Решение задач

Кривоносов Т И

21 мая 2024 г.

Задача 1 *Задача №9 С помощью теоремы Ляпунова исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы*

$$\dot{x}_1 = ax_1 - x_2 + kx_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 - ax_2 + kx_2(x_1^2 + x_2^2), \tag{1}$$

где $a^2 > 0, k \leqslant 0$

Решение задачи 1

$$J = \begin{pmatrix} a + 3kx_1^2 + kx_2^2 & -1 + 2kx_1x_2 \\ 1 + 2kx_2x_1 & -a + kx_1^2 + 3kx_2^2 \end{pmatrix},$$

$$J(x^{eq}) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix},$$

$$J(x^{eq}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & -a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(-a - \lambda) + 1 = \lambda^2 - a^2 + 1.$$

Заметим, что коэффициенты разных знаков, следовательно по критерию Раусса - Гурвица полином неустойчивый. По теореме Ляпунова нулевое состояние равновесия неустойчиво.

Задача 2 *Задача № 12.2 Определить устойчивость полинома по критерию Эрмита-Михайлова*

$$f(x) = x^2 - 3x + 1,$$

Решение задачи 2 *На рис. (1) изображен годограф* $f(i\omega)$ *полинома* $f(x) = x^2 - 3x + 1$ *- кривая которую описывает конец вектора* $f(i\omega) = u + iv$,

$$u = \mathrm{Rm} f(i\omega) = -\omega^2 + 1, v = \mathrm{Im} f(i\omega) = -3\omega. \tag{2}$$

при увеличении ω *от* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Для рассматриваемого примера годограф $f(i\omega)$ *представляет собой параболу, так как* $\frac{v}{u} = \frac{-3i\omega}{-\omega^2+1}$. *Стрелки на рис. 1 показывают направление движения конца вектора* $f(i\omega)$ *при увеличении* ω. *Ввиду того что* $v/u \to 0$ *при* $\omega \to -\infty$, *справедливо равенство* $\varphi(-\infty) = \pi$. *С возрастанием* ω *функция* $\varphi(\omega)$ *убывает и при* $\omega = +\infty$ *достигает значения* π. *Поэтому*

$$\Delta\varphi(\omega) \mid_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi, \tag{3}$$

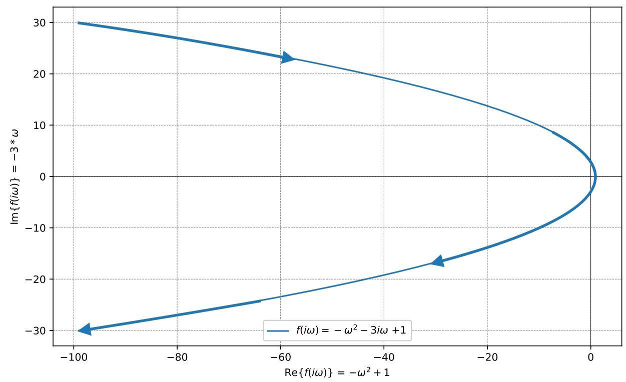

Рис. 1: Годограф $f(i\omega)$.

что соответствует наличию у рассматриваемого квадратного уравнения двух корней с положительной вещественной частью. По критерию Эрмита-Михайлова полином не устойчив.