v0.0.1

02.09.2024

Вычислительный практикум

Практическое занятие #7.0. Нормы, обусловленность матриц, обращение матриц

Векторные и матричные нормы

Квадратные матрицы размерности $n \times n$ и векторы размерности n представляют собой линейные нормированные пространства, в которых тем или иным способом можно ввести норму.

Для практических целей наиболее употребительны следующие две нормы n-мерных векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из линейного пространства R^n:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1, \tag{1}$$

отсюда

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \tag{2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{3}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \tag{4}$$

Эти нормы удовлетворяют неравенству

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant n \|\mathbf{x}\|_\infty. \tag{5}$$

В линейном пространстве квадратичных числовых матриц n-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

зададим норму следующим образом

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \tag{7}$$

где $\|\cdot\|$ — одна из введенных норм выше. Заданная по формуле (7) норма матрицы называется *согласованной* с нормой вектора.

В частности норма единичной матрицы $\mathbf{E}$ равна единице:

$$\|\mathbf{Ex}\| = |\mathbf{x}| \Rightarrow \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1. \tag{8}$$

Можно показать, что

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{9}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sqrt{\lambda_j \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right)}, \tag{10}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{11}$$

Если матрица $\mathbf{A}$ симметричная, то есть $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, где $\mathbf{A}^T$ — транспонированная матрица, полученная из матрицы $\mathbf{A}$, то

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|, \quad \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|}, \tag{12}$$

где λ_i — собственное число матрицы $\mathbf{A}$.

Норма Фробениуса (евклидова норма)

$$\|\mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}, \tag{13}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leqslant \|\mathbf{A}\|_E \, . \tag{14}$$

Согласно (7) для любого $\mathbf{x} \neq 0$ имеем

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \, , \tag{15}$$

причем можно доказать, что существует $\mathbf{x} \neq 0$, для которого (15) обращается в равенство. На основании (15) для любого $\mathbf{x} \in R^n$ выполняются неравенства

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \, , \tag{16}$$

а отсюда

$$\begin{gathered} \left\|\mathbf{A}^2\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \|\mathbf{x}\| \\ \cdots \\ \left\|\mathbf{A}^k\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathbf{A}\|^k \cdot \|\mathbf{x}\| \end{gathered} \tag{17}$$

то есть

$$\left\|\mathbf{A}^k\right\| \leqslant \|\mathbf{A}\|^k \, . \tag{18}$$

Обращение матриц

Для нахождения матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ формально требуется решить n систем, векторы правых частей которых представляют собой единичные орты. Однако, чтобы не осуществлять прямой ход n раз, можно все преобразования делать в расширенной матрице размера $n \times 2n$ вида $(\mathbf{A}, \mathbf{E})$, просто расширив циклы по j до значения $2n$ включительно.

Обусловленность матриц

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{19}$$

в которой $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$. Эта система имеет единственное решение $\mathbf{x} \neq 0$. На практике ее решение получается не точно в связи с округлениями, имеющими место при выполнении арифметических действий.

Погрешности вычислений часто можно интерпретировать как погрешности правой части системы (19). Поэтому наряду с системой (19) рассмотрим систему

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{x} + \mathbf{r}) = \mathbf{b} + \mathbf{h}, \tag{20}$$

где $\mathbf{h} \neq 0$ — погрешность правой части, $\mathbf{r}$ — погрешность решения. Имеем

$$\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}. \tag{21}$$

Вычислим отношение относительной погрешности решения к относительной погрешности правой части

$$\frac{\|\mathbf{r}\| \,/\, \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{h}\| \,/\, \|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|. \tag{22}$$

Величина

$$\mu\left(\mathbf{A}\right) = \operatorname{cond}\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \tag{23}$$

называется *числом обусловленности* матрицы $\mathbf{A}$. Оно равно максимально возможному коэффициенту усиления относительной погрешности от правой части к решению системы (19).

Если матрица $\mathbf{A}$ — симметричная матрица и выбрана вторая норма $\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$, то

$$\mu\left(\mathbf{A}\right) = \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|}{\min_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|}. \tag{24}$$

Если число обусловленности $\mu\left(\mathbf{A}\right)$ велико, то матрица $\mathbf{A}$ (или система (19)) называется плохо обусловленной, а если $\mu\left(\mathbf{A}\right)$ невелико, то хорошо обсуловленной.

Таким образом, чем меньше $\mu\left(\mathbf{A}\right)$, тем «лучше», то есть тем меньше погрешности решения будут относительно погрешностей в условии. Учитывая, что $\mu\left(\mathbf{A}\right) \geqslant 1$, то наилучшим числом обусловленности является 1.

Задание

Задание носит подготовительный характер, к последующим заданиям, поэтому рекомендуется выполнить его аккуратно, для упрощения своей жизни при выполнении последующих задач.

Необходимо разработать программу, со следующими компонентами:

- классы для матриц и векторов;
- алгоритмы для нахождения векторных норм 1, 2, ∞, а также подчиненных им матричных норм;

- функции с основными операциями для матриц и векторов: сложение/умножение, транспонирование и так далее;
- функция для нахождения обратной матрицы;
- функция для вычисления числа обусловленности.

Программу рекомендуется разрабатывать на языках C/C++, можно использовать и любой другой язык, или даже математический пакет.

Список литературы

[1] Лебедева А. В., Пакулина А. Н. Практикум по методам вычислений. Часть 1. Учебно-методическое пособие. СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2021. 156 с.

[2] Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений: Учебное пособие. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1998. 472 с.

[3] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 655 с.