ГРУППЫ 22.Б05, 22.Б06
IV семестр, 2023/2024 уч. год
<u>Задание №2.1</u>

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано алгебраическое или трансцендентное уравнение вида

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

причем, известно, что все интересующие вычислителя корни находятся на отрезке [A, B], на котором функция f(x) определена и непрерывна.

Требуется найти все корни уравнения (1) на [A, B] нечетной кратности (здесь A, B, f(x) – параметры задачи).
Решение задачи разбить на два этапа:

1. Процедура отделения корней уравнения (1) на отрезке [A, B];
2. Уточнение корней уравнения (1) на отрезках перемены знака вида $[a_i, b_i]$
   a. **Методом половинного деления (методом бисекции);**
   b. ~~Методом Ньютона (методом касательных);~~
   c. ~~Модифицированным методом Ньютона;~~
   d. **Методом секущих**
   e. ~~Методом простой итерации~~

с заданной точностью ε>0 (ε – параметр задачи).

Примечания:

1) Требования к оформлению задачи: вывести на печать название темы, исходные параметры задачи: A, B, вид функции f(x), ε.
2) Отделение корней произвести способом табулирования [A, B] с шагом $h>0$ (где h=(B–A)/N, N≥2 – параметр задачи). При реализации выбирать достаточно малые значения h. Результатом решения задачи отделения корней является последовательный вывод отрезков перемены знака функции f(x) вида $[a_i, b_i]$ из [A, B], а также указание их количества.
3) При уточнении корней на каждом из отрезков $[a_i, b_i]$ указанными методами, выводить на печать (для каждого метода)
   - название метода (для порядка));
   - начальное(ые) приближение(я) к корню (если есть);
   - количество шагов m (в каждом методе своё) для достижения точности **ε**, такой что $|x_m - x_{m-1}| < \varepsilon$;
   - приближенное решение x_m уравнения (1), найденное каждым из упомянутых методов с точностью **ε**;
   - $|x_m - x_{m-1}|$ (в методе бисекции выводить длину последнего отрезка);
   - абсолютную величину невязки для прибл. решения x_m : $|f(x_m) - 0|$.

<u>Задание №2.2</u>

Задача обратного интерполирования

<u>Подготовительный этап</u> (полностью повторяет подгот.этап из Задания №1)

ВЫВЕСТИ НА ПЕЧАТЬ таблицу из $(m+1)$ значения функции f в равноотстоящих с шагом $h=(b-a)/m$ точках (узлах) $x_i=a+i\cdot h$, где $i=0,1,..,m$. Узлы x_i – точки деления отрезка $[a; b]$ на m частей. (Можно создать таблицу по попарно различным рандомным узлам из $[a; b]$. Но тогда нужно обязательно упорядочить аргументы!)

Здесь число значений в таблице $m+1$, a, b — **параметры задачи**; формула для непрерывной функции f, значениями которой заполняется таблица – та же, что и в Задании №1. ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры.

Решение задачи обратного интерполирования

Задача:
Дана таблично-заданная функция (смотри таблицу, созданную на подготовительном этапе). Найти значение/значения аргумента/аргументов (в общем случае задача может иметь не единственное решение!), при котором данная таблично−заданная функция принимает значение F, здесь F — параметр задачи.

1 способ решения:

ПУСТЬ таблично-заданная функция, для которой решается задача, строго монотонна (предполагается, что функция f, таблица которой дана в задаче, на рассматриваемом участке − это строго монотонная и непрерывная функция, то у нее существует обратная функция f^{-1}, которая также строго монотонна и непрерывна).
ТОГДА задача обратного интерполирования может быть сведена к задаче поиска значения $f^{-1}(F)$ для таблично-заданной функции f^{-1}(при этом следует поменять местами столбцы исходной таблицы и далее трактовать значения $f(x_i)$ как аргументы для f^{-1}).
Таким образом, ИМЕЕМ задачу алгебраического интерполирования для таблично-заданной функции f^{-1}, где F − точка интерполирования. Теперь, если построить интерполяционный многочлен Q_n по таблице значений, то решением задачи будет значение $Q_n(F) \approx f^{-1}(F)$.

Степень интерполяционного многочлена n — параметр задачи ($n \le m$) − запросить у пользователя.
При нахождении значения $Q_n(F)$ использовать программу из Задания №1 (**представление в форме Лагранжа** ~~или Ньютона – неважно~~).
Результатом решения задачи обратного интерполирования *1 способом* является значение $X = Q_n(F)$.

ПРОВЕРКА: В тестовой задаче всегда можно посчитать модуль невязки $r_n(X) = \left| f(X) - F \right|$.

2 способ решения:

Если мы не располагаем информацией, что на рассматриваемом участке таблицы функция строго монотонна и непрерывна, и, следовательно, не полномочны «переворачивать таблицу», то возможно следующее решение.
Также этот способ решения можно применять, если первый способ возможен, но не дал хороший результат (например, если обратная функция плохо приближается многочленом). Или, предположим, Вы решили получить решение несколькими способами ☺

Результатом решения задачи обратного интерполирования *2 способом* будет(ут) корень(ни) уравнения $P_n(x)=F$, где $P_n(x)$ – интерполяционный полином функции $f(x)$. При построении интерполяционного многочлена $P_n(x)$ можно использовать программу из Задания №1, но получать не значение, а интерполяционный многочлен, как функцию.
Алгебраическое уравнение решить методом секущих или методом бисекции с точностью ε (Задание №2.1).

ПРОВЕРКА: В тестовой задаче всегда можно посчитать модуль невязки $r_n(\mathbf{x}) = \left| f(\mathbf{x}) - F \right|$ для каждого приближенного решения.

Решение тестовой задачи: В задаче обратного интерполирования взять формулу для функции из своего варианта Задания №1, $a=0$, $b=1$, $m=10$, $\varepsilon=10^{-12}$. Или любой другой промежуток монотонности функции f. Решить задачу ДВУМЯ СПОСОБАМИ (а значит мы предполагаем, что функция имеет обратную!). Следовательно, предварительно, для своей функции прикинуть промежутки ее монотонности и при сдаче задачи учитывать это (предлагать ввести отрезки, на которых есть строгая монотонность) Проанализировать результаты.

ВАЖНО! **Предусмотреть возможность ввода новых значений параметров *F*, *n* и *ε*.**

Тестовые задачи для Задания 2.1:

1. $f(x)= x – 10 \cdot \sin(x)$ [A, B] = [-5; 3] $\varepsilon = 10^{-6}$
2. $f(x)= 2^{-x} – \sin(x)$ [A, B] = [-5; 10] $\varepsilon = 10^{-6}$
3. $f(x)= 2^{x} – 2 \cos(x)$ [A, B] = [-8; 10] $\varepsilon = 10^{-6}$
4. $f(x)= \mathrm{sqrt}(4x+7) – 3\cdot \cos(x)$ [A, B] = [-1,5; 2] $\varepsilon = 10^{-8}$
5. $f(x)= x\cdot \sin(x) – 1$ [A, B] = [-10; 2] $\varepsilon = 10^{-5}$
6. $f(x)= 8\cdot\cos(x) – x – 6$ [A, B] = [-9; 1] $\varepsilon = 10^{-7}$
7. $f(x)= 10 \cdot \cos(x)– 0,1 \cdot x^2$ [A, B] = [-8; 2] $\varepsilon = 10^{-5}$
8. $f(x)= 4\cdot\cos(x) + 0,3\cdot x$ [A, B] = [-15; 5] $\varepsilon = 10^{-5}$
9. $f(x)= 5\cdot \sin(2x) – \mathrm{sqrt}(1– x)$ [A, B] = [-15; -10] $\varepsilon = 10^{-6}$
10. $f(x)= 1,2\cdot x^4+2\cdot x^3–13\cdot x^2–14,2\cdot x–24,1$ [A, B] = [-5; 5] $\varepsilon = 10^{-6}$
11. $f(x)= 2 \cdot x^2 – 2^x– 5$ [A, B] = [-3; 7] $\varepsilon = 10^{-5}$
12. $f(x)= 2^{-x} + 0,5\cdot x^2 – 10$ [A, B] = [-3; 5] $\varepsilon = 10^{-8}$
13. $f(x)= \sin(x) + x^3– 9x+3$ [A, B] = [-5; 4] $\varepsilon = 10^{-8}$
14. $f(x)= x-\cos^2(\pi x)$ [A, B] = [-1; 2] $\varepsilon = 10^{-8}$
15. $f(x)= (x-1)^2 – \exp(-x)$ [A, B] = [-1; 3] $\varepsilon = 10^{-8}$
16. $f(x)= \sin (5x) + x^2 – 1$ [A, B] = [-3; 3] $\varepsilon = 10^{-8}$
17. $f(x)= \cos(3x) – x^3$ [A, B] = [-2; 1] $\varepsilon = 10^{-8}$