Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математико-механический факультет

2020

Содержание I

Постановка задачи I

Рассмотрим задачу Коши для обыкновеннго дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Будем считать, что эта задача имеет единственное решение на промежутке $[x_0, b]$.
Запишем (1) в интегральном виде

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{2}$$

Постановка задачи II

Методы численного решения этого уравнения заключаются в приближенном вычислении значений гипотетического решения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_N \in [x_0, b]$.
Для простоты мы далее будем считать точки (узлы) $x_1, \ldots, x_N$ равноотстоящими, т. е. $x_k = x_0 + kh$, где $h = (b - x_0)/N$.
Во всех рассмотренных методах решения задачи (1) значения в узлах будут строиться последовательно, т. е. будем считать, что значения $y_1 \approx y(x_1), \ldots, y_m \approx y(x_m)$ уже известны, построим $y_{m+1} \approx y(x_{m+1})$.

Метод Эйлера и улучшенный метод Эйлера

Наиболее простой способ получить численное решение уравнения (2) — вычислить интеграл в правой части при помощи какой-либо квадратурной формулы.
При этом для вычисления y_{m+1} можно использовать только значение y_m.
Отметим, что такие методы решения дифференциального уравнения дают такую же погрешность, как и соответствующие квадратурные формулы.

Метод Эйлера I

Применим формулу левых прямоугольников

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t))dt = y_m + hf\left(x_m, y_m\right) + O(h^2),$$

т. е. расчетная формула метода Эйлера

$$y_{m+1} = y_m + h\, f\left(x_m, y_m\right), \;\; m = 0,\, 1, \ldots, N-1 \qquad (3)$$

на одном шаге имеет погрешность $O(h^2)$ (в предположении, что все используемые данные точны).

Метод Эйлера II

На промежутке $[x_0, b]$ погрешность метода не лучше, чем $O(h)$, но фактически погрешность может быть существенно хуже из-за нелинейного возрастания ошибки при интегрировании.

Улучшенный метод Эйлера I

Применим для вычисления интеграла в правой части (2) формулу средних прямоугольников.
Для этого введем дополнительную точку посередине между x_m и x_{m+1}.
Обозначим её $x_{m+\frac{1}{2}} = x_m + \frac{h}{2}$.
В ней вычислим значение решения уравнения по обычному методу Эйлера, т. е. при помощи формулы левых прямоугольников

$$y_{m+\frac{1}{2}} = y_m + \frac{h}{2} f\left(x_m, y_m\right).$$

Улучшенный метод Эйлера II

Теперь значение в точке x_{m+1} вычислим по формуле средних прямоугольников

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t))dt \approx y_m + hf\left(x_{m+\frac{1}{2}}, y_{m+\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= y_m + hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f\left(x_m, y_m\right)\right). \quad (4)$$

Обычный метод Эйлера можно уточнить и другим способом.

Улучшенный метод Эйлера III

Предположим, что значение y_{m+1} вычислено по формуле левых прямоугольников, т. е. как в формуле (3), далее вычислим соответствующий интеграл по формуле трапеций.
Итак, пусть

$$\tilde{y}_{m+1} = y_m + hf\left(x_m, y_m\right).$$

Тогда

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t))dt \approx y_m + \frac{h}{2}\left(f\left(x_m, y_m\right) + f\left(x_{m+1}, \tilde{y}_{m+1}\right)\right). \quad (5)$$

Улучшенный метод Эйлера IV

В заключение отметим, что оба предложенных изменения метода Эйлера дают погрешность не лучше, чем $O(h^2)$, но фактически погрешность может быть существенно хуже из-за нелинейного возрастания ошибки при интегрировании, так же как и в п. 1.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка I

Расчетные формулы метода

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_m, y_m), \\ k_2 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf\left(x_m + h, y_m + k_3\right), \ m = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{7}$$

Оказывается, если $y_m = y(x_m)$ (равенство точное), то $y_{m+1} - y(x_{m+1}) = O(h^5)$.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка II

На всей интегральной кривой метод дает погрешность не лучше, чем $O(h^4)$ по причинам, указанным в п. 1.
Если уравнение имеет вид $y' = f(x)$, то $k_2 = k_3$ и видно, что расчетная формула метода Рунге-Кутты получается в результате применения формулы Симпсона, иначе — обобщенной формулы Симпсона.

Замечание 1

Все рассмотренные выше методы одношаговые, т. е. для получения решения в следующей точке используется решение лишь в одной предыдущей точке. В одношаговых методах шаг может быть переменным.

Правило Рунге практической оценки погрешности I

Предположим, что метод вычисления значений решения задачи (1) фиксирован и имеет порядок точности s.
Это означает, что $y(x_i) - y_i = O(h^s), \ i = 1, 2, \ldots, N$.
Здесь используются принятые ранее обозначения.
Вычислим значение в точке x_m с шагом h и $h/2$.
Полученные значения обозначим через $y_m^{(h)}$ и $y_m^{(h/2)}$ соответственно.
Тогда главный член погрешности находится по формуле

$$R_m^{(h)} = \frac{y_m^{(h/2)} - y_m^{(h)}}{2^s - 1}.$$

Правило Рунге практической оценки погрешности II

Для достаточно малых h можно утверждать, что, если $|R_m^{(h)}| < \varepsilon$, то $|y(x_m) - y_m^{(h/2)}| < \varepsilon$.
Экстраполяция по Ричардсону заключается в уточнении значения в точке x_m по формуле

$$\hat{y}_m = y_m^{(h/2)} + R_m^{(h)}. \tag{8}$$

Заметим, что в результате уточнения по формуле (8) строится метод с более высоким порядком погрешности, чем исходный.

Методы Адамса I

Ранее мы отмечали, что узлы $x_1, \ldots, x_N$ мы считаем равноотстоящими для удобства. И во всех рассмотренных выше методах это действительно не более чем удобство, поскольку все эти методы являлись одношаговыми, т. е. значение y_{m+1} строилось исключительно по y_m.
В частности, все рассмотренные методы допускают переменный шаг аргумента $(x_{m+1} - x_m = h_m)$.
Теперь мы зафиксируем шаг $h = (b - x_0)/N$ и все узлы $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \ldots, N$ будем считать равноотстоящими.
При построении y_{m+1} будут использоваться значения решения в $k + 1$ предыдущих узлах $y_{m-k}, \ldots, y_m$.

Методы Адамса II

Предположим, что известны приближенные значения $y(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$,
$y_i \approx y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $k \leqslant m < N$ (они могут быть найдены одним из рассмотренных выше методов), в дальнейшем $m \geqslant k$.

Экстраполяционный метод Адамса I

Начинаем, как обычно, с формулы (2)

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x))dx.$$

Подынтегральную функцию $f(x, y(x))$ заменим на интерполяционный многочлен, построенный по узлам $x_{m-k}, \ldots, x_m$.
Поскольку приближённое решение y_{m+1} находится в точке, лежащей вне промежутка, на котором лежат все узлы

Экстраполяционный метод Адамса II

интерполирования, метод и получил название экстраполяционного.
В зависимости от формы многочлена, получатся разные формулы метода.
Сначала предположим, что функцию $f(x, y(x))$ заменили на многочлен в форме Ньютона для конца таблицы.
Напомним, что значения $y_{m-k}, \dots, y_m$ мы считаем известными.
Положим $q_j = h\, f(x_j, y_j)$.
Многочлен имеет вид

$$P_k(x_m + th) = q_m + t\Delta q_{m-1} + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{k!}\Delta^k q_{m-k}, \qquad (9)$$

Экстраполяционный метод Адамса III

где конечные разности вычисляются по правилу

$$\Delta^j q_s = \Delta^{j-1} q_{s+1} - \Delta^{j-1} q_s. \tag{10}$$

Тогда

$$\int\limits_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x))\,dx \approx \int\limits_0^1 \sum_{j=0}^{k} \frac{t(t+1)\cdots(t+j-1)}{j!} \Delta^j q_{m-j}\,dt. \tag{11}$$

Для упрощения формулы удобно ввести обозначение

$$a_j = \frac{1}{j!} \int\limits_0^1 t(t+1)\cdots(t+j-1)\,dt. \tag{12}$$

Экстраполяционный метод Адамса IV

Тогда получаем расчетную формулу

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^{k} a_j\, \Delta^j q_{m-j}. \tag{13}$$

Формулу (13) можно применять, начиная с $m = k$ для $m = k,\ k+1, \ldots, N-1$.
Если решение $y(x)$ — многочлен степени не выше $k+1$, то экстраполяционный метод Адамса дает точное значение решения (в предположении, что все вычисления осуществляются точно).

Экстраполяционный метод Адамса V

На шаге погрешность метода $O(h^{k+2})$, на всем промежутке — не лучше $O(h^{k+1})$ (см. п. 1).
При $k = 4$ получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_m + \frac{1}{2}\Delta q_{m-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{m-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{m-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 q_{m-4}. \quad (14)$$

Для вычислений рекомендуется использовать таблицу, фрагмент которой представлен таблицей 1.

Экстраполяционный метод Адамса VI

Таблица 1

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	$\Delta^4 q$
x_0	y_0	q_0				
			Δq_0			
x_1	y_1	q_1		$\Delta^2 q_0$		
			Δq_1		$\Delta^3 q_0$	
x_2	y_2	q_2		$\Delta^2 q_1$		$\Delta^4 q_0$
			Δq_2		$\Delta^3 q_1$	
x_3	y_3	q_3		$\Delta^2 q_2$		$\Delta^4 q_1$
			Δq_3		$\Delta^3 q_2$	
x_4	y_4	q_4		$\Delta^2 q_3$		
			Δq_4			
x_5	y_5	q_5				
x_6	y_6					

Экстраполяционный метод Адамса VII

Начало таблицы — часть таблицы, значения в ячейках которой должны быть известны для применения экстраполяционного метода Адамса.
Значения решения в точках начала таблицы следует вычислять соответствующим по порядку методом.
Преимущества метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты

- экономичность;
- наглядный контроль — по последним конечным разностям можно судить о точности результата.

Экстраполяционный метод Адамса VIII

Недостатком метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты является его многошаговость, то есть то, что решение в следующей точке зависит от решения в нескольких предыдущих точках, и они должны быть равноотстоящими.
Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа или заменяя конечные разности в (14) выражениями через значения функции, можно получить безразностную формулу экстраполяционного метода Адамса

Экстраполяционный метод Адамса IX

$$y_{m+1} \approx y_m + \sum_{j=0}^{k} b_{kj}\, q_{m-j}, \tag{15}$$

$$b_{kj} = \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!} \int\limits_0^1 \frac{t(t+1)\cdots.(t+k)}{t+j}\, dt, \quad j = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k. \tag{16}$$

Числа b_{kj} не зависят от m и от h, но зависят от порядка метода.

Экстраполяционный метод Адамса X

Расчетные формулы безразностного экстраполяционного метода Адамса различных порядков приведены ниже в таблице 2.
Заметим, что алгоритм вычисления решения по безразностной формуле реализуется проще, чем по разностной формуле, но наглядный контроль здесь отсутствует.

Экстраполяционный метод Адамса XI

Таблица 2

k	Экстраполяционный метод Адамса [1]
0	$y_{m+1} = y_m + q_m$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(3\,q_m - q_{m-1})$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(23\,q_m - 16\,q_{m-1} + 5\,q_{m-2})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(55\,q_m - 59\,q_{m-1} + 37q_{m-2} - 9\,q_{m-3})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(1901\,q_m - 2774\,q_{m-1} + 2616\,q_{m-2} - 1274\,q_{m-3} + 251\,q_{m-4})$

[1] Напомним, что методы имеют порядок k+1.

Интерполяционный метод Адамса I

Пусть $h = (b - x_0)/N$ и $x_i = x_0 + ih,\ \ i = 0,\, 1, \ldots, N$.
Предположим, что известны приближенные значения $y(x)$ в точках $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_m$, $y(x_i) \approx$y$_i$,
$i = 0,\, 1, \ldots, m,\ \ k \leqslant m < N$.
Обозначим $q_i = hf(x_i,\, y_i)$.
Заменяя приближенно функцию $f(x, y(x))$ в выражении

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x))\, dx$$

интерполяционным многочленом k-ой степени в форме Ньютона для конца таблицы по узлам

Интерполяционный метод Адамса II

$x_{m+1}, x_m, \ldots, x_{m+1-k}$ и интегрируя, получим расчетную формулу метода

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^{k} a_j^* \Delta^j q_{m+1-j}, \tag{17}$$

где

$$a_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^{0} t(t+1)\cdots(t+j-1)\, dt. \tag{18}$$

Интерполяционный метод Адамса III

Как видно, в правой части формулы (17) присутствует $q_{m+1} = hf(x_{m+1}, y_{m+1})$, т. е. формула (17) является уравнением относительно y_{m+1}.
Интерполяционный метод Адамса является неявным методом.
Уравнение (17) рекомендуется решать методом итераций.
В качестве нулевого приближения можно взять y_{m+1}, найденное экстраполяционным методом, обозначим его $y_{m+1}^{(0)}$.
Вычислим

$$q_{m+1}^{(0)} = hf(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}),\ \Delta q_m^{(0)} = q_{m+1}^{(0)} - q_m^{(0)},\ \Delta^2 q_{m-1}^{(0)}, \ldots,\ \Delta^k q_{m+1-k}^{(0)}.$$

Интерполяционный метод Адамса IV

Используя эти значения, вычисляем, $y_{m+1}^{(1)}$ по расчетной формуле (17).
Сравниваем $|y_{m+1}^{(1)} - y_{m+1}^{(0)}| < \varepsilon$, где ε — заданная точность[2].
Если условие не выполняется, то делаем перерасчет до тех пор, пока не будет выполнено условие.
Формулу (17) можно применять для
$m = k,\ k+1, \dots, N-1.$
Если решение $y(x)$ — многочлен степени не выше $k+1$, то интерполяционный метод Адамса дает точное значение решения.
На шаге погрешность метода $O(h^{k+2})$, на всем промежутке — не лучше $O(h^{k+1})$ (см. п. 1).

Интерполяционный метод Адамса V

При $k = 4$ получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_{m+1} - \frac{1}{2}\Delta q_m - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{m-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{m-2} - \frac{19}{720}\Delta^4 q_{m-3}. \tag{19}$$

Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, или заменяя конечные разности в (19) выражениями через значения функции, можно получить

Интерполяционный метод Адамса VI

безразностную формулу интерполяционного метода Адамса

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=-1}^{k-1} b^*_{kj}\, q_{m-j}, \tag{20}$$

$$b^*_{kj} = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!(k-1-j)!} \int\limits_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)...(t+k-1)}{t+j}\, dt, \quad j = -1, 0, 1, 2, \ldots, k-1. \tag{21}$$

Числа b^*_{kj} не зависят от m и от h.
Приведем расчетные формулы безразностного интерполяционного метода Адамса при $k = 0, 1, 2, 3, 4$ в таблице 3.

Интерполяционный метод Адамса VII

Таблица 3

k	Интерполяционный метод Адамса
0	$y_{m+1} = y_m + q_{m+1}$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(q_{m+1} + q_m)$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(5\,q_{m+1} + 8\,q_m - q_{m-1})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(9\,q_{m+1} + 19\,q_m - 5\,q_{m-1} + q_{m-2})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(251\,q_{m+1} + 646\,q_m - 264\,q_{m-1} + 106\,q_{m-2} - 19\,q_{m-3})$

[2] Заметим, что все решения в предыдущих точках должны быть вычислены с этой точностью.

Вариант задания I

Указания

1. После знака "—" приведены обозначения для полученного решения.
2. Протестировать полученные результаты на уравнениях вида $y' = P_{s-1}(x)$, где $P_{s-1}(x)$ — полином степени $s-1$, s — порядок метода.

Пусть дана задача Коши

$$y' = \cos(1.75\,x + y) + 1.25\,(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется

1. Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math.
2. Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
   a) с шагом h — y^h;
   b) с шагом $h/2$ — $y^{h/2}$;
   c) уточнить решение по Ричардсону — y_rev.
3. Напечатать таблицу значений $y\_math,\ y^h,\ y^{h/2}, y\_rev, y\_rev - y\_math$ в точках с шагом h.
   Результаты оформить в виде таблицы 4.

Таблица 4

x	y_math	y^h	$y^{h/2}$	y_rev	$y\_rev - y\_math$
0					
0.1					
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0.5					

4. Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
5. Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью ε=0.00001 на $[0, 1]$ — y_RK.

6. Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_ex. Начало таблицы строить, например, методом Рунге-Кутты.
7. Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_in.
8. Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y\_math - y\_RK$, $y\_math - y\_Ad\_ex$, $y\_math - y\_Ad\_in$. Результаты оформить в виде таблицы 5.

Таблица 5

x	y_math	$y\_math - y\_RK$	$y\_math - y\_Ad\_ex$	$y\_math - y\_Ad\_in$
0.5				
0.6				
...	...	...	...	...
1				