Rovnovážné modely v teorii portfolia

Lenka Křivánková

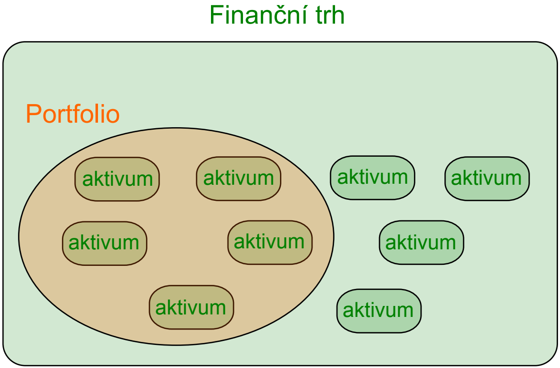
31. května 2016, Bratislava

Obsah

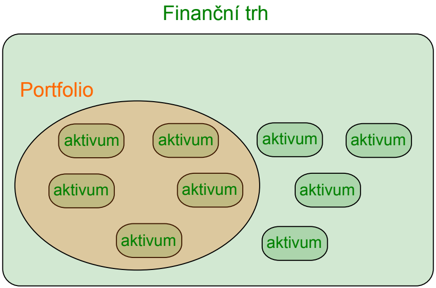
Obsah

Portfolio

- množina aktiv (akcií, dluhopisů, peněz...)



Portfolio



Váhy portfolia

- relativní podíly aktiv obsažených v portfoliu
- $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$, kde $\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$

Výnosnost a riziko

Výnosnost aktiva

Míra výnosnosti

- relativní zisk nebo ztráta z investice
- náhodná veličina r_j
- očekávaná výnosnost $\mathrm{E}(r_j) = \mu_j$
- rozptyl výnosnosti $\mathrm{D}(r_j) = \sigma_j^2$
- $r_j(t, t + \Delta t) = \frac{P_j(t+\Delta t) - P_j(t)}{P_j(t)}$

Riziko aktiva

Riziko

- směrodatná odchylka výnosnosti aktiva
- $\sqrt{\mathrm{D}(r_j)} = \sigma_j$

Výnosnost portfolia

Výnosnost portfolia

- náhodná veličina $r_p = \sum_{j=1}^{n} X_j r_j$
- očekávaná výnosnost portfolia $\mathrm{E}(r_p) = \mu_p = \sum_{j=1}^{n} X_j \mu_j$
- rozptyl výnosnosti portfolia $\mathrm{D}(r_p) = \sigma_p^2$

Riziko portfolia

Riziko

- směrodatná odchylka výnosnosti portfolia $\sqrt{\mathrm{D}(r_p)} = \sigma_p$
- $\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_j X_k \sigma_{jk}}$,
  kde $\mathrm{C}(r_j, r_k) = \sigma_{jk}$ je kovariance výnosností aktiva j a aktiva k

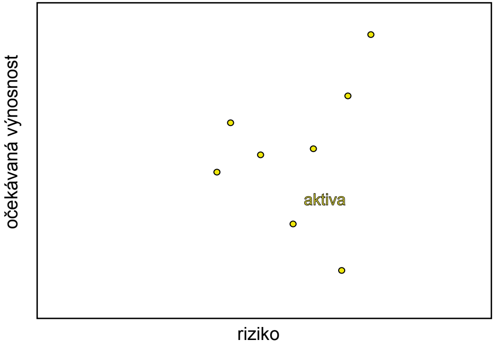
Obsah

Moderní teorie portfolia

- Harry Markowitz (1952)
- Tobinův model (1958)
- CAPM - Sharpe (1964), Lintner (1965) a Mossin (1966)

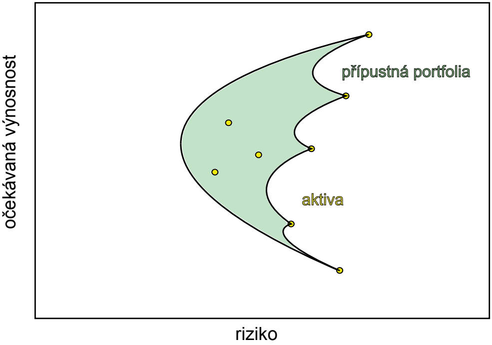
Markowitzova teorie portfolia

- prostor výnosnost-riziko



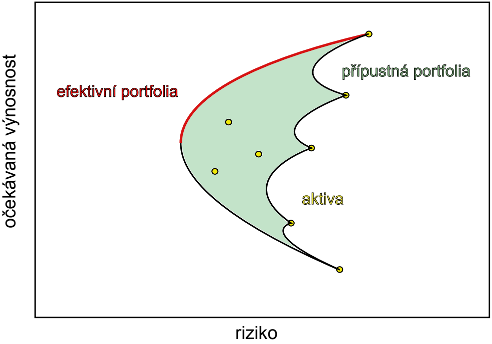
Markowitzova teorie portfolia

- množina přípustných portfolií



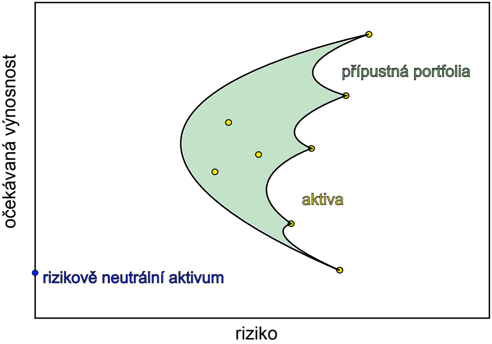
Markowitzova teorie portfolia

- množina efektivních portfolií



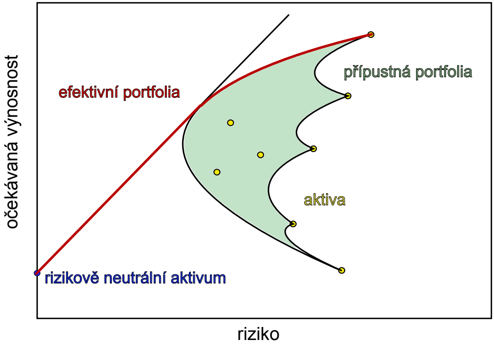
Tobinův model

- rizikově neutrální aktivum



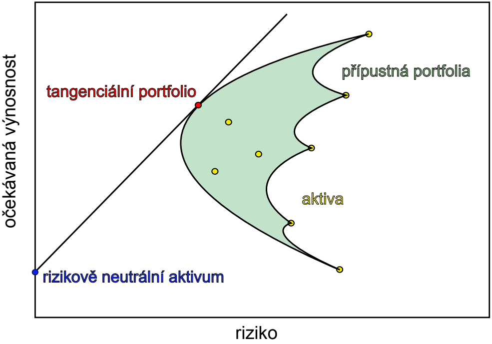
Tobinův model

- množina efektivních portfolií



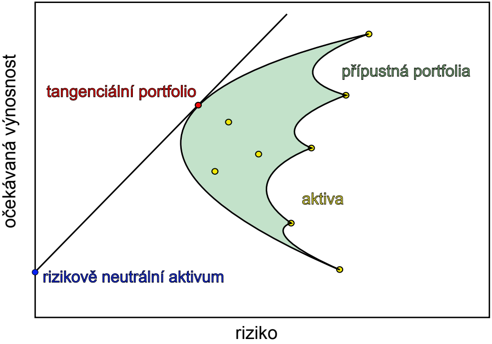
Tobinův model

- tangenciální portfolio



Tobinův model

- tangenciální portfolio $\rightarrow$ separační věta



CAPM

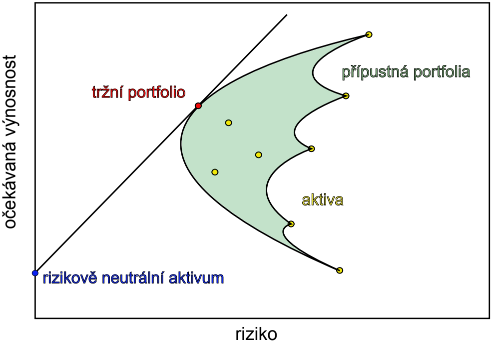
- zkoumá chování trhu
- vychází z Tobinova modelu

Předpoklady modelu:

- investoři při sestavování portfolia využívají Markowitzův přístup
- investoři mají homogenní očekávání

CAPM

- tržní portfolio



Důsledky CAPM

Důsledkem CAPM je tržní rovnováha a separační věta.

Věta (Separační věta)

Všichni investoři drží portfolia se stejnými relativními podíly rizikových aktiv bez ohledu na svou rizikovou averzi a své portfolio doplňují bezrizikovým aktivem dle svých rizikových preferencí.

Definice (Tržní rovnováha)

Pojem *tržní rovnováha* označuje takovou situaci, při které je nabídka vyrovnána s poptávkou.

Obsah

Klasická teorie portfolia x Dynamická teorie portfolia

	Klasická teorie portfolia	Dynamická teorie portfolia
čas	diskrétní	spojitý
výhody	intuitivní	realistický
nevýhody	nezohledňuje změny	složitý

Mertonův model

- předpokládá rovnováhu na trhu (CAPM)
- Model pro proces ceny aktiva $P(t)$ je dán

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)\mu\mathrm{d}t + P(t)\sigma\mathrm{d}W(t),$$

kde $P(t)$ je cena podkladového aktiva v čase t a $W(t)$ je Wienerův proces.

- separační věta – bezrizikové aktivum & tržní portfolio

Bezrizikové aktivum & Tržní portfolio

- Cena bezrizikového aktiva se řídí následujícím modelem

$$\mathrm{d}B(t) = B(t)r_f(t)\mathrm{d}t,$$

kde $B(t)$ je cena bezrizikového aktiva v čase t, $r_f(t)$ je míra výnosnosti bezrizikového aktiva.

- Cena tržního portfolia $P(t)$ se řídí modelem

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)\mu_p\mathrm{d}t + P(t)\sigma_p\mathrm{d}W(t),$$

kde $W(t)$ je Wienerův proces a μ_p, σ_p jsou konstanty.

Optimální portfolio

Investorovo bohatství $w(t)$ je proces popsaný modelem

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{w(t)} = X_p(t)\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)} + (1 - X_p(t))r_f\mathrm{d}t,$$

kde $X_p(t)$ označuje váhu pro tržní portfolio a $X_f = (1 - X_p(t))$ označuje váhu pro bezrizikové aktivum.

Merton odvodil explicitní řešení pro případ, kdy charakteristiky (očekávaná hodnota a rozptyl) výnosností aktiv jsou konstanty.

Ohlson-Rosenbergův Paradox

- Rosenberg and Ohlson (1976)
- objevili nekonzistenci Mertonova modelu
- rozpor mezi předpoklady:
  μ_p, σ_p jsou konstanty & tržní rovnováhou

Předpoklady

Definice (Dynamická rovnováha)

Kapitálový trh je v *dynamické rovnováze* právě tehdy, když v každém čase t, pro každé aktivum j a každého investora i existuje vektor cen aktiv $\boldsymbol{P}(t)$ takový, že

$$\sum_{i \in \boldsymbol{I}} w_j(i,t) = N_j(t) P_j(t) = V_j(t),$$

kde $V_j(t)$ je tržní hodnota aktiva j v čase t a $w_j(i,t)$ je optimální množství bohatství investované investorem i do aktiva j v čase t. Ceny $\boldsymbol{P}(t)$ se nazývají *tržní ceny*.

Předpoklady

Definice (Vlastnost separace)

Vektorová funkce pro optimální alokaci investorových prostředků do všech aktiv na trhu $\boldsymbol{w}(i,t)$ respektuje *vlastnost separace* právě tehdy, když existuje vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ takový, že $\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$, a existují skalární parametry $\lambda(i,t)$ takové, že

$$\boldsymbol{w}(i,t) = \lambda(i,t)\boldsymbol{X},$$

pro všechny $i \in I$ a všechny $t \in T$.

Rozpor mezi předpoklady

Věta

Nechť $\boldsymbol{P}(t)$ *pro všechny* $t \in T$ *jsou rovnovážné ceny. Dále předpokládejme, že na trhu platí vlastnost separace (definice 4). Pak*

$$\Pr\left(\frac{N_j(s)P_j(s)}{N_j(t)P_j(t)} = \frac{N_k(s)P_k(s)}{N_k(t)P_k(t)}\right) = 1 \qquad (1)$$

pro všechny časy $s, t \in T$ *a pro každé aktivum* j *a* k*.*

Důkaz.

Jednoduchý důkaz nalezneme v článku [Rosenberg and Ohlson (1976)]. □

Důsledek

Budeme-li předpokládat $N_j(t) = N_j$ pro každé aktivum i a všechna $t \in T$, z předchozí věty plyne

$$\Pr\left(r_j(t, t + \Delta t) = r_k(t, t + \Delta t)\right) = 1,$$

pro všechna $t \in T$ a pro všechna aktiva j a k.

Proto jsou aktiva j a k vzájemně dokonale zastupitelné. $\Rightarrow$ degenerace trhu

Stochastická teorie portfolia

- Robert Fernholz (2002)

Předpoklady modelu:

- parametry procesu ceny aktiva jsou také stochastické procesy
- nepředpokládá tržní rovnováhu
- nepředpokládá neexistenci arbitráže

Logaritmický model cen aktiv

Fernholz používá logaritmický model

$$\mathrm{d}\log P_j(t) = \gamma_j(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \xi_{jk}(t)\mathrm{d}W_k(t),$$

kde $P_j(t)$ je cena aktiva j v čase t, $\gamma_j(t)$ a $\xi_{jk}(t)$ jsou stochastické procesy a $\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))^{\mathrm{T}}$ je n-rozměrný Wienerův proces.

- $\gamma_j(t)$ se nazývá *tempo růstu*
- $\xi_{jk}(t)$ se nazývá proces *volatility*

Tempo růstu a volatilita

- Tempo růstu a míra výnosnosti jsou spolu ve vztahu

$$\mu_j(t) = \gamma_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} {\xi_{jk}}^2(t).$$

- Volatilita $\boldsymbol{\xi}$ je maticová odmocnina kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}.$$

Rovnovážný model s očekávanou výnosností závislou na ceně aktiva

Předpoklady modelu:

- očekávaná výnosnost není konstantní (je funkcí ceny)
- tržní rovnováha

Ceny aktiv

Předpokládáme, že ceny aktiv splňují stochastickou diferenciální rovnici (SDE)

$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\mu_j(t)\,\mathrm{d}t + P_j(t)\sum_{k=1}^{n}\xi_{jk}(t)\,\mathrm{d}W_k(t), \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))^{\mathrm{T}}$ je n-rozměrný Wienerův proces, $\mu_j(t)$ je očekávaná výnosnost aktiva j a $\xi_{jk}(t)$ jsou volatility aktiv.

Váhy tržního portfolia

- Pro vektor vah tržního portfolia uvažujeme následující vztah

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{3}$$

  kde $\mathbf{1}$ je vektor jedniček, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$ je vektor očekávaných výnosností aktiv a $\boldsymbol{\Sigma}$ je kovarianční matice výnosností aktiv.
- váhy tržního portfolia jsou rovny relativní tržní hodnotě

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{V}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}} \tag{4}$$

Stochastický proces pro očekávané výnosnosti

Rozdělme proces očekávané výnosnosti aktiv na dvě složky:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \cdot r(t) \tag{5}$$

- relativní vztahy mezi jednotlivými očekávanými výnosnostmi aktiv v portfoliu ($\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \boldsymbol{X}(t)$)
- výnosnost celého trhu dynamicky se měnící v čase
- multiplikativní vztah

Vašíčkův model pro míru výnosnosti trhu $r(t)$

Výnosnost celého trhu

- nevykazuje exponenciální růst, pohybuje se přibližně v nějakém intervalu
- má tendence navracet se k průměrné hodnotě

Vašíčkův model pro míru výnosnosti trhu $r(t)$

$$\mathrm{d}r(t) = \kappa(\theta - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t), \tag{6}$$

kde κ, θ a σ jsou konstanty.

Zjednodušující předpoklady pro SDE cen aktiv

Předpoklady modelu:

- volatility aktiv ξ_{jk} jsou konstantní v čase
- počty aktiv N_j jsou konstantní v čase

Z těchto předpokladů a z SDE (2) dostáváme

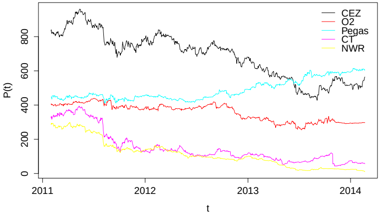
$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\left(\frac{P_j(t)N_j}{\sum_{i=1}^{n} P_i(t)N_i}\, r(t)\right)\mathrm{d}t + P_j(t)\sum_{k=1}^{n} \xi_{jk}\,\mathrm{d}W_k(t). \tag{7}$$

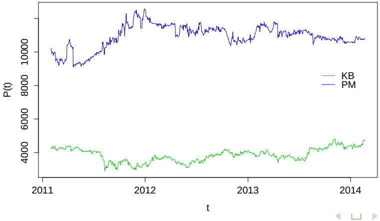
Soustava je nelineární a neexistuje její analytické řešení.

Data

- ČEZ - (největší výrobce elektřiny v Česku)
- O2 - (český telefonní operátor ve vlastnictví PPF)
- KB - (český bankovní ústav)
- PM - Philip Morris ČR a.s. (přední výrobce a prodejce cigaret v Česku)
- Pegas - Pegas Nonwovens s.r.o. (přední světový výrobce netkaných textilií se sídlem v ČR)
- ČT - Česká televize (veřejnoprávní televize)
- NWR - New World Resources (přední producent černého uhlí ve střední Evropě)

Ceny aktiv


CEZ
O2
Pegas
CT
NWR
P(t)
0
200
400
600
800
2011
2012
2013
2014
t


KB
PM
P(t)
4000
6000
8000
10000
2011
2012
2013
2014
t

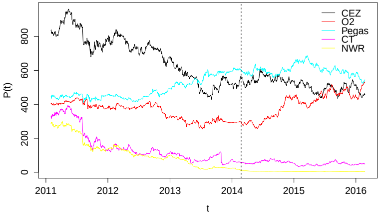
Eulerova metoda

Eulerova metoda řešení soustavy SDR je pro i-tou složku rovnice definována rekurzívním vztahem

$$X_{n+1}^{i} = X_{n}^{i} + \alpha^{i}(t_n, \boldsymbol{X}_n)\Delta_n + \sum_{j=1}^{m} \beta^{i,j}(t_n, \boldsymbol{X}_n)\Delta W_n^{j}, \qquad (8)$$

kde $\Delta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathrm{d}t = t_{n+1} - t_n$ je délka časového intervalu (t_n, t_{n+1}) a $\Delta W_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathrm{d}W(t) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ je přírůstek Wienerova procesu W v čase (t_n, t_{n+1}).

Model cen aktiv v portfoliu



Kam dál?

- odhad střední hodnoty a rozptylu ceny aktiva ze simulací
- jiné numerické metody
- jiný odhad ξ
- ???

Literatura

- FABOZZI, F. J. et al. 2008. *Bayesian Methods in Finance*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-92083-0.
- FERNHOLZ, E. R., 2002. *Stochastic Portfolio Theory*. New York: Springer-Verlag. ISBN 0-387-95405-8.
- MERTON, R. C., 1971. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*. 3, p. 373–413.
- ROSENBERG, B., OHLSON, J. A., 1976. The Stationary Distribution of Returns and Portfolio Separation in Capital Markets: A Fundamental Contradiction. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 11, p. 393–402.

Děkuji za pozornost.