

---

# Методы верификации для кластеризации временных рядов

---

A Preprint

Кривонос Анна Вадимовна  
МГУ им. М.В. Ломоносова  
ф-т ВМК, кафедра ММП  
s02200553@gse.cs.msu.ru

д.ф-м.н. Сенько Олег Валентинович  
МГУ им. М.В. Ломоносова  
ф-т ВМК, кафедра ММП  
senkoov@mail.ru

## Abstract

Данная работа посвящена оценке статистической значимости кластеризации временных рядов. Сходство двух временных рядов предполагается оценивать с помощью стандартного коэффициента корреляции Пирсона. Более точный учёт сходства/различий между временными рядами  $S_i$  и  $S_j$  достигался через подбор лага  $l$  из отрезка  $[0, 20]$ , при котором коэффициент корреляции Пирсона оказывался максимальным. В качестве метода кластеризации использовалась иерархическая кластеризация. Для верификации кластеризации рассматривается подход, основанный на проверке нулевой гипотезы о равновероятности различных соответствий мер сходства между двумя временными рядами. Проверка такой нулевой гипотезы производится с использованием варианта перестановочного теста, значения индикатора качества для кластеризации, полученной по исходной матрице сходства, сравнивается со значением индикатора качества для кластеризации, по случайной матрице сходства, сгенерированной из исходной путём случайных перестановок её внедиагональных элементов с сохранением симметрии. В качестве данных используются кривые темпа роста Covid-19 для различных стран мира, а также для отдельных регионов России.

Keywords Иерархическая кластеризация · коэффициент Пирсона · верификация кластеризации

## 1 Введение

Важнейшим задачами эпидемиологии являются исследования влияния различных факторов на ход эпидемического процесса, а также прогнозирование развития эпидемии. Например, заболеваемость коронавирусной инфекцией (COVID-19), поразившей практически весь мир в 2019-2021 годах, протекала в разных регионах и странах мира по-разному в зависимости от состояния систем здравоохранения, климатических, социально-экономических, демографических условий, других характеристик регионов. Для решения обеих задач могут быть применены современные методы машинного обучения и анализа данных. Целью настоящей работы является поиск оптимальной схемы использования кластерного анализа, являющегося популярным и эффективным инструментом современного анализа данных, для изучения эпидемического процесса. Кластерный анализ позволяет выделить в данных группы объектов, имеющих похожие описания, с по возможности максимальными различиями между группами. Методы кластерного анализа используются для анализа данных, связанных с развитием эпидемии ковид-19, различными группами исследователей. В работе Sengupta [2021] выделялись группы районов Индии, однородные по показателям плотности населения, числу госпиталей для пациентов с ковид-19, числу подтверждённых случаев ковид-19. В работе Zarikas V. [2020] кластеризация проводилась по эпидемическим кривым с использованием евклидова расстояния для оценки различия между кривыми. В работе Mengyang Liu [2021] территориальные кластеры внутри материкового Китая выделялись с использованием коэффициента пространственной корреляции Морана, связь с метеорологическими, экологическими и социально-экономическими факторами устанавливалась с помощью линейной регрессии с географической привязкой. В работе Rios R.A. [2021] используется иерархическая кластеризация (average-link clustering) на данных о заболеваемости и смертности и оценивается индекс перехода для

прогнозирования тенденции новой волны заболеваемости как расстояние между ближайшими кластерами. В Rizvi S.A. [2021] использовался метод k-средних для разбиения стран на группы, где набор признаков включает социальные, экономические показатели и показатели, связанные со здоровьем и окружающей средой, а также измерялся коэффициент корреляции Пирсона между эпид-кривыми заболеваемости/смертности и выбранными характеристиками. В Brzyska J. [2021] проводилась кластеризация стран ЕС с использованием метода Ворда и k-средних. Нами рассматривается альтернативный подход, основанный на проверке нулевой гипотезы о равновероятности различных соответствий мер сходства между двумя эпид-кривыми кривыми и парами регионов, которые могут возникать при развитии эпидемического процесса. Очевидно, что такая нулевая гипотеза не предполагает существование кластерной структуры, внутренне присущей соответствующему эпидемическому процессу. Проверка такой нулевой гипотезы может производиться с использованием варианта перестановочного теста, значения индикатора качества для кластеризации, полученной по исходной матрице сходства, сравнивается со значением индикатора качества для кластеризации, по случайной матрице сходства, сгенерированной из исходной путём случайных перестановок её внедиагональных элементов с сохранением симметрии.

## 2 Постановка задачи

На первом этапе вычислялась мера сходства между всевозможными парами эпид-кривых. Более точный учёт сходства/различий между эпид-кривыми  $S_i$  и  $S_j$  достигался через подбор лага  $l$  из отрезка  $[0, 20]$ , при котором коэффициент корреляции Пирсона оказывался максимальным. С этой целью для каждого  $l$  вычислялся коэффициент корреляции  $p_l^+$  между рядами  $S_i(0), \dots, S_i(n-l)$  и  $S_j(l), \dots, S_j(n)$  и коэффициент корреляции  $p_l^-$  между рядами  $S_i(l), \dots, S_i(n)$  и  $S_j(0), \dots, S_j(n-l)$ . В качестве меры близости  $p(S_i, S_j)$  между эпид-кривыми  $S_i$  и  $S_j$  используется максимальный коэффициент корреляции из набора  $p_0^+, p_0^-, \dots, p_{20}^+, p_{20}^-$ . Обозначим его  $p_{max}(S_i, S_j)$ .

Предположим, что  $P_{m \times m}$  является матрицей сходства  $m$  стран по соответствующим эпид-кривым. На диагонали симметричной матрицы  $P_{m \times m}$  находятся единицы, а внедиагональными элементами являются максимальные коэффициенты корреляции  $p(S_i, S_j)$ , рассчитанные согласно приведённой выше процедуре. После подсчёта мер близости между кривыми использовался метод иерархической агломеративной кластеризации. В качестве меры сходства двух групп эпидкривых  $G'$  и  $G''$  использовалось среднее значение меры сходства между эпидкривыми из разных групп:

$$P(G', G'') = \frac{1}{m' m''} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m''} p(S_i, S_j)$$

Процесс слияния кластеров прекращался, если мера сходства  $P$  между любыми двумя кластерами в текущей кластеризации не окажется ниже 0.5.

Пронумеруем элементы матрицы  $P_{m \times m}$ , находящиеся выше диагонали. Пусть  $I$  взаимно однозначное отображение множества  $\{(i, j) | i, j = 1, \dots, m, i < j\}$  в  $\{1, \dots, M\}$ , где  $M = \frac{m(m-1)}{2}$

Пусть  $f$  – перестановка элементов множества  $\{1, \dots, M\}$ . По перестановке  $f$  строится матрица  $P_{m \times m}^f$ . Пусть  $k = I(i, j)$ . Тогда элементу матрицы  $P_{m \times m}^f$  присваивается элемент  $P_{m \times m}$ , который находится в позиции  $(i^*, j^*) = I^{-1}[f(k)]$ . Элементы ниже главной диагонали записываются симметричным образом. Упомянутая выше нулевая гипотеза о равновероятности различных соответствий мер сходства между двумя эпид-кривыми кривыми и парами регионов предполагает также равновероятность матриц  $P_{m \times m}^f$ . Проверка такой нулевой гипотезы может производиться с использованием варианта перестановочного теста, значения индикатора качества  $I(C)$  для кластеризации  $C$ , полученной по исходной матрице сходства  $P_{m \times m}$  сравнивается со значениями индикатора качества  $I(C^f)$  для кластеризаций  $C^f$ , по матрицам сходства  $P_{m \times m}^f$ , генерируемым по  $\tilde{f}$  – случайному подмножеству перестановок элементов множества  $\{1, \dots, M\}$ . В качестве  $\rho$  – значения используется доля перестановок, при которых значение индикатора качества  $I(C^f)$  для кластеризации  $C^f$  достигает или превосходит значения индикатора качества  $I(C)$  для кластеризации  $C$ ,

$$\rho = \frac{|\{f \in \tilde{f} | I(C^f) \geq I(C)\}|}{|\tilde{f}|}$$

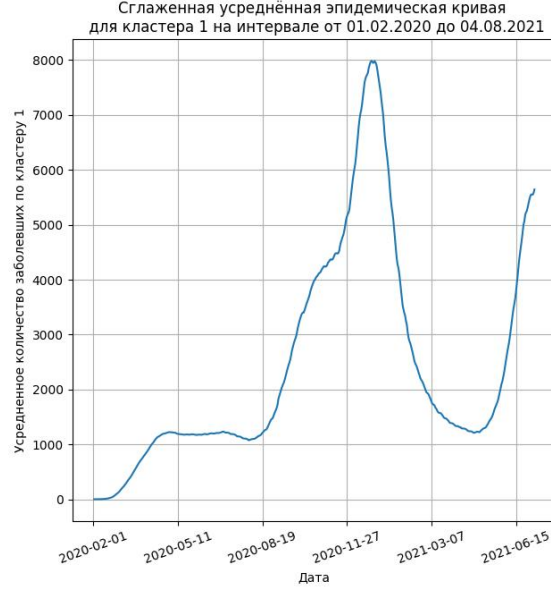


Рис. 1: Sample figure caption.

В качестве индикатора качества предлагается воспользоваться коэффициентом силуэта. Эта мера позволяет оценить, насколько каждый объект одного кластера близок к объектам в других кластерах. Силуэт  $I(c), c \in C$  имеет диапазон от -1 до 1, чем ближе значение силуэта к единице, тем дальше каждый из объектов находится от других кластеров. Коэффициент силуэты для временного ряда  $n$  вычисляется по формуле:

$$I(n) = \frac{b(n) - a(n)}{\max\{a(n), b(n)\}},$$

где  $a(n)$  - среднее расстояние от  $n$  до другого объекта внутри кластера,  $b(n)$  - среднее расстояние от  $n$  до объекта в другом кластере. Среднее значение всех силуэтов называют коэффициентом силуэта. В нашем случае в качестве метрики для оценки силуэта используется максимальный коэффициент корреляции Пирсона с лагом:

$$d_{i,j} = \rho_{\max}(S_i, S_j)$$

### 3 Эксперименты

Исходными данными для кластеризации стали кривые темпа роста Covid-19 за период с января 2020 года по август 2021 г.

На первом этапе с использованием описанного выше метода проведена кластеризация 110 стран мира по кривым суточного прироста случаев заболеваний. В результате выявлено 4 крупных кластера, каждый из которых содержал не менее 11 стран. Всего в 4 крупных кластера вошло 80 стран. Ещё 30 стран вошло в мелкие кластеры, содержащие не более 4 стран, или не образовали кластеров вообще. Ниже даётся распределение стран по четырём кластерам.

В кластер 1 включает Великобритания, Россия, США, Португалия, Панама, Нигерия, Мексика, Израиль, Ирландия, ОАЭ, ЮАР. Кластер 1 не имеет явной географической локализации. Сглаженная усреднённая эпидемическая кривая для кластера 1 приведены на рисунке 5. Из рисунка можно отметить высокую интенсивность эпидемии с октября 2020 г. по март 2021 г.

В кластер 2 вошли Австрия, Германия, Италия, Сербия, Болгария, Румыния, Северная Македония, Венгрия, Иордания, Польша, Украина, Канада, Республика Молдова, Сирия, Босния и Герцеговина, Норвегия, Финляндия, Албания, Эстония, Черногория, Ливан, Словакия, Чехия, Азербайджан, Литва, Хорватия, Грузия, Дания, Беларусь, Латвия, Словения, Нидерланды, Армения, Люксембург, Бельгия,

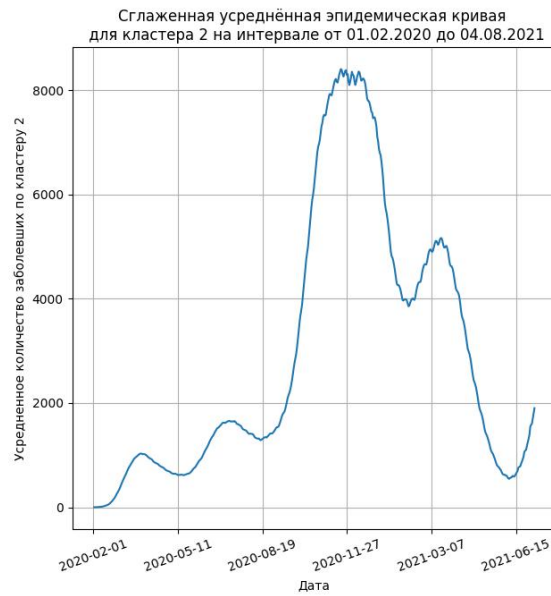


Рис. 2: Sample figure caption.

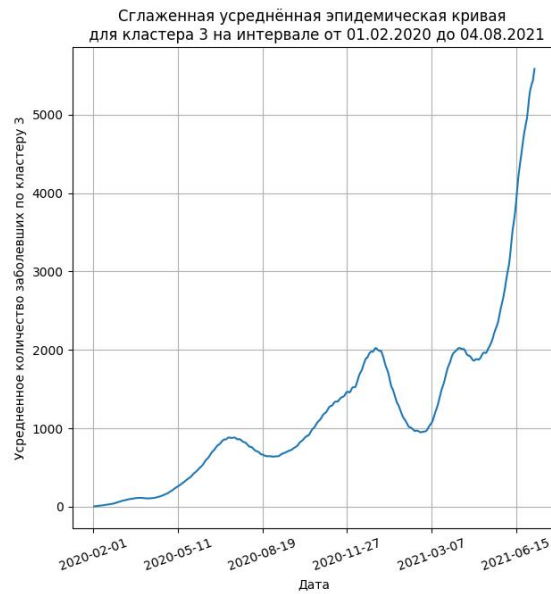


Рис. 3: Sample figure caption.

Кения, Швейцария, Швеция, Палестина. Страны, вошедшие в кластер 2 географически локализованы главным образом в Европе. Из рисунка 2 видно существование двух выраженных пиков на интервале с октября 2020г. до мая 2021 г.

В кластер 3 вошли Алжир, Марокко, Бангладеш, Вьетнам, Индонезия, Куба, Малайзия, Таиланд, Лаос, Мьянма, Тунис, Ливия, Греция, Иран, Кипр, Япония, Республика Корея. Кластер 3 содержит преимущественно страны с тропическим климатом. Сглаженная усреднённая эпидемическая кривая для кластера 3 приведены на рисунке 3.

В кластер 4 вошли Аргентина, Колумбия, Парагвай, Уругвай, Камбоджа, Шри Ланка, Бразилия, Ирак, Кувейт, Филиппины, Индия, Непал, Монголия. Значительная часть стран из кластера 4 географически

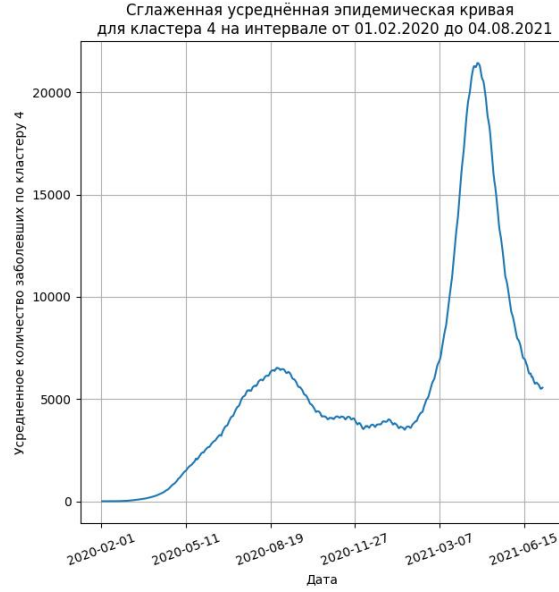


Рис. 4: Sample figure caption.

локализована в Южной Америки. Из рисунка 4 можно отметить высокую интенсивность эпидемии с апреля 2020 г. по август 2021 г.

В число стран, вошедших в мелкие кластеры или не образовавших кластеров вообще вошли Катар, Саудовская Аравия, Сингапур, Таджикистан. Боливия, Египет, Чили, Гватемала, Коста Рика, Оман, Мадагаскар, Перу, Эфиопия, Казахстан, Турция, Австралия, Гондурас, Исландия, Испания, Йемен, Кыргызстан, Китай, Никарагуа, Новая Зеландия, Пакистан, Судан, Танзания, Узбекистан, Франция, Эквадор.

Для данных о динамике заболеваемости за временной промежуток от 22-01-2020 до 05-08-2021 среднее значение всех вычисленных силуэтов при разделении стран на 4 обозначенных кластера составило 0.36.

Для верификации результата предлагается вычислить коэффициент с помощью использования перестановок. Полученные коэффициенты корреляции мы будем переставлять симметрично относительно диагонали в исходной матрице, содержащей все возможные лаговые корреляции. Осуществим 5000 различных перестановок  $f$  и посчитаем коэффициенты силуэта. Максимальное значение коэффициента силуэта равно 0.02.

## 4 Headings: first level

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula. See Section 4.

### 4.1 Headings: second level

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget

nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

$$\xi_{ij}(t) = P(x_t = i, x_{t+1} = j | y, v, w; \theta) = \frac{\alpha_i(t) a_{ij}^{w_t} \beta_j(t+1) b_j^{v_{t+1}}(y_{t+1})}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) a_{ij}^{w_t} \beta_j(t+1) b_j^{v_{t+1}}(y_{t+1})} \quad (1)$$

#### 4.1.1 Headings: third level

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Paragraph Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

## 5 Examples of citations, figures, tables, references

### 5.1 Citations

Citations use **natbib**. The documentation may be found at

<http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/natbib/natnotes.pdf>

Here is an example usage of the two main commands (**citet** and **citep**): Some people thought a thing [??] but other people thought something else [?]. Many people have speculated that if we knew exactly why ? thought this...

### 5.2 Figures

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi. See Figure 5. Here is how you add footnotes.<sup>1</sup> Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

### 5.3 Tables

See awesome Table 1.

The documentation for **booktabs** ('Publication quality tables in LaTeX') is available from:

<https://www.ctan.org/pkg/booktabs>

### 5.4 Lists

- Lorem ipsum dolor sit amet
- consectetur adipiscing elit.
- Aliquam dignissim blandit est, in dictum tortor gravida eget. In ac rutrum magna.

---

<sup>1</sup>Sample of the first footnote.

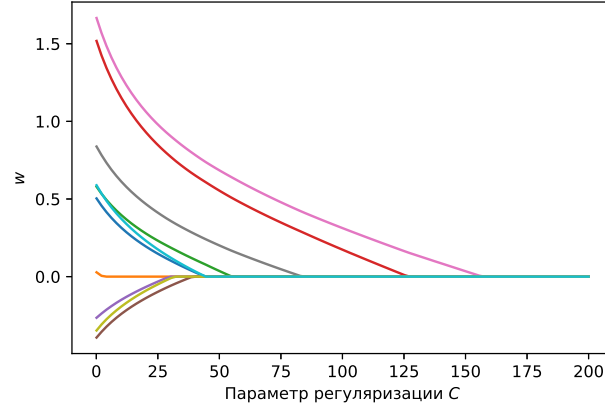


Рис. 5: Sample figure caption.

Таблица 1: Sample table title

Part		
Name	Description	Size ( $\mu\text{m}$ )
Dendrite	Input terminal	$\sim 100$
Axon	Output terminal	$\sim 10$
Soma	Cell body	up to $10^6$

### Список литературы

- Ganguli-B. SenRoy S. et al Sengupta, P. An analysis of covid-19 clusters in india. bmc public health. -, 2021.
- Gareiou Z. Zervas E Zarikas V., Stavros G. Pouloupoulos. Clustering analysis of countries using the covid-19 cases dataset. -, 2020.
- Zhiwei Li Yingxuan Zhu Yue Liu Xiaonan Wang et al Mengyang Liu, Mengmeng Liu. The spatial clustering analysis of covid-19 and its associated factors in mainland china at the prefecture level. Science of the Total Environment. 2021, 2021. doi:0.1016/j.scitotenv.2021.145992.
- Coimbra D.B. Lopes T.J.S. Abraham A. de Mello R.F.. Rios R.A., Nogueira T. Country transition index based on hierarchical clustering to predict next covid-19 waves. Scientific Reports. 2021, 2021. doi:10.1038/s41598-021-94661-z.
- Cheema M.A.. Rizvi S.A., Umair M. Clustering of countries for covid-19 cases based on disease prevalence, health systems and environmental indicators. Chaos, Solitons amp; Fractals. 2021;, 2021. doi:DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111240.
- Szamrej-Baran I. Brzyska J. Classification of the eu countries according to the vulnerability of their economies to the impact of covid-19 pandemic. European Research Studies Journal. 2021;, 2021. doi:DOI: 10.35808/ersj/2318.