Задание №3

Нахождение производных таблично-заданной функции
по формулам численного дифференцирования

1) Решать задачу численного дифференцирования предлагается для двух функций:
   - Функция $f_1(x)$ из задания 1 (номер варианта соответствует Вашему номеру в списке группы);
   - Функция $f_2(x) = e^{1{,}5kx}$, k = ((номер Вашего варианта по mod 5) +1).

2) Предложите пользователю выбрать функцию, для которой будет решаться задача (далее функция обозначена за $f(x)$).
3) Подготовительный этап (создаем таблицу):
   - Запросить у пользователя количество значений в таблице (внимание: будет ограничение! Количество $(m + 1)$ должно быть ≥ 5);
   - Запросить начальное значение a в таблице и шаг $h > 0$;
   - ВЫВЕСТИ НА ПЕЧАТЬ таблицу из $(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{1})$ значения функции в равноотстоящих с шагом h точках $x_i = a + i \cdot h,$ где $i = 0{,}1, \ldots, m.$
4) Исследовательский этап (получаем формулы численного дифференцирования для второй производной для «начала» и для «конца» таблицы). А именно: методом неопределённых коэффициентов требуется получить расчетную формулу как линейную комбинацию значений $f(a), f(a+h), f(a+2h), f(a+3h)$. А также одновременно получить представление погрешности для неё.
   Заменой h на $-h$ получить формулу для «конца» таблицы.
5) Собственно решение задачи численного дифференцирования:

Для таблично-заданной функции f (смотри таблицу, созданную на подготовительном этапе), найти значение ее первой и второй производной во всех узлах x_i таблицы. Для этого воспользоваться известными простейшими формулами численного дифференцирования, имеющими погрешность, порядка $O(h^2)$. Это формулы (3), (4) и (5) для первой производной и формула (6) для второй производной из Презентации к заданию 3.

Также на занятии были предложены три «новые» формулы для первой производной, порядок погрешности которых есть $O(h^4)$. Их также нужно реализовать в расчетах.

ВНИМАНИЕ! Вы заполняете таблицу значениями функции на подготовительном этапе и больше не обращаетесь к процедуре для $\boldsymbol{f(x)}$. **Дальше Вы все время обращаетесь к числам из второго столбца таблицы.**

Как результат, нужно вывести на печать таблицу такого вида:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)_{ЧД}$ формулы (3), (4), (5) погрешно-стями $O(h^2)$	$\lvert f'(x_i)_T - f'(x_i)_{ЧД} \rvert$ абс.погрешность для ф-л (3), (4), (5)	$f'(x_i)_{ЧД}$ «новые» формулы с порядком погрешности $O(h^4)$	$\lvert f'(x_i)_T - f'(x_i)_{ЧД} \rvert$ абс.погрешность для «новых» формул	$f''(x_i)_{ЧД}$ Ваши авторские формулы и ф-ла (6)	$\lvert f''(x_i)_T - f''(x_i)_{ЧД} \rvert$ абс.погрешность для второй производной

6) Этап анализа полученных результатов (проанализировать, насколько фактические погрешности «укладываются» в теорию).
7) Предложить пользователю выбрать другую функцию, ввести новые значения параметров или перейти к уточнению по Рунге.
8) Если пользователь выбрал уточнение по Рунге-Ромбергу, вновь предоставить ему возможность выбора функции, запросить количество точек, начальное значение и шаг h; вывести на экран таблицу. Затем предложить выбрать значение x_j, для которого будем уточнять производные. Найти значение первой и второй производной в этой точке по формулам ч.д., погрешность которых $O(h^2)$. Получить уточненные значения для первой и для второй производной (смотри теорию ниже). Вычислить абсолютные погрешности для уточненных значений. Устно проанализировать результаты.

Вывести на печать таблицу такого вида:

x_i	$f(x_i)$	Значение $J(h)$ по формулам (3), (4), (5) с шагом h	$\lvert f'(x_i)_T - J(h) \rvert$ абс.погрешность	Значение $J(h/2)$ по формулам (3), (4), (5) с шагом $h/2$	$\lvert f'(x_i)_T - J(h/2) \rvert$ абс.погрешность	Уточненное значение $\bar{J}$	$\lvert f''(x_i)_T - \bar{J} \rvert$ абс.погрешность

О методе Рунге-Ромберга уточнения значений (справочно)

Пусть в результате применения какого-либо метода (например, какой-либо формулы численного дифференцирования, составной квадратурной формулы и проч.) получены приближенные значения $J(h)$ и $J\left(h/2\right)$. Первое получено, когда в исходных данных и в расчетах использовали шаг h, второе – шаг $h/2$.
Тогда если известен порядок малости относительно шага погрешности этого метода (например, погрешность $O(h^r)$ то возможно произвести уточнение (получить более точное значение $\bar{J}$) по формуле:

$$\bar{J} = J\left(h/2\right) + \frac{J\left(h/2\right) - J(h)}{2^r - 1} = \frac{2^r \cdot J\left(h/2\right) - J(h)}{2^r - 1}.$$