = 0,01$ . Výsledný model môžeme matematicky zapísať nasledovne:

$$(1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s})(1 - B)y_t = (1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s})\varepsilon_t$$

$$(1 - 1,347B^{12} + 0,764B^{24})(1 - B)Crude\_oil\_price_t = (1 - 1,637B^{12} + 0,692B^{14})\varepsilon_t$$

$$Crude\_oil\_price_t = 1,347Crude\_oil\_price_{t-12} - 0,764Crude\_oil\_price_{t-24} - 1,637\varepsilon_{t-12} + 0,962\varepsilon_{t-24} + \varepsilon_t$$

#### Prognóza ex-post

Tabuľka 10 Ex-post prognóza ceny ropy

Obdobie	Skutočná cena (v USD)	Prognóza (v USD)	Chyba prognózy (v USD)	Chyba prognózy (v %)
apr.17	49,33	46,85	2,48	5,29%
máj.17	48,32	56,51	-8,19	-14,50%
jún.17	46,04	47,12	-1,08	-2,28%
júl.17	50,17	47,86	2,31	4,82%
aug.17	47,23	48,89	-1,66	-3,39%
sep.17	51,67	54,42	-2,75	-5,05%
okt.17	54,38	55,08	-0,70	-1,28%
nov.17	57,4	59,03	-1,63	-2,75%
dec.17	60,42	59,47	0,96	1,61%
jan.18	64,73	62,99	1,74	2,77%
feb.18	61,64	58,15	3,50	6,01%
mar.18	63,52	58,06	5,46	9,41%

<b>Priemer</b>	0,04	0,06%
----------------	------	-------

Zdroj: vlastné spracovanie dát v Microsoft Excel

Simuláciu ex-post bola vykonaná za posledných 12 mesiacov, teda od Marca 2017 do Februára 2018. Výsledky simulácie sú v tabuľke č. 10, z ktorých môžeme vyčítať, že prognóza sa od skutočnosti odchyľuje od -14,5% do 9,412%. Hodnoty prognózy ceny ropy sú za posledných 12 mesiacov nadhodnotené každý mesiac v priemere o 0,04 USD, teda o 0,06%.

### Prognóza ex-ante

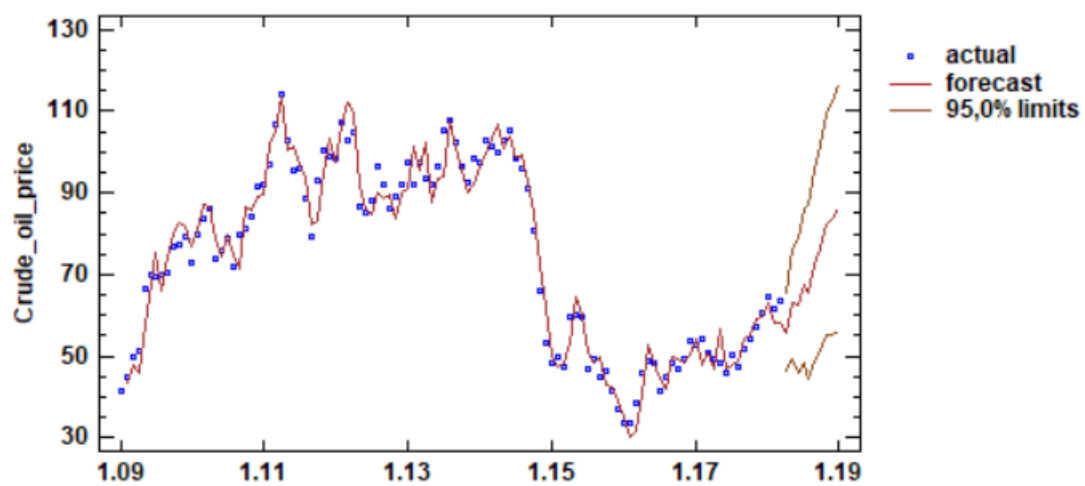
Tabuľka 11 Ex-ante prognóza ceny ropy

Obdobie	Prognóza (v USD)	Dolná 95% hranica (v USD)	Horná 95% hranica (v USD)
apr.18	55,92	46,39	65,44
máj.18	62,96	49,50	76,43
jún.18	62,40	45,91	78,90
júl.18	67,32	48,28	86,37
aug.18	65,69	44,39	86,98
sep.18	72,33	49,01	95,66
okt.18	76,53	51,33	101,72
nov.18	82,09	55,15	109,02
dec.18	83,77	55,20	112,34

Zdroj: vlastné spracovanie dát v Microsoft Excel

Z prognózy ex-ante v tab. 11 môžeme podľa hodnôt v druhom stĺpci vyčítať, že v roku 2018 očakávame rast ceny ropy. V Decembri 2018 očakávame, že cenová hladina ropy bude v intervale od 55,2 USD do 112,34 USD. Na grafe č. 20 máme grafické znázornenie prognózy ceny ropy. Vidíme, že počas celého obdobia nám odhadované hodnoty veľmi dobre kopírujú skutočné hodnoty, čo naznačuje dobrú prognostickú a vypovedaciu schopnosť zvoleného modelu.

Graf 20 *Ex-ante prognóza ceny ropy*



Zdroj: vlastná grafická analýza v STATGRAHPICS



## 5 Diskusia

V práci sa nám podarilo nájsť modely časových radov akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a aj ropy, ktoré boli vhodné na prognózovanie. Prognóza modelu ARIMA  $(0,1,0)(2,1,2)_{252}$  časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. na posledný Februárový deň roku 2018 bola v intervale od 315,66 USD do 385,33 USD. V skutočnosti sa v tomto dni uzavrel trh na cene 334,77 USD, čiže cena sa nachádzala v intervale prognózy, čo značí o dobrej prognostickej schopnosti modelu aj napriek nedostatočnej nezávislosti náhodnej zložky modelu.  $P$  – hodnota Box – Piercevho testu nezávislosti náhodnej zložky modelu pre 30 oneskorení síce je rovná 0,15, no so zvyšovaním počtu oneskorení bude  $p$  – hodnota klesať k nule. Ak pri modelovaní pomocou ARIMA modelov je problémom nezávislosť náhodnej zložky modelu, potom by sme mohli uvažovať o modelovaní pomocou ARCH a GARCH modelov (kap. 3.2), ale to už by bolo nad rámec tejto práce.

V kapitole 4.3 pri technickej (grafickej) analýze sme našli formáciu trojuholníka, ktorý sa aktuálne formoval. Skonštatovali sme, že je potrebné počkať na okamih prerazenia horného ramena trojuholníka, kedy by cena mala začať značne rásť alebo dolného ramena trojuholníka, kedy by cena mala začať značne klesať. Po uplynutí približne mesiaca a pol sa pozrieme na to, či naše úvahy boli správne.

Graf 5.1      *Technická (grafická) analýza ceny akcie Tesla Motors, Inc.*



Zdroj: Yahoo Finance, vlastné grafické spracovanie v Microsoft Excel.

Na grafe 5.1 môžeme vidieť, že cena prerazila dolné rameno trojuholníka a začala značne klesať. Príčinou tohto výrazného poklesu je autonehoda jedného z technikov spoločnosti Tesla Motors, Inc., ktorý zomrel potom, ako jeho elektrické auto Tesla Model X

havarovalo v režime auto - pilota<sup>40</sup>. Tento pokles cien akcií spoločnosti Tesla Motors, Inc. spôsobil zhoršenie už dost' zlej finančnej situácie spoločnosti a americká ratingová agentúra Moody's jej znížila korporátny rating z B2 na B3. Agentúra Moody's poukazuje hlavne na to, že spoločnosť Tesla Motors, Inc. čelí tlaku na likviditu spôsobeným veľkému negatívnemu voľnému peňažnému toku (free cash-flow)<sup>41</sup>.

Podľa modelu časového radu ceny ropy  $ARIMA(0,1,0) \times (2,0,2)_{12}$  by mala cena ropy v apríli 2018 dosiahnuť úroveň od 46,39 USD do 65,44 a v nasledujúcich mesiacoch stále narastať. V čase písania tejto kapitoly (20.4.2018) je cena ropy 67,7 USD. Aktuálna cena ropy sa síce nenachádza v intervale predpovede, ale prognóza modelu  $ARIMA(0,1,0) \times (2,0,2)_{12}$  v konečnom dôsledku určila správny smer vývoja ceny ropy – smerom hore. Príčinou tak vysokej ceny ropy môže byť aktuálna obchodná „vojna“ medzi USA a Čínou.

---

<sup>40</sup> <https://www.bloomberg.com/news/articles/2018-03-28/tesla-says-cause-of-fatal-crash-not-yet-known-without-car-s-logs>

<sup>41</sup> [https://www.moody.com/research/Moodys-downgrades-Teslas-corporate-family-rating-to-B3-senior-notes--PR\\_381481](https://www.moody.com/research/Moodys-downgrades-Teslas-corporate-family-rating-to-B3-senior-notes--PR_381481)

## Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo navrhnúť prognostické modely vývoja časového radu ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy, ktoré tieto časové rady čo najvernejšie popisujú a pomocou nich predikovať vývoj ceny akcie spoločnosti Tesla Motors, Inc. a ropy. Na záver môžeme skonštatovať, že sa nám podarilo naplniť hlavný cieľ práce a čiastkové ciele v plnom rozsahu.

K splneniu prvého čiastkového cieľa sme spracovali a priblížili prognózu ceny ropy podľa Abdullaha a Shabriho (2014), ktorí porovnávali vhodnosť použitia modelov ARIMA, GARCH a SVM na modelovanie a prognózu ceny ropy. Ďalej sme priblížili prístup Mensaha (2015) k modelovaniu a prognóze ceny ropy, ktorý chcel poukázať, že ARIMA modely nie sú schopné zachytiť volatilitu ceny ropy. V ďalšej podkapitole sme sa zaoberali činnosťou spoločnosti Tesla Motors, Inc., pretože poznať spoločnosť, resp. jej produkty, činnosti a vývoj je základným predpokladom pre investíciu do akcií danej spoločnosti. Následne sme spracovali prístup Wahla (2017) k modelovaniu ceny akcie Tesla Motors, Inc.

Druhý čiastkový cieľ bol splnený vysvetlením Boxovej – Jenkinsovej metodológie modelovania časových radov, ktorá je založená na iteratívnom spôsobe hľadania vhodného modelu. Medzi kroky v iteratívnom procese patria identifikácia modelu, odhad parametrov identifikovaného modelu, verifikácia modelu a prognóza. V ďalšej podkapitole sme spomenuli modely volatility ARCH a GARCH, ktoré sú vhodnejšie na modelovanie finančných časových radov ako modely ARIMA a SARIMA. V poslednej podkapitole metodologickej časti sme popísali tradičné formácie, resp. vzory technickej (grafickej) analýzy.

K splneniu posledného čiastkového cieľa sme aplikovali metódy analýzy a modelovania časových radov na časový rad ceny akcie Tesla Motors, Inc. a ceny ropy. Časové rady sme najprv stacionarizovali, na základe grafickej analýzy ACF a PACF sme predbežne určili modely, ktoré sme následne porovnali s inými modelmi a vybrali sme model, ktorý spĺňal predpoklady. Následne sme odhadli parametre modelu, overili podmienky bieleho šumu a na záver vytvorili prognózy. Na vylepšenie presnosti prognóz by sme odporúčali modelovať pomocou sofistikovanejších modelov, ako napr. GARCH, SVM alebo neurónové siete.

V poslednej kapitole sme s odstupom času porovnali výsledky analyzovania so skutočnosťou a zhodnotili sme, že presnosť našich prognóz vývoja ceny akcie Tesla Motors, Inc. a ropy bola na relatívne dobrej úrovni.

## **Použitá literatura**

<https://www.cnbc.com/2017/05/03/tesla-first-quarter-2017-earnings.html>

<http://www.businessinsider.com/tesla-stock-price-earnings-report-crushing-short-sellers-2017-8>

Box, G. E. & Draper, N. R. (1987), Empirical model-building and response surfaces, Vol. 424, Wiley New York.

## **Zdroje analyzovaných dát:**

<https://finance.yahoo.com/quote/Tesla Motors, Inc./history?p=Tesla Motors, Inc.>

## Prílohy

Popis príloh:

- |            |  |
|------------|--|
| Príloha 1  | Mesačné údaje ceny akcie Tesla Motors, Inc. s relatívnou a absolútnou diferenciou.   |
| Príloha 2  | Vývoj ceny akcie Tesla Motors, Inc. v prvom polroku 2017, kedy bol zaznamenaný najväčší nárast ceny akcie.   |
| Príloha 3  | F – test časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc. po logaritmickej transformácií.   |
| Príloha 4  | F – test časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc. po 1. nesezónnej diferencii a F – test časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc. po 1. nesezónnej diferencii a logaritmickej transformácií. |
| Príloha 5  | Verifikácia modelov s dĺžkami sezónnej diferenciácie 63 a 21 časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc.   |
| Príloha 6  | Hodnoty koeficientov autokorelácie stacionarizovaného časového radu ceny akcie Tesla Motors, Inc.  |
| Príloha 7  | Hodnoty parametrov modelu $ARIMA(0,1,0)(2,1,2)_{252}$ ceny akcie Tesla Motors, Inc. so štatisticky nevýznamnou konštantou  |
| Príloha 8  | Test heteroskedasticity náhodnej zložky modelu $ARIMA(0,1,0)(2,1,2)_{252}$ ceny akcie Tesla Motors, Inc.   |
| Príloha 9  | Testy nezávislosti náhodnej zložky modelu $ARIMA(0,1,0)(2,1,2)_{252}$ ceny akcie Tesla Motors, Inc.  |
| Príloha 10 | Hodnoty parametrov modelu $ARIMA(0,1,0)(2,0,2)_{12}$ ceny ropy so štatisticky nevýznamnou konštantou   |
| Príloha 11 | Jednoduchšie modely ceny ropy s hodnotami parametrov a p-hodnotami parametrov modelu s najnižším RMSE spomedzi zobrazených modelov   |
| Príloha 12 | Jednoduchšie modely ceny ropy s hodnotami parametrov a p-hodnotami parametrov modelu s najnižším RMSE spomedzi zobrazených modelov   |

Príloha 13 Testy nezávislosti náhodnej zložky modelu ARIMA(0,1,0)(2,0,2)<sub>12</sub> ceny  
ropy

**Príloha 1**

Date	Close	relat dif	abs dif
1.1.2013	37,509998		
1.2.2013	34,830002	92,86%	-2,68
1.3.2013	37,889999	108,79%	3,059997
1.4.2013	53,990002	142,49%	16,1
1.5.2013	97,760002	181,07%	43,77
1.6.2013	107,360001	109,82%	9,599999
1.7.2013	134,279999	125,07%	26,92
1.8.2013	169	125,86%	34,72
1.9.2013	193,369995	114,42%	24,37
1.10.2013	159,940002	82,71%	-33,43
1.11.2013	127,279999	79,58%	-32,66
1.12.2013	150,429993	118,19%	23,14999
1.1.2014	181,410004	120,59%	30,98001
1.2.2014	244,809998	134,95%	63,39999
1.3.2014	208,449997	85,15%	-36,36
1.4.2014	207,889999	99,73%	-0,56
1.5.2014	207,770004	99,94%	-0,11999
1.6.2014	240,059998	115,54%	32,28999
1.7.2014	223,300003	93,02%	-16,76
1.8.2014	269,700012	120,78%	46,40001
1.9.2014	242,679993	89,98%	-27,02
1.10.2014	241,699997	99,60%	-0,98
1.11.2014	244,520004	101,17%	2,820007
1.12.2014	222,410004	90,96%	-22,11
1.1.2015	203,600006	91,54%	-18,81
1.2.2015	203,339996	99,87%	-0,26001
1.3.2015	188,770004	92,83%	-14,57
1.4.2015	226,050003	119,75%	37,28
1.5.2015	250,800003	110,95%	24,75
1.6.2015	268,26001	106,96%	17,46001
1.7.2015	266,149994	99,21%	-2,11002
1.8.2015	249,059998	93,58%	-17,09
1.9.2015	248,399994	99,74%	-0,66
1.10.2015	206,929993	83,31%	-41,47
1.11.2015	230,259995	111,27%	23,33
1.12.2015	240,009995	104,23%	9,75
1.1.2016	191,199997	79,66%	-48,81
1.2.2016	191,929993	100,38%	0,729996

1.3.2016	229,770004	119,72%	37,84001
1.4.2016	240,759995	104,78%	10,98999
1.5.2016	223,229996	92,72%	-17,53
1.6.2016	212,279999	95,09%	-10,95
1.7.2016	234,789993	110,60%	22,50999
1.8.2016	212,009995	90,30%	-22,78
1.9.2016	204,029999	96,24%	-7,98
1.10.2016	197,729996	96,91%	-6,3
1.11.2016	189,399994	95,79%	-8,33
1.12.2016	213,690002	112,82%	24,29001
1.1.2017	251,929993	117,90%	38,23999
1.2.2017	249,990005	99,23%	-1,93999
1.3.2017	278,299988	111,32%	28,30998
1.4.2017	314,070007	112,85%	35,77002
1.5.2017	341,01001	108,58%	26,94
1.6.2017	361,609985	106,04%	20,59998
1.7.2017	323,470001	89,45%	-38,14
1.8.2017	355,899994	110,03%	32,42999
1.9.2017	341,100006	95,84%	-14,8
1.10.2017	331,529999	97,19%	-9,57001
1.11.2017	308,850006	93,16%	-22,68
1.12.2017	311,350006	100,81%	2,5
1.1.2018	354,309998	113,80%	42,95999
1.2.2018	343,059998	96,82%	-11,25

## Príloha 2

Date	Close	relat dif	abs dif
1.1.2017	251,929993		
1.6.2017	361,609985	143,54%	109,68



### Príloha 3

F – test časového radu po logaritmickej transformácii

#### Comparison of Standard Deviations

	<i>ln_1st_half</i>	<i>ln_2nd_half</i>
Standard deviation	0,603005	0,22075
Variance	0,363615	0,0487305
Df	645	645

Ratio of Variances = 7,46176

#### 95,0% Confidence Intervals

Standard deviation of *ln\_1st\_half*: [0,57182; 0,637816]

Standard deviation of *ln\_2nd\_half*: [0,209333; 0,233493]

Ratio of Variances: [6,39367; 8,70829]

#### F-test to Compare Standard Deviations

Null hypothesis:  $\sigma_1 = \sigma_2$

Alt. hypothesis:  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

F = 7,46176 P-value = 0

Reject the null hypothesis for  $\alpha = 0,05$ .

### Príloha 4

F – test časového radu po 1. nesezónnej diferencií

#### Comparison of Standard Deviations

	<i>NSD_1st_half</i>	<i>NSD_2nd_half</i>
Standard deviation	5,51949	6,32645
Variance	30,4647	40,024
Df	644	645

Ratio of Variances = 0,761161

#### 95,0% Confidence Intervals

Standard deviation of *NSD\_1st\_half*: [5,23383; 5,83838]

Standard deviation of *NSD\_2nd\_half*: [5,99927; 6,69167]

Ratio of Variances: [0,652171; 0,888375]

#### F-test to Compare Standard Deviations

Null hypothesis:  $\sigma_1 = \sigma_2$

Alt. hypothesis:  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

F = 0,761161 P-value = 0,00054552

Reject the null hypothesis for  $\alpha = 0,05$ .

F – test časového radu po 1. nesezónnej diferencií a logaritmickej transformácii

#### Comparison of Standard Deviations

	<i>nonseas_dif_ln_1st_half</i>	<i>nonseas_dif_ln_2nd_half</i>
Standard deviation	0,0337375	0,0243747
Variance	0,00113822	0,000594126
Df	644	645

Ratio of Variances = 1,91578

#### 95,0% Confidence Intervals

Standard deviation of *nonseas\_dif\_ln\_1st\_half*: [0,0319914; 0,0356867]

Standard deviation of *nonseas\_dif\_ln\_2nd\_half*: [0,0231141; 0,0257818]

Ratio of Variances: [1,64146; 2,23597]

#### F-test to Compare Standard Deviations

Null hypothesis:  $\sigma_1 = \sigma_2$

Alt. hypothesis:  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

F = 1,91578 P-value = 0

Reject the null hypothesis for  $\alpha = 0,05$ .

## Príloha 5

Dĺžka sezónnej diferenciácie = 63

### Model Comparison

Data variable: Stock\_price

Number of observations = 1292

Length of seasonality = 63

### Models

(A) ARIMA(0,1,1)x(1,1,0)63 with constant

(B) ARIMA(1,1,0)x(0,1,1)63 with constant

(C) ARIMA(1,1,1)x(0,1,1)63 with constant

(D) ARIMA(1,1,1)x(1,1,0)63 with constant

(E) ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)63 with constant

### Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	7,20758	5,24132	2,37469	0,0152468	0,00664925
(B)	6,17388	4,43942	2,07473	-0,00776732	-0,00919411
(C)	6,1764	4,43939	2,07472	-0,00778628	-0,0092092
(D)	7,21053	5,2413	2,37467	0,0153307	0,00668901
(E)	6,14059	4,41071	2,05926	-0,00666783	-0,0105937

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	7,20758	OK	OK	OK	OK	*
(B)	6,17388	OK	OK	OK	OK	*
(C)	6,1764	OK	OK	OK	OK	*
(D)	7,21053	OK	OK	OK	OK	*
(E)	6,14059	OK	OK	OK	OK	**

Dĺžka sezónnej diferenciácie = 21

### Model Comparison

Data variable: Stock\_price

Number of observations = 1292

Length of seasonality = 21

### Models

(A) ARIMA(0,1,1)x(1,1,0)21 with constant

(B) ARIMA(1,1,0)x(0,1,1)21 with constant

(C) ARIMA(1,1,1)x(0,1,1)21 with constant

(D) ARIMA(1,1,1)x(1,1,0)21 with constant

(E) ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)21 with constant

### Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	7,27016	5,32437	2,53422	-0,000960338	0,0138521
(B)	6,31311	4,54843	2,18379	-0,00973931	-0,0199137
(C)	6,03633	4,3156	2,10876	0,0195043	-0,014596
(D)	7,27289	5,32434	2,53422	-0,000962251	0,0138316
(E)	6,03542	4,30531	2,10453	0,0200775	-0,0163426

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	7,27016	OK	OK	**	OK	**
(B)	6,31311	OK	*	*	OK	**
(C)	6,03633	OK	OK	OK	OK	**
(D)	7,27289	OK	OK	**	OK	**
(E)	6,03542	OK	OK	OK	OK	**

## Príloha 6

lag	autocorr	lag	autocorr	lag	autocorr	lag	autocorr
1	0,04	64	0,01	127	0,01	190	0,01
2	0,03	65	0,06	128	-0,06	191	-0,04
3	0,01	66	0,01	129	-0,02	192	0,00
4	-0,01	67	-0,02	130	-0,03	193	0,00
5	-0,01	68	-0,05	131	-0,02	194	-0,08
6	-0,04	69	-0,04	132	0,07	195	0,01
7	0,03	70	0,02	133	0,01	196	-0,01
8	0,03	71	-0,03	134	-0,05	197	-0,06
9	-0,01	72	0,01	135	0,00	198	0,01
10	0,03	73	0,01	136	0,01	199	-0,04
11	0,01	74	0,00	137	-0,01	200	-0,01
12	0,00	75	0,00	138	-0,02	201	-0,01
13	-0,04	76	0,01	139	-0,01	202	0,01
14	0,01	77	0,02	140	-0,02	203	0,05
15	-0,04	78	-0,04	141	0,01	204	-0,03
16	-0,05	79	-0,02	142	-0,03	205	0,04
17	0,01	80	0,03	143	-0,03	206	0,06
18	0,03	81	-0,01	144	0,01	207	0,02
19	0,03	82	-0,03	145	0,03	208	0,01
20	-0,02	83	-0,03	146	-0,06	209	0,08
21	0,00	84	0,03	147	0,00	210	0,01
22	-0,02	85	0,05	148	0,02	211	0,00
23	-0,01	86	-0,04	149	0,01	212	0,02
24	0,00	87	0,07	150	0,01	213	0,01
25	0,00	88	0,02	151	0,04	214	0,06
26	-0,05	89	-0,01	152	0,08	215	-0,04
27	-0,05	90	0,02	153	0,06	216	0,05
28	0,01	91	0,00	154	-0,01	217	0,08
29	-0,01	92	0,00	155	-0,03	218	0,01
30	0,04	93	0,05	156	-0,04	219	-0,03
31	-0,02	94	0,05	157	0,02	220	-0,04
32	0,01	95	-0,03	158	-0,04	221	0,05
33	0,03	96	0,02	159	-0,05	222	-0,04
34	-0,02	97	-0,03	160	-0,05	223	0,05
35	-0,04	98	0,00	161	0,03	224	0,00
36	-0,06	99	-0,02	162	-0,03	225	0,03
37	0,03	100	-0,06	163	0,02	226	0,04
38	-0,05	101	-0,02	164	0,02	227	-0,03
39	0,01	102	-0,03	165	-0,03	228	0,01
40	-0,07	103	0,00	166	0,07	229	-0,03
41	-0,02	104	-0,03	167	-0,04	230	0,00
42	-0,01	105	0,02	168	0,02	231	0,03
43	-0,03	106	0,03	169	0,01	232	0,00

44	-0,02	107	-0,01	170	0,02	233	-0,01
45	0,00	108	0,03	171	0,04	234	-0,01
46	-0,07	109	0,00	172	-0,03	235	0,00
47	-0,01	110	0,02	173	0,03	236	0,00
48	0,04	111	0,01	174	0,02	237	0,05
49	-0,04	112	-0,04	175	-0,04	238	0,03
50	-0,07	113	0,04	176	-0,02	239	-0,02
51	0,01	114	-0,01	177	-0,02	240	0,00
52	0,00	115	0,01	178	0,03	241	0,00
53	0,01	116	0,03	179	-0,03	242	0,00
54	0,01	117	-0,02	180	0,03	243	-0,03
55	0,08	118	0,09	181	0,04	244	-0,02
56	0,01	119	0,01	182	-0,01	245	-0,03
57	0,01	120	-0,04	183	0,02	246	-0,01
58	0,04	121	-0,03	184	0,05	247	0,00
59	-0,01	122	0,00	185	-0,02	248	0,02
60	0,01	123	0,03	186	-0,03	249	-0,06
61	0,02	124	0,04	187	-0,09	250	0,04
62	-0,01	125	0,00	188	-0,03	251	-0,04
63	-0,03	126	0,03	189	0,00	252	-0,39

## Priloha 7

### Forecast Summary

Nonseasonal differencing of order: 1

Seasonal differencing of order: 1

Forecast model selected: ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)252 with constant

Number of forecasts generated: 30

Number of periods withheld for validation: 0

	<i>Estimation</i>	<i>Validation</i>
<i>Statistic</i>	<i>Period</i>	<i>Period</i>
RMSE	4,94355	
MAE	3,72418	
MAPE	1,52595	
ME	0,0076397	
MPE	-0,00202812	

### ARIMA Model Summary

<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t</i>	<i>P-value</i>
SAR(1)	-0,228223	0,0299767	-7,61335	0,000000
SAR(2)	-0,797255	0,0157594	-50,5892	0,000000
SMA(1)	1,16118	0,0199834	58,1071	0,000000
SMA(2)	-0,521393	0,0168443	-30,9538	0,000000
Mean	-0,0261527	0,0848606	-0,308185	0,757938
Constant	-0,0529718			

Backforecasting: yes

Estimated white noise variance = 26,1946 with 1034 degrees of freedom

Estimated white noise standard deviation = 5,11807

Number of iterations: 12

## Príloha 8

### Comparison of Standard Deviations

	<i>Residuals_1st_half</i>	<i>Residuals_2nd_half</i>
Standard deviation	4,37653	5,43722
Variance	19,154	29,5633
Df	518	519

Ratio of Variances = 0,647897

### 95,0% Confidence Intervals

Standard deviation of Residuals\_1st\_half: [4,12549; 4,66035]

Standard deviation of Residuals\_2nd\_half: [5,12562; 5,78946]

Ratio of Variances: [0,545335; 0,769759]

### F-test to Compare Standard Deviations

Null hypothesis:  $\sigma_1 = \sigma_2$

Alt. hypothesis:  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

F = 0,647897 P-value = 8,6736E-7

Reject the null hypothesis for  $\alpha = 0,05$ .

## Príloha 9

### Tests for Randomness of residuals

Data variable: Stock\_price

Model: ARIMA(0,1,0)x(2,1,2)252

#### (1) Runs above and below median

Median = -0,0101527

Number of runs above and below median = 504

Expected number of runs = 520,0

Large sample test statistic  $z = 0,962659$

P-value = 0,335717

#### (2) Runs up and down

Number of runs up and down = 689

Expected number of runs = 692,333

Large sample test statistic  $z = 0,208656$

P-value = 0,834712

#### (3) Box-Pierce Test

Test based on first 30 autocorrelations

Large sample test statistic = 33,3329

P-value = 0,152656

## Príloha 10

### Forecast Summary

Nonseasonal differencing of order: 1

Forecast model selected: ARIMA(0,1,0)x(2,0,2)12 with constant

Number of forecasts generated: 12

Number of periods withheld for validation: 0

	Estimation	Validation
Statistic	Period	Period
RMSE	4,36441	
MAE	3,45354	
MAPE	4,95051	
ME	-0,104717	
MPE	-0,263551	

### ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
SAR(1)	1,34668	0,0486297	27,6926	0,000000
SAR(2)	-0,7644	0,0453018	-16,8735	0,000000
SMA(1)	1,6438	0,0525221	31,2973	0,000000
SMA(2)	-0,69286	0,0521802	-13,2782	0,000000
Mean	0,216595	0,283842	0,763084	0,447125
Constant	0,0904758			

Backforecasting: yes

Estimated white noise variance = 23,2053 with 105 degrees of freedom

Estimated white noise standard deviation = 4,81719

Number of iterations: 16

## Príloha 11

### Models

(A) ARIMA(0,1,1)x(1,1,0)12

(B) ARIMA(1,1,0)x(1,1,0)12

(C) ARIMA(1,1,0)x(0,1,1)12

(D) ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)12

(E) ARIMA(0,1,1)x(2,1,0)12

### Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	7,24818	5,48515	7,83381	-0,212781	-0,0661336
(B)	7,24685	5,4821	7,81852	-0,208037	-0,0621402
(C)	5,97935	4,76736	6,82349	-0,59443	-1,06642
(D)	5,98159	4,76555	6,83179	-0,610595	-1,0983
(E)	6,99195	5,38279	7,56242	-0,287256	-0,22603

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	7,24818	OK	OK	OK	OK	OK
(B)	7,24685	OK	OK	OK	OK	OK
(C)	5,97935	OK	OK	OK	OK	OK
(D)	5,98159	OK	OK	OK	OK	OK
(E)	6,99195	OK	OK	OK	OK	OK

### Forecast Summary

Nonseasonal differencing of order: 1

Seasonal differencing of order: 1

Forecast model selected: ARIMA(1,1,0)x(0,1,1)12

Number of forecasts generated: 12

Number of periods withheld for validation: 0

	Estimation	Validation
Statistic	Period	Period
RMSE	5,97935	
MAE	4,76736	
MAPE	6,82349	
ME	-0,59443	
MPE	-1,06642	

### ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
AR(1)	0,151055	0,101275	1,49152	0,139103
SMA(1)	0,894665	0,034087	26,2465	0,000000

## Príloha 12

### Models

- (A) ARIMA(0,1,1)x(1,0,0)12  
 (B) ARIMA(1,1,0)x(1,0,0)12  
 (C) ARIMA(1,1,0)x(0,0,1)12  
 (D) ARIMA(0,1,1)x(0,0,1)12  
 (E) ARIMA(0,1,1)x(2,0,0)12

### Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	5,75976	4,47153	6,33203	0,165647	0,101471
(B)	5,75747	4,47545	6,33303	0,161805	0,102697
(C)	5,74399	4,44872	6,28401	0,161361	0,102724
(D)	5,74586	4,44416	6,28094	0,164595	0,101766
(E)	5,7089	4,29018	6,02614	0,161651	0,0609362

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	5,75976	OK	OK	OK	OK	*
(B)	5,75747	OK	OK	OK	OK	*
(C)	5,74399	OK	OK	OK	OK	*
(D)	5,74586	OK	OK	OK	OK	*
(E)	5,7089	OK	OK	OK	OK	*

### Forecast Summary

Nonseasonal differencing of order: 1  
 Forecast model selected: ARIMA(0,1,1)x(2,0,0)12  
 Number of forecasts generated: 12  
 Number of periods withheld for validation: 0

	Estimation	Validation
Statistic	Period	Period
RMSE	5,7089	
MAE	4,29018	
MAPE	6,02614	
ME	0,161651	
MPE	0,0609362	

### ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
MA(1)	-0,0812466	0,0975921	-0,832512	0,406974
SAR(1)	0,190801	0,0926968	2,05833	0,041988
SAR(2)	-0,156426	0,0908132	-1,72251	0,087867

## Príloha 13

### Tests for Randomness of residuals

Data variable: Crude\_oil\_price

Model: ARIMA(0,1,0)x(2,0,2)12

#### (1) Runs above and below median

Median = -0,0857837

Number of runs above and below median = 47

Expected number of runs = 56,0

Large sample test statistic  $z = 1,62837$

P-value = 0,103445

#### (2) Runs up and down

Number of runs up and down = 79

Expected number of runs = 73,0

Large sample test statistic  $z = 1,25411$

P-value = 0,209802

#### (3) Box-Pierce Test

Test based on first 30 autocorrelations

Large sample test statistic = 24,7053

P-value = 0,535705