

MASARYKOVA UNIVERZITA  
Přírodovědecká fakulta  
Ústav matematiky a statistiky

## DISERTAČNÍ PRÁCE

Brno 2017

Lenka Křivánková

MASARYKOVA UNIVERZITA  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



## Stochastické metody analýzy ekonomických dat

DISERTAČNÍ PRÁCE

Brno 2017

Lenka Křivánková

# Bibliografický záznam

**Autor:** Mgr. Lenka Křivánková  
**Název:** Stochastické metody analýzy ekonomických dat  
**Školitel:** doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.  
**Studijní program:** Matematika  
**Obor:** Pravděpodobnost, statistika a matematické modelování  
**Rok obhajoby:** 2017  
**Klíčová slova:** Stochastické procesy,

# Bibliographic entry

**Author:** Mgr. Lenka Křivánková  
**Title:** Stochastic methods in analysis of economic data  
**Supervisor:** doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.  
**Study programme:** Mathematics  
**Study field:** Probability, statistics and mathematical modeling  
**Year of defence:** 2017  
**Keywords:** Stochastic processes,



# Poděkování

Na tomto místě

Brno, Duben 2017

Lenka Křivánková

# Abstrakt

V první části práce jsou uvedeny základní matematické pojmy použité v dalších částech textu.

# Abstract

In the first part of the work, some basic mathematical methods employed in this thesis are recalled.

# Obsah

<b>Bibliografický záznam</b>	<b>i</b>
<b>Poděkování</b>	<b>iii</b>
<b>Abstrakt</b>	<b>iv</b>
<b>Obsah</b>	<b>vi</b>
<b>Seznam použitého značení</b>	<b>vii</b>
<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Stochastická analýza</b>	<b>2</b>
1.1 Stochastické procesy a jejich vlastnosti . . . . .	2
1.1.1 Stochastický proces . . . . .	3
1.1.2 Wienerův proces . . . . .	5
1.1.3 Itôův proces . . . . .	8
1.1.4 Ornstein–Uhlenbeckův proces . . . . .	9
1.1.5 Mnohorozměrný Wienerův proces . . . . .	10
1.2 Itôův integrální počet . . . . .	11
1.2.1 Itôův integrál . . . . .	12
1.2.2 Itôovo lemma . . . . .	13
1.3 Stochastické diferenciální rovnice . . . . .	13
1.3.1 Úvod do teorie stochastických diferenciálních rovnic . . . . .	13
1.3.2 Numerické metody řešení stochastických diferenciálních rovnic . . . . .	15
<b>2 Stochastické modelování</b>	<b>20</b>
2.1 Stochastické modelování cen finančních aktiv . . . . .	21
2.1.1 Modely cen finančních derivátů . . . . .	23
2.2 Stochastické modelování úrokových měr . . . . .	26
2.2.1 Modely okamžité úrokové míry . . . . .	29
2.2.2 Vašíčkův model . . . . .	30
2.2.3 CIR model . . . . .	31
2.2.4 Hull-Whitův model . . . . .	31
<b>3 Teorie portfolia</b>	<b>33</b>
3.1 Základní charakteristiky portfolia . . . . .	33
3.1.1 Výnosnost . . . . .	33
3.1.2 Riziko . . . . .	34

3.2	Klasická teorie portfolia . . . . .	34
3.2.1	Markowitzova teorie portfolia . . . . .	37
3.2.2	Váhy tržního portfolia . . . . .	37
3.3	Dynamická teorie portfolia . . . . .	37
3.3.1	Mertonův model . . . . .	37
3.4	Ohlson-Rosenbergův paradox . . . . .	39
3.4.1	Značení a předpoklady . . . . .	39
3.4.2	Rozpor mezi předpoklady . . . . .	40
3.5	Stochastická teorie portfolia . . . . .	42
3.6	Paradox v teorii portfolia a Věta o separaci do dvou fondů . . . . .	43
3.7	Spojité rovnovážný model s očekávanou výnosností závislou na ceně aktiva . . . . .	45
3.8	Aplikace navrhovaného spojitého modelu na reálná data . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Teorie řízení finančních rizik</b>	<b>56</b>
4.1	Finanční rizika . . . . .	57
4.1.1	Kreditní riziko protistrany . . . . .	58
4.2	Credit Valuation Adjustment . . . . .	59
4.3	Metodika výpočtu CVA . . . . .	60
4.3.1	Expozice protistrany . . . . .	60
4.3.2	Pravděpodobnost selhání . . . . .	62
4.3.3	Loss Given Default . . . . .	62
4.4	Aplikace výpočtu CVA na reálná data . . . . .	63
4.4.1	Úrokový swap . . . . .	64
4.4.2	Počáteční výnosová křivka . . . . .	64
4.4.3	Simulace úrokových měr a oceňování IRS . . . . .	65
4.4.4	Funkce pravděpodobnosti selhání protistrany . . . . .	72
4.4.5	Výpočet CVA . . . . .	72
4.5	Srovnání metod výpočtu CVA . . . . .	74
	<b>Literatura</b>	<b>76</b>
	<b>A Příloha – Publikace autorky</b>	<b>82</b>
	<b>B Příloha – Ukázka datového souboru</b>	<b>83</b>
	<b>C Příloha – Ukázka programů</b>	<b>84</b>
	Ukázka programu v R . . . . .	84
	Ukázka programu v MATLAB . . . . .	87



# Seznam použitého značení

## Prostory a matice

$\mathbb{R}$	jednorozměrný Eukleidovský prostor
$\mathbb{R}^n$	$n$ -rozměrný Eukleidovský prostor
$\mathbb{R}^+$	množina všech kladných čísel
$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$	$n$ -rozměrný reálný vektor
$\mathbf{1}$	vektor jedniček
$\mathbf{I}_n$	jednotková matice řádu $n$
$\mathbf{A}^T$	transponovaná matice vzhledem k matici $\mathbf{A}$

## Pravděpodobnost

$\omega$	elementární jev
$\Omega$	základní prostor, množina všech elementárních jevů
$\Pr(A)$	pravděpodobnost jevu $A$
$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$	pravděpodobnostní prostor

## Náhodné veličiny

$X; X(\omega)$	náhodná veličina
$f(x); f_X(x)$	hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny $X$
$F(x); F_X(x)$	distribuční funkce náhodné veličiny $X$
$X \sim \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$	náhodná veličina $X$ mající rozdělením pravděpodobnosti $\mathcal{L}$ s parametry $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$
$E(X); EX$	střední hodnota náhodné veličiny $X$
$D(X); DX$	rozptyl náhodné veličiny $X$
$C(X_i, X_j)$	kovariance náhodných veličin $X_i$ a $X_j$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$

## Náhodné vektory

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$	$n$ -rozměrný náhodný vektor
$f(\mathbf{x}); f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$	sružená hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{X}$
$F(\mathbf{x}); F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$	sružená distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$
$E(\mathbf{X}); E\mathbf{X}$	vektor středních hodnot náhodného vektoru $\mathbf{X}$
$D(\mathbf{X}); D\mathbf{X}$	kovarianční matice náhodného vektoru $\mathbf{X}$
$\Sigma(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$	kovarianční matice náhodných vektorů $\mathbf{X}_i$ a $\mathbf{X}_j$

## Matematická analýza

$f(t)$	reálná funkce jedné proměnné
$f'(t)$	první derivace reálné funkce $f$
$df$	diferenciál funkce $f$
$f(t, x)$	reálná funkce dvou proměnných
$f(t, \cdot)$	reálná funkce jedné proměnné, tato proměnná je zastoupena tečkou
$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}$	parciální derivace funkce $f$ podle proměnné $t$
$\left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right _{t=t_0}$	parciální derivace funkce $f$ podle proměnné $t$ , do které za proměnnou $t$ dosadíme hodnotu $t_0$
$\ \mathbf{x}\ $	Eukleidovská norma
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
$(a, b)$	otevřený interval
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část reálného čísla $x$
$\log(x)$	přirozený logaritmus reálného čísla $x$
$e$	Eulerovo číslo (základ přirozeného logaritmu)

## Stochastická analýza

$X(t, \omega); X(t); X_t$	stochastický proces
$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$	distribuční funkce stochastického procesu
$\mathcal{T}$	indexová množina (často interpretovaná jako čas)
$W(t, \omega); W(t); W_t$	standardní Wienerův proces
$\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$	přírůstek Wienerova procesu
$\Delta t$	přírůstek času
$\Delta W = W_{t+\Delta t} - W_t$	přírůstek Wienerova procesu za čas $\Delta t$
$dX(t, \omega); dX(t); dX_t$	stochastický diferenciál
$\int_0^T f(t, \omega) dW$	Itôův integrál pro stochastický proces $f(t, \omega)$
$\mathbf{X}(t, \omega); \mathbf{X}(t); \mathbf{X}_t$	vektorový stochastický proces
$\mathbf{W}(t)$	standardní $n$ -rozměrný Wienerův proces

## Teorie portfolia

$I_t$	množina všech investorů na trhu v čase $t$
$P_j(t)$	cena aktiva $j$ v čase $t$
$\mathbf{P}(t)$	vektor cen aktiv v čase $t$
$N_j(t)$	objem aktiva $j$ v čase $t$
$\mathbf{N}(t)$	vektor objemů aktiv v čase $t$
$V_j(t) = P_j(t)N_j(t)$	tržní hodnota aktiva $j$
$r_j$	míra výnosnosti podkladového aktiva $j$
$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$	vektor výnosností aktiv držených v portfoliu
$\mu_j$	očekávaná míra výnosnosti podkladového aktiva $j$
$\sigma_j$	riziko podkladového aktiva $j$
$B(t)$	cena bezrizikového aktiva v čase $t$
$r_f(t)$	bezriziková úroková míra v čase $t$
$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$	vektor vah podkladových aktiv držených v portfoliu
$C(r_j, r_k) = \sigma_{jk}$	kovariance výnosnosti aktiva $j$ a výnosnosti aktiva $k$
$\Sigma$	kovarianční matice výnosností podkladových aktiv držených v portfoliu
$\xi_{jk}(t)$	proces volatility podkladových aktiv $j$ a $k$ držených v portfoliu
$\xi$	matice volatilit podkladových aktiv držených v portfoliu
$\gamma_j(t)$	míra růstu podkladového aktiva $j$
$w_j(i, t)$	optimální objem prostředků investovaných do aktiva $j$ investorem $i$ v čase $t$
$\mathbf{w}(i, t)$	optimální alokace prostředků investora $i$ držených v portfoliu všech aktiv v čase $t$
$\lambda(i, t)$	rizikové preference investora $i$ v čase $t$

## Teorie řízení finančních rizik

$CCR$	kreditní riziko protistrany
$CVA$	Credit Valuation Adjustment
$D(t)$	diskontní faktor pro období od času $t$ do času 0
$EAD$	výše expozice v okamžiku selhání protistrany
$LGD$	ztrátovost ze selhání
$R$	míra návratnosti
$PD$	pravděpodobnost selhání protistrany
$PD_{1Y}$	pravděpodobnost selhání protistrany během jednoho roku
$PD(i)$	pravděpodobnost selhání protistrany v $i$ -tém roce
$IRS$	úrokový swap
$M$	počet let do maturity finančního derivátu zaokrouhlený nahoru

V druhé části práce se zaměříme na modelování Credit Valuation Adjustment (CVA), což je bankou sledovaná a účtovaná hodnota, která slouží jako úprava reálné hodnoty derivátů o kreditní riziko protistrany. Podle odhadu Basilejského výboru pochází tři čtvrtiny ztrát způsobených kreditním rizikem protistrany během finanční krize ze ztrát daných změnou CVA, nikoli kvůli samotným selháním protistran. Od roku 2015 předepisuje Basel III bankám povinnost počítat kapitálový požadavek pro riziko změny CVA. Současná situace na bankovním trhu vyvíjí na banky velký tlak hledat nové možnosti jak dosáhnout zisku. Běžné způsoby tvorby zisku v současnosti selhávají. Na trhu můžeme pozorovat nejen nízké až záporné úrokové sazby, ale i konkurenční boj o klienty, který přináší neustálý tlak na snižování bankovních poplatků a poskytování téměř nerentabilní klientských úvěrů. Banky proto hledají nové možnosti, jak snižovat náklady jako jsou například opravné položky k úvěrům klientů nebo k finančním derivátům. Jednou z možností může být nalezení způsobu jak CVA modelovat tak, aby dodržely předepsané standardy a zároveň zajistily co nejmenší dopad na jejich zisk.

Banky často používají triviální parametrické modely, které jsou ale nastaveny velmi konzervativně kvůli rizikové obezřetnosti. Předpokládáme, že sofistikovanější model by mohl přinést nižší CVA a tudíž i nižší kapitálový požadavek pro banku. Jedním z cílů této práce bude představit a aplikovat model pro CVA úrokových swapů, který respektuje regulační normy a zároveň přináší nižší ocenění CVA. Při výpočtu CVA budeme využívat různé stochastické metody analýzy dat. Monte Carlo simulace použijeme k vytvoření možných scénářů vývoje úrokových měr na trhu. Tyto simulace jsou prováděny s využitím Hull-Whitova jednofaktorového modelu úrokových měr. Následně pro každý scénář úrokové míry oceňujeme daný úrokový swap metodami pro oceňování derivátů a určujeme očekávanou expozici protistrany. Pro odhad pravděpodobnosti selhání protistrany využíváme přístup založený na exponenciálním rozdělení. Výpočty a simulace prezentované v Kapitole 4 jsou provedeny v prostředí MATLAB.

# Stochastická analýza

Nejprve uvedeme základní matematický aparát, který využíváme v této práci. Budeme používat obvyklé značení, jehož přehled je uveden na začátku práce. Zavedeme základní definice a vztahy využívané ve stochastickém modelování. Tato kapitola čerpá především z klasické monografie Bernta Øksendala o stochastických diferenciálních rovnicích [54], podobně jako knihy Thomase Garda [22] a rozsáhlé publikace Andrei Pascucci zabývající se matematickými metodami oceňování opcí [55]. Jako další reference byly využity [38], [1], [70] a [69]. Ve zmiňované literatuře je možno nalézt další podrobnosti.

## 1.1 Stochastické procesy a jejich vlastnosti

Stochastické procesy slouží k popisu dynamiky náhodných jevů a příklady takových jevů nacházíme v mnoha vědeckých oborech. Mezi nejznámější patří Brownův pohyb pevných částic, difuze a bílý šum.

Základy teorie stochastických procesů byly položeny na konci devatenáctého století. První zmínky popisu Brownova pohybu najdeme v článku dánského matematika Thorvalda Nicolae Thielea z roku 1880 zabývajícím se metodou nejmenších čtverců (podrobněji viz [42]). V roce 1900 Louis Bachelier ve své disertační práci [4] používá Brownův pohyb k popisu pohybu cen akcií na trhu. Díky ní je Bachelier uznávaný jako zakladatel kvantitativních metod ve finanční matematice.

Nezávisle na této práci popisují matematicky Brownův pohyb také fyzici Albert Einstein a Marian Smoluchowski. V roce 1905 Einstein aplikuje Brownův pohyb ve svém článku zabývajícím se molekulárně kinetickou teorií tepla [13]. O rok později Smoluchowski prezentuje článek [76], který se stane důležitým základem teorie náhodných procesů zvláště rovnice difuze. Einsteinovu teorii v roce 1908 experimentálně ověřil Jean Baptiste Perrin [56] a za tento úspěch byl v roce 1926 oceněn Nobelovou cenou za fyziku.

V neposlední řadě chceme zmínit význam amerického matematika Nor-

berta Wienera, který dokázal existenci stochastického procesu používaného k popisu Brownova pohybu [77]. Tento proces nese jeho jméno a je využíván v mnoha různých odvětvích.

### 1.1.1 Stochastický proces

V této části práce definujeme stochastický proces a uvedeme některé jeho podstatné vlastnosti.

**Definice 1** (Stochastický proces). Uvažujme indexovou množinu  $\mathcal{T}$  a pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ . *Stochastický proces*  $X(t, \omega)$  je funkce dvou proměnných  $X : \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je pro každé  $t \in \mathcal{T}$  náhodná veličina.

Reálná funkce  $X(\cdot, \omega)$  se nazývá *trajektorie* nebo *cesta* nebo *realizace* stochastického procesu.

Množina parametrů  $\mathcal{T}$  může být diskrétní nebo spojitá a v závislosti na tom pak mluvíme o *diskrétním* nebo *spojitém* stochastickém procesu.

**Definice 2** (Ekvivalence stochastických procesů). Dva stochastické procesy  $X(t, \omega)$  a  $Y(t, \omega)$  nazveme *ekvivalentní* pokud platí

$$X(t, \cdot) = Y(t, \cdot) \text{ s pravděpodobností jedna pro každé } t \in \mathcal{T}.$$

V takovém případě hovoříme o tom, že jeden proces je *verzí* druhého procesu.

**Definice 3** (Systém distribučních funkcí stochastického procesu). Nechť  $\mathcal{T}_n$  je množina všech vektorů  $\mathcal{T}_n = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) : t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n; t_i \in \mathcal{T}; i = 1, \dots, n\}$ , pak *distribuční funkcí* stochastického procesu rozumíme funkci

$$F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

pro všechna  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_n$  a všechna  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Pro různá  $n$  a různé  $t_1, \dots, t_n$  dostáváme celý *systém distribučních funkcí*, který označíme  $\mathcal{F}$ , a který plně popisuje pravděpodobnostní chování stochastického procesu.

**Příklad 1** (Gaussovský proces). *Gaussovský proces* je stochastický proces, jehož rozdělení pravděpodobnosti je normální, tedy každá sdružená distribuční funkce  $F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  je normální pro všechna  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$  a  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Systém distribučních funkcí nese úplnou informaci o pravděpodobnostním chování stochastického procesu, nicméně podstatnou část této informace můžeme získat už jen z charakteristik popsaných v následující definici.

**Definice 4** (Charakteristiky stochastického procesu). Nechť  $X(t)$  je stochastický proces takový, že pro každé  $t \in \mathcal{T}$  existuje střední hodnota  $\mathbf{E}X(t)$ . Pak funkce  $\mu(t)$  definovaná na množině  $\mathcal{T}$  předpisem

$$\mu(t) = \mathbf{E}X(t)$$

se nazývá *střední hodnota stochastického procesu*  $X(t)$ .

Nechť  $X(t)$  je stochastický proces takový, že pro každé  $t \in \mathcal{T}$  platí  $\mathbf{E}|X(t)|^2 < \infty$  (říkáme, že má *konečné druhé momenty*). Pak funkce dvou proměnných  $\gamma(s, t)$  definovaná na množině  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  předpisem

$$\gamma(s, t) = \mathbf{C}(X(s), X(t)) = \mathbf{E}[(X(s) - \mu(s))(X(t) - \mu(t))]$$

se nazývá *autokovarianční funkce stochastického procesu*  $X(t)$ . Speciálně hodnota  $\gamma(t, t) = \mathbf{D}(X(t))$  této funkce se nazývá *rozptyl stochastického procesu* v čase  $t$  a budeme ji značit  $\sigma^2(t)$ .

Nechť  $X(t)$  je stochastický proces s konečnými druhými momenty, pak funkce  $\rho(s, t)$  definovaná na množině  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  předpisem

$$\rho(s, t) = \frac{\mathbf{C}(X(s), X(t))}{\sqrt{\mathbf{D}(X(s))\mathbf{D}(X(t))}} = \frac{\gamma(s, t)}{\sqrt{\gamma(s, s)\gamma(t, t)}}$$

se nazývá *autokorelační funkce stochastického procesu*  $X(t)$ .

**Definice 5** (Stacionarita stochastického procesu). Stochastický proces  $X(t)$  nazveme *striktně stacionární* pokud jsou jeho sdružené distribuční funkce invariantní vůči časovému posunu, tedy pro všechna  $h \in \mathbb{R}$  takové, že  $t_j \in \mathcal{T}$  a  $t_j + h \in \mathcal{T}$  pro všechna  $j$  platí

$$F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Stochastický proces  $X(t)$  nazveme *slabě stacionární* pokud existuje konstanta  $\mu \in \mathbb{R}$  a funkce  $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že

$$\mathbf{E}X(t) = \mu \quad \text{a} \quad \mathbf{C}(X(t), X(s)) = c(|t - s|)$$

pro všechna  $t, s \in \mathcal{T}$ .

Pro slabě stacionární proces zřejmě platí  $\sigma^2(t) = c(0)$ . Procesy, které nejsou striktně stacionární, se nazývají *evoluční*.



**Definice 6** (Nezávislost přírůstků stochastického procesu). Přírůstky stochastického procesu  $X(t)$  jsou *nezávislé* právě tehdy, když pro všechny časové posloupnosti  $\{t_i\}_{i=1}^N \subseteq \mathcal{T}$ , kde  $t_i < t_{i+1}$  a  $N \in \mathbb{N}$ , jsou přírůstky  $X(t_{i+1}) - X(t_i)$  nezávislé náhodné veličiny.

K popisu pravděpodobnostního chování stochastického procesu s nezávislými přírůstky je tedy dostačující znát distribuční funkci náhodné veličiny  $X(t)$  a přírůstek stochastického procesu  $X(t) - X(s)$ , kde  $t > s$ .

**Definice 7** (Spojitost stochastického procesu). Řekneme, že stochastický proces  $X(t)$  je *stochasticky spojitý v bodě*  $t_0 \in \mathcal{T}$ , jestliže pro každé  $\epsilon > 0$  platí

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \Pr(|X(t) - X(t_0)| > \epsilon) = 0.$$

Stochastický proces je *stochasticky spojitý* (spojitý podle pravděpodobnosti), je-li spojitý v každém bodě množiny  $\mathcal{T}$ .

Proces, který je spojitý podle předcházející definice, nemusí mít spojitě trajektorie.

### 1.1.2 Wienerův proces

Wienerův proces byl zaveden Norbertem Wienerem jako matematický popis Brownova pohybu. Může být také interpretován jako limita náhodné procházky pro infinitezimální časoprostorový krok. Pro trajektorie Wienerova procesu je typická kombinace dvou vlastností spojitost a zároveň nediferencovatelnost v každém bodě. Wienerův proces je základním stavebním kamenem pro konstrukci stochastického integrálu.

**Definice 8** (Wienerův proces). Reálný stochastický proces  $\{W(t) : t \geq 0\}$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  se nazývá *Wienerův proces*, jestliže platí

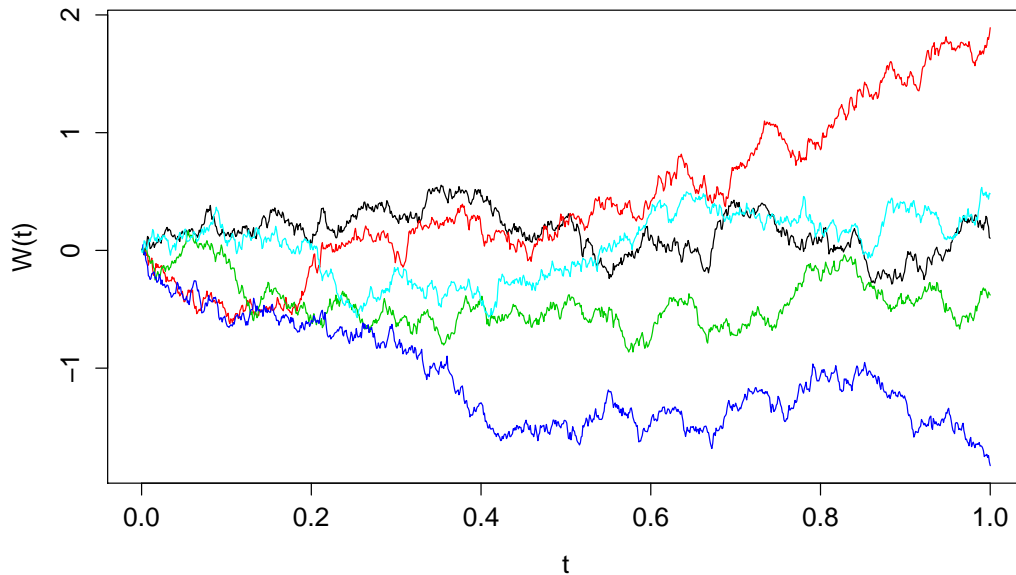
1.  $W(0) = 0$ ,
2. (spojitost trajektorií Wienerova procesu) s pravděpodobností jedna je funkce  $t \rightarrow W(t)$  spojitá v  $t$ ,
3. (nezávislost přírůstků) přírůstky procesu jsou nezávislé,
4. (normalita přírůstků) pro každé  $t \geq s \geq 0$  má přírůstek  $W(t) - W(s)$  normální rozdělení  $N(0, t - s)$ .

Ukázku trajektorií Wienerova procesu můžeme vidět na Obrázku 1.1.

Z definice Wienerova procesu je zřejmé, že jeho střední hodnota  $\mu_t = 0$  pro všechna  $t \geq 0$ . Snadno odvodíme vztah pro autokovarianční funkci Wienerova procesu  $\rho(s, t) = \min(s, t)$ . Jestliže  $0 \leq s < t$ , pak

$$\begin{aligned}\rho(s, t) = \mathbb{C}(W(s), W(t)) &= \mathbb{E}[(W(s) - \mu(s))(W(t) - \mu(t))] \\ &= \mathbb{E}[W(s)W(t)] \\ &= \mathbb{E}[W(s)(W(t) - W(s) + W(s))] \\ &= \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t) - W(s)] + \mathbb{E}[W(s)]^2 \\ &= 0 \cdot 0 + s.\end{aligned}$$

To znamená, že Wienerův proces není slabě stacionární.



Obrázek 1.1: Ukázka pěti trajektorií Wienerova procesu

Ceny aktiv na finančních trzích se podle teorie dokonalých trhů chovají zcela náhodně a nezávisle na předchozím vývoji. Wienerův proces se tedy nabízí jako vhodný nástroj k popisu chování cen aktiv. Při modelování ve finanční matematice využíváme procesy, které jsou zobecněním či modifikací Wienerova procesu. Uvažujme proces s nenulovým parametrem růstu, označovaným jako drift, a parametrem variability, jenž odpovídá směrodatné odchylce procesu.

**Definice 9** (Wienerův proces s driftem). Stochastický proces  $X(t)$  definovaný jako

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  jsou konstanty a  $W(t)$  je Wienerův proces, se nazývá *Wienerův proces s driftem*  $\mu$  a volatilitou  $\sigma$ .

Pokud bychom chtěli využít tento proces k modelování cen podkladových aktiv, setkáme se s dvěma problémy. Nejenže Wienerův proces s driftem může nabývat záporných hodnot, což je v rozporu s realitou chování cen podkladových aktiv, ale navíc by se model nechoval stejně při různých absolutních cenách aktiv. Aktivum s nižší současnou cenou by mělo větší riziko a také vyšší očekávaný výnos než aktivum s vyšší cenou. Proto chceme proces upravit tak, aby absolutní očekávaný výnos a výše směrodatné odchylky byly proporcionální k ceně podkladového aktiva.

Nejběžnější modifikací Wienerova procesu splňující tyto požadavky je Geometrický Wienerův proces, který v kontextu finanční matematiky použil poprvé Paul Samuelson [64]. K rozšíření modelu používajícího tento proces přispěli především Fischer Black a Myron Scholes [6] a to zejména v kontextu oceňování opcí.

Geometrický Wienerův proces bývá často definován pomocí stochastické diferenciální rovnice. Proto uvádíme tento způsob definice, přestože budou definovány v Kapitole 1.3.1.

**Definice 10** (Geometrický Wienerův proces). Stochastický proces  $S(t)$ , který je řešením stochastické diferenciální rovnice

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), \quad (1.1)$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  jsou konstanty a  $W(t)$  je Wienerův proces, se nazývá *Geometrický Wienerův proces*.

Toto řešení můžeme vyjádřit následovně

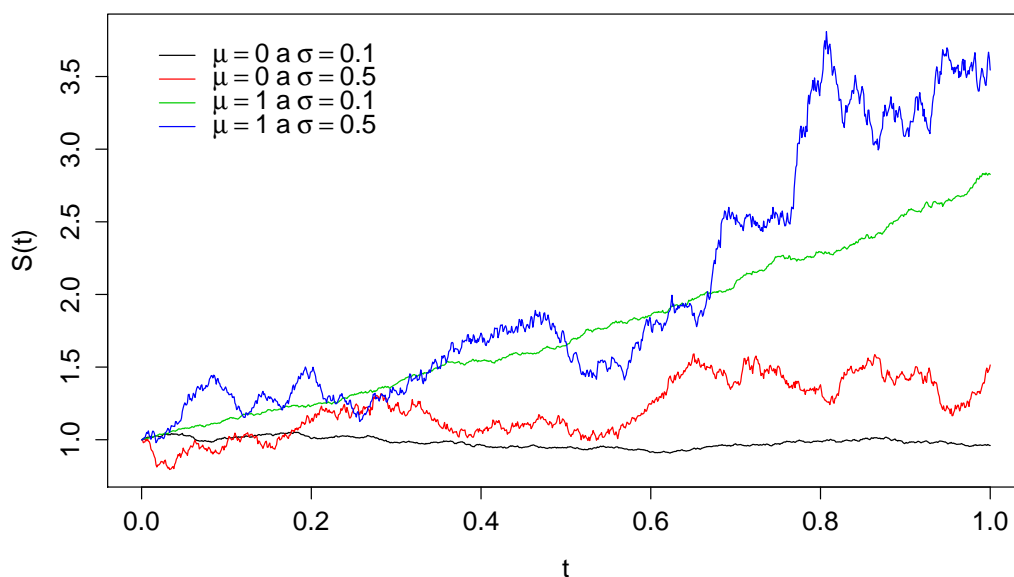
$$S(t) = S(0) e^{X(t)}, \quad (1.2)$$

kde  $X(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)$  je Wienerův proces s driftem (viz Definice 9).

Člen  $dW(t)$  ve stochastické diferenciální rovnici (1.1) označuje infinitezimální přírůstek Wienerova procesu a  $dt$  je infinitezimální změna času.

Z Definice 10 je zřejmé, že Geometrický Wienerův proces nabývá pouze kladných hodnot a jeho relativní přírůstky jsou nezávislé a mají stejné rozdělení. Kromě toho se s tímto procesem docela snadno pracuje ve výpočtech. Díky těmto vlastnostem se stal nejrozšířenějším modelem chování cen aktiv ve finanční matematice.

Ukázku trajektorií Geometrického Wienerova procesu s různými parametry driftu a volatility znázorňuje Obrázek 1.2.



Obrázek 1.2: Ukázka pěti trajektorií Geometrického Wienerova procesu s různými parametry driftu  $\mu$  a volatility  $\sigma$

### 1.1.3 Itôův proces

Abychom mohli v následujícím textu zavést stochastický integrál definujeme nejdříve širokou třídu procesů, tzv. Itôových procesů.

Kiyosi Itô byl japonský matematik, jenž modernizoval stochastické modely a jeho metody jsou dodnes používány v mnoha odvětvích vědy především ve financích a biologii. Svou práci začal stavět v roce 1940 na základě dřívějších objevů Alberta Einsteina a Norberta Wienera. V teorii stochastických procesů aplikoval metody diferenciálního a integrálního počtu. Matematický rámec zahrnující stochastické integrály a stochastické diferenciální rovnice vešel ve známost jako Itôův kalkul. Z významných Itôových textů zmiňme článek [32] z roku 1944 obsahující konstrukci stochastického integrálu a publikace [33] a [35], kde zavádí koncept stochastických diferenciálních rovnic.

Robert C. Merton, nositel Nobelovy za ekonomii, využívá teoretické poznatky Kiyosi Itôa jako nástroj pro výzkum vývoje cen akcií v portfoliu a k oceňování finančních derivátů. Tyto postupy více přiblížíme v Kapitole 2 o stochastickém modelování.

**Definice 11.** Necht  $\{W(t) : t \geq 0\}$  je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ . Řekneme, že stochastický proces  $\{f(t, \omega) : t \geq 0\}$  je *neanticipativní*, jestliže pro všechna  $t \geq 0$  hodnota  $f(t, \omega)$  závisí jen na hodnotách Wienerova procesu do času  $t$ .

**Definice 12.** Necht  $W(t, \omega)$  je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ . Symbolem  $M$  označme třídu stochastických procesů  $f(t, \omega) : \langle 0, \infty \rangle \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  takových, že

1.  $f(t, \omega)$  je neanticipativní,
2.  $E \left[ \int_0^T f^2(t, \omega) dt \right] < \infty$ .

**Definice 13** (Itôův proces). Necht  $W(t, \omega)$  je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ . *Itôův proces* je stochastický proces

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t U(s, \omega) ds + \int_0^t V(s, \omega) dW(s, \omega),$$

kde  $U(t, \omega)$  a  $V(t, \omega)$  jsou stochastické procesy patřící do třídy  $M$ , první integrál je Lebesgueův a druhý Itôův (který je definován v Kapitole 1.2.1).

Často se používá diferenciální tvar, nazývaný *stochastický diferenciál*,

$$dX(t, \omega) = U(t, \omega) dt + V(t, \omega) dW(t, \omega).$$

#### 1.1.4 Ornstein–Uhlenbeckův proces

Další často využívanou modifikací Wienerova procesu jsou stochastické procesy s tendencí vracet se k dlouhodobé rovnovážné hodnotě. Nazývají se *mean-reversion procesy* a nachází četné využití ve fyzice, matematice i ekonomii. Ve finanční matematice se používají pro modelování úrokových sazeb, kurzů měn, cen komodit a volatility.

Holandští fyzikové Leonard Salomon Ornstein a George Eugene Uhlenbeck zformulovali jako první mean-reversion proces v roce 1930 a publikovali v textu [73].

**Definice 14** (Ornstein–Uhlenbeckův proces). *Ornstein–Uhlenbeckův proces* je definován jako

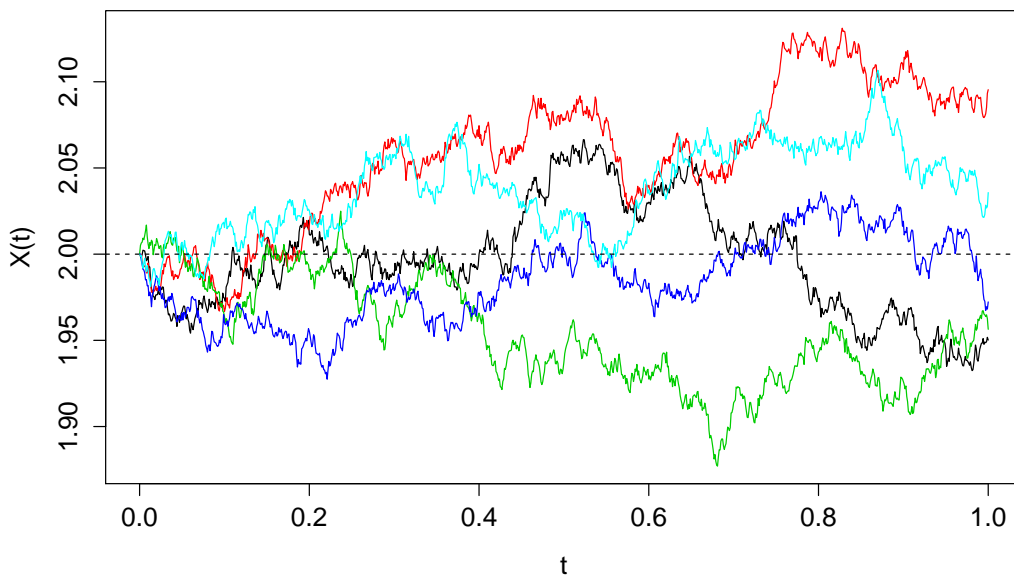
$$X(t) = X(0) e^{-\theta t} + \mu (1 - e^{-\theta t}) + e^{-\theta t} \int_0^t \sigma e^{\theta s} dW(s), \quad (1.3)$$

kde parametr  $\theta > 0$  je koeficient rychlosti reverze, parametr  $\mu \in \mathbb{R}$  je rovnovážná hodnota, parametr  $\sigma > 0$  je volatilita a  $W_t$  je Wienerův proces. Ornstein–Uhlenbeckův proces může být také definován jako řešení stochastické diferenciální rovnice

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t)) dt + \sigma dW(t). \quad (1.4)$$

Ornstein–Uhlenbeckův proces je stacionární Gaussovský proces s ohraničeným rozptylem. Koeficient  $\theta$  určuje rychlost přibližování k rovnovážné hodnotě  $\mu$ . Čím je  $\theta$  větší tím pohotověji proces reaguje na odchýlení od rovnováhy. Na rozdíl od Wienerova procesu nemá Ornstein–Uhlenbeckův proces konstantní koeficient driftu, jelikož závisí na jeho aktuální hodnotě. Pokud je aktuální hodnota procesu  $X_t$  menší než rovnovážná hodnota  $\mu$ , pak je koeficient driftu kladný. Naopak když  $X_t > \mu$ , tak je koeficient driftu záporný.

Ukázku trajektorií Ornstein–Uhlenbeckova procesu s danými parametry najdeme na Obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Ukázka pěti trajektorií Ornstein–Uhlenbeckova procesu s parametry  $\theta = 1$ ,  $\mu = 2$  a  $\sigma = 0,1$  a počáteční hodnotou  $X_0 = 2$ .

Vlastnostem Ornstein–Uhlenbeckova procesu (především stacionaritě) se zevrubně věnují Fred Espen Benth a Asma Khedher v knize [58] z roku 2015, která je aktuální sbírkou prací vědců v oboru pravděpodobnosti, statistiky a jejich aplikací ve financích, ekonomii, fyzice, řízení rizika a systémů hromadné obsluhy.

### 1.1.5 Mnohorozměrný Wienerův proces

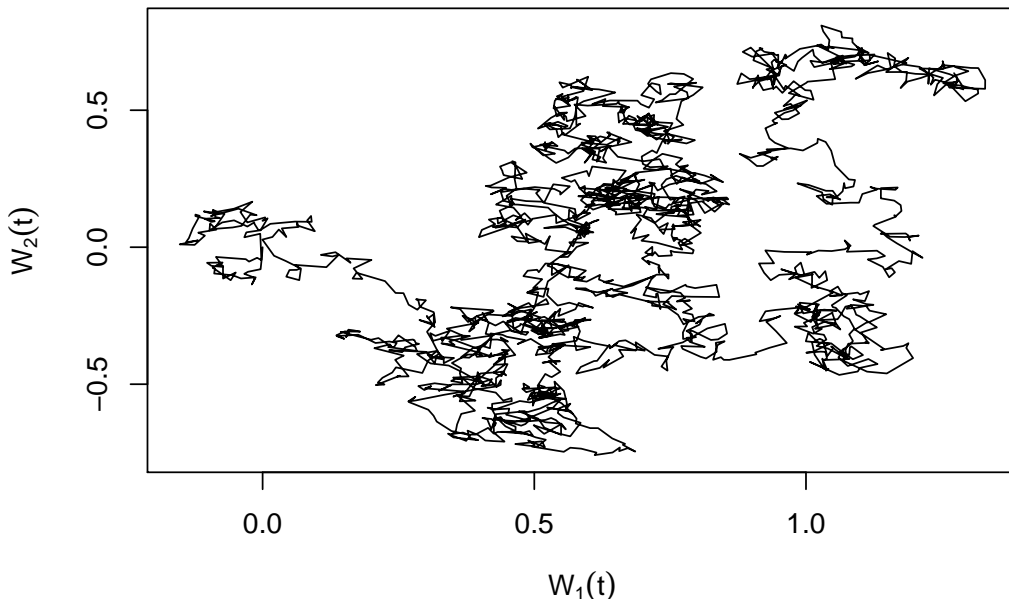
Chceme-li uvažovat finanční trh s více rizikovými aktivy a zabývat se jejich vzájemnými vztahy, musíme zavést vícerozměrný Wienerův proces. Aplikaci tohoto vektorového stochastického procesu využijeme v dynamické teorii portfolia.

**Definice 15.** Standardní  $n$ -rozměrný Wienerův proces je vektorový stochastický proces

$$\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^T$$

jehož složky  $W_k(t)$  jsou nezávislé, standardní jednorozměrné Wienerovy procesy.

Na Obrázku 1.4 vidíme ukázkou trajektorie dvourozměrného Wienerova procesu.



Obrázek 1.4: Ukáзка trajektorie dvourozměrného Wienerova procesu

## 1.2 Itôův integrální počet

Chceme-li používat modely založené na stochastických procesech se spojitým časem neobejdeme se bez stochastického integrálního počtu. Dále se proto budeme věnovat konstrukci stochastického integrálu, uvedeme Itôovo lemma a vysvětlíme jeho přínos pro modelování ve finanční matematice. Věty a lemmata budeme uvádět pouze bez důkazů, které jsou k nalezení v literatuře, viz například [38].

Konstrukci stochastického integrálu podle Wienerova procesu představil v letech 1942–1944 Kiyosi Itô v [34] a [32]. Obecnější stochastický integrál, který je založený na širší třídě stochastických procesů, zkonstruovali v roce 1967 Hiroshi Kunita a Shinzo Watanabe v [41].

### 1.2.1 Itôův integrál

Důležitým nástrojem pro řešení stochastických diferenciálních rovnic je Itôův integrál (nazývaný též jen stochastický integrál). Jeho zavedení je vyžadováno nediferencovatelností trajektorií Wienerova procesu. Stochastický integrál budeme konstruovat obdobným způsobem jako Riemannův integrál. Nejprve Itôův integrál definujeme pro jednoduché procesy, následně definici rozšíříme na větší třídu procesů pomocí aproximace.

**Definice 16.** Stochastický proces  $S$  se nazývá *jednoduchý*, jestliže existuje dělení  $D = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T\}$  tak, že pro každé  $t$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , je  $S(t, \omega) = S_k(\omega)$ , pro nějaké náhodné veličiny  $S_k$ .

Z Definice 16 vyplývá, že trajektorie jednoduchého procesu je po částech konstantní.

**Definice 17.** Nechť  $S$  je jednoduchý proces a zavedme označení  $\Delta W_k = W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega)$ . Pak

$$\int_0^T S dW = \sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta W_k$$

se nazývá *Itôův integrál* procesu  $S$  na intervalu  $\langle 0, T \rangle$ .

Pomocí limitního přechodu rozšíříme definici Itôova integrálu pro jednoduché procesy na integrál pro obecný stochastický proces.

**Lemma 18.** Nechť  $f$  je stochastický proces patřící do třídy  $M$  dle Definice 12. Pak existuje posloupnost jednoduchých procesů  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  tak, že pro  $n \rightarrow \infty$  platí

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T [f(t) - f_n(t)]^2 dt \right] \rightarrow 0.$$

**Definice 19** (Itôův integrál). Nechť  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  je posloupnost jednoduchých procesů z Lemmatu 18. Pro obecný proces  $f(t, \omega) \in M$  definujeme *Itôův integrál* předpisem

$$\int_0^T f(t, \omega) dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t, \omega) dW.$$

Definice 19 není závislá na volbě aproximující posloupnosti  $f_n$  viz [54].



### 1.2.2 Itôovo lemma

Itôovo lemma je nástrojem pro práci s Itôovým integrálem a stochastickými diferenciálními rovnicemi. Říká, že Itôovy procesy tvoří uzavřenou třídu vzhledem ke skládání s hladkými funkcemi. Kiyosi Itô jej publikoval v roce 1944 v článku [32].

**Věta 20** (Itôovo lemma). *Nechť  $X(t, \omega)$  je Itôův proces se stochastickým diferenciálem*

$$dX = U dt + V dW.$$

*Nechť  $g(t, x) : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Potom  $Y(t) = g(t, X(t))$  je také Itôův proces. Jeho stochastický diferenciál má tvar*

$$dY = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dX)^2 = \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} U + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} V^2 \right] dt + \frac{\partial g}{\partial x} V dW.$$

Itôovo lemma můžeme považovat za analogii Taylorova rozvoje v integrálním počtu. Tento důležitý vztah stochastické analýzy budeme využívat pro oceňování finančních derivátů, jejichž hodnota je závislá na hodnotě podkladového aktiva.

## 1.3 Stochastické diferenciální rovnice

Pomocí diferenciálních rovnic jsme schopni popsat množství zákonitostí platných ve vědeckých oborech přírodních, společenských i ekonomických. Řešení diferenciálních rovnic jsou funkce popisující vlastnosti zkoumaných jevů. Stochastické diferenciální rovnice (SDR) nám umožňují modelovat dynamiku *náhodných jevů*. K formulování a řešení SDR je využíván Itôův kalkul popsáný v Kapitole 1.2. Aplikací stochastických diferenciálních rovnic ve stochastickém modelování se zabýváme v Kapitole 2, kde uvádíme modely popisující vývoj a chování cen finančních aktiv v čase.

Základní studijní literaturou nám byla monografie Bernta Øksendala [54]. Pracovali jsme také s texty [12] a [11], které napsal Sasha Cyganowski s kolektivem autorů.

### 1.3.1 Úvod do teorie stochastických diferenciálních rovnic

Na úvod do teorie SDR uvedme základní definice, používané značení a podmínky řešitelnosti.

**Definice 21** (Stochastická diferenciální rovnice). Necht  $\alpha(t, x)$  a  $\beta(t, x)$  jsou funkce dvou proměnných  $\alpha, \beta : \mathcal{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Stochastickou diferenciální rovnici (SDR) rozumíme rovnici*

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \alpha(s, X(s)) ds + \int_{t_0}^t \beta(s, X(s)) dW(s), \quad (1.5)$$

kde první integrál je Lebesgueův a druhý integrál je Itôův definovaný v Kapitole 1.2.1. Častěji se s SDR setkáváme v jejím diferenciálním tvaru

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha(t, X(t)) dt + \beta(t, X(t)) dW(t), \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Náhodnou veličinu  $X(t_0) = X_0$  nazýváme *počáteční podmínkou SDR* a stochastický proces  $X(t)$  splňující vztah (1.5), nazýváme *řešením SDR* na  $\mathcal{T}$ .

Uvažujme  $n$  stochastických procesů  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ , které popisují nějakým způsobem související náhodné jevy, například vývoj cen  $n$  různých akcií na kapitálovém trhu. K popisu chování takových procesů v čase slouží soustavy stochastických diferenciálních rovnic (někdy označované jako systémy SDR).

**Definice 22** (Soustava  $n$  stochastických diferenciálních rovnic). Necht

$$\boldsymbol{\alpha}(t, \mathbf{x}) = (\alpha^1(t, \mathbf{x}), \dots, \alpha^n(t, \mathbf{x}))^T$$

je spojitá vektorová funkce  $\boldsymbol{\alpha} : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Pro  $j = 1, \dots, m$  označíme

$$\boldsymbol{\beta}^j(t, \mathbf{x}) = (\beta^{1,j}(t, \mathbf{x}), \dots, \beta^{n,j}(t, \mathbf{x}))^T$$

a necht  $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}^1, \dots, \boldsymbol{\beta}^m)$  je spojitá maticová funkce  $\mathbf{B} : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Pro  $j = 1, \dots, m$  rozumíme *soustavou stochastických diferenciálních rovnic* systém

$$X^i(t) = X_0^i + \int_{t_0}^t \alpha^i(s, \mathbf{X}(s)) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t \beta^{i,j}(s, \mathbf{X}(s)) dW^j(s), \quad (1.7)$$

kde první integrál je opět Lebesgueův a integrály v sumě jsou Itôovy stochastické integrály. Diferenciální tvar soustav SDR zapíšeme ve formě

$$\begin{aligned} dX^i(t) &= \alpha^i(t, \mathbf{X}(t)) dt + \sum_{j=1}^m \beta^{i,j}(t, \mathbf{X}(t)) dW^j(t), \\ X^i(t_0) &= X_0^i. \end{aligned} \quad (1.8)$$

kde  $\mathbf{W}(t) = (W^1(t), \dots, W^m(t))^T$  je  $m$ -rozměrný Wienerův proces.

## Existence a jednoznačnost řešení

Teorie o existenci a jednoznačnosti řešení stochastických diferenciálních rovnic a jejich soustav vychází z podobných přístupů jako v případě obyčejných diferenciálních rovnic. Zejména se předpokládají určité vlastnosti koeficientů rovnic jako je lokální Lipschitzova spojitost. Následující věta shrnuje podmínky existence a jednoznačnosti řešení soustavy stochastických diferenciálních rovnic.

**Věta 23** (O existenci a jednoznačnosti řešení soustav SDR). *Nechť jsou  $\alpha : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $B : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  měřitelné funkce splňující podmínku*

$$\|\alpha(t, \mathbf{x})\| + \|B(t, \mathbf{x})\| \leq C(1 + \|\mathbf{x}\|), \quad (1.9)$$

*pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $t \in \mathcal{T}$  a pro nějakou kladnou konstantu  $C$ . Dále nechť funkce  $\alpha$  a  $B$  splňují podmínku*

$$\|\alpha(t, \mathbf{x}) - \alpha(t, \mathbf{y})\| + \|B(t, \mathbf{x}) - B(t, \mathbf{y})\| \leq D\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad (1.10)$$

*pro každé  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  a  $t \in \mathcal{T}$  a pro nějakou kladnou konstantu  $D$ . Dále nechť  $\mathbf{X}_0$  je náhodný vektor, který může být závislý na hodnotách Wienerova procesu  $\mathbf{W}(t)$  pouze v čase  $t_0$ , a platí*

$$\mathbb{E} [\|\mathbf{X}_0\|^2] < \infty. \quad (1.11)$$

*Pak má soustava stochastických diferenciálních rovnic (1.8) jednoznačné řešení na  $\mathcal{T}$ .*

*Důkaz.* Viz [54]. □

### 1.3.2 Numerické metody řešení stochastických diferenciálních rovnic

Numerické metody využíváme v případě kdy není možno určit řešení SDR analyticky. Základním principem numerických metod je diskretizace proměnných. Numerická metoda určí aproximaci řešení v diskrétních časových hodnotách a spojitou aproximaci řešení získáme použitím interpolačních metod.

Pro obeznámení s numerickými metodami řešení SDR a jejich soustav jsme zvolili monografii Petera Erise Kloedena, Eckharda Platena a Henriho Schurze [40]. Dalším zdrojem nám byla již zmiňovaná kniha [11] autorů Cyganowski, Kloeden a Ombach. Využití numerických řešení SDR při oceňování finančních derivátů popisuje Timothy Sauer [65].

## Eulerova metoda

Základní numerická metoda pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic je pojmenovaná po významném švýcarském matematikovi a fyzikovi Leonhardu Paulu Eulerovi, který ji zpracoval ve své knize *Institutionum calculi integralis* publikované roku 1768, [16]. Tato metoda byla v roce 1955 modifikována japonským matematikem Gisiro Maruyamou [45], aby umožňovala řešit SDR. Jedná se o nejjednodušší metodu, která slouží ke konstrukci složitějších numerických metod pro řešení SDR.

Uvažujme Itôův proces  $X(t)$ , který je řešením SDR definované vztahem (1.6). Necht  $\{t_n\}_{n=0}^N \subseteq \mathcal{T}$  je časová posloupnost, kde pro všechna  $n$  platí  $t_n < t_{n+1}$ . Tato posloupnost se nazývá *diskretizace* časové proměnné. V Eulerově metodě diferenciál  $dX(t)$  aproximujeme přírůstkem stochastického procesu  $\Delta X_n = X(t_{n+1}) - X(t_n)$ . Hodnota  $X(t_{n+1})$  je aproximována pomocí hodnoty  $X(t_n)$  v předcházejícím časovém kroku.

**Definice 24.** Necht  $X_n$  značí aproximaci řešení  $X(t_n)$  stochastické diferenciální rovnice (1.6) v čase  $t_n$ . Pak *Eulerova metoda* řešení SDR je definována rekurzivním vztahem

$$X_{n+1} = X_n + \alpha(t_n, X_n)\Delta_n + \beta(t_n, X_n)\Delta W_n, \quad (1.12)$$

kde  $\Delta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = t_{n+1} - t_n$  je délka časového intervalu  $(t_n, t_{n+1})$  a  $\Delta W_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW(t) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  je přírůstek Wienerova procesu  $W$  v čase  $(t_n, t_{n+1})$ .

Zobecníme-li Eulerovu metodu pro soustavu  $m$  stochastických diferenciálních rovnic (1.8), pak vztah pro  $i$ -tou složku aproximace řešení je definován předpisem

$$X_{n+1}^i = X_n^i + \alpha^i(t_n, \mathbf{X}_n)\Delta_n + \sum_{j=1}^m \beta^{i,j}(t_n, \mathbf{X}_n)\Delta W_n^j. \quad (1.13)$$

*Eulerova aproximace* je spojitý stochastický proces, který v daných časech  $\{t_n\}_{n=0}^N \subseteq \mathcal{T}$  splňuje vztah (1.12) a hodnoty mezi těmito časovými body získáme pomocí lineární interpolace.

Většinou se předpokládá, že časová posloupnost  $\{t_n\}_{n=0}^N \subseteq \mathcal{T}$  je ekvidistantní. Důležitou problematikou při používání numerických metod je způsob výpočtu  $\Delta W_n$ . Z vlastnosti Wienerova procesu plyne, že  $\Delta W_n \sim \mathbf{N}(0, \Delta_n)$ .

## Milsteinova metoda

Milsteinova numerická metoda řešení SDR je popsána v knihách Eckharda Platena [57] a Paula Glassermana [24]. Tuto metodu poprvé představil Grigori N. Milstein ve svém článku [52] v roce 1974. Metoda se snaží zdokonalit

aproximaci difuzního členu tím, že aditivně připojuje třetí člen k Eulerově diskretizaci. Pro odvození podoby tohoto členu je využíváno Itôovo lemma, které je aplikováno na koeficienty stochastického procesu. Následnými úpravami a zanedbáním členů vyšších řádů získáme vztah uvedený v Definici 25. Poznamenejme, že pro správné fungování Milsteinovy metody je narození od Eulerovy metody potřebný předpoklad diferencovatelnosti funkce  $\beta(t, \mathbf{x})$  podle složek  $\mathbf{x}$ .

**Definice 25.** Necht  $X_n$  značí aproximaci řešení  $X(t_n)$  stochastické diferenciální rovnice (1.6) v čase  $t_n$ . Pak *Milsteinova metoda* řešení SDR je definována rekurzivním vztahem

$$X_{n+1} = X_n + \alpha(t_n, X_n)\Delta_n + \beta(t_n, X_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\beta(t_n, X_n)\beta'(t_n, X_n)((\Delta W_n)^2 - \Delta_n), \quad (1.14)$$

kde  $\beta'(t_n, X_n)$  je derivace  $\beta(t_n, X_n)$  podle  $X_n$ ,  $\Delta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = t_{n+1} - t_n$  je délka časového intervalu  $(t_n, t_{n+1})$  a  $\Delta W_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW(t) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  je přírůstek Wienerova procesu  $W$  v čase  $(t_n, t_{n+1})$ .

Poznamenejme, že v případě, kdy koeficient  $\beta(t, X(t)) = \beta(t)$  nezávisí na procesu  $X(t)$ , pak  $\beta'(t, X(t)) = 0$  a Milsteinova metoda je identická s metodou Eulerovou.

Zobecníme-li Milsteinovu metodu pro soustavu  $m$  stochastických diferenciálních rovnic (1.8), pak vztah pro  $i$ -tou složku aproximace řešení je definován předpisem

$$X_{n+1}^i = X_n^i + \alpha^i(t_n, \mathbf{X}_n)\Delta_n + \sum_{j=1}^m \beta^{i,j}(t_n, \mathbf{X}_n)\Delta W_n^j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \beta^{i,j}(t_n, \mathbf{X}_n) \sum_{l=1}^m \frac{\partial \beta^{i,k}(t_n, \mathbf{X}_n)}{\partial X_l} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (W^k(t) - W^k(t_n)) dW^j(t). \quad (1.15)$$

Pro  $j = k$  je možno Itôův integrál  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} (W^k(t) - W^k(t_n)) dW^j(t)$  vyjádřit pomocí časového přírůstku  $\Delta_n$  a přírůstku Wienerova procesu  $\Delta W_n^k$  jako

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (W^k(t) - W^k(t_n)) dW^k(t) = \frac{1}{2}((\Delta W_n^k)^2 - \Delta_n).$$

Avšak pro  $j \neq k$  obdobné vyjádření neexistuje a integrál je nutné simulovat. V uvedené literatuře lze nalézt různé přístupy k tomuto problému. Například simulace využívající distribuční funkce, nebo substituování jednodušší náhodnou veličinou, případně zavedení zjednodušujících předpokladů o funkci volatility  $\beta(t, \mathbf{x})$ .

## Konvergence

Chceme-li posuzovat kvalitu jednotlivých numerických metod řešení SDR a vzájemně je porovnávat, zkoumáme odchylku aproximace řešení od přesného řešení (tzv. chybu aproximace). V literatuře se běžně setkáváme se dvěma kategoriemi kritérií sloužící k posouzení konvergence aproximace k přesnému řešení. Jsou to silná konvergenční kritéria a slabá konvergenční kritéria.

Označme  $X(t)$  přesné řešení SDR v čase  $t$  a  $\hat{X}(t)$  jeho aproximaci určenou pomocí zvolené numerické metody. Uvědomme si, že v každém čase  $t$  jsou jak přesné řešení SDR, tak jeho aproximace náhodné veličiny. Slabá konvergence sleduje velikost odchylky středních hodnot řešení SDR a jeho aproximace, naproti tomu silná konvergence uvažuje střední hodnotu odchylek  $X(t)$  a  $\hat{X}(t)$ .

V následujících Definicích 26 a 27 budeme předpokládat, že diskretizace času  $\{t_n\}_{n=0}^N \subseteq \langle 0, T \rangle$  je ekvidistantní posloupnost, tzn.  $\Delta_n = \Delta$  pro všechna  $n$ . Pro ekvidistantní posloupnost platí  $t_n = n\Delta$ , kde přirozená čísla  $n \in \langle 0, \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor \rangle$ .

**Definice 26.** Řekneme, že aproximace  $\hat{X}(T)$  *slabě konverguje* k přesnému řešení  $X(T)$  v čase  $T$ , jestliže platí

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left| \mathbb{E}(f(X(T))) - \mathbb{E}(f(\hat{X}(T))) \right| = 0 \quad (1.16)$$

pro každou polynomiální funkci  $f(x)$ .

Řekneme, že numerická metoda má *slabý řád konvergence*  $q$ , jestliže existuje kladná konstanta  $K$ , nezávislá na  $\Delta$ , taková, že platí

$$\left| \mathbb{E}(f(X(T))) - \mathbb{E}(f(\hat{X}(T))) \right| \leq K\Delta^q. \quad (1.17)$$

Levá strana vztahu (1.17) se nazývá slabá chyba aproximace.

Pro různou volbou polynomu  $f(x)$  dostáváme konvergenci různých momentů řešení SDR.

**Definice 27.** Řekneme, že aproximace  $\hat{X}(T)$  *silně konverguje* k přesnému řešení  $X(T)$  v čase  $T$ , jestliže platí

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{E}(|X(T) - \hat{X}(T)|) = 0. \quad (1.18)$$

Řekneme, že numerická metoda má *silný řád konvergence*  $p$ , jestliže existuje kladná konstanta  $K$ , nezávislá na  $\Delta$ , taková, že platí

$$\mathbb{E}(|X(T) - \hat{X}(T)|) \leq K\Delta^p. \quad (1.19)$$

Levá strana vztahu (1.19) se nazývá silná chyba aproximace.

Poznamenejme, že silná konvergence implikuje slabou konvergenci.

Abychom získali co nejpřesnější aproximaci trajektorií řešení stochastické diferenciální rovnice, používáme metody s co největším silným řádem konvergence. Ačkoli je známo, že Eulerova numerická metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic má silný řád konvergence 1, tak stochastická Eulerova numerická metoda má řád konvergence  $\frac{1}{2}$ . Tuto skutečnost dokázali roku 1972 Gikhman a Skorokhod v [23]. Naproti tomu Milsteinova numerická metoda má silný řád konvergence jedna. Platí tedy, že v obecném případě, kdy se v koeficientu volatility  $\beta(t, x)$  vyskytuje proměnná  $x$ , Milsteinova metoda konverguje k přesnému řešení SDR rychleji než Eulerova metoda (spolu se zmenšováním časového kroku  $\Delta$ ).

# 2

## Stochastické modelování

Stochastický model slouží k popisu dějů, ve kterých je přítomná náhodná složka. Pomocí stochastického modelu lze simulovat průběh děje a pozorovat jeho chování při nastavení různých parametrů modelu. Aplikace stochastického modelování a simulace chování dějů umožňují nejen jejich popis, ale také jejich analýzu. Na základě analýzy chování modelu a simulací můžeme získat informace pro řízení procesů a k rozhodování.

V této práci se zaměříme na ekonomické modely popisující, jak se na finančním trhu díky nabídce a poptávce formují ceny finančních aktiv. Finanční aktiva poskytují investorovi potenciální nárok na budoucí příjem. Mezi finanční aktiva zahrnujeme také finanční deriváty.

Modelovat budeme vývoj ceny jak podkladových aktiv, tak finančních derivátů. Finanční derivát je finanční produkt, jehož hodnota je odvozena od ceny jiného finančního aktiva, tzv. podkladového aktiva. Podkladovými aktivy mohou být akcie, úrokové míry, komodity, měny, akciové indexy a mnoho dalších finančních instrumentů. Podstatou derivátu je termínový obchod, tedy takový, kde doba od sjednání obchodu do jeho vypořádání v budoucnosti je delší než vyžaduje technické vypořádání obchodu.

Chování cen aktiv vykazuje stochastický charakter a cenové změny jsou náhodné a nepředvídatelné. Kolísání cen aktiv v čase je způsobené především vzájemným působením nabídky a poptávky na trhu. Mezi základní teoretická východiska v teorii finančních trhů patří hypotéza efektivního trhu, která tvrdí, že ceny aktiv velmi rychle plně odrážejí veškeré tržní informace a zcela reflektují všechna očekávání investorů ohledně budoucího vývoje cen aktiv.

Teorie finančních trhů je podrobně zpracována v české literatuře. Z velkého množství textů odkážme na [61], [21] a [75], které jsme při psaní práce využívali. Stochastickým modelováním v ekonomii se pak zabývá převážně zahraniční literatura, ze které jsme nejvíce pracovali s [27], [78] a [39].



## 2.1 Stochastické modelování cen finančních aktiv

V následující části popíšeme konstrukci matematických modelů používaných ve finanční matematice pro popis vývoje cen aktiv na finančních trzích. Na začátek poznamenejme, že ceny aktiv jsou pozorovány a zaznamenávány v diskrétních časech s malým časovým krokem. Avšak je běžné předpokládat, že proces ceny aktiva je spojitý. Důvodem je zjednodušení následných analýz a modelování.

V Kapitole 1.1.2 jsme uvažovali nad požadavky kladenými na chování stochastického procesu, který můžeme využít k modelování cen aktiv, aby byl model smysluplný. Zrekapitulujme kvalitativní znaky modelu aktiv:

- v dlouhodobém časovém horizontu mají ceny aktiv přibližně exponenciální růst,
- fluktuace cen aktiv je náhodná,
- ceny aktiv jsou nezáporné,
- model je univerzální pro různé úrovně cen aktiv.

Jak už bylo naznačeno v Kapitole 1.1.2, základní model splňující uvedené požadavky je založen na geometrickém Wienerově procesu. Budeme předpokládat, že proces popisující vývoj ceny aktiva v čase se řídí následující stochastickou diferenciální rovnicí

$$dP(t) = P(t) \mu(t) dt + P(t) \sigma(t) dW(t), \quad (2.1)$$

kde  $P(t)$  je cena aktiva v čase  $t$ ,  $\mu(t)$  a  $\sigma(t)$  jsou stochastické procesy a  $W(t)$  je jednorozměrný Wienerův proces. Tento model předpokládá, že na trhu je pouze jedno rizikové aktivum.

Chceme-li popisovat vývoj ceny více rizikových aktiv na trhu a jejich vzájemné vztahy využijeme následující model, který předpokládá existenci  $n$  rizikových aktiv a je popsán rovnicí

$$dP_j(t) = P_j(t) \mu_j(t) dt + P_j(t) \sum_{k=1}^n \xi_{jk}(t) dW_k(t), \quad (2.2)$$

kde  $P_j(t)$  je cena aktiva  $j$  v čase  $t$ ,  $\mu_j(t)$  a  $\xi_{jk}(t)$  jsou stochastické procesy a  $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^T$  je  $n$ -rozměrný Wienerův proces. Pro více informací o mnohorozměrných modelech viz [15].

Některé modely zabývající se chováním cen aktiv na trhu předpokládají existenci *bezrizikového aktiva*. Jedná se o aktivum, které má jistou (nenáhodnou) výnosnost a tudíž nulové riziko. Výnosností a rizikem aktiva se budeme

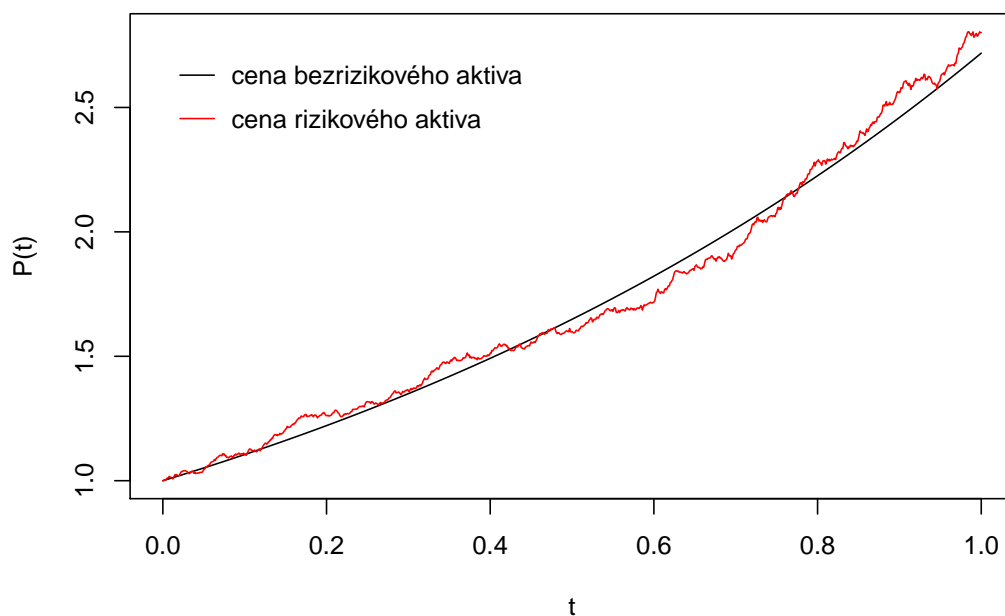
podrobněji zabývat v Kapitole 3.1. S modely zahrnujícími bezrizikové aktivum nás seznámí Kapitola 3.2. Výnosnost bezrizikového aktiva se nazývá *bezriziková úroková míra*. Modelování úrokových měr se věnuje Kapitola 2.2. V praxi neexistuje skutečně bezriziková investice, ale z krátkodobého a střednědobého hlediska lze návratnost některých investic považovat prakticky za jistou. Obvykle se za takovou teoretickou investici považují státní pokladniční poukázky. Jedná se o krátkodobé dluhopisy, které vydává centrální banka a slouží ke krytí státního deficitu.

Chování ceny bezrizikového aktiva je popsáno rovnicí

$$dB(t) = B(t) r_f(t) dt, \quad (2.3)$$

kde  $B(t)$  je cena bezrizikového aktiva v čase  $t$  a  $r_f(t)$  je bezriziková úroková míra.

Příklady trajektorií procesů popsaných modely (2.1) a (2.3) zobrazuje Obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Hodnota ceny bezrizikového aktiva s úrokovou mírou  $r_f = 1$  a trajektorie ceny rizikového aktiva s parametry  $\mu = 1$  a  $\sigma = 0,1$  a počáteční hodnotou  $P(0) = 1$ .

### 2.1.1 Modely cen finančních derivátů

Přehledný úvod do problematiky oceňování finančních derivátů poskytuje kniha *Financial Calculus* od autorů Martina Baxtera a Andrewa Rennieho [5]. Odvození Black–Scholesova modelu je srozumitelně zpracováno také v učebnici Alison Etheridge [15].

Při konstrukci modelů cen finančních derivátů v této kapitole budeme uvažovat finanční trh s jedním rizikovým aktivem a s jedním bezrizikovým aktivem (obvykle se v tomto případě předpokládá, že se jedná o hotovost). Definujme portfolio složené z těchto aktiv.

**Definice 28.** *Portfolio*  $(\phi(t), \psi(t))$  je dvojice stochastických procesů  $\phi(t)$  a  $\psi(t)$ , která udává podíly rizikového a bezrizikového aktiva držené v čase  $t$ . Stochastické procesy  $\phi(t)$  a  $\psi(t)$  jsou neanticipativní (podíly aktiv v portfoliu v čase  $t$  mohou být ovlivněny pouze informacemi známými do času  $t$ ).

Předpokládejme, že cena rizikového aktiva se řídí stochastickým procesem  $P(t)$  a cenu bezrizikového aktiva v čase  $t$  označme  $B(t)$ . Pak *hodnota portfolia* v čase  $t$  je dána jako

$$V(t) = \phi(t)P(t) + \psi(t)B(t). \quad (2.4)$$

Procesy  $\phi(t)$  a  $\psi(t)$  nabývají kladných hodnot, nicméně pokud je na trhu povolen tzv. *prodej na krátko* (*short sell*) mohou nabývat i hodnot záporných. Prodává-li na krátko investor rizikové finanční aktivum, jedná se o spekulativní metodu obchodování na finančním trhu, kdy investor očekává pokles ceny tohoto aktiva. Investor si finanční aktivum vypůjčí od věřitele na předem stanovenou dobu a ihned ho prodá třetí straně. Nejpozději za stanovenou dobu investor nakoupí finanční aktivum na trhu a vrátí jej věřiteli. Rozdíl mezi prodejní a nákupní cenou je výsledný zisk nebo ztráta. Kvůli vysoké rizikovosti je prodej na krátko často regulován a v některých zemích dokonce zcela zakázán. Při prodeji na krátko může investor dosáhnout pouze omezeného zisku, ale teoreticky neomezené ztráty.

V literatuře, popisující konstrukci modelu cen finančních derivátů, se často setkáme s pojmem *finanční strategie*. Pojmy *strategie* a *portfolio* bývají v těchto textech používány pro označení toho samého a prolínají se. Proto tyto pojmy budeme v dalším textu této kapitoly chápat jako synonyma a mohou být volně zaměňovány.

Speciálním typem finanční strategie, který využijeme při tvorbě modelu, je samofinancující strategie. Jedná se o takovou strategii, kdy investor v průběhu času nedodává do portfolia další prostředky (ani prostředky nestahuje). Proto změna hodnoty portfolia závisí pouze na změnách cen aktiv držných v portfoliu. Samofinancující strategie je definována pomocí stochastické diferenciální rovnice.

**Definice 29** (Samofinancující strategie). Řekneme, že strategie  $(\phi(t), \psi(t))$  je *samofinancující strategie* právě tehdy, když platí

$$dV(t) = \phi(t) dP(t) + \psi(t) dB(t), \quad (2.5)$$

kde  $B(t)$  je cena bezrizikového aktiva v čase  $t$ ,  $P(t)$  je cena rizikového aktiva v čase  $t$  a  $V(t)$  je hodnota portfolia v čase  $t$ .

**Příklad 2.** Necht se cena rizikového aktiva řídí Wienerovým procesem (tedy  $P(t) = W(t)$  pro všechna  $t$ ) a cena bezrizikového aktiva je konstantní (předpokládejme, že  $B(t) = 1$  pro všechna  $t$ ).

Uvažujme portfolio  $(\phi(t), \psi(t))$ , ve kterém po celou dobu držíme jedno rizikové aktivum a jedno bezrizikové aktivum, tedy  $\phi(t) = \psi(t) = 1$  pro všechna  $t$ . Dokažme, že toto portfolio je samofinancující.

Hodnota portfolia je  $V(t) = W(t) + 1$ . Přírůstky jednotlivých aktiv jsou

$$\begin{aligned} dB(t) &= 0, \\ dP(t) &= dW(t). \end{aligned}$$

Ověřme podmínku (2.5) z Definice 29.

$$\begin{aligned} dV(t) &= d(W(t) + 1) = dW(t), \\ \phi(t) dP(t) + \psi(t) dB(t) &= 1 \cdot dW(t) + 1 \cdot 0 = dW(t). \end{aligned}$$

Podmínka (2.5) tedy platí a portfolio  $(\phi(t), \psi(t))$  je samofinancující.

**Příklad 3.** Předpokládejme, že ceny rizikového a bezrizikového aktiva se řídí stejnými procesy jako v Příkladu 2. Uvažujme portfolio  $(\phi(t), \psi(t))$ , kde  $\phi(t) = 2W(t)$  a  $\psi(t) = -t - W^2(t)$ .

Ověřme zda se jedná o samofinancující portfolio dle Definice 29. Hodnota portfolia je

$$V(t) = \phi(t)P(t) + \psi(t)B(t) = 2W(t) \cdot W(t) - t - W^2(t) = W^2(t) - t.$$

Dosadíme-li do Itôova lemmatu 20 dostaneme

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left[ -1 + 2W(t) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 \right] dt + 2W(t) \cdot 1 \cdot dW \\ &= 2W(t) dW(t). \end{aligned}$$

Zároveň platí

$$\begin{aligned} \phi(t) dP(t) + \psi(t) dB(t) &= 2W(t) dW(t) + (-t - W^2(t)) \cdot 0 \\ &= 2W(t) dW(t). \end{aligned}$$

Podmínka (2.5) tedy platí a portfolio  $(\phi(t), \psi(t))$  je samofinancující.

Dále budeme definovat replikující strategii pro danou pohledávku (např. finanční derivát), jejíž hodnotu označíme  $X(t)$ . Při konstrukci oceňovacího modelu předpokládáme, že na trhu neexistuje arbitráž. Tržní arbitráž je způsob obchodování, při kterém investor s nulovou investicí dosahuje bezrizikového zisku. Pokud na trhu není arbitrážní příležitost, pak hodnota pohledávky  $X(t)$  musí být stejná jako hodnota replikujícího portfolia.

**Definice 30** (Replikující portfolio). Předpokládejme, že na trhu je k dispozici bezrizikové aktivum s cenou  $B(t)$  a rizikové aktivum, jehož cena se řídí procesem  $P(t)$  s volatilitou  $\sigma(t)$ . Uvažujme existenci finančního derivátu, jehož hodnotu v čase vypořádání  $T$  označíme  $X(T)$ . *Replikující portfolio*  $(\phi(t), \psi(t))$  pro tento finanční derivát je taková samofinancující strategie, že platí

$$V(T) = \phi(T)P(T) + \psi(T)B(T) = X(T) \quad (2.6)$$

a  $\int_0^T \sigma^2(t)\phi^2(t) dt < \infty$ . Poznamenejme, že se v literatuře můžeme setkat také s pojmem *replikační portfolio*.

Předpokládáme-li, že na trhu neexistuje arbitráž a zároveň k finančnímu derivátu najdeme replikující portfolio  $(\phi(t), \psi(t))$ , pak pro proces ceny derivátu  $X(t)$  musí platit

$$X(t) = \phi(t)P(t) + \psi(t)B(t). \quad (2.7)$$

Pokud by vztah (2.7) neplatil, bylo by možné najít arbitrážní příležitost. Například, pokud by cena derivátu v čase  $t < T$  byla nižší než hodnota replikujícího portfolia v čase  $t$ , pak by obchodník mohl koupit v čase  $t$  jeden derivát a prodat na krátko  $\phi(t)$  jednotek rizikového aktiva a  $\psi(t)$  jednotek bezrizikového aktiva. Jelikož je replikující portfolio  $(\phi(t), \psi(t))$  samofinancující, je zaručeno, že v čase  $T$  bude mít hodnotu  $X(T)$ , aniž by bylo nutné dodávat další prostředky mezi časem  $t$  a  $T$ . V čase  $T$  tedy hodnota derivátu pokryje náklady na nákup portfolia prodaného na krátko. Obchodník inkasuje zisk ve výši rozdílu  $X(t) - V(t)$  a to bez rizika. Opačný příklad by byl analogický.

Pomocí konceptu představeného v této kapitole je možno modelovat cenu finančního derivátu. K derivátu nalezneme jeho replikující portfolio, využijeme vztah (2.7), cenu aktiv v portfoliu modelujeme dle modelů představených v Kapitole 2 a k ocenění derivátu používáme Itôovo lemma.

Oceňováním finančních derivátů se poprvé zabývali v roce 1973 Fischer Black a Myron Scholes [6] v kontextu oceňování opcí. Jejich oceňovací metoda vešla později ve známost jako Black-Scholesův model. Na dalším rozvoji se podílel také Robert Merton, který představil přístup využívající samofinancující portfolio. Jejich práce byla v roce 1997 oceněna Nobelovou cenou za ekonomii.

## 2.2 Stochastické modelování úrokových měř

Tato kapitola čerpá z obsáhlé monografie Interest Rate Models autorů Briga a Mercuria [7] a z učebnice finanční matematiky slovenských autorů Melicherčíka, Olšarové a Úradníčka působících na Univerzitě Komenského v Bratislavě [46]. Než začneme představovat konkrétní modely úrokových měř, definujeme okamžitou úrokovou míru a seznámíme se s pojmy diskontování a časová struktura úrokové míry, na jejímž vývoji závisí hodnoty finančních derivátů úrokových měř.

Časovou strukturu úrokové míry budeme popisovat pomocí cen bezkupónových dluhopisů. Dluhopis je cenný papír, který vyjadřuje závazek emitenta vůči věřiteli, a je s ním spojeno právo požadovat splacení dlužné částky (tzv. nominální hodnoty) v předem určenou dobu.

**Definice 31** (Úroková míra). Uvažujme dluhopis emitovaný v čase  $t_0$  a splatný v čase  $T$ . Jeho cenu v čase  $t$ , kde  $t_0 \leq t \leq T$ , označíme  $B(t, T)$ . Předpokládejme, že dluhopis má nominální hodnotou jedna, tzn.  $B(T, T) = 1$ . Míru výnosnosti tohoto dluhopisu do času  $T$  označíme  $R(t, T)$ . Platí tedy

$$B(t, T) = e^{-R(t, T) \cdot (T-t)}. \quad (2.8)$$

Funkce  $R(t, T)$  se nazývá  $(T - t)$ -roční úroková míra (dále jen *úroková míra*).

Je tedy zřejmé, že z cen bezkupónových dluhopisů  $B(t, T)$  je možné odvodit hodnoty úrokových měř  $R(t, T)$  a naopak. Platí

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log B(t, T), \quad (2.9)$$

pro  $t_0 \leq t \leq T$ .

Vzhledem k uvedené terminologii můžeme na dluhopis nahlížet jako na finanční derivát, jehož podkladovým aktivem je úroková míra.

Časová struktura úrokové míry vyjadřuje vztah mezi úrokovou mírou a termínem splatnosti příslušného dluhopisu. Její grafickou reprezentací je *výnosová křivka*, která ukazuje závislost výnosu do doby splatnosti (svislá osa) na době do splatnosti dluhopisu (vodorovná osa).

**Definice 32** (Výnosová křivka). Funkce  $R(t, \cdot)$  je nazývána *výnosová křivka*.

Výnosová křivka je konstruována pro dané dluhopisy, které se liší pouze dobou do splatnosti, ale ostatní vlastnosti (jako třeba emitenta) mají stejné.

Úroková míra se používá při spojitém diskontování, které budeme využívat v další části práce při výpočtu kapitálového požadavku ke kreditnímu

riziku protistrany. Diskontování je proces, při kterém je přepočítána (diskontována) budoucí cena aktiva na současnou hodnotu s použitím diskontní míry nazývané také diskontní faktor. Jak už jsme zmínili v Kapitole 2.1, kvůli zjednodušení výpočtů je běžné aproximovat vývoj cen aktiv spojitým procesem a v takovém případě má smysl i spojité diskontování, i když reálné chování finančních instrumentů je diskrétní.

**Definice 33.** Spojitý *diskontní faktor* je dán jako

$$D(T) = \frac{B(t_0, T)}{B(T, T)} = e^{-R(t_0, T) \cdot (T - t_0)}, \quad (2.10)$$

kde  $R(t, T)$  je úroková míra.

Diskontní faktor můžeme také chápat jako cenu dluhopisu s nominální hodnotou jedna.

Uvažujme nyní úrokovou míru na velmi krátký (infinitesimální) časový okamžik. Jedná se o takovou úrokovou míru, kde doba splatnosti se limitně blíží k času emitování dluhopisu.

**Definice 34** (Okamžitá úroková míra). *Okamžitou úrokovou míru*  $r(t)$  definujeme jako

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} - \frac{\log B(t, T) - \log B(t, t)}{T - t} \\ &= - \left. \frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Poslední rovnost ve vztahu (2.11) plyne z definice parciální derivace funkce dvou proměnných. Okamžitá úroková míra představuje bod výnosové křivky, který je umístěn nejvíce vlevo. Při oceňování finančních derivátů úrokových měř v Kapitole 4.3 budeme využívat modely okamžité úrokové míry.

V další části se budeme zabývat forwardovými úrokovými mírami. Ukážeme, že výnosovou křivku můžeme přepočítat na křivku forwardových úrokových měř a naopak. Z matematického hlediska je snadnější modelovat křivku forwardových úrokových měř, což využijeme při konstrukci Hull-Whitova modelu v Kapitole 2.2.4.

Principem forwardového kontraktu je uzavření dohody mezi dvěma stranami o nákupu (nebo prodeji) finančního aktiva za cenu stanovenou v současnosti, přičemž obchod se uskuteční v určený čas v budoucnosti. Forwardová úroková míra je míra mezi dvěma časovými okamžiky v budoucnosti za podmínek dohodnutých v současnosti (v čase  $t_0$ ). Při odvození její hodnoty využíváme předpoklad o neexistenci arbitráže na finančním trhu.

**Definice 35** (Forwardová úroková míra). *Forwardovou úrokovou míru*  $F(t, t_1, T)$  v čase  $t$  na dobu od  $t_1$  do  $T$ , kde platí  $t_0 \leq t \leq t_1 < T$  definujeme jako řešení rovnice

$$e^{R(t, T) \cdot (T-t)} = e^{R(t, t_1) \cdot (t_1-t)} \cdot e^{F(t, t_1, T) \cdot (T-t_1)}. \quad (2.12)$$

Řešení rovnice (2.12) nám dá vztah pro forwardovou úrokovou míru jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(t, T)} &= \frac{1}{B(t, t_1)} \cdot e^{F(t, t_1, T) \cdot (T-t_1)} \\ &\Downarrow \\ F(t, t_1, T) &= \frac{\log B(t, t_1) - \log B(t, T)}{T - t_1}. \end{aligned}$$

Obdobně jako při odvození okamžité úrokové míry nyní definujeme okamžitou forwardovou úrokovou míru.

**Definice 36** (Okamžitá forwardová úroková míra). *Okamžitou forwardovou úrokovou míru*  $f(t, t_1)$  pro  $0 \leq t \leq t_1$  definujeme jako

$$f(t, t_1) = \lim_{T \rightarrow t_1} F(t, t_1, T) = - \left. \frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t_1}. \quad (2.13)$$

Dokažme, že znalost ceny dluhopisu  $B(t, T)$  je ekvivalentní znalosti okamžité úrokové míry  $f(t, T)$ . Platí

$$\begin{aligned} \log B(t, T) - \log B(t, t) &= \int_t^T \frac{\partial \log B(t, s)}{\partial s} ds = - \int_t^T f(t, s) ds \\ &\Downarrow \\ B(t, T) &= e^{- \int_t^T f(t, s) ds}. \end{aligned}$$

Navíc platí  $r(t) = f(t, t)$ , což využijeme při modelování okamžité úrokové míry pomocí Hull-Whitova modelu v Kapitole 2.2.4. Znamená to také, že výnosová křivka  $R(t, \cdot)$  a křivka forwardových úrokových měr  $f(t, \cdot)$  mají stejný počáteční bod  $r(t)$ . Nicméně dál se křivky mohou lišit a snadno se dá odvodit, že mezi nimi existuje vztah

$$f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T}. \quad (2.14)$$



### 2.2.1 Modely okamžité úrokové míry

Při zpracovávání problematiky modelů okamžité úrokové míry jsme čerpali z publikace o metodách oceňování finančních derivátů autorů Daniela Ševčoviče, Beáty Stehlíkové a Karola Mikuly [66].

V Black-Scholesově modelu se používá předpoklad konstantní úrokové míry. Nicméně v realitě na finančním trhu nemáme jistotu jak se bude úroková míra vyvíjet. Je tedy přirozené uvažovat o úrokové míře jako o stochastickém procesu a konstruovat její stochastické modely. Přiblížíme se tak více k realitě. V dalších částech Kapitoly 2.2 budeme tedy předpokládat stochastické chování úrokové míry.

Zaměříme se na modely okamžité úrokové míry, jelikož je budeme využívat v další části práce při ocenění derivátů úrokových měr. Tyto modely jsou v literatuře často nazývané *modely krátkodobých úrokových měr*. U okamžité úrokové míry budeme předpokládat stochastické chování stejně jako u jiných finančních aktiv, ale na rozdíl od akcií nebo komodit vykazuje chování úrokových měr následující příznačné vlastnosti. Úrokové sazby se pohybují v určitém rozmezí a mají tendenci se vracet k určité rovnovážné hodnotě. Tento jev se nazývá *mean reversion*, jak už bylo zmíněno v Kapitole 1.1.4. Stochastické modely, které popisují chování úrokových měr musí tedy brát v úvahu výše uvedené vlastnosti.

Modely krátkodobých úrokových měr se dělí na jednofaktorové a vícefaktorové. Jednofaktorové modely popisují vývoj krátkodobých úrokových měr na základě pouze jednoho zdroje nejistoty, který je modelován pomocí Wienerova procesu. Vícefaktorové modely poskytují na jednu stranu více volnosti a možností v modelování vývoje úrokové míry, na druhou stranu jejich kalibrace, ale i interpretace, je mnohem složitější. Pro potřeby této práce se omezíme jenom na modely jednofaktorové.

Jednofaktorové modely krátkodobých úrokových měr předpokládají, že okamžitá úroková míra  $r(t)$  je charakterizovaná pomocí řešení stochastické diferenciální rovnice, která má tvar

$$dr(t) = \mu(t, r) dt + \sigma(t, r) dW(t), \quad (2.15)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces. Koeficient  $\mu(t, r)$  určuje drift ve vývoji úrokové míry, tj. trend, kterým by se úroková míra řídila za předpokladu neexistence náhodných vlivů. Volatilita  $\sigma(t, r)$  určuje vlastnosti náhodných výchylek. Proces  $\sigma(t, r)$  se v literatuře nazývá také difuzní koeficient.

Jeden z prvních modelů úrokové míry použil v roce 1973 Robert C. Merton v článku [50] k odvození modelu cen bezkupónových dluhopisů. Parametry tohoto modelu nejsou závislé na čase, jedná se tedy o Wienerův proces

s driftem (definovaný v Definici 9)

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dW(t). \quad (2.16)$$

Mertonův model předpokládá, že změny úrokové míry mají normální rozdělení, což plyne z vlastností Wienerova procesu. Nevýhodou Mertonova modelu je absence mean reversion vlastnosti.

### 2.2.2 Vašíčkův model

Model, který představíme v této kapitole, uveřejnil původem český matematik Oldřich Vašíček v roce 1977 v článku [74], kde ho využil k odvození modelu cen bezkupónových dluhopisů. Tento model se stal velice oblíbeným a často citovaným. Mnoho autorů dalších modelů krátkodobých úrokových měr vycházelo z Vašíčkova modelu. Vašíčkův model předpokládá, že okamžitá úroková míra  $r(t)$  je charakterizovaná pomocí řešení stochastické diferenciální rovnice, která má tvar

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t)) dt + \sigma dW(t) \quad (2.17)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  jsou konstanty, jejichž význam je následující:

- $\theta$  je limitní úroková míra,
- $\kappa$  je rychlost reverze k limitní úrokové míře,
- $\sigma$  je volatilita úrokové míry.

Drift této rovnice je  $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r(t))$  a volatilita je  $\sigma(t, r) = \sigma$ . Uvedený model má vlastnost mean reversion, což znamená, že drift táhne proces krátkodobých úrokových měr k průměrné hodnotě dané konstantou  $\theta$ . Daný proces je Ornstein-Uhlenbeckův proces definovaný v Kapitole 1.1.4.

Mezi výhody Vašíčkova modelu patří existence explicitního vyjádření odhadů parametrů  $\theta$ ,  $\kappa$  a  $\sigma$  metodou maximální věrohodnosti. Na druhou stranu za nevýhodu bývá považováno, že Vašíčkův model připouští i záporné úrokové míry. K tomuto jevu dochází v případě, kdy se úroková míra přiblíží nule, přičemž volatilita je stále táž konstanta a stochastický člen může způsobit pokles do záporných hodnot.

### 2.2.3 CIR model

Možnost záporných úrokových měr odstraňuje model, který na bázi Vašíčkova modelu vyvinuli John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll a Stephen A. Ross a publikovali v roce 1985 v článku [10]. Autoři modifikovali difuzní koeficient ve Vašíčkově modelu tak, že je úměrný úrokové míře. Cox-Ingersoll-Rossův model (CIR model) je ve tvaru

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t). \quad (2.18)$$

Povšimněme si, že při malých úrokových mírách je malá také volatilita a převažuje vliv driftu. Kdyby byla úroková míra dokonce nulová, bude volatilita také nulová a změna úrokové míry bude dána pouze driftem, který bude v tomto případě kladný.

### 2.2.4 Hull-Whitův model

Modely uvedené v Kapitolách 2.2.2 a 2.2.3 nereflektují aktuální časovou strukturu úrokové míry. Na tuto nevýhodu reagovali John C. Hull a Alan White, kteří v roce 1990 publikovali článek [28] s vlastním modelem. Podrobnosti o Hull-Whitově modelu lze nalézt v již zmiňované publikaci [7]. Hull a White později zveřejnili i zobecnění svého modelu v textu [29].

Autoři modelu rozšiřují Vašíčkův model úpravou parametru limitní úrokové míry  $\theta$  tak, že se parametr mění v čase a reflektuje pozorované aktuální hodnoty výnosové křivky. Poznamenejme, že existuje i verze Hull-Whitova modelu odvozená z CIR modelu, ale tou se v této práci nebudeme zabývat. Hull-Whitův model okamžité úrokové míry je dán stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr(t) = (\theta(t) - \alpha r(t)) dt + \sigma dW(t), \quad (2.19)$$

kde  $\alpha$  a  $\sigma$  jsou konstanty a  $\theta(t)$  je deterministická funkce času definovaná jako

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \alpha f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (2.20)$$

kde  $f(t, T)$  je okamžitá forwardová úroková míra sjednaná v čase  $t$  pro čas  $T$ .

Okamžitou forwardovou úrokovou míru budeme určovat z cen bezkupónových dluhopisů s nominální hodnotou jedna a různými maturitami. Tyto ceny můžeme pozorovat na trhu. Využijeme vztah (2.13).

Stejně jako Vašíčkův model má i tento model vlastnost mean reversion, ale limitní úrokovou míru tentokrát reprezentuje funkce  $\theta(t)$  určená počáteční křivkou forwardových úrokových měr.

Hull a White předpokládali, že úroková míra má normální rozdělení, čímž připustili možnost záporných hodnot. Jedná se o stejný nedostatek jako jsme zmínili u Vašíčkova modelu. Na druhou stranu mezi výhody Hull-Whitova modelu patří možnost kalibrace s využitím počáteční výnosové křivky, což zohledňuje ceny dluhopisů pozorované na trhu. Díky této vlastnosti si model získal širokou oblibu.

Při aplikaci Hull-Whitova modelu v Kapitole 4.4 budeme chtít simulovat celou výnosovou křivku  $R(t, \cdot)$ . Brigo a Mercurio v [7] a Hull v [27] vysvětlují, jak je možné popsat dynamiku výnosové křivky, pokud předpokládáme, že okamžitá úroková míra se řídí Hull-Whitovým modelem. Naznačíme hlavní myšlenku jejich přístupu a uvedeme výsledný vztah pro výnosovou křivku. Pro podrobnější odvození odkazujeme na literaturu.

Je-li hodnota okamžité úrokové míry známý stochastický proces, můžeme odvodit cenu bezkupónového dluhopisu s nominální hodnotou jedna vyplácenou v čase  $T$  pomocí následujícího vztahu. Platí, že cena tohoto dluhopisu v čase  $t$  je dána očekáváním

$$B(t, T) = \mathbb{E}_t \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \right), \quad (2.21)$$

kde  $\mathbb{E}_t$  značí střední hodnotu podmíněnou informacemi známými do času  $t$ .

Za předpokladu normality okamžité úrokové míry  $r(s)$ , pro všechna  $t \leq s \leq T$ , můžeme určit očekávání v rovnici (2.21). Vztah pro výnosovou křivku pak odvodíme z očekávané ceny dluhopisu dosazením do rovnice (2.9) a dostáváme

$$\begin{aligned} R(t, T) = & -\frac{1}{T-t} \left( \log \frac{B(0, T)}{B(0, t)} + \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} f(0, t) \right) + \\ & + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3(T-t)} \left( e^{-\alpha T} - e^{-\alpha t} \right)^2 \left( e^{2\alpha t} - 1 \right) + \\ & + \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha(T-t)} r(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde  $B(t, T)$  je cena bezkupónového dluhopisu v čase  $t$  s nominální hodnotou jedna vyplácenou v čase  $T$ ,  $f(t, T)$  označuje okamžitou forwardovou úrokovou míru sjednanou v čase  $t$  pro čas  $T$  a  $r(t)$  je okamžitá úroková míra daná Hull-Whitovým modelem. Ze vztahů (2.21) a (2.22) vidíme, že celá výnosová křivka (a tedy časová struktura úrokové míry) je charakterizována pouze dynamikou okamžité úrokové míry.

# 3

## Teorie portfolia

*Portfolio* je soubor finančních aktiv držených fyzickou nebo právnickou osobou zvanou *investor*.

Teorie portfolia

- definice investování na finančních trzích
- definice investora
- popis tvorby portfolia

Teorie portfolia se zabývá volbou optimálního portfolia.

### 3.1 Základní charakteristiky portfolia

---

V teorii portfolia se investoři snaží minimalizovat investiční riziko a zároveň maximalizovat investiční výnos. Avšak se zvyšováním očekávaného výnosu je spojen i růst rizika, proto základním problémem při optimalizaci portfolia je hledání kompromisu mezi maximalizací výnosu a minimalizací rizika spojeného s investováním. V následující části popíšeme a definujeme tyto základní charakteristiky portfolia.

#### 3.1.1 Výnosnost

*Míra výnosnosti* (nebo *relativní výnosnost*) aktiva je charakteristika, která udává zisk nebo ztrátu z investice za pevně stanovené období vyjádřená v poměru k množství investovaných prostředků.

**Definice 37.** Investujeme-li  $Y$  korun do nějakého aktiva  $j$  v čase  $t$ , pak korunová hodnota investice v čase  $t + \Delta t$  bude  $[1 + r_j(t, t + \Delta t)]Y$ , kde  $r_j(t, t + \Delta t)$  definujeme jako *míru výnosnosti*.

Relativní výnosnost bývá často označována pouze jako *výnosnost*. Vzhledem k tomu, že výnosnost aktiva je pro investora nejistá (s výjimkou bez-

rizikového aktiva), budeme ji v teorii portfolia chápat jako náhodnou veličinu. Rozdělení pravděpodobnosti této náhodné veličiny nelze určit, nicméně v teorii portfolia se obejdeme bez znalosti rozdělení a využijeme pouze dále uvedené základní charakteristiky náhodné veličiny.

První z těchto charakteristik bude střední hodnota výnosnosti aktiva, kterou označíme  $E(r_j) = \mu_j$ . V teorii portfolia se ve spojitosti s touto charakteristikou setkáváme s pojmem *očekávaná výnosnost*. Rozptyl výnosnosti aktiva označíme  $D(r_j) = \sigma_j^2$ .

Následující značení využijeme při definicích charakteristik portfolia. Necht  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$  značí náhodný vektor, jehož složky jsou výnosnosti aktiv držných v portfoliu  $p$ . Relativní podíly aktiv, ze kterých se skládá portfolio, se nazývají *váhy* portfolia. Vektor vah portfolia budeme značit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  a přirozeně platí, že  $\sum_{j=1}^n X_j = 1$ . Mezi základní charakteristiky portfolia patří jeho *výnosnost*, která je dána jako  $r_p = \mathbf{X}^T \mathbf{r} = \sum_{j=1}^n X_j r_j$  a je rovněž náhodnou veličinou. Jedním z faktorů pro výběr portfolia v Markowitzově teorii je *očekávaná výnosnost portfolia*, kterou označíme  $E(r_p) = \mu_p$  a je zřejmé, že platí  $\mu_p = \sum_{j=1}^n X_j \mu_j$ .

### 3.1.2 Riziko

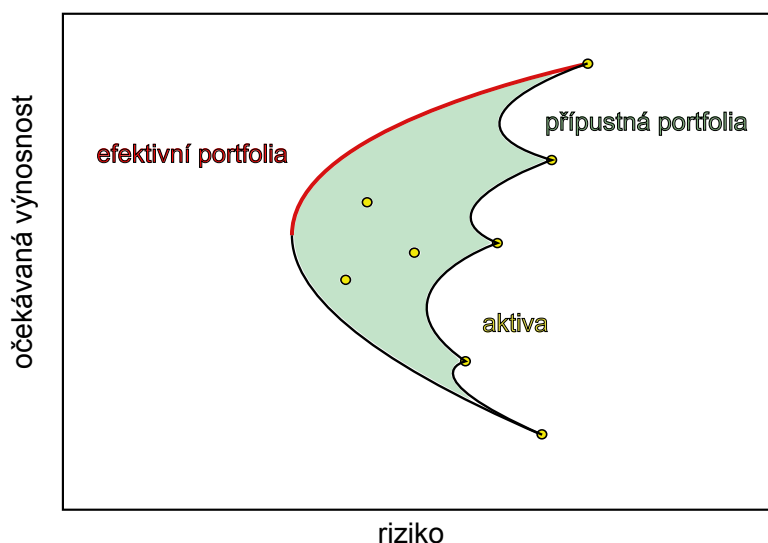
*Riziko* popisuje míru nejistoty, že se skutečná výnosnost investice bude lišit od očekávané výnosnosti. *Riziko aktiva* definujeme jako směrodatnou odchylku výnosnosti aktiva a označíme ho  $\sqrt{D(r_j)} = \sigma_j$ . Analogicky je *riziko portfolia* definováno jako směrodatná odchylka výnosnosti portfolia a značeno  $\sqrt{D(r_p)} = \sigma_p$ .

Riziko celého portfolia v sobě zahrnuje nejen rizika jednotlivých aktiv v portfoliu, ale také riziko z vzájemné závislosti výnosností jednotlivých aktiv. Míra vzájemné závislosti dvou výnosností je mimo jiné popsána jejich kovariancí. Kovarianci výnosnosti aktiva  $j$  a výnosnosti aktiva  $k$  označíme  $C(r_j, r_k) = \sigma_{jk}$ . Snadno se dá dokázat, že  $\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n X_j X_k \sigma_{jk}}$ . Riziko portfolia je dalším faktorem pro výběr portfolia v Markowitzově teorii.

## 3.2 Klasická teorie portfolia

Základy klasické teorie portfolia položil Harry Markowitz svým článkem v roce 1952 [44], ve kterém upozornil na nutnost zohledňovat při výběru portfolia nejenom očekávanou výnosnost, ale i riziko změny výnosnosti. Jeho největším přínosem bylo kvantifikování očekávaného výnosu a rizika portfolia. Dalším přínosem byl matematický důkaz výhod diverzifikace, které byly do

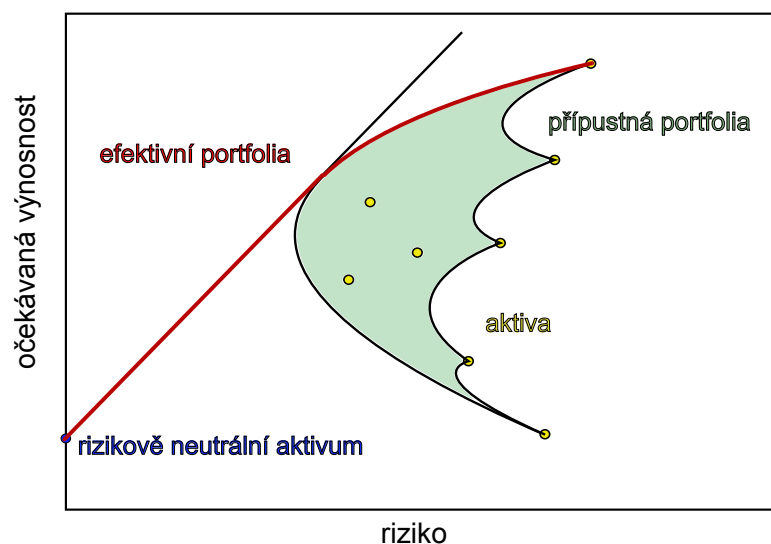
té doby chápány pouze intuitivně. Markowitz zkonstruoval množinu všech dostupných portfolií v prostoru výnos – riziko, zavedl pojem *efektivní množina portfolií*, ze které investor vybírá optimální portfolio pomocí indiferenčních křivek popisujících investorův vztah k riziku. Konstrukcí množiny dostupných (nebo přípustných) portfolií se bude věnovat Kapitola 3.2.1. Na Obrázku 3.1 je znázorněna množina přípustných portfolií a množina efektivních portfolií v prostoru výnosnost – riziko.



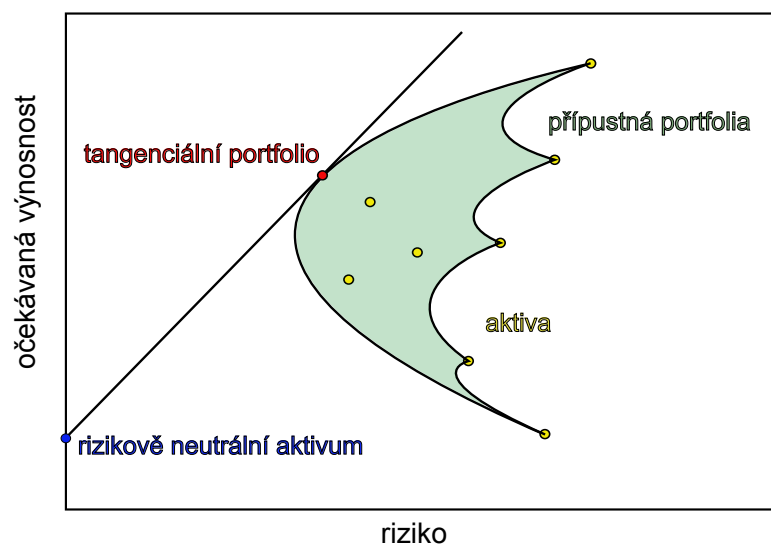
Obrázek 3.1: Množina přípustných portfolií a množina efektivních portfolií v prostoru výnosnost – riziko dle Markowitzovy teorie portfolia.

V roce 1958 rozšířil James Tobin [72] Markowitzův model o možnost investování do bezrizikového aktiva. *Bezrizikové aktivum* má jistý výnos a tedy nulové riziko. To má velký vliv především na efektivní množinu portfolií, která je tvořena tečnou k původní Markowitzově efektivní množině procházející bezrizikovým aktivem, což je zobrazeno na Obrázku 3.2. V bodě dotyku pak leží tzv. tangenciální portfolio (viz Obrázek 3.3). Postup investora při hledání optimálního portfolia shrnuje Tobinův separační teorém, který se později vžil v souvislosti s CAPM, který bude popsán v další části. Investor prvně určí tangenciální portfolio a následně ho zkombinuje s bezrizikovým aktivem podle svých rizikových preferencí.

*Capital Asset Pricing Model* (CAPM) vyvinuli nezávisle na sobě autoři Sharpe [68], Lintner [43] a Mossin [53] v letech 1964–1966. CAPM zkoumá chování trhu v případě, že se všichni investoři chovají podle Markowitzovy teorie. Zároveň vychází z Tobinova modelu, protože zahrnuje bezrizikové akti-



Obrázek 3.2: Tobinův model - množina efektivních portfolií v případě, že není povolen prodej na krátko.



Obrázek 3.3: Tobinův model - zobrazení tangenciálního portfolia (rizikového portfolia, do kterého dle Separčního theoremu investují všichni investoři při tvorbě optimálního portfolia).



vum. CAPM stojí na několika výchozích předpokladech, které se dají shrnout do následujících tří:

- kapitálový trh je efektivní,
- investoři při sestavování portfolia využívají Markowitzův přístup,
- investoři mají homogenní očekávání.

Předpoklad homogenity očekávání investorů má za následek, že všichni investoři drží stejné rizikové portfolio. Optimální portfolia investorů se liší pouze v poměru, v jakém kombinují rizikové portfolio a bezrizikové aktivum v závislosti na svých rizikových preferencích. Toto shrnuje následující věta.

**Věta 38.** (*Separční teorém*) *Optimální kombinace rizikových cenných papírů může být stanovena bez jakékoliv znalosti investorových postojů k riziku a výnosnosti.*

Předpokládáme-li rovnováhu trhu, bývá tangenciální portfolio nazýváno jako *tržní portfolio*. Důležitým důsledkem pak je, že váha každého cenného papíru v tržním portfoliu je rovna jeho tržní ceně. Tento poznatek budeme později využívat při konstrukci spojitého rovnovážného modelu.

### 3.2.1 Markowitzova teorie portfolia

Abychom blíže pochopili pojmy používané v Kapitole 3.2 přiblížíme na tomto místě jejich odvození.

### 3.2.2 Váhy tržního portfolia

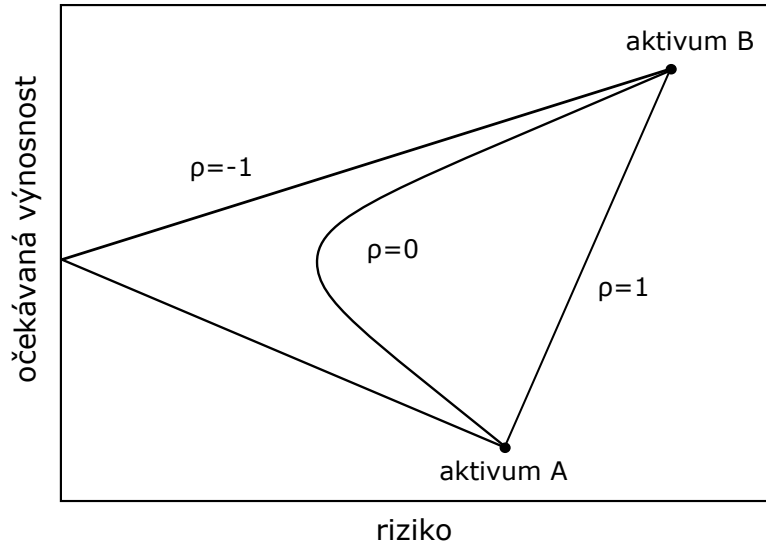
## 3.3 Dynamická teorie portfolia

---

Hlavní výhodou dynamického modelu pro výběr aktiv v portfoliu je přizpůsobování se měnícím se podmínkám trhu a proto je více realistický než model statický. Naproti tomu je dynamický model komplikovanější, hůře interpretovatelný a při jeho využití se nevyhneme složitější matematické teorii, kterou je stochastický kalkul.

### 3.3.1 Mertonův model

První článek zabývající se dynamickou teorií portfolia napsal Robert Carhart Merton v roce 1971 [48]. Merton předpokládal platnost rovnovážného modelu CAPM a dál tuto teorii rozšířil o spojitý model pro cenu aktiva využívající



Obrázek 3.4: Odvození množiny přípustných portfolií dle Markowitzovy teorie portfolia.

stochastické procesy. Přitom ukázal, že zůstává zachována platnost všech závěrů z teorie CAPM, zejména pak separačního teorému. Což znamená, že bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat jen dvě aktiva – bezrizikové aktivum s mírou výnosnosti  $r_f$  a tržní portfolio (které můžeme považovat za jedno rizikové aktivum).

Merton předpokládá, že hodnota tržního portfolia  $P(t)$  se řídí stochastickým procesem

$$dP(t) = P(t) \mu_p dt + P(t) \sigma_p dW(t)$$

kde  $W(t)$  je jednorozměrný Wienerův proces a  $\mu_p$ ,  $\sigma_p$  jsou konstanty.

V každém čase  $t$  vybírá investor své optimální portfolio volbou vah portfolia. Majetek, který investor investuje do optimálního portfolia v čase  $t$ , označíme  $w(t)$ . Váhu tržního portfolia v optimálním portfoliu označíme  $X_p(t)$  a váhu bezrizikového aktiva označíme  $X_f(t) = (1 - X_p(t))$ . Proces popisující vývoj investorova majetku je dán jako

$$\frac{dw(t)}{w(t)} = X_p(t) \frac{dP(t)}{P(t)} + (1 - X_p(t)) r_f dt.$$

Merton odvodil explicitní řešení této stochastické diferenciální rovnice za předpokladu, že charakteristiky výnosnosti aktiva jsou konstantní.

Avšak Mertonův spojitý rovnovážný model vykazuje inkonzistenci, což dokázali Ohlson a Rosenberg [62] hned v roce 1976. Ještě před zveřejněním

jejich článku byla uveřejněna ve stejném periodiku Mertonova reakce [51], ve které hájí své poznatky a poukazuje na jejich nepochopení ze strany oponentů. Ohlson a Rosenberg [62] poukazují na rozpor mezi předpokladem, že střední hodnota a rozptyl výnosnosti aktiva jsou konstantní, a předpokladem tržní rovnováhy. Podrobněji bude tento paradox rozebrán v Části 3.4.

## 3.4 Ohlson-Rosenbergův paradox

V této kapitole představíme základní poznatky z článku Ohlsona a Rosenberga [62], který byl publikován v roce 1976 v *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Ohlson a Rosenberg jako první poukázali na nekonzistenci Mertonova spojitého modelu [48] spočívající v rozporu předpokladů.

### 3.4.1 Značení a předpoklady

Na začátek zavedeme značení a uvedeme základní definice a předpoklady. Uvažujme množinu  $n$  různých aktiv na daném trhu a označme  $\mathcal{T}$  množinu všech uvažovaných časů (diskrétní nebo spojitou). Necht  $I_t$  značí množinu všech investorů na trhu v čase  $t \in \mathcal{T}$ . Cenu aktiva  $j$  v čase  $t$  označíme  $P_j(t)$  a  $\mathbf{P}(t) = (P_1(t), \dots, P_n(t))^T$  je vektor cen aktiv v čase  $t$ . Analogicky označíme  $\mathbf{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_n(t))^T$  vektor podílů aktiv v čase  $t$ . Potom tržní hodnota aktiva  $j$  je rovna  $V_j(t) = P_j(t)N_j(t)$ .

Míru výnosnosti aktiva  $j$ , které drží investor v portfoliu v časovém intervalu  $(t, t + \Delta t)$  označíme  $r_j(t, t + \Delta t)$ . Jak bylo zmíněno výše výnosnost chápeme jako náhodnou veličinu a o její distribuční funkci v čase  $t$  vyslovíme tři následující předpoklady:

1. *Stacionarita*: distribuční funkce výnosnosti je stejná ve všech časech  $t$ ,
2. *Markovovská vlastnost*: pro každé  $t$  je distribuční funkce výnosnosti nezávislá na všech cenách aktiva pozorovaných před časem  $t$ ,
3. *Homogenita*: distribuční funkce výnosnosti je stejná pro všechny investory z množiny  $I_t$ .

Tyto předpoklady jsou konzistentní s předpoklady CAPM.

Označme  $w_j(i, t)$  optimální objem prostředků investovaných do aktiva  $j$  investorem  $i$  v čase  $t$ . Necht  $\mathbf{w}(i, t) = (w_1(i, t), \dots, w_n(i, t))$  představuje optimální alokaci prostředků investora  $i$  držících v portfoliu všech aktiv. Funkce  $w_j(i, t)$  tedy zohledňuje (rizikové) preference investora  $i$  v čase  $t$ .

Nyní můžeme definovat dynamickou tržní rovnováhu jako stav, kdy nabídka a poptávka jsou v dokonalé rovnováze v každém čase  $t$ . Tento stav se také nazývá *vyčištění trhu*.

**Definice 39** (Dynamická tržní rovnováha). Řekneme, že kapitálový trh je v *dynamické rovnováze* právě tehdy, když pro každý čas  $t \in \mathcal{T}$ , každé podkladové aktivum  $j$  a každého investora  $i$  existuje vektor cen aktiv  $\mathbf{P}(t)$  takový že

$$\sum_{i \in I} w_j(i, t) = N_j(t)P_j(t) = V_j(t).$$

Tyto ceny budeme nazývat *rovnovážné ceny*.

Důsledek Tobinova separačního teorému shrňme jako vlastnost pro prostředky investované do portfolia, kterou budeme dále využívat v důkazu inkonzistence předpokladů spojitého modelu pro ceny aktiv.

**Definice 40** (Vlastnost separace). Vektorová funkce pro optimální alokaci investorových prostředků do všech aktiv na trhu  $\mathbf{w}(i, t)$  respektuje *vlastnost separace* právě tehdy, když existuje vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  takový, že  $\sum_{j=1}^n X_j = 1$ , a existují skalární parametry  $\lambda(i, t)$  takové, že

$$\mathbf{w}(i, t) = \lambda(i, t)\mathbf{X},$$

pro všechny  $i \in I$  a všechny  $t \in \mathcal{T}$ .

Vlastnost separace definovaná Definicí 40 říká, že vektor  $\mathbf{X}$  představuje váhy tržního portfolia (které se v čase nemění) a parametr  $\lambda(i, t)$  zohledňuje rizikové preference investora.

### 3.4.2 Rozpor mezi předpoklady

Budeme-li předpokládat rovnováhu na trhu a stacionaritu distribuční funkce výnosností, dospějeme ke sporu, jak ukazuje následující věta a důsledek.

**Věta 41.** *Nechť  $\mathbf{P}(t)$  pro všechny  $t \in \mathcal{T}$  jsou rovnovážné ceny. Dále předpokládejme, že na trhu platí vlastnost separace (Definice 40). Pak*

$$\Pr \left( \frac{N_j(s)P_j(s)}{N_j(t)P_j(t)} = \frac{N_k(s)P_k(s)}{N_k(t)P_k(t)} \right) = 1 \quad (3.1)$$

*pro všechny časy  $s, t \in \mathcal{T}$  a pro každé aktivum  $j$  a  $k$ .*

*Důkaz.* Podle Definice 40 platí

$$w_j(i, t) = \lambda(i, t)X_j \quad (3.2)$$

pro všechny časy  $t \in \mathcal{T}$ , všechny investory  $i \in I$  a pro každé aktivum  $j$ .

Předpoklad dynamické rovnováhy na trhu dává

$$\sum_{i \in I} w_j(i, t) = N_j(t)P_j(t) \quad (3.3)$$

pro všechny časy  $t \in \mathcal{T}$  a pro každé aktivum  $j$ .

Dosazením vztahu (3.2) do rovnice (3.3) a vzhledem k tomu, že váhy  $X_j$  jsou stejné pro všechny investory  $i \in I$ , dostáváme

$$N_j(t)P_j(t) = \sum_{i \in I} \lambda(i, t)X_j = X_j \sum_{i \in I} \lambda(i, t).$$

Proto platí

$$\frac{N_j(t)P_j(t)}{N_k(t)P_k(t)} = \frac{X_j \sum_{i \in I} \lambda(i, t)}{X_k \sum_{i \in I} \lambda(i, t)} = \frac{X_j}{X_k},$$

což je nezávislé na čase  $t$ . Z tohoto tvrzení zřejmě plyne vztah (3.1).  $\square$

**Důsledek 42.** *Necht*

$$r_j(t, t + \Delta t) = \frac{P_j(t + \Delta t) - P_j(t)}{P_j(t)} = \frac{P_j(t + \Delta t)}{P_j(t)} - 1.$$

*Budeme předpokládat  $N_j(t) = N_j$  pro každé aktivum  $i$  a všechna  $t \in \mathcal{T}$ . Z Věty 41 plyne*

$$\begin{aligned} \Pr \left( \frac{P_j(s)}{P_j(t)} = \frac{P_k(s)}{P_k(t)} \right) = 1 &\implies \Pr \left( \frac{P_j(t + \Delta t)}{P_j(t)} = \frac{P_k(t + \Delta t)}{P_k(t)} \right) = 1 \\ &\implies \Pr (r_j(t, t + \Delta t) = r_k(t, t + \Delta t)) = 1, \end{aligned}$$

*pro všechna  $t \in \mathcal{T}$  a pro všechna aktiva  $j$  a  $k$ . Proto jsou aktiva  $j$  a  $k$  vzájemně dokonale zastupitelné.*

Důsledek 42 vede k degeneraci trhu, což poukazuje na významný rozpor mezi předpoklady.

Ve své době se Ohlson a Rosenberg nesetkali s pochopením. Důkazem toho je okamžité odmítnutí jejich závěrů ze strany Mertona publikované v článku [51], kde tvrdí, že rozporu bylo docíleno jen díky nereálným předpokladům. Ve skutečnosti reaguje jen na důsledky nikoli na důkaz stěžejní věty článku [62]. Za povšimnutí stojí, že Mertonova reakce vychází ještě před samotným článkem Ohlsona a Rosenberga.

### 3.5 Stochastická teorie portfolia

V této kapitole jsou shrnuty některé základní poznatky Stochastické teorie portfolia, která byla inspirací pro studium spojitých modelů v teorii portfolia uvedených v této práci. Budeme diskutovat o výhodách a nevýhodách tohoto přístupu.

Pojem *Stochastická teorie portfolia* (SPT) zavedl Robert Fernholz ve své monografii [20]. Jedná se o matematickou teorii, která zkoumá chování portfolia jakožto i strukturu kapitálového trhu. Hlavní výhodou oproti klasické teorii portfolia jsou méně striktní předpoklady, které dovolují konzistentní přístup bez výskytu Ohlson-Rosenbergova paradoxu [62].

Na rozdíl od Mertonova modelu se v SPT nepředpokládá tržní rovnováha. Parametry stochastického procesu, kterým se řídí cena aktiva, jsou v SPT také stochastické procesy nikoli konstanty jako v Mertonově přístupu. Dokonce, na rozdíl od klasického přístupu, se v SPT neklade důraz na předpoklad neexistence tržní arbitráže, přičemž se v práci diskutuje o vlastnosti trhu vedoucí k existenci arbitráže.

Pro vývoj ceny aktiva Fernholz používá následující spojitý logaritmický model

$$d \log P_j(t) = \gamma_j(t) dt + \sum_{k=1}^n \xi_{jk}(t) dW_k(t),$$

kde  $P_j(t)$  je cena aktiva  $j$  v čase  $t$ ,  $\gamma_j(t)$  a  $\xi_{jk}(t)$  jsou stochastické procesy a  $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^T$  je  $n$ -dimenzionální Wienerův proces. Proces  $\gamma_j(t)$  se nazývá *míra růstu* a  $\xi_{jk}(t)$  se nazývá proces *volatility*. Míru růstu v logaritmickém modelu je možno odvodit z míry výnosnosti ve standardním modelu a naopak podle následujícího vztahu

$$\mu_j(t) = \gamma_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \xi_{jk}^2(t).$$

Robert Fernholz uvádí, že v dlouhém časovém horizontu je chování hodnoty portfolia lépe popsáno mírou růstu než mírou výnosnosti. Uvažujeme-li kovarianční matici  $\Sigma$  výnosností aktiv, pak matice volatilit  $\xi$  je definována jako

$$\Sigma = \xi \xi^T.$$

Tedy  $\xi$  je maticová odmocnina z  $\Sigma$ .

Jedním ze základních pojmů v SPT jsou *portfolio generující funkce*, pomocí nichž jsou tvořeny portfolia, které mají dobře definované výnosnosti. Podrobnější informace je možno najít v knize [20] a článku [37].

Studium SPT nás motivovalo k hledání vhodného spojitého modelu pro popis cen aktiv v portfoliu, který rovněž odstraní Ohlson-Rosenbergův paradox a zároveň bude zachovávat platnost poznatků teorie CAPM. Tento model budeme konstruovat v Kapitole 3.7.

### 3.6 Paradox v teorii portfolia a Věta o separaci do dvou fondů

---

Nekonzistencí obvyklých předpokladů teorie portfolia se v roce 2009 zabýval také John Stalker profesor na univerzitě v Princetonu. V preprintu [71] uvádí algebraický důkaz inkonzistence předpokladů, kde využívá Tobinovu *Větu o separaci do dvou fondů*. V následujícím textu budou tyto myšlenky rozpracovány.

Uvažujme následující předpoklady obvyklé pro teorii portfolia:

1. Ceny podkladových aktiv se řídí Itôovými procesy, které mají konstantní očekávané míry výnosnosti a konstantní kovariance výnosností.
2. Neexistují žádná omezení na množství aktiv držených investorem. Aktiva jsou navíc nekonečně dělitelná.
3. Neexistují žádné transakční náklady a cena prodeje a nákupu podkladového aktiva se neliší.
4. Investoři se chovají podle Markowitzovy teorie, což znamená, že minimalizují riziko svého portfolia pro dané očekávané míry výnosnosti.
5. Na trhu existuje pouze jedno bezrizikové aktivum. Kovarianční matice rizikových aktiv má maximální hodnotu.
6. Na trhu existuje rovnováha a každý investor nabízející aktivum najde kupce a naopak.

Dále dokážeme, že tyto předpoklady jsou nekonzistentní pro trh s více než dvěma rizikovými aktivy. K tomu využijeme Větu o separaci do dvou fondů, kterou poprvé dokázal James Tobin ve svém článku [72]. Tobin předpokládal platnost předpokladů CAPM a zároveň zahrnul existenci bezrizikového aktiva. Naproti tomu v knize Williama Sharpeho [67] a v článku Roberta Mertona [47] najdeme podobné závěry bez předpokladu existence bezrizikového aktiva. Merton navíc tyto myšlenky zobecňuje pro více než dva fondy [49]. Podrobnějším rozbor věty o dvou fondech je uveden v knize [9].

**Věta 43** (Věta o separaci do dvou fondů). *Optimální portfolio každého investora lze získat jako kombinaci dvou fondů.*

Na trhu s  $m$  podkladovými aktivy uvažujeme dvě portfolia (neboli dva fondy) a jejich váhy označme  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$  a  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ . Z těchto dvou fondů pak můžeme sestavit optimální portfolia všech investorů na trhu. Množinu všech investorů označme  $I$  a pro každého investora uvažujeme jeho rizikové preference, které určují jeho optimální portfolio, a popíšme je pomocí parametrů  $\alpha_i(t)$  a  $\beta_i(t)$ . Optimální portfolio  $i$ -tého investora bude zahrnovat  $\alpha_i a_j + \beta_i b_j$  množství  $j$ -té akcie.

Váhy  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  dvou uvažovaných fondů závisí pouze na očekávaných výnosech a riziku podkladových aktiv na trhu, které jsou v čase konstantní dle předpokladu 1. Parametry  $\alpha_i(t)$  a  $\beta_i(t)$  závisí na individuálních preferencích jednotlivých investorů (např. rizikové preference nebo objem investic) a mohou se lišit. Tyto preference se mohou v čase měnit a tak parametry mohou záviset i na čase.

Označme  $A(t)$  součet všech parametrů  $\alpha_i(t)$  pro všechny investory a analogicky  $B(t)$  součet parametrů  $\beta_i(t)$ . Tedy  $A(t) = \sum_{i \in I} \alpha_i(t)$  a  $B(t) = \sum_{i \in I} \beta_i(t)$ . Pak celková hodnota držená všemi investory v  $j$ -tém aktivu je  $Aa_j + Bb_j$  a musí být rovna tržní hodnotě aktiva. Platí

$$A(t) a_j + B(t) b_j = P_j(t) N_j,$$

kde  $P_j(t)$  je tržní cena podkladového aktiva  $j$  v čase  $t$  a  $N_j$  je jeho dostupné množství. Přičemž  $A(t)$ ,  $B(t)$  a  $P_j(t)$  jsou funkce času a  $N_j$  je konstantní v čase podle předpokladu 6. Pro změnu ceny aktiva  $j$  mezi časem  $t$  a časem  $t + \Delta t$  platí

$$\Delta P_j = \frac{a_j}{N_j} \Delta A + \frac{b_j}{N_j} \Delta B,$$

kde  $\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$  and  $\Delta B = B(t + \Delta t) - B(t)$ .

Uvažujeme míru výnosnosti podkladového aktiva  $j$  za čas  $\Delta t$

$$r_j(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta P_j}{P_j(t)} = \frac{a_j}{N_j P_j(t)} \Delta A + \frac{b_j}{N_j P_j(t)} \Delta B$$

a kovarianční matici výnosností podkladových aktiv držených v portfoliu

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} D(r_1) & \dots & C(r_1, r_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(r_m, r_1) & \dots & D(r_m) \end{pmatrix}.$$



Vzhledem k vlastnostem kovariance (viz [2]) můžeme kovarianční matici výnosností rozložit na součin

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{N_1 P_1} & \frac{b_1}{N_1 P_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{a_m}{N_m P_m} & \frac{b_m}{N_m P_m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{C(\Delta A, \Delta A)}{\Delta t} & \frac{C(\Delta A, \Delta B)}{\Delta t} \\ \frac{C(\Delta B, \Delta A)}{\Delta t} & \frac{C(\Delta B, \Delta B)}{\Delta t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a_1}{N_1 P_1} & \cdots & \frac{a_m}{N_m P_m} \\ \frac{b_1}{N_1 P_1} & \cdots & \frac{b_m}{N_m P_m} \end{pmatrix}.$$

Dále platí, že hodnota součinu matic je menší nebo rovna maximální z hodnot matic jeho činitelů. Vzhledem k tomu nemůže mít kovarianční matice výnosností podkladových aktiv držených v portfoliu hodnotu větší než dvě. Avšak to je v rozporu s předpokladem 5, pokud uvažujeme portfolio s více než dvěma podkladovými aktivy.

### 3.7 Spojitý rovnovážný model s očekávanou výnosností závislou na ceně aktiva

V Kapitolách 3.4 a 3.6 jsme ukázali, že v teorii portfolia běžně používaný dynamický model není konzistentní. Proto se chceme pokusit navrhnout takový model, který by nebyl touto inkonzistencí předpokladů zatížen. Uvažujme spojitý model, který bude mít méně omezující předpoklady než model Mertonův. Model, který předkládáme v této kapitole, předpokládá rovnováhu na trhu, nicméně očekávaná míra výnosnosti není konstantní v čase.

Na základě poznatků z teorie portfolia budeme hledat vztah mezi očekávanou výnosností a cenou aktiva, který bychom mohli použít v modelu. Nechť  $\mathbf{P}$  je vektor cen  $n$  podkladových aktiv. Předpokládejme, že tyto ceny se řídí následující soustavou stochastických diferenciálních rovnic, pro  $j = 1, \dots, n$  platí

$$dP_j(t) = P_j(t)\mu_j(t)dt + P_j(t) \sum_{k=1}^n \xi_{jk}(t) dW_k(t), \quad (3.4)$$

kde  $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^T$  je  $n$ -rozměrný Wienerův proces,  $\mu_j(t)$  je očekávaná míra výnosnosti podkladového aktiva  $j$  a  $\xi_{jk}(t)$  je proces volatility podkladových aktiv  $j$  a  $k$ . Pro zjednodušení předpokládejme, že výnosnost bezrizikového aktiva  $r_f = 0$ . Nechť  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  je vektor vah v tržním portfoliu, který je dán jako

$$\mathbf{X} = \frac{\Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}}, \quad (3.5)$$

kde  $\mathbf{1}$  je vektor jedniček,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  je vektor očekávaných výnosností podkladových aktiv a  $\Sigma$  je kovarianční matice výnosností podkladových aktiv (viz [60]).

Uvažujme o řešitelnosti a počtu řešení soustavy rovnic (3.5) vzhledem k  $\boldsymbol{\mu}$ . Soustavu upravíme do tvaru

$$(\mathbf{X}\mathbf{1}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = 0. \quad (3.6)$$

Podle předpokladů v teorii portfolia zmíněných v Kapitole 3.6 je kovarianční matice plné hodnosti, tedy i matice  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  má hodnotu  $n$ . Naproti tomu, díky předpokladu  $\sum_{j=1}^n X_j = 1$ , má matice  $(\mathbf{X}\mathbf{1}^T - \mathbf{I})$  lineárně závislé řádky, jelikož součet libovolných  $n - 1$  řádků matice je roven zbývajícimu řádku vynásobenému minus jednou. Dá se tedy dokázat, že tato matice má hodnotu  $n - 1$ . To znamená, že soustava rovnic (3.6) má nekonečně mnoho řešení vzhledem k  $\boldsymbol{\mu}(t)$ .

Jak jsme ukázali v Kapitole 3.2, váhy tržního portfolia se rovnají relativním tržním hodnotám podkladových aktiv v tržním portfoliu, tedy

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}}, \quad (3.7)$$

kde  $\mathbf{V}$  je vektor tržních hodnot podkladových aktiv na trhu. Připomeňme, že tržní hodnota aktiva  $j$  je dána jako  $V_j(t) = P_j(t)N_j(t)$ . Vzhledem ke vztahu mezi tržní hodnotou aktiva a cenou aktiva a vzhledem ke vztahům (3.5) a (3.7) můžeme předpokládat, že očekávané výnosnosti  $\boldsymbol{\mu}(t)$  jsou funkcemi cen aktiv  $\mathbf{P}(t)$ .

Hledejme vhodné stochastické procesy, které by popisovaly chování vektoru  $\boldsymbol{\mu}(t)$ . Pro tento účel rozdělme proces očekávané výnosnosti aktiv na dvě složky. První složka určuje relativní vztahy mezi jednotlivými očekávanými výnosnostmi aktiv v portfoliu, druhá složka popisuje výnosnost celého trhu dynamicky se měnící v čase. Mezi těmito složkami bude platit multiplikativní vztah

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \cdot \mu_M(t) \quad (3.8)$$

kde vektorový stochastický proces  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = (\tilde{\mu}_1(t), \dots, \tilde{\mu}_n(t))^T$  zachycuje relativní vztahy aktiv v portfoliu, které se mohou v čase měnit, a  $\mu_M(t)$  je skalární stochastický proces, který charakterizuje dynamiku trhu a nezávisí na volbě konkrétního aktiva. Dále nechť pro všechny uvažované časy  $t$  platí  $\sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_i(t) = 1$ . Pak podle teorie CAPM platí

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \mathbf{X}(t), \quad (3.9)$$

kde  $\mathbf{X}(t)$  je vektor vah v tržním portfoliu v čase  $t$ .

Výnosnost celého trhu nevykazuje exponenciální růst, ale pohybuje se přibližně v nějakém intervalu. V delším časovém horizontu se projevuje tendence navracet se k průměrné hodnotě. Proto budeme předpokládat, že míra výnosnosti trhu  $\mu_M(t)$  se řídí Vašíčkovým modelem z Kapitoly 2.17

$$d\mu_M(t) = \kappa(\theta - \mu_M(t)) dt + \sigma dW(t), \quad (3.10)$$

kde  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  jsou konstanty.

Předpokládejme nyní, že uvažovaná podkladová aktiva jsou nekorelovaná, tedy matice  $\Sigma$  je diagonální. Příkladem takových aktiv by mohly být akcie podniků z velmi odlišných odvětví. Další zjednodušující předpoklady, které pro tuto chvíli zavedeme, bude neměnnost rizika aktiv  $\sigma_j = \xi_{jj}$  v průběhu času a také hodnoty aktiv  $N_j$  necht jsou v čase konstantní.

Dosadíme-li vztahy (3.8) a (3.9) do stochastické diferenciální rovnice (3.4), pak s ohledem na předpoklady učiněné výše dostáváme

$$dP_j(t) = P_j(t) \left( \frac{P_j(t)N_j}{\sum_{i=1}^n P_i(t)N_i} \mu_M(t) \right) dt + P_j(t)\sigma_j dW_j(t). \quad (3.11)$$

V další části představíme model s méně přísnými předpoklady. Pripustme nyní možnost závislosti mezi jednotlivými aktivy, tedy necht matice  $\Sigma$  není diagonální. Zachováme předpoklad konstantnosti volatilit aktiv  $\xi_{jk}$  v čase. Za těchto předpokladů dosadíme vztah (3.8) a (3.9) do SDR (3.4), čímž obdržíme

$$dP_j(t) = P_j(t) \left( \frac{P_j(t)N_j}{\sum_{i=1}^n P_i(t)N_i} \mu_M(t) \right) dt + P_j(t) \sum_{k=1}^n \xi_{jk} dW_k(t). \quad (3.12)$$

Často nás více než trajektorie cen podkladových aktiv zajímají očekávané hodnoty cen těchto aktiv. Vztahy pro očekávané hodnoty cen aktiv odvoďme ze soustavy SDR (3.12). Připomeňme, že z vlastností Wienerova procesu, uvedených v Definici 8, plyne, že  $E(dW_j(t)) = 0$ .

???Nekorelovanost  $P_j(t)$  a  $dW_j(t)$ ???

Pak

$$\begin{aligned} E(dP_j(t)) &= E \left( \frac{P_j^2(t)N_j}{\sum_{i=1}^n P_i(t)N_i} \mu_M(t) dt + P_j(t) \sum_{k=1}^n \xi_{jk} dW_k(t) \right) \\ &= E \left( \frac{P_j^2(t)N_j}{\sum_{i=1}^n P_i(t)N_i} \mu_M(t) dt \right) \end{aligned}$$

Čímž se soustava stochastických diferenciálních rovnic zjednodušuje na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

???jde následující rovnice upravit na ODR???

$$dE(P_j(t)) = E \left( \frac{P_j^2(t)N_j}{\sum_{i=1}^n P_i(t)N_i} \mu_M(t) \right) dt.$$

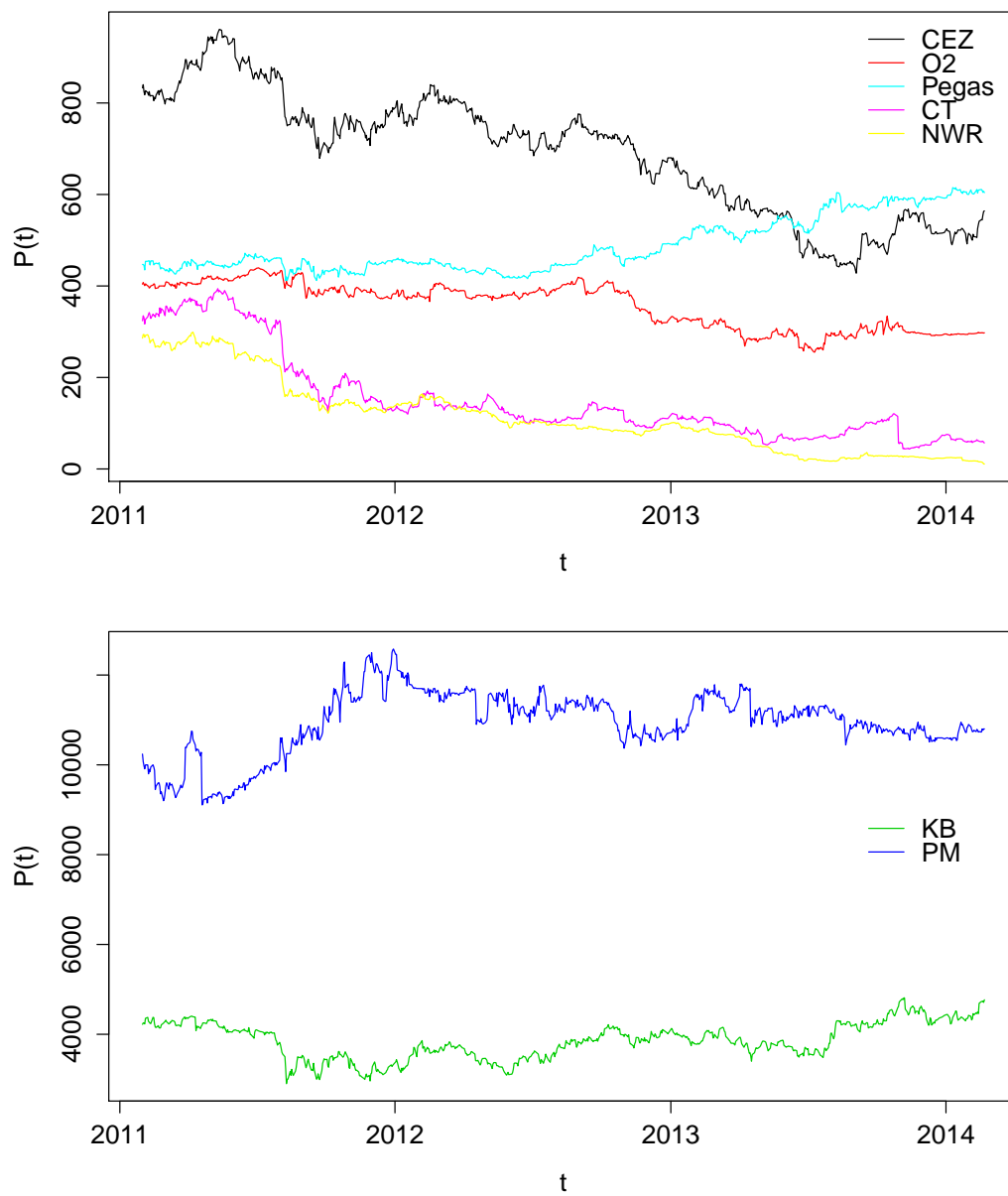
Avšak tato soustava je nelineární a neexistuje její analytické řešení, proto se neobejdeme bez použití numerických metod.

### 3.8 Aplikace navrhovaného spojitého modelu na reálná data

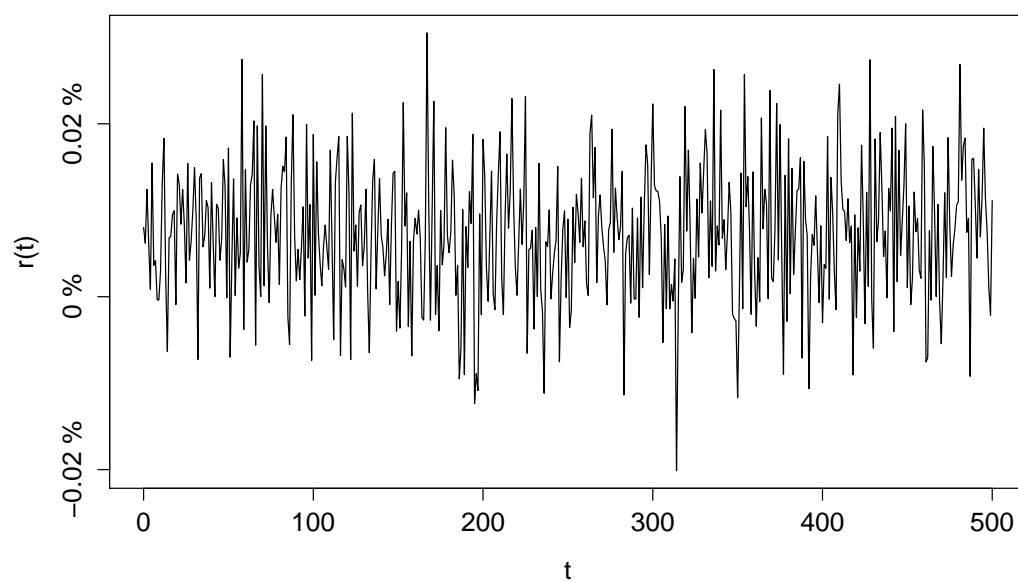
Data, vybraná pro stochastickou analýzu v této kapitole, byla získána ze systému Bloomberg. Jedná se o údaje o vývoji cen akcií obchodovaných na Burze cenných papírů Praha a.s. Pro aplikaci modelu jsme zvolili sedm akcií významných společností, které působí na českém trhu a jejichž akcie jsou obchodovatelné na Pražské burze. Informace o vybraných společnostech a jejich označení v následujících grafech najdeme v Tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Označení akcií, které byly vybrány do datového souboru

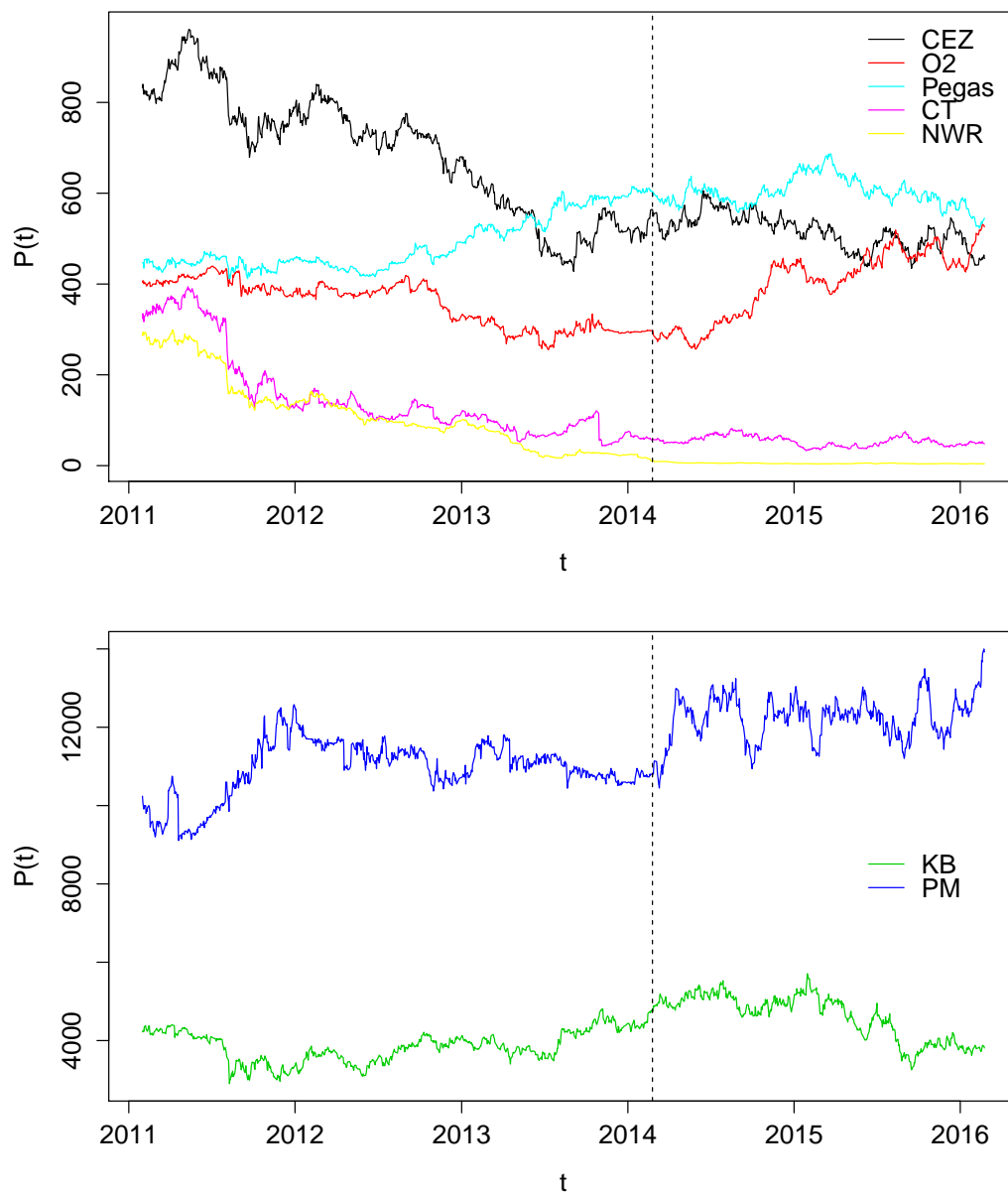
Označení	Název	Obor podnikání
CEZ	ČEZ, a. s.	největší výrobce elektřiny v České republice
O2	O2 Czech Republic, a.s.	český telefonní operátor ve vlastnictví společnosti PPF
KB	Komerční banka, a.s.	bankovní instituce působící na českém kapitálovém trhu z většiny vlastněná finanční skupinou Sociétés Générales
PM	Philip Morris ČR, a.s.	přední výrobce a prodejce cigaret v České republice
Pegas	Pegas Nonwovens, s.r.o.	přední světový výrobce netkaných textilií se sídlem v České republice
CT	Česká televize	veřejnoprávní televize v České republice
NWR	New World Resources	přední producent černého uhlí ve střední Evropě



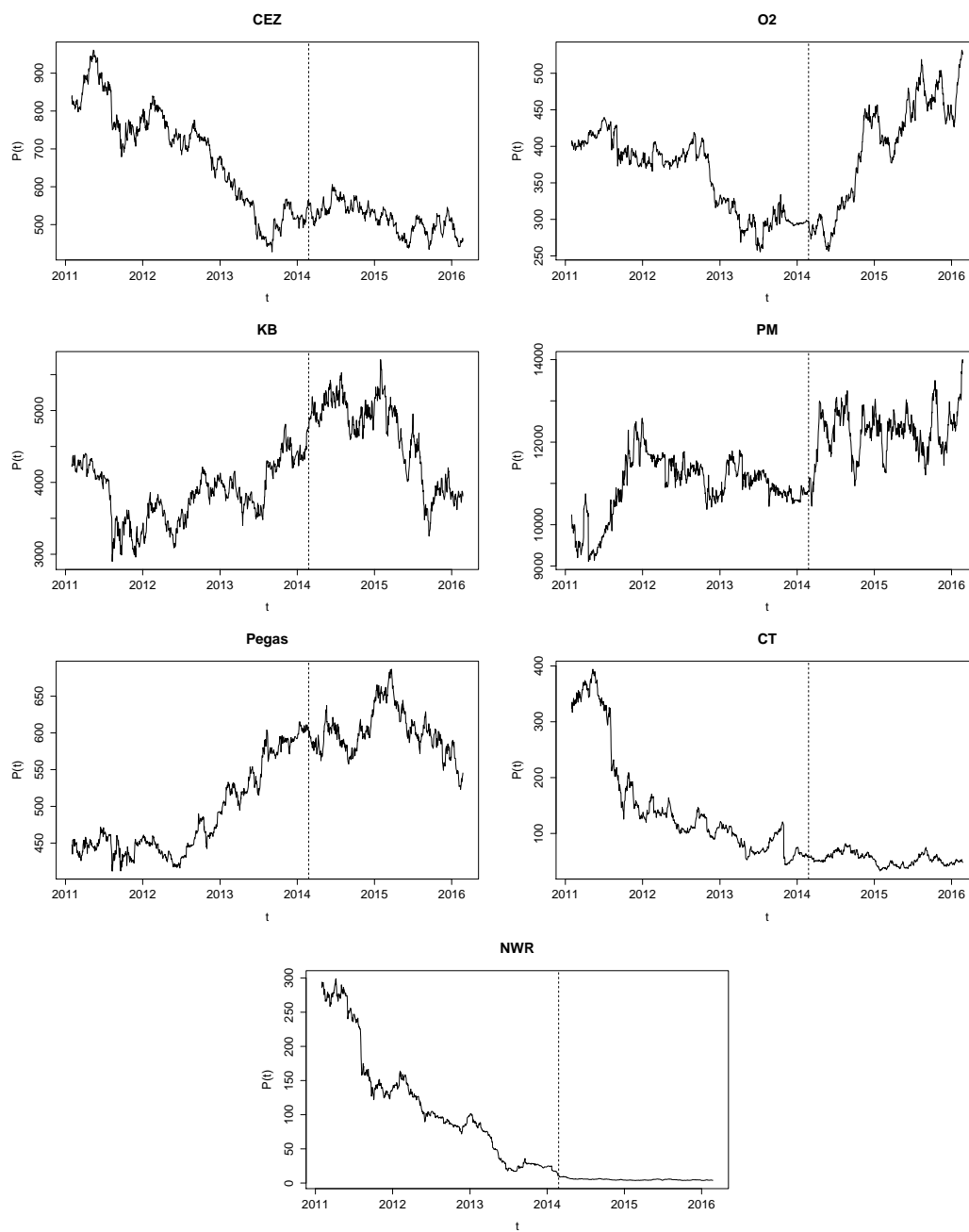
Obrázek 3.5: Ceny aktiv v portfoliu



Obrázek 3.6: Model výnosnosti trhu  $r(t)$

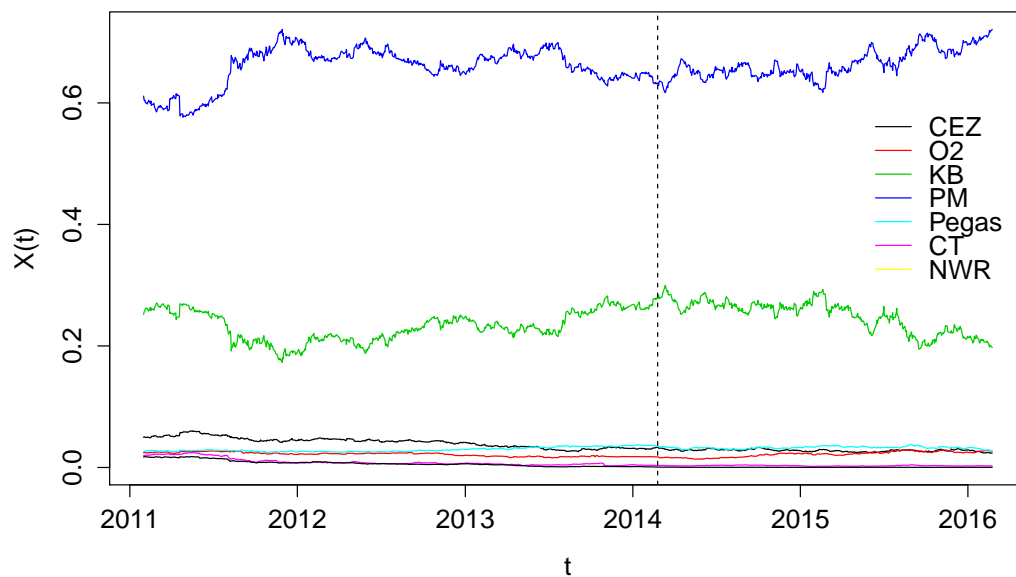


Obrázek 3.7: Model cen aktiv v portfoliu

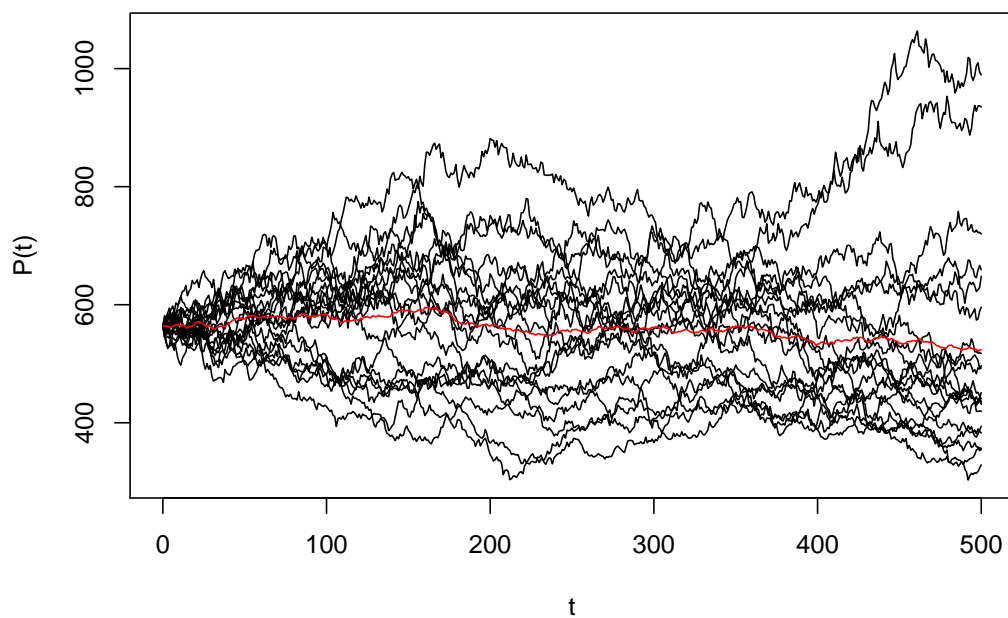


Obrázek 3.8: Model cen aktiv v portfoliu

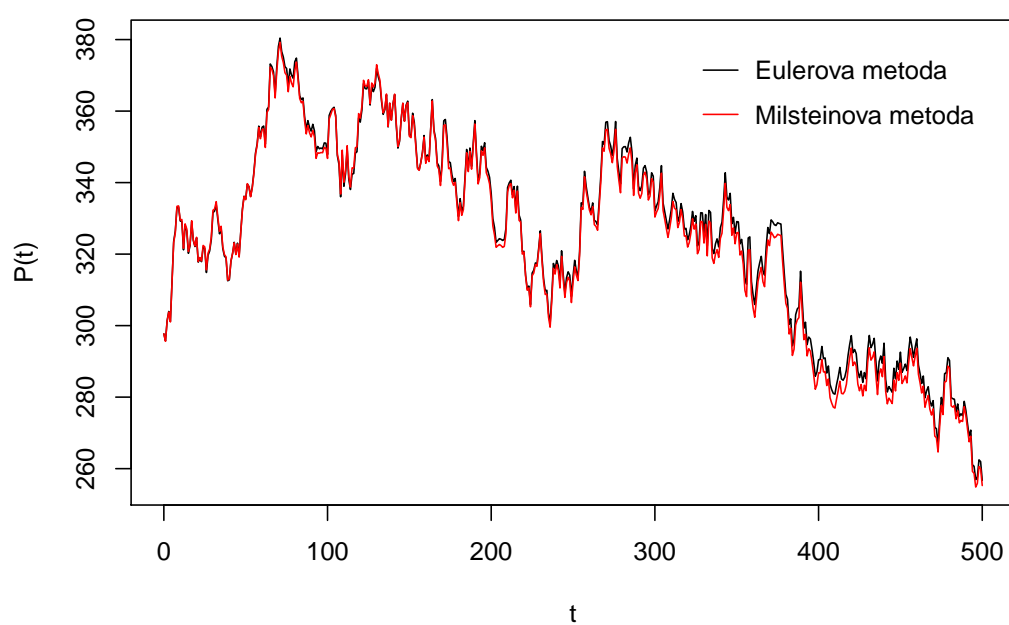




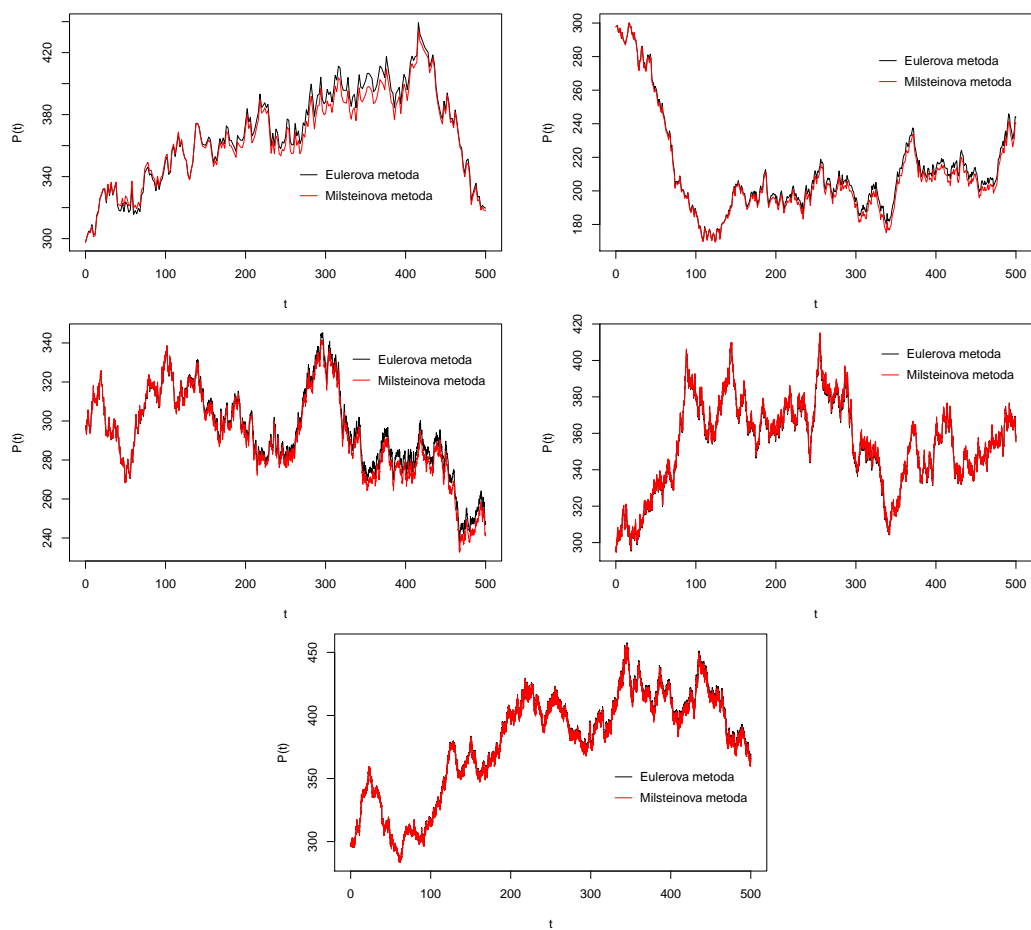
Obrázek 3.9: Model vah aktiv v portfoliu



Obrázek 3.10: Dvacet simulací trajektorie stochastického procesu ceny akcií (společnost ČEZ) a jejich střední hodnota



Obrázek 3.11: Srovnání Eulerovy numerické metody a Milsteinovy numerické metody pro simulace trajektorií stochastického procesu ceny akcií (společnost O2)



Obrázek 3.12: Srovnání Eulerovy numerické metody a Milsteinovy numerické metody pro simulace trajektorií stochastického procesu ceny akcií (společnost O2) s různými časovými kroky  $\Delta_n \in \{2; 1; 0,2; 0,1; 0,02\}$

# 4

## Teorie řízení finančních rizik

Nedílnou součástí řízení banky je řízení bankovních rizik. Obzvláště v poslední době se práce risk managementu dostává do popředí zájmu a jsou patrné tendence ke sjednocování bankovní regulace na mezinárodní úrovni. Důkazem spolupráce mezi institucemi bankovního dohledu je i vznik Basilejského výboru pro bankovní dohled. Výbor vydává regulační standardy, doporučuje konkrétní postupy v oblasti bankovního dohledu a snaží se o sbližování regulačních norem. Řada států jeho doporučení zohledňuje a přijímá do vlastní legislativy a Česká republika v tomto není výjimkou. Standardy vydávané výborem se označují Basel a byly dosud vydávány ve třech generacích označovaných jako Basel I, Basel II a Basel III. Vyjadřují kapitálové požadavky, zabývají se pravidly obezřetného podnikání bank a aktivitami bankovního dohledu.

Nařízení CRR (Capital Requirements Regulation) [18] a směrnice CRD IV (Capital Requirements Directive) [17] jsou výsledkem opatření pro posílení regulace bankovního sektoru promítnutých do Basel III. Nařízení CRR je přímo účinný právní předpis používaný od roku 2014, přičemž národní právní předpisy jsou upraveny tak, aby nebyly v rozporu s tímto nařízením. Ustanovení směrnice CRD IV museli členské státy EU promítnout do národních předpisů do konce roku 2013.

Během celosvětové finanční krize, která vypukla v roce 2008, se ukázala důležitost správného měření a řízení kreditního rizika protistrany (CCR) pro stabilitu finančního systému. Kapitál pro kreditní riziko protistrany byl vyžadován již v Basel I. V reakci na finanční krizi Basel III představil nejen další požadavky pro výpočet kapitálu pro CCR, ale nově předepisuje kapitálový požadavek pro riziko změny Credit Valuation Adjustment (CVA).

CVA lze interpretovat jako úpravu tržní hodnoty derivátu o kreditní riziko protistrany. Riziko změny CVA vyplývá jak z rizika změny pravděpodobnosti selhání protistrany tak změny tržních faktorů, které ovlivňují hodnotu derivátů. Oceňování tohoto rizika se budeme věnovat v Kapitole 4.3.

## 4.1 Finanční rizika

---

V následujícím textu seznámíme čtenáře s problematikou řízení finančních rizik, především úvěrového rizika. Komplexní přehled o finančních rizicích poskytuje publikace jednoho z nejznámějších českých ekonomů profesora Josefa Jílka [36]. Kniha zevrubně popisuje úvěrová, tržní a další finanční rizika a objasňuje podstatu, měření, řízení a regulace finančních rizik včetně použití derivátů.

Bankovní podnikání ohrožuje celá řada rizik, která obecně chápeme jako nebezpečí vzniku škody. Řídit tato rizika mimo jiné znamená odhadovat pravděpodobnost jejich vzniku a navrhnout metody k jejich snížení. Banka je ohrožena nejen podnikatelskými riziky, ale také riziky finančními, které souvisí s její potenciální finanční ztrátou. Na tato rizika je soustředěna mimořádná pozornost odborné veřejnosti, bankovního dohledu, ale i samotného představenstva banky, jelikož řízení rizik má vliv na budoucí strategii podnikání banky.

Základním finančním rizikem je kreditní (též úvěrové) riziko. Jedná se o riziko vyplývající z neschopnosti nebo neochoty protistrany splatit své závazky podle podmínek kontraktu, což způsobí držiteli pohledávky ztrátu. Jeho řízení má rozhodující význam pro úspěch nebo neúspěch nejen finančních institucí.

Mezi významná bankovní rizika patří tržní riziko. Jedná se o riziko ztráty v souvislosti s pohybem tržních cen v důsledku nepříznivých změn tržních podmínek. Je zaměřeno na faktory, které mají vliv na finanční trh jako celek (nikoliv pouze na cenu jednotlivého aktiva). Jeho význam vzrůstá s rostoucí angažovaností bank na finančních trzích.

Úvěrové riziko a tržní riziko není možno od sebe zcela oddělovat. Obě tato rizika v sobě spojuje kreditní riziko protistrany (více viz Kapitola 4.1.1), jehož modelování je nedílnou součástí výpočtu Credit Valuation Adjustment.

Dalšími finančními riziky jsou operační riziko a riziko likvidity. Basel II definoval operační riziko jako riziko ztráty vyplývající z nedostatků či selhání vnitřních procesů, osob a systémů nebo vlivem vnějších událostí. Řízení operačního rizika slouží k zajištění provozní efektivity, snížení nákladů a zvýšení konkurenceschopnosti. Regulační orgány vymezují obezřetnostní požadavky na operační riziko. Riziko likvidity je riziko ztráty schopnosti dostát finančním závazkům v době, kdy se stanou splatnými, nebo riziko ztráty schopnosti financovat aktiva. Princip řízení rizika likvidity zahrnuje alokaci aktiv a pasiv do časových košů a následné určování likvidního gapu v jednotlivých časových koších. Těmito dvěma finančními riziky se v této práci nebudeme dále podrobněji zabývat.

### 4.1.1 Kreditní riziko protistrany

Counterparty Credit Risk (CCR), v překladu *kreditní riziko protistrany*, představuje možnost, že banka utrpí ztrátu z derivátového obchodu nebo při financování aktiva, která bude způsobena selháním protistrany transakce. Kreditní riziko selhání (též defaultu) představuje základní rizikovou složkou kreditního rizika a jeho parametrem je pravděpodobnost neplnění. Definice selhání protistrany není zcela jednoznačná, většinou se však chápe jako stav finanční tísně, bránící ve splnění závazku.

Riziko protistrany závisí na spolehlivosti obchodního partnera, ať už se jedná o emitenta, který vydává, nabízí a prodává investiční produkt a zavazuje se k jeho splacení (resp. vyrovnání s ním spojených závazků), nebo finančního zprostředkovatele, kterému jsou svěřeny prostředky buď do správy, nebo k provedení investiční transakce.

Existují specializované společnosti nazývané ratingové agentury, které se zabývají hodnocením rizik emitentů a na jeho základě jim udělují kód vyjadřující bonitu či důvěryhodnost, tzv. *rating*. Pro investory je rating spolehlivou informací o kreditním riziku emitenta příslušného finančního instrumentu, případně finančního zprostředkovatele. Nejznámějšími ratingovými agenturami jsou Moody's, Standard & Poor's a Fitch. Každá z těchto agentur má vlastní hodnotící stupnici a zvyklosti.

Obecně se ratingové stupnice dělí na dvě části – investiční pásmo a spekulativní pásmo. Ratingy z investičního pásma přiznávají ratingové agentury finančním instrumentům, do kterých doporučují investovat. Pod touto úrovní leží pásmo spekulativních investic, u kterých je očekáváno značné riziko ztráty.

Typickým představitelem emitenta s velmi nízkým rizikem je vláda vyspělého státu, která vydává dluhopisy, jež jsou chápány jako bezrizikové investiční instrumenty. Nízké kreditní riziko mohou mít i velké tuzemské či mezinárodními společnostmi s dobrými hospodářskými výsledky, zejména pokud mají (dle všeobecného názoru) schopný management, což vede k předpokladu dobrých výsledků a udržení pozice na trhu i v budoucnosti. Rating je využíván také k posouzení důvěryhodnosti finančního partnera, který danou finanční investici zprostředkovává.

Důležitým faktem při výpočtu kapitálového požadavku pro CCR je bilaterální charakter tohoto rizika. Což znamená, že kreditním rizikem protistrany jsou zatíženy obě strany obchodu.

Velmi dobrý úvod do problematiky řízení rizika protistrany poskytuje článek [8] autorů Eduarda Canabarra, vedoucího oddělení řízení rizika v bankovní společnosti Goldman Sachs, a profesora Stanfordské univerzity Darrella Duffieho. Definují zde základní pojmy a představují modely expozice pro-

tistrany.

## 4.2 Credit Valuation Adjustment

---

Český překlad termínu *Credit Valuation Adjustment (CVA)* zatím není ustálený a můžeme se setkat s více možnostmi. Například Evropský orgán pro bankovníctví (EBA) ve své výroční zprávě za rok 2015 [19] používá výraz *úprava úvěrového ocenění*. Česká národní banka (ČNB) ve Zprávách o výkonu dohledu nad finančním trhem [14] překládá CVA jako *kapitálový požadavek k riziku úvěrové úpravy ocenění*. V jiných textech nalezneme pojem *kreditní přírázka k tržnímu ocenění* nebo *úvěrová úprava v ocenění finančních derivátů*. Z důvodu přehlednosti budeme v textu této práce používat především zkratku CVA nebo anglický termín.

Při oceňování finančních derivátů obvykle není bráno do úvahy riziko selhání protistrany. Avšak mezinárodní standard finančního výkaznictví IFRS 13 Fair Value Measurement [31] ve své nejnovější verzi z roku 2013 předepisuje, že finanční deriváty mají být oceňovány *reálnou hodnotou*, která musí maximálně využívat vstupy pozorovatelné na trhu. V důsledku toho vzniká požadavek na výpočet CVA, který má zohledňovat kreditní riziko protistrany v účetním ocenění derivátů.

S oceňováním kreditního rizika protistrany se můžeme seznámit v článku Michaela Pykhtina a Stevena Zhu [79], kde jsou představeny přístupy k výpočtu CVA. Podrobný přehled modelování CCR nalezneme v rozsáhlé monografii [25], kterou napsal Jon Gregory. Tato kniha zajímavě popisuje růst vlivu kreditního rizika protistrany v průběhu finanční krize. Nalezneme v ní kvantifikaci úvěrové expozice stejně jako způsoby snižování rizika.

Obvykle CVA počítáme na úrovni jednotlivých protistran. Nicméně někdy může být užitečné stanovit, jak do CVA přispívají jednotlivé derivátové obchody. Michael Pykhtin a Dan Rosen v článku [59] důkladně analyzují problematiku alokace CVA na jednotlivé derivátové obchody. Vysvětlují, jak lze tento problém zjednodušit na výpočet očekávané expozice protistrany plynoucí z daného obchodu v okamžiku selhání protistrany. Určení očekávané expozice v okamžiku selhání protistrany bude stěžejní část výpočtu CVA i v naší práci.

Mírou úvěrové kvality protistrany je pravděpodobnost selhání protistrany. Při výpočtu CVA bývá tato pravděpodobnost odvozena od swapů úvěrového selhání. Arora, Gandhi a Longstaff v textu [3] zkoumají trh swapů úvěrového selhání a jeho význam při oceňování CCR.

Úvěrová expozice protistrany může korelovat s její úvěrovou kvalitou. Pokud je tato korelace záporná, pak se nazývá *wrong-way riziko*. Toto riziko

ve skutečnosti existuje vždy, ale obvykle se zanedbává kvůli zjednodušení modelování expozice. Avšak existují případy, kdy je wrong-way riziko natolik významné, že nemůže být zanedbáno. Takovým případem mohou být komoditní obchody s výrobcem této komodity. Hull a White v článku [30] představili jeden z prvních modelů zahrnujících wrong-way riziko do výpočtu CVA.

## 4.3 Metodika výpočtu CVA

CVA představuje odhad možných budoucích ztrát z derivátového obchodu v průběhu života derivátu až do jeho splatnosti. Vztah pro výpočet CVA vychází ze známé formule pro výpočet očekávané úvěrové ztráty (podrobněji se s ní budeme zabývat v Kapitole 4.5).

**Definice 44.** *Credit valuation adjustment* je definován jako

$$CVA = (1 - R) \int_0^T \hat{e}_d(t) dPD(t), \quad (4.1)$$

kde  $R$  je míra návratnosti,  $\hat{e}_d(t)$  je diskontovaná očekávaná expozice v čase  $t$ ,  $PD(t)$  je pravděpodobnost selhání protistrany před časem  $t$  a  $T$  označuje splatnost kontraktu s nejdelší splatností v uvažovaném portfoliu.

Jednotlivé komponenty CVA ze vztahu (4.1) budeme podrobněji specifikovat v následujícím textu.

### 4.3.1 Expozice protistrany

*Expozici protistrany* v čase  $t$  značíme  $E(t)$  a definujeme jako celkovou výši nesplacených pohledávek danou protistranou. Hodnota expozice protistrany kvantifikuje do jaké míry je věřitel vystaven riziku ztráty v případě neplnění dlužníka. Na rozdíl od standardního úvěrovému vztahu, ve kterém je jasné dané, kdo je dlužník a kdo je věřitel, se v případě derivátových obchodů mohou jejich role měnit v čase. Hodnota derivátů v čase kolísá a může nabývat kladných i záporných hodnot. Proto může nastat situace, kdy v jednom časovém okamžiku je banka vystavena ztrátě v případě selhání protistrany, zatímco v jiném časovém okamžiku nemá banka co ztratit, pokud její protistrana selže. Navíc protistrana banky může utrpět ztrátu v případě selhání banky. Tento jev zcela zásadně ovlivňuje výši expozice v okamžiku selhání protistrany.

Uvažujme portfolio  $N$  derivátových obchodů banky s danou protistranou. Budeme zkoumat hodnotu portfolia z pohledu banky. Expozice protistrany



$E(t)$  v čase  $t$  je dána hodnotami derivátových odchodů s danou protistranou v čase  $t$ . Hodnotu  $i$ -tého derivátu z portfolia v čase  $t$  označíme  $V_i(t)$ . Pak hodnota portfolia v čase  $t$  je definována jako

$$V(t) = \sum_{i=1}^N V_i(t). \quad (4.2)$$

V případě, že banka nemá s protistranou uzavřenou dohodu o vzájemném započítávání pohledávek a závazků (tzv. netting), expozice protistrany  $E(t)$  je

$$E(t) = \sum_{i=1}^N \max\{V_i(t), 0\}. \quad (4.3)$$

Pokud banka s protistranou uzavře smlouvu o nettingu, pak je expozice dána jako

$$E(t) = \max\{V(t), 0\}. \quad (4.4)$$

Využívání nettingu slouží ke snížení úvěrového a tržního rizika. Při použití nettingu je expozice protistrany menší nebo rovna expozici v případě, kdy netting neuvažujeme.

Další možnost jak snížit expozici je zajištění. Banka uzavírá s protistranou dohodu o výzvě k doplnění zajištění (tzv. margin call). Protistrana pak musí poskytnout bance zajištění vždy, když hodnota portfolia překročí určenou mez. Naopak pokud hodnota portfolia klesne pod tuto mez, banka zajištění opět vrátí. Expozice protistrany, která zohledňuje zajištění se určí jako

$$E(t) = \max\{V(t) - C(t), 0\}, \quad (4.5)$$

kde  $C(t)$  je hodnota zajištění (které banka přijala) v čase  $t$ .

Expozice protistrany v okamžiku jejího selhání (EAD) se běžně značí  $EAD$ . Kvůli snadnějšímu a přehlednějšímu zápisu budeme v rovnicích a formulích používat také označení  $e(t)$ , kde  $t$  je okamžik selhání protistrany. EAD můžeme chápat jako náhodnou veličinu. Tudíž očekávanou expozici v okamžiku selhání protistrany definujeme jako střední hodnotu EAD. Použijeme pro ni označení  $\hat{e}(t)$ . Platí

$$\hat{e}(t) = E[e(t)]. \quad (4.6)$$

Při výpočtu očekávané ztráty z pohledávky je nutné očekávanou EAD diskontovat, abychom určili současnou hodnotu očekávané EAD. Uvažujme diskontní faktor, který vychází ze vztahu (2.10), ale budeme předpokládat stochastické chování úrokové míry. Proto pro diskontování použijeme okamžitou úrokovou míru. Diskontní faktor  $D(t)$  definujeme jako

$$D(t) = e^{-r(t) \cdot t}, \quad (4.7)$$

kde  $r(t)$  je okamžitá úroková míra. Dostáváme vztah pro diskontovanou očekávanou expozici v okamžiku selhání protistrany

$$\hat{e}_d(t) = E[D(t)e(t)]. \quad (4.8)$$

### 4.3.2 Pravděpodobnost selhání

*Pravděpodobnost selhání*, anglicky Probability of Default (PD), poskytuje odhad pravděpodobnosti, že dlužník nebude schopen plnit své závazky. PD je klíčový parametr používaný při výpočtu očekávané úvěrové ztráty. Je důležité uvědomovat si v jakém časovém horizontu PD uvažujeme. Například, když vstupuje PD jako parametr pro výpočet regulatorního kapitálu podle Basel II, bere se v úvahu pravděpodobnost selhání během jednoho roku. Do vztahu (4.1) pravděpodobnost selhání vstupuje jako funkce času daná následující definicí.

**Definice 45.** Nechť  $\tau$  je náhodná veličina, která označuje čas selhání dané protistrany. Její distribuční funkci označíme  $PD(t)$  a platí

$$PD(t) = \Pr(\tau \leq t). \quad (4.9)$$

$PD(t)$  udává *pravděpodobnost selhání protistrany* před časem  $t$ .

Při výpočtu CVA se pro odhad PD protistrany často používá metoda, která pracuje s tržní hodnotu swapů úvěrového selhání (CDS). CDS jsou finanční deriváty, které slouží k přenosu úvěrového rizika (plynouceho z podkladového aktiva) z kupujícího na prodávajícího. Za úplatu se prodávající CDS zavazuje uhradit kupujícímu ztrátu, která vznikne v případě selhání podkladového aktiva. CDS většinou slouží jako kreditní zajištění.

Na českém trhu se oproti zahraničí s CDS obchoduje méně, můžeme proto často narazit na problém, že pro konkrétní protistranu nebude CDS existovat. Další možností jak určit PD protistrany je využití externího ratingu, který přidělují ratingové agentury (což už jsme zmínili v Kapitole 4.1.1). Avšak externí rating získají pouze velké a renomované společnosti, a proto tuto metodu často také nemůžeme použít.

Většina bank používá k odhadu PD interní ratingové modely, které jsou založeny na historických datech o splácení klientů. Výstupem těchto modelů je pravděpodobnost selhání klienta během jednoho roku.

### 4.3.3 Loss Given Default

Další člen ve výpočtu CVA (4.1) je Loss Given Default (LGD), neboli *ztrátovost ze selhání*. Jedná se o poměr ztráty z úvěrové expozice, kterou věřitel

utrpí v případě selhání dlužníka, vzhledem k expozici protistrany v okamžiku selhání. Lze se také setkat s pojmem míra ztráty při (ze) selhání.

V případě selhání protistrany se věřiteli obvykle podaří získat zpět určitou část z dlužné částky v rámci procesu vymáhání či prodeje zajištění. Vyjádříme-li tuto část jako poměr k EAD nazývá se míra návratnosti.

**Definice 46.** *Míra návratnosti (recovery rate)* je očekávaná míra splacení pohledávky v případě selhání protistrany. Budeme ji značit  $R$  a platí

$$R = 1 - LGD, \quad (4.10)$$

kde  $LGD$  je míra ztráty při selhání protistrany.

## 4.4 Aplikace výpočtu CVA na reálná data

Metodiku výpočtu CVA uvedenou v Kapitole 4.3 budeme aplikovat v této kapitole. Naším cílem je spočítat CVA pro zvolené finanční deriváty a graficky znázornit komponenty vstupující do výpočtu. K výpočtům a tvorbě grafů použijeme prostředí MATLAB.

Data pro analýzu pochází od banky působící v České republice (dále jen banka) a obsahují informace o části jejího portfolia finančních derivátů. Tato část portfolia obsahuje pět úrokových swapů, z nichž každý je uzavřen s jinou protistranou. Banka je ve všech pěti případech v pozici prodávajícího (pro bližší vysvětlení této pozice viz Kapitola 4.4.1). V Tabulce 4.1 uvádíme přehled proměnných získaných z datového souboru, které budeme využívat při výpočtu CVA. Datový soubor ani informace o protistranách nebudeme zveřejňovat.

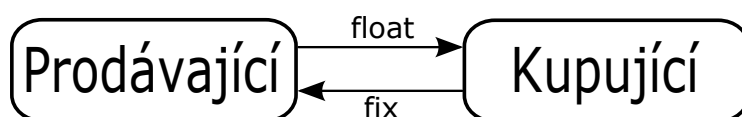
Tabulka 4.1: Proměnné v datovém souboru

Označení	Název proměnné
counterpartyID	identifikační číslo protistrany
rating	rating protistrany
nettingID	identifikace protistrany smlouvy o nettingu
principal	nominální hodnota IRS
maturity	datum splatnosti IRS
LegRateReceiving	úroková sazba přijímaná bankou
LegRatePaying	úroková sazba placená bankou
period	úrokové období

### 4.4.1 Úrokový swap

V praktické ukázce výpočtu CVA na reálných datech používáme data o úrokových swapech. Proto v následující části práce stručně vysvětlíme principy tohoto finančního derivátu.

*Úrokový swap (IRS)* je finanční derivát sloužící k zajištění rizika plynoucího ze změny úrokových sazeb. Jedná se o smluvní dohodu dvou stran vyměnit si úrokové závazky v různých sazbách vztahující se ke stejné nominální hodnotě. Zpravidla se přitom jedná o výměnu fixní platby úroků za variabilní. Při vyrovnaní obchodu dochází pouze k výměně úroků, avšak nikoli k výměně nominální hodnoty. Podle tržních konvencí se strana, která v rámci IRS kontraktu platí pevné úroky (a přijímá variabilní úroky) nazývá *kupující (payer)* a strana, která přijímá pevné úroky (a platí variabilní úroky) se nazývá *prodávající (receiver)*. Tento vztah demonstruje Obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Grafické znázornění vztahu mezi prodávajícím a kupujícím úrokového swapu.

Pevná úroková sazba (fixed rate) je stanovena při uzavření IRS smlouvy a zůstává nezměněna v průběhu celého trvání smlouvy. Na druhé straně variabilní úroková sazba (floating rate) se odvozuje od referenční úrokové sazby na trhu mezibankovních depozit a může se v průběhu života IRS měnit. V naší analýze používáme jako referenční sazbu Prague InterBank Offered Rate (PRIBOR). PRIBOR je průměrná úroková sazba, za kterou jsou banky ochotny si navzájem půjčovat na českém mezibankovním trhu likviditu.

### 4.4.2 Počáteční výnosová křivka

Na začátku naší analýzy vytvoříme výnosovou křivku, kterou budeme používat při modelování úrokové míry pomocí Hull-Whitova modelu. Tato křivka bude vstupovat do modelu prostřednictvím parametru  $\theta(t)$ . Simulaci úrokové míry následně využijeme při oceňování úrokových swapů.

Pro konstrukci výnosových křivek existuje několik metod. Některé využívají data o výnosech bezkupónových dluhopisů, jiné sazby PRIBOR nebo tržní hodnoty IRS. V naší analýze jsme zvolili rozšířenou metodu, kterou využívá i banka. Pro krátkodobé úrokové míry odvodíme výnosovou křivku

Tabulka 4.2: Počáteční úrokové míry

splatnost (v letech)	úroková míra (%)
0,25	0,29
0,5	0,37
1	0,21
2	0,25
3	0,28
4	0,33
5	0,40
6	0,47
7	0,56
8	0,65
9	0,75
10	0,83
12	0,99
15	1,16
20	1,27

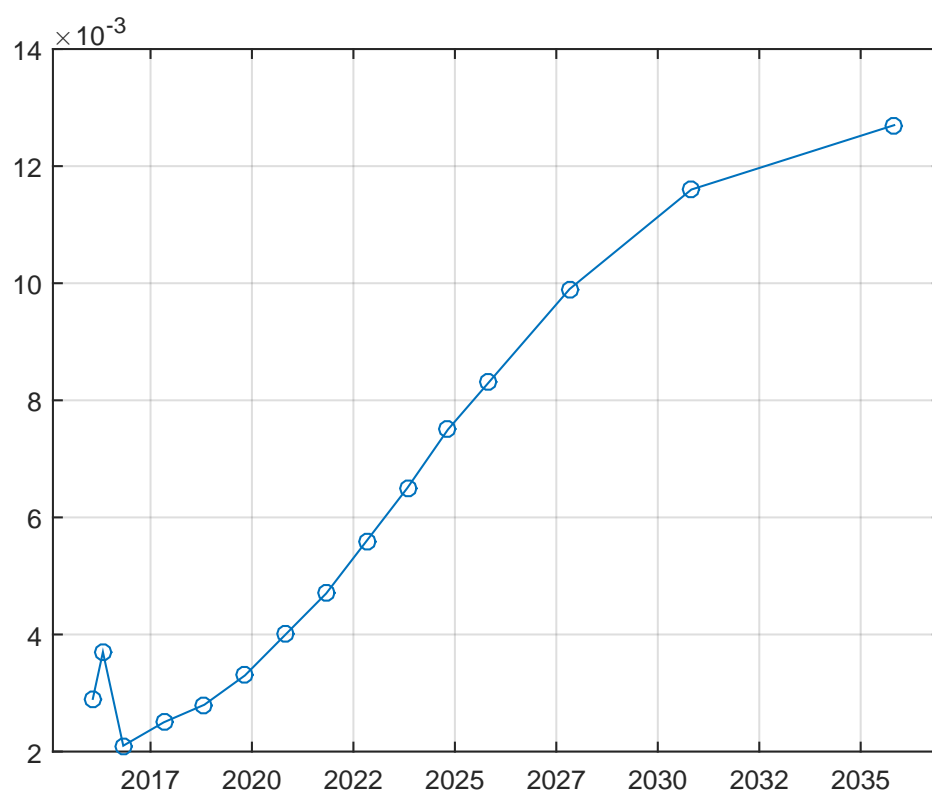
ze sazeb PRIBOR a pro dlouhodobé úrokové míry využijeme hodnot IRS na trhu. Data jsme čerpali z webových stránek Patria online a terminálu Bloomberg a jsou uvedeny v Tabulce 4.2. První dvě číselné hodnoty jsou tříměsíční sazba PRIBOR a šestiměsíční sazba PRIBOR. Následující čísla jsou postupně hodnoty ročních IRS, dvouletých IRS, atd. až dvacetiletých IRS. Obrázek 4.2 zobrazuje počáteční výnosovou křivku, kterou budeme dále používat v simulacích.

#### 4.4.3 Simulace úrokových měr a oceňování IRS

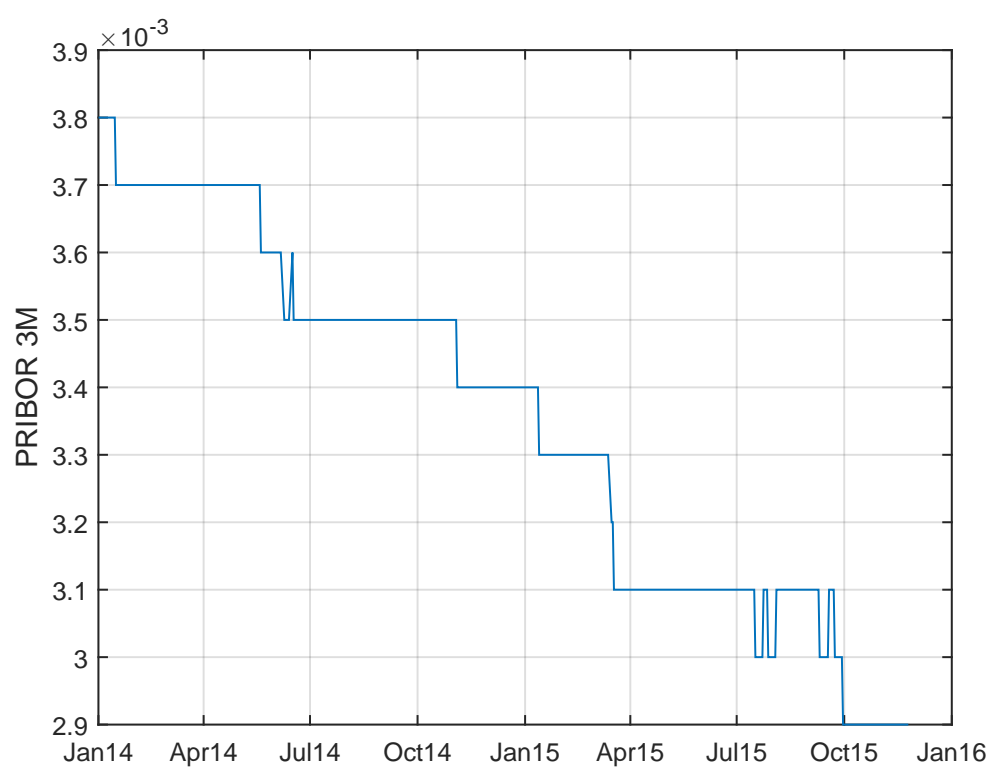
Při oceňování IRS budeme používat Monte Carlo simulace. Pro další informace o této metodě odkazujeme na klasickou monografii Johna Hammersleyho [26] nebo rozsáhlou publikaci Reuvena Rubinsteina a Dirka Kroese [63], která byla v loňském roce aktualizována. IRS jsou deriváty úrokové míry a tudíž pro určení jejich tržní hodnoty budeme muset nejdříve modelovat hodnotu úrokové míry.

Variabilní úroková sazba IRS v našem datovém souboru je odvozena z tříměsíční sazby PRIBOR. Proto jsme se rozhodli využít historická data o této sazbě pro kalibraci modelu úrokových měr. Vývoj tříměsíční sazby PRIBOR můžeme vidět na Obrázku 4.3.

Pro modelování úrokové míry budeme používat Hull-Whitův jednofakto-



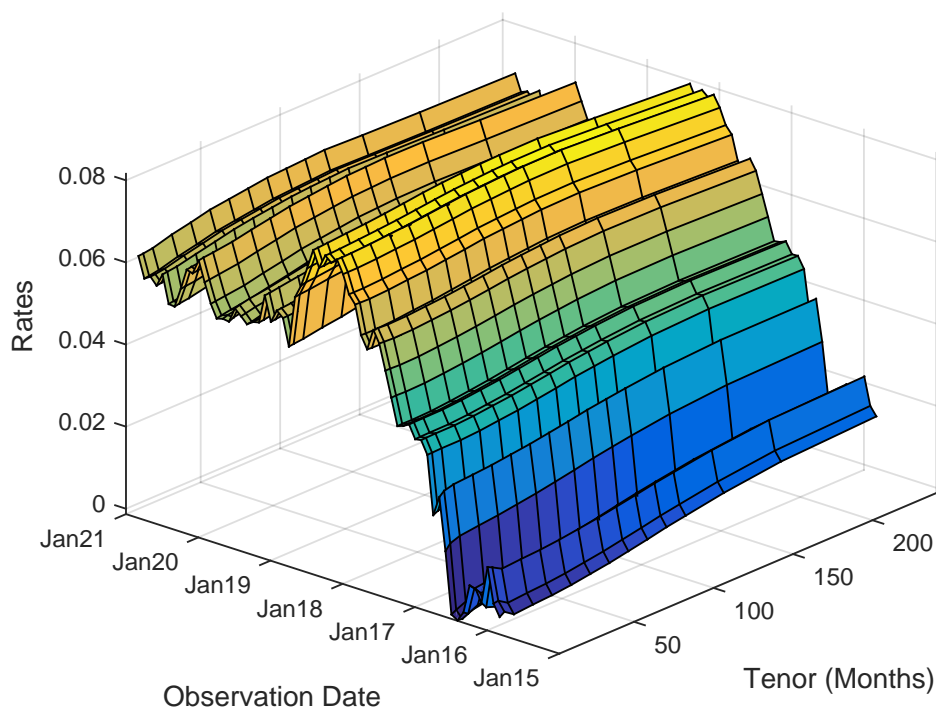
Obrázek 4.2: Počáteční výnosová křivka.



Obrázek 4.3: Vývoj tříměsíční PRIBOR úrokové sazby.

rový model představený v Kapitole 2.2.4. Nejdříve odhadneme parametry  $\alpha$  a  $\sigma$  z historických dat tříměsíční sazby PRIBOR za použití MATLAB funkce `regress` (viz Příloha B). Parametr  $\theta(t)$  konkrétně určovat nemusíme, jelikož jeho roli v modelu při výpočtu v MATLAB zastoupí počáteční výnosová křivka.

Chování hodnoty okamžité úrokové míry je popsáno rovnicí (2.19). K simulování vývoje její hodnoty v MATLAB využíváme funkci `HullWhite1F`, jejímiž parametry jsou koeficienty  $\alpha$  a  $\sigma$  z Hull-Whitova modelu a hodnoty počáteční výnosové křivky z Tabulky 4.2. Okamžité úrokové míry dané modelem rozšíříme na celé výnosové křivky s využitím rovnice (2.22). Příklad jednoho z možných scénářů vývoje celé časové struktury úrokové míry ukazuje trojrozměrný plošný graf na Obrázku 4.4.

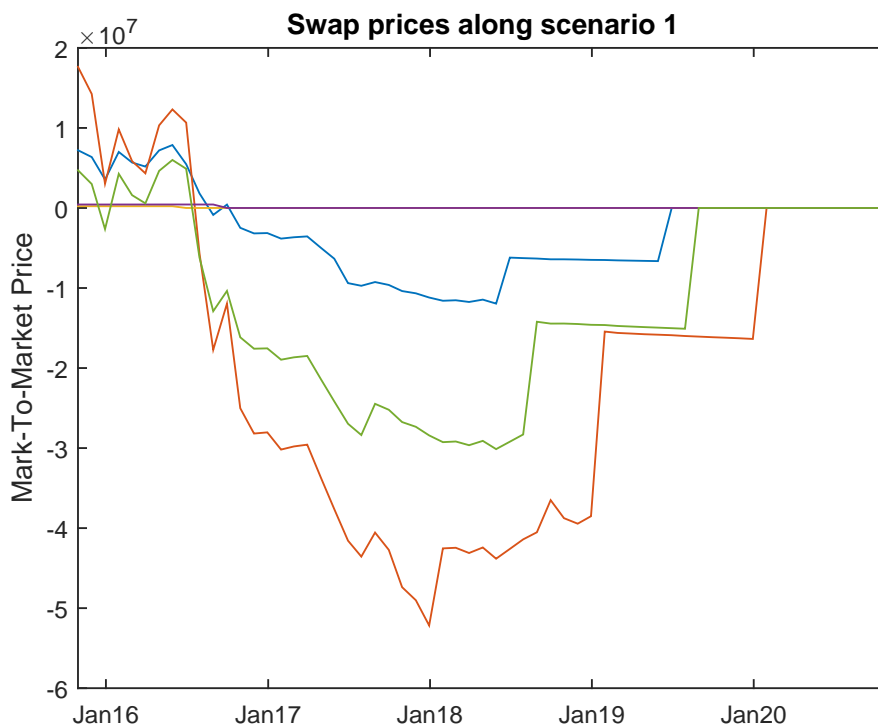


Obrázek 4.4: Jeden z možných scénářů pro vývoj výnosové křivky.

Provedeme tisíc takových simulací a pro každý scénář vypočítáme tržní hodnoty IRS v každém datu simulace v budoucnosti. Pro oceňování IRS v jednotlivých datech simulace je v MATLAB naprogramovaná funkce `hcomputeMTMValues`, která při spuštění volá funkci `hswapapprox`. Tato funkce pro určení tržní hodnoty IRS využívá aproximace, proto není vhodné její použití v případě, kdy potřebujeme přesnou hodnotu. Nicméně při výpočtu CVA



je tento postup běžně využíván, jelikož použití aproximace zásadně zvyšuje výkonost výpočtu, kterou Monte Carlo simulace vyžadují. Výstupem oceňovací funkce je trojrozměrná matice, která obsahuje tržní hodnoty pro každý uvažovaný IRS v každém datu simulace a pro každý scénář. Na Obrázku 4.5 vidíme jeden z možných scénářů vývoje tržní hodnoty pěti úrokových swapů z datového souboru.

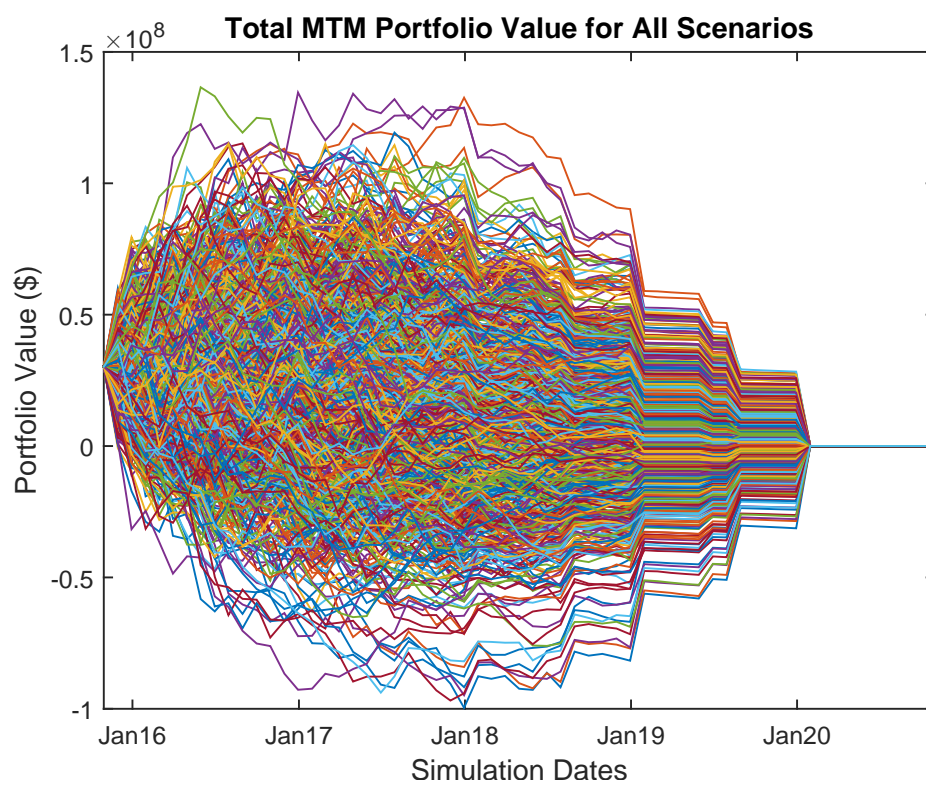


Obrázek 4.5: Jeden z možných scénářů pro vývoj tržní hodnoty pěti úrokových swapů z datového souboru.

Vzhledem k předpokladu neexistence arbitráže je hodnota IRS v době uzavření kontraktu nulová. Během každého simulovaného scénáře hodnota IRS roste nebo klesá v závislosti na změně časové struktury úrokové míry. Jak se blíží doba maturity IRS, přibližuje se jeho hodnota k nule, protože součet hodnot všech zbývajících očekávaných budoucích peněžních toků (plynoucích ze smluvní dohody) klesá.

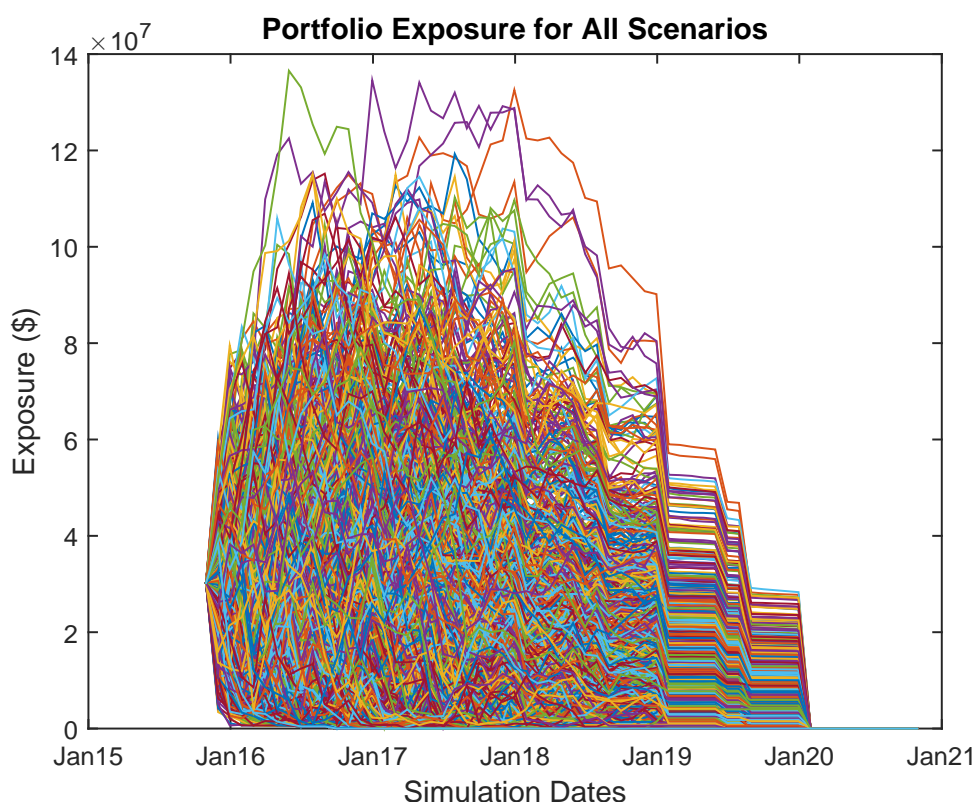
Sečteme-li pro daný scénář hodnoty všech uvažovaných IRS v každém datu simulace, dostaneme vývoj hodnoty celého portfolia. Celkové hodnoty portfolia pro všechny scénáře naší simulace zobrazuje Obrázek 4.6.

Dalším krokem je výpočet expozice protistrany definované v Kapitole 4.3.1. V MATLAB pro tento výpočet využijeme funkci `creditexposures`. Přímou



Obrázek 4.6: Ukázka simulací tržní hodnoty uvažovaného portfolia pěti úrokových swapů.

v datovém souboru je proměnná, která umožňuje zohlednit při výpočtu expozice netting. Funkce `creditexposures` umožňuje výpočet expozice jak v případě, že je uzavřena smlouva o nettingu dle vztahu (4.4), tak v případě neexistence nettingové smlouvy, viz vztah (4.3). Stejně jako při určení hodnoty celého portfolia získáme expozici celého portfolia součtem expozic všech protistran v jednotlivých datech simulace. Celkovou expozici portfolia pro každý scénář v naší simulaci můžeme pozorovat na Obrázku 4.7.



Obrázek 4.7: Ukázka simulací expozice uvažovaného portfolia pěti úrokových swapů.

Očekávanou expozici protistrany jsme definovali v Kapitole 4.3.1 jako střední hodnotu expozice protistrany. Pro výpočet očekávané expozice použijeme MATLAB funkci `exposureprofiles`, která ji určí jako průměrnou hodnotu všech expozic protistrany ze všech simulovaných scénářů.

Na závěr spočítáme diskontovanou očekávanou expozici protistrany danou vztahem (4.8). Nejdříve diskontujeme expozici protistrany v každém simulovaném scénáři a následně opět použijeme funkci `exposureprofiles` pro určení očekávané hodnoty. Diskontní faktory pro každý scénář určíme ze simulovaných okamžitých úrokových sazeb.

#### 4.4.4 Funkce pravděpodobnosti selhání protistrany

Pro výpočet CVA dle vztahu (4.1) potřebujeme určit pravděpodobnost selhání protistrany jako funkci času. Bude se jednat o distribuční funkci exponenciálního rozdělení.

Předpokládejme, že doba čekání na selhání protistrany je náhodná veličina  $X$  s exponenciálním rozdělením. Potom distribuční funkce této náhodné veličiny je definována jako

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

kde  $\lambda > 0$  je parametr exponenciálního rozdělení. Tedy distribuční funkce  $F(x)$  je pravděpodobnost že protistrana selže před časem  $x$ .

Pravděpodobnost selhání protistrany během jednoho roku označíme  $PD_{1Y}$ . Pak platí

$$PD_{1Y} = \Pr(X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda}. \quad (4.12)$$

Proto, známe-li  $PD_{1Y}$ , můžeme ze vztahu (4.12) odvodit parametr  $\lambda$ ,

$$\lambda = -\log(1 - PD_{1Y}). \quad (4.13)$$

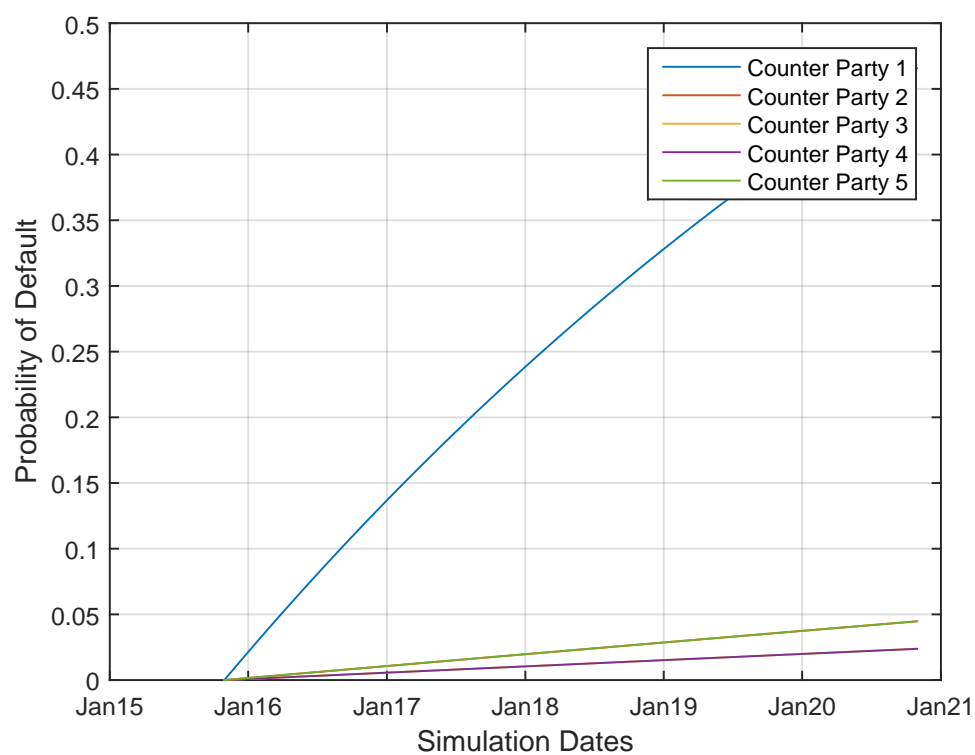
Pro naše výpočty použijeme pravděpodobnost selhání protistrany během jednoho roku, která je výstupem z interních ratingových modelů banky. Pomocí vztahu (4.13) odhadneme parametr exponenciálního rozdělení. Pro každou protistranu zkonstruujeme křivku pravděpodobnosti selhání v závislosti na čase danou distribuční funkcí (4.11).

Funkce popisující pravděpodobnost selhání protistrany před daným datem můžeme pozorovat na Obrázku 4.8. Vzhledem k tomu, že protistrany číslo 3 a číslo 4 mají stejný rating a tedy i stejnou  $PD_{1Y}$ , tak se jejich grafy funkcí pravděpodobnosti selhání kryjí. Ze stejného důvodu jsou totožné funkce pravděpodobnosti selhání u protistran číslo 2 a číslo 5.

#### 4.4.5 Výpočet CVA

Při výpočtu CVA budeme předpokládat, že expozice protistrany a pravděpodobnost jejího selhání jsou nezávislé veličiny. Jinak řečeno, nebudeme zohledňovat wrong-way riziko.

Výpočet CVA pro jednotlivé protistrany provedeme dosazením do rovnice (4.1). Diskontovanou očekávanou expozici protistrany jsme spočítali v Kapitole 4.4.3 a pravděpodobnost selhání protistrany před časem  $t$  jsme určili v Kapitole 4.4.4. Ztrátovost ze selhání budeme uvažovat konstantní a stejnou



Obrázek 4.8: Funkce pravděpodobností selhání protistran.

pro všechny protistrany  $LGD = 45\%$ , což je standardní regulační hodnota pro podniková portfolia. Míra návratnosti daná vztahem (4.10) je  $R = 0,55$ .

Výsledné hodnoty CVA pro každou protistranu jsou shrnuty v Tabulce 4.3.

Tabulka 4.3: Přehled výsledků CVA pro jednotlivé protistrany

Protistrana	CVA (v Kč)
1	800 505,82
2	199 337,60
3	276,59
4	783,73
5	78 501,06

## 4.5 Srovnání metod výpočtu CVA

Jedním z cílů práce je nalezení efektivní metody výpočtu kapitálového požadavku k riziku nárůstu CVA, proto v této části budeme srovnávat metodu výpočtu CVA popsanou v Kapitole 4.4 s metodou, používanou v bance, která poskytla data. Nejdříve popíšeme metodu určení CVA používanou v bance a následně srovnáme její výsledky s výsledky z předchozí části uvedenými v Tabulce 4.3.

Banka CVA počítá denně, ale účtování CVA provádí na měsíční bázi. Základní princip výpočtu CVA spočívá v odhadu tzv. *očekávané ztráty* ( $EL$ ) v průběhu života derivátu. Očekávaná ztráta je pojem používaný v teorii řízení úvěrového rizika. Jedná se o hodnotu, která odhaduje výši ztráty, jenž banka průměrně utrpí z úvěrů ve svém portfoliu v důsledku selhání některých klientů. Pro odhad očekávané ztráty platí následující vztah

$$EL = PD \cdot LGD \cdot EAD. \quad (4.14)$$

Při výpočtu  $EL$  z finančního derivátu nejdříve rozdělíme zbývajícím čas do maturity derivátu na časová okna o délce jednoho roku. Přičemž čas do maturity se zaokrouhluje na celé roky nahoru. Pro každé z těchto časových oken určíme  $EL$ , následně ji diskontujeme a nakonec sečteme tyto hodnoty přes všechna časová okna. Výsledkem je CVA daného finančního derivátu. Popsaný výpočet je dán následujícím vztahem

$$CVA = LGD \cdot \sum_{i=1}^M D(t_i) \cdot EAD(t_i) \cdot PD(i), \quad (4.15)$$

kde  $M$  je počet let do maturity derivátu,  $PD(i)$  je pravděpodobnost selhání protistrany během  $i$ -tého roku. Hodnota LGD je nastavena pro všechny protistrany na hodnotu 45 %.

Banka ve své metodě výpočtu CVA předpokládá, že EAD je konstantní po celou dobu trvání obchodu. To je hlavní rozdíl oproti přístupu prezentovanému v předchozí části práce. EAD pro daný časový derivát je odhadována jako současná tržní hodnota finančního derivátu.

Pravděpodobnost selhání protistrany v  $i$ -tém roce je dána vztahem

$$PD(i) = PD_{1Y}(1 - PD_{1Y})^{i-1}, \quad (4.16)$$

kde  $PD_{1Y}$  je průměrná pravděpodobnost selhání protistrany během jednoho roku daná interním ratingem protistrany. Tato metoda určení  $PD$  je diskrétní narozdíl od spojitého přístupu používaném v předchozí části.

V Tabulce 4.4 vidíme srovnání výsledků z Kapitoly 4.4.5 s CVA vypočítanými bankou. Všimněme si, že CVA spočítané v této práci dosahují významně nižší hodnot než CVA spočítané v bance.

Tabulka 4.4: Srovnání výsledků výpočtů CVA dle metody popsané v této práci a dle metody používané v bance

Protistrana	CVA (v Kč)	CVA vypočítané v bance (v Kč)
<b>1</b>	800 505,82	1 646 700,37
<b>2</b>	199 337,60	309 836,82
<b>3</b>	276,59	384,89
<b>4</b>	783,73	1 095,12
<b>5</b>	78 501,06	121 149,12

# Literatura

- [1] L. J. Allen. *An introduction to stochastic processes with applications to biology*. CRC Press, 2010.
- [2] J. Anděl. *Matematická statistika: Vysokoškolská učebnice*. SNTL, 1978.
- [3] N. Arora, P. Gandhi a F. A. Longstaff. Counterparty credit risk and the credit default swap market. *Journal of Financial Economics*, 103(2):280–293, 2012.
- [4] L. Bachelier. *Théorie de la spéculation*. Gauthier-Villars, 1900.
- [5] M. Baxter a A. Rennie. *Financial calculus: an introduction to derivative pricing*. Cambridge university press, 1996.
- [6] F. Black a M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, strany 637–654, 1973.
- [7] D. Brigo a F. Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [8] E. Canabarro a D. Duffie. Measuring and marking counterparty risk. *Asset/Liability Management for Financial Institutions, Institutional Investor Books*, 2003.
- [9] D. Cass a J. E. Stiglitz. The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portfolio allocation: A contribution to the pure theory of mutual funds. *Journal of Economic Theory*, 1970.
- [10] J. C. Cox, J. E. Ingersoll Jr a S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, strany 385–407, 1985.
- [11] S. Cyganowski, P. Kloeden a J. Ombach. *From Elementary Probability to Stochastic Differential Equations with MAPLE®*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [12] S. Cyganowski, P. E. Kloeden a T. Pohl. *Maple for stochastic differential equations*. WIAS, 1998.
- [13] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der physik*, 4, 1905.



- [14] Česká národní banka. Zpráva o výkonu dohledu nad finančním trhem v roce 2015. [https://www.cnb.cz/cs/dohled\\_financni\\_trh/souhrnne\\_informace\\_fin\\_trhy/zpravy\\_o\\_vykonu\\_dohledu/download/dnft\\_2015\\_cz.pdf](https://www.cnb.cz/cs/dohled_financni_trh/souhrnne_informace_fin_trhy/zpravy_o_vykonu_dohledu/download/dnft_2015_cz.pdf), 16. 6. 2016.
- [15] A. Etheridge. *A course in financial calculus*. Cambridge University Press, 2002.
- [16] L. Euler. *Institutionum calculi integralis*, ročník 1. imp. Acad. imp. Saënt., 1768.
- [17] European Union. Directive 2013/36/EU of the European Parliament and of the Council of 26 June 2013 on access to the activity of credit institutions and the prudential supervision of credit institutions and investment firms, amending Directive 2002/87/EC and repealing Directives 2006/48/EC and 2006/49/EC Text with EEA relevance. *Official Journal of the European Union*, 26. 6. 2013.
- [18] European Union. Regulation (EU) No 575/2013 of the European Parliament and of the Council of 26 June 2013 on prudential requirements for credit institutions and investment firms and amending Regulation (EU) No 648/2012 Text with EEA relevance. *Official Journal of the European Union*, 26. 6. 2013.
- [19] Evropský orgán pro bankovníctví. Shrnutí výroční zprávy za rok 2015. <https://www.eba.europa.eu/documents/10180/1637398/DZAA16001CSN.pdf>, 2016.
- [20] R. Fernholz. *Stochastic Portfolio Theory*. Springer New York, 2002.
- [21] D. Fuchs. Finanční trhy. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita v Brně. Technical report, ISBN 80-210-3526-9, 2004. 105 s.
- [22] T. Gard. *Introduction Stochastic Differential Equations*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, New York, 1988.
- [23] I. Gikhman a A. Skorokhod. *Stochastic Differential Equations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1972.
- [24] P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, ročník 53. Springer Science & Business Media, 2003.
- [25] J. Gregory. *Counterparty credit risk: the new challenge for global financial markets*, ročník 470. John Wiley & Sons, 2010.

- [26] J. Hammersley. *Monte Carlo Methods*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] J. Hull. *Options, futures, and other derivatives (8. ed., global ed.)*. Boston [u.a.] : Pearson, 2012.
- [28] J. Hull a A. White. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of financial studies*, 3(4):573–592, 1990.
- [29] J. Hull a A. White. The general Hull-White model and supercalibration. *Financial Analysts Journal*, 57(6):34–43, 2001.
- [30] J. Hull a A. White. Cva and wrong-way risk. *Financial Analysts Journal*, 68(5):58–69, 2012.
- [31] International Accounting Standards Board. IFRS 13 Fair Value Measurement. <http://www.ifrs.org/IFRSs/Pages/IFRS.aspx>, 12. 5. 2011.
- [32] K. Itô. Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524, 1944.
- [33] K. Itô. On a stochastic integral equation. *Proceedings of the Japan Academy*, 22(2):32–35, 1946.
- [34] K. Itô. Differential equations determining Markov processes. *Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai*, 244(1077):1352–1400, 1942.
- [35] K. Itô. *On Stochastic Differential Equations*. Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1951.
- [36] J. Jílek. Finanční rizika. 1. vyd. praha: Grada, 2000. 635 s. Technical report, ISBN 80-7169-579-3, 2000.
- [37] I. Karatzas a R. Fernholz. Stochastic portfolio theory: an Overview. *Handbook of Numerical Analysis*, 15:89–167, 2009.
- [38] I. Karatzas a S. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, ročník 113. Springer Science & Business Media, 2012.
- [39] I. Karatzas a S. E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, ročník 39. Springer Science & Business Media, 1998.
- [40] P. E. Kloeden, E. Platen a H. Schurz. *Numerical solution of SDE through computer experiments*. Springer, corr. 2nd print. vydání, 1997.

- [41] H. Kunita, S. Watanabe, aj. On square integrable martingales. *Nagoya Mathematical Journal*, 30:209–245, 1967.
- [42] S. Lauritzen. *Thiele: Pioneer in Statistics*. Oxford University Press, 2002.
- [43] J. Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, 47(1):13–37, 1965.
- [44] H. Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [45] G. Maruyama. Continuous Markov processes and stochastic equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4(1):48–90, 1955.
- [46] I. Melicherčík, L. Olšarová a V. Úradníček. *Kapitoly z finanční matematiky*. Epos, 2005.
- [47] R. Merton. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, strany 1851–72, 1972.
- [48] R. C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of economic theory*, 3(4):373–413, 1971.
- [49] R. C. Merton. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, strany 867–887, 1973.
- [50] R. C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, strany 141–183, 1973.
- [51] R. C. Merton. Theory of finance from the perspective of continuous time. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, strany 659–674, 1975.
- [52] G. N. Milstein. Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability and Its Applications*, 19:557–562, 1974.
- [53] J. Mossin. Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 34(4):768–783, 1966.
- [54] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, 6th ed., corr. 4th print. vydání, 2007.
- [55] A. Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing*, ročník 2. Springer, 2011.

- [56] J. Perrin a F. Soddy. *Brownian Movement and Molecular Reality*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2013.
- [57] E. Platen a N. Bruti-Liberati. *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance*, ročník 64. Springer Science & Business Media, 2010.
- [58] M. Podolskij, R. Stelzer, S. Thorbjørnsen a A. Veraart. *The Fascination of Probability, Statistics and their Applications: In Honour of Ole E. Barndorff-Nielsen*. Springer International Publishing, 2015.
- [59] M. Pykhtin a D. Rosen. Pricing counterparty risk at the trade level and CVA allocations. *Journal of Credit Risk*, 6(4):3–38, 2010.
- [60] S. T. Rachev, J. S. Hsu, B. S. Bagasheva a F. J. Fabozzi. *Bayesian Methods in Finance*. John Wiley & Sons, 2008.
- [61] O. Rejnuš. *Finanční trhy*. Key Publishing, Ostrava, třetí rozšířené vydání, 2011.
- [62] B. Rosenberg a J. Ohlson. The stationary distribution of returns and portfolio separation in capital markets: A fundamental contradiction. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 11(3):393–402, 1976.
- [63] R. Y. Rubinstein a D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 2016.
- [64] P. A. Samuelson. Rational Theory of Warrant Pricing. In *The Random character of Stock Market Prices*. Ed. P. Cootner, strany 506–532, 1964.
- [65] T. Sauer. Numerical solution of stochastic differential equations in finance. In *Handbook of Computational Finance*, strany 529–550. Springer, 2012.
- [66] D. Ševčovič, B. Stehlíková a K. Mikula. *Analytické a numerické metody oceňovania finančných derivátov*. Nakladateľstvo STU, 2009.
- [67] W. Sharpe. *Portfolio Theory and Capital Markets*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [68] W. F. Sharpe. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19(3):425–442, 1964.

- [69] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance Textbooks. Springer, 2004.
- [70] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance. Springer, 2012.
- [71] J. Stalker. A Portfolio Theory Paradox. *preprint*, 2009.
- [72] J. Tobin. Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2):65–86, 1958.
- [73] G. E. Uhlenbeck a L. S. Ornstein. On the Theory of the Brownian Motion. *Phys. Rev.*, 36:823–841, 1930.
- [74] O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177–188, 1977.
- [75] J. Veselá. Investování na kapitálových trzích. 1. vyd. praha: Aspi, 2007. Technical report, ISBN 978-80-7357-297-6.
- [76] M. Von Smoluchowski. Zur kinetischen theorie der brownschen molekularbewegung und der suspensionen. *Annalen der physik*, 326(14):756–780, 1906.
- [77] N. Wiener. Differential-Space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1):131–174, 1923.
- [78] P. Wilmott, S. Howison a J. Dewynne. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, 1995.
- [79] S. H. Zhu a M. Pykhtin. A guide to modeling counterparty credit risk. *GARP Risk Review*, July/August, 2007.



## Příloha

### Publikace autorky

---

- I. L. Křivánková. Equilibrium models for portfolio selection. In M. e. Jiří Zelinka, editor, *Mathematical Models and Financial Mathematics. Book of short papers*, pages 35–42, Brno, 2014. Masaryk University.
- II. L. Křivánková. Asset-pricing models in portfolio theory. In M. e. Jiří Zelinka, editor, *Financial Mathematics in Practice II, Book of short papers*, pages 42–49, Brno, 2013. Masaryk University.
- III. L. Křivánková. Continuous-time models in portfolio theory. In *XX International Conference PDMU-2012 Problems of Decision Making under Uncertainties*, pages 95–104, Brno, 2012. University of Defence.
- IV. L. Křivánková. The black-scholes equation for barrier options. In *7. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických s mezinárodní účastí : Sborník příspěvků část 1 - matematika*, 2011.
- V. L. Křivánková. Wiener process and applications. In *Workshop of the Jaroslav Hájek Center, Book of short papers*, 2010.
- VI. S. Kafková and L. Křivánková. Generalized linear models in vehicle insurance. *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis*, 62, 2014.
- VII. S. Kafková, L. Křivánková, and M. Leváková. Survival analysis of patients with brain tumour. In M. e. Jiří Zelinka, editor, *Mathematical Models and Financial Mathematics. Book of short papers*, pages 27–33, Brno, 2014. Masaryk University.



## Příloha

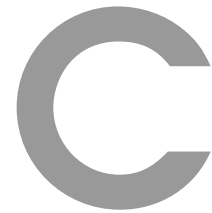
### Ukázka datového souboru

---

V příloze je uvedena ukázka datového souboru analyzovaného v Kapitole 3.8.

	date	cez	o2	kb	pm	pegas	cetv	nwr
1	21.2.2014	564	297.7	4768	10800	604	57	10.8
2	20.2.2014	563	297.1	4710	10800	607	57.95	10.9
3	19.2.2014	555	297.4	4740	10770	604.6	60.5	13.35
4	18.2.2014	544.3	298	4730	10800	609	60.5	14.6
5	17.2.2014	545	297.5	4730	10730	611	59.4	15.25
6	14.2.2014	541.3	297.5	4688	10740	610	60.5	15.6
7	13.2.2014	534	298.8	4460	10730	609.5	61.5	15.8
8	12.2.2014	525.5	297.3	4499	10770	603	62	17.45
9	11.2.2014	505.9	296.8	4460	10790	611	63.85	17.05
10	10.2.2014	507	296.4	4478	10740	607.9	61.45	17.3
11	7.2.2014	508	295.7	4430	10770	601	59.9	17.7
12	6.2.2014	513	295.7	4460	10740	601.2	59.45	17.4
13	5.2.2014	500	295.6	4340	10740	602	57.7	17.55
14	4.2.2014	502.4	295.5	4320	10790	605	61.4	17.25
15	3.2.2014	510	295.8	4400	10850	610	59.5	17.4
16	31.1.2014	515	295.9	4422	10899	600	59.9	17.25
17	30.1.2014	506.8	294.1	4360	10850	600.2	60.6	17.85
18	29.1.2014	492	294.1	4350	10832	601	58.55	17.7
19	28.1.2014	500	294.2	4350	10720	605.8	59.25	18
20	27.1.2014	514.5	294	4300	10722	605	59.45	18.2
21	24.1.2014	522.9	294.9	4350	10850	606.8	61.8	19.25


Showing 1 to 21 of 771 entries



## Příloha

### Ukázka programu v R

---

V příloze uvádíme ukázkou programu vytvořeného v prostředí . Tato část zdrojového kódu slouží k simulaci trajektorií Ornstein-Uhlenbeckova procesu.

```
# =====  
# Ornstein-Uhlenbeckův proces  
# =====  
#  
# jedna trajektorie  
#  
r0<- 2  
dt <- 0.001  
theta <- 2  
sigma <- 0.1  
kappa <- 1  
t <- seq (0, 1, by = dt)  
  
ri<-r0  
X<-r0  
dw_r<-rnorm((length (t) - 1),0,sqrt(dt))  
for (i in 1:(length (t) - 1)){  
  dr<-kappa*(theta-ri)*dt+sigma*dw_r[i]  
  ri<-ri+dr  
  X<-cbind(X,ri)  
}  
  
plot (t, X, type="l", col = "red", xlab = "t", ylab = "X(t)")  
abline (h = theta , lty = 2)  
# =====
```




```

# =====
# Ornstein-Uhlenbeckův proces
# =====
#
# více trajektorií
#
r0<- 2
dt <- 0.001
theta <- 2
sigma <- 0.1
kappa <- 1
t <- seq (0, 1, by = dt)
M<-t(X)
for (k in 1:4){
  ri<-r0
  X<-r0
  dw_r<-rnorm((length (t) - 1),0,sqrt(dt))
  for (i in 1:(length (t) - 1)){
    dr<-kappa*(theta-ri)*dt+sigma*dw_r[i]
    ri<-ri+dr
    X<-cbind(X,ri)}
M<-cbind(M,t(X))
}

matplot (t, M, type = "l", lty = 1, xlab = "t", ylab = "X(t)")
abline (h = theta , lty = 2)
# =====

```

Ukázku trajektorií Ornstein–Uhlenbeckova procesu s danými parametry zobrazuje Graf 1.3, který byl vytvořen v prostředí  pomocí předcházejícího zdrojového kódu.

Další část zdrojového kódu používáme ke zobrazení grafů dat a grafů simulací z Kapitoly 3.8.

```
# =====
# Data - grafy
# =====
#
date <- rev(scan(file="U:/R/data/date.csv", sep=";",
                 what=date(), dec=","))
date <- as.Date(date, "%d.%m.%Y")

matplot (date, data, type = "l", lty = 1, xaxt="n",
         xlab = "t", ylab = "P(t)", main = "price of asset")
axis.Date(side = 1, date)
legend(date[650], 10200,
       c("CEZ", "O2", "KB", "PM", "Pegas", "CT", "NWR"),
       col=1:7, lty=1, box.lty=0)
# =====
#
# =====
# Simulace - grafy
# =====
#
dates <- bizseq("2014-02-22", "2016-02-23",
               Calendar(holidaysANBIMA, weekdays=c("saturday", "sunday")))

plot (dates, r, type = "l", lty = 1, xlab = "t", ylab = "r(t)",
     yaxt="n", main = "return of market")

axis(2, at=seq(-0.0002, 0.0003, by=.0002),
     labels=paste(100*seq(-0.0002, 0.0003, by=.0002), "%") )

matplot (dates, t(x), type = "l", lty = 1, xaxt="n",
         xlab = "t", ylab = "P(t)", main = "price of asset")
axis.Date(side = 1, dates)
# =====
```

## Ukázka programu v MATLAB

---

Na závěr uvedeme ukázky z programu pro výpočet Credit Valuation Adjustment vytvořeného v prostředí MATLAB a využívaného v Kapitole 4.4.

První část programu načte data o úrokových swapech z datového souboru vytvořeného v aplikaci Microsoft Excel.

V další části se generuje počáteční výnosová křivka, která se dále využívá při modelování úrokové míry pomocí Hull-Whitova modelu (viz Kapitola 4.4.2).

```
clear all
% =====
% Načte data o IRS
% =====
%
swapFile = 'data.xls';
swapData = dataset('XLSFile',swapFile,'Sheet','SwapPortfolio');
swaps = struct(...
    'Counterparty',[],...
    'NettingID',[],...
    'Principal',[],...
    'Maturity',[],...
    'LegRate',[],...
    'LegType',[],...
    'LatestFloatingRate',[],...
    'FloatingResetDates',[]);

swaps.Counterparty = swapData.CounterpartyID;
swaps.NettingID     = swapData.NettingID;
swaps.Principal     = swapData.Principal;
swaps.Maturity      = swapData.Maturity;
swaps.LegType       = [swapData.LegType ~swapData.LegType];
swaps.LegRate       = [swapData.LegRateReceiving ...
    swapData.LegRatePaying];
swaps.LatestFloatingRate = swapData.LatestFloatingRate;
swaps.Period        = swapData.Period;
swaps.LegReset      = ones(size(swaps.LegType));

numSwaps = numel(swaps.Counterparty);
% =====
%
```

```

% =====
% Vytvoří počáteční výnosovou křivku a vykreslí její graf
% =====
%
Settle = datenum('30-Oct-2015');

Tenor = [3 6 12 24 36 48 5*12 72 7*12 96 108 10*12 144 180...
         20*12]';
ZeroRates = [0.0029 0.0037 0.0021 0.0025 0.0028 0.0033...
             0.004 0.0047 0.0056 0.0065 0.0075 0.0083...
             0.0099 0.0116 0.0127]';

ZeroDates = datemnth(Settle,Tenor);
Compounding = -1;
Basis = 0;
RateSpec = intenvset('StartDates', Settle,'EndDates',...
                    ZeroDates, 'Rates', ZeroRates,...
                    'Compounding', Compounding,'Basis',Basis);

figure;
plot(ZeroDates, ZeroRates, 'o-');
xlabel('Date');
datetick('keeplimits');
ylabel('Zero rate');
grid on;
title('Výnosová křivka');
% =====

```

Následující část programu načte historická data o sazbě PRIBOR z datového souboru vytvořeného v aplikaci Microsoft Excel. Potom vykreslí graf vývoje tříměsíční sazby PRIBOR a odhadne z ní parametry Hull-Whitova modelu (viz Kapitola [4.4.3](#)).

```

% =====
% Načte data o PRIBOR
% =====
%
priborFile = 'data.xls';
priborData = dataset('XLSFile',priborFile,'Sheet','PRIBOR');
yields=priborData.PRIBOR_3m;
Dates=priborData.Datum;

```

```

formatIn='dd.mm.yyyy';
Data=datetime(Dates,formatIn);
simDates=datetime('30-Oct-2015',0:1:(12*7));
% =====
%
% =====
% Vykreslí graf vývoje 3m PRIBOR
% =====
%
figure;
plot(Data, yields, '-');
xlabel('Date');
datetick('x', 'mmmyy');
ylabel('PRIBOR 3M');
grid on;
% =====
%
% =====
% Odhadne parametry Hull-Whitova modelu
% za použití funkce regress
% =====
%
regressors = [ones(length(yields)-1, 1) yields(1: end -1)];
[coefficients,~,residuals] = regress(diff(yields),regressors);

% Časový krok je nastaven v závislosti na frekvenci dat
% v simulaci
dt = mean(diff(simDates));

% Alpha -- rychlost reverze
Alpha = - coefficients(2)/dt

% Sigma -- volatilita
Sigma = nanstd(residuals)/sqrt(dt)
% =====

```