Masarykova Univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

DISERTAČNÍ PRÁCE

Brno 2016 Lenka Křivánková

Masarykova Univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Stochastické metody analýzy ekonomických dat

Disertační práce

Brno 2016 Lenka Křivánková

Bibliografický záznam

Autor:	Mgr. Lenka Křivánková
Název:	Stochastické metody analýzy ekonomických dat
Školitel:	doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Obor:	Pravděpodobnost, statistika a matematické modelování
Rok obhajoby:	2016
Klíčová slova:	Stochastické procesy,

Bibliographic entry

Author:	Mgr. Lenka Křivánková
Title:	Stochastic methods in analysis of economic data
Supervisor:	doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.
Study programme:	Mathematics
Study field:	Probability, statistics and mathematical modeling
Year of defence:	2016
Keywords:	Stochastic processes,

Poděkování

Na tomto místě

Brno, Červenec 2016

Lenka Křivánková

Abstrakt

V první části práce jsou uvedeny základní matematické pojmy použité v dalších částech textu.

Abstract

In the first part of the work, some basic mathematical methods employed in this thesis are recalled.

Obsah

Seznam použitého značení

Prostory a matice

$\mathbb{R}$	jednorozměrný Eukleidovský prostor
$\mathbb{R}^n$	n-rozměrný Eukleidovský prostor
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$	n-rozměrný reálný vektor
$\mathbf{1}$	vektor jedniček
$\mathbf{I}_n$	jednotková matice řádu n
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$	transponovaná matice vzhledem k matici $\mathbf{A}$

Pravděpodobnost

ω	elementární jev
Ω	základní prostor, množina všech elementárních jevů
$\mathsf{Pr}(A)$	pravděpodobnost jevu A
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$	pravděpodobnostní prostor

Náhodné veličiny

X; $X(\omega)$	náhodná veličina
$f(x)$; $f_X(x)$	hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X
$F(x)$; $F_X(x)$	distribuční funkce náhodné veličiny X
$X \sim \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$	náhodná veličina X mající rozdělením pravděpodobnosti $\mathcal{L}$ s parametry $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$
$\mathsf{E}(X)$; $\mathsf{E}X$	střední hodnota náhodné veličiny X
$\mathsf{D}(X)$; $\mathsf{D}X$	rozptyl náhodné veličiny X
$\mathsf{C}(X_i, X_j)$	kovariance náhodných veličin X_i a X_j
$\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$	Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2

Náhodné vektory

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$	n-rozměrný náhodný vektor
$f(\mathbf{x})$; $f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x})$	sdružená hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$
$F(\mathbf{x})$; $F_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x})$	sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$
$\mathsf{E}(\boldsymbol{X})$; $\mathsf{E}\boldsymbol{X}$	vektor středních hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$
$\mathsf{D}(\boldsymbol{X})$; $\mathsf{D}\boldsymbol{X}$	kovarianční matice náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)$	kovarianční matice náhodných vektorů $\boldsymbol{X}_i$ a $\boldsymbol{X}_j$

Stochastická analýza

$X(t,\omega)$; $X(t)$; X_t	stochastický proces
$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$	distribuční funkce stochastického procesu
$W(t,\omega)$; $W(t)$; W_t	standardní Wienerův proces
$\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$	přírůstek Wienerova procesu
Δt	přírůstek času
$\Delta W = W_{t+\Delta t} - W_t$	přírůstek Wienerova procesu za čas Δt
$\mathrm{d}X(t,\omega)$; $\mathrm{d}X(t)$; $\mathrm{d}X_t$	stochastický diferenciál
$\int_0^T f(t,\omega)\,\mathrm{d}W$	Itôův integrál pro stochastický proces $f(t,\omega)$
$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\omega})$; $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$; $\boldsymbol{X_t}$	vektorový stochastický proces
$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{t})$	standardní n-rozměrný Wienerův proces

Teorie portfolia

I_t	množina všech investorů na trhu v čase t
$P_j(t)$	cena aktiva j v čase t
$\boldsymbol{P}(t)$	vektor cen aktiv v čase t
$N_j(t)$	objem aktiv j v čase t
$\boldsymbol{N}(t)$	vektor podílů aktiv v čase t
$V_j(t) = P_j(t)N_j(t)$	tržní hodnota aktiva j
r_j	míra výnosnosti podkladového aktiva j
$\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)^{\mathrm{T}}$	vektor výnosností aktiv držených v portfoliu
μ_j	očekávaná míra výnosnosti podkladového aktiva j
σ_j	riziko podkladového aktiva j
$B(t)$	cena bezrizikového aktiva v čase t
$r_f(t)$	bezriziková úroková míra v čase t
$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathrm{T}}$	vektor vah podkladových aktiv držených v portfoliu
$\mathsf{C}(r_j, r_k) = \sigma_{jk}$	kovariance výnosnosti aktiva j a výnosnosti aktiva k
$\boldsymbol{\Sigma}$	kovarianční matice výnosností podkladových aktiv držených v portfoliu
$\xi_{jk}(t)$	proces volatility podkladových aktiv j a k držených v portfoliu
$\boldsymbol{\xi}$	matice volatilit podkladových aktiv držených v portfoliu
$\gamma_j(t)$	míra růstu podkladového aktiva j
$w_j(i, t)$	optimální objem prostředků investovaných do aktiva j investorem i v čase t
$\boldsymbol{w}(i, t)$	optimální alokace prostředků investora i držených v portfoliu všech aktiv
$\lambda(i, j)$	rizikové preference investora i v čase t

Úvod

příliš žluťoučký kůň úpěl ďábelské ódy

1 Stochastická analýza

Nejprve uvedeme základní matematický aparát, který využíváme v této práci. Budeme používat obvyklé značení, jehož přehled je uveden na začátku práce. Zavedeme základní definice a vztahy využívané ve stochastickém modelování. Tato kapitola čerpá především z klasické monografie Bernta Øksendala o stochastických diferenciálních rovnicích [33], podobně jako knihy Thomase Garda [13] a rozsáhlé publikace Andrei Pascucci zabívající se matematickými metodami oceňování opcí [34]. Jako další reference byly využity [23], [1], [45] a [44]. Ve zmiňované literatuře je možno nalézt další podrobnosti.

1.1 Stochastické procesy a jejich vlastnosti

Stochastické procesy slouží k popisu dynamiky náhodných jevů a jejich příklady nacházíme v mnoha vědeckých oborech. Mezi nejznámější patří Brownův pohyb pevných částic, difúze a bílý šum.

Základy teorie stochastických procesů byly položeny na konci devatenáctého století. První zmínky popisu Brownova pohybu najdeme v článku dánského matematika Thorvalda Nicolaie Thielea z roku 1880 o metodě nejmenších čtverců. V roce 1900 Louis Bachelier ve své disertační práci [4] používá Brownův pohyb k popisu pohybu cen akcií na trhu. Díky ní je Bachelier uznávaný jako zakladatel kvantitativních metod ve finanční matematice.

Nezávisle na této práci popisují matematicky Brownův pohyb také fyzici Albert Einstein a Marian Smoluchowski. V roce 1905 Einstein aplikuje Brownův pohyb ve svém článku zabývajícím se molekulárně kinetickou teorií tepla [9]. O rok později Smoluchowski prezentuje článek [50], který se stane důležitým základem teorie náhodných procesů zvláště rovnice difúze. Tyto teorie následně experimentálně ověřil Jean Baptiste Perrin a za tento úspěch byl v roce 1926 oceněn Nobelovou cenou za fyziku.

V neposlední řadě chceme zmínit význam amerického matematika Norberta Wienera, který dokázal existenci stochastického procesu používaného k popisu Brownova pohybu [51]. Tento proces nese jeho jméno a je využíván v mnoha různých odvětvích.

1.1.1 Stochastický proces

V této části práce definujeme stochastický proces a některé jeho zajímavé vlastnosti.

Definice 1 (Stochastický proces)**.** Uvažujme indexovou množinu T a pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$. *Stochastický proces* $X(t, \omega)$ je funkce dvou proměnných $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$, kde

- $X(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ je pro každé $t \in T$ náhodná veličina,
- $X(\cdot, \omega) : T \to \mathbb{R}$ je pro každé $\omega \in \Omega$ realizace náhodného procesu.

Reálná funkce $X(\cdot, \omega)$ se také nazývá *trajektorie* nebo *cesta* stochastického procesu.

Množina parametrů T může být diskrétní nebo spojitá a v závislosti na tom pak mluvíme o *diskrétním* nebo *spojitém* stochastickém procesu.

Definice 2 (Ekvivalence stochastických procesů)**.** Dva stochastické procesy $X(t, \omega)$ a $Y(t, \omega)$ nazveme *ekvivalentní* pokud platí

$$X(t, \cdot) = Y(t, \cdot) \text{ s pravděpodobností jedna pro každé } t \in T.$$

V takovém případě hovoříme o tom, že jeden proces je *verzí* druhého procesu.

Definice 3 (Systém distribučních funkcí stochastického procesu)**.** Nechť T_n je množina všech vektorů $T_n = \{\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) : t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n; t_i \in T; i = 1, \ldots, n\}$, pak *distribuční funkcí* stochastického procesu rozumíme funkci

$$F_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{Pr}(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n),$$

pro všechna $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T$ a všechna $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pro různá n a různé $t_1, \ldots, t_n$ dostáváme celý *systém distribučních funkcí*, který označíme $\mathcal{F}$, a který plně popisuje pravděpodobnostní chovaní stochastického procesu.

Příklad 1 (Gaussovský proces)**.** *Gaussovský proces* je stochastický proces, jehož rozdělení pravděpodobnosti je normální, tedy každá sdružená distribuční funkce $F_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x})$ je normální pro všechna $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T$ a $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Systém distribučních funkcí nese úplnou informaci o pravděpodobnostním chování stochastického procesu, nicméně podstatnou část této informace můžeme získat už jen z charakteristik popsaných v následující definicí.

Definice 4 (Charakteristické funkce stochastického procesu)**.** Nechť $X(t)$ je stochastický proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathsf{E}X(t)$. Pak funkce μ_t definovaná na množině T předpisem

$$\mu_t = \mathsf{E}X(t)$$

se nazývá *střední hodnota stochastického procesu* $X(t)$.

Nechť $X(t)$ je stochastický proces takový, že pro každé $t \in T$ platí $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$ (říkáme, že má *konečné druhé momenty*). Pak funkce dvou proměnných $\gamma(s,t)$ definovaná na množině $T \times T$ předpisem

$$\gamma(s,t) = \mathsf{C}(X(s), X(t)) = \mathsf{E}[(X(s) - \mu_s)(X(t) - \mu_t)]$$

se nazývá *autokovarianční funkce stochastického procesu* $X(t)$. Speciálně hodnota $\gamma(t,t) = \mathsf{D}(X(t))$ této funkce se nazývá *rozptyl stochastického procesu* v čase t a budeme ji značit ${\sigma_t}^2$.

Nechť $X(t)$ je stochastický proces s konečnými druhými momenty, pak funkce $\rho(s,t)$ definovaná na množině $T \times T$ předpisem

$$\rho(s,t) = \frac{\mathsf{C}(X(s), X(t))}{\sqrt{\mathsf{D}(X(s))\mathsf{D}(X(t))}} = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}}$$

se nazývá *autokorelační funkce stochastického procesu* $X(t)$.

Definice 5 (Stacionarita stochastického procesu)**.** Stochastický proces $X(t)$ nazveme *striktně stacionární* pokud jsou jeho sdružené distribuční funkce invariantní vůči časovému posunu, tedy pro všechna $h \in \mathbb{R}$ takové, že $t_j \in T$ a $t_j + h \in T$ pro všechna j platí

$$F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Stochastický proces $X(t)$ nazveme *slabě stacionární* pokud existuje konstanta $\mu \in \mathbb{R}$ a funkce $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\mathsf{E}X(t) = \mu \quad \text{a} \quad \mathsf{C}(X(t), X(s)) = c(t-s)$$

pro všechna $t, s \in T$.

Pro slabě stacionární proces zřejmě platí ${\sigma_t}^2 = c(0)$. Procesy, které nejsou striktně stacionární, se nazývají evoluční.

Definice 6 (Nezávislost přírůstků stochastického procesu)**.** Přírůstky stochastického procesu $X(t)$ jsou *nezávislé* právě tehdy, když pro všechny časové posloupnosti $\{t_i\} \subseteq T$, kde $t_i < t_{i+1}$, jsou přírůstky $X(t_{i+1}) - X(t_i)$ nezávislé náhodné veličiny.

K popisu pravděpodobnostního chování stochastického procesu s nezávislými přírůstky je tedy dostačující znát distribuční funkci náhodné veličiny $X(t)$ a přírůstku stochastického procesu $X(t) - X(s)$, kde $t > s$.

Definice 7 (Spojitost stochastického procesu)**.** Řekneme, že stochastický proces $X(t)$ je *stochasticky spojitý v bodě* $t_0 \in T$, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ platí

$$\Pr(|X_t - X_{t_0}| > \epsilon) = 0.$$

Stochastický proces je *stochasticky spojitý* (spojitý podle pravděpodobnosti), je-li spojitý v každém bodě množiny T.

Proces, který je spojitý podle předcházející definice, nemusí mít spojité trajektorie.

1.1.2 Wienerův proces

Wienerův proces byl zaveden Norbertem Wienerem jako matematický popis Brownova pohybu. Může být také interpretován jako limita náhodné procházky pro infinitezimální časoprostorový krok. Zajímavostí Wienerova procesu je kombinace dvou vlastností, s pravděpodobností jedna má spojitou trajektorii a zároveň je nediferencovatelný v každém bodě. Wienerův proces je základním stavebním kamenem pro konstrukci stochastického integrálu.

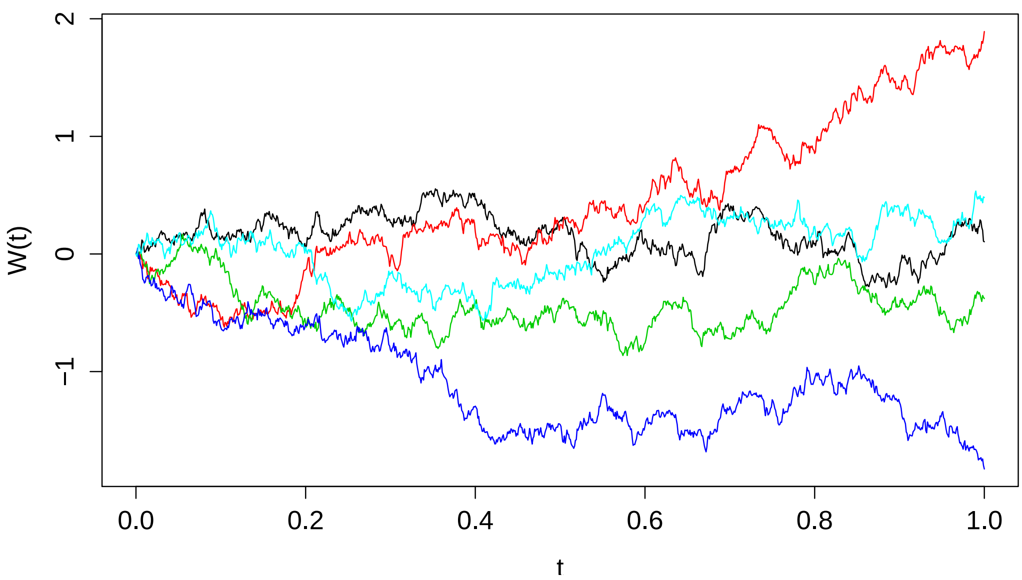
Definice 8. Reálný stochastický proces $\{W(t) : t \geq 0\}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ se nazývá *Wienerův proces*, jestliže platí

1. $W(0) = 0$,
2. (spojitost trajektorií Wienerova procesu) s pravděpodobností jedna je funkce $t \to W(t)$ spojitá v t,
3. (nezávislost a stacionarita přírůstků) přírůstky procesu jsou nezávislé a stacionární, t.j. pro každé $t \geq s \geq 0$ má $W(t + s) - W(s)$ stejné rozdělení jako $W(t) - W(0)$,
4. (normalita přírůstků) pro každé $t \geq s \geq 0$ má přírůstek $W(t) - W(s)$ normální rozdělení $\mathsf{N}(0, t - s)$.

Z definice Wienerova procesu je zřejmé, že jeho střední hodnota $\mu_t = 0$ pro všechna $t \geq 0$. Snadno odvodíme vztah pro autokovarianční funkci Wienerova procesu $\rho(s,t) = \min(s,t)$. Jestliže $0 \leq s < t$, pak

$$\begin{aligned}\rho(s,t) = \mathsf{C}(W(s), W(t)) &= \mathsf{E}[(W(s) - \mu_s)(W(t) - \mu_t)] \\ &= \mathsf{E}[W(s)W(t)] \\ &= \mathsf{E}[W(s)(W(t) - W(s) + W(s))] \\ &= \mathsf{E}[W(s)]\mathsf{E}[W(t) - W(s)] + \mathsf{E}[W(s)]^2 \\ &= 0 \cdot 0 + s.\end{aligned}$$

To znamená, že Wienerův proces není slabě stacionární.



Obrázek 1.1: Ukázka pěti trajektorií Wienerova procesu

Ceny aktiv na finačních trzích se podle teorie dokonalých trhů chovají zcela náhodně a nezávisle na předchozím vývoji. Wienerův proces se tedy nabízí jako vhodný nástroj k popisu chování cen aktiv. Při modelování ve finanční matematice využíváme procesy, které jsou zobecněním či modifikací Wienerova procesu. Uvažujme proces s nenulovým parametrem růstu, označovaným jako drift, a parametrem variability, jenž odpovídá směrodatné odchylce procesu.

Definice 9 (Wienerův proces s driftem)**.** Stochastický proces $X(t)$ definovaný

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

kde μ a σ jsou konstanty a $W(t)$ je Wienerův proces, se nazývá *Wienerův proces s driftem* μ a volatilitou σ.

Pokud bychom chtěli využít tento proces k modelování cen podkladových aktiv, setkáme se s dvěma problémy. Nejenže Wienerův proces s driftem může nabývat záporných hodnot, což je v rozporu s realitou chování cen podkladových aktiv, ale navíc by se model nechoval stejně při různých absolutních cenách aktiv. Aktivum s nižší současnou cenou by mělo větší riziko a také vyšší očekávaný výnos než aktivum s vyšší cenou. Proto chceme proces upravit tak, aby absolutní očekávaný výnos a výše směrodatné odchylky byly proporcionální k ceně podkladového aktiva.

Nejběžnější modifikací Wienerova procesu splňující tyto požadavky je Geometrický Wienerův proces, který zavedl Paul Samuelson [40]. K rozšíření modelu používajícího tento proces přispěli především Fischer Black a Myron Scholes [5] a to zejména v kontextu oceňování opcí.

Definice 10 (Geometrický Wienerův proces)**.** Stochastický proces $S(t)$, který je řešením stochastické diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W(t), \tag{1.1}$$

kde μ a σ jsou konstanty a $W(t)$ je Wienerův proces, se nazývá *Geometrický Wienerův proces*.

Toto řešení můžeme vyjádřit následovně

$$S(t) = S(0)\,\mathrm{e}^{X(t)}, \tag{1.2}$$

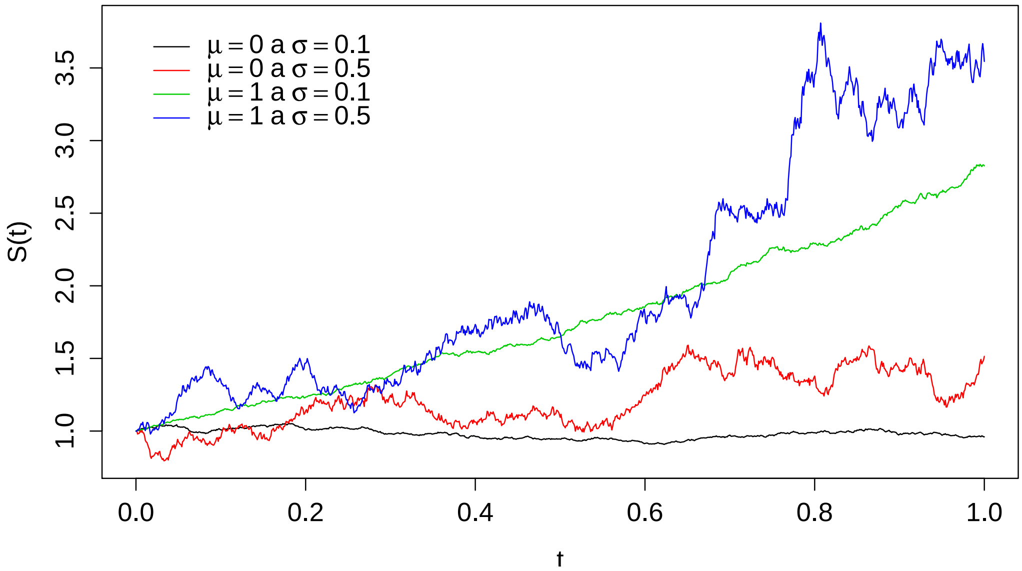
kde $X(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\,t + \sigma W(t)$ je Wienerův proces s driftem.

Člen $\mathrm{d}W(t)$ ve stochastické diferenciální rovnici (1.1) označuje infinitezimální přírůstek Wienerova procesu a $\mathrm{d}t$ je infinitezimální změna času.

Z definice 10 je zřejmé, že Geometrický Wienerův proces nabývá pouze kladných hodnot a jeho relativní přírůstky jsou nezávislé a mají stejné rozdělení. Kromě toho se s tímto procesem docela snadno pracuje ve výpočtech. Díky těmto vlastnostem se stal nejrozšířenějším model chování cen aktiv ve finanční matematice.

1.1.3 Itôův proces

Abychom mohli v následujícím textu zavést stochastický integrál definujme napřed širokou třídu procesů, již jsou Itôvy procesy.



Obrázek 1.2: Ukázka pěti trajektorií Geometrického Wienerova procesu s různými parametry driftu μ a volatility σ

Kiyosi Itô byl japonský matematik, jenž modernizoval stochastické modely a jeho metody jsou dodnes používány v mnoha odvětvích vědy především ve financích a biologii. Svou práci začal stavět v roce 1940 na základě dřívějších objevů Alberta Einsteina a Norberta Wienera. V teorii stochastických procesů aplikoval metody diferenciálního a integrálního počtu. Matematický rámec zahrnující stochastické integrály a stochastické diferenciální rovnice vešel ve známost jako Itôův kalkul. Z významných Itôvých textů zmiňme článek [17] z roku 1944 obsahující konstrukci stochastického integrálu a publikace [18] a [20], kde zavádí koncept stochastických diferenciálních rovnic.

Robert C. Merton, nositel Nobelovy za ekonomii, využívá teoretické poznatky Kiyosi Itôa jako nástroj pro výzkum vývoje cen akcií v portfoliu a k oceňování finančních derivátů. Což bude dále přiblíženo v kapitole 2 o stochastickém modelování.

Definice 11. Nechť $\{W(t) : t \geq 0\}$ je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$. Řekneme, že stochastický proces $\{f(t,\omega) : t \geq 0\}$ je *neanticipativní*, jestliže pro všechna $t \geq 0$ hodnota $f(t,\omega)$ závisí jen na hodnotách Wienerova procesu do času t.

Definice 12. Nechť $W(t,\omega)$ je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$. Symbolem M označme třídu stochastických procesů $f(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ takových, že

1. $f(t,\omega)$ je neanticipativní,
2. $\mathrm{E}\left[\int_0^T f^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t\right] < \infty$.

Definice 13 (Itôův proces)**.** Nechť $W(t,\omega)$ je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$. *Itôův proces* je stochastický proces

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t U(s,\omega)\,\mathrm{d}s + \int_0^t V(s,\omega)\,\mathrm{d}W(s,\omega),$$

kde $U(t,\omega)$ a $V(t,\omega)$ jsou stochastické procesy patřící do třídy M, první integrál je Lebesgueův a druhý Itôův (který je definován v kapitole 1.2.1).

Často se používá diferenciální tvar, nazývaný *stochastický diferenciál*,

$$\mathrm{d}X(t,\omega) = U(t,\omega)\,\mathrm{d}t + V(t,\omega)\,\mathrm{d}W(t,\omega).$$

Geometrický Wienerův proces je speciálním případem Itôova procesu, kde $U(t,\omega) = \mu\, X(t,\omega)$ a $V(t,\omega)) = \sigma X(t,\omega)$.

1.1.4 Ornstein–Uhlenbeckův proces

Další často využívanou modifikací Wienerova procesu jsou stochastické procesy s tendencí vracet se k dlouhodobé rovnovážné hodnotě. Nazývají se *mean-reversion procesy* a nachází četné využití ve fyzice, matematice i ekonomii. Ve finanční matematice se používají pro modelování úrokových sazeb, kurzů měn, cen komodit a volatility.

Holandští fyzikové Leonard Salomon Ornstein a George Eugene Uhlenbeck zformulovali jako první mean-reversion proces v roce 1930 a publikovali v textu [48].

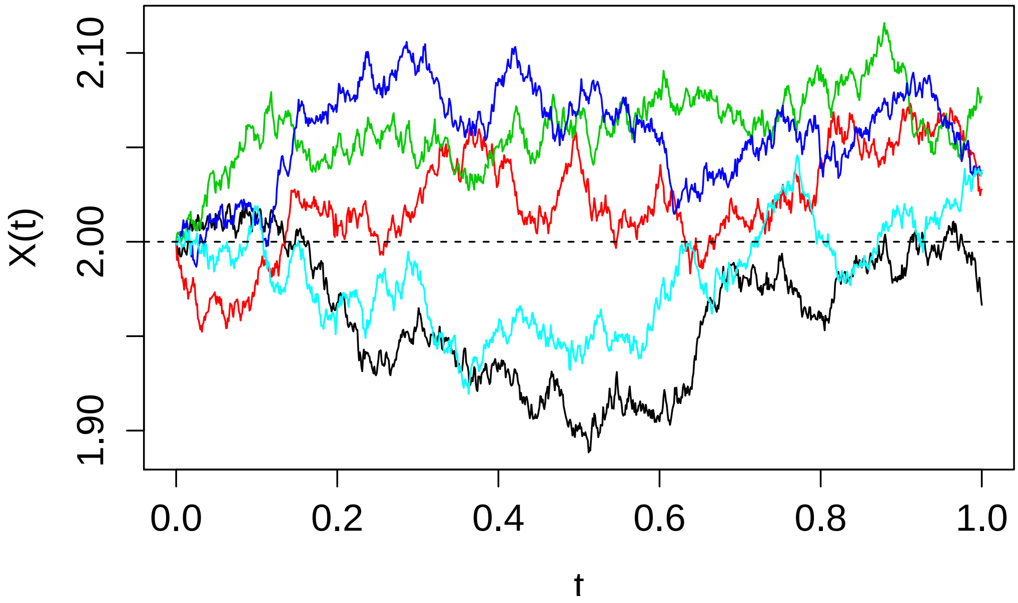
Definice 14 (Ornstein–Uhlenbeckův proces)**.** *Ornstein–Uhlenbeckův proces* je definován jako

$$X_t = X_0\,\mathrm{e}^{-\theta t} + \mu\,(1 - \mathrm{e}^{-\theta t}) + \mathrm{e}^{-\theta t} \int_0^t \sigma\,\mathrm{e}^{\theta s}\,\mathrm{d}W_s, \tag{1.3}$$

kde parametr $\theta > 0$ je koeficient rychlosti reverze, parametr $\mu \in \mathbb{R}$ je rovnovážná hodnota, parametr $\sigma > 0$ je volatilita a W_t je Wienerův proces. Ornstein–Uhlenbeckův proces může být také definován jako řešení stochastické diferenciální rovnice

$$\mathrm{d}X_t = \theta(\mu - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{1.4}$$

Ornstein–Uhlenbeckův proces je stacionární Gaussovský proces s ohraničeným rozptylem. Koeficient θ určuje rychlost přibližování k rovnovážné hodnotě μ (nebo také střední hodnotě). Čím je θ větší tím pohotověji proces reaguje na odchýlení od rovnováhy. Na rozdíl od Wienerova procesu nemá Ornstein–Uhlenbeckův proces konstantní koeficient driftu, jelikož závisí na jeho aktuální hodnotě. Pokud je aktuální hodnota procesu X_t menší než rovnovážná hodnota μ, pak je koeficient driftu kladný. Naopak když $X_t > \mu$, tak je koeficient driftu záporný.



Obrázek 1.3: Ukázka pěti trajektorií Ornstein–Uhlenbeckova procesu s parametry $\theta = 1$, $\mu = 2$ a $\sigma = 0,1$ a počáteční hodnotou $X_0 = 2$.

Vlastnostem Ornstein–Uhlenbeckova procesu (především stacionaritě) se zevrubně věnují Fred Espen Benth a Asma Khedher v knize [35] z roku 2015, která je aktuální sbírkou práce renomovaných vědců v oboru pravděpodobnosti, statistiky a jejich aplikací ve financích, ekonomii, fyzice, řízení rizika a systémů hromadné obsluhy.

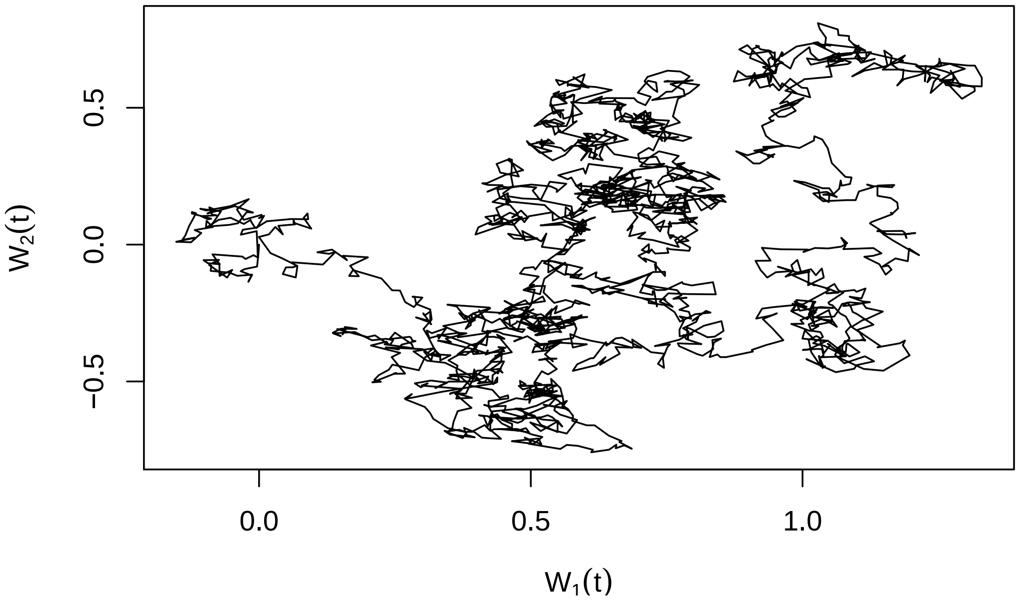
1.1.5 Mnohorozměrný Wienerův proces

Chceme-li uvažovat finanční trh s více rizikovými aktivy a zabývat se jejich vzájemnými vztahy, musíme zavést vícerozměrný Wienerův proces. Aplikaci tohoto vektorového stochastického procesu využijeme v dynamické teorii portfolia.

Definice 15. Standardní *n-rozměrný Wienerův proces* je vektorový stochastický proces

$$\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))^{\mathrm{T}}$$

jehož složky $W_k(t)$ jsou nezávislé, standardní jednorozměrné Wienerovy procesy.



Obrázek 1.4: Ukázka trajektorie dvourozměrného Wienerova procesu

1.2 Itôův kalkul

Chceme-li používat modely založené na stochastických procesech se spojitým časem neobejdeme se bez stochastického integrálního počtu. Dále se proto budeme věnovat konstrukci stochastického integrálu, zavedeme Itôovo lemma a vysvětlíme jeho přínos pro modelování ve finanční matematice. Věty a lemmata budeme uvádět pouze bez důkazu, které jsou k nalezení v literatuře, viz například [23].

Konstrukci stochastického integrálu podle Wienerova procesu představil v letech 1942–1944 Kiyosi Itô v [19] a [17]. Obecnější stochastický integrál, který je založený na širší třídě stochastických procesů, zkonstruovali v roce 1967 Hiroshi Kunita a Shinzo Watanabe v [25].

1.2.1 Itôův integrál

Důležitým nástrojem pro počítání stochastických diferenciálních rovnic je Itôův integrál (nazývaný též jen stochastický integrál). Jeho zavedení je vyžadováno nediferencovatelností Wienerova procesu. Stochastický integrál budeme konstruovat obdobným způsobem jako Riemannův integrál. Nejprve Itôův integrál definujeme pro jednoduché funkce, následně definici rozšíříme na větší třídu funkcí pomocí aproximace.

Definice 16. Stochastický proces S se nazývá *jednoduchý* (nebo *jednoduchá funkce*), jestliže existuje dělení $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T\}$ tak, že pro každé t, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, je $S(t, \omega) = S_k(\omega)$, pro nějaké náhodné veličiny S_k.

Z definice 16 vyplývá, že trajektorie jednoduchého procesu je po částech konstantní.

Definice 17. Nechť S je jednoduchý proces a zaveďme označení $\Delta W_k = W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega)$. Pak

$$\int_0^T S \, \mathrm{d}W = \sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta W_k$$

se nazývá *Itôův integrál* funkce S na intervalu $[0, T]$.

Pomocí limitního přechodu rozšíříme definici Itôova integrálu pro jednoduché funkce na integrál pro obecný stochastický proces.

Lemma 18. *Nechť f je stochastický proces patřící do třídy M dle definice 12. Pak existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tak, že pro $n \to \infty$ platí*

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \left[f(t) - f_n(t)\right]^2 \mathrm{d}t\right] \longrightarrow 0.$$

Definice 19. Nechť $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost jednoduchých funkcí z lemmatu 18. Pro obecný proces $f(t, \omega) \in M$ definujeme *Itôův integrál* předpisem

$$\int_0^T f(t, \omega) \, \mathrm{d}W = \lim_{n \to \infty} \int_0^T f_n(t, \omega) \, \mathrm{d}W.$$

1.2.2 Itôovo lemma

Itôovo lemma je nástrojem pro práci s Itôovým integrálem a stochastickými diferenciálními rovnicemi. Říká, že Itôovy procesy tvoří uzavřenou třídu vzhledem ke skládání s hladkými funkcemi. Kiyosi Itô jej publikoval v roce 1944 v článku [17].

Věta 20 (Itôovo lemma)**.** *Nechť $X(t,\omega)$ je Itôův proces se stochastickým diferenciálem*

$$\mathrm{d}X = U\,\mathrm{d}t + V\,\mathrm{d}W.$$

Nechť $g(t,x) : (0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Potom $Y(t) = g(t,X(t))$ je také Itôův proces. Jeho stochastický diferenciál má tvar

$$\mathrm{d}Y = \frac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\mathrm{d}X)^2 = \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}U + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}V^2\right]\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}V\,\mathrm{d}W.$$

Itôovo lemma můžeme považovat za analogii Taylorova rozvoje v integrálním počtu. Tento důležitý vztah stochastické analýzy budeme využívat pro oceňování finančních derivátů, jejichž hodnota je závislá na hodnotě podkladového aktiva.

1.3 Stochastické diferenciální rovnice

Stochastická diferenciální rovnice je rovnice popisující přírůstky stochastického procesu v čase. Ve finanční matematice se používá například pro popis přírůstku hodnoty nějakého aktiva.

1.3.1 Úvod do teorie stochastických diferenciálních rovnic

Definice 21 (Stochastická diferenciální rovnice)**.** Nechť $\alpha(t,X(t))$ a $\beta(t,X(t))$ jsou funkce dvou proměnných $\alpha,\beta : T\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Stochastickou diferenciální rovnicí (SDR)* rozumíme rovnici

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t}\alpha(s,X(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t}\beta(s,X(s))\,\mathrm{d}W(s), \tag{1.5}$$

kde první integrál je Lebesgueův a druhý integrál je Itôův definovaný v kapitole 1.2.1. Častěji se se SDR setkáváme v jejím diferenciálním tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= \alpha(t,X(t))\,\mathrm{d}t + \beta(t,X(t))\,\mathrm{d}W(t), \qquad (1.6)\\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Konstantu $X(t_0) = X_0$ nazýváme *počáteční podmínkou SDR* a stochastický proces $X(t)$, daný vztahem (1.5), nazýváme *řešením SDR* na T.

Definice 22 (Soustava m stochastických diferenciálních rovnic)**.**

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X^i(t) &= \alpha^i(t,\boldsymbol{X}(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m}\beta^{i,j}(t,\boldsymbol{X}(t))\,\mathrm{d}W^j(t), \\ X^i(t_0) &= X_0^i. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.3.2 Numerické metody řešení stochastických diferenciálních rovnic

Numerické metody využíváme v případě kdy není možno určit řešení SDR analyticky. Základním principem numerických metod je diskretizace proměnných. Numerická metoda určí aproximaci řešení v diskrétních časových hodnotách a spojitou aproximaci řešení získáme použitím interpolačních metod.

Eulerova metoda

Uvažujme Itôův proces $X(t)$, který je řešením SDR definované vztahem (1.6). Nechť $\{t_n\}_{n=0}^N \subseteq T$ je časová posloupnost, kde pro všechna i platí $t_n < t_{n+1}$. Tato posloupnost se nazývá *diskretizace* časové proměnné. V Eulerově metodě diferenciál $\mathrm{d}X(t)$ aproximujeme přírůstkem stochastického procesu $\Delta X_n = X(t_{n+1}) - X(t_n)$. Hodnota $X(t_{n+1})$ je aproximována hodnotou v předcházejícím časovém kroku $X(t_n)$.

Definice 23. Nechť X_n značí aproximaci řešení $X(t_n)$ stochastické diferenciální rovnice (1.6) v čase t_n. Pak *Eulerova metoda* řešení SDR je definována rekurzívním vztahem

$$X_{n+1} = X_n + \alpha(t_n, X_n)\Delta_n + \beta(t_n, X_n)\Delta W_n, \tag{1.8}$$

kde $\Delta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathrm{d}t = t_{n+1} - t_n$ je délka časového intervalu (t_n, t_{n+1}) a $\Delta W_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathrm{d}W(t) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ je přírůstek Wienerova procesu W v čase (t_n, t_{n+1}).

Zobecníme-li Eulerovu metodu pro soustavu m stochastických diferenciálních rovnic, pak vztah pro i-tou složku rovnice je definován předpisem

$$X_{n+1}^i = X_n^i + \alpha^i(t_n, \boldsymbol{X}_n)\Delta_n + \sum_{j=1}^{m}\beta^{i,j}(t_n, \boldsymbol{X}_n)\Delta W_n^j, \tag{1.9}$$

kde $\boldsymbol{X}$ je m-rozměrný Wienerův proces.

Eulerova aproximace je spojitý stochastický proces, který v daných časech $\{t_n\}_{n=0}^N \subseteq T$ splňuje vztah (1.8).

Většinou se předpokládá, že časová posloupnost $\{t_n\}_{n=0}^N \subseteq T$ je ekvidistantní. Důležitou problematikou při používání numerických metod je způsob výpočtu ΔW_n. Z vlastnosti Wienerova procesu plyne, že $\Delta W_n \sim \mathsf{N}(0, t-s)$.

2
Stochastické modelování

Stochastický model slouží k popisu dějů, ve kterých je přítomná náhodná složka. Pomocí stochastického modelu lze simulovat průběh děje a pozorovat jeho chování při nastavení různých parametrů modelu. Aplikace stochastického modelování a simulace chování dějů umožňují nejen jejich popis, ale také jejich analýzu. Na základě analýzy chování modelu a simulací můžeme získat informace pro řízení procesů a k rozhodování.

V této práci se zaměříme na ekonomické modely popisující, jak se na finančním trhu díky nabídce a poptávce formují ceny finančních aktiv. Finanční aktiva poskytují investorovi nárok na budoucí příjem. Mezi finanční aktiva patří především podkladová aktiva, finanční deriváty a peníze.

Modelovat budeme vývoj ceny jak podkladových aktiv, tak finančních derivátů. Podkladové aktivum je nástroj, jehož v čase se měnící cena slouží jako základ pro pohyb ceny finančních derivátů. Podkladovými aktivy mohou být akcie, úrokové míry, komodity, měny, akciové indexy a mnoho dalších finančních instrumentů. Chování cen aktiv vykazuje stochastický charakter a cenové změny jsou náhodné a nepředvídatelné. Kolísání cen aktiv v čase je způsobené vzájemným působením nabídky a poptávky na trhu. Teorie efektivního trhu tvrdí, že ceny aktiv velmi rychle plně odrážejí veškeré tržní informace.

Teorie finančních trhů je podrobně zpracována v české literatuře. Z velkého množství textů odkažme na [38], [12] a [49] se kterými jsme při psaní práce pracovali. Stochastickým modelováním v ekonomii se pak zabývá převážně zahraniční literatura, ze které jsme využili [15], [52] a [24].

2.1 Stochastické modelování cen finančních aktiv

V následující části popíšeme konstrukci matematických modelů používaných ve finanční matematice pro popis vývoje cen aktiv na finančních trzích. V kapitole 1.1.2 jsme uvažovali nad požadavky kladené na chování stochastického procesu, který můžeme využít k modelování cen aktiv, aby byl model smysluplný. Zrekapitulujme kvalitativní znaky modelu aktiv:

- v dlouhodobém časovém horizontu mají ceny aktiv přibližně exponenciální růst,
- fluktuace cen aktiv je náhodná,
- ceny aktiv jsou nezáporné,
- model je univerzální pro různé úrovně cen aktiv.

Jak už bylo naznačeno v kapitole 1.1.2, základní model splňující uvedené požadavky je založen na Geometrickém Wienerově procesu. Model byl zaveden a prosazen Paulem Samuelsonem [41]. Budeme tedy předpokládat, že proces popisující vývoj ceny aktiva v čase se řídí následující stochastickou diferenciální rovnicí

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)\,\mu(t)\,\mathrm{d}t + P(t)\,\sigma(t)\,\mathrm{d}W(t), \tag{2.1}$$

kde $P(t)$ je cena aktiva v čase t, $\mu(t)$ a $\sigma(t)$ jsou stochastické procesy a $W(t)$ je jednorozměrný Wienerův proces. Tento model předpokládá, že na trhu je pouze jedno rizikové aktivum.

Model pro vývoj ceny aktiv na trhu, který předpokládá existenci n rizikových aktiv je dán jako

$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\,\mu_j(t)\,\mathrm{d}t + P_j(t)\sum_{k=1}^{n}\xi_{jk}(t)\,\mathrm{d}W_k(t), \tag{2.2}$$

kde $P_j(t)$ je cena aktiva j v čase t, $\mu_j(t)$ a $\xi_{jk}(t)$ jsou stochastické procesy a $\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t),\dots,W_n(t))^{\mathrm{T}}$ je n-rozměrný Wienerův proces. Pro více informací o mnohorozměrných modelech viz [10].

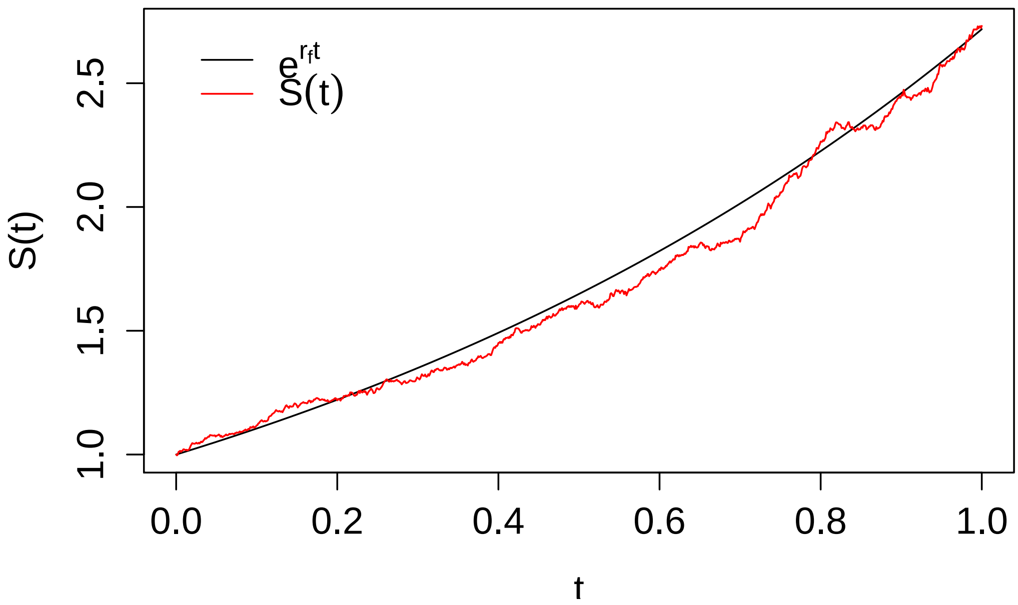
Chování ceny bezrizikového aktiva je popsáno modelem

$$\mathrm{d}B(t) = B(t)\,r_f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

kde $B(t)$ je cena bezrizikového aktiva v čase t a $r_f(t)$ je bezriziková úroková míra.

2.1.1 Black–Scholesův model

Samofinancující strategie spočívá ve vytvoření takového portfolia, které má stejné základní charakteristiky jako finanční derivát. Toto portfolio nazýváme *replikační portfolio*. Stává se z jednoho rizikového a jednoho bezrizikového aktiva.



Obrázek 2.1: Model ceny bezrizikového aktiva s úrokovou mírou $r_f = 1$ a model ceny rizikového aktiva s parametry $\mu = 1$ a $\sigma = 0,1$ a počáteční hodnotou $S(0) = 1$.

2.2 Stochastické modelování úrokových sazeb

Na rozdíl od akcií nebo komodit vykazuje chování úrokových sazeb určité příznačné vlastnosti. Úrokové sazby se pohybují v určitém rozmezí a mají tendenci se vracet k určité rovnovážné hodnotě. Tento jev se nazývá *mean reversion* – reverze k průměrné hodnotě. Stochastické modely, které popisují chování úrokových sazeb musí tedy brát v úvahu výše uvedené vlastnosti.

Jednofaktorové modely krátkodobých úrokových měr předpokládají, že okamžitá úroková míra r je charakterizovaná pomocí řešení stochastické diferenciální rovnice, která má tvar

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(t, r)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, r)\,\mathrm{d}W(t) \tag{2.4}$$

Deterministická část procesu je $\mu(t, r)\,\mathrm{d}t$ a určuje drift ve vývoji úrokové míry, tj. trend, kterým by se úroková míra řídila za předpokladu neexistence náhodných vlivů, volatilita $\sigma(t, r)\,\mathrm{d}w$ určuje vlastnosti náhodných výchylek.

2.2.1 Vašíčkův model

Vašíčkův model je jednofaktorový model, který předpokládá, že okamžitá úroková míra r je charakterizovaná pomocí řešení stochastické diferenciální rovnice, která má tvar

$$\mathrm{d}r(t) = \kappa(\theta - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t) \tag{2.5}$$

kde κ, θ a σ jsou konstanty. Jejichž význam je následující:

- θ je limitní úroková míra,
- κ je rychlost reverze k limitní úrokové míře,
- σ je volatilita.

Drift této rovnice je $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r(t))$, volatilita této rovnice je $\sigma(t, r) = \sigma$. Uvedený model má vlastnost mean reversion, což znamená, že drift táhne proces krátkodobých úrokových měr k průměrné hodnotě dané konstantou θ. Daný proces se nazává Ornstein-Uhlenbeckův proces.

Mezi výhody Vašíčkova modelu patří, že existuje explicitní vyjádření odhadů parametrů θ, κ a σ metodou maximální věrohodnosti. Mezi nevýhody Vašíčkova modelu patří, že připouští i záporné úrokové míry, k tomu dojde v případě, kdy se úroková míra přiblízí nule a volatilita je stále táž konstanta. Tuto chybu odstraňuje Cox - Ingersoll - Rossův model (CIR model), který je ve tvaru

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(t, r)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r(t, r)}\,\mathrm{d}W(t) \tag{2.6}$$

Je vidět, že při malých úrokových mírách je malá také volatilita a převažuje vliv driftu. Kdyby byla úroková míra dokonce nulová, bude volatilita také nulová a změna úrokové míry je dána pouze driftem, který bude v tomto případě kladný. Úroková míra v čase $t + \Delta t$ je rovna $r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma\Delta W$.

2.2.2 Hull-White model

$$\mathrm{d}r(t) = [\theta(t) - \alpha r]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \tag{2.7}$$

kde

$$\theta(t) = F_t'(0, t) + \alpha F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}), \tag{2.8}$$

$F(0, t)$ Instantaneous forward rate at time t.

$F_t'(0, t)$ Partial derivative of F with respect to time t.

3
Teorie portfolia

Portfolio je soubor finančních aktiv držených fyzickou nebo právnickou osobou zvanou *investor*.

3.1 Základní charakteristiky portfolia

V teorii portfolia se investoři snaží minimalizovat investiční riziko a zároveň maximalizovat investiční výnos. Avšak se zvyšováním očekávaného výnosu je spojen i růst rizika, proto základním problémem při optimalizaci portfolia je hledání kompromisu mezi maximalizací výnosu a minimalizací rizika spojeného s investováním. V následující části popíšeme a definujeme tyto základní charakteristiky portfolia.

3.1.1 Výnosnost

Míra výnosnosti (nebo *relativní výnosnost*) aktiva je charakteristika, která udává zisk nebo ztrátu z investice za pevně stanovené období vyjádřená v poměru k množství investovaných prostředků.

Definice 24. Investujeme-li Y korun do aktiva j v čase t, pak korunová hodnota investice v čase $t + \Delta t$ bude $[1 + r_j(t, t + \Delta t)]Y$, kde $r_j(t, t + \Delta t)$ definujeme jako *míru výnosnosti*.

Relativní výnosnost bývá často označována pouze jako *výnosnost*. Vzhledem k tomu, že výnosnost aktiva je pro investora nejistá (s výjimkou bezrizikového aktiva), budeme ji v teorii portfolia chápat jako náhodnou veličinu. Rozdělení pravděpodobnosti této náhodné veličiny nelze určit, nicméně v teorii portfolia se obejdeme bez znalosti rozdělení a využijeme pouze dále uvedené základní charakteristiky náhodné veličiny.

První z těchto charakteristik bude střední hodnota výnosnosti aktiva, kterou označíme $\mathsf{E}(r_j) = \mu_j$. V teorii portfolia se ve spojitosti s touto charakteristikou setkáváme s pojmem *očekávaná výnosnost*. Rozptyl výnosnosti aktiva označíme $\mathsf{D}(r_j) = \sigma_j^2$.

Následující značení využijeme při definicích charakteristik porfolia. Nechť $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)^{\mathrm{T}}$ značí náhodný vektor, jehož složky jsou výnosnosti aktiv držených v portfoliu p. Relativní podíly aktiv, ze kterých se skládá portfolio, se nazývají *váhy* portfolia. Vektor vah portfolia budeme značit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ a přirozeně platí, že $\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$. Mezi základní charakteristiky portfolia patří jeho *výnosnost*, která je dána jako $r_p = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{n} X_j r_j$ a je rovněž náhodnou veličinou. Jedním z faktorů pro výběr portfolia v Markowitzově teorii je *očekávaná výnosnost portfolia*, kterou označíme $\mathsf{E}(r_p) = \mu_p$ a je zřejmé, že platí $\mu_p = \sum_{j=1}^{n} X_j \mu_j$.

3.1.2 Riziko

Riziko popisuje míru nejistoty, že se skutečná výnosnost investice bude lišit od očekávané výnosnosti. *Riziko aktiva* definujeme jako směrodatnou odchylku výnosnosti aktiva a označíme ho $\sqrt{\mathsf{D}(r_j)} = \sigma_j$. Analogicky je *riziko portfolia* definováno jako směrodatná odchylka výnosnosti portfolia a značeno $\sqrt{\mathsf{D}(r_p)} = \sigma_p$.

Riziko celého portfolia v sobě zahrnuje nejen rizika jednotlivých aktiv v portfoliu, ale také riziko z vzájemné závislosti výnosností jednotlivých aktiv. Míra vzájemné závislosti dvou výnosností je mimo jiné popsána jejich kovariancí. Kovarianci výnosnosti aktiva j a výnosnosti aktiva k označíme $\mathsf{C}(r_j, r_k) = \sigma_{jk}$. Snadno se dá dokázat, že $\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_j X_k \sigma_{jk}}$. Riziko portfolia je dalším faktorem pro výběr portfolia v Markowitzově teorii.

3.2 Klasická teorie portfolia

Základy klasické teorie portfolia položil Harry Markowitz svým článkem v roce 1952 [27], ve kterém upozornil na nutnost zohledňovat při výběru portfolia nejenom očekávanou výnosnost, ale i riziko změny výnosnosti. Jeho největším přínosem bylo kvantifikování očekávaného výnosu a rizika portfolia. Dalším přínosem byl matematický důkaz výhod diverzifikace, které byly do té doby chápány pouze intuitivně. Markowitz zkonstruoval množinu všech dostupných portfolií v prostoru výnos – riziko, zavedl pojem *efektivní množina portfolií*, ze které investor vybírá optimální portfolio pomocí indiferenčních křivek popisujících investorův vztah k riziku.

V roce 1958 rozšířil James Tobin [47] Markowitzův model o možnost investování do bezrizikového aktiva. *Bezrizikové aktivum* má jistý výnos a tedy nulové riziko. To má velký vliv především na efektivní množinu portfolií, která je tvořena tečnou k původní Markowitzově efektivní množině procházející bezrizikovým aktivem. V bodě dotyku pak leží tzv. tangenciální portfolio. Postup investora při hledání optimálního portfolia shrnuje Tobinův separační teorém, který se později vžil v souvislosti s CAPM, který bude popsán v další části.Investor prvně určí tangenciální portfolio a následně ho zkombinuje s bezrizikový aktivem podle svých rizikových preferencí.

Capital Asset Pricing Model (CAPM) vyvinuli nezávisle na sobě autoři Sharpe [43], Lintner [26] a Mossin [32] v letech 1964–1966. CAPM zkoumá chování trhu v případě, že se všichni investoři chovají podle Markowitzovy teorie. Zároveň vychází z Tobinova modelu, protože zahrnuje bezrizikové aktivum. CAPM stojí na několika výchozích předpokladech, které se dají shrnout do následujících třech:

- kapitálový trh je efektivní,
- investoři při sestavování portfolia využívají Markowitzův přístup,
- investoři mají homogenní očekávání.

Předpoklad homogenity očekávání investorů má za následek, že všichni investoři drží stejné rizikové portfolio. Optimální portfolia investorů se liší pouze v poměru, v jakém kombinují rizikové portfolio a bezrizikové aktivum v závislosti na svých rizikových preferencích. Toto shrnuje následující věta.

Věta 25. *(Separační teorém) Optimální kombinace rizikových cenných papírů může být stanovena bez jakékoliv znalosti investorových postojů k riziku a výnosnosti.*

Předpokládáme-li rovnováhu trhu, bývá tangenciální portfolio nazýváno jako *tržní portfolio*. Důležitým důsledkem pak je, že váha každého cenného papíru v tržním portfoliu je rovna jeho tržní ceně. Tento poznatek budeme později využívat při konstrukci spojitého rovnovážného modelu.

3.3 Dynamická teorie portfolia

Hlavní výhodou dynamického modelu pro výběr aktiv v portfoliu je přizpůsobování se měnícím se podmínkám trhu a proto je více realistický než model statický. Naproti tomu je dynamický model komplikovanější, hůře interpretovatelný a při jeho využití se nevyhneme složitější matematické teorii, kterou je stochastický kalkul.

3.3.1 Mertonův model

První článek zabývající se dynamickou teorií portfolia napsal Robert Carhart Merton v roce 1971 [29]. Merton předpokládal platnost rovnovážného modelu CAPM a dál tuto teorii rozšířil o spojitý model pro cenu aktiva využívající stochastické procesy. Přitom ukázal, že zůstává zachována platnost všech závěrů z teorie CAPM, zejména pak separačního teorému. Což znamená, že bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat jen dvě aktiva – bezrizikové aktivum s mírou výnosnosti r_f a tržní portfolio (které můžeme považovat za jedno rizikové aktivum).

Merton předpokládá, že hodnota tržního portfolia $P(t)$ se řídí stochastickým procesem

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)\,\mu_p\,\mathrm{d}t + P(t)\,\sigma_p\,\mathrm{d}W(t)$$

kde $W(t)$ je jednorozměrný Wienerův proces a μ_p, σ_p jsou konstanty.

V každém čase t vybírá investor své optimální portfolio volbou vah portfolia. Majetek, který investor investuje do optimálního portfolia v čase t, označíme $w(t)$. Váhu tržního portfolia v optimálním portfoliu označíme $X_p(t)$ a váhu bezrizikového aktiva označíme $X_f(t) = (1 - X_p(t))$. Proces popisující vývoj investorova majetku je dán jako

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{w(t)} = X_p(t)\,\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)} + \Big(1 - X_p(t)\Big)\,r_f\,\mathrm{d}t.$$

Merton odvodil explicitní řešení této stochastické diferenciální rovnice za předpokladu, že charakteristiky výnosnosti aktiva jsou konstantní.

Avšak Mertonův spojitý rovnovážný model vykazuje inkonzistenci, což dokázali Ohlson a Rosenberg [39] hned v roce 1976. Ještě před zveřejněním jejich článku byla uveřejněna ve stejném periodiku Mertonova reakce [31], ve které hájí své poznatky a poukazuje na jejich nepochopení ze strany oponentů. Ohlson a Rosenberg [39] poukazují na rozpor mezi předpokladem, že střední hodnota a rozptyl výnosnosti aktiva jsou konstantní, a předpokladem tržní rovnováhy. Podrobněji bude tento paradox rozebrán v části 3.4.

3.4 Ohlson-Rosenbergův paradox

V této kapitole představíme základní poznatky z článku Ohlsona a Rosenberga [39], který byl publikován v roce 1976 v *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Ohlson a Rosenberg jako první poukázali na nekonzistenci Mertonova spojitého modelu [29] vznikající kvůli rozporu předpokladů.

3.4.1 Značení a předpoklady

Na začátek zavedeme značení a uvedeme základní definice a předpoklady. Uvažujme množinu n různých aktiv na daném trhu a označme T množinu všech uvažovaných časů (diskrétní nebo spojitou). Nechť I_t značí množinu všech investorů na trhu v čase $t \in T$. Cenu aktiva j v čase t označíme $P_j(t)$ a $\boldsymbol{P}(t) = (P_1(t), \ldots, P_n(t))^{\mathrm{T}}$ je vektor cen aktiv v čase t. Analogicky označíme $\boldsymbol{N}(t) = (N_1(t), \ldots, N_n(t))^{\mathrm{T}}$ vektor podílů aktiv v čase t, potom tržní hodnota aktiva j je rovna $V_j(t) = P_j(t)N_j(t)$.

Míra výnosnosti aktiva j, které drží investor v portfoliu v časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ označíme $r_j(t, t + \Delta t)$. Jak bylo zmíněno výše výnosnost chápeme jako náhodnou veličinu a o její distribuční funkci v čase t vyslovíme tři následující předpoklady:

1. *Stacionarita:* distribuční funkce výnosnosti je stejná ve všech časech t,
2. *Martingalová vlastnost:* pro každé t je distribuční funkce výnosnosti nezávislá na všech cenách aktiva pozorovaných do času t,
3. *Homogenita:* distribuční funkce výnosnosti je stejná pro všechny investory z množiny I_t.

Tyto předpoklady jsou konzistentní s předpoklady CAPM.

Označme $w_j(i, t)$ optimální objem prostředků investovaných do aktiva j investorem i v čase t. Nechť $\boldsymbol{w}(i, t) = (w_1(i, t), \ldots, w_n(i, t))$ představuje optimální alokaci prostředků investora i držených v portfoliu všech aktiv. Funkce $w_j(i, t)$ tedy zohledňuje (rizikové) preference investora i v čase t.

Nyní můžeme definovat dynamickou tržní rovnováhu jako stav, kdy nabídka a poptávka jsou v dokonalé rovnováze v každém čase t. Tento stav se také nazývá *vyčištění trhu.*

Definice 26 (Dynamická tržní rovnováha)**.** Řekneme, že kapitálový trh je v *dynamické rovnováze* právě tehdy, když pro každý čas $t \in T$, každé podkladové aktivum j a každého investora i existuje vektor cen aktiv $\boldsymbol{P}(t)$ takový že

$$\sum_{i \in I} w_j(i, t) = N_j(t)P_j(t) = V_j(t).$$

Tyto ceny budeme nazývat *rovnovážné ceny.*

Důsledek Tobinova separačního teorému shrňme jako vlastnost pro prostředky investované do portfolia, kterou budeme dále využívat v důkazu inkonzistence předpokladů spojitého modelu pro ceny aktiv.

Definice 27 (Vlastnost separace)**.** Vektorová funkce pro optimální alokaci investorových prostředků do všech aktiv na trhu $\boldsymbol{w}(i,t)$ respektuje *vlastnost separace* právě tehdy, když existuje vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathrm{T}}$ takový, že $\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$, a existují skalární parametry $\lambda(i,t)$ takové, že

$$\boldsymbol{w}(i,t) = \lambda(i,t)\boldsymbol{X},$$

pro všechny $i \in I$ a všechny $t \in T$.

Vlastnost separace 27 říká, že vektor $\boldsymbol{X}$ představuje váhy tržního portfolia (které se v čase nemění) a parametr $\lambda(i,t)$ zohledňuje rizikové preference investora.

3.4.2 Rozpor mezi předpoklady

Budeme-li předpokládat rovnováhu na trhu a stacionaritu distribuční funkce výnosností, dospějeme ke sporu, jak ukazuje následující věta a důsledek.

Věta 28. *Nechť $\boldsymbol{P}(t)$ pro všechny $t \in T$ jsou rovnovážné ceny. Dále předpokládejme, že na trhu platí vlastnost separace (definice 27). Pak*

$$\mathsf{Pr}\left(\frac{N_j(s)P_j(s)}{N_j(t)P_j(t)} = \frac{N_k(s)P_k(s)}{N_k(t)P_k(t)}\right) = 1 \tag{3.1}$$

pro všechny časy $s, t \in T$ a pro každé aktivum j a k.

Důkaz. Podle definice 27 platí

$$w_j(i,t) = \lambda(i,t)X_j \tag{3.2}$$

pro všechny časy $t \in T$, všechny investory $i \in I$ a pro každé aktivum j.

Předpoklad dynamické rovnováhy na trhu dává

$$\sum_{i \in I} w_j(i,t) = N_j(t)P_j(t) \tag{3.3}$$

pro všechny časy $t \in T$ a pro každé aktivum j.

Dosazením vztahu (3.2) do rovnice (3.3) a vzhledem k tomu, že váhy X_j jsou stejné pro všechny investory $i \in I$, dostáváme

$$N_j(t)P_j(t) = \sum_{i \in I} \lambda(i,t)X_j = X_j \sum_{i \in I} \lambda(i,t).$$

Proto platí

$$\frac{N_j(t)P_j(t)}{N_k(t)P_k(t)} = \frac{X_j \sum_{i \in I} \lambda(i,t)}{X_k \sum_{i \in I} \lambda(i,t)} = \frac{X_j}{X_k},$$

což je nezávislé na čase t. Z tohoto tvrzení zřejmě plyne vztah (3.1). □

Důsledek 29. *Nechť*

$$r_j(t, t+\Delta t) = \frac{P_j(t+\Delta t) - P_j(t)}{P_j(t)} = \frac{P_j(t+\Delta t)}{P_j(t)} - 1.$$

Budeme-li předpokládat $N_j(t) = N_j$ pro každé aktivum i a všechna $t \in T$. Z věty 28 plyne

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\left(\frac{P_j(s)}{P_j(t)} = \frac{P_k(s)}{P_k(t)}\right) = 1 \Longrightarrow \mathsf{Pr}\left(\frac{P_j(t+\Delta t)}{P_j(t)} = \frac{P_k(t+\Delta t)}{P_k(t)}\right) = 1 \\ \Longrightarrow \mathsf{Pr}\left(r_j(t, t+\Delta t) = r_k(t, t+\Delta t)\right) = 1,\end{aligned}$$

pro všechna $t \in T$ a pro všechna aktiva j a k. Proto jsou aktiva j a k vzájemně dokonale zastupitelné.

Důsledek 29 vede k degeneraci trhu, což poukazuje na významný rozpor mezi předpoklady.

Ve své době se Ohlson a Rosenberg nesetkali s pochopením. Důkazem toho je okamžité odmítnutí jejich závěrů ze strany Mertona publikované v článků [31], kde tvrdí, že rozporu bylo docíleno jen díky nereálným předpokladům. Ve skutečnosti reaguje jen na důsledky nikoli na důkaz stěžejní věty článku [39]. Za povšimnutí stojí, že Mertonova reakce vychází ještě před samotným článkem Ohlsona a Rosenberga.

3.5 Stochastická teorie portfolia

V této kapitole jsou shrnuty některé základní poznatky Stochastické teorie portfolia, která byla inspirací pro studium spojitých modelů v teorii portfolia uvedených v této práci. Budeme diskutovat o výhodách a nevýhodách tohoto přístupu.

Pojem *Stochastická teorie portfolia* (SPT) zavedl Robert Fernholz ve své monografii [11]. Jedná se o matematickou teorii, která zkoumá chování portfolia jakožto i strukturu kapitálového trhu. Hlavní výhodou oproti klasické teorii portfolia jsou méně striktní předpoklady, které dovolují konzistentní přístup bez výskytu Ohlson-Rosenbergova paradoxu [39].

Na rozdíl od Mertonova modelu se v SPT nepředpokládá tržní rovnováha. Parametry stochastického procesu, kterým se řídí cena aktiva, jsou v SPT také stochastické procesy nikoli konstanty jako v Mertonově přístupu. Dokonce, na rozdíl od klasického přístupu, se v SPT neklade důraz na předpoklad neexistence tržní arbitráže, přičemž se v práci diskutuje o vlastnosti trhu vedoucí k existenci arbitráže.

Pro vývoj ceny aktiva Fernholz používá následující spojitý logaritmický model

$$\mathrm{d}\log P_j(t) = \gamma_j(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \xi_{jk}(t)\,\mathrm{d}W_k(t),$$

kde $P_j(t)$ je cena aktiva j v čase t, $\gamma_j(t)$ a $\xi_{jk}(t)$ jsou stochastické procesy a $\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))^{\mathrm{T}}$ je n-dimenzionální Wienerův proces. Proces $\gamma_j(t)$ se nazývá *míra růstu* a $\xi_{jk}(t)$ se nazývá proces *volatility*. Míru růstu v logaritmickém modelu je možno odvodit z míry výnosnosti ve standardním modelu a naopak podle následujícího vztahu

$$\mu_j(t) = \gamma_j(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} {\xi_{jk}}^2(t).$$

Robert Fernholz uvádí, že v dlouhém časovém horizontu je chování hodnoty portfolia lépe popsáno mírou růstu než mírou výnosnosti. Uvažujeme-li kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma}$ výnosností aktiv, pak matice volatilit $\boldsymbol{\xi}$ je definována jako

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}.$$

Tedy $\boldsymbol{\xi}$ je maticová odmocnina z $\boldsymbol{\Sigma}$.

Jedním ze základních pojmů v SPT jsou *portfolio generující funkce*, pomocí nichž jsou tvořeny portfolia, které mají dobře definované výnosnosti. Podrobnější informace je možno najít v knize [11] a článku [22].

Studium SPT nás motivovalo k hledání vhodného spojitého modelu pro popis cen aktiv v portfoliu, který rovněž odstraní Ohlson-Rosenbergův paradox a zároveň bude zachovávat platnost poznatků teorie CAPM. Tento model budeme konstruovat v kapitole 3.7.

3.6 Paradox v teorii portfolia a Věta o separaci do dvou fondů

Nekonzistencí obvyklých předpokladů teorie portfolia se v roce 2009 zabýval také John Stalker profesor na univerzitě v Princetonu. V preprintu [46] uvádí algebraický důkaz inkonzistence předpokladů, kde využívá Tobinovu *Větu o separaci do dvou fondů*. V následujícím textu budou tyto myšlenky rozpracovány.

Uvažujme následující předpoklady obvyklé pro teorii portfolia:

1. Ceny podkladových aktiv se řídí Itôovými procesy, které mají konstantní očekávané míry výnosnosti a konstantní kovariance výnosností.

2. Neexistují žádná omezení na množství aktiv držených investorem. Aktiva jsou navíc nekonečně dělitelná.

3. Neexistují žádné transakční náklady a cena prodeje a nákupu podkladového aktiva se neliší.

4. Investoři se chovají podle Markowitzovy teorie, což znamená, že minimalizují riziko svého portfolia pro dané očekávané míry výnosnosti.

5. Na trhu existuje pouze jedno bezrizikové aktivum. Kovarianční matice rizikových aktiv má maximální hodnost.

6. Na trhu existuje rovnováha a každý investor nabízející aktivum najde kupce a naopak.

Dále dokážeme, že tyto předpoklady jsou nekonzistentní pro trh s více než dvěma rizikovými aktivy. K tomu využijeme Větu o separaci do dvou fondů, kterou poprvé dokázal James Tobin ve svém článku [47]. Tobin předpokládal platnost předpokladů CAPM a zároveň zahrnul existenci bezrizikového aktiva. Naproti tomu v knize Williama Sharpeho [42] a v článku Roberta Mertona [28] najdeme podobné závěry bez předpokladu existence bezrizikového aktiva. Merton navíc tyto myšlenky zobecňuje pro více než dva fondy [30]. Podrobnějším rozbor teorie o dvou fondech je uveden v knize [8].

Věta 30 (Věta o separaci do dvou fondů)**.** *Optimální portfolio každého investora lze získat jako kombinaci dvou fondů.*

Na trhu s m podkladovými aktivy uvažujme dvě portfolia (neboli dva fondy) a jejich váhy označme $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$. Z těchto dvou fondů pak můžeme sestavit optimální portfolia všech investorů na trhu. Množinu všech investorů označme I a pro každého investora uvažujme jeho rizikové preference, které určují jeho optimální portfolio, a popišme je pomocí parametrů $\alpha_i(t)$ a $\beta_i(t)$. Optimální portfolio i-tého investora bude zahrnovat $\alpha_i a_j + \beta_i b_j$ množství j-té akcie.

Váhy $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ dvou uvažovaných fondů závisí pouze na očekávaných výnosnostech a riziku podkladových aktiv na trhu, které jsou v čase konstantní dle předpokladu 1. Parametry $\alpha_i(t)$ a $\beta_i(t)$ závisí na individuálních preferencích jednotlivých investorů (např. rizikové preference nebo objem investic) a mohou se lišit. Tyto preference se mohou v čase měnit a tak parametry mohou záviset i na čase.

Označme $A(t)$ součet všech parametrů $\alpha_i(t)$ pro všechny investory a analogicky $B(t)$ součet parametrů $\beta_i(t)$. Tedy $A(t) = \sum_{i \in I} \alpha_i(t)$ a $B(t) =$

$\sum_{i \in I} \beta_i(t)$. Pak celková hodnota držená všemi investory v j-tém aktivu je $Aa_j + Bb_j$ a musí být rovna tržní hodnotě aktiva. Platí

$$A(t)\,a_j + B(t)\,b_j = P_j(t)\,N_j,$$

kde $P_j(t)$ je tržní cena podkladového aktiva j v čase t a N_j je jeho dostupné množství. Přičemž $A(t), B(t)$ a $P_j(t)$ jsou funkce času a N_j je konstantní v čase podle předpokladu 6. Pro změnu ceny aktiva j mezi časem t a časem $t + \Delta t$ platí

$$\Delta P_j = \frac{a_j}{N_j}\Delta A + \frac{b_j}{N_j}\Delta B,$$

kde $\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$ and $\Delta B = B(t + \Delta t) - B(t)$.

Uvažujme míru výnosnosti podkladového aktiva j za čas Δt

$$r_j(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta P_j}{P_j(t)} = \frac{a_j}{N_j P_j(t)}\Delta A + \frac{b_j}{N_j P_j(t)}\Delta B$$

a kovarianční matici výnosností podkladových aktiv držených v portfoliu

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \mathsf{D}(r_1) & \dots & \mathsf{C}(r_1, r_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{C}(r_m, r_1) & \dots & \mathsf{D}(r_m) \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k vlastnostem kovariance (viz [2]) můžeme kovarianční matici výnosností rozložit na součin

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{N_1 P_1} & \frac{b_1}{N_1 P_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{a_m}{N_m P_m} & \frac{b_m}{N_m P_m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\mathsf{C}(\Delta A, \Delta A)}{\Delta t} & \frac{\mathsf{C}(\Delta A, \Delta B)}{\Delta t} \\ \frac{\mathsf{C}(\Delta B, \Delta A)}{\Delta t} & \frac{\mathsf{C}(\Delta B, \Delta B)}{\Delta t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a_1}{N_1 P_1} & \dots & \frac{a_m}{N_m P_m} \\ \frac{b_1}{N_1 P_1} & \dots & \frac{b_m}{N_m P_m} \end{pmatrix}.$$

Dále platí, že hodnost součinu matic je menší nebo rovna maximální z hodností matic jeho činitelů. Vzhledem k tomu nemůže mít kovarianční matice výnosností podkladových aktiv držených v portfoliu hodnost větší než dvě. Avšak to je v rozporu z předpokladem 5, pokud uvažujeme portfolio s více než dvěma podkladovými aktivy.

3.7 Spojitý rovnovážný model s očekávanou výnosností závislou na ceně aktiva

V kapitolách 3.4 a 3.6 jsme ukázali, že v teorii portfolia běžně používaný dynamický model není konzistentní. Proto se chceme pokusit navrhnout takový model, který by nebyl touto inkonzistencí předpokladů zatížen. Uvažujme tedy spojitý model, který bude mít méně omezující předpoklady než model Mertonův. Model, který předkládáme v této kapitole, předpokládá rovnováhu na trhu, nicméně očekávaná míra výnosnosti není konstantní v čase.

Na základě poznatků z teorie portfolia budeme hledat vztah mezi očekávanou výnosností a cenou aktiva, který bychom mohli použít v modelu. Nechť $\boldsymbol{P}$ je vektor cen n podkladových aktiv. Předpokládejme, že tyto ceny se řídí následující stochastickou diferenciální rovnicí (SDR):

$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\mu_j(t)\,\mathrm{d}t + P_j(t)\sum_{k=1}^{n}\xi_{jk}(t)\,\mathrm{d}W_k(t), \tag{3.4}$$

kde $\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))^{\mathrm{T}}$ je n-rozměrný Wienerův proces, $\mu_j(t)$ je očekávaná míra výnosnosti podkladového aktiva j a $\xi_{jk}(t)$ je proces volatility podkladových aktiv j a k. Pro zjednodušení předpokládejme, že výnosnost bezrizikového aktiva $r_f = 0$. Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ je vektor vah v tržním portfoliu, který je dán jako

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{3.5}$$

kde $\mathbf{1}$ je vektor jedniček, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$ je vektor očekávaných výnosností podkladových aktiv a $\boldsymbol{\Sigma}$ je kovarianční matice výnosností podkladových aktiv (viz [37]).

Uvažujme o řešitelnosti a počtu řešení soustavy rovnic (3.5) vzhledem k $\boldsymbol{\mu}$. Soustavu upravíme

$$\left(\boldsymbol{X}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} - \mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} = 0. \tag{3.6}$$

Podle předpokladů v teorii portfolia zmíněných v kapitole 3.6 je kovarianční matice plné hodnosti, tedy i matice $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ má hodnost n. Naproti tomu, díky předpokladu $\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$, má matice $\left(\boldsymbol{X}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} - \mathbf{I}\right)$ lineárně závislé řádky, jelikož součet libovolných $n-1$ řádků matice je roven zbývajícímu řádku vynásobenému minus jednou. Dá se tedy dokázat, že tato matice má hodnost $n-1$. To znamená, že soustava rovnic (3.6) má nekonečně mnoho řešení vzhledem k $\boldsymbol{\mu}(t)$.

Jak jsme ukázali v kapitole 3.2, váhy tržního portfolia se rovnají relativním tržním hodnotám podkladových aktiv v tržním portfoliu, tedy

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{V}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}}, \tag{3.7}$$

kde $\boldsymbol{V}$ je vektor tržních hodnot podkladových aktiv na trhu. Připomeňme, že tržní hodnota aktiva j je dána jako $V_j(t) = P_j(t)N_j(t)$. Vzhledem ke vztahu mezi tržní hodnotou aktiva a cenou aktiva a vzhledem ke vztahům (3.5) a (3.7) můžeme předpokládat, že očekávané výnosnosti $\boldsymbol{\mu}(t)$ jsou funkcemi cen aktiv $\boldsymbol{P}(t)$.

Hledejme vhodné stochastické procesy, které by popisovaly chování vektoru $\boldsymbol{\mu}(t)$. Pro tento účel rozdělme proces očekávané výnosnosti aktiv na dvě složky. První složka určuje relativní vztahy mezi jednotlivými očekávanými výnosnostmi aktiv v portfoliu, druhá složka popisuje výnosnost celého trhu dynamicky se měnící v čase. Mezi těmito složkami budeme předpokládat multiplikativní vztah. Označme

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \cdot r(t) \tag{3.8}$$

kde vektorový stochastický proces $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = (\tilde{\mu}_1(t), \ldots, \tilde{\mu}_n(t))^{\mathrm{T}}$ zachycuje relativní vztahy aktiv v portfoliu, které se mohou v čase měnit, a $r(t)$ je skalární stochastický proces, který charakterizuje dynamiku trhu a nezávisí na volbě konkrétního aktiva. Dále nechť pro všechny uvažované časy t platí $\sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}_i(t) = 1$. Pak podle teorie CAPM platí

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \boldsymbol{X}(t), \tag{3.9}$$

kde $\boldsymbol{X}(t)$ je vektor vah v tržním portfoliu v čase t.

Výnosnost celého trhu nevykazuje exponenciální růst, ale pohybuje se přibližně v nějakém intervalu. V delším časovém horizontu se projevuje tendence navracet se k průměrné hodnotě. Proto budeme předpokládat, že míra výnosnosti trhu $r(t)$ se řídí Vašíčkovým modelem z kapitoly 2.5

$$\mathrm{d}r(t) = \kappa(\theta - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t), \tag{3.10}$$

kde κ, θ a σ jsou konstanty.

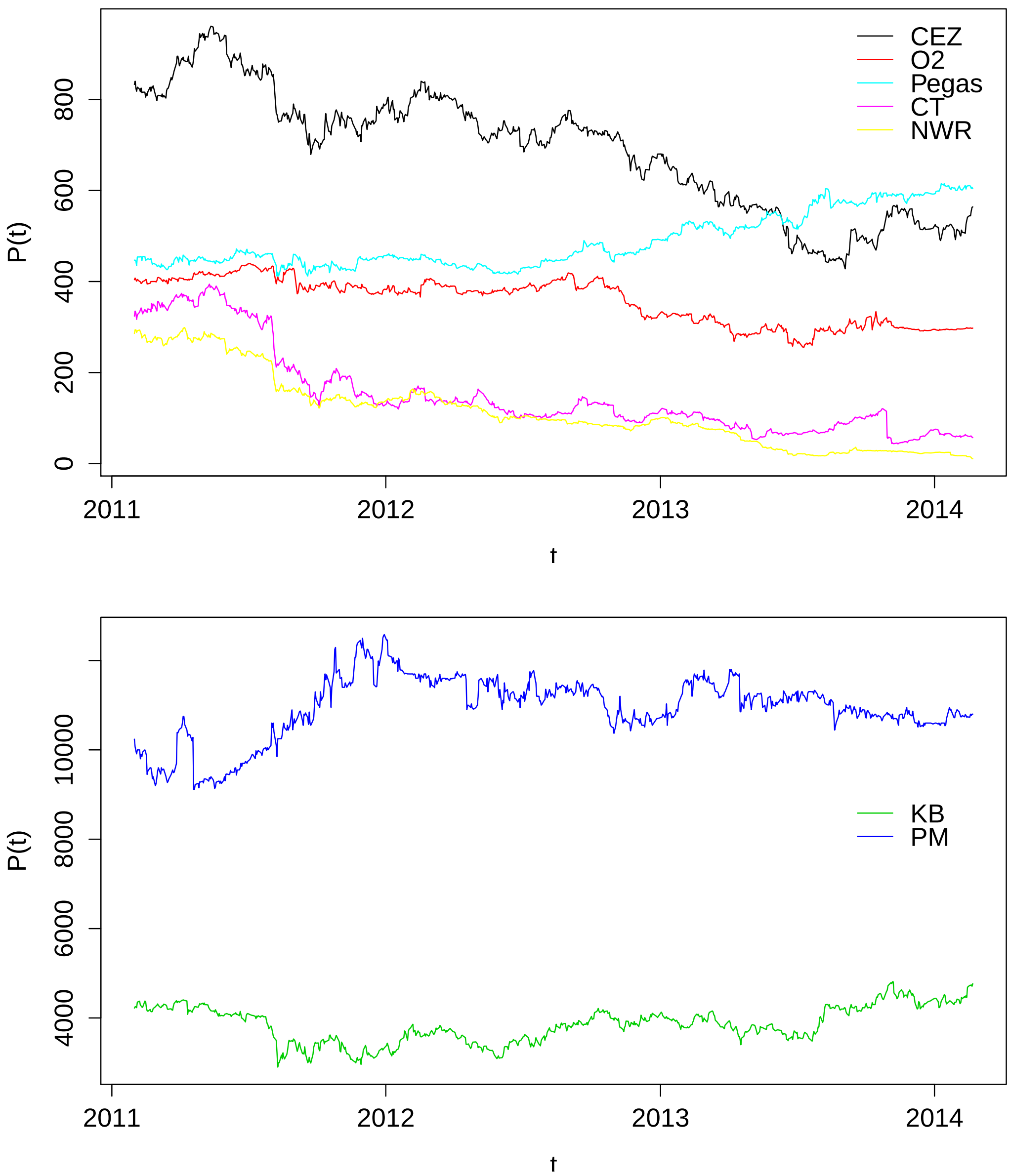
Předpokládejme nyní, že uvažovaná podkladová aktiva jsou nekorelovaná, tedy matice $\boldsymbol{\Sigma}$ je diagonální. Příkladem takových aktiv by mohly být akcie podniků z velmi odlišných odvětví. Další zjednodušující předpoklady, které pro tuto chvíli zavedeme, bude neměnnost rizika aktiv $\sigma_j = \xi_{jj}$ v průběhu času a také hodnoty aktiv N_j nechť jsou v čase konstantní.

Dosadíme-li vztahy (3.8) a (3.9) do stochastické diferenciální rovnice (3.4), pak s ohledem na předpoklady učiněné výše dostáváme

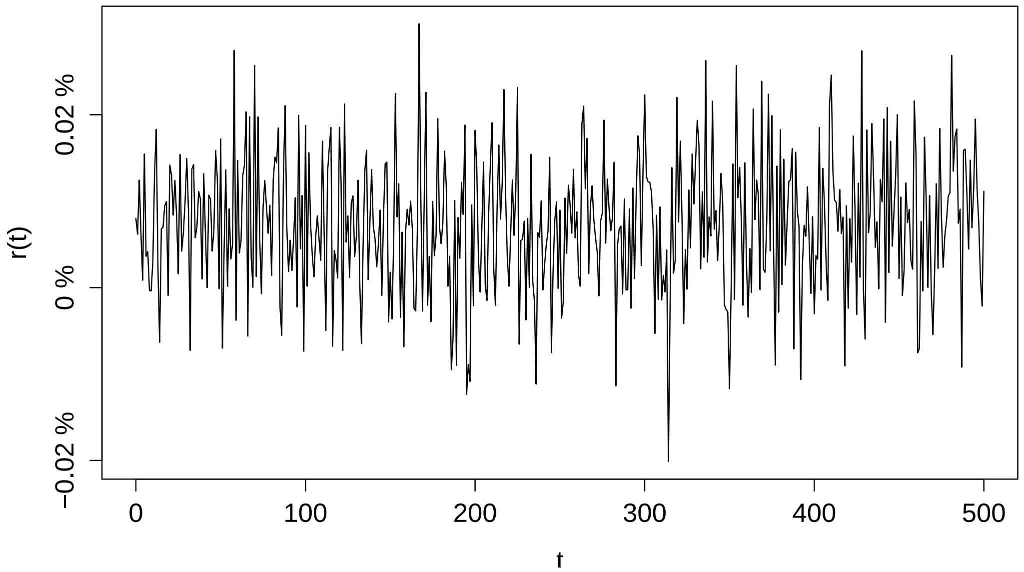
$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\left(\frac{P_j(t)N_j}{\sum_{i=1}^{n} P_i(t)N_i}\, r(t)\right)\mathrm{d}t + P_j(t)\sigma_j\,\mathrm{d}W_j(t). \tag{3.11}$$

V další části představíme model s méně přísnými předpoklady. Připusťme nyní možnost závislosti mezi jednotlivými aktivy, tedy nechť matice $\boldsymbol{\Sigma}$ není diagonální. Zachováme předpoklad konstantnosti volatilit aktiv ξ_{jk} v čase. Za těchto předpokladů dosaďme vztah (3.8) a (3.9) do SDR (3.4), čímž obdržíme

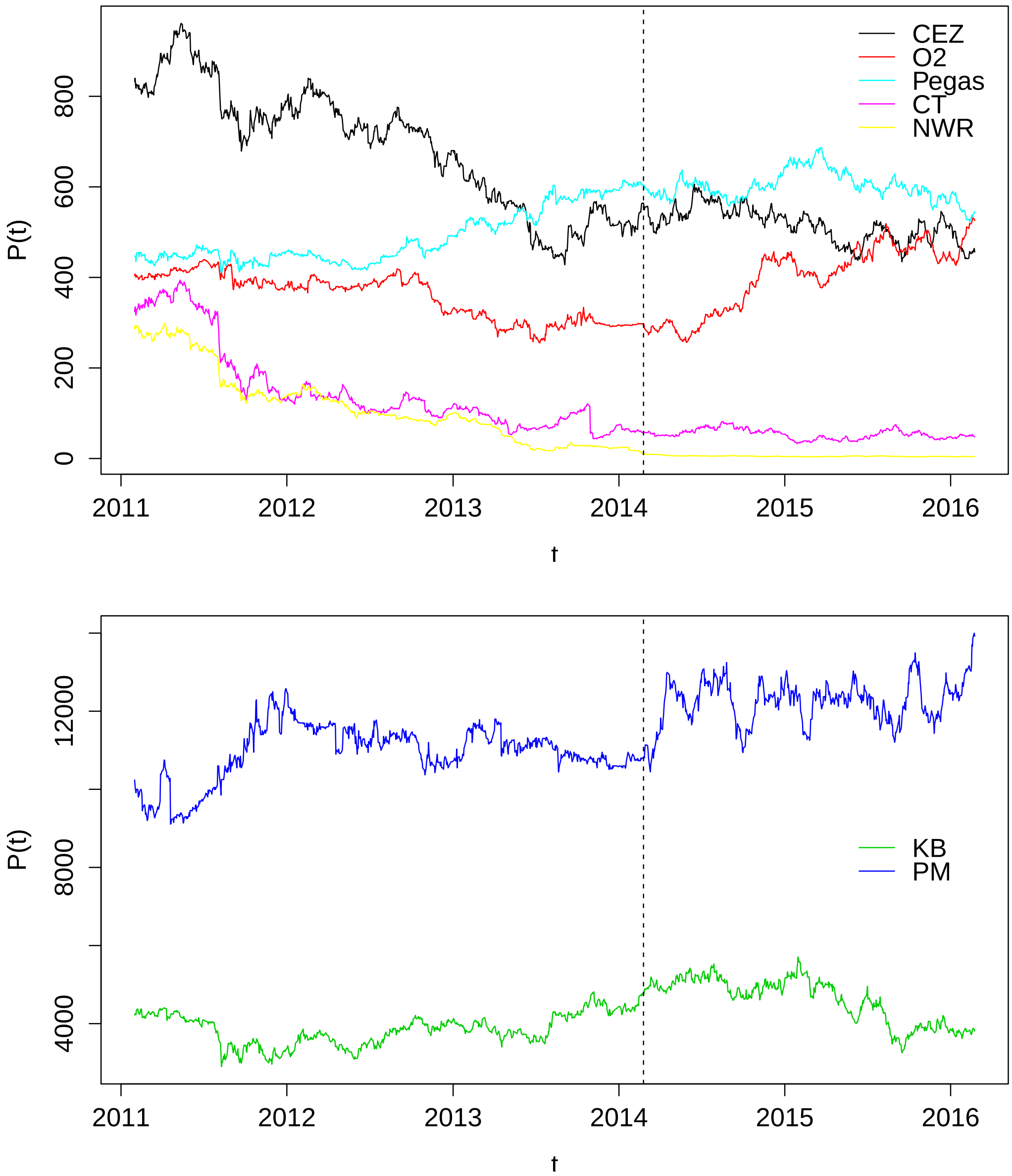
$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\left(\frac{P_j(t)N_j}{\sum_{i=1}^{n} P_i(t)N_i}\,r(t)\right)\,\mathrm{d}t + P_j(t)\sum_{k=1}^{n}\xi_{jk}\,\mathrm{d}W_k(t). \tag{3.12}$$



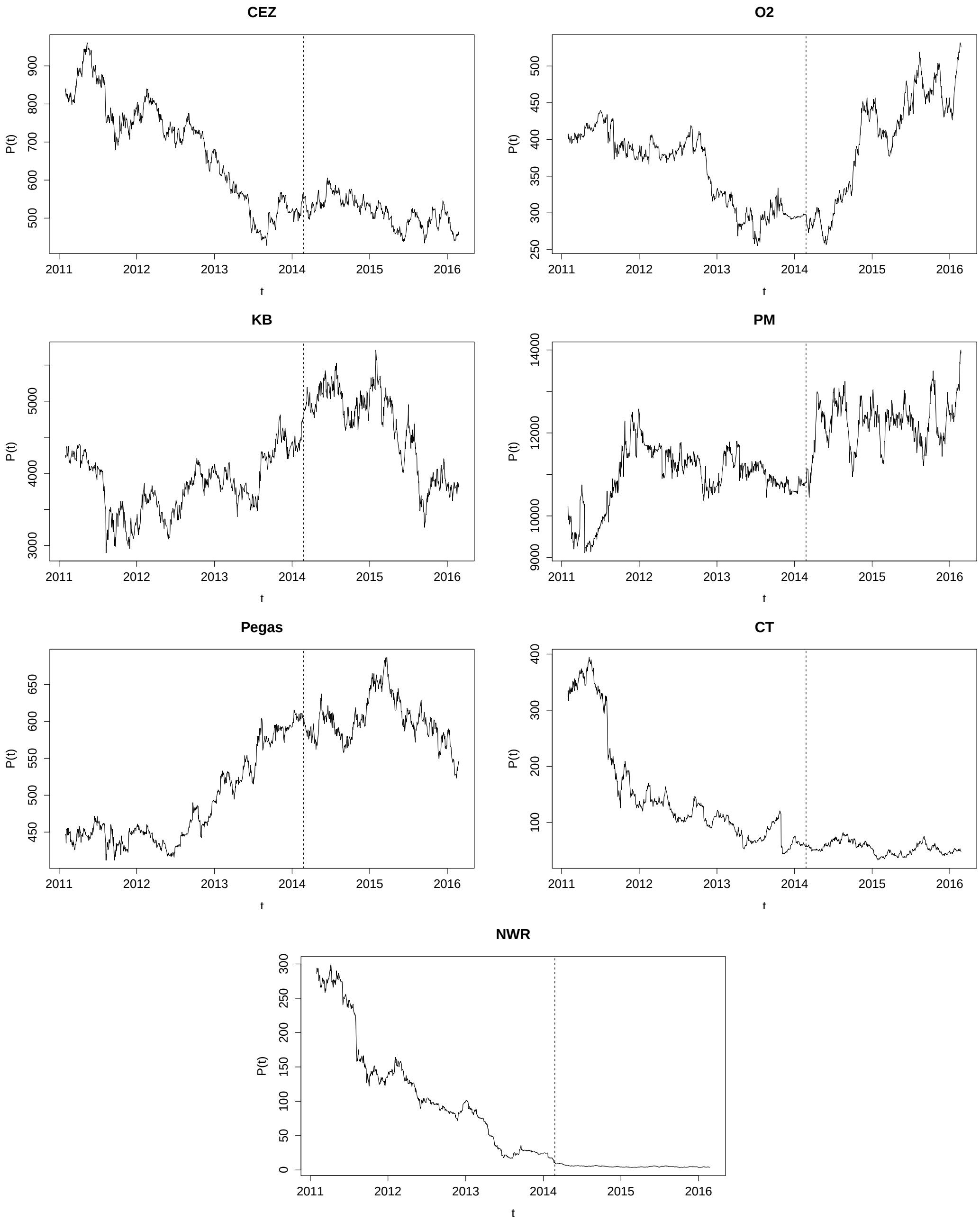
Obrázek 3.1: Ceny aktiv v portfoliu



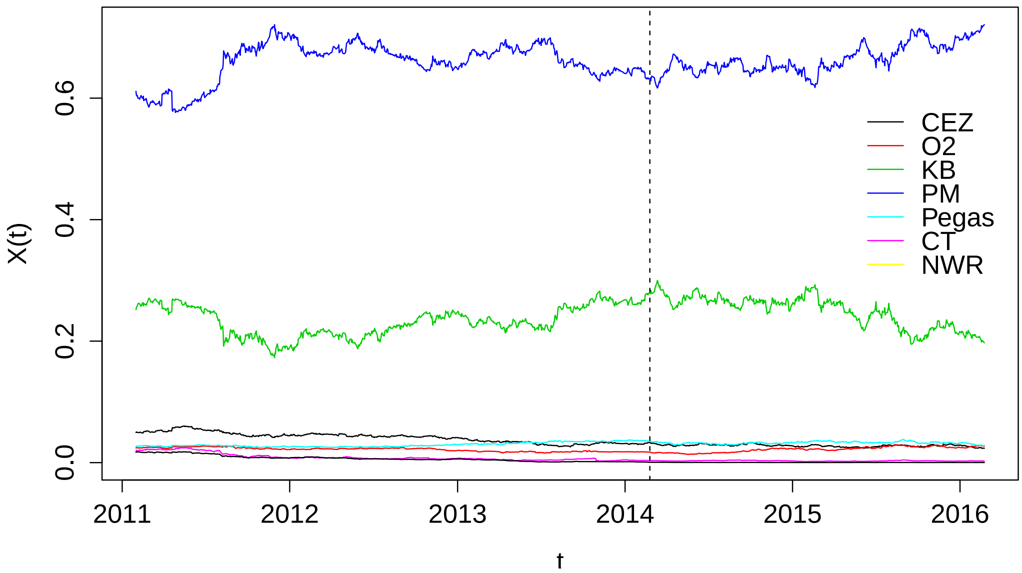
Obrázek 3.2: Model výnosnosti trhu $r(t)$



Obrázek 3.3: Model cen aktiv v portfoliu



Obrázek 3.4: Model cen aktiv v portfoliu



Obrázek 3.5: Model vah aktiv v portfoliu

4 Credit Valuation Adjustment

Nedílnou součástí řízení banky je řízení bankovních rizik. Obzvláště v poslední době se práce risk managementu dostává do popředí zájmu a jsou patrné tendence ke sjednocování bankovní regulace na mezinárodní úrovni. Důkazem spolupráce mezi institucemi bankovního dohledu je i vznik Basilejského výboru pro bankovní dohled. Výbor vydává regulační standardy, doporučuje konkrétní postupy v oblasti bankovního dohledu a snaží se o sbližování regulačních norem. Řada států jeho doporučení zohledňuje a přijímá do vlastní legislativy a Česká republika v tomto není výjimkou. Standardy vydávané výborem se označují Basel a byly dosud vydávány ve třech generacích označovaných jako Basel I, Basel II a Basel III. Vyjadřují kapitálové požadavky, zabývají se pravidly obezřetného podnikání bank a aktivitami bankovního dohledu.

Během celosvětové finanční krize, která odstartovala v roce 2008, se ukázala důležitost správného měření a řízení kreditního rizika protistrany (CCR) pro stabilitu finančního systému. Kapitál pro kreditní riziko protistrany byl vyžadován již v Basel I. V reakci na finanční krizi Basel III představil nejen další požadavky pro výpočet kapitálu pro CCR, ale nově předepisuje kapitálový požadavek pro riziko Credit Valuation Adjustment (CVA).

CVA lze interpretovat jako úpravu tržní hodnoty derivátu o kreditní riziko protistrany. Riziko CVA vyplývá jak z rizika změny pravděpodobnosti selhání protistrany tak změny tržních faktorů, které ovlivňují hodnotu derivátů.

Hlavním zdrojem informací pro vznik této kapitoly byla kniha Jona Gregoryho [14], články [53] a [36] a publikace [6]. Pěkný přehledový článek na toto téma vyšel v roce 2012 v Journal of Financial Economics [3]. Zajímavý článek zabývající se zahrnutím Wrong-Way rizika do Monte Carlo simulace při výpočtu CVA publikovali John Hull a Alan White [16].

4.1 Finanční rizika

V následujícím textu seznámíme čtenáře s problematikou řízení finančních rizik, především úvěrového rizika. Komplexní přehled o finančních rizicích poskytuje publikace jednoho z nejznámějších českých ekonomů profesora Josefa Jílka [21]. Kniha zevrubně popisuje úvěrová, tržní a další finanční rizika a objasňuje podstatu, měření, řízení a regulace finančních rizik včetně použití derivátů.

Bankovní podnikání ohrožuje celá řada rizik, která obecně chápeme jako nebezpečí vzniku škody. Řídit tato rizika mimo jiné znamená odhadovat pravděpodobnost jejich vzniku a navrhovat metody k jejich snížení. Banka je ohrožena nejen podnikatelskými riziky, ale také riziky finančními, které souvisí s její potenciální finanční ztrátou. Na tato rizika je soustředěna mimořádná pozornost odborné veřejnosti, bankovního dohledu, ale i samotného představenstva banky.

Základním finančním rizikem je kreditní (též úvěrové) riziko. Jedná se o riziko vyplývající z neschopnosti nebo neochoty protistrany splatit své závazky podle podmínek kontraktu, což způsobí držiteli pohledávky ztrátu. Jeho řízení má rozhodující význam pro úspěch nebo neúspěch nejen finančních institucí.

Mezi významná bankovní rizika patří tržní riziko. Jedná se o riziko ztráty v souvislosti s pohybem tržních cen v důsledku nepříznivých změn tržních podmínek. Je zaměřeno na faktory, které mají vliv na finanční trh jako celek (nikoliv pouze na cenu jednotlivého aktiva). Jeho význam vzrůstá s rostoucí angažovaností bank na finančních trzích.

Úvěrové riziko a tržní riziko není možno od sebe zcela oddělovat. Obě tato rizika v sobě spojuje kreditní riziko protistrany, jehož modelování je nedílnou součástí výpočtu Credit Valuation Adjustment.

4.1.1 Kreditní riziko protistrany

Counterparty Credit Risk (CCR), v překladu *kreditní riziko protistrany*, představuje možnost, že banka utrpí ztrátu z derivátového obchodu nebo při financování aktiva, která bude způsobena selháním protistrany transakce. Riziko selhání (defaultu) představuje základní rizikovou složkou kreditního rizika a jeho parametrem je pravděpodobnost neplnění. Definice tohoto jevu není zcela jednoznačná, většinou se však chápe jako stav finanční tísně, bránící ve splnění závazku.

Riziko protistrany závisí na spolehlivosti obchodního partnera, ať už se jedná o emitenta, který vydává, nabízí a prodává investiční produkt a zavazuje se k jeho splacení (resp. vyrovnání s ním spojených závazků), nebo finančního zprostředkovatele, kterému jsou svěřeny prostředky buď do správy, nebo k provedení investiční transakce.

Existují specializované společnosti nazývané ratingové agentury, které se zabývají hodnocením rizik emitentů a na jeho základě jim udělují kód vyjadřující bonitu či důvěryhodnost, tzv. *rating*. Pro investory je rating spolehlivou informací o kreditním riziku emitenta příslušného finančního instrumentu, případně finančního zprostředkovatele. Nejznámějšími ratingovými agenturami jsou Moody's, Standard & Poor's a Fitch. Každá z těchto agentur má vlastní hodnotící stupnici a zvyklosti.

Obecně se ratingové stupnice dělí na dvě části – investiční pásmo a spekulativní pásmo. Ratingy z investičního pásma přiznávají ratingové agentury finanční instrumentům, do kterých doporučují investovat. Pod touto úrovní leží pásmo spekulativních investic, u kterých je očekáváno značné riziko ztráty.

Typickým představitelem emitenta s velmi nízkým rizikem je vláda vyspělého státu, která vydává dluhopisy, jež jsou chápány jako bezrizikové investiční instrumenty. Nízké kreditní riziko mohou mít i velké tuzemské či mezinárodními společnosti s dobrými hospodářskými výsledky, zejména pokud mají (dle všeobecného názoru) schopný management, což vede k předpokladu dobrých výsledků a udržení pozice na trhu i v budoucnosti. Rating je využíván také k posouzení důvěryhodnosti finančního partnera, který danou finanční investici zprostředkovává.

Důležitým faktem při výpočtu kapitálového požadavku pro CCR je bilaterální charakter tohoto rizika. Což znamená, že kreditním rizikem protistrany jsou zatíženy obě strany obchodu.

Velmi dobrý úvod do problematiky řízení rizika protistrany poskytuje článek [7] autorů Eduarda Canabarra, vedoucího oddělení řízení rizika v bankovní společnosti Goldman Sachs, a profesora Stanfordské univerzity Darrella Duffieho.

4.2 Koncept CVA

V rámci překladu termínu *Credit Valuation Adjustment (CVA)* se můžeme setkat s více možnostmi. Například Česká národní banka používá výraz *úprava úvěrového ocenění*. V jiných textech nalezneme pojem *kreditní přirážka k tržnímu ocenění* nebo *úvěrová úprava v ocenění finančních derivátů*. Z důvodu přehlednosti budeme v textu této práce používat především zkratku CVA nebo anglický termín.

4.2.1 Expozice protistrany

Expozici protistrany v čase t značíme $E(t)$ a definujeme jako celkovou výši nesplacených pohledávek danou protistranou. Hodnota expozice protistrany kvantifikuje do jaké míry je věřitel vystaven riziku ztráty v případě neplnění dlužníka.

Uvažujme portfolio N derivátových obchodů banky s danou protistranou. Splatnost kontraktu s nejdelší splatností v tomto portfoliu označíme T. Nechť τ je náhodná veličina, která označuje čas selhání dané protistrany a má známou distribuční funkci $P(t) = \Pr(\tau \leq t)$.

Budeme zkoumat hodnotu portfolia z pohledu banky. Expozice protistrany $E(t)$ v čase t je dána hodnotami derivátových odchodů s danou protistranou v čase t. Hodnotu i-tého derivátu z portfolia v čase t označíme $V_i(t)$. Pak hodnota portfolia v čase t je definována jako

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t). \tag{4.1}$$

V případě, že banka nemá s protistranou uzavřenou dohodu o vzájemném započítávání pohledávek a závazků (tzn. netting), expozice protistrany $E(t)$ je

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N} \max\{V_i(t), 0\}. \tag{4.2}$$

Pokud banka s protistranou uzavře smlouvu o nettingu, pak je expozice dána jako

$$E(t) = \max\{V(t), 0\}. \tag{4.3}$$

Využívání nettingu slouží ke snížení úvěrového a tržního rizika. Při použití nettingu je expozice protistrany menší nebo rovna expozici v případě, kdy netting neuvažujeme.

Další možnost jak snížit expozici je zajištění. Banka uzavírá s protistranou dohodu o výzvě k doplnění zajištění (margin call). Protistrana pak musí poskytnout bance zajištění vždy, když hodnota portfolia překročí určenou mez. Naopak pokud hodnota portfolia klesne pod tuto mez, banka zajištění opět vrátí. Expozice protistrany, která zohledňuje zajištění se určí jako

$$E(t) = \max\{V(t) - C(t), 0\}, \tag{4.4}$$

kde $C(t)$ je hodnota zajištění (které banka přijala) v čase t.

4.2.2 diskontovani

Výpočet dnešní hodnoty při tržní úrokové míře Diskontování je matematický postup, kdy jsou přepočítány (diskontovány) budoucí výnosy na současnou hodnotu investice s použitím diskontní míry. Diskontní míra je procentní sazba, kterou se diskontuje budoucí hodnota na současnou hodnotu.

Diskontovaná hodnota je současná hodnota. Je to jedna z metod hodnocení investic, kdy se budoucí výnosy převádějí na hodnotu, kterou by měly dnes. Diskontování je postup, kdy jsou přepočteny (diskontovány) budoucí výnosy v jednotlivých obdobích na současnou hodnotu a sečteny s použitím diskontní míry (obvyklá výnosová míra).

4.2.3 Pravděpodobnost selhání

Pravděpodobnost selhání (PD), Probability of Default, udává v procentech s jakou pravděpodobností dojde k selhání klienta během jednoho roku.

Literatura

[1] L. J. Allen. *An introduction to stochastic processes with applications to biology*. CRC Press, 2010.

[2] J. Anděl. *Matematická statistika: Vysokoškolská učebnice*. SNTL, 1978.

[3] N. Arora, P. Gandhi, and F. A. Longstaff. Counterparty credit risk and the credit default swap market. *Journal of Financial Economics*, 103(2):280–293, 2012.

[4] L. Bachelier. *Théorie de la spéculation*. Gauthier-Villars, 1900.

[5] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 637–654, 1973.

[6] D. Brigo, A. Capponi, and A. Pallavicini. Arbitrage-free bilateral counterparty risk valuation under collateralization and application to credit default swaps. *Mathematical Finance*, 24(1):125–146, 2014.

[7] E. Canabarro and D. Duffie. Measuring and marking counterparty risk. *Asset/Liability Management for Financial Institutions, Institutional Investor Books*, 2003.

[8] D. Cass and J. E. Stiglitz. The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portfolio allocation: A contribution to the pure theory of mutual funds. *Journal of Economic Theory*, 1970.

[9] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, 4, 1905.

[10] A. Etheridge. *A course in financial calculus*. Cambridge University Press, 2002.

[11] E. Fernholz. *Stochastic Portfolio Theory*. Springer New York, 2002.

[12] D. Fuchs. Finanční trhy. 1. vyd. brno: Masarykova univerzita v brně. Technical report, ISBN 80-210-3526-9, 2004. 105 s.

[13] T. Gard. *Introduction Stochastic Differential Equations*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, New York, 1988.

[14] J. Gregory. *Counterparty credit risk: the new challenge for global financial markets*, volume 470. John Wiley & Sons, 2010.

[15] J. Hull. *Options, futures, and other derivatives (8. ed., global ed.)*. Boston [u.a.] : Pearson, 2012.

[16] J. Hull and A. White. Cva and wrong-way risk. *Financial Analysts Journal*, 68(5):58–69, 2012.

[17] K. Itô. Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524, 1944.

[18] K. Itô. On a stochastic integral equation. *Proceedings of the Japan Academy*, 22(2):32–35, 1946.

[19] K. Itô. Differential equations determining markov processes. *Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai*, 244(1077):1352–1400, 1942.

[20] K. Itô. *On Stochastic Differential Equations*. Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1951.

[21] J. Jílek. Finanční rizika. 1. vyd. praha: Grada, 2000. 635 s. Technical report, ISBN 80-7169-579-3, 2000.

[22] I. Karatzas and R. Fernholz. Stochastic portfolio theory: an Overview. *Handbook of Numerical Analysis*, 15:89–167, 2009.

[23] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.

[24] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer Science & Business Media, 1998.

[25] H. Kunita, S. Watanabe, et al. On square integrable martingales. *Nagoya Mathematical Journal*, 30:209–245, 1967.

[26] J. Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, 47(1):13–37, 1965.

[27] H. Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91, 1952.

[28] R. Merton. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pages 1851–72, 1972.

[29] R. C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of economic theory*, 3(4):373–413, 1971.

[30] R. C. Merton. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 867–887, 1973.

[31] R. C. Merton. Theory of finance from the perspective of continuous time. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pages 659–674, 1975.

[32] J. Mossin. Equilibrimn in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 34(4):768–783, 1966.

[33] B. Øksendal. *Stochastic differential equations.* Springer, 6th ed., corr. 4th print. edition, 2007.

[34] A. Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing*, volume 2. Springer, 2011.

[35] M. Podolskij, R. Stelzer, S. Thorbjørnsen, and A. Veraart. *The Fascination of Probability, Statistics and their Applications: In Honour of Ole E. Barndorff-Nielsen.* Springer International Publishing, 2015.

[36] M. Pykhtin and D. Rosen. Pricing counterparty risk at the trade level and cva allocations. 2010.

[37] S. T. Rachev, J. S. Hsu, B. S. Bagasheva, and F. J. Fabozzi. *Bayesian Methods in Finance*, volume 153 of *Frank J. Fabozzi Series.* John Wiley & Sons, 2008.

[38] O. Rejnuš. *Finanční trhy.* Key Publishing, Ostrava, třetí rozšířené edition, 2011.

[39] B. Rosenberg and J. Ohlson. The stationary distribution of returns and portfolio separation in capital markets: A fundamental contradiction. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 11(3):393–402, 1976.

[40] P. A. Samuelson. Rational theory of warrant pricing. in the random character of stock market prices. *Ed. P. Cootner*, pages 506–532, 1964.

[41] P. A. Samuelson. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *IMR; Industrial Management Review*, 6(2):41, 1965.

[42] W. Sharpe. *Portfolio Theory and Capital Markets.* McGraw-Hill, New York, 1970.

[43] W. F. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3):425–442, 1964.

[44] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Number sv. 11 in Springer Finance Textbooks. Springer, 2004.

[45] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance. Springer, 2012.

[46] J. Stalker. A portfolio theory paradox. *preprint*, 2009.

[47] J. Tobin. Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2):65–86, 1958.

[48] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the theory of the brownian motion. *Phys. Rev.*, 36:823–841, Sep 1930.

[49] J. Veselá. Investování na kapitálovỳch trzích. 1. vyd. praha: Aspi, 2007. Technical report, ISBN 978-80-7357-297-6.

[50] M. Von Smoluchowski. Zur kinetischen theorie der brownschen molekularbewegung und der suspensionen. *Annalen der physik*, 326(14):756–780, 1906.

[51] N. Wiener. Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1):131–174, 1923.

[52] P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, 1995.

[53] S. H. Zhu and M. Pykhtin. A guide to modeling counterparty credit risk. *GARP Risk Review, July/August*, 2007.