Глава III. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

В этой главе будут описаны основные методы решения задачи Коши для ОДУ, приведены их свойства и оценки погрешности.

§1 *Решение задачи Коши методом разложения в ряд Тейлора*

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ первого порядка (1):

найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$ удовлетворяющее условию: $y(x_0) = y_0$.

Один из простейших методов решения задачи (1) основан на использовании формулы Тейлора. Приведем две теоремы из курса дифференциальных уравнений, дающие достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.
Теорема 1 (Пикара) Пусть a и b – положительные конечные числа, а функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$, а также $\forall (x, y) \in R \quad |f(x, y)| \le M$.
Тогда задача (1) имеет единственное решение, определённое на интервале $|x-x_0| \le h$, где $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. При этом график решения располагается в R.

Следующая теорема лежит в основе метода разложения в ряд Тейлора:
Теорема 2 (Коши) Пусть функция $f(x, y)$ разлагается в ряд, сходящийся $\forall (x, y) \in R$ (здесь R – прямоугольник из Теоремы 1):

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} q_{k-i} \cdot (x - x_0)^{k-i} \cdot (y - y_0)^i.$$

Тогда задача (1) имеет единственное решение, представимое рядом Тейлора:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i, \qquad (2)$$

который сходится внутри круга $|x - x_0| \le \rho$, где $\rho = a \cdot (1 - \exp(\frac{-b}{2Ma}))$ (здесь $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$).
Замечание 1
Значения $y^{(i)}(x_0)$ можно найти последовательным дифференцированием уравнения $y'(x) = f(x, y)$ и подстановкой $x = x_0$. На этом пути можно получить частичную сумму ряда (2) и принять её за приближённое решение задачи (1). Такой способ решения называется *методом разложения в ряд Тейлора*.

В следующих параграфах будут рассмотрены методы численного решения задачи Коши. В результате применения каждого метода получается таблица приближённого решения $y_k \approx y(x_k)$, где x_k – чаще всего (но не обязательно) равноотстоящие с шагом $h > 0$ точки: $x_k = x_0 + k \cdot h$.

§2 *Простейшие методы (методы Эйлера) решения задачи Коши для ОДУ*

Рассмотрим задачу Коши (1):

найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$ удовлетворяющее условию: $y(x_0) = y_0$.

При малом $h > 0$ можно записать, что:

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h \cdot y'(x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0),$$

то есть можно положить $y(x_0+h) = y(x_1) \approx y_1 = y_0+h\cdot f(x_0, y_0)$. Далее, по аналогии можно получить расчётную формулу метода Эйлера:

$$y(x_k + h) = y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \qquad k = 0, 1, \ldots \qquad (2)$$

Замечание 1

Отметим, что здесь точки x_k не обязательно являются равноотстоящими и, если $x_{k+1} = x_k + h_k$, то в формуле (2) следует заменить h на h_k.

Замечание 2

Если соединить между собой соседние точки (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}), то получится ломаная линия, звенья которой – отрезки касательных, проведённых к интегральной кривой решения $y(x)$, проходящих через точки (x_k, y_k).

Замечание 3

Если функция $f \in C^1$, то метод Эйлера на одном шаге имеет погрешность порядка $O(h^2)$. То есть, если y_k известно точно ($y_k = y(x_k)$), то $y(x_{k+1}) - y_{k+1} = O(h^2)$.

Замечание 4

В действительности, кроме ошибки, вызванной обрыванием ряда Тейлора, в y_{k+1} войдёт еще "наследственная"ошибка, если все предыдущие значения $y_k, y_{k-1}, \ldots, y_1$ мы нашли неточно. Влияние "наследственных"ошибок зависит от решаемого уравнения. Если $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ (интегральные линии с ростом x сближаются), то влияние таких ошибок убывает. И наоборот.

Метод Эйлера прост, но имеет малую точность. В связи с этим появились некоторые усовершенствования этого метода.

Отметим, что сам метод Эйлера допускает и такую трактовку: в равенстве,вытекающем непосредственно из основной формулы интегрального исчисления

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(t)dt = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t)dt \qquad (3)$$

интеграл заменяется приближённо квадратурной суммой левого прямоугольника. То есть

$$I = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t)dt \approx h \cdot f(x_k, y_k).$$

Приведённые ниже два усовершенствованных метода Эйлера основаны на более точном приближении этого интеграла.

I Метод
Вычислим интеграл I из (3) при помощи квадратурной формулы среднего прямоугольника. При этом неизвестное значение $y_{k+1/2} \approx y(x_k + h/2)$ найдём с помощью метода Эйлера с шагом $h/2$. Получим двухшаговый алгоритм:

$$1)\ y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k);$$

$$2)\ y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k + h/2, y_{k+1/2}). \qquad (4)$$

Замечание 5
Можно показать, что метода Эйлера (4) на одном шаге имеет погрешность порядка $O(h^3)$.
II Метод
Вычислим интеграл I из (3) при помощи квадратурной формулы трапеции. При этом не известное, но необходимое для вычислений значение $y_{k+1} \approx y(x_k + h)$ найдём с помощью метода Эйлера с шагом h. Получим двухшаговый алгоритм:

$$1)\ Y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k);$$

$$2)\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, Y_{k+1}) \right]. \qquad (5)$$

Замечание 6
Снова отметим, что если $x_{k+1} = x_k + h_k$, то в формулах (4) и (5) следует заменить h на h_k.
Замечание 7
Метод Эйлера (5) на одном шаге также имеет погрешность порядка $O(h^3)$.
Замечание 8
При решении задачи (1) на заданном промежутке $[x_0, X]$ придётся сделать $\frac{X-x_0}{h}$ шагов. Следовательно, можно ожидать, что суммарно метод (2) даст погрешность порядка $O(h)$, а усовершенствованные методы (4) и (5) – порядка $O(h^2)$.

§3 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

Рассмотрим задачу Коши (1):
найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$ удовлетворяющее условию: $y(x_0) = y_0$.
Предположим, что значение решения задачи (1) в точке x_n известно (точно или приближённо). То есть знаем, например, $y_n \approx y(x_n)$. Требуется найти значение решения в точке $x_{n+1} = x_n + h$.
Приведём алгоритм метода Рунге-Кутта 4-го порядка:
1 этап последовательно вычислить четыре константы:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n);$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_1/2);$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_2/2);$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3).$$

2 этап найти приближённое значение y_{n+1} по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2)$$

Замечание 1
Следует отметить, что алгоритм (2) получился в результате применения для вычисления интеграла I, о котором шла речь в §2, некоторого аналога квадратурной формулы Симпсона. Действительно,$k_1 \approx h \cdot y'(x_n)$; k_2 и k_3 – некоторые приближения к $h \cdot y'(x_n + h/2)$, а $k_4 \approx h \cdot y'(x_{n+1})$.
Замечание 2
Метод Рунге-Кутта 4-го порядка на одном шаге имеет погрешность порядка $O(h^5)$, то есть если $f(x,y)$ дифференцируема нужное число раз, а значение $y_n = y(x_n)$, то в разложении для точного решения $y(x_{n+1})$ и приближённого y_{n+1} расхождения начнутся, начиная с членов, содержащих h^5.
Замечание 3
К достоинствам метода Рунге-Кутта относятся: 1) метод имеет большую, чем у методов Эйлера точность; 2) не требует построения начала таблицы, как метод Адамса, который будет описан в следующих разделах; 3) в ходе вычислений можно варьировать шаг h, не производя дополнительных перерасчётов (это удобно, чтобы более точно учитывать поведение решения). К недостаткам следует отнести большую, чем у метода Адамса трудоёмкость: на каждом шаге приходится вычислять 4 значения функции f.

§4 Методы Адамса решения задачи Коши для ОДУ

Рассмотрим задачу Коши (1):

найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'(x) = f(x,y)$ удовлетворяющее условию: $y(x_0) = y_0$.
Пусть $k, p \geq 0$. Предположим, что в точках $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+p}$ известны значения функции $f(x,y)$ (или, что то же самое, значения $y'(x_{n-k}), \ldots, y'(x_{n+p})$). При этом рассматриваются произвольные $k+p+1$ попарно различные точки (не обязательно равноотстоящие).
Построим по этой таблице значений интерполяционный алгебраический многочлен функции $y'(x)$:

$$Q_{k+p}(x) \approx y'(x).$$

Запишем для него представление в форме Лагранжа:

$$Q_{k+p}(x) = \sum_{j=-p}^{k} \frac{\omega(x)}{(x - x_{n-j}) \cdot \omega'(x_{n-j})} \cdot y'(x_{n-j})$$

где

$$\omega(x) = (x - x_{n-k}) \cdot (x - x_{n-k+1}) \ldots (x - x_{n+p})$$

– приведённый многочлен степени $k+p+1$, построенный по узлам интерполирования. При этом погрешность интерполирования, как известно, допускает представление:

$$R_{k+p}(y', x) = y'(x) - Q_{k+p}(x) = \frac{y^{(k+p+2)}(\xi(x))}{(k+p+1)!} \cdot \omega(x).$$

По основной формуле интегрального исчисления

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = y(x_n) + I.$$

Вычислим входящий в это представление интеграл при помощи интерполяционной квадратурной формулы, построенной по узлам $x_{n-k}, \dots x_{n+p}$.
Тогда

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q_{k+p}(x)dx = y(x_n) + \sum_{j=-p}^{j=k} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega(x)}{(x - x_{n-j}) \cdot \omega'(x_{n-j})} dx \right) \cdot f(x_{n-j}, y_{n-j}).$$

Обозначим эту формулу (2).

Замечание 1

Если $p \neq 0$, то в формуле (2) используются значения, которые еще не знаем. Потому формула будет неявной.

Замечание 2

В частности, если $p = 1$, то (2), по сути, есть уравнение для нахождения значения $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$. В этом случае получается неявный метод, называемый *интерполяционным методом Адамса.* Своё название метод получил, так как основан на применении интерполяционной формулы для вычисления интеграла I. При этом отрезок интегрирования $[x_n, x_{n+1}]$ содержится в минимальном отрезке, содержащем все узлы интерполяции.

Замечание 3

Если $p = 0$, то узлами интерполяции для построения квадратурной формулы будут точки $x_{n-k}, \dots x_{n-1}, x_n$. При этом, минимальный отрезок, содержащий узлы не включает в себя отрезок интегрирования, так как x_{n+1} – не узел. Фактически, получается экстраполяция функции $y'(x)$ на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. Отсюда и название метода — *экстраполяционный метод Адамса.* Метод явный.

Замечание 4

Экстраполяционный метод Адамса хуже интерполяционного в смысле точности. (Будет графически пояснено на лекции).

§5 *Разностные формы методов Адамса*

Рассмотрим задачу Коши (1):

найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$ удовлетворяющее условию: $y(x_0) = y_0$.

Пусть $h > 0$.Рассмотрим равноотстоящие точки $x_k = x_0 + k \cdot h, \;\; k = 0, 1, \ldots, n$. Пусть для всех $k = 0, 1, \ldots, n$ известны значения $y'_k \approx y'(x_k) = f(x_k, y_k)$, здесь $y_k \approx y(x_k)$. По имеющейся таблице из $n+1$ значения можно построить интерполяционный многочлен $Q_n(x) \approx y'(x)$ с тем, чтобы получить ИКФ для вычисления интеграла I (смотри (3) §2).

Поскольку узлы интерполирования выбраны равноотстоящими, и мы интерполируем функцию $y'(x)$ на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, можно воспользоваться интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования в конце таблицы:

$$Q_n(x) = Q_n(x_n + t \cdot h) = y'(x_n) + \frac{t}{1!} \cdot \Delta y'(x_{n-1}) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y'(x_{n-2}) + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y'(_{n-3}) + \cdots$$

Здесь $t \in [0, 1]$.

По основной формуле интегрального исчисления

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q_n(x)dx. \qquad (2)$$

Обозначим через

$$\delta y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q_n(x)dx = h \cdot \int_0^1 \left(y'(x_n) + \frac{t}{1!} \Delta y'(x_{n-1}) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y'(x_{n-2}) + \cdots \right) dt =$$

теперь, если обозначить через $\eta(x, y) = h \cdot f(x, y)$ и для сокращения записи ввести $\eta_j = h \cdot f(x_j, y_j)$, можно продолжить выкладки:

$$= h \cdot \int_0^1 \left(\eta_n + \frac{t}{1!} \Delta \eta_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 \eta_{n-2} + \cdots \right) dt = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 \eta_{n-4} \cdots$$

Обозначим эту формулу (3).

Тогда из (2) следует, что

$$y_{n+1} = y_n + \delta y_n \qquad (4),$$

где $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$.

Замечание 1

Экстраполяционный метод Адамса 4-го порядка получится, если в общей теории методов Адамса принять $p = 0, \; k = 4$. То есть, если известны значения решения задачи (1) в пяти точках: $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-4}$. Тогда в правой части (3) останутся только первые пять слагаемых (они выписаны явно), а остальных слагаемых просто нет. В этом случае расчётная формула ЭМА 4-го порядка слагается из (3) и (4).

Замечание 2

При реализации ЭМА удобно строить таблицы конечных разностей функции $\eta(x, y)$. (Более подробно об этом будет рассказано на лекции).

Замечание 3

Погрешность одного шага ЭМА 4-го порядка равна $O(h^6)$.

Получим расчётную формулу интерполяционного метода Адамса 4-го порядка. Пусть значения $y_k \approx y(x_k)$ для $k = n, (n-1), \dots, (n-3)$ известны, и, следовательно, вычислимы значения $y'_k \approx y'(x_k) = f(x_k, y_k)$. Построим интерполяционный многочлен $Q_4(x) \approx y'(x)$ по 5 узлам $x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-3}$.
Поскольку узлы интерполирования вновь выбраны равноотстоящими, и мы интерполируем функцию $y'(x)$ на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, снова воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования в конце таблицы:

$$Q_4(x) = Q_4(x_n + t \cdot h) = y'(x_{n+1}) + \frac{t}{1!} \cdot \Delta y'(x_n) + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'(x_{n-1}) + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y'(_{n-2}) +$$

$$+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y'(_{n-3}). \qquad (5)$$

Здесь $t \in [-1, 0]$.
Снова запишем равенство, вытекающее из основной формулы интегрального исчисления:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q_4(x)dx. \qquad (6)$$

Далее будем пользоваться представлением (5) для $Q_4(x)$. Обозначим через

$$\delta y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q_4(x)dx = h \cdot \int_{-1}^{0} \left(y'(x_{n+1}) + \frac{t}{1!}\Delta y'(x_n) + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'(x_{n-1}) + \cdots \right) dt =$$

теперь, если обозначить через $\eta(x, y) = h \cdot y'(x) = h \cdot f(x, y)$ и для сокращения записи ввести $\eta_j = h \cdot f(x_j, y_j)$, можно продолжить вычисления:

$$= h \cdot \int_{-1}^{0} \left(\eta_{n+1} + \frac{t}{1!}\Delta \eta_n + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 \eta_{n-1} + \cdots \right) dt = \eta_{n+1} - \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_{n-2} - \frac{19}{720}\Delta^4\eta_{n-3}.$$

Обозначим эту формулу (7).
Тогда из (6) следует, что

$$y_{n+1} = y_n + \delta y_n \qquad (8),$$

где $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$. Однако, (8) не позволяет найти y_{n+1} явно, так как δy_n содержит неизвестные значения функции η и её конечных разностей. Таким образом, (8) – это уравнение относительно неизвестного значения y_{n+1}. Обычно это уравнение решают методом простой итерации.
Замечание 4
Без доказательства принимаем утверждение, что погрешность ИМА 4-го порядка равна $O(h^7)$.
Замечание 5
При реализации ИМА можно воспользоваться приведённой ниже так называемой схемой *"predictor-corrector"*.
Итак, нужно найти y_{n+1} по формуле (8), где δy_n задаётся (7). Найдем при помощи ЭМА приближение к y_{n+1}, которое обозначим здесь $y_{n+1}^{(0)}$. Тогда для приближения $y_{n+1}^{(0)}$ мы сможем вычислить все значения функции η и её конечных разностей, входящие в формулу (7) для δy_n. Обозначим их $\eta_{n+1}^{(0)}, \Delta\eta_n^{(0)}, \Delta^2\eta_{n-1}^{(0)}, \dots$ Далее, найдём

$$\delta y_n^{(0)} = \eta_{n+1}^{(0)} - \frac{1}{2}\Delta\eta_n^{(0)} - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{n-1}^{(0)} - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_{n-2}^{(0)} - \frac{19}{720}\Delta^4\eta_{n-3}^{(0)}.$$

Затем легко найти
$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \delta y_n^{(0)}.$$

Теперь можно запустить этот процесс для приближения $y_{n+1}^{(1)}$ и т.д. На этом пути строится несколько последовательных приближений к значению y_{n+1}.