

EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica

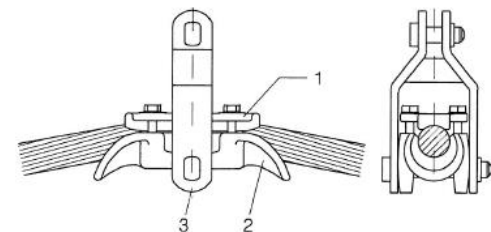
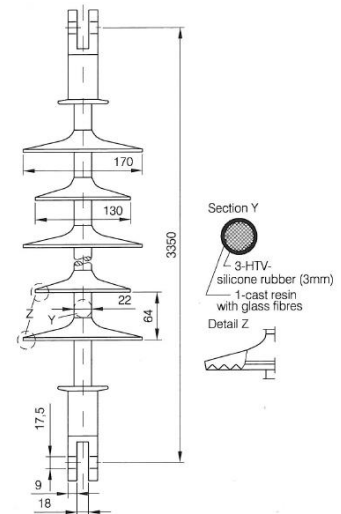
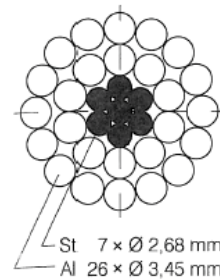
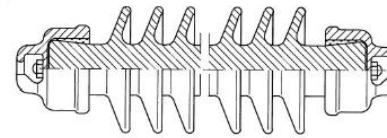
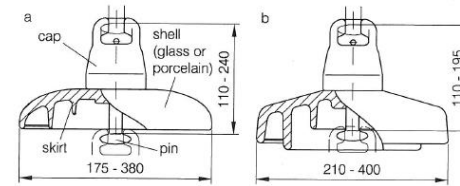
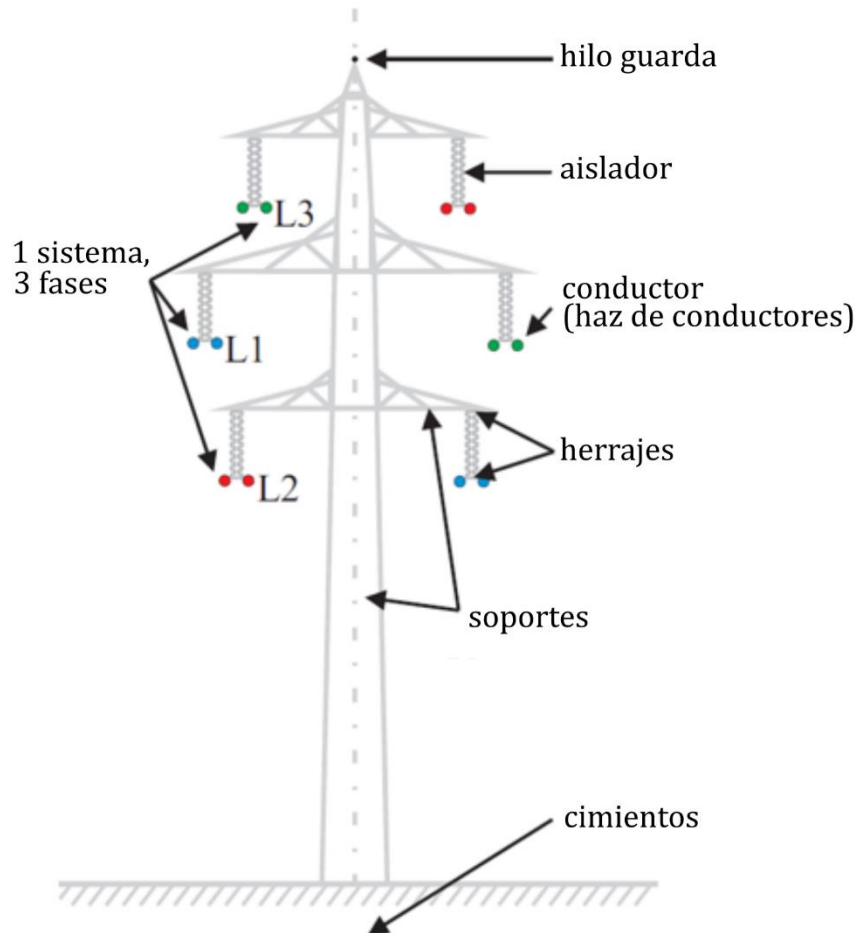
Transmisión de Potencia

IE-0365

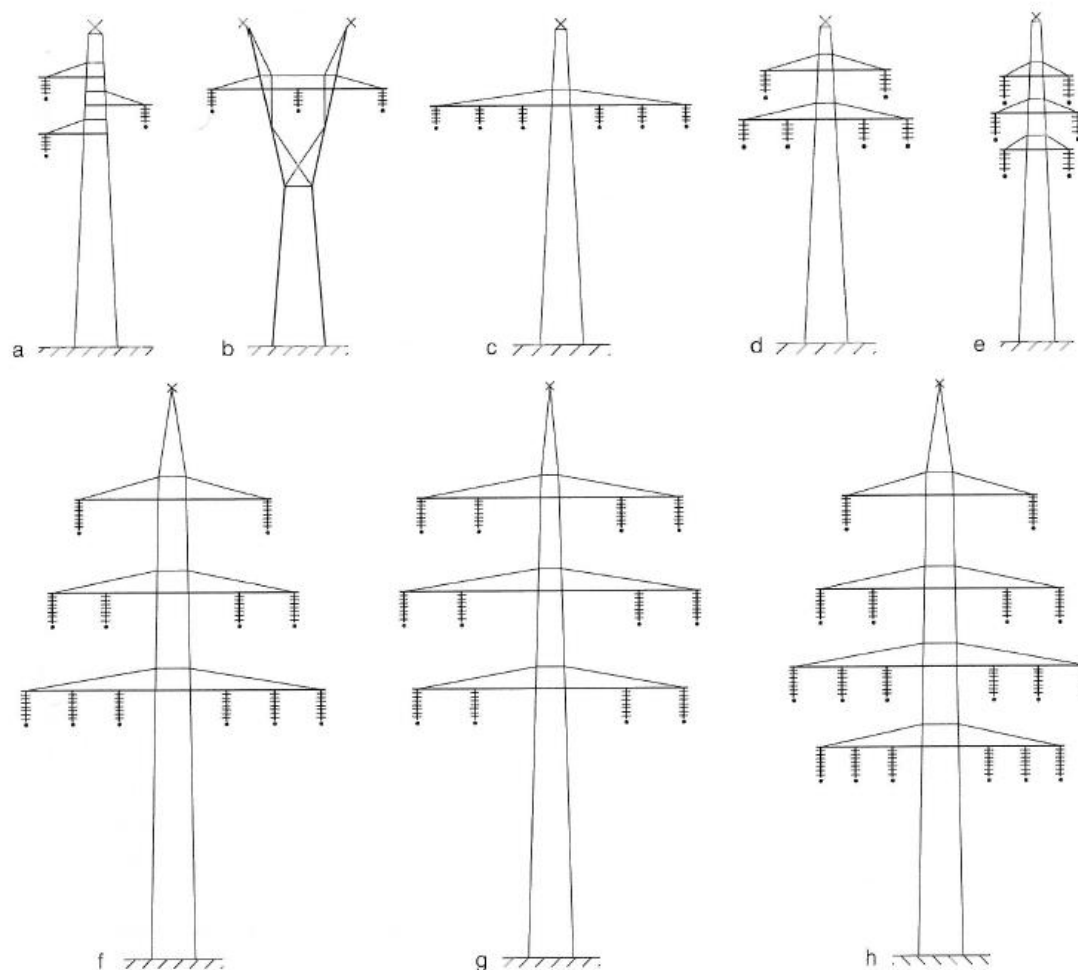
Dr. Gustavo Valverde Mora
Profesor Catedrático

gustavo.valverde@ucr.ac.cr

Líneas de transmisión



Configuraciones típicas



Conductores

Los conductores utilizados en líneas de transmisión y distribución deben tener las siguientes características:

- Debe ser buen conductor – baja resistencia
- Alta capacidad para soportar estrés mecánico (no debe ser frágil)
- Bajo peso por unidad de volumen
- Bajo costo para ser usado a grandes distancias (transmisión)

Los conductores de cobre, aluminio, acero y aluminio con acero son mayoritariamente utilizados en la industria de transmisión y distribución. En la mayoría de los casos los conductores están hechos de hilos entrelazados para brindar flexibilidad

Conductores

La mayoría de conductores en líneas de transmisión son de aluminio: *AAC*, *AAAC*, *ACAR* y *ACSR*. Estos son más usados que el cobre (escaso y costoso).

Los conductores *AAC* (todo aluminio) se utilizan cuando se requiere un conductor liviano y la fuerza del conductor no es un factor determinante.

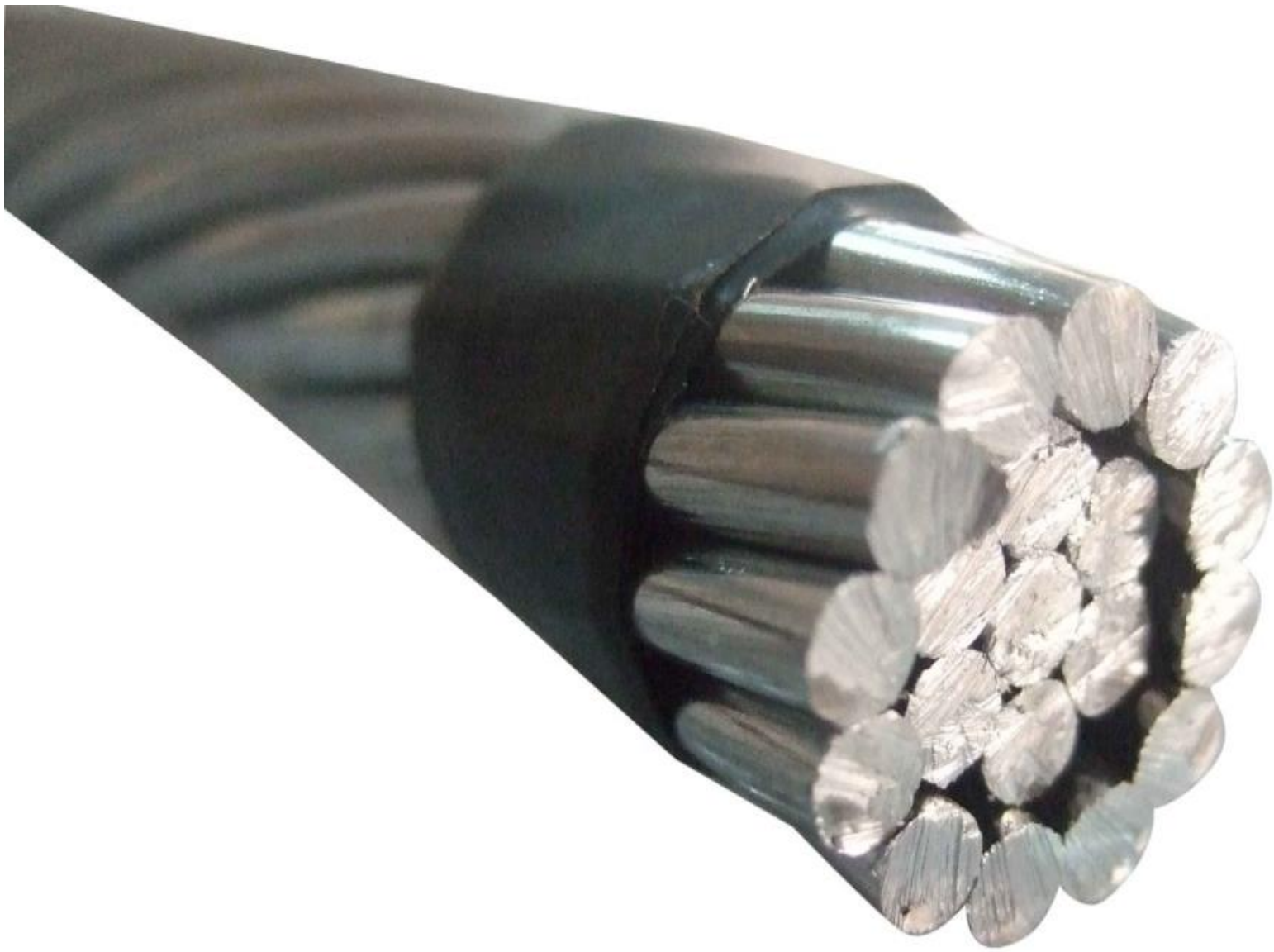
Los conductores *AAAC* (todo aleación de aluminio) tienen una mayor capacidad de soportar tensión mecánica.

AAC = All Aluminum Conductor

AAAC = All Aluminum Alloy Conductor

ACAR = Aluminium Conductor Alloy Reinforced

ACSR = Aluminium conductor steel-reinforced

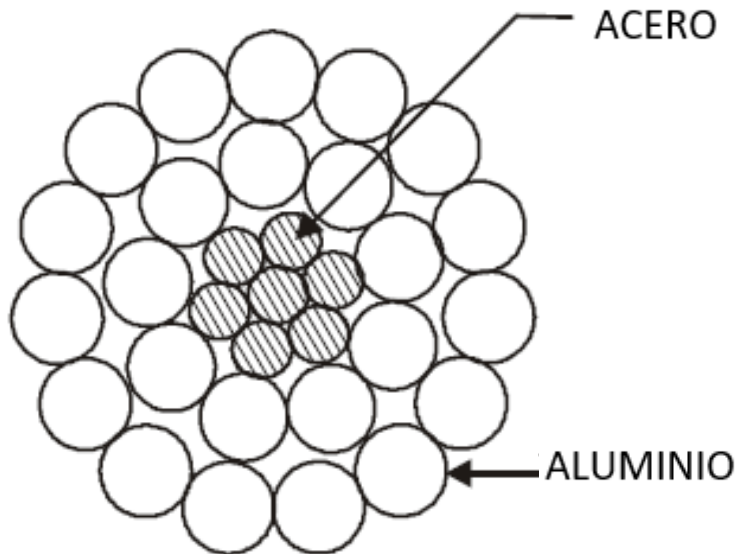


Conductor de aluminio AAC



Conductor de aleación de aluminio AAAC

Conductores ACSR

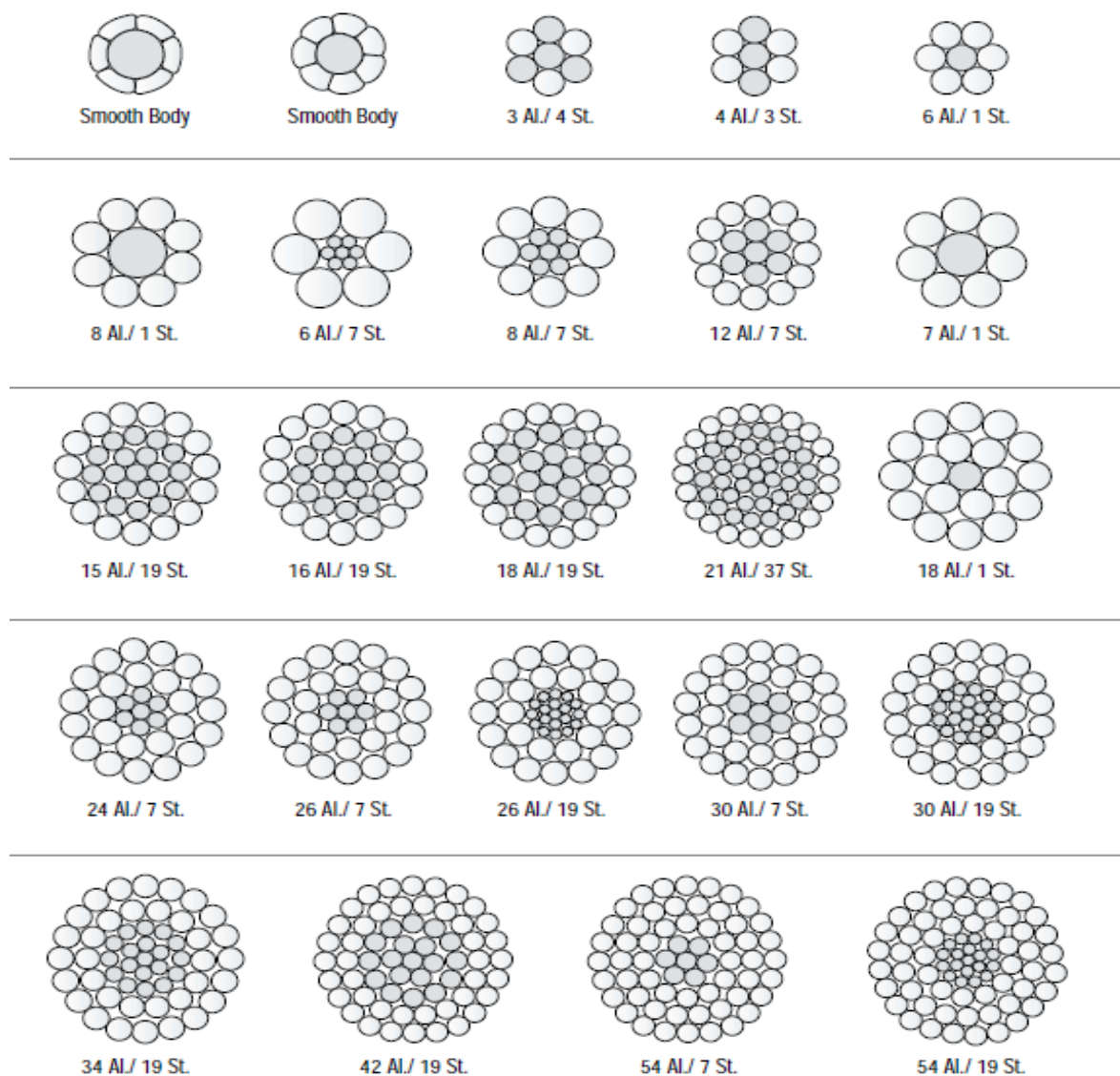


- Los tipo ACSR (conductor de aluminio reforzado con acero) son regularmente seleccionados por su bajo costo y buena fortaleza. Este tipo de conductor consiste de un núcleo de acero, para proveer soporte mecánico, rodeado por capas de aluminio.
- La cantidad y disposición de los hilos en los ACSR varía las características mecánicas y eléctricas del conductor.

Conductores ACSR



Conductor de aluminio reforzado con acero



Composición de conductores ACSR

Conductores ACAR

Los ACAR son conductores de aluminio reforzados con aleación de AlMgSi (aluminio magnesio y silicio). Tiene mejores propiedades mecánicas y eléctricas comparadas con su equivalente AAC, AAAC o ACSR.

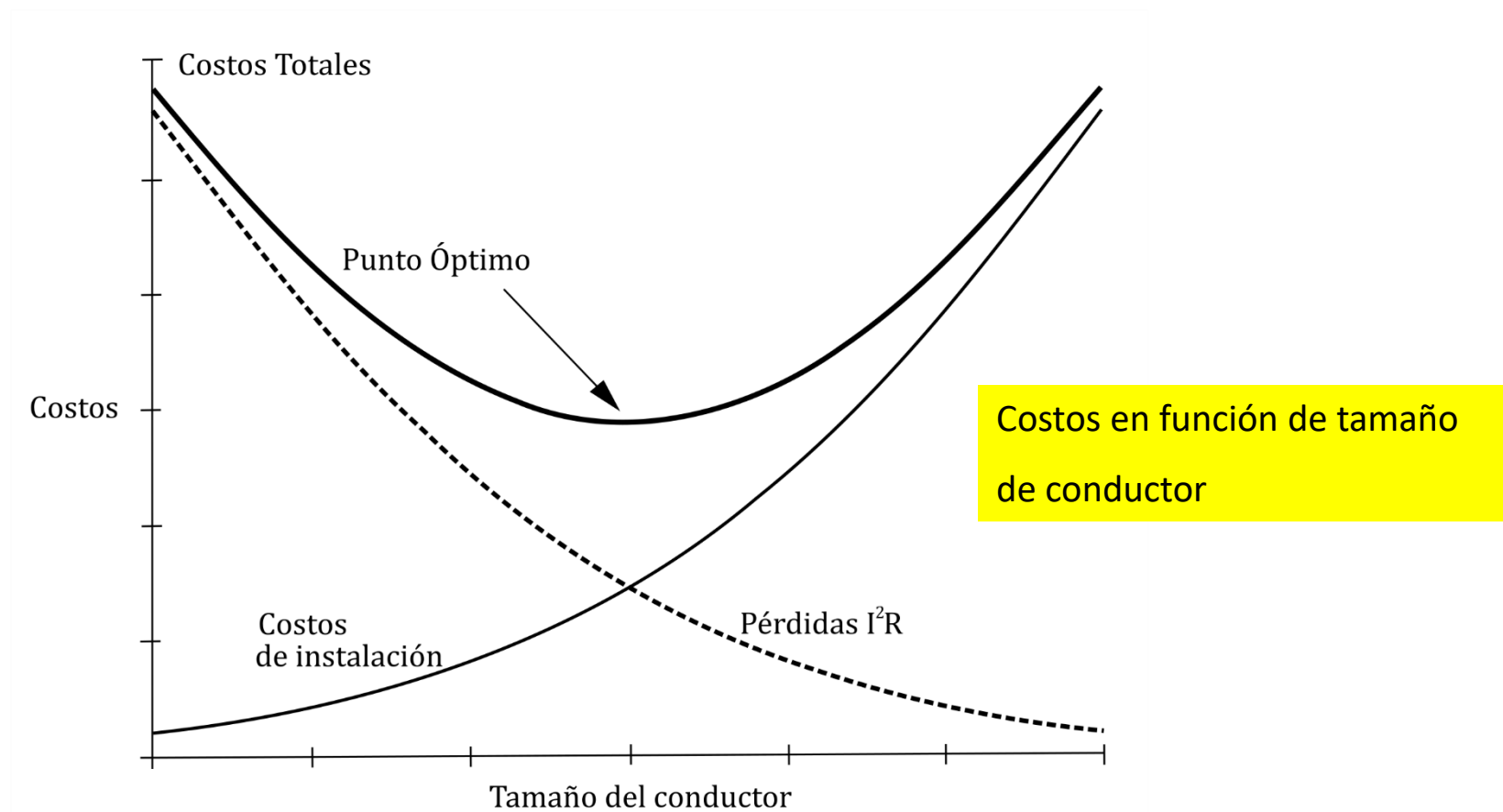


Composición de conductores ACAR

Conductores

El costo del conductor seleccionado está directamente relacionado con el calibre del mismo. Los conductores gruesos tienen mayor costo pero reducen la resistencia (reduce pérdidas de transmisión y distribución). La selección del calibre no solo debe contemplar el criterio técnico sino que se debe considerar el aspecto económico.

El tamaño del conductor más eficiente se encuentra haciendo un balance entre los costos por pérdidas eléctricas, que disminuyen conforme aumenta el tamaño del conductor, y los costos de instalación.

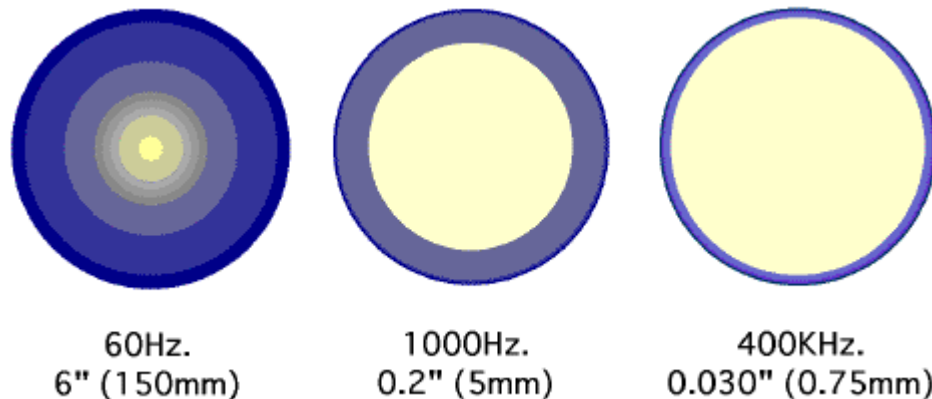


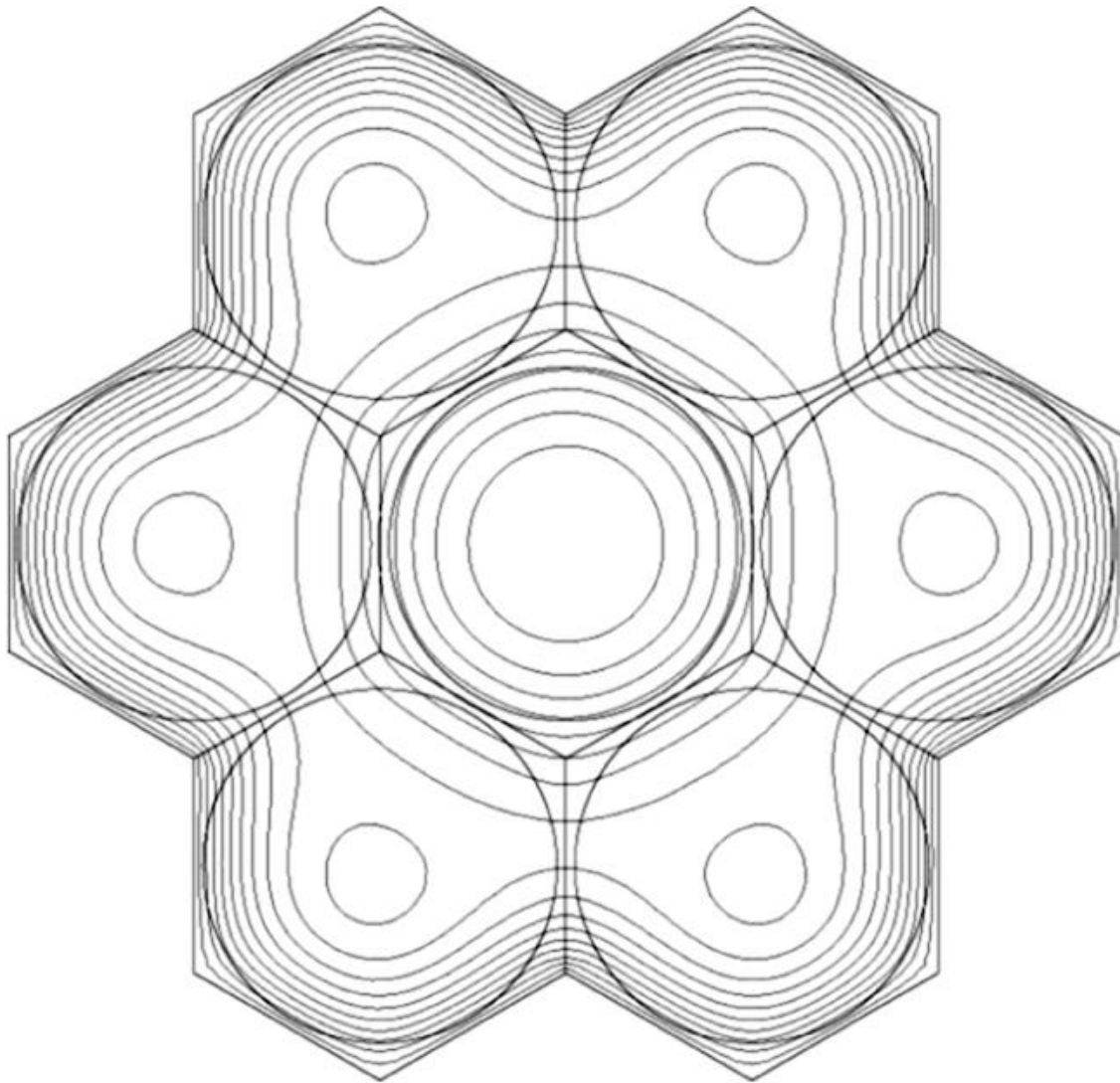
En la región, los calibres de 336 MCM, 600 MCM y 636 MCM se utilizan en red de 138 kV para transportar 125 – 180 MVA a 80° C. Calibres típicos en nivel de 230 kV son 795 MCM, 954 MCM y 1024 MCM (en SIEPAC) para transportar 340 – 380 MVA a 80° C.

Efecto piel en conductores

La corriente eléctrica tiende a concentrarse cerca de la superficie del conductor, o prácticamente en la superficie del mismo. Al abarcar menos área del conductor, la resistencia eléctrica aumenta.

El efecto piel es más pronunciado a mayor nivel de frecuencia. En corriente continua no hay efecto piel.



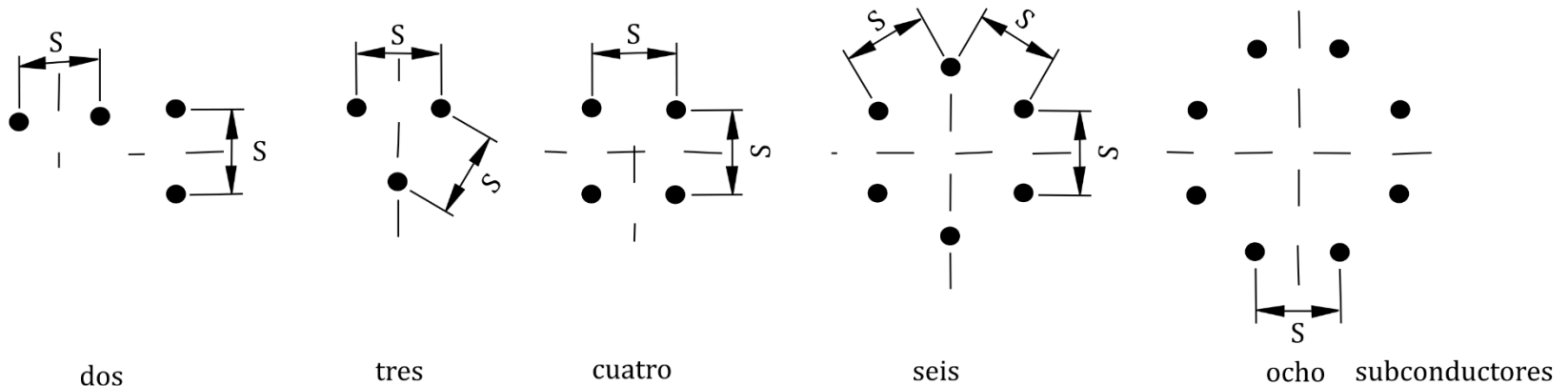


Efecto piel en conductor con hilos

Haz de conductores

El haz de conductores (*bundle conductors*) son un conjunto de conductores conectados en paralelo y dispuestos en una configuración geométrica dada, y que constituyen un conductor de fase de una línea AC.

Se utiliza como alternativa a un conductor de gran diámetro que se requiere para controlar el efecto corona en líneas de 200 kV o superior.



Resistencia de conductores

La resistencia cc de un conductor a una temperatura T está dada por:

$$R_{cc,T} = \frac{\rho_T l}{A}$$

ρ_T = resistividad del conductor a temperatura T, en Ωm

l = longitud del conductor, en m

A = área transversal del conductor, en m^2

La resistencia de un conductor depende de la “espiralidad” (aumento de longitud en conductores trenzados), el calibre, la temperatura y frecuencia (efecto piel) de operación y la magnitud de la corriente.

Resistencia de conductores

Por definición, la resistencia ca de un conductor es:

$$R_{ca} = \frac{P_{loss}}{|I|^2}$$

P_{loss} = pérdidas del conductor, en W.

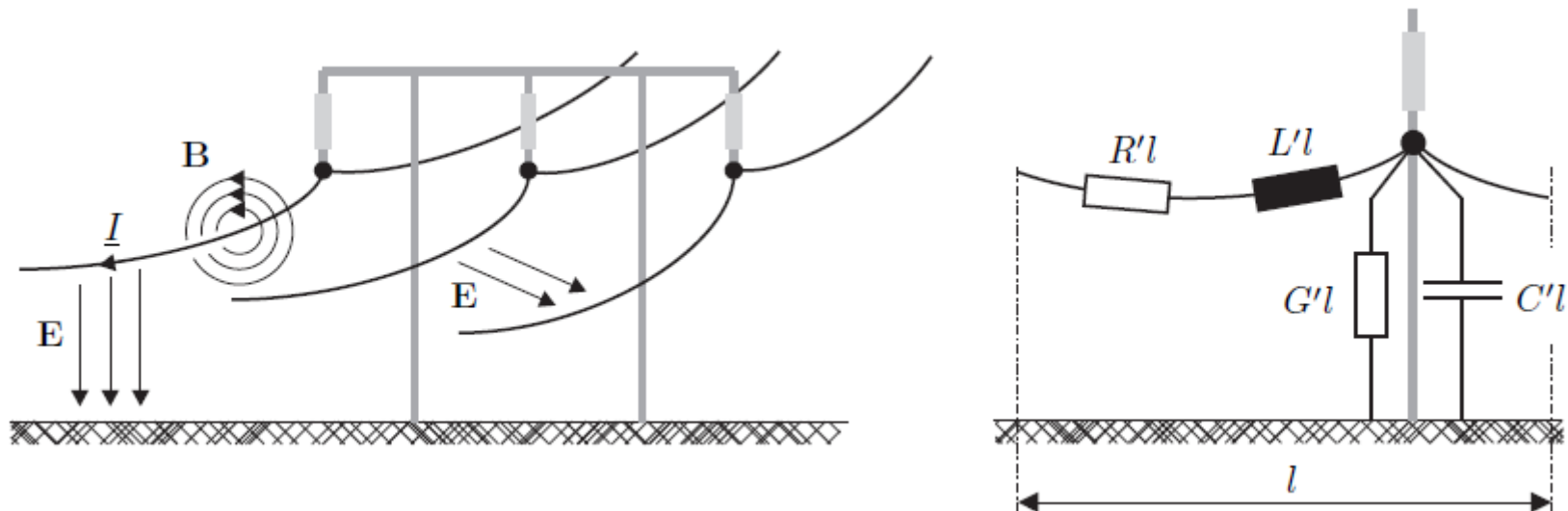
I = corriente rms que circula por el conductor, en A.

La ecuación anterior indica que no es posible calcular la resistencia ca a partir de parámetros. Sin embargo, los fabricantes usualmente utilizan factores de corrección de la resistencia cc para estimar su equivalente en ca.

Parámetros de líneas

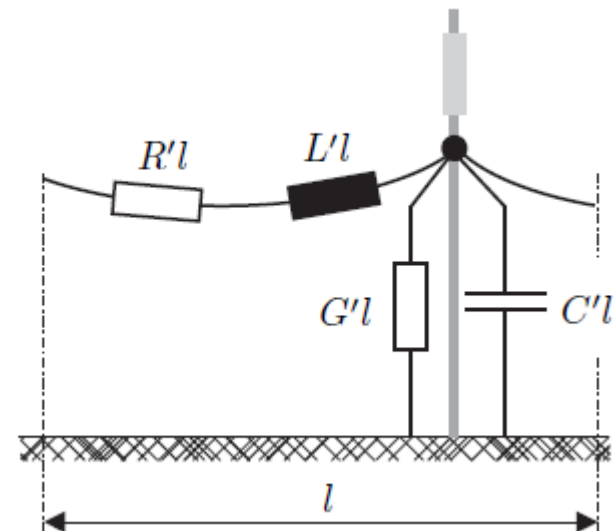
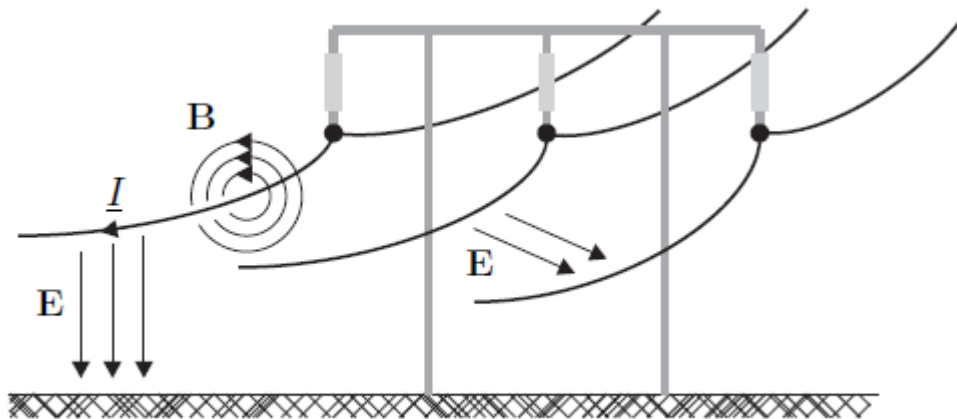
Cuando una corriente fluye a través de un conductor metálico se crean campos eléctricos y magnéticos. La potencia eléctrica es transportada por estos campos (Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$).

Cada línea tiene parámetros característicos que dependen de la geometría de configuración de la línea. Estos parámetros se miden por unidad de longitud (se distinguen por el prima)



Parámetros de líneas

- R' : Resulta de la Resistencia del conductor al paso de la corriente.
- L' : Resulta del campo magnético inducido por la corriente.
- C' : Resulta del campo eléctrico inducido por diferencia de potencial.
- G' : Resulta de corrientes de fuga en el aislador y el medio aislante (aire o gas SF6), normalmente despreciable.



Inductancia de conductor

Iniciamos con la derivación de inductancia de una línea infinitamente larga de radio r , cuya corriente se distribuye uniformemente dentro del conductor. Las líneas de campo magnético son círculos concéntricos.

Fuera del conductor ($x > r$) por Ley de Ampere:

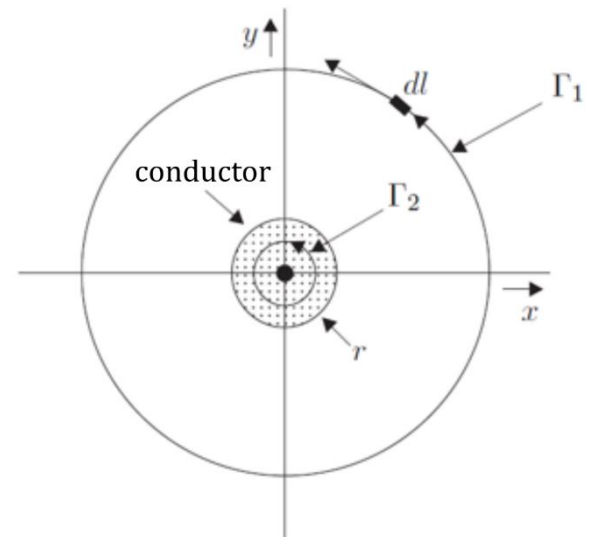
$$H_a(x) = \frac{i}{2\pi x}$$

Dentro del conductor ($x \leq r$), la corriente total en el área Γ_2 es:

$$i(x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} i$$

Por lo que el campo magnético dentro del conductor es:

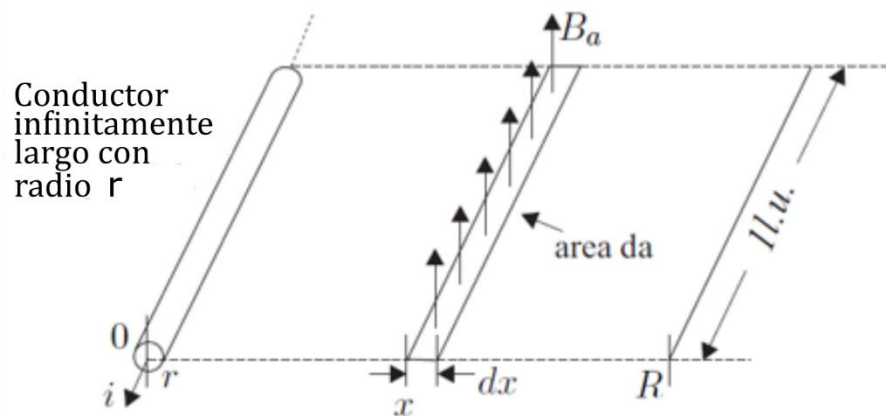
$$H_i(x) = \frac{x}{2\pi r^2} i$$



La inductancia del conductor incluye la contribución de campos interno y externo.

Inductancia externa de conductor

El flujo concatenado del conductor corresponde a la integral de la densidad de campo dentro del rectángulo, desde r hasta R .



$$da = 1 \cdot dx$$

$$B_a(x) = \mu_0 H_a(x)$$

$$\psi_a = \int_A B_a(x) da = \int_r^R B_a(x) dx = \mu_0 \int_r^R \frac{i}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$$

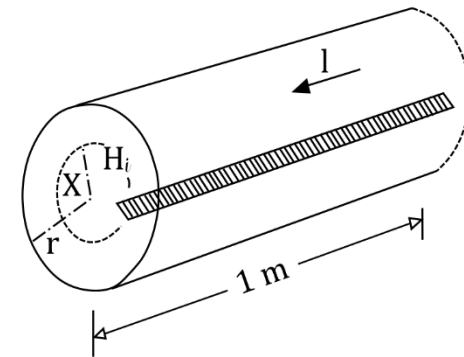
Por definición $\psi_a = l_a i$ entonces: $l_a = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

Inductancia interna de conductor

Para la obtención de la inductancia interna, recordamos que la intensidad de campo dentro del conductor es:

$$H_i(x) = \frac{x}{2\pi r^2} i$$



De modo que la densidad de campo magnético es $B_i = \mu_0 H_i = \frac{\mu_0 x}{2\pi r^2} i$

El diferencial de flujo magnético $d\phi$ por unidad de longitud en el rectángulo de la figura con ancho dx está dado por $d\phi = B_i dx$. Para calcular el diferencial de flujo concatenado dentro del rectángulo, debemos considerar que solo una fracción de la corriente $\left(\frac{x}{r}\right)^2$ es enlazado por el flujo, entonces:

$$d\psi = \left(\frac{x}{r}\right)^2 d\phi = \frac{\mu_0 x^3}{2\pi r^4} i dx$$

Inductancia interna de conductor

Al integrar desde $x = 0$ hasta $x = r$ se determina el flujo concatenado dentro del conductor:

$$\psi = \int_0^r d\psi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r^4} \int_0^r x^3 dx$$

$$\psi = \frac{\mu_0 i}{8\pi} = \frac{1}{2} i \times 10^{-7} \text{ Wbv/m}$$

Por lo tanto la inductancia interna del conductor es $l_i = \frac{\mu_0}{8\pi} \text{ H/m}$

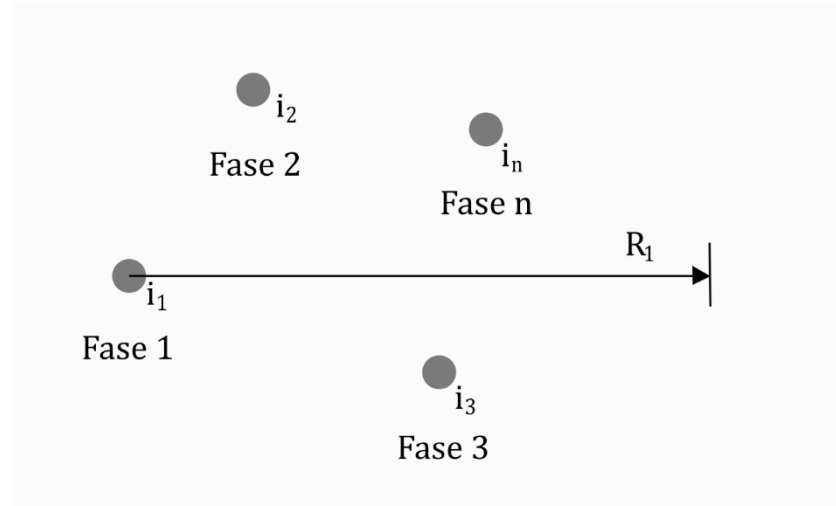
$$l = l_i + l_a = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R}{r} \right) \longrightarrow l = 2 \times 10^{-4} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R}{r} \right) \text{ H/km}$$

Si usamos $\frac{1}{4} = \ln e^{\frac{1}{4}}$

$$l = 2 \times 10^{-4} \ln \frac{R}{r'} \text{ H/km}$$

$$r' = e^{-1/4} r \approx 0.779r$$

Inductancia con n conductores



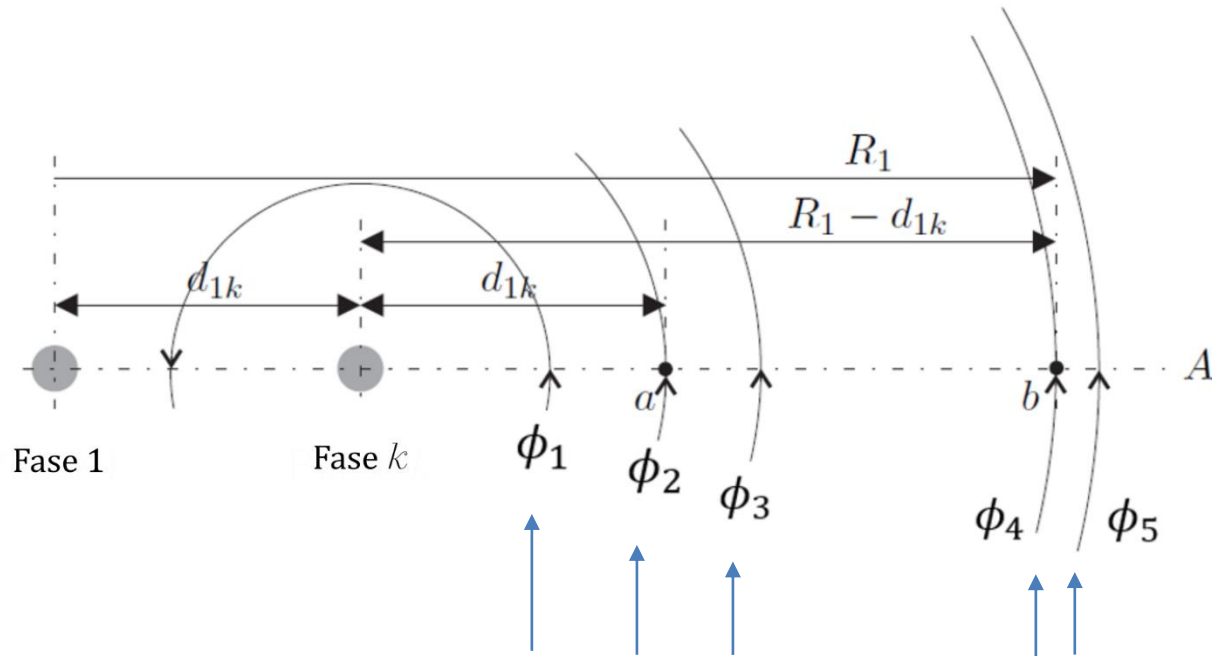
Consideremos el flujo concatenado de la fase 1 desde su origen hasta R_1 . Además del aporte de la corriente de la fase 1, el aporte de las fases 2,3,...,n debe ser considerado.

El aporte de la corriente de fase 1 a dicho flujo se calcula como:

$$\psi_{11} = l_1 i_1 = \frac{i_1 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_1}{r'}$$

Inductancia con n conductores

Vamos a considerar la contribución del flujo de la fase k al flujo concatenado de la fase 1, evaluado hasta distancia R_1 :



Líneas de flujo de campo magnéticas concéntricas

Inductancia con n conductores

- La línea de campo 1 no enlaza con la fase 1 por lo que no contribuye al flujo concatenado.
- La línea de campo 5 sí enlaza a la fase 1 pero se encuentra fuera de la distancia R_1 .
- Las líneas de flujo 2 y 4 representan los bordes entre las fases 1 y k , donde los campos contribuyen al flujo concatenado de la fase 1 si se integra (evalúa) hasta R_1 .
- *Sabiendo que:*

$$\psi_a = \int_A B_a(x) da = \int_{d_{1k}}^{R_1 - d_{1k}} B_a(x) dx = \mu_0 \int_{d_{1k}}^{R_1 - d_{1k}} \frac{i}{2\pi x} dx$$

$$\text{con } da = 1 \cdot dx$$

$$\psi_{1k} = \frac{i_k \mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_1 - d_{1k}}{d_{1k}}$$

Inductancia con n conductores

El flujo concatenado de la fase 1 se encuentra por superposición de la contribución individual de cada fase:

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^n \psi_{1k} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{R_1}{r'_1} + i_2 \ln \frac{R_1 - d_{12}}{d_{12}} + \dots + i_n \ln \frac{R_1 - d_{1n}}{d_{1n}} \right]$$

Que se puede descomponer en dos partes:

$$\psi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'_1} + i_2 \ln \frac{1}{d_{12}} + \dots + i_n \ln \frac{1}{d_{1n}} \right] + \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n i_k \ln (R_1 - d_{1k})}_{A_1}$$

con $d_{11} = 0$.

Inductancia con n conductores

Manipulando el término A_1 :

$$A_1 = \sum_{k=1}^{n-1} i_k \ln(R_1 - d_{1k}) + i_n \ln(R_1 - d_{1n})$$

donde $i_n = -\sum_{k=1}^{n-1} i_k$:

$$A_1 = \sum_{k=1}^{n-1} i_k \frac{\ln(R_1 - d_{1k})}{\ln(R_1 - d_{1n})} = 0 \text{ cuando } R_1 \rightarrow \infty.$$

De modo que:

$$\psi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'_1} + i_2 \ln \frac{1}{d_{12}} + \cdots + i_n \ln \frac{1}{d_{1n}} \right]$$

$$\psi_1 = l_{11}i_1 + l_{12}i_2 + \cdots + l_{1n}i_n$$

Inductancia con n conductores

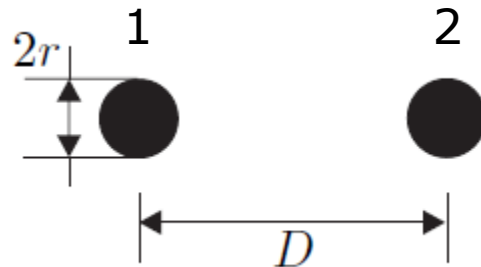
De manera general para la fase k :

$$\psi_k = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{d_{k1}} + \cdots + i_k \ln \frac{1}{r'_k} + \cdots + i_n \ln \frac{1}{d_{kn}} \right]$$

Las inductancias dependen de la geometría de la configuración de los conductores!

Inductancia con 2 conductores

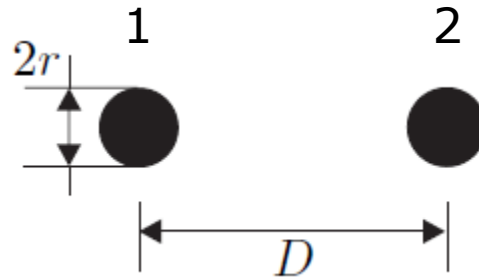
Considere el sistema de 2 conductores idénticos con espaciamiento D :



Partiendo del supuesto que $i_1 + i_2 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} + i_2 \ln \frac{1}{D} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} - i_1 \ln \frac{1}{D} \right]\end{aligned}$$

Inductancia con 2 conductores



$$\psi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \ln \frac{D}{r'}$$

Lo mismo se obtiene para ψ_2 . Por lo tanto, las inductancias de ambos conductores por unidad de longitud son iguales a:

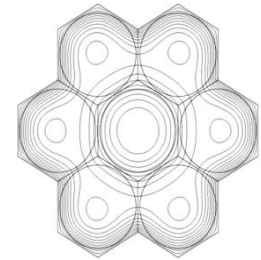
$$l_1 = l_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r'}$$

Cuando los conductores no son sólidos, sino que están compuestos por N hilos, r' se reemplaza por el GMR del conductor.

GMR de conductores compuestos

El radio medio geométrico de conductores compuestos por N hilos se calcula como:

$$GMR = \sqrt[N^2]{\prod_{k=1}^N \prod_{m=1}^N D_{km}}$$



D_{km} = Distancia entre centros de hilos k y m .

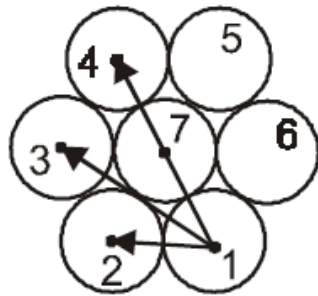
Por ejemplo, el GMR de un conductor compuesto por 3 hilos de radio r se calcula como:

$$GMR = \sqrt[9]{(D_{11}D_{12}D_{13})(D_{21}D_{22}D_{23})(D_{31}D_{32}D_{33})}$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = e^{-1/4}r = 0.7788 r$$

Ejemplo 1

Determine el GMR del conductor compuesto por $N=7$ hilos idénticos de radio $r=0.2$ cm.



$$D_{11} = r' = 0.7788r = 0.1558 \text{ cm}$$

$$D_{12} = D_{16} = D_{17} = 2r = 0.4 \text{ cm}$$

$$D_{14} = 4r = 0.8 \text{ cm}$$

$$D_{13} = D_{15} = 2\sqrt{3}r = 0.6928 \text{ cm}$$

$$GMR = \sqrt[49]{(r'D_{12}D_{13}D_{14}D_{15}D_{16}D_{17})(D_{21}r'D_{23}D_{24}D_{25}D_{26}D_{27})(\dots)(\dots)(\dots)(\dots)(D_{71} \dots)}$$

De la simetría del problema:

$$GMR = \sqrt[49]{(r'D_{12}^3 D_{14} D_{13}^2)^6 (2r)^6 r'} = 0.4354 \text{ cm}$$

Afortunadamente los fabricantes de conductores ya hicieron el cálculo por nosotros y los GMR de conductores típicos son tabulados.

GMD entre conductores con subconductores

La distancia media geométrica entre conductores x y y con N y M subconductores es:

$$GMD_{xy} = \sqrt[MN]{\prod_{n=1}^N \prod_{m=1'}^M D_{nm}}$$

El GMD es una distancia equivalente entre los conductores compuestos.

Ejemplo 2

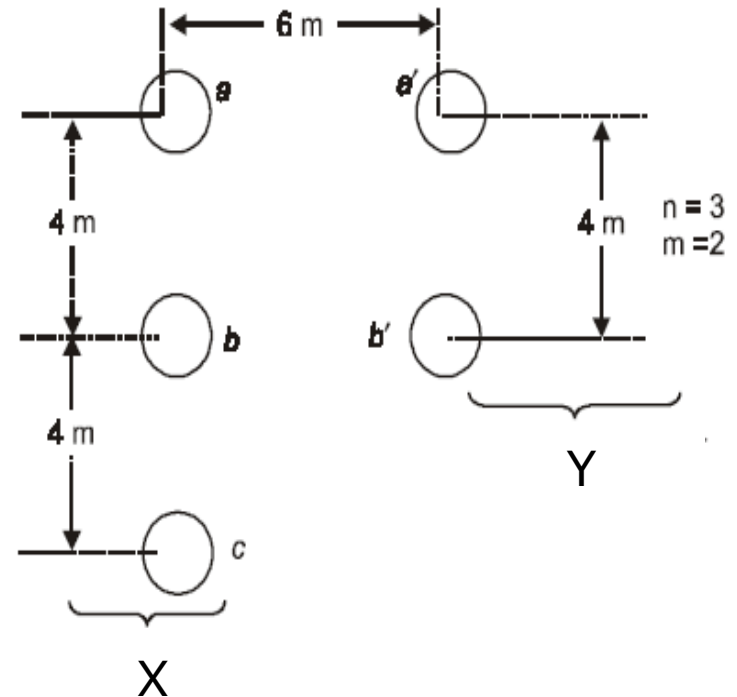
Determine el GMD de los conductores X y Y compuestos por N=3 y M=2 subconductores, respectivamente.

$$GMD_{xy} = \sqrt[MN]{\prod_{n=1}^N \prod_{m=1'}^M D_{nm}}$$

$$GMD_{xy} = \sqrt[6]{(D_{aa'}D_{ab'})(D_{ba'}D_{bb'})(D_{ca'}D_{cb'})}$$

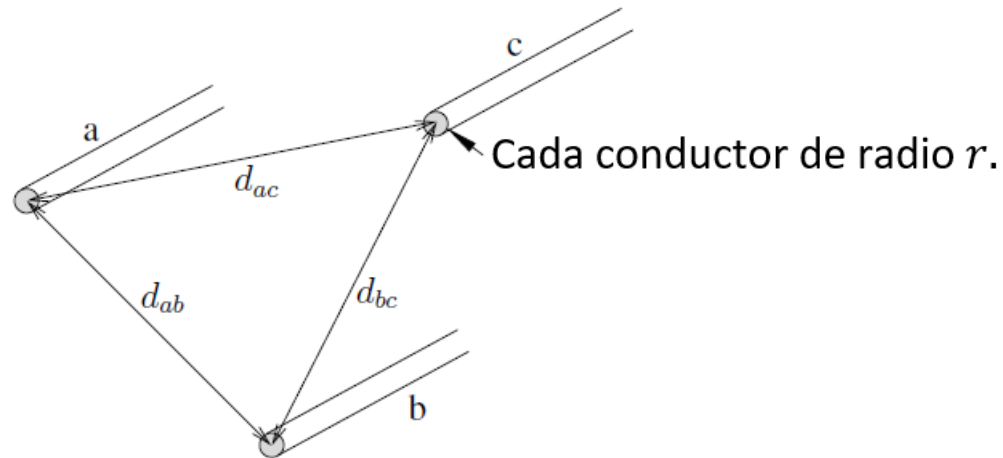
$$GMD_{xy} = \sqrt[6]{(6 \cdot 7.211)(7.211 \cdot 6)(10 \cdot 7.211)}$$

$$GMD_{xy} = 7.162 \text{ m}$$



$$\begin{matrix} D_{ca'} = 10 \text{ m} \\ D_{cb'} = 7.211 \text{ m} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} D_{aa'} = 6 \text{ m} \\ D_{ab'} = 7.211 \text{ m} \\ D_{ba'} = 7.211 \text{ m} \\ D_{bb'} = 6 \text{ m} \end{array} \right.$$

Inductancia con 3 fases



Es fácilmente demostrable que:

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Acople magnético
entre fases

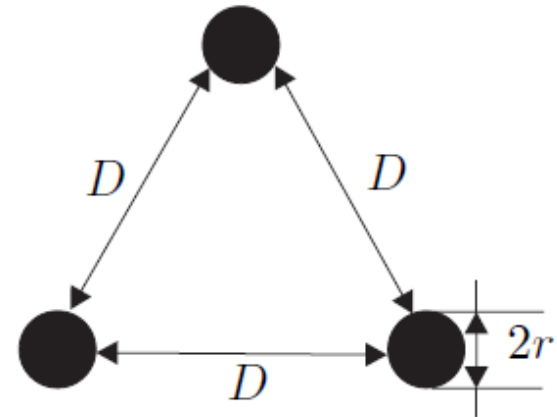
$$\text{con } r' = e^{-1/4}r = 0.7788r$$

Inductancia con 3 fases equidistantes

$$\psi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} + i_2 \ln \frac{1}{D} + i_3 \ln \frac{1}{D} \right]$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0:$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} - i_1 \ln \frac{1}{D} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \ln \frac{D}{r'} \end{aligned}$$



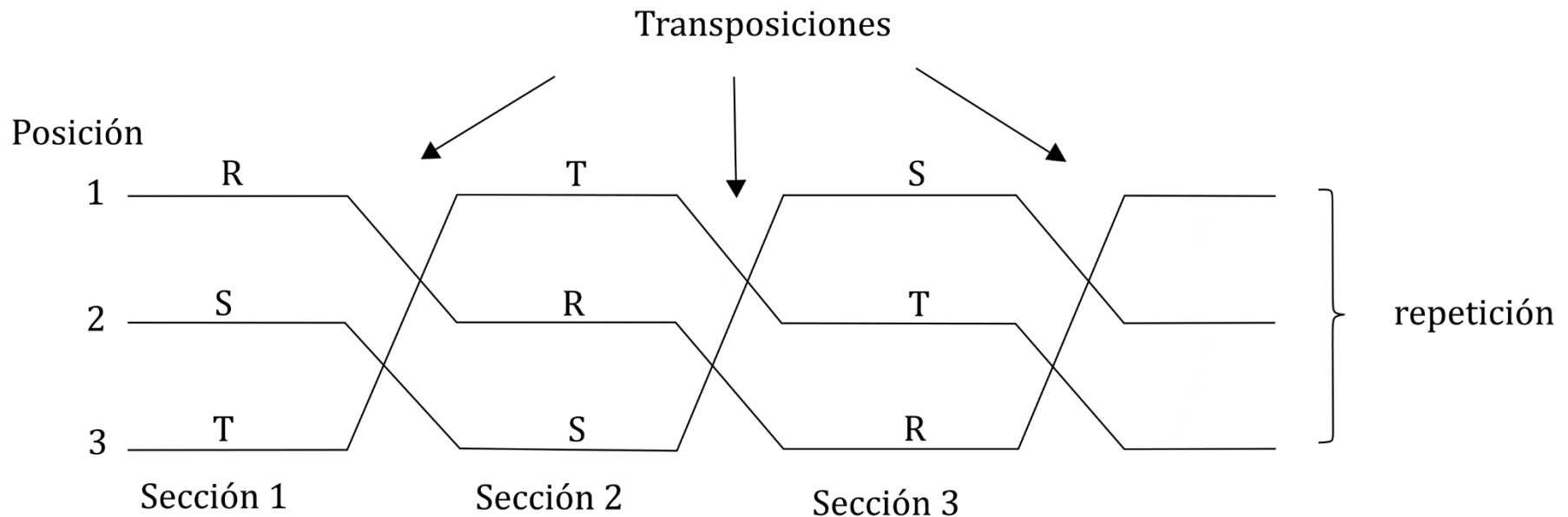
Por lo tanto:

$$l_1 = l_2 = l_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r'}$$

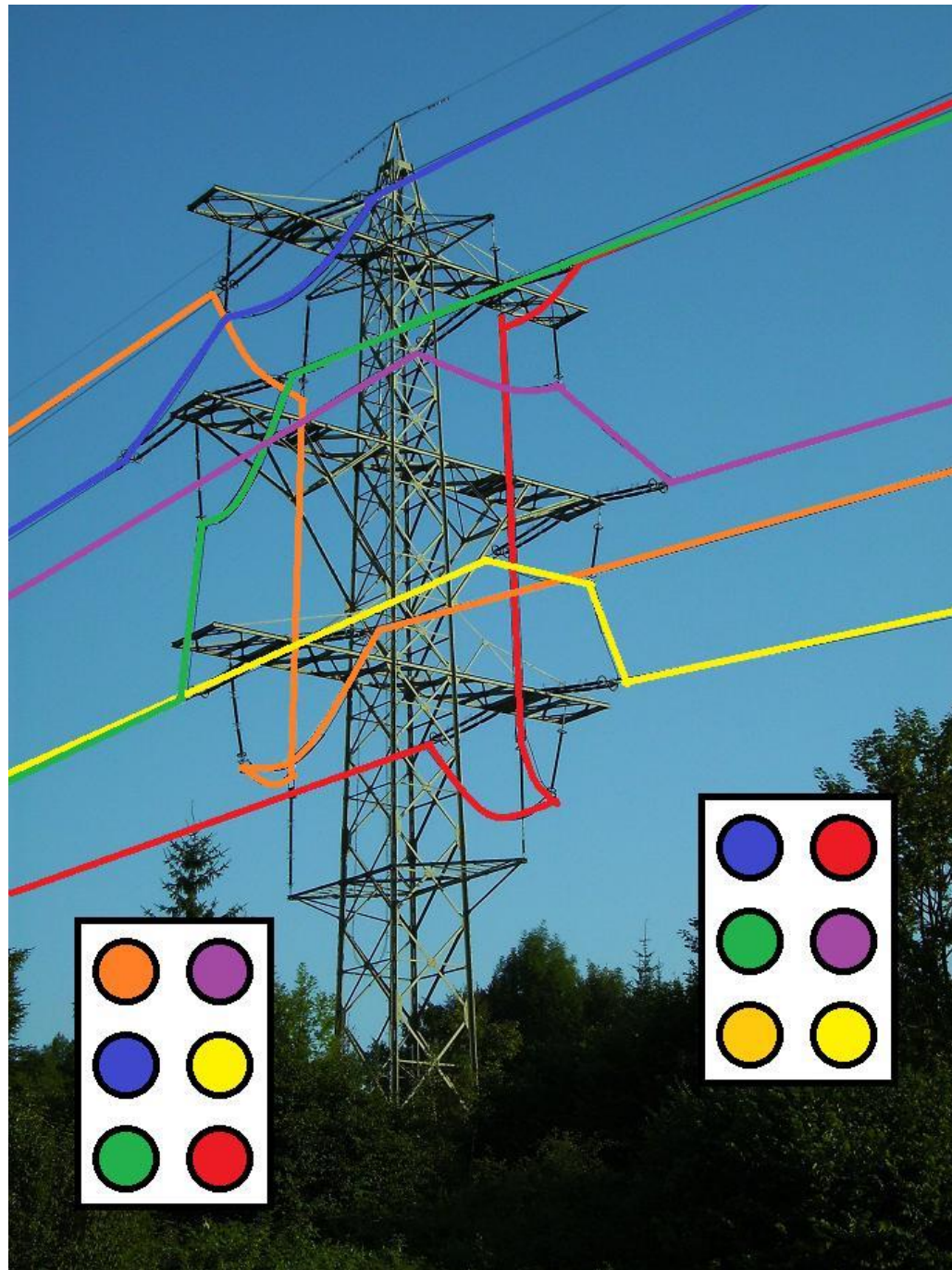
Desacople magnético
entre fases

Inductancia línea trifásica transpuesta

Cuando los conductores de la línea trifásica no son equidistantes, las fases se encuentran acopladas magnéticamente. La transposición se usa para eliminar dicho acople :



Línea trifásica transpuesta



Inductancia línea trifásica transpuesta

Calculamos el flujo concatenado promedio, por unidad de longitud, de las tres secciones de línea para la fase **a**:

$$\bar{\psi}_a = \frac{1}{3} \left(\bar{\psi}_a^{(1)} + \bar{\psi}_a^{(2)} + \bar{\psi}_a^{(3)} \right)$$

Desarrollando:

$$\bar{\psi}_a = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{2\pi} \left(i_a \ln \frac{1}{r'} + i_b \ln \frac{1}{d_{ab}} + i_c \ln \frac{1}{d_{ac}} + i_a \ln \frac{1}{r'} + i_b \ln \frac{1}{d_{bc}} + i_c \ln \frac{1}{d_{ab}} + i_a \ln \frac{1}{r'} + i_b \ln \frac{1}{d_{ac}} + i_c \ln \frac{1}{d_{bc}} \right)$$

Por propiedades de logaritmos:

$$\bar{\psi}_a = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(i_a \ln \frac{1}{r'} + i_b \ln \frac{1}{d_m} + i_c \ln \frac{1}{d_m} \right)$$

$$d_m = \sqrt[3]{d_{ab} d_{ac} d_{bc}}$$

Inductancia línea trifásica transpuesta

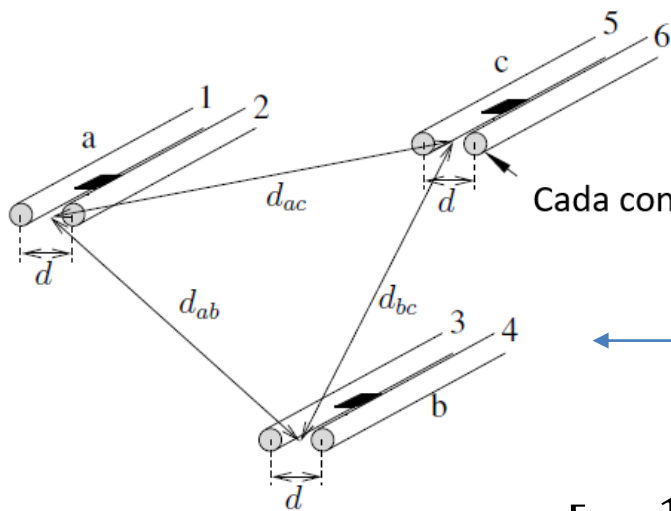
Por lo tanto, la matriz de inductancias de la línea transpuesta es:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix}$$

Note que los elementos fuera de la diagonal son todos iguales. Si la línea tiene conductores balanceados ($-i_a = i_b + i_c$), la inductancia por unidad de longitud es:

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r'} - \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}}{r'} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_m}{r'}$$

$$\text{con } r' = e^{-1/4}r = 0.7788r$$



Cada conductor de radio r .

La distancia entre conductores de haces diferentes se aproxima como la distancia entre centros de los respectivos haces.

**Línea trifásica
con haz doble
de conductores**

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{d} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

con $r' = e^{-1/4}r = 0.7788r$

Inductancia de línea con haz doble de conductores

Como los conductores 1 y 2 están en paralelo, el flujo a considerar para la fase a es $\psi_a = \psi_1 = \psi_2$, con:

$$i_1 = i_2 = \frac{i_a}{2} \quad i_3 = i_4 = \frac{i_b}{2} \quad i_5 = i_6 = \frac{i_c}{2}$$

Entonces se puede demostrar que:

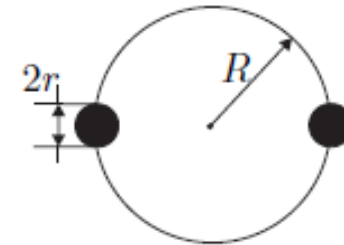
$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{dr'} \right) & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{dr'} \right) & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{dr'} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Inductancia línea trifásica con haz doble de conductores

Si analizamos el elemento (1,1) de la matriz anterior se tiene que:

$$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{dr'} \right) = \ln \frac{1}{\sqrt{dr'}} = \ln \frac{1}{\sqrt{2Rr'}} = \ln \frac{1}{r'_{eq}}$$

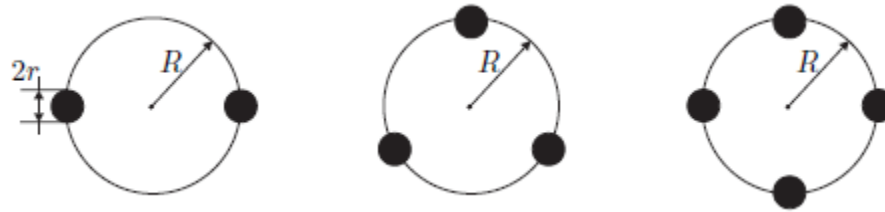
$r'_{eq} = \sqrt{2Rr'}$ es el GMR del haz doble.



Entonces,

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'_{eq}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{r'_{eq}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{r'_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Inductancia línea trifásica con haz de n conductores



Si se realiza el procedimiento anterior para haz de n conductores, se obtiene:

$$r'_{eq} = \sqrt[n]{nR^{n-1}r'}$$

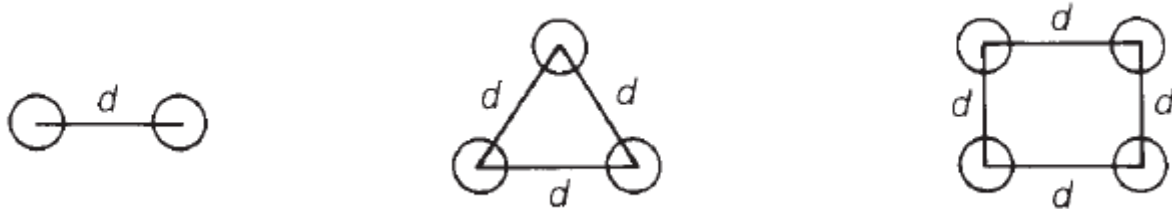
Y los flujos concatenados:

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'_{eq}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{r'_{eq}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{r'_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Resistencia del haz

$$R_{haz} = \frac{R_{cond}}{n}$$

Si el espaciamento de los conductores está dado por los lados del polígono que forman:



$$R = \frac{d}{2\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Para $n = 2$ conductores se calcula el GMR del haz:

$$r'_{eq} = \sqrt[4]{(r'd)(r'd)} = \sqrt{r'd}$$

Para $n = 3$ conductores se calcula el GMR del haz:

$$r'_{eq} = \sqrt[9]{(r'd^2)(r'd^2)(r'd^2)} = \sqrt[3]{r'd^2}$$

Para $n = 4$ conductores se calcula el GMR del haz:

$$r'_{eq} = \sqrt[16]{(r' \cdot d \cdot d \cdot \sqrt{2}d)^4} = 1.091 \sqrt[4]{r'd^3}$$

Inductancia línea trifásica transpuesta con haz de n conductores

Al aplicar el procedimiento de flujo concatenado promedio para cada fase:

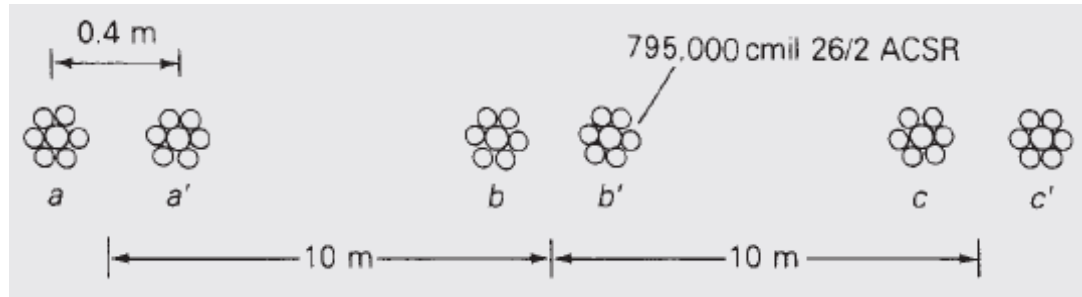
$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'_{eq}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{r'_{eq}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{r'_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad \text{con } r'_{eq} = \sqrt[n]{nR^{n-1}r'}$$

Y la inductancia por fase por unidad de longitud es:

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \overbrace{\left(\ln \frac{1}{r'_{eq}} - \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} \right)}^{L - M} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}}{r'_{eq}}$$

Ejemplo 3

Determine la inductancia en H/km de la línea trifásica **transpuesta** con 2 conductors por haz si el GMR del 795 MCM ACSR es 0.0114 m.



Calculamos $r'_{eq} = \sqrt{dr'} = \sqrt{dGMR} = \sqrt{0.4 \cdot 0.0114} = 0.0676 \text{ m}$

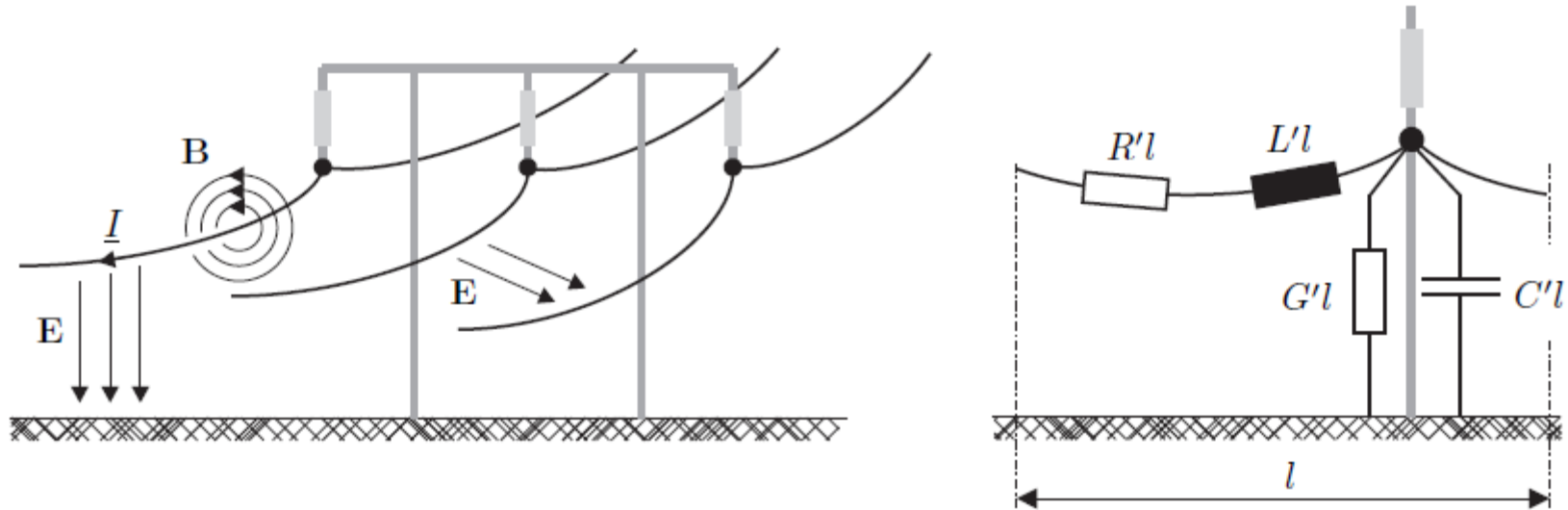
Luego $d_m = \sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}} = \sqrt[3]{(10)(20)(10)} = 12.6 \text{ m}$

Finalmente, $l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}}{r'_{eq}}$ o sea:

$$l = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{12.6}{0.0676} \cdot 1000 = 1.0456 \times 10^{-3} \text{ H/km}$$

Note que se hace aproximación de las distancias entre centros de haces. Lo **ideal** es calcular los GMD entre haces.

Capacitancia de línea



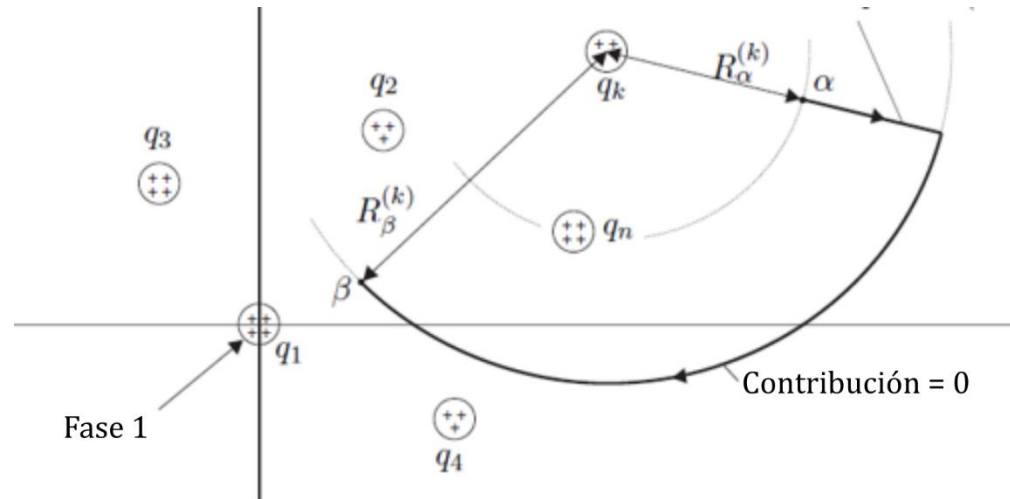
La línea de transmisión está rodeada de aire, donde la permitividad dieléctrica es:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \simeq \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m}$$

El cálculo de la capacitancia en derivación de un conductor se puede obtener análogamente a la inductancia serie.

Capacitancia de conductor

Consideremos el sistema de la figura, el conductor k porta una carga q_k por unidad de longitud.



El campo eléctrico del conductor infinito k es radial y homogéneo. El valor del campo eléctrico a una distancia R , y la tensión entre los puntos α y β son:

$$E_k = \frac{q_k}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 R^{(k)}}$$

$$u_{\beta\alpha}^{(k)} = \int_{R_\beta^{(k)}}^{R_\alpha^{(k)}} E_x dR$$

Capacitancia de conductor

La tensión entre los puntos α y β debido a la carga q_k se puede obtener de integrar a lo largo de una curva arbitraria desde el punto α al punto β .

De la figura anterior se sabe que la integral a lo largo de círculos concéntricos es cero, por lo que solo las distancias desde el conductor k son de interés.

$$u_{\beta\alpha}^{(k)} = - \int_{R_{\alpha}^{(k)}}^{R_{\beta}^{(k)}} \frac{q_k}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 R} dR = \frac{q_k}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \ln \frac{R_{\alpha}^{(k)}}{R_{\beta}^{(k)}}$$

$R_{\alpha}^{(k)}$ y $R_{\beta}^{(k)}$ son las distancias entre el conductor k y los puntos α y β .

Para el caso de conductores múltiples, la diferencia de potencial entre puntos se obtiene a través de la superposición de las tensiones por cada carga:

$$u_{\beta\alpha} = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{R_{\alpha}^{(i)}}{R_{\beta}^{(i)}}$$

Capacitancia de conductor

Ahora suponemos que las cargas de todos los conductores suman cero:

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 0$$

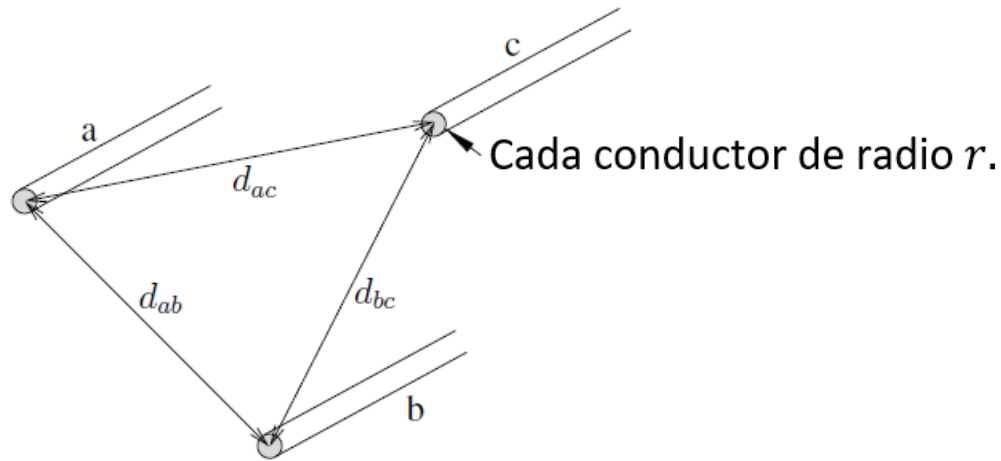
Similar que la derivación del flujo concatenado, si $R_\alpha^{(i)} \rightarrow \infty$:

$$u_\beta = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{1}{R_\beta^{(i)}}$$

Esta es la tensión de β con respecto a un punto infinitamente largo. La tensión del conductor k en la superficie del mismo es:

$$u_k = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(q_1 \ln \frac{1}{d_{k1}} + \cdots + q_k \ln \frac{1}{r_k} + \cdots + q_n \ln \frac{1}{d_{kn}} \right)$$

Caso de línea trifásica



A partir de la relación anterior, para una línea trifásica:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix}$$

P: Matriz de coeficientes de potencial

Capacitancia línea trifásica transpuesta

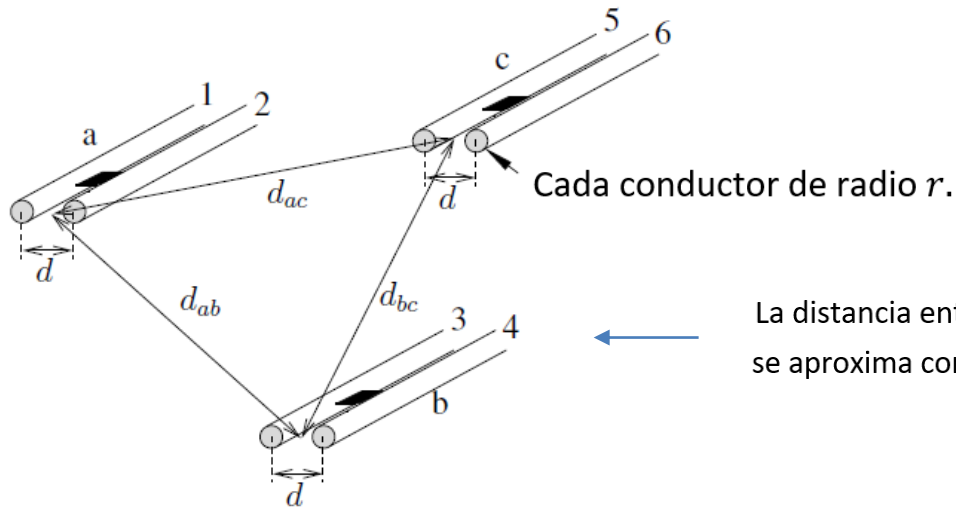
Similar que el procedimiento de la inductancia, la matriz **P** de la línea transpuesta (3 secciones iguales) es:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} & \ln \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Si la suma de las cargas eléctricas son cero, $-q_a = q_b + q_c$:

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{1}{2\pi\epsilon_o\epsilon_r} \left(\ln \frac{1}{r} q_a + \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} (q_b + q_c) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_o\epsilon_r} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}} \right) q_a \quad \longrightarrow \quad \boxed{C = 2\pi\epsilon_o\epsilon_r \frac{1}{\ln \frac{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}}{r}}} \end{aligned}$$

Línea trifásica con haz doble de conductores



La distancia entre conductores de haces diferentes se aproxima como la distancia entre centros de los respectivos haces.

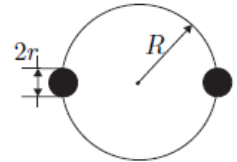
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{r} & \ln \frac{1}{d} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{d} & \ln \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

Caso de línea trifásica con haz doble de conductores

Sabemos que:

$$q_1 = q_2 = \frac{q_a}{2} \quad q_3 = q_4 = \frac{q_b}{2} \quad q_5 = q_6 = \frac{q_c}{2}$$

$$v_1 = v_2 = v_a \quad v_3 = v_4 = v_b \quad v_5 = v_6 = v_c$$



Por lo tanto, y recordando que $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{dr} = \ln \frac{1}{\sqrt{dr}}$ se puede demostrar que:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{\sqrt{dr}} & \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{d_{ac}} \\ \ln \frac{1}{d_{ab}} & \ln \frac{1}{\sqrt{dr}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} \\ \ln \frac{1}{d_{ac}} & \ln \frac{1}{d_{bc}} & \ln \frac{1}{\sqrt{dr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix}$$

Moraleja: Para haz de n conductores, el r de un conductor se reemplaza por:

$$r_{eq} = \sqrt[n]{nR^{n-1}r}$$

Capacitancia línea trifásica transpuesta con haz de n conductores

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r_{eq}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{r_{eq}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} & \ln \frac{1}{r_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix}$$

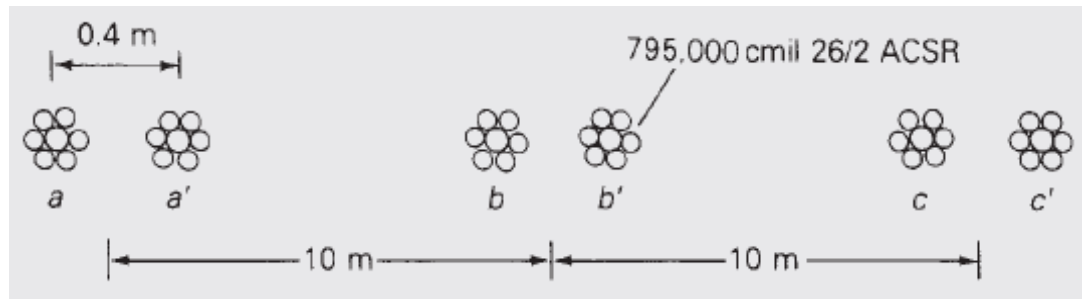
Note que si la suma de cargas es igual a cero $q_a = -(q_b + q_c)$:

$$v_a = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\ln \frac{1}{r_{eq}} - \ln \frac{1}{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}} \right) q_a = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}}{r_{eq}} q_a$$

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{1}{\ln \frac{\sqrt[3]{d_{ab}d_{bc}d_{ac}}}{r_{eq}}} \quad \text{con } r_{eq} = \sqrt[n]{nR^{n-1}r}$$

Ejemplo 4

Determine la capacitancia en $\mu F/km$ de la línea trifásica **transpuesta** con 2 conductores por haz si el radio del 795 MCM ACSR es 0.0141 m.



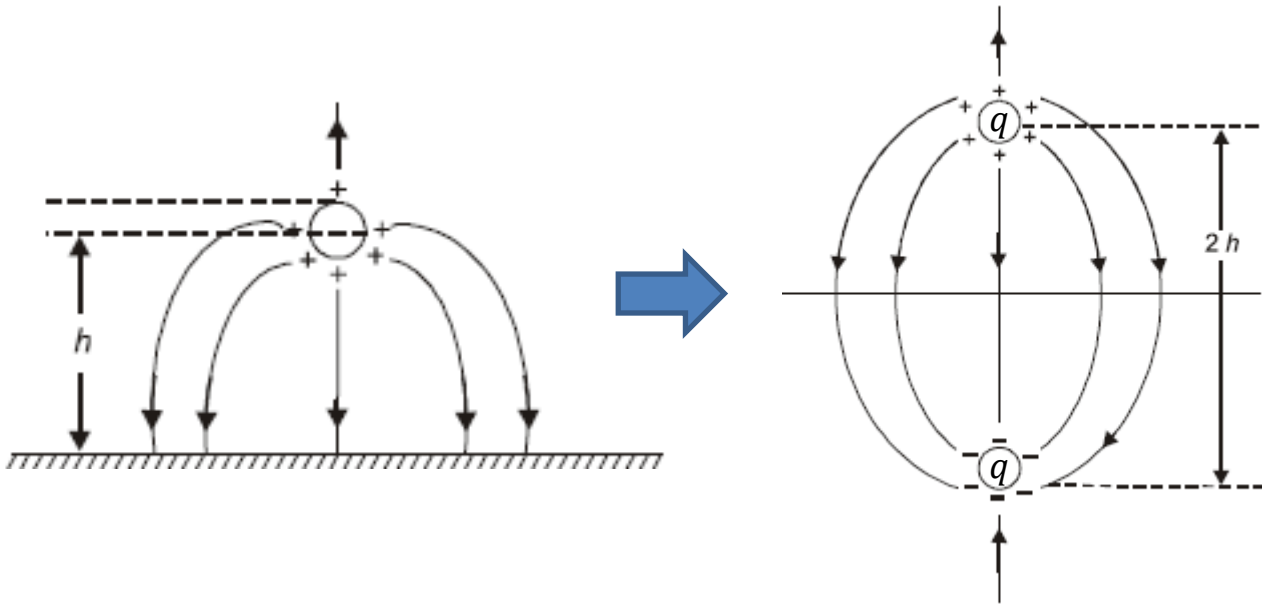
Calculamos $r_{eq} = \sqrt{dr} = \sqrt{0.4 \cdot 0.0141} = 0.075 \text{ m}$ y $\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}} = 12.6 \text{ m}$

$$C = 2\pi\epsilon_r\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{\sqrt[3]{d_{ab}d_{ac}d_{bc}}}{r_{eq}}}$$

$$C = (2\pi)8.854 \times 10^{-12} \frac{1}{\ln \frac{12.6}{0.075}} \cdot 1 \times 10^9 = 0.01085 \mu F/km$$

Método de las imágenes

Cuando las líneas están cerca del suelo, se debe considerar el efecto de la tierra (superficie con potencial cero).

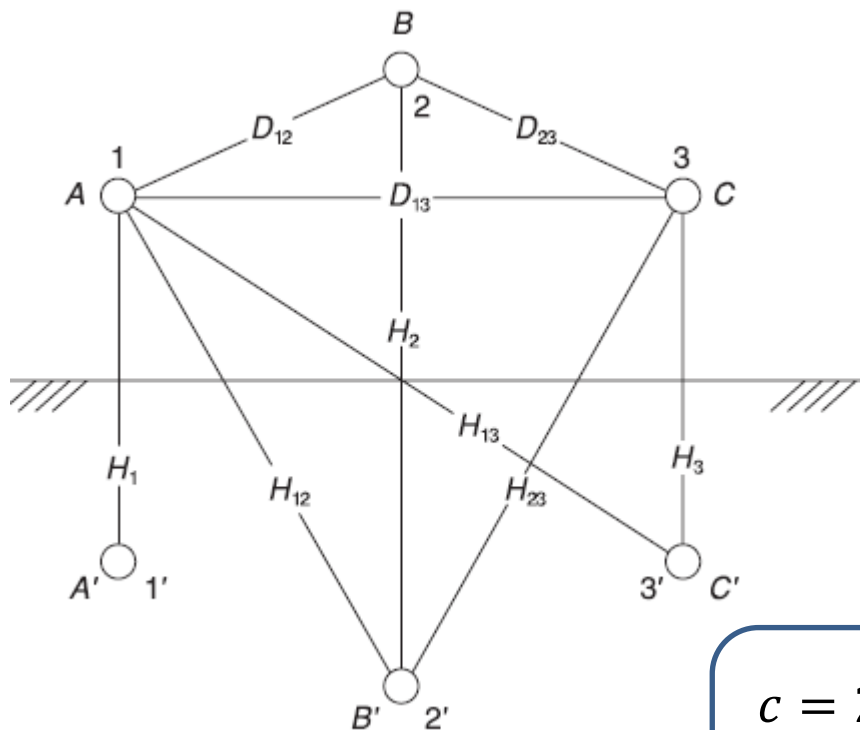


Si un conductor tiene una carga q , una carga negativa de igual magnitud ($-q$) se induce en la tierra.

El cálculo de la capacitancia debe considerar entonces el efecto de estas cargas negativas en la ecuación de:

$$v_k = \frac{1}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(q_1 \ln \frac{1}{d_{k1}} + \dots + q_k \ln \frac{1}{r_k} + \dots + q_n \ln \frac{1}{d_{kn}} \right)$$

Efecto de la tierra en cálculo de capacitancias de línea transpuesta



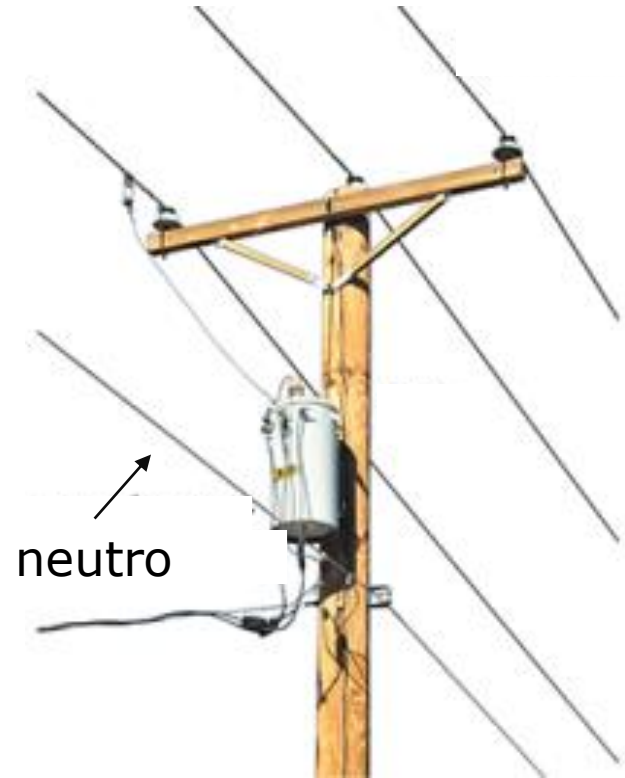
Método de las imágenes para capacitancias

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{1}{\ln \frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{13}}}{r_{eq}} + \ln \frac{\sqrt[3]{H_1H_2H_3}}{\sqrt[3]{H_{12}H_{13}H_{23}}}}$$

Si los conductores están a una **gran altura**, entonces $H_1 \approx H_2 \approx H_3 \approx H_{12} \approx H_{13} \approx H_{23}$ y el segundo sumando del denominador se aproximará a cero.

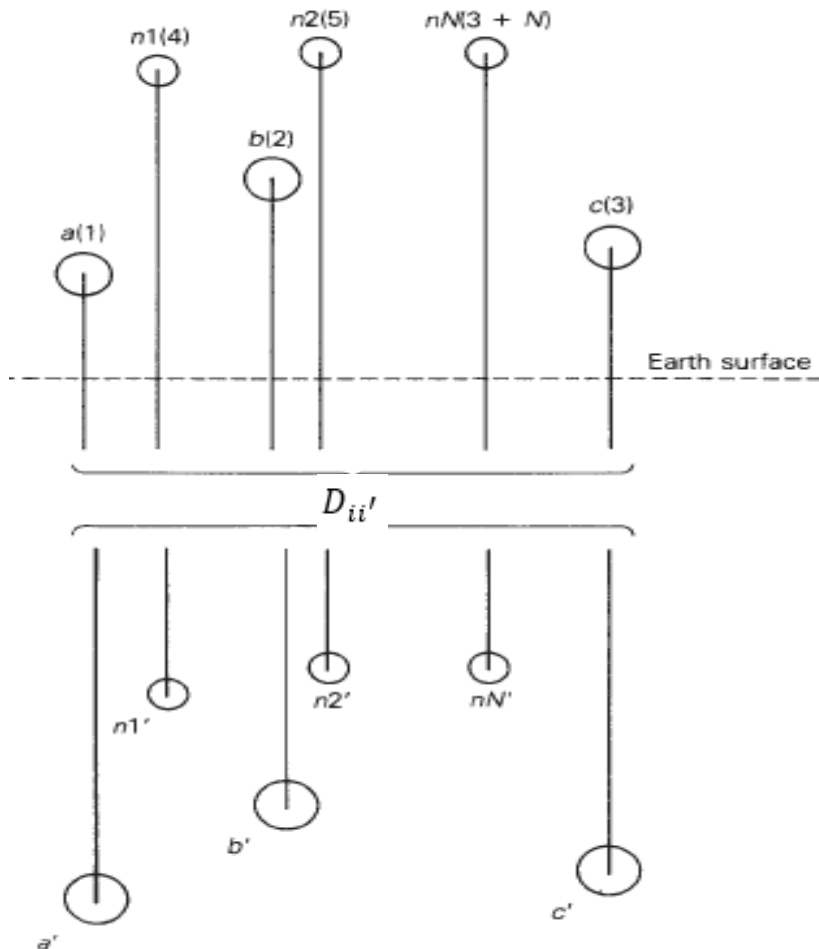
Inclusión de neutros (hilos guarda)

Hilos guarda



Ecuaciones de Carson

Introducimos el cálculo por computadora de las impedancias serie de líneas de transmisión y distribución con **método de Carson**.



Para una línea de transmisión o distribución se calcula la distancia $D_{ii'} = 658.5\sqrt{\rho/f}$ (m) de todos los conductores y sus retornos por tierra.

Si la resistividad del terreno es $\rho = 100 \Omega\text{m}$ entonces la distancia entre cualquier conductor y su retorno es $658.5\sqrt{100/60} = 850$ m. La resistencia de los retornos por tierra se estima en $R_{i'} = 9.869 \times 10^{-7} f \Omega/\text{m}$.

Ecuaciones de Carson

La impedancia propia del conductor i se calcula como:

$$z_{ii} = R_i + R_{i'} + j4\pi f \times 10^{-7} \ln \frac{D_{ii'}}{r'_{eqi}} \quad \Omega/\text{m}$$

Donde R_i es la resistencia en Ω/m del conductor i y $R_{i'}$ es la resistencia de su retorno. Las impedancias mutuas entre i y j son:

$$z_{ij} = R_{i'} + j4\pi f \times 10^{-7} \ln \frac{D_{ij'}}{D_{ij}} \quad \Omega/\text{m}$$

Donde $D_{ij'}$ es la distancia entre el conductor i y el retorno del j' y la distancia D_{ij} es la distancia entre el conductor i y el conductor j .

Estas ecuaciones aplican independientemente que los conductores sean de fase o neutros.

Ecuaciones de Carson (Ω /milla)

Las ecuaciones anteriores se pueden simplificar a las expresiones:

$$z_{ii} = R_i + 0,0953 + j0,12134 \left(\ln \frac{1}{r'_{eqi}} + 7,93402 \right)$$

$$z_{ij} = 0,0953 + j0,12134 \left(\ln \frac{1}{D_{ij}} + 7,93402 \right)$$

R_i	Resistencia ca del conductor i (Ω /milla)
r'_{eqi}	GMR (radio equivalente) del conductor i (pies)
D_{ij}	Distancia entre conductor i y conductor j (pies)

Estas ecuaciones permiten calcular la **matriz de impedancias primitiva** de la línea

Matriz de impedancias primitiva líneas aéreas

La matriz de impedancias para una línea trifásica con m conductores neutros es:

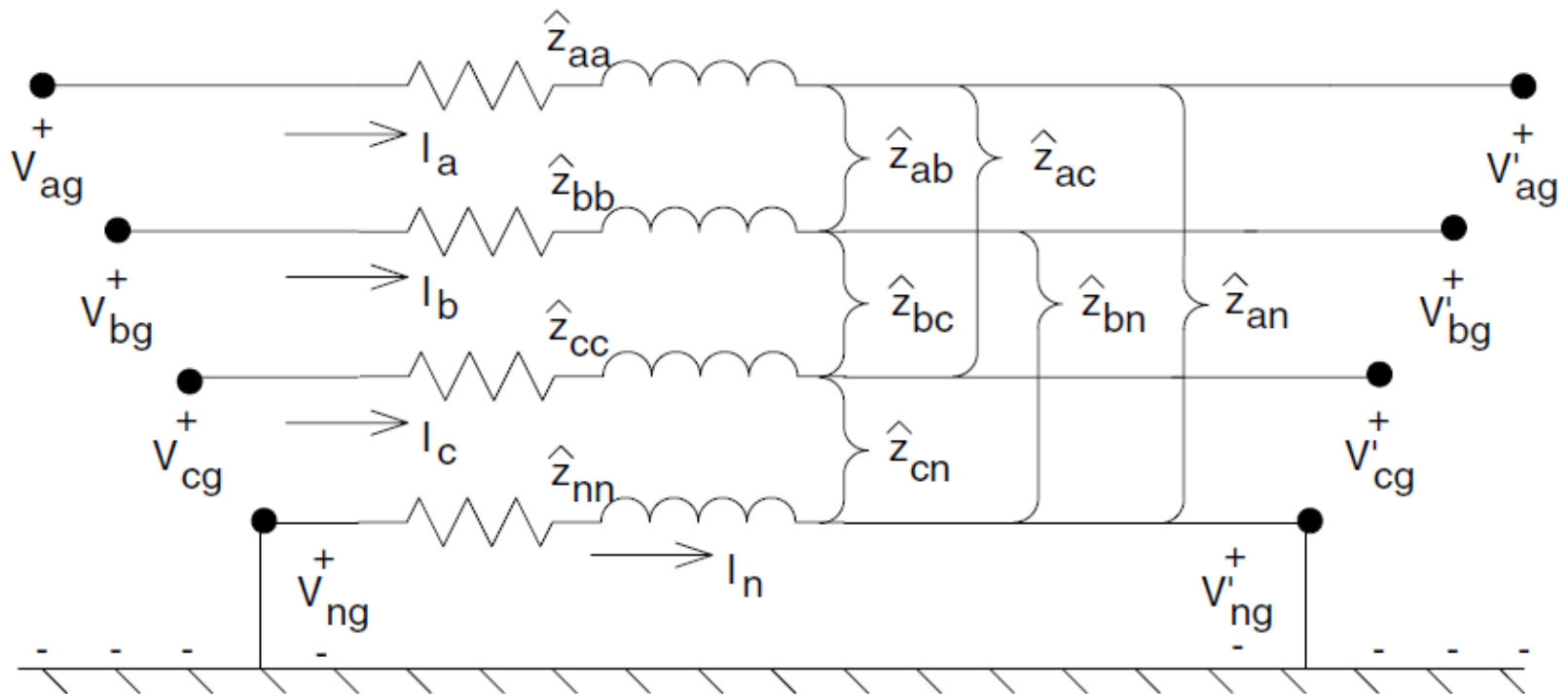
$$[\hat{z}_{\text{primitive}}] = \begin{bmatrix} \hat{z}_{aa} & \hat{z}_{ab} & \hat{z}_{ac} & | & \hat{z}_{an1} & \hat{z}_{an2} & \hat{z}_{anm} \\ \hat{z}_{ba} & \hat{z}_{bb} & \hat{z}_{bc} & | & \hat{z}_{bn1} & \hat{z}_{bn2} & \hat{z}_{bnm} \\ \hat{z}_{ca} & \hat{z}_{cb} & \hat{z}_{cc} & | & \hat{z}_{cn1} & \hat{z}_{cn2} & \hat{z}_{cnm} \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ \hat{z}_{n1a} & \hat{z}_{n1b} & \hat{z}_{n1c} & | & \hat{z}_{n1n1} & \hat{z}_{n1n2} & \hat{z}_{n1nm} \\ \hat{z}_{n2a} & \hat{z}_{n2b} & \hat{z}_{n2c} & | & \hat{z}_{n2n1} & \hat{z}_{n2n2} & \hat{z}_{n2nm} \\ \hat{z}_{nma} & \hat{z}_{nmb} & \hat{z}_{nmc} & | & \hat{z}_{nmn1} & \hat{z}_{nmn2} & \hat{z}_{nmnm} \end{bmatrix}$$

$$[\hat{z}_{\text{primitive}}] = \begin{bmatrix} [\hat{z}_{ij}] & [\hat{z}_{in}] \\ [\hat{z}_{nj}] & [\hat{z}_{nn}] \end{bmatrix}$$

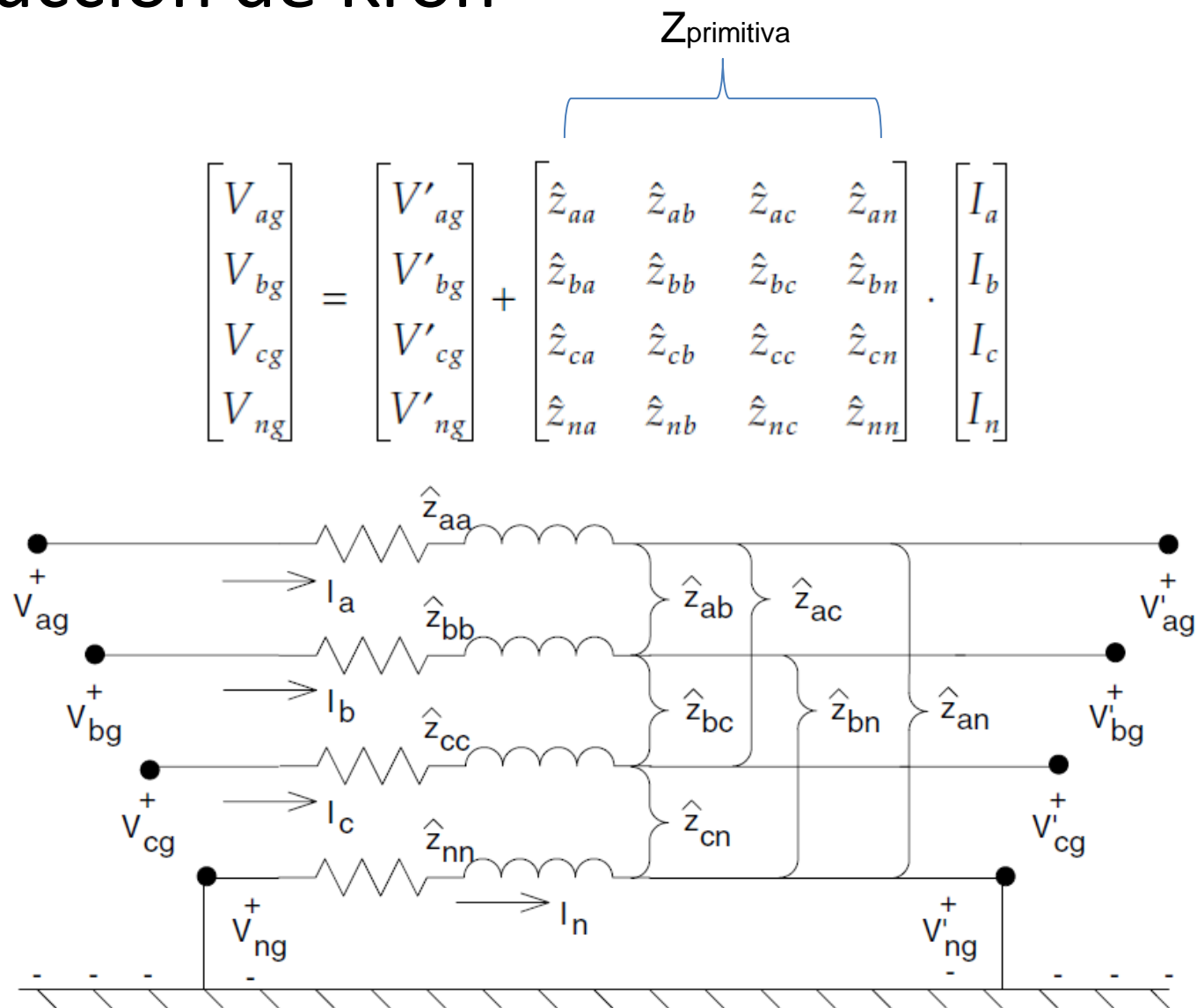
Reducción de Kron

Permite “eliminar” el o los conductores neutros de la matriz de impedancias primitiva

Sólo aplica para líneas con neutro multi-aterrizado



Reducción de Kron



Reducción de Kron

$Z_{\text{primitiva}}$

En forma compacta:

$$\begin{bmatrix} [V_{abc}] \\ [V_{ng}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V'_{abc}] \\ [V'_{ng}] \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} [\widehat{z}_{ij}] & [\widehat{z}_{in}] \\ [\widehat{z}_{nj}] & [\widehat{z}_{nn}] \end{bmatrix}}^{Z_{\text{primitiva}}} \cdot \begin{bmatrix} [I_{abc}] \\ [I_n] \end{bmatrix}$$

Como el neutro está aterrizado en ambos extremos:

$$[V_{abc}] = [V'_{abc}] + [\widehat{z}_{ij}] \cdot [I_{abc}] + [\widehat{z}_{in}] \cdot [I_n] \quad (*)$$

$$[0] = [0] + [\widehat{z}_{nj}] \cdot [I_{abc}] + [\widehat{z}_{nn}] \cdot [I_n]$$

De donde se obtiene:

$$[I_n] = -[\widehat{z}_{nn}]^{-1} \cdot [\widehat{z}_{nj}] \cdot [I_{abc}]$$

Reducción de Kron

Al incluir en (*) se obtiene:

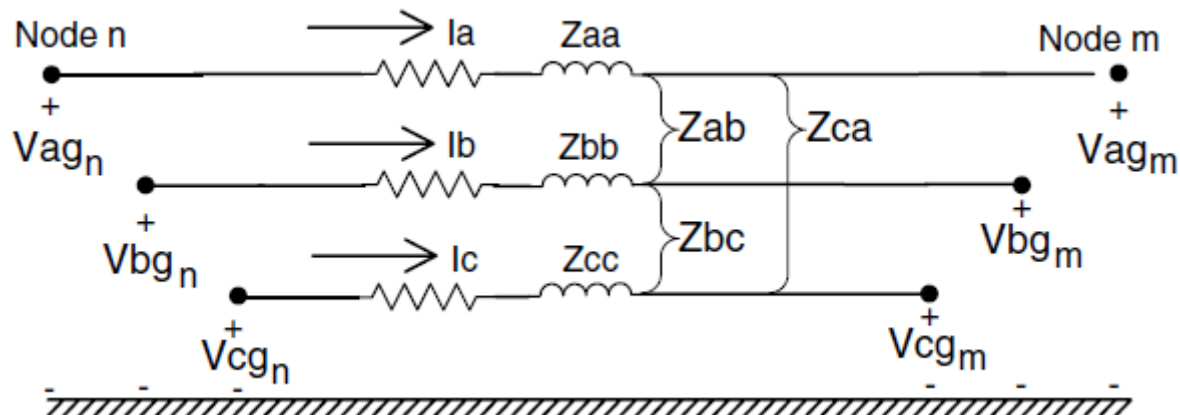
$$[V_{abc}] = [V'_{abc}] + ([\widehat{z}_{ij}] - [\widehat{z}_{in}] \cdot [\widehat{z}_{nn}]^{-1} \cdot [\widehat{z}_{nj}]) \cdot [I_{abc}]$$

$$[V_{abc}] = [V'_{abc}] + [z_{abc}] \cdot [I_{abc}]$$

donde:

$$[z_{abc}] = [\widehat{z}_{ij}] - [\widehat{z}_{in}] \cdot [\widehat{z}_{nn}]^{-1} \cdot [\widehat{z}_{nj}]$$

$$z_{abc} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix}$$



Aproximación de transposición

A partir de la matriz z_{abc} 3×3 anterior con la estructura:

$$z_{abc} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix}$$

La matriz de impedancias de la **línea transpuesta** se puede aproximar como:

$$z_{abc} = \begin{bmatrix} z_s & z_m & z_m \\ z_m & z_s & z_m \\ z_m & z_m & z_s \end{bmatrix}$$

Donde:

$$z_s = \frac{1}{3}(z_{aa} + z_{bb} + z_{cc})$$

$$z_m = \frac{1}{3}(z_{ab} + z_{bc} + z_{ca})$$

Diferencias en modelado de líneas de transmisión y distribución



Se considera operación balanceada

Se considera línea transpuesta

No se considera acople entre fases

Una fase suficiente para representar la línea



Se considera operación desbalanceada

Se considera que línea no se transpone

Se considera acople entre fases

Se modelan las tres fases explícitamente



Ejemplo 5

Determine la matriz de impedancias de fase z_{abc} en Ω/milla de la línea mostrada en la Figura. Los conductores de fase son 336,400 26/7 ACSR (Linnet), y el neutro es 4/0 6/1 ACSR.

Conductor	GMR (pies)	R(Ω/milla)
336,400 26/7 ACSR	0.0244	0.306
4/0 6/1 ACSR	0.00814	0.5920

Distancias entre conductores (pies)

$$D_{ab} = 2.5$$

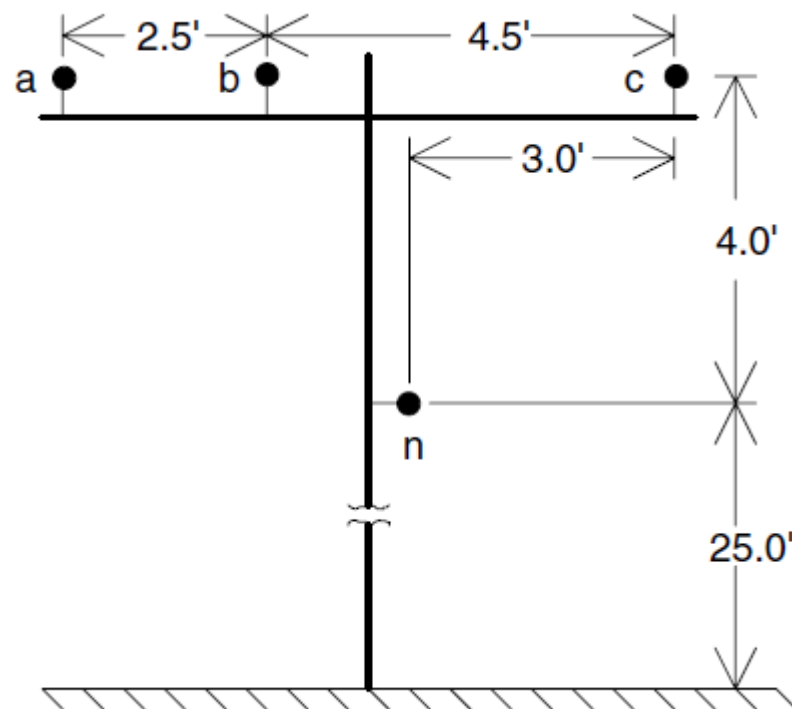
$$D_{bc} = 4.5$$

$$D_{ca} = 7$$

$$D_{an} = 5.6569$$

$$D_{bn} = 4.272$$

$$D_{cn} = 5$$



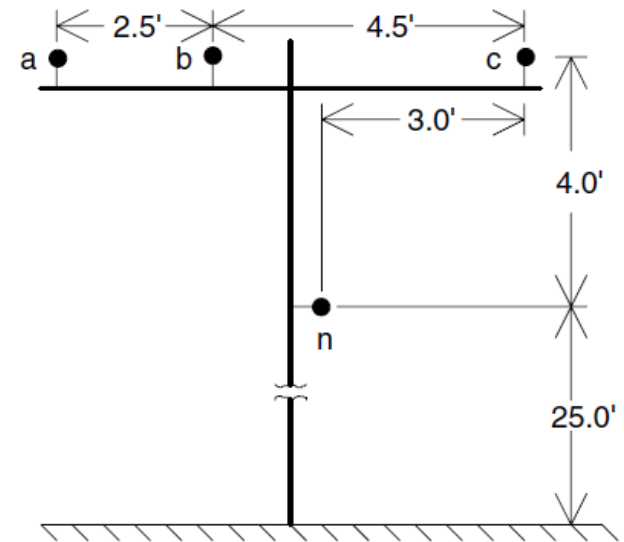
Ejemplo 5

$$\hat{z}_{aa} = 0.0953 + 0.306 + j0.12134 \cdot \left(\ln \frac{1}{0.0244} + 7.93402 \right)$$

$$= 0.4013 + j1.4133 \text{ } \Omega/\text{mile}$$

$$\hat{z}_{ab} = 0.0953 + j0.12134 \cdot \left(\ln \frac{1}{2.5} + 7.93402 \right)$$

$$= 0.0953 + j0.8515 \text{ } \Omega/\text{mile}$$



$$[\hat{z}] = \begin{bmatrix} 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.8515 & 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7524 \\ 0.0953 + j0.8515 & 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.7802 & 0.0953 + j0.7865 \\ 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7802 & 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.7674 \\ 0.0953 + j0.7524 & 0.0953 + j0.7865 & 0.0953 + j0.7674 & 0.6873 + j1.5465 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

Ejemplo 5

Al realizar la partición de la matriz primitiva:

$$[\hat{z}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.8515 & 0.0953 + j0.7266 \\ 0.0953 + j0.8515 & 0.4013 + j1.4133 & j0.0943 + j0.7802 \\ 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7802 & 0.4013 + j1.4133 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

$$[\hat{z}_{in}] = \begin{bmatrix} 0.0953 + j0.7524 \\ 0.0953 + j0.7865 \\ 0.0953 + j0.7674 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

$$[\hat{z}_{nn}] = [0.6873 + j1.5465] \Omega/\text{mile}$$

$$[\hat{z}_{nj}] = \begin{bmatrix} 0.0953 + j0.7524 & 0.0953 + j0.7865 & 0.0953 + j0.7674 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

Ejemplo 5

A partir de:

$$[z_{abc}] = [\hat{z}_{ij}] - [\hat{z}_{in}] \cdot [\hat{z}_{nn}]^{-1} \cdot [\hat{z}_{nj}]$$

Se obtiene:

$$[z_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.4576 + j1.0780 & 0.1560 + j0.5017 & 0.1535 + j0.3849 \\ 0.1560 + j0.5017 & 0.4666 + j1.0482 & 0.1580 + j0.4236 \\ 0.1535 + j0.3849 & 0.1580 + j0.4236 & 0.4615 + j1.0651 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$



El neutro está implícitamente en la nueva matriz de impedancias. No se debe hacer aproximación de línea transpuesta por ser de distribución.