$$\dot{x}_1 = \sin\theta_e$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau_p}x_2 + \frac{(\tau_{z1}-\tau_p)(\tau_p-\tau_{z2})}{\tau_p^2}\sin\theta_e$$
$$\dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K(x_1 + x_2 + \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_p}\sin\theta_e)$$

1 Решение

1 Найти с.р

Найдем вектор, который при подставлении в систему обращает ее в нуль. Для этого приравняем правые части к нулю.

Рассмотрим
$$\sin\theta_e = 0$$

Из этого следует, что $\theta = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Подставим $\theta = \pi k$ в систему:

$$-\frac{1}{\tau_p}x_2 = 0$$
$$\omega_e^{free} - K(x_1 + x_2) = 0$$

Из первого уравнения получим $x_2 = 0, \tau_p \neq 0$

Подставив во второе уравнение, получим: $\omega_e^{free} - Kx_1$, откуда $x_1 = \frac{\omega_e^{free}}{K}$

Получили вектор:

$$\begin{pmatrix} \frac{w_e^{free}}{K} \\ 0 \\ \pi k \end{pmatrix}$$

2 Провести линеаризацию в окрестности и выписать х.п

Выпишем матрицу Якоби исходной системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta_e) \\ 0 & -\frac{1}{\tau_p} & \frac{(\tau_{z_1}-\tau_p)(\tau_p-\tau_{z_2})}{\tau_p^2} \\ -K & -K & -K\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}\cos(\theta_e)}{\tau_p^2} \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица Якоби не зависит от первых двух компонент вектора состояний равновесия, а $\cos(\theta_e)$ на решениях вида πk принимает ровно два значения: 1 и -1, потому рассмотрим два этих случая и найдем характеристические полиномы:

1. При $\theta_e = 2\pi k$ имеем:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_p} - \lambda & \frac{(\tau_{z_1} - \tau_p)(\tau_p - \tau_{z_2})}{\tau_p^2} \\ -K & -K & -K\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p^2} - \lambda \end{vmatrix}$$

   А в общем виде:

$$\chi(\lambda) = (-1)(\lambda^3 + \lambda^2(\frac{\tau_p + \tau_{z_1}\tau_{z_2}K}{\tau_p^2}) + \lambda K(\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2} + \tau_{z_1}\tau_p^2 - \tau_p\tau_{z_1}\tau_{z_2} - \tau_{z_2}\tau_p^2}{\tau_p^3}) + \frac{K}{\tau_p})$$

2. При $\theta_e = \pi + 2\pi k$ имеем:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_p} - \lambda & \frac{(\tau_{z_1} - \tau_p)(\tau_p - \tau_{z_2})}{\tau_p^2} \\ -K & -K & K\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p^2} - \lambda \end{vmatrix}$$

   А в общем виде:

$$\chi(\lambda) = (-1)(\lambda^3 + \lambda^2(\frac{1 - K\tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p}) + \lambda K(\frac{\tau_{z_1} + \tau_{z_2}}{\tau_p}) - \frac{K}{\tau_p})$$

3 Критерии асимптотической устойчивости с.р $\chi_J(iw) \neq 0$

Параметры заданные условием: $K > 0$, $\tau_{z_1} > 0, \tau_{z_2} > 0, \tau_p > 0$;
$\tau_{z_1} \neq \tau_p > 0, \tau_{z_2} \neq \tau_p > 0$.

1. При $\theta_e = \pi + 2\pi k$ имеем:

$$\chi(\lambda) = (-1)(\lambda^3 + \lambda^2(\frac{1 - K\tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p}) + \lambda K(\frac{\tau_{z_1} + \tau_{z_2}}{\tau_p}) - \frac{K}{\tau_p})$$

   Заметим, что $K\frac{\tau_{z_1}+\tau_{z_2}}{\tau_p}, -\frac{K}{\tau_p}$ - разных знаков. Это противоречит необходимому условию устойчивости по Раусу. Отсюда следует, что в условии задачи с.р неустойчиво при любых допустимых значениях.

2. При $\theta_e = 2\pi k$ имеем:

$$\chi(\lambda) = (-1)(\lambda^3 + \lambda^2(\frac{\tau_p + \tau_{z_1}\tau_{z_2}K}{\tau_p^2}) + \lambda K(\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2} + \tau_{z_1}\tau_p^2 - \tau_p\tau_{z_1}\tau_{z_2} - \tau_{z_2}\tau_p^2}{\tau_p^3}) + \frac{K}{\tau_p})$$

   Используем следствие из критерия Рауса-Гурвица:
   Следствие: Полином $\chi(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ устойчив $\Leftrightarrow$ $a_{1,2,3} > 0$, $a_1 a_2 > a_3$.

- $\frac{\tau_p+\tau_{z_1}\tau_{z_2}K}{\tau_p^2}, K(\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}+\tau_{z_1}\tau_p^2-\tau_p\tau_{z_1}\tau_{z_2}-\tau_{z_2}\tau_p^2}{\tau_p^3}), \frac{K}{\tau_p} > 0$ в силу условий задачи.
- Проверим второе неравенство:

$$\frac{\tau_p+\tau_{z_1}\tau_{z_2}K}{\tau_p^2} * K(\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}+\tau_{z_1}\tau_p^2-\tau_p\tau_{z_1}\tau_{z_2}-\tau_{z_2}\tau_p^2}{\tau_p^3}) > \frac{K}{\tau_p}$$

  Т.к $\tau_p > 0$ имеем: #не уверен пока в правильности#

$$\frac{\frac{\tau_p^4}{\tau_{z_1}\tau_{z_2}+\tau_{z_1}\tau_p^2-\tau_p\tau_{z_1}\tau_{z_2}-\tau_{z_2}\tau_p^2} - \tau_p}{\tau_{z1}\tau_{z2}} < K$$

4 Случай $\chi(i\omega) = 0$

Многочлен 3-й степени с действительными коэффициентами $q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ при $a, b, c > 0$ имеет чисто мнимый корень тогда и только тогда, когда $ab = c$, следовательно, чтобы
$\chi(\lambda) = (-1)(\lambda^3+\lambda^2(\frac{1+K\tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p})+\lambda K(\frac{\tau_{z_1}+\tau_{z_2}}{\tau_p})+\frac{K}{\tau_p})$ имел чисто мнимый корень необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\tau_p+\tau_{z_1}\tau_{z_2}K}{\tau_p^2} * K(\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}+\tau_{z_1}\tau_p^2-\tau_p\tau_{z_1}\tau_{z_2}-\tau_{z_2}\tau_p^2}{\tau_p^3}) = \frac{K}{\tau_p}.$$

Отсюда получаем такое условие:

$$\frac{\frac{\tau_p^4}{\tau_{z_1}\tau_{z_2}+\tau_{z_1}\tau_p^2-\tau_p\tau_{z_1}\tau_{z_2}-\tau_{z_2}\tau_p^2} - \tau_p}{\tau_{z1}\tau_{z2}} = K$$

Так как у нас есть чисто мнимое собственное число, то исследовать состояние равновесия на устойчивость будем с помощью теоремы Ляпунова.

Рассмотрим функцию:

$$V(x_1, x_2, \theta_e) = \frac{K}{2}(x_1 - \frac{\omega_e^{free}}{K})^2 + \frac{K}{2}x_2^2 - \cos\theta_e + 1$$

Очевидно, что функция положительно определенная. $(-\cos\theta_e + 1 \geq 0)$

Вектор её частных производных выглядит следующим образом:

$$gradV(x_1, x_2, \theta_e) = (Kx_1 - \omega_e^{free}, Kx_2, \sin\theta_e)$$

Тогда производная функции в силу системы:

$$\dot{V}(x_1, x_2, \theta_e) = Kx_1\sin\theta_e - \omega_e^{free}\sin\theta_e -$$
$$-\frac{K}{\tau_p}x_2^2 + K(\frac{(\tau_{z_1}-\tau_p)(\tau_p-\tau_{z_2})}{\tau_p^2})x_2\sin\theta_e +$$
$$+\omega_e^{free}\sin\theta_e - Kx_1\sin\theta_e - Kx_2\sin\theta_e - K\frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p}\sin^2\theta_e =$$
$$K(-\frac{1}{\tau_p}x_2^2 + (\frac{(\tau_{z_1}-\tau_p)(\tau_p-\tau_{z_2})}{\tau_p^2} - 1)x_2\sin\theta_e - \frac{\tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p}\sin^2\theta_e)$$

Оценим коэффициент второго слагаемого, учитывая полученные условия:

$$\frac{(\tau_{z_1} - \tau_p)(\tau_p - \tau_{z_2})}{\tau_p^2} = \frac{\tau_{z_1}\tau_p - \tau_p^2 + \tau_p\tau_{z_2} - \tau_{z_1}\tau_{z_2}}{\tau_p^2} =$$

$$\tau_p(\tau_{z_1} + \tau_{z_2}) - \tau_p^2 - \tau_{z_1}\tau_{z_2} < -\tau_{z_1}\tau_{z_2} < 0$$

Значит $\dot{V}(x_1, x_2, \theta_e) < 0$ при $x_2 \neq 0$, $\theta_e \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Следовательно, состояние равновесия $\begin{pmatrix} \frac{w_e^{free}}{K} \\ 0 \\ 2\pi k \end{pmatrix}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.