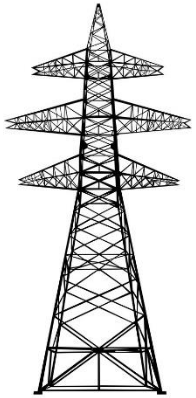
EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica



Transmisión de Potencia

IE-0365

Dr. Gustavo Valverde Mora
Profesor Catedrático

gustavo.valverde@ucr.ac.cr

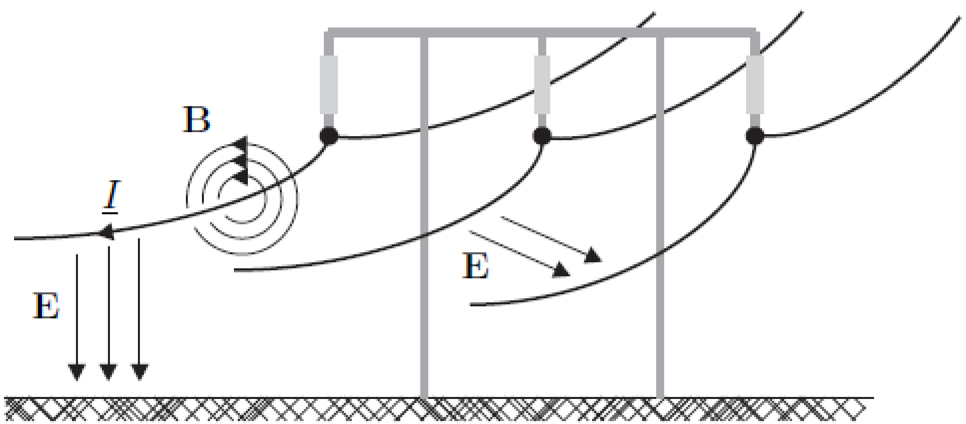
Parámetros de líneas

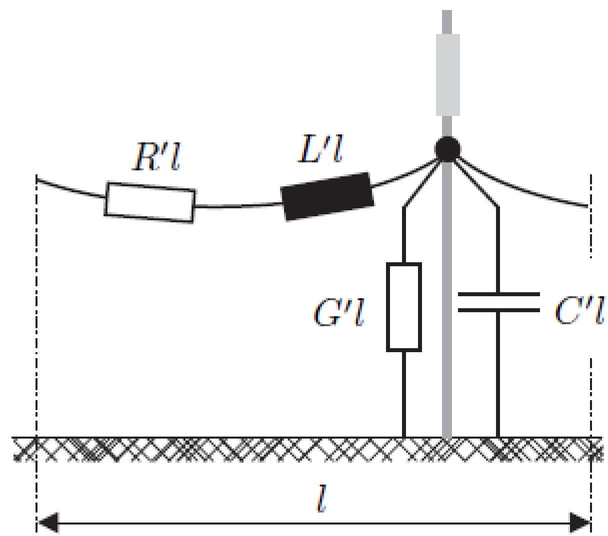
R': Resulta de la resistencia del conductor al paso de la corriente.

L': Resulta del campo magnético inducido por la corriente.

C': Resulta del campo eléctrico inducido por diferencia de potencial.

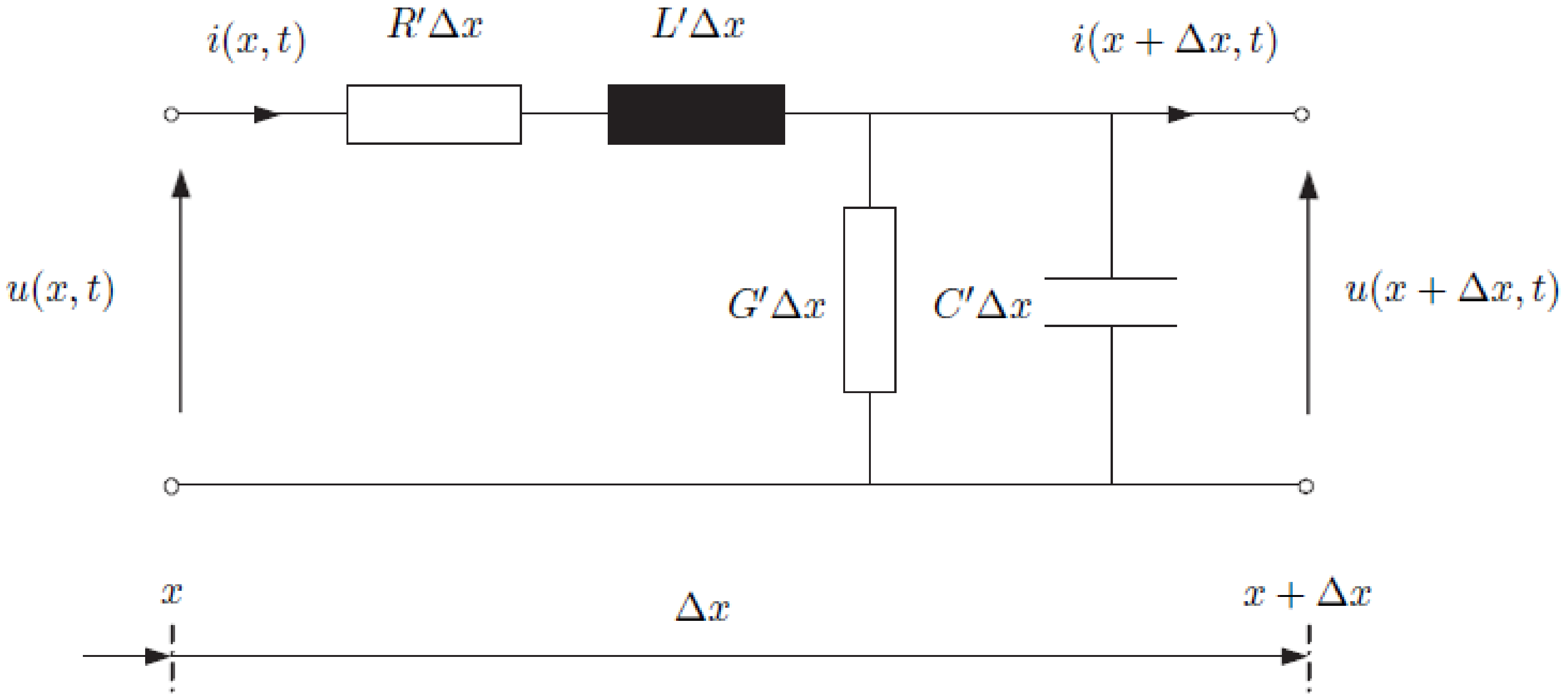
G': Resulta de corrientes de fuga en el aislador y el medio aislante (aire o gas SF6), normalmente despreciable.





Modelo de línea con parámetros distribuidos

A partir de los parámetros por unidad de longitud, trabajamos con una línea infinitesimalmente pequeña:



La ecuación diferencial de la línea

La tensión y la corriente son funciones de la localización a lo largo de la línea y del tiempo.

$$u = u(x,t)$$
$$i = i(x,t)$$

De acuerdo a Ley de Kirchoff:

$$u\left(x+\Delta x, t\right) = u\left(x,t\right) - R'\Delta x \; i\left(x,t\right) - L'\Delta x \frac{\partial i\left(x,t\right)}{\partial t}$$
$$i\left(x+\Delta x, t\right) = i\left(x,t\right) - G'\Delta x \; u\left(x+\Delta x,t\right) - C'\Delta x \frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial t}$$

$$\frac{u\left(x+\Delta x, t\right) - u\left(x,t\right)}{\Delta x} = -R' \; i\left(x,t\right) - L' \frac{\partial i\left(x,t\right)}{\partial t}$$
$$\frac{i\left(x+\Delta x, t\right) - i\left(x,t\right)}{\Delta x} = -G' \; u\left(x+\Delta x,t\right) - C' \frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial t}$$

La ecuación diferencial de la línea

Suponiendo que la línea es infinitesimalmente pequeña, $\Delta x \to 0,$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\left(R' + L'\frac{\partial}{\partial t}\right) i \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= -\left(G' + C'\frac{\partial}{\partial t}\right) u \end{aligned}\right\}$$

Ecuaciones diferenciales de líneas de potencia

Recordamos las relaciones de tensiones y corrientes instantáneas en términos de fasores:

$$u(x,t) = \sqrt{2} \cdot \Re\left\{\underline{U}\,(x)\, e^{j\omega t}\right\}$$
$$i(x,t) = \sqrt{2} \cdot \Re\left\{\underline{I}\,(x)\, e^{j\omega t}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\underline{U}}{dx} &= -\left(R' + j\omega L'\right) \underline{I} \\ \frac{d\underline{I}}{dx} &= -\left(G' + j\omega C'\right) \underline{U} \end{aligned}\right\}$$

Ecuaciones diferenciales de líneas de potencia en términos de fasores

El fasor de corriente de la expresión anterior se puede eliminar. Para ello, solo es necesario derivar la primer ecuación con respecto a x, e incluir la segunda, quedando:

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = (R' + j\omega L')\,(G' + j\omega C')\,\underline{U}$$

Note que la ecuación anterior no incluye el tiempo explícitamente. Al eliminar la tensión de las ecuaciones anteriores se llega a:

$$\frac{d^2\underline{I}}{dx^2} = (R' + j\omega L')\,(G' + j\omega C')\,\underline{I}$$

Estas son las *ecuaciones de onda*, y usualmente se expresan como:

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\underline{U}$$

$$\frac{d^2\underline{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\underline{I}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')\,(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

Constante de propagación de la línea.
Se mide en unidad de 1/longitud

α *es la constante de atenuación (Neper/u.long) y* β *es la constante de fase (rad/u.long)*

Solución de la ecuación de onda

A partir de:

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\underline{U}$$

La solución del problema anterior debe ser una expresión que al derivarla 2 veces se obtiene la expresión original multiplicada por $\underline{\gamma}^2$. Esto sugiere una forma exponencial en la solución.

Suponga que la solución de la ecuación anterior es:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{a0}\, e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{U}_{b0}\, e^{\underline{\gamma} x}$$

Al derivarlo dos veces se obtiene la misma expresión multiplicada por $\underline{\gamma}^2$.

De modo que la solución de las ecuaciones de onda son:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_a + \underline{U}_b = \underline{U}_{a0}\, e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{U}_{b0}\, e^{\underline{\gamma} x}$$
$$\underline{I}(x) = \underline{I}_a + \underline{I}_b = \underline{I}_{a0}\, e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{I}_{b0}\, e^{\underline{\gamma} x}$$

Si diferenciamos la primera ecuación respecto a x, y la incluimos en $\frac{d\underline{U}}{dx} = -\left(R' + j\omega L'\right)\underline{I}$:

$$\underline{I}\,(x) = \frac{-1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \sqrt{\frac{G' + j\omega C'}{R' + j\omega L'}}\left(\underline{U}_{a0}\, e^{-\underline{\gamma} x} - \underline{U}_{b0}\, e^{\underline{\gamma} x}\right)$$

$$\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Impedancia característica de la línea (en Ω).
También conocida como *surge impedance.*

Y la corriente se puede expresar como:

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_W} \cdot \left(\underline{U}_{a0}\, e^{-\underline{\gamma} x} - \underline{U}_{b0}\, e^{\underline{\gamma} x}\right)$$

Inclusión de las condiciones de frontera

Las constantes $\underline{U}_{a0}$ y $\underline{U}_{b0}$ en la ecuación de tensión resultan de las condiciones de frontera al inicio y final de la línea de potencia. Si las condiciones son conocidas, estas constantes pueden ser determinadas.

Inicio de la línea: Si la corriente y tensión al inicio de la línea son conocidos, entonces:

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}\,(x=0) &= \underline{U}_1 = \underline{U}_{a0} + \underline{U}_{b0} \\ \underline{I}\,(x=0) &= \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_W}\left(\underline{U}_{a0} - \underline{U}_{b0}\right)\end{aligned}\right\}$$

Se obtiene de las expresiones anteriores con x=0.

Y resolviendo el sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\underline{U}_{a0} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_W \underline{I}_1}{2} \qquad \underline{U}_{b0} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_W \underline{I}_1}{2}$$

Inclusión de las condiciones de frontera

De modo que las expresiones de corriente y tensión en función de las tensiones y corrientes al inicio de la línea son:

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_1 + \underline{Z}_W \underline{I}_1\right) e^{-\underline{\gamma} x} + \frac{1}{2}\left(\underline{U}_1 - \underline{Z}_W \underline{I}_1\right) e^{\underline{\gamma} x}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} + \underline{I}_1\right) e^{-\underline{\gamma} x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} - \underline{I}_1\right) e^{\underline{\gamma} x}$$

La expresión de tensión también se puede expresar como:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \underbrace{\frac{e^{\underline{\gamma} x} + e^{-\underline{\gamma} x}}{2}}_{\cosh\left(\underline{\gamma} x\right)} - \underline{Z}_W \underline{I}_1 \underbrace{\frac{e^{\underline{\gamma} x} - e^{-\underline{\gamma} x}}{2}}_{\sinh\left(\underline{\gamma} x\right)}$$

Inclusión de las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_1 \cosh\left(\underline{\gamma} x\right) - \underline{Z}_W \underline{I}_1 \sinh\left(\underline{\gamma} x\right) \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_1 \cosh\left(\underline{\gamma} x\right) - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} \sinh\left(\underline{\gamma} x\right) \end{aligned}\right\}$$

Tensión y corriente en términos de valores conocidos al inicio de la línea

Final de la línea: Si la corriente y tensión al final de la línea son conocidos, entonces:

$$\underline{U}\left(x = l\right) = \underline{U}_2 = \underline{U}_{a0}\, e^{-\underline{\gamma} l} + \underline{U}_{b0}\, e^{\underline{\gamma} l}$$

$$\underline{I}\left(x = l\right) = \underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_W}\left(\underline{U}_{a0}\, e^{-\underline{\gamma} l} - \underline{U}_{b0}\, e^{\underline{\gamma} l}\right)$$

Inclusión de las condiciones de frontera

Por lo que las constantes estarían dadas por:

$$\underline{U}_{a0} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_W \underline{I}_2}{2} e^{\underline{\gamma} l}$$

$$\underline{U}_{b0} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_W \underline{I}_2}{2} e^{-\underline{\gamma} l}$$

De modo que las expresiones de corriente y tensión en función de las tensiones y corrientes <u>al final de la línea</u> son:

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_2 + \underline{Z}_W \underline{I}_2\right) e^{\underline{\gamma}(l-x)} + \frac{1}{2}\left(\underline{U}_2 - \underline{Z}_W \underline{I}_2\right) e^{-\underline{\gamma}(l-x)}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} + \underline{I}_2\right) e^{\underline{\gamma}(l-x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} - \underline{I}_2\right) e^{-\underline{\gamma}(l-x)}$$

Modelo de línea con parámetros distribuidos

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cosh\left(\underline{\gamma}\,(l - x)\right) + \underline{Z}_W \underline{I}_2 \sinh\left(\underline{\gamma}\,(l - x)\right)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cosh\left(\underline{\gamma}\,(l - x)\right) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} \sinh\left(\underline{\gamma}\,(l - x)\right)$$

Tensión y corriente en términos de valores conocidos al final de la línea

Note que es posible conocer la tensión y corriente en cualquier punto de la línea, a partir de las tensiones y corrientes al inicio o final de la línea.

Tip para evaluar funciones hiperbólicas complejas sin necesidad de computadora:

$$\cosh(\alpha + j\beta) = \frac{e^{\alpha}e^{j\beta} + e^{-\alpha}e^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(e^{\alpha}\angle\beta + e^{-\alpha}\angle - \beta)$$

$$\sinh(\alpha + j\beta) = \frac{e^{\alpha}e^{j\beta} - e^{-\alpha}e^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(e^{\alpha}\angle\beta - e^{-\alpha}\angle - \beta)$$

Ejemplo 1

Una línea de transmisión trifásica de 60 Hz tiene una longitud de 175 millas. La línea tiene una impedancia serie total de $35 + j140\ \Omega$ y una admitancia paralelo de $j930\ x10^{-6}\ S$. Esta línea entrega 40 MW a 220 kV con fp 0,90 en atraso. Determine la tensión y potencia aparente en el extremo generador si se usa el modelo de línea de parámetros distribuidos.

Solución:

$$Z' = \frac{Z}{l} = \frac{35 + j140}{175} = 0.2 + j0.8\ \Omega/milla$$

$$Y' = \frac{Y}{l} = j\frac{930}{175} = j5.3143x10^{-6}\ \ S/milla$$

De donde se obtiene:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \sqrt{(0.2 + j0.8)(0 + j5.3143x10^{-6})}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0.0003 + j0.0021\ 1/milla$$

Ejemplo 1

$$Z_W = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = 390.97 - j48.13\Omega$$

La tensión **de fase** de la carga es $220/\sqrt{3}\ \angle 0°$ kV (**referencia**)

Y la corriente es:

$$\bar{I} = \left(\frac{S}{3 \cdot \bar{V}_{\emptyset}}\right)^{*} = 104{,}97 - j50.81\ A$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\left(\frac{40 \times 10^6}{0.9}\right)\angle - \cos^{-1}(0.90)}{3 \cdot 220/\sqrt{3} \times 10^3} = 104{,}97 - j50.81\ A$$

$$\bar{I}_2 = 116.63\angle - 25.84°\ A \longrightarrow \text{en atraso}$$

Ejemplo 1

La tensión al inicio de la línea:

$$\bar{V}(x=0) = \bar{V}_1 = \bar{V}_2 \cosh(\gamma(l-0)) + Z_W \bar{I}_2 \sinh(\gamma(l-0))$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \cosh(\gamma l) + Z_W \bar{I}_2 \sinh(\gamma l)$$

$\bar{V}_1 = 130.16\angle 6.49° \ \ kV$ → de fase.

Y la corriente al inicio de la línea:

$$\bar{I}(x=0) = \bar{I}_1 = \bar{I}_2 \cosh(\gamma(l-0)) + \frac{\bar{V}_2}{Z_W} \sinh(\gamma(l-0))$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 \cosh(\gamma l) + \frac{\bar{V}_2}{Z_W} \sinh(\gamma l)$$

$\bar{I}_1 = 120.56 \angle 35.31° \ \ A$ → en adelanto.

Ejemplo 1

La potencia aparente al inicio de la línea:

$$S_1 = 3\bar{V}_1\bar{I}_1^* = 3 \cdot (130.16 \times 10^3 \angle 6.49°)(120.56 \angle -35.31°)$$

$$S_1 = 41.247 - j22.691 \quad \mathrm{MVA}$$

$$P_1 = 41.247 \quad MW$$

$$\boldsymbol{Q_1 = -22.691 \ MVAr}$$

Ejemplo 1 (cont.)

Repita los cálculos a la mitad de la línea de transmisión ($x = l/2$)

$$\bar{V}_x = 130.5\angle 3.05°\ kV$$

$$\bar{I}_x = 103.80\angle 5.06°\ A$$

Entonces la potencia aparente trifásica a la mitad de la línea es:

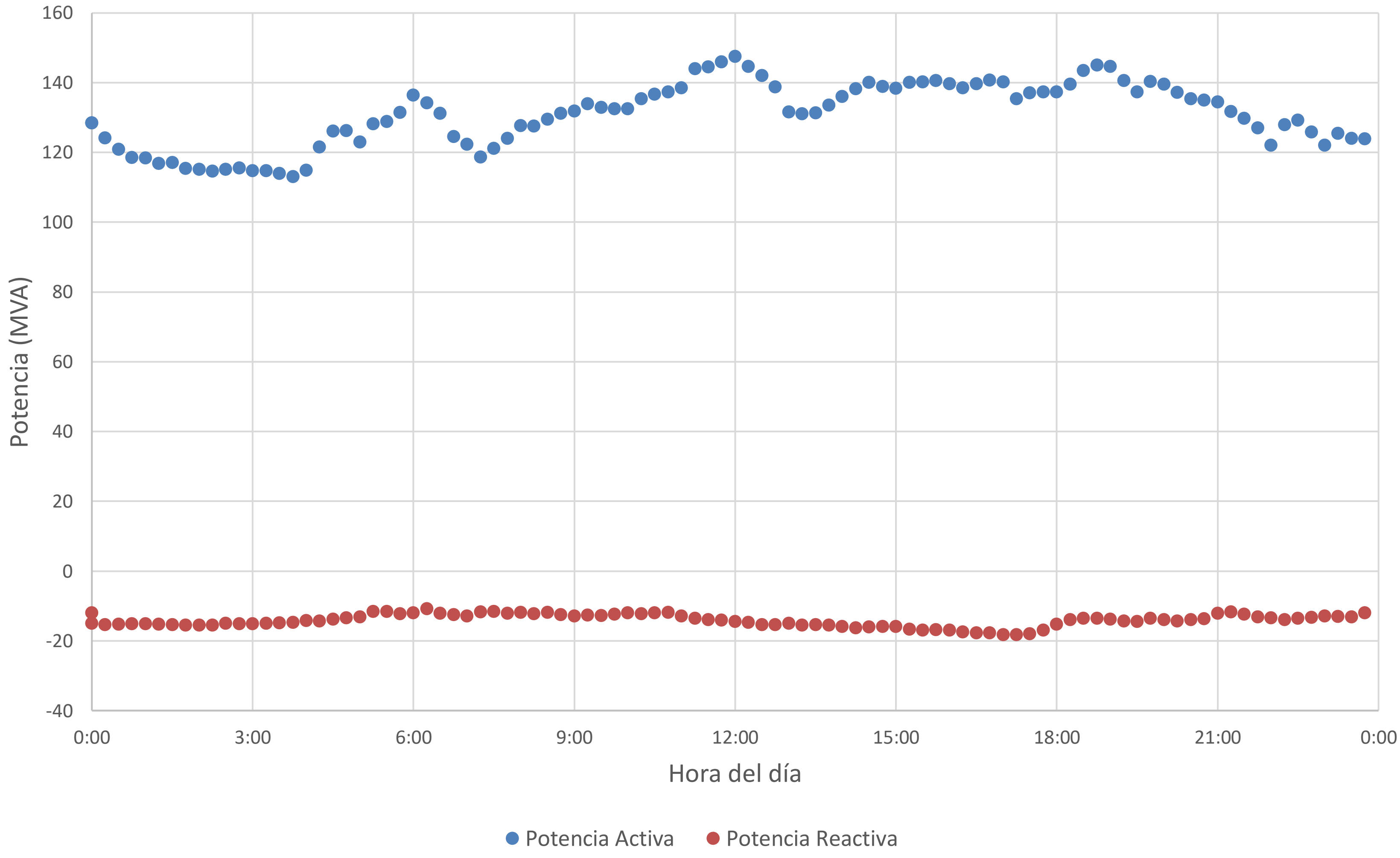
$$S_x = 3\bar{V}_x\bar{I}_x^* = 3\cdot(130.5\times 10^3\angle 3.05°)(103.80\angle -5.06°)$$

$$S_x = 40.61\ - j1.42\ \ \text{MVA}$$

$$P_x = 40.61\quad MW$$ → Pérdidas de 0.61 MW van al 50% del total

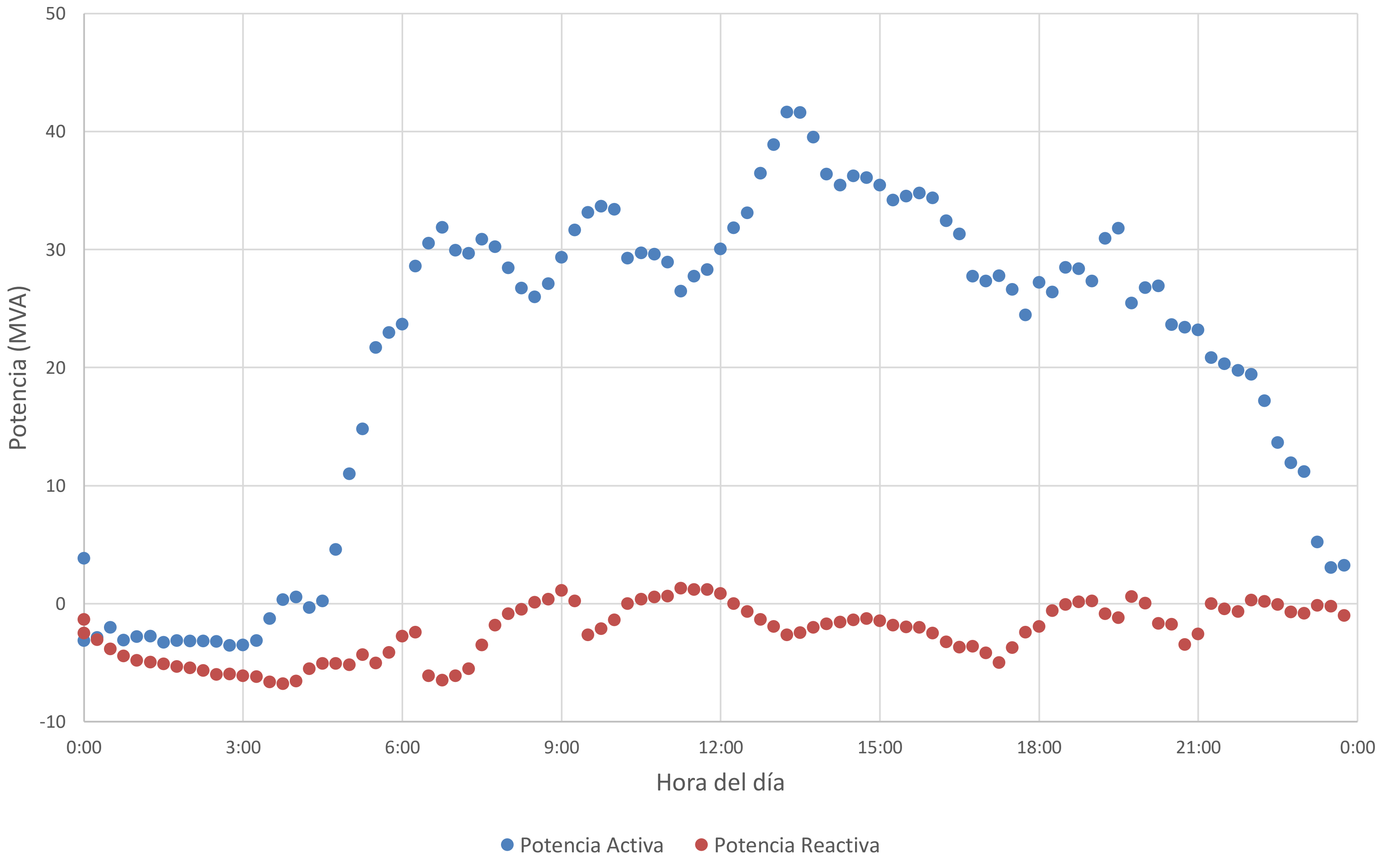
$$\boldsymbol{Q_x = -1.42\ \ MVAr}$$

Ejemplo 2: Línea 230 kV zona generación



Fuente: ICE

Ejemplo 3: Línea 138 kV zona carga



Ecuación de onda de línea **sin pérdidas**

Veamos el caso de una línea sin pérdidas. Esta es una simplificación que se usa en líneas de alta tensión puesto que la reactancia inductiva domina sobre la resistencia, y las pérdidas debido a la conductancia son muy bajas. En ese caso se aproxima:

$$R' = G' = 0$$

Partiendo del supuesto que la tensión y corriente al inicio de la línea son conocidas:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \frac{e^{\underline{\gamma} x} + e^{-\underline{\gamma} x}}{2} - \underline{Z}_W \underline{I}_1 \frac{e^{\underline{\gamma} x} - e^{-\underline{\gamma} x}}{2}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \frac{e^{\underline{\gamma} x} + e^{-\underline{\gamma} x}}{2} - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} \frac{e^{\underline{\gamma} x} - e^{-\underline{\gamma} x}}{2}$$

donde:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(\cancelto{0}{R'} + j\omega L')(\cancelto{0}{G'} + j\omega C')} = \cancelto{0}{\alpha} + j\beta \qquad \underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L'C'} = j\beta$$

Modelo parámetros distribuidos de línea de transmisión **sin pérdidas**

Note que la impedancia característica es puramente real: $Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

Recordando las expresiones de seno y coseno:

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

Entonces, las expresiones de tensión y corriente se simplifican a:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cos(\beta x) - jZ_W \underline{I}_1 \sin(\beta x)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cos(\beta x) - j\frac{\underline{U}_1}{Z_W} \sin(\beta x)$$

Y en términos de tensión y corriente al final de la línea:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos(\beta(l - x)) + jZ_W \underline{I}_2 \sin(\beta(l - x))$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cos(\beta(l - x)) + j\frac{\underline{U}_2}{Z_W} \sin(\beta(l - x))$$

Velocidad de propagación en línea de transmisión **sin pérdidas**

Suponga una línea de transmisión sin pérdidas con los siguientes parámetros por unidad de longitud:

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d_m}{r'_{eq}}\right) \qquad C' = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d_m}{r_{eq}}\right)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0 \frac{\ln\left(\frac{d_m}{r'_{eq}}\right)}{\ln\left(\frac{d_m}{r_{eq}}\right)}} \approx \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c}$$

c: velocidad de la luz en el aire (o vacío).

Por definición, la velocidad de propagación de la onda de tensión es $v_p = \frac{\omega}{\beta}$.

Por lo que al sustituir en las ecuaciones anteriores se obtiene que $v_p = c$.

Longitud de onda en línea **sin pérdidas**

La longitud de onda λ es la distancia requerida para cambiar la fase de la tensión o corriente por 360° o 2π rads. A partir de:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cosh(\underline{\gamma} x) - \underline{Z}_W \underline{I}_1 \sinh(\underline{\gamma} x)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cosh(\underline{\gamma} x) - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} \sinh(\underline{\gamma} x)$$

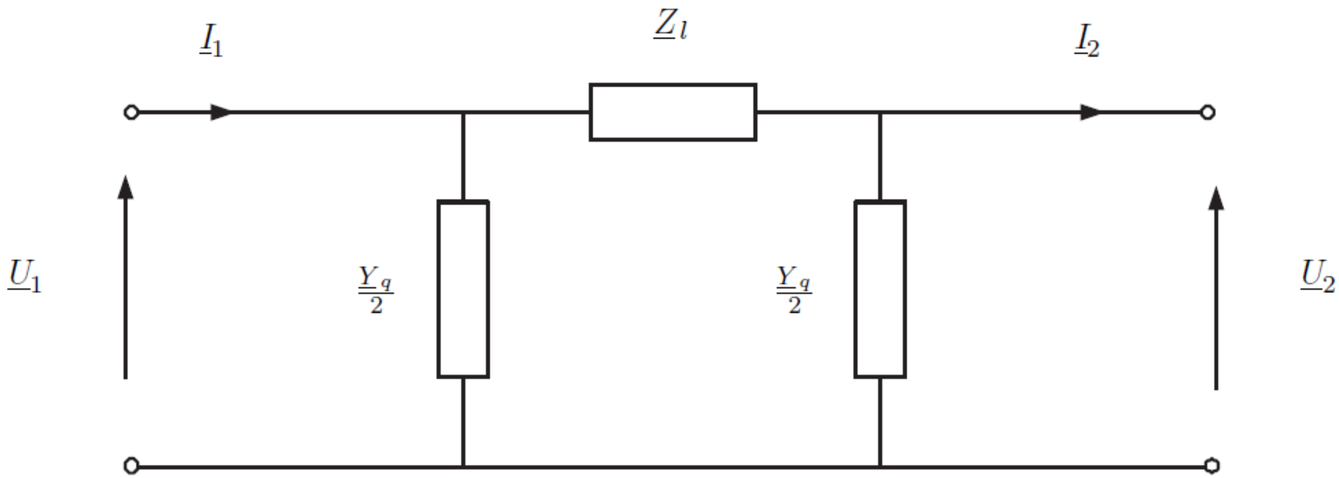
Se puede comprobar que la tensión y corriente cambian de fase por 2π rads cuando $x = 2\pi/\beta$. Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{f\sqrt{L'C'}}$$

Para una línea de transmisión aérea a 60 Hz, $\lambda = 5000\ km$.

Modelo de línea con parámetros concentrados

El modelo de línea con parámetros distribuidos se puede representar con el Modelo Pi (de parámetros concentrados).



$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \underline{Z}_l \frac{\underline{Y}_q}{2} & \underline{Z}_l \\ \frac{\underline{Y}_q}{2}\left(2 + \underline{Z}_l \frac{\underline{Y}_q}{2}\right) & 1 + \underline{Z}_l \frac{\underline{Y}_q}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Modelo de línea con parámetros concentrados

Note que si se expresa la tensión y corriente de inicio de línea con los valores al final, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh\left(\underline{\gamma} l\right) & \underline{Z}_W \sinh\left(\underline{\gamma} l\right) \\ \frac{1}{\underline{Z}_W} \sinh\left(\underline{\gamma} l\right) & \cosh\left(\underline{\gamma} l\right) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Al igualar las matrices $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_l &= \underline{Z}_W \sinh\left(\underline{\gamma} l\right) \\ \frac{\underline{Y}_q}{2} &= \frac{\cosh\left(\underline{\gamma}\, l\right) - 1}{\underline{Z}_W \sinh\left(\underline{\gamma}\, l\right)} = \frac{1}{\underline{Z}_W} \tanh\left(\frac{\underline{\gamma} l}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

Modelo más preciso

Modelos **simplificados** de línea con parámetros concentrados

Para el caso en que $|\underline{\gamma} l| \ll 1$, las expresiones anteriores se simplifican a:

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_W \sinh\left(\underline{\gamma} l\right) \approx \underline{Z}_W \underline{\gamma} l = \underline{Z}' l$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{1}{\underline{Z}_W} \tanh\left(\frac{\underline{\gamma} l}{2}\right) \approx \frac{1}{\underline{Z}_W} \frac{\underline{\gamma} l}{2} = \frac{\underline{Y}' l}{2}$$

Con $\underline{Z}_W = \sqrt{\dfrac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$, $\underline{Z}' l = R' l + jX' l$ y $\dfrac{\underline{Y}'}{2} l = \dfrac{(G' + jB')}{2} l$

Esta aproximación es válida para **líneas medianas** aéreas de 300 km o menos y líneas subterráneas (cables) de 100 km o menos.

Modelos **simplificados** de línea con parámetros concentrados

En el caso de líneas aéreas, la conductancia es usualmente despreciable:

$$G' = 0$$

Entonces:

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}'l = R'l + jX'l$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{\underline{Y}'}{2}l = j\frac{B'}{2}l$$

Este modelo resulta en muy buena aproximación para líneas cortas y medianas.

Si se desprecia la resistencia, se obtiene un modelo más simple aún:

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}'l = jX'l$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{\underline{Y}'}{2}l = j\frac{B'}{2}l \longrightarrow$$ 0 en línea corta.

Modelos **simplificados** de línea con parámetros concentrados

Opciones de modelo de línea de transmisión:

- **Líneas cortas:** Hasta 100 km. Estas líneas normalmente tienen una capacitancia en derivación muy pequeña. La conductancia también es pequeña. Estas líneas se modelan con la impedancia serie únicamente.
- **Líneas medianas:** De 100 a 300 km. Se puede utilizar el modelo donde $|\underline{\gamma} l| \ll 1$, esto resulta en muy buena aproximación.
- **Líneas largas:** Líneas de más de 300 km aproximadamente. Se puede usar varios modelos Pi de líneas medianas en serie, o usar un único modelo Pi con las relaciones exactas de tensión y corriente.

Modelo de línea con parámetros ABCD

La relación entre las cantidades de envío y recibo se puede expresar de manera general como:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

Donde los parámetros A, B, C y D son parámetros que dependen de las constantes $R', G', L'\ y\ C'$. Según el modelo Pi de la línea de transmisión, se puede demostrar fácilmente que:

$$A = 1 + Z_l \frac{Y_q}{2} \qquad B = Z_l \qquad C = \frac{Y_q}{2}\left(2 + Z_l \frac{Y_q}{2}\right)$$

$$D = 1 + Z_l \frac{Y_q}{2}$$

Ejemplo 4

Una línea de transmisión trifásica de 200 millas (320 km) tiene los siguientes parámetros a 60 Hz:

$$Z' = 0{,}21 + j0{,}78 \frac{\Omega}{milla} \; por\ fase$$
$$Y' = 0 + j5{,}42\ x10^{-6} \frac{S}{milla} \; por\ fase$$

Determine:

a) La constante de atenuación y la constante de fase de la línea

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

R/: $\alpha = 0.00027435$ Neper/milla, $\beta = 0.0020743$ rad/milla.

b) La impedancia característica de la línea: $Z_W = \sqrt{\dfrac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$

Ejemplo 4

$$Z_W = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = 386{,}03 \angle -7{,}54° \ \Omega$$

c) Determine el modelo Pi más preciso (línea larga > 300 km)

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_W \sinh\left(\underline{\gamma}\, l\right)$$

$$Z_l = 39.662 \ + j\ 151.95\ \Omega$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{\cosh\left(\underline{\gamma}\, l\right) - 1}{\underline{Z}_W \sinh\left(\underline{\gamma}\, l\right)} = \frac{1}{\underline{Z}_W} \tanh\left(\frac{\underline{\gamma} l}{2}\right)$$

$$\frac{Y_q}{2} = 2.1277 \times 10^{-6} \ + j\ 5.4976 \times 10^{-4}\ S$$

Ejemplo 4

d) Determine el modelo Pi simplificado de línea mediana

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_W \sinh\left(\underline{\gamma} l\right) \approx \underline{Z}_W \underline{\gamma} l = \underline{Z}' l$$

$$Z_l = 42.000 \ + j\, 156.00\, \Omega$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{1}{\underline{Z}_W} \tanh\left(\frac{\underline{\gamma} l}{2}\right) \approx \frac{1}{\underline{Z}_W} \frac{\underline{\gamma} l}{2} = \frac{\underline{Y}' l}{2}$$

$$\frac{Y_q}{2} = 0.00 + j\, 5.4200 \times 10^{-4}\, S$$

Ejemplo 4

e) Repita los cálculos anteriores si $l = 50$ millas (80 km)

Línea larga (mejor modelo):

$$Z_l = 10.46 \ + j\, 38.936\ \Omega$$

$$\frac{Y_q}{2} = 3.2189 \times 10^{-8} \ + j\, 1.3562 \times 10^{-4}\ S$$

Línea mediana (aproximación):

$$Z_l = 10.5 \ + j\, 39\ \Omega$$

$$\frac{Y_q}{2} = 0.0000 + j\, 1.3550 \times 10^{-4}\ S$$