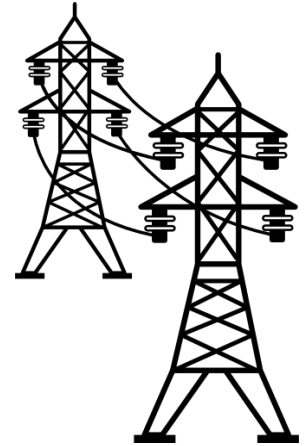




EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica



IE-0469 Sistemas de Potencia I

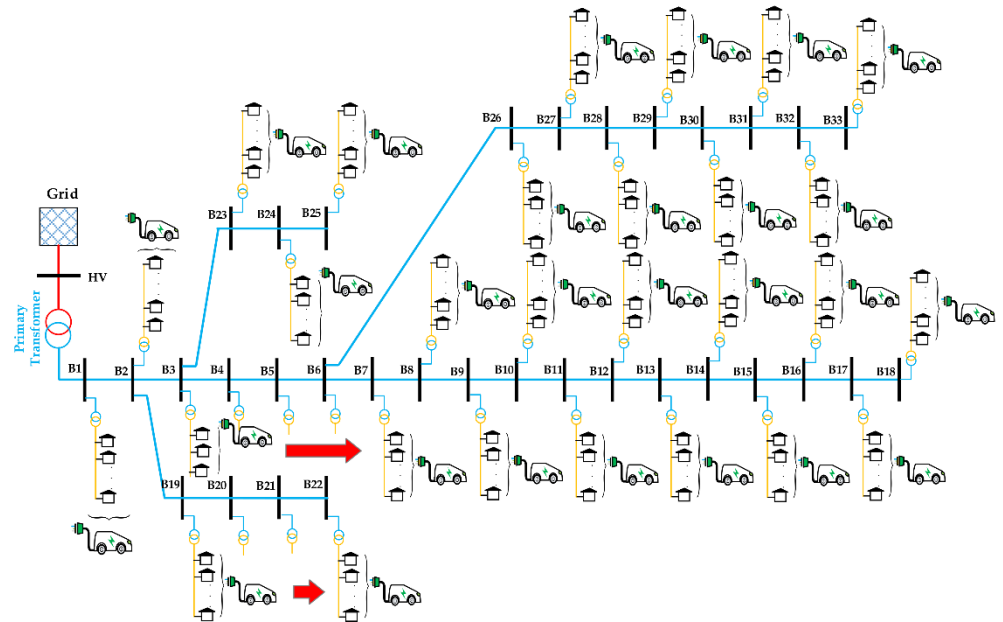
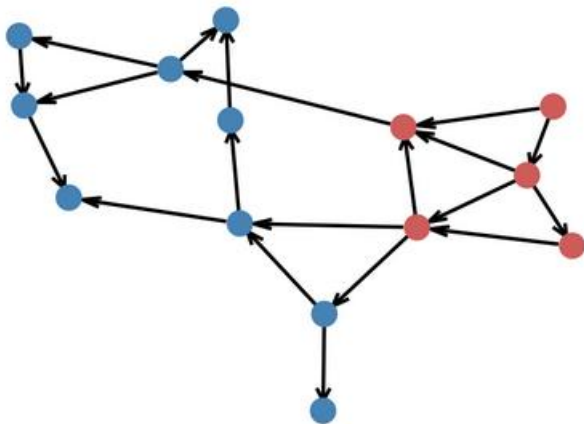
Presentación #4 Cálculo de flujos de potencia

Dr. Andrés Argüello Guillén

andres.arguelloguillen@ucr.ac.cr

Referencias:

- Sección 6 “Power flows”, Power System Analysis and Design (Glover).
- Sección 6.4 “AC Transmission, Power-flow analysis”, Power System Stability and Control (Kundur).
- Sección 8 “Estudio de Cargas”, Análisis de sistemas eléctricos de potencia (Stevenson).

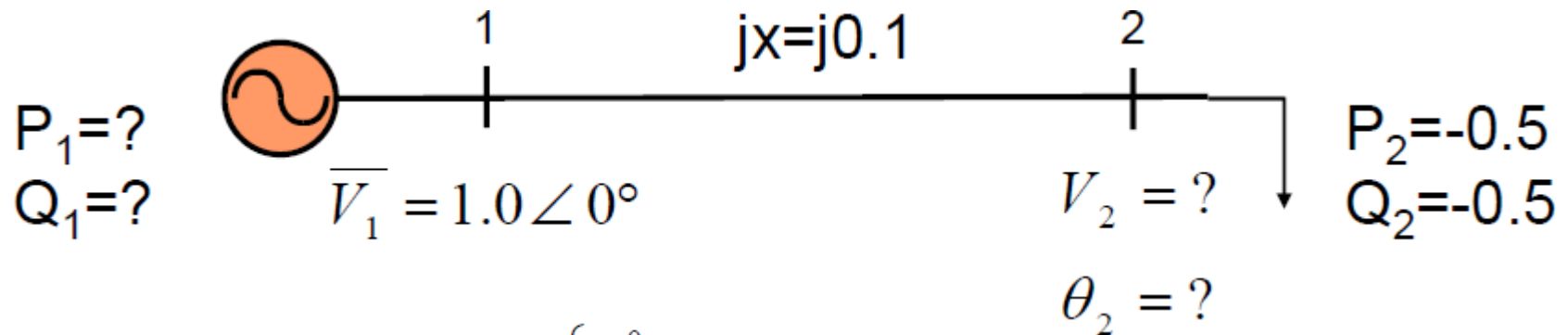


Newton-Raphson (NR) deshonesto

- La mayoría de la **demanda computacional de NR** consiste en el **cálculo del Jacobiano y su inversa** (o factorización)
- Una aproximación consiste en **actualizar el Jacobiano ocasionalmente** entre iteraciones
- Si el Jacobiano se evalúa únicamente en la primera iteración hablamos del NR completamente (o muy) deshonesto.
- Resulta en más iteraciones pero computacionalmente es menos pesado
- Método aproximado y **poco usado en la actualidad.**
- Podemos actualizar si detectamos que la tasa de convergencia desaceleró significativamente.

Ejemplo 1: NR muy deshonesto

Ejemplo para sistema de 2 barras



Primera iteración: $\begin{cases} \theta^0 = 0.0 \\ V^0 = 1.0 \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} 10V^0 \cos \theta^0 & 10 \sin \theta^0 \\ 10V^0 \sin \theta^0 & 20V^0 - 10 \cos \theta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Mantenemos constante esta matriz}$$

Ejemplo 1: NR-deshonesto

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = -J^{-1} \begin{pmatrix} P(\theta^0, V^0) \\ Q(\theta^0, V^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.05 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \theta^1 \\ V^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ V^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.95 \end{pmatrix}$$

- 2da iteración:
$$\begin{cases} \theta^1 = -0.05 \\ V^1 = 0.95 \end{cases}$$

Se revisa el **mismatch** con las variables dadas:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} P(\theta^1, V^1) \equiv 10V^1 \sin\theta^1 + 0.5 = 0.0252 \\ Q(\theta^1, V^1) \equiv 10(V^1)^2 - 10V^1 \cos\theta^1 + 0.5 = 0.0369 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.0252 \\ 0.0369 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00252 \\ -0.00369 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{(2)} \\ V^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0500 \\ 0.95000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00252 \\ -0.00369 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0525 \\ 0.9463 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1: NR-deshonesto

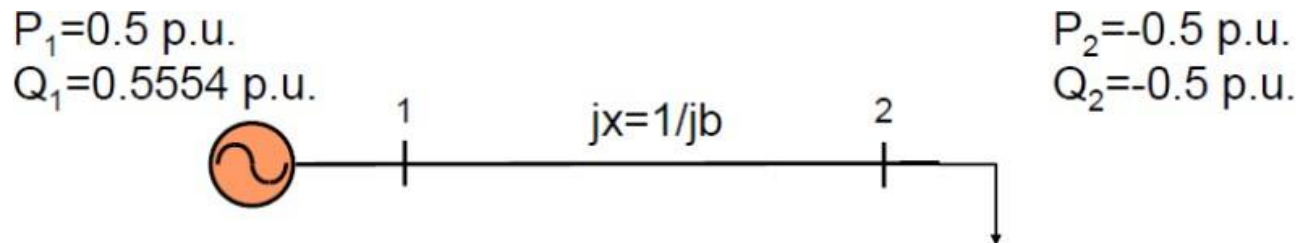
En la iteración **7**:

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.11785e-5 \\ 0.185658e-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.17857e-7 \\ -1.85658e-7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(7)} = \mathbf{x}^{(6)} + \Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -0.0529 \\ 0.9457 \end{pmatrix}$$

Y el mismatch:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1.6367e-7 \\ 2.5784e-7 \end{pmatrix}$$



Comparación de métodos

	$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$	$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$
Iteración	NR $[\theta, V]$	NR deshonesto $[\theta, V]$
1	-0.0500 0.9500	- 0.0500 0.9500
2	-0.0529 0.9458	-0.0525 0.9463
3	-0.0529 0.9457	-0.0528 0.9458
4		-0.0529 0.9457
5		-0.0529 0.9457
6		-0.0529 0.9457
7		-0.0529 0.9457

NR completo

Recordando el método iterativo de Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}^k}{d\boldsymbol{\theta}} & \frac{d\mathbf{P}^k}{d\mathbf{V}} \\ \frac{d\mathbf{Q}^k}{d\boldsymbol{\theta}} & \frac{d\mathbf{Q}^k}{d\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta}^k \\ \Delta\mathbf{V}^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}(\mathbf{x}^k) \\ \Delta\mathbf{Q}(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

Note que los cambios en ángulos y magnitudes de tensión afectan a la potencia activa y reactiva. O sea, hay un acople de ángulos y magnitudes a potencias activas y reactivas.

NR desacoplado

- Método para realizar cálculos rápidos del flujo de potencia.
- Parte del supuesto que los cambios en potencia activa dependen principalmente de cambios en ángulos de las tensiones mientras que los cambios en potencia reactiva se deben principalmente de los cambios en las magnitudes de las tensiones.

En los sistemas de potencia (a nivel de transmisión) se cumplen típicamente las siguientes condiciones:

1. Más común: En las líneas, $X \gg R$ ó $X/R \gg 1$, por lo tanto, $B_{ij} \gg G_{ij}$. Así, es usual simplificar que $G_{ij} \approx 0$.
2. Menos común: La diferencia entre ángulos de barras adyacentes es pequeña, de modo que $\sin(\theta_{ij}) \approx 0$.

Así: $\frac{dP_i}{dV_j} \approx 0$ y $\frac{dQ_i}{d\theta_j} \approx 0$, y se obtienen 2 procesos iterativos independientes:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_N} & \frac{\partial P_2}{\partial V_{k+1}} & \mathbf{0} & \frac{\partial P_2}{\partial V_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial P_N}{\partial V_{k+1}} & \dots & \frac{\partial P_N}{\partial V_N} \\ \hline \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial \theta_N} & \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial V_{k+1}} & \dots & \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial V_N} \\ \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_N}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial Q_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial Q_N}{\partial V_{k+1}} & \dots & \frac{\partial Q_N}{\partial V_N} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\theta}^k &= - \left(\frac{d\mathbf{P}^k}{d\boldsymbol{\theta}} \right)^{-1} \Delta \mathbf{P}(\mathbf{x}^k) \\ \Delta \mathbf{V}^k &= - \left(\frac{d\mathbf{Q}^k}{d\mathbf{V}} \right)^{-1} \Delta \mathbf{Q}(\mathbf{x}^k) \end{aligned}$$

Método de **Jacobi y Gauss-Seidel**

Suponga que queremos la solución de \mathbf{x} conocidos los valores de la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{y} :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Si tomamos la fila k :

$$y_k = A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \cdots + A_{kk}x_k + \cdots + A_{kN}x_N$$

Y si resolvemos para x_k :

$$x_k = \frac{1}{A_{kk}} [y_k - (A_{k1}x_1 + \cdots + A_{kk-1}x_{k-1} + A_{kk+1}x_{k+1} + \cdots + A_{kN}x_N)]$$

Método de Jacobi

La expresión anterior es equivalente a:

$$x_k = \frac{1}{A_{kk}} \left(y_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_{kn} x_n - \sum_{n=k+1}^N A_{kn} x_n \right)$$

El método Jacobi usa el valor conocido de x_k^i en el lado derecho de la ecuación anterior para calcular su nuevo valor en la iteración $i+1$:

$$x_k^{i+1} = \frac{1}{A_{kk}} \left(y_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_{kn} x_n^i - \sum_{n=k+1}^N A_{kn} x_n^i \right)$$

Hasta que $\left| \frac{x_k^{i+1} - x_k^i}{x_k^i} \right| < \epsilon$ para $k = 1, \dots, N$

Método de Gauss-Seidel

En el método de Gauss-Seidel, x_n^{i+1} para $n < k$ se usa en el lado derecho de la ecuación para calcular el nuevo valor de x_k^{i+1} en el lado izquierdo:

$$x_k^{i+1} = \frac{1}{A_{kk}} \left(y_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_{kn} x_n^{i+1} - \sum_{n=k+1}^N A_{kn} x_n^i \right)$$

Hasta que $\left| \frac{x_k^{i+1} - x_k^i}{x_k^i} \right| < \epsilon$ para $k = 1, \dots, N$

Para resolver el problema de flujos de potencia regresamos a las ecuaciones nodales:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad \bar{I}_k = \frac{P_k - jQ_k}{\bar{V}_k^*}$$

Aplicamos Gauss-Seidel a las ecuaciones nodales y usamos la expresión anterior:

$$\bar{V}_k^{i+1} = \frac{1}{Y_{kk}} \left(\frac{P_k - jQ_k}{(\bar{V}_k^i)^*} - \sum_{n=1}^{k-1} Y_{kn} \bar{V}_n^{i+1} - \sum_{n=k+1}^N Y_{kn} \bar{V}_n^i \right)$$

Esta ecuación se puede aplicar 2 veces durante la iteración i para la barra k **tipo PQ**. Primero se usa el “guess” $(\bar{V}_k^i)^*$ para calcular el primer \bar{V}_k^{i+1} . Ese valor se usará ahora como $(\bar{V}_k^{i+1})^*$ en lugar de $(\bar{V}_k^i)^*$ para calcular el segundo \bar{V}_k^{i+1} . Luego se aplica la misma ecuación para la siguiente barra k .

En caso de **barras PV**, se conoce la magnitud de \bar{V}_k y P_k , pero no el valor de Q_k , que se aproxima como:

$$Q_k = \sum_{n=1}^N V_k^i V_n^i [G_{kn} \sin(\theta_k^i - \theta_n^i) - B_{kn} \cos(\theta_k^i - \theta_n^i)]$$

Este valor se usa en la ecuación de Gauss-Seidel para la barra PV:

$$\bar{V}_k^{i+1} = \frac{1}{Y_{kk}} \left(\frac{P_k - jQ_k}{(\bar{V}_k^i)^*} - \sum_{n=1}^{k-1} Y_{kn} \bar{V}_n^{i+1} - \sum_{n=k+1}^N Y_{kn} \bar{V}_n^i \right)$$

El primer resultado de \bar{V}_k^{i+1} reemplazará en el segundo cálculo a $(\bar{V}_k^i)^*$ con la salvedad de que la magnitud debe siempre corregirse para coincidir con el valor de entrada de la barra PV. De modo que solo el ángulo de la tensión debe calcularse.

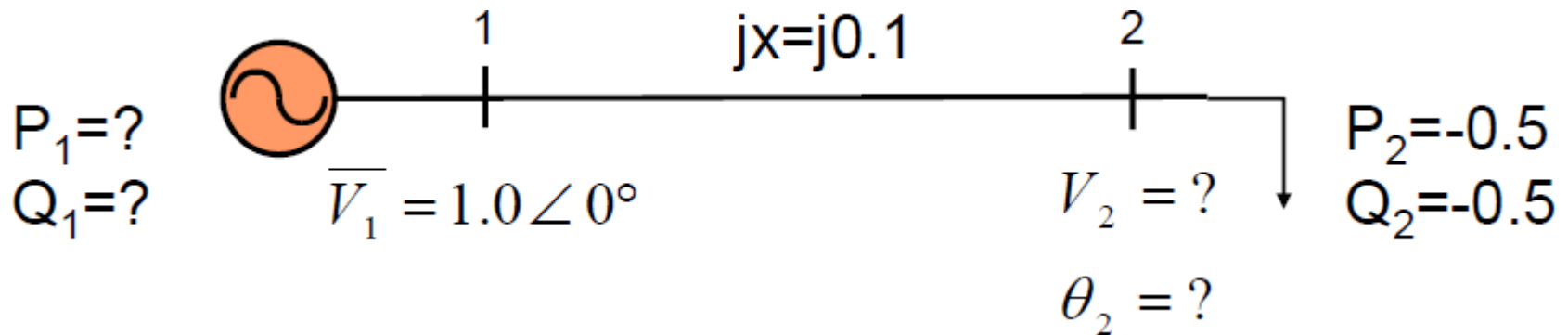
$$(\bar{V}_k^{i+1})_{\text{corregido}} = \frac{\bar{V}_k^{i+1}}{|\bar{V}_k^{i+1}|} (V_k)_{\text{conocido}}$$

La tensión de la barra oscilante no se calcula, ya se conoce.

Ejemplo 2: Método Gauss-Seidel

Ejemplo para sistema de 2 barras

$$Y = j \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$



Utilice Gauss-Seidel para calcular la tensión en la barra 2. Inicie con condiciones “flat start” y no realice más de 5 iteraciones.

Flujo de potencia **DC**

- Los flujos calculados en “DC” son una **aproximación** del flujo de potencia “AC”.
- Solo obtenemos los flujos de potencia activa, y se ignoran los flujos de potencia reactiva.
- La magnitud de tensión en todas las barras se suponen 1.0 pu.
- Se ignora la resistencia, y los elementos en derivación de las líneas de transmisión. La matriz de admitancias es puramente imaginaria, $Y = jB$.

Considere la expresión de tensión en barra i :

$$\bar{V}_i = V_i e^{j\delta_i} = V_i (\cos(\delta_i) + j \sin(\delta_i))$$

Dado que $V_i \approx 1$, $\cos(\delta_i) \approx 1$ y $\sin(\delta_i) \approx \delta_i$, para todas las barras del sistema:

$$\bar{V} \approx \mathbf{1} + j\delta_i$$

Las inyecciones de potencia en cada barra son:

$$\bar{S} = \text{diag}(\bar{V})(Y\bar{V})^* = \text{diag}(\mathbf{1} + j\delta)(-j\mathbf{B}(\mathbf{1} - j\delta))$$

Expandiendo:

$$\mathbf{S} = -j\text{diag}(\mathbf{1})\mathbf{B}\mathbf{1} - \text{diag}(\mathbf{1})\mathbf{B}\delta + \text{diag}(\delta)\mathbf{B}\mathbf{1} - j\text{diag}(\delta)\mathbf{B}\delta$$

Separando parte real de imaginaria:

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\delta)\mathbf{B}\mathbf{1} - \text{diag}(\mathbf{1})\mathbf{B}\delta - j[\text{diag}(\mathbf{1})\mathbf{B}\mathbf{1} + \text{diag}(\delta)\mathbf{B}\delta]$$

Sabiendo que $\mathbf{B}\mathbf{1} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{S} = -\text{diag}(\mathbf{1})\mathbf{B}\delta - j[\text{diag}(\delta)\mathbf{B}\delta]$$

$$\mathbf{P} = -\mathbf{B}\delta = \mathbf{B}'\delta$$

$$\mathbf{Q} = -\text{diag}(\delta)\mathbf{B}\delta \quad \leftarrow \text{no lineal y poco confiable: Q depende más de V que de } \delta.$$

Si se conoce la potencia inyectada en cada barra \mathbf{P} :

$$\delta = (\mathbf{B}')^{-1} \mathbf{P}$$

Sin embargo, \mathbf{B}' es singular. Esto quiere decir que para un vector arbitrario de \mathbf{P} , la solución de δ no es única.

El rango de la matriz \mathbf{B}' para un sistema de N barras es $N-1$. Osea, la matriz tiene una columna y una fila redundante. Este problema se puede resolver si **eliminamos la columna del ángulo de la barra oscilante**, porque sabemos que $\delta_{ref}=0$, y **eliminamos la fila de la barra de potencia oscilante**, porque debe ser un resultado de los cálculos. Así, obtenemos la matriz $\widehat{\mathbf{B}'}$ de tamaño $N-1 \times N-1$ que tiene rango completo e inversa, y los vectores reducidos $\widehat{\boldsymbol{\delta}}$ y $\widehat{\mathbf{P}}$ sin las cantidades de la barra oscilante:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = (\widehat{\mathbf{B}'})^{-1} \widehat{\mathbf{P}}$$

Las tensiones son 1pu y las potencias reactivas desconocidas. Finalmente el flujo de potencia entre dos barras i y k es:

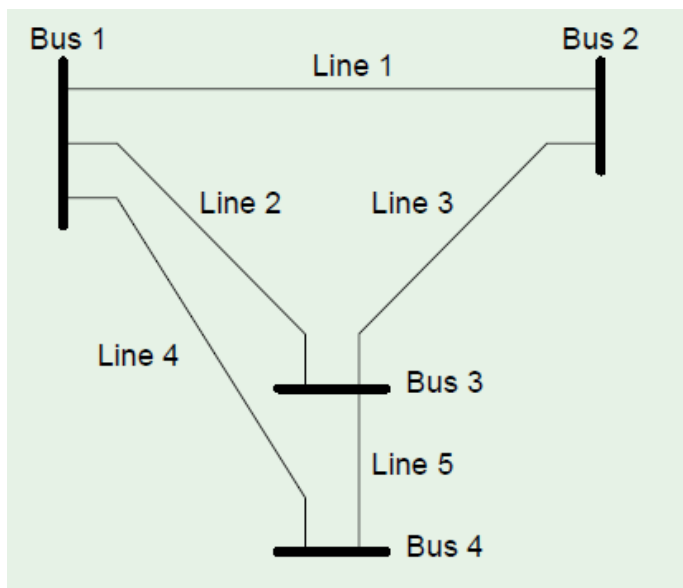
$$f_{\ell} = \text{Re}\{\overline{V}_i \overline{I}_{\ell}^*\} = \text{Re}\{\overline{V}_i [jb_{\ell}(\overline{V}_i^* - \overline{V}_k^*)]\} = b_{\ell}(\delta_i - \delta_k) = \frac{1}{x_{\ell}}(\delta_i - \delta_k)$$

Por análisis de la expresión anterior, concluimos que el flujo es proporcional a la susceptancia de la línea, y proporcional a la diferencia angular de las barras.

Para generalizar el cálculo de flujos de potencia para todas las líneas, utilizo la matriz de incidencia \mathbf{A} ($n \times m$), con n barras y m ramas (líneas o trafos). Se usa +1 para barra con # menor y -1 para barra con # mayor con # mayor.

$$a_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si nodo } i \text{ es el nodo de envío de ramal } l \\ -1 & \text{si nodo } i \text{ es el nodo de recibo de ramal } l \\ 0 & \text{ninguna de las anteriores} \end{cases}$$

Ejemplo 3: Matriz de incidencias



$$n = 4, \quad m = 5$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Así, la diferencia angular entre extremos de las líneas es:

$$\Delta\delta = \mathbf{A}^T \delta$$

Para el ejemplo previo:

$$\Delta\delta = \mathbf{A}^T \delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 - \delta_2 \\ \delta_1 - \delta_3 \\ \delta_2 - \delta_3 \\ \delta_1 - \delta_4 \\ \delta_3 - \delta_4 \end{bmatrix}$$

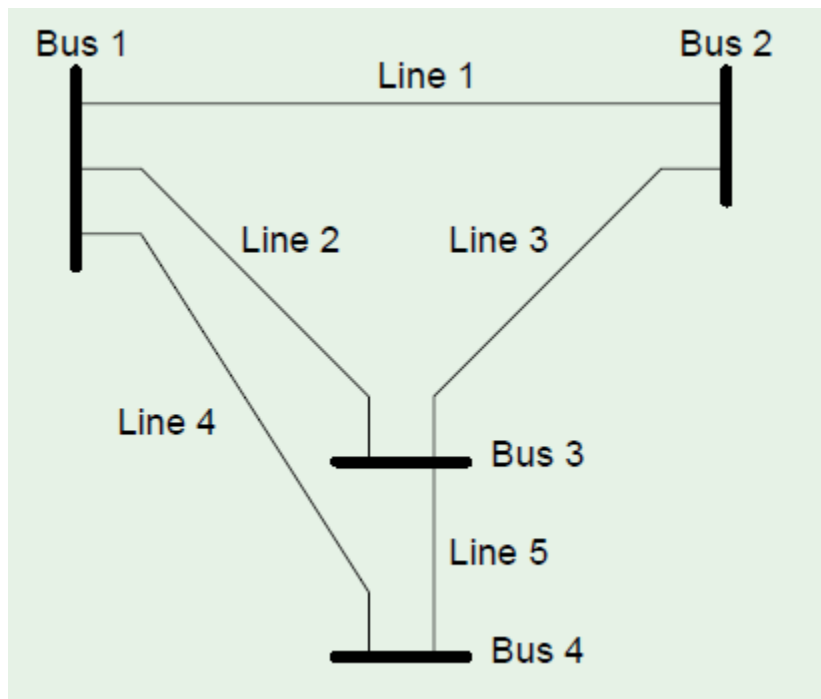
Y si multiplicamos la diferencia angular por la susceptancia de la línea obtenemos el flujo de potencia:

$$\mathbf{f} = \text{diag}(\mathbf{b}_b) \Delta\delta = \text{diag}(\mathbf{b}_b) \mathbf{A}^T \delta = \mathbf{C} \delta$$

Donde $\mathbf{b}_b = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m]^T$ y $\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{b}_b) \mathbf{A}^T$

Ejemplo 4: Flujo de potencia DC

Calcule la matriz **C** del sistema:



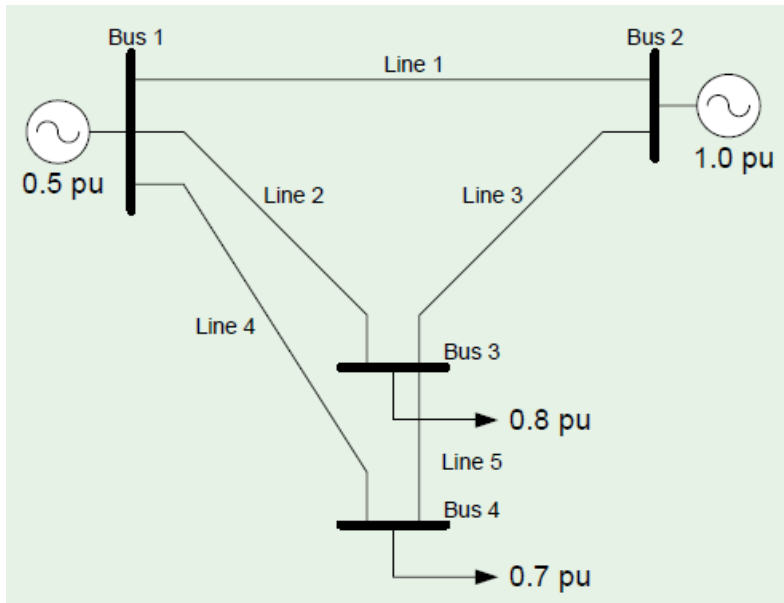
$$\mathbf{b}_b = [2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3]^T$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: Flujo de potencia DC

Calcule los flujos de potencia DC del sistema.



Las inyecciones de potencia están indicadas en la figura.

La barra 1 se escoge como referencia y barra oscilante.

Se debe calcular la matriz $\widehat{\mathbf{B}}'$ a partir de \mathbf{B}' eliminando la primera fila y columna.

Ejemplo 5: Flujo de potencia DC

$$\hat{\delta} = (\hat{\mathbf{B}}')^{-1} \hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.8 \\ -0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14 \\ -0.22 \\ -0.34 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.14 \\ -0.22 \\ -0.34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.28 \\ 0.44 \\ 0.72 \\ 0.34 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6: Flujo de potencia DC

Calcule los flujos de potencia DC del sistema. $S_B = 100 \text{ MVA}$.

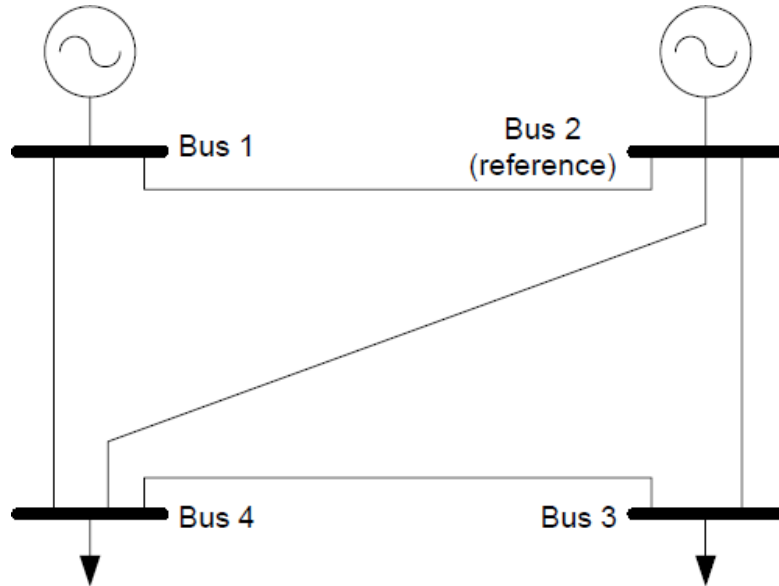


Table 1: Transmission line data

Line	Line reactance (pu)
1-2	0.20
1-4	0.25
2-3	0.15
2-4	0.30
3-4	0.40

Table 2: Generation and load data

Bus	Load (MW)	Generation (MW)
1		150
2		350
3	220	
4	280	

Ejemplo 6: Flujo de potencia DC

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 0 & -4 \\ -5 & 15 & -6.667 & -3.3333 \\ 0 & -6.667 & 9.1667 & -2.500 \\ -4 & -3.3333 & -2.5000 & 9.8333 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}}' = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 9.1667 & -2.5000 \\ -4 & -2.5000 & 9.8333 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ 3.5000 \\ -2.2000 \\ -2.8000 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ -2.2000 \\ -2.8000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 6.6667 & -6.6667 & 0 \\ 0 & 3.3333 & 0 & -3.3333 \\ 0 & 0 & 2.5000 & -2.5000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} 0.0019 \\ -0.3411 \\ -0.3707 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.0096 \\ 1.4904 \\ 2.2740 \\ 1.2356 \\ 0.0740 \end{bmatrix}$$