

## Задание №5.1

### Приближённое вычисление интегралов при помощи квадратурных формул Наивысшей Алгебраической Степени Точности (КФ НАСТ)

#### Теоретический блок:

1. знать, что такое Алгебраическая Степень Точности КФ, двустороннюю оценку для АСТ ИКФ в случае знакопостоянного веса;
2. знать, чему равна наивысшая АСТ КФ с  $N$  узлами;
3. знать формулировку теоремы о КФ гауссова типа (или КФ НАСТ);
4. знать алгоритм построения КФ НАСТ и алгоритм построения ИКФ.

#### Практический блок:

Параметры задачи: пределы интегрирования –  $a$ ,  $b$  (запрашивать у пользователя; вводятся с клавиатуры), функции  $\rho(x)$  и  $f(x)$  (описать в коде программы).

1. Найти "точное" значение  $\int_a^b \rho(x)f(x) dx$  (при помощи матпакета или библиотеки), вывести его на печать.
2. Написать программу, позволяющую вычислить приближенно  $\int_a^b \rho(x)f(x) dx$  при помощи ИКФ с  $N$  узлами (минимум, с 2-мя).
3. **Выводить на печать** все промежуточные вычисления: моменты весовой функции, найденные узлы и коэффициенты построенной ИКФ.
4. **Сделать проверку** на точность ИКФ на многочлене степени  $N - 1$ , если число узлов КФ равно  $N$ .
5. **Вывести полученное значение интеграла (не менее 12 знаков после запятой).**
6. **Сравнить** полученное при помощи ИКФ значение с "точным" значением из матпакета.
7. Написать программу, позволяющую вычислить приближенно  $\int_a^b \rho(x)f(x) dx$  при помощи КФ-НАСТ  $N$  (минимум, с 2-мя узлами).
8. **Выводить на печать** все промежуточные вычисления: моменты весовой функции, найденный ортогональный многочлен, узлы и коэффициенты построенной КФ НАСТ.
9. **Сделать проверку** на коэффициенты и точность КФ на одночлене  $x^3$  (для двух узлов) и на одночлене  $x^{2N-1}$ , если число узлов равно  $N$ .
10. **Вывести полученное значение интеграла (не менее 12 знаков после запятой).**
11. **Сравнить** полученное при помощи КФНАСТ значение с "точным" значением из матпакета.

## Варианты тестовых задач

*Вариант 1*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \sqrt{x}.$$

*Вариант 2*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = x^{1/4}.$$

*Вариант 3*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

*Вариант 4*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = x^{-1/4}.$$

*Вариант 5*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = -\ln(x).$$

*Вариант 6*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = -x \ln(x).$$

*Вариант 7*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = |x - 0.5|.$$

*Вариант 8*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = e^x.$$

*Вариант 9*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \frac{1}{x+0.1}.$$

*Вариант 10*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \sqrt{1-x}.$$

*Вариант 11*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \cos(x).$$

*Вариант 12*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \sin(2x).$$

*Вариант 13*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = e^{-x}.$$

*Вариант 14*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \cos^2(x).$$

*Вариант 15*

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

## Задание №5.2

### КФ Гаусса, ее узлы и коэффициенты Вычисление интегралов при помощи КФ Гаусса

1. Определить и вывести на печать узлы и коэффициенты КФ Гаусса при  $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  (парами: узел  $\leftrightarrow$  коэффициент). При нахождении корней многочлена Лежандра использовать метод секущих, при этом выбрать точность  $\epsilon$  порядка  $10^{-12}$ .
2. Прокомментировать полученные таблицы узлов и коэффициентов (какими свойствами обладают узлы и коэффициенты?).
3. Выборочно осуществить проверку точности на многочлене наивысшей степени, для которого соответствующая КФ Гаусса должна быть точна. Например, для  $N = 3, 4, 5$  проверять точность на многочленах степени 5, 7 и 9 соответственно.
4. Вычислить интеграл из варианта задания при помощи КФ Гаусса с  $N_1, N_2, N_3$  узлами ( $N_1, N_2, N_3$  — параметры задачи, запрашивать у пользователя; вводятся с клавиатуры).  
**Выводить на печать** для соответствующих  $N_1, N_2, N_3$ 
  - 1) все узлы и коэффициенты КФ Гаусса для  $[a; b]$ ;
  - 2) полученное значение интеграла (не менее 12 знаков после запятой).**Сравнить** полученные приближенные значения между собой.
5. Сделать вывод о верных знаках в значении интеграла.
6. **Предусмотреть возможность ввода новых значений параметров  $a, b$ .**

### Варианты тестовых задач

#### Вариант 1

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx, \quad N = 6, 7, 8.$$

#### Вариант 2

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(4+3x^2)}}, \quad N = 6, 7, 8$$

#### Вариант 3

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx, \quad N = 6, 7, 8$$

*Вариант 4*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x}}, \quad N = 5, 6, 7$$

*Вариант 5*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, \quad N = 5, 6, 7$$

*Вариант 6*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 x \ln(1+x) dx, \quad N = 6, 7, 8$$

*Вариант 7*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{(x^2+1,2)}} dx, \quad N = 5, 7, 8$$

*Вариант 8*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^{\pi/4} \cos x^2 dx, \quad N = 6, 7, 8$$

*Вариант 9*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^{\pi/4} \sin x^2 dx, \quad N = 6, 7, 8$$

*Вариант 10*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 \sqrt{x} \sin x^2 dx, \quad N = 6, 7, 8$$

*Вариант 11*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x^2 dx, \quad N = 6, 7, 8$$

*Вариант 12*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx, \quad N = 5, 6, 7$$

*Вариант 13*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{x^2} dx, \quad N = 5, 6, 7$$

*Вариант 14*

Найти при помощи КФ Гаусса

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, \quad N = 5, 6, 8$$