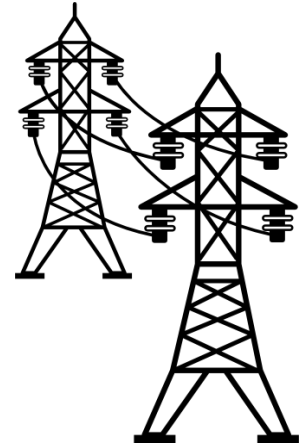




# EIE

Escuela de  
Ingeniería Eléctrica



## IE-0469 Sistemas de Potencia I

### Presentación #2 Modelos de cargas

Dr. Andrés Argüello Guillén  
[andres.arguelloguillen@ucr.ac.cr](mailto:andres.arguelloguillen@ucr.ac.cr)

# Sistemas de Potencia I



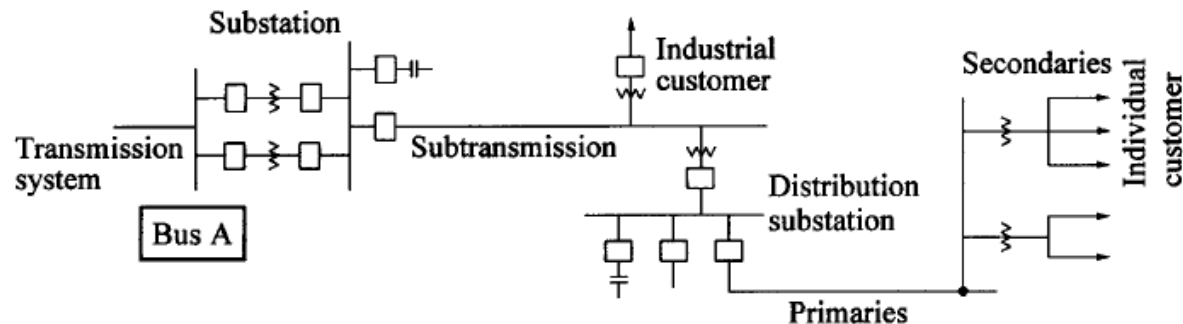
- Cálculo I
- Cálculo II
- Cálculo III
- Álgebra lineal
- Matemática superior
- Circuitos lineales I
- Circuitos lineales II
- Electromagnetismo
- Análisis de sistemas
- Máquinas eléctricas I
- Máquinas eléctricas II
- Transmisión de Potencia
- Sistemas de Control

## Literatura recomendada para esta presentación:

- Power System Stability and Control (Kundur), Capítulo 7 “Power System Loads”

## ¿Porqué vamos a estudiar modelos de carga?

- Los modelos de carga son representaciones matemáticas de un fenómeno físico.
- Se puede modelar como una impedancia, una corriente, o una potencia. O como una combinación de las 3.
- Se pueden describir a partir de la variación de tensión y frecuencia en sus terminales.
- Su dependencia del tiempo, las categorizan como estáticas o dinámicas.
- Al estudiar un “sistema”, no nos interesa (tipo de estudio), o no podemos (información disponible o computación), modelar absolutamente todas las cargas en detalle. Así, surgen los modelos de carga compuesta. La siguiente figura muestra distintos puntos del sistema donde puedo crear equivalentes de carga según mi necesidad de estudio:

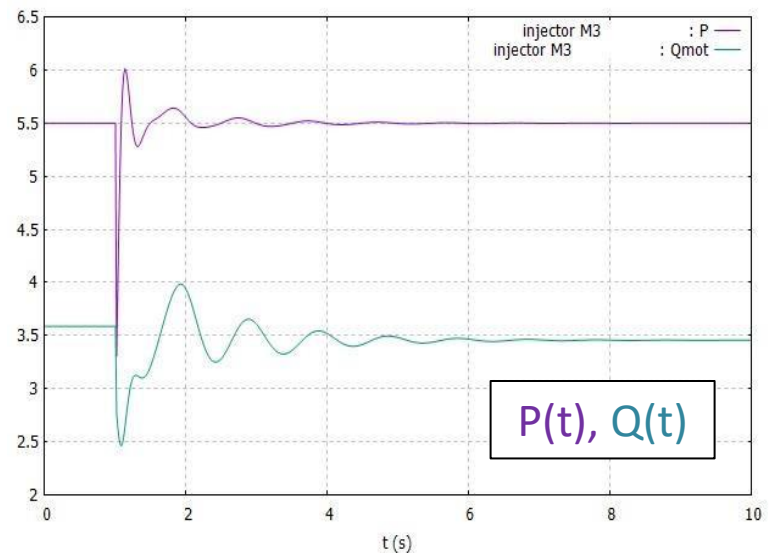
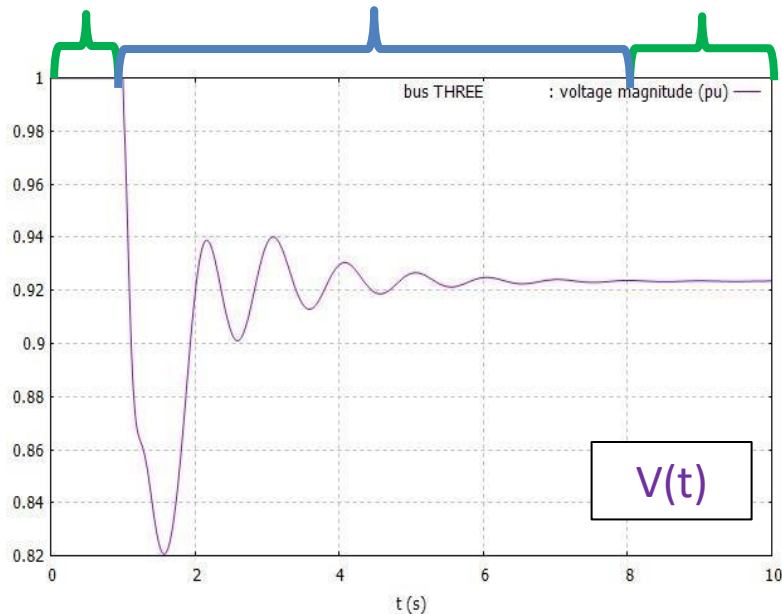


# Una carga sufre una perturbación en el instante de tiempo $t=1s$ ...

Por lo general, nos interesa **observar  $P$ ,  $Q$  y  $V$**  de las cargas. Note que existe un estado de equilibrio antes, uno transitorio inmediatamente después, y uno nuevo de equilibrio cierto tiempo después de la perturbación. **Cómo es  $\Delta P$  y  $\Delta Q$  en función de  $\Delta V$ ?**

- Antes y después (**estacionarios**): Cargas estáticas
- Durante (**transitorio**): Cargas dinámicas

estacionario      transitorio      estacionario



$V(0)=1, V(10)=0.92$   
 $P(0)=P(10)=5.5$   
 $Q(0)=3.6, Q(10)=3.4!$

# Modelado de cargas estáticas

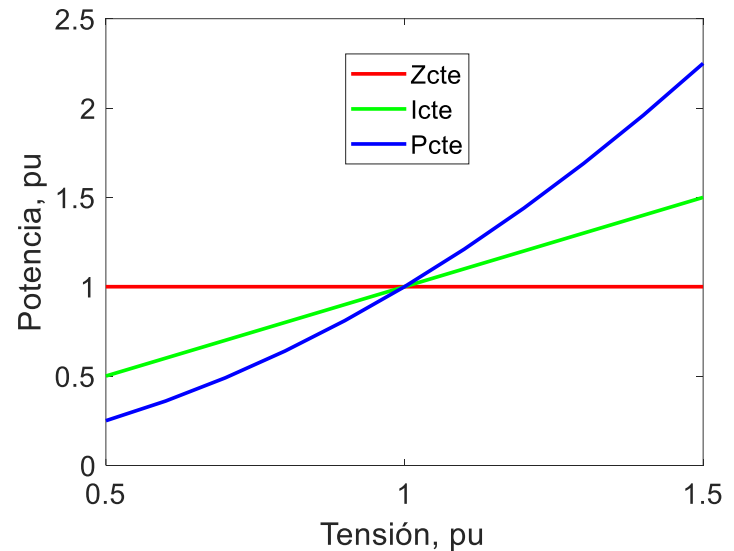
La mayoría de las cargas eléctricas **dependen de la tensión de operación**. Si el sistema no se desvía significativamente del punto de operación ( $V = 1$  pu), la demanda se puede representar con el **modelo exponencial**:

$$\bar{S} = P + jQ$$

$$P = P_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^\alpha \quad Q = Q_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^\beta$$

Donde:

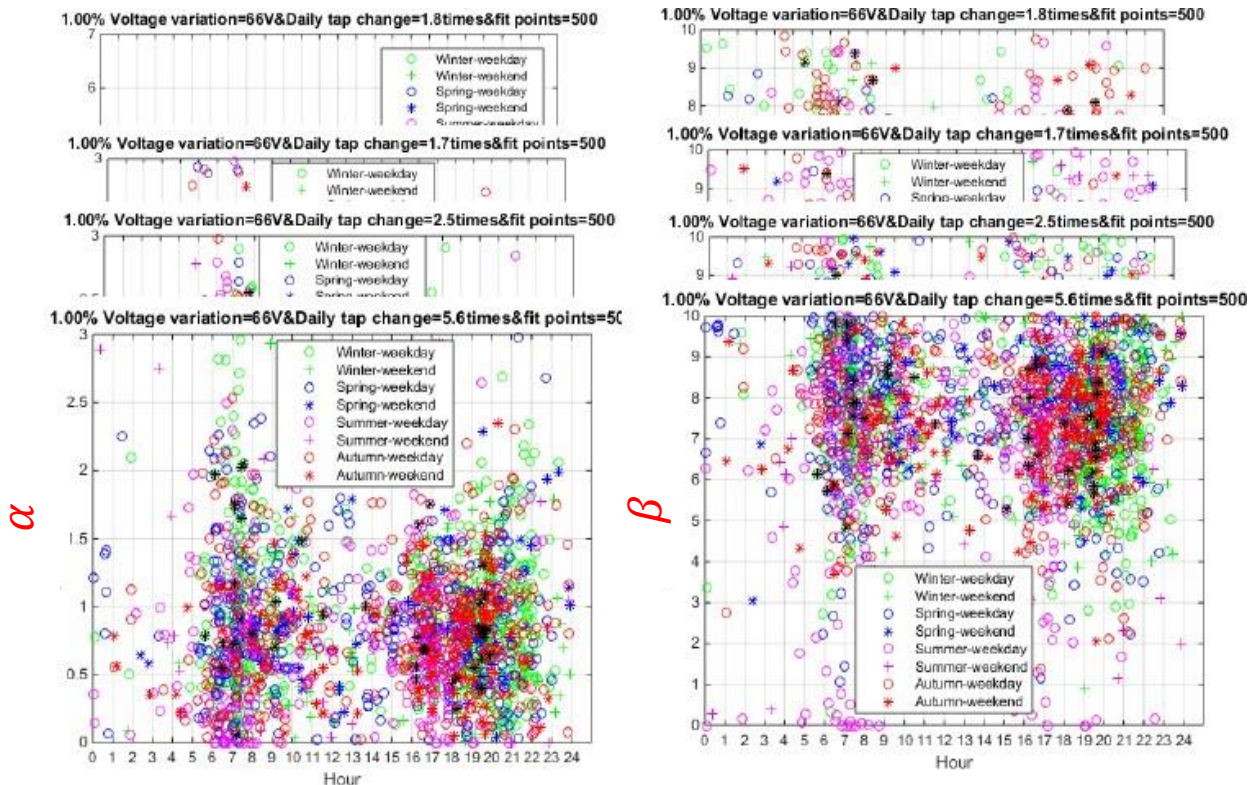
- $P$  Potencia activa demandada por la carga
- $Q$  Potencia reactiva demandada por la carga
- $P_0$  Potencia activa a una tensión  $V_0$
- $Q_0$  Potencia reactiva a una tensión  $V_0$
- $V_0$  Tensión inicial de la carga
- $\alpha$  Coeficiente de potencia activa
- $\beta$  Coeficiente de potencia reactiva



- $\alpha, \beta = 0$ : Carga tipo potencia constante
- $\alpha, \beta = 1$ : Carga tipo corriente constante
- $\alpha, \beta = 2$ : Carga tipo impedancia constante

# Coeficientes $\alpha$ y $\beta$ (de medición)

A continuación se muestran los coeficientes calculados a partir de multiples puntos medidos en distintos instantes del día y épocas del año, **posteriores al cambio de un tap** en la subestación.



Típicamente, los coeficientes oscilan en los siguientes intervalos:

$$0.5 < \alpha < 1.8$$

$$1.5 < \beta < 6$$

# Modelo ZIP

Cuando la carga tiene componentes de **potencia** constante, **corriente** constante, e **impedancia** constante, se usa modelo ZIP:

$$P = P_0 \left( a_0 + a_1 \left( \frac{V}{V_0} \right) + a_2 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right) \quad Q = Q_0 \left( b_0 + b_1 \left( \frac{V}{V_0} \right) + b_2 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right)$$

Los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  conforman el 100% de la demanda original  $P_0$  y  $Q_0$ , es decir:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \end{aligned}$$

## Ejemplos de cargas según su comportamiento:

- Z cte: Cargas resistivas (hornos, calentadores)
- I cte: Cargas electrónicas (control rápido)
- P cte: Cargas inerciales (motores)
- ZIP: Alimentadores, circuitos, industrias, equivalentes de red

# Ejemplo

Una carga demanda  $P_0 = 100 \text{ MW}$  a una tensión de  $V_0 = 1.02 \text{ p.u.}$ . Si la tensión disminuyó a  $0.98 \text{ p.u.}$ , determine la nueva demanda si sabe que la carga es 10%  $P_{cte}$ , 30%  $I_{cte}$  y 60%  $Z_{cte}$ .

**Solución:**

$$P = P_0 \left( a_0 + a_1 \left( \frac{V}{V_0} \right) + a_2 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right)$$

$$a_0 = 0.10, a_1 = 0.3, a_2 = 0.6$$

Entonces,

$$P = 100 \left( 0.1 + 0.3 \left( \frac{0.98}{1.02} \right) + 0.6 \left( \frac{0.98}{1.02} \right)^2 \right) = 94.21 \text{ MW}$$

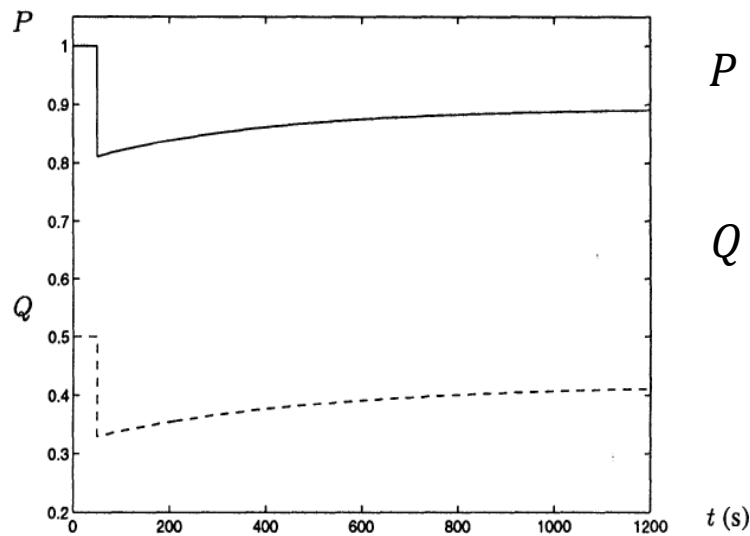


# Ejemplo

Una carga demanda  $P_0 = 100 \text{ MW}$  a una tensión de  $V_0 = 1.00 \text{ p.u.}$ . Si la tensión aumentó a  $1.035 \text{ p.u.}$ , determine la nueva demanda si sabe que la carga es 10%  $P_{cte}$  y 90%  $Z_{cte}$ .

# Modelado de cargas dinámicas

Utilizado para **modelar la respuesta de la demanda** de las cargas después de una perturbación que afectó a  $V$  o  $f$ .



$$P = P_0 \left( a_0 + a_1 \left( \frac{V}{V_0} \right) + a_2 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right) (1 + K_{pf}(f - f_0))$$

$$Q = Q_0 \left( b_0 + b_1 \left( \frac{V}{V_0} \right) + b_2 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right) (1 + K_{qf}(f - f_0))$$

$$\Delta f = f - f_0$$

$$0 < K_{pf} < 3$$

$$-2 < K_{qf} < 0$$

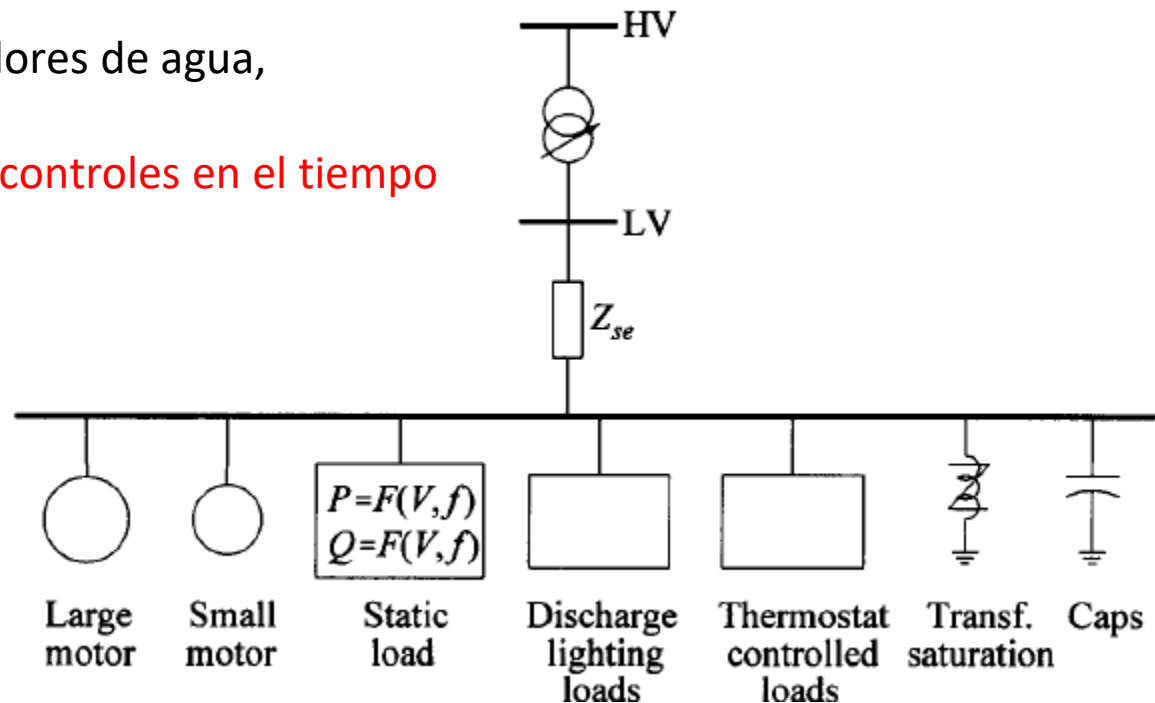
Los motores de inducción componen entre 60% y 70% de la carga mundial. Así, es común **modelar la respuesta dinámica de cargas agregadas como un gran motor**. Sin embargo, existen millares de modelos dinámicos.

# Modelado de cargas dinámicas

Son necesarias para estudios de protecciones de sobrecorriente o sobretensión, estabilidad de pequeña señal, estabilidad de tensión, o estabilidad transitoria (de grandes perturbaciones).

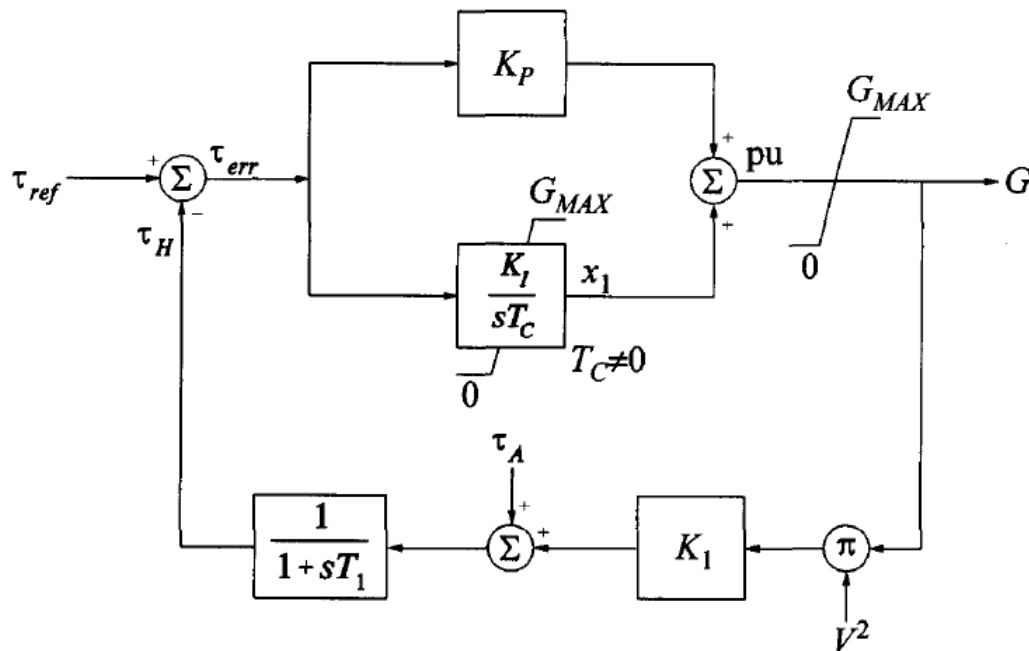
Los siguientes equipos se modelan como cargas dinámicas:

- Motores, dinámicas electromecánicas.
- Relés de protección térmicos y de sobrecorriente.
- Cargas térmicas (calentadores de agua, refrigeradores)
- Dispositivos con delays o controles en el tiempo



# Modelado de cargas dinámicas

Regresaremos a las cargas dinámicas cuando estudiemos estabilidad porque requieren métodos de integración numérica. El siguiente diagrama de bloques modela una carga termostática. **Obtenga las ecuaciones diferenciales que describen el modelo:**

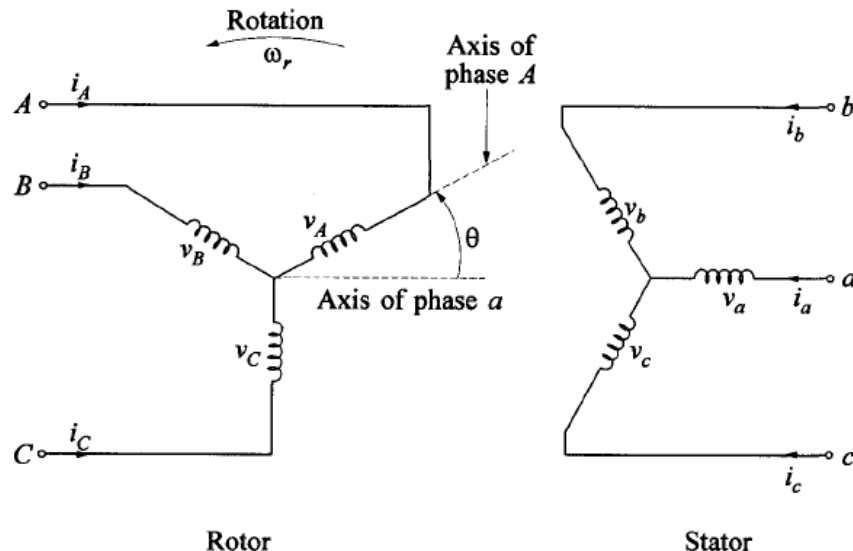


- $K_P$  = gain of proportional controller
- $K_I$  = gain of integral controller
- $T_C$  = time constant of integral controller, s
- $\tau_{ref}$  = reference temperature
- $\tau_A$  = ambient temperature
- $T_1$  = load time constant, s
- $K_1$  = gain associated with load model
- $G_0$  = initial value of  $G$
- $G_{MAX}$  = maximum value of  $G$

# La carga dinámica más popular: El motor de inducción trifásico

<https://la.mathworks.com/help/mcb/ref/inductionmotor.html>

Muchas cargas son motores. Estos se pueden agrupar como un gran motor de inducción trifásico. Se construye el modelo de flujos encadenados de orden (cantidad de ecuaciones diferenciales) 7 y se reduce a orden 5 o 3 al despreciando las dinámicas electromagnéticas. Si las corrientes entran en los devanados, son positivas. Las minúsculas representan el estator y las mayúsculas el rotor, con  $R_r$  y  $R_s$  como las resistencias de los devanados.



$$v_{abc} = R_s i_{abc} + \frac{d\psi_{abc}}{dt}$$
$$0 = R_r i_{ABC} + \frac{d\psi_{ABC}}{dt}$$

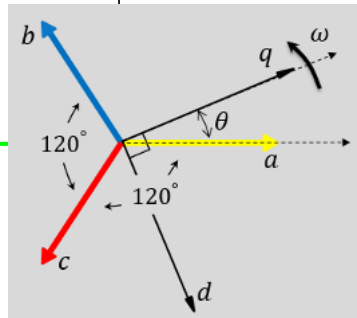
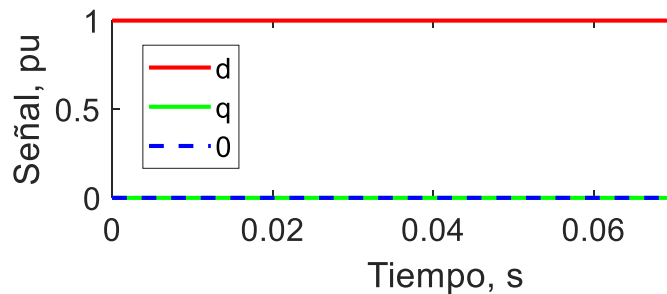
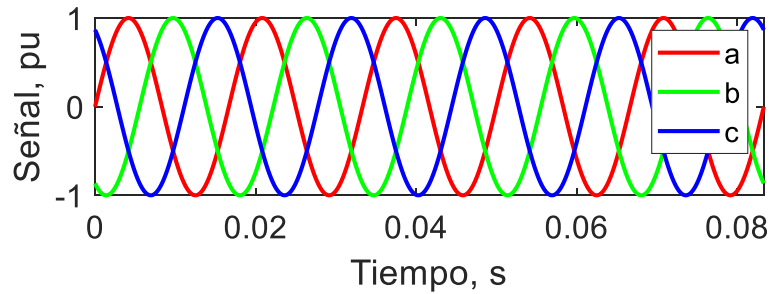


Útil en transitorio electromagnético (con tensiones y corrientes sinusoidales), pero para transitorios electromecánicos...

Es más cómodo analizar y simular máquinas rotacionales con señales DC, así, es común utilizar la **Transformada de Park**. En el estator, se usa la referencia de la velocidad angular de la red,  $\omega_s$ , mientras que en el rotor, se usa la velocidad relativa del rotor con respecto a la de la red  $\omega_s - \omega_r$ .

**Truco: multiplicar por  $e^{j\theta}$**

$$\begin{bmatrix} d \\ q \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \sin(\theta - 120) & \sin(\theta + 120) \\ \cos(\theta) & \cos(\theta - 120) & \cos(\theta + 120) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$



$$0 = R_r i_{dr} + (\omega_s - \omega_r) \psi_{qr} + \frac{d\psi_{dr}}{dt}$$

$$0 = R_r i_{qr} - (\omega_s - \omega_r) \psi_{dr} + \frac{d\psi_{qr}}{dt}$$

$$0 = R_r i_{0r} + \frac{d\psi_{0r}}{dt}$$

$$v_{ds} = R_s i_{ds} + \omega_s \psi_{qs} + \frac{d\psi_{ds}}{dt}$$

$$v_{qs} = R_s i_{qs} - \omega_s \psi_{ds} + \frac{d\psi_{qs}}{dt}$$

$$v_{0s} = R_s i_{0s} + \frac{d\psi_{0s}}{dt}$$

Continuando con el modelo, los flujos encadenados se pueden describir con las inductancias y las corrientes. Para la fase a del estator y A el rotor:

$$\begin{aligned}\psi_a &= L_{aa}i_a + L_{ab}(i_b + i_c) + L_{aA}(i_A \cos(\theta) + i_B \cos(\theta + 120) + i_C \cos(\theta - 120)) \\ \psi_A &= L_{AA}i_A + L_{AB}(i_B + i_C) + L_{aA}(i_a \cos(\theta) + i_b \cos(\theta - 120) + i_c \cos(\theta + 120))\end{aligned}$$

Y si aplicamos transformada de Park nuevamente, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \psi_{ds} \\ \psi_{qs} \\ \psi_{os} \\ \psi_{dr} \\ \psi_{qr} \\ \psi_{or} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & & & L_{sr} & & \\ & L_{ss} & & & L_{sr} & \\ & & L_{os} & & & \\ L_{sr} & & & L_{rr} & & \\ & L_{sr} & & & L_{rr} & \\ & & & & & L_{or} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{os} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \\ i_{or} \end{bmatrix}$$

Donde  $L_{ls}$  y  $L_{lr}$  son las inductancias de dispersión del estator y del rotor, y  $L_{sr} = L_m$  es la inductancia mutua. Algunos valores típicos se presentan a continuación:

$R_s$	0.01 - 0.12 pu	$R_r$	0.01 - 0.13 pu
$L_{ss} - L_{sr}$	0.07 - 0.15 pu	$L_{rr} - L_{sr}$	0.06 - 0.18 pu
$L_{sr}$	1.8 - 3.8 pu		

Ahora procedemos a la definición de la **potencia eléctrica en el estator  $p_e$** , que alimenta la máquina. Así, podemos calcular el **par electromagnético  $T_e$**  desarrollado y vincularlo con el mecánico:

$$p_e = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0 = p_R + p_m + p_{s \rightarrow r}$$

$$p_R = R_s (i_{ds}^2 + i_{qs}^2 + i_{0s}^2)$$

$$p_m = i_{ds} \frac{d\psi_{ds}}{dt} + i_{qs} \frac{d\psi_{qs}}{dt} + i_{0s} \frac{d\psi_{0s}}{dt}$$

$$p_{s \rightarrow r} = \omega_s (\psi_{qs} i_{ds} - \psi_{ds} i_{qs}) = \omega_s T_e = \omega_s L_{sr} (i_{qr} i_{ds} - i_{dr} i_{qs})$$

Y la dinámica electromecánica para el eje se representa por la **ecuación de oscilación**, donde  **$H$**  es la **constante de inercia (en segundos)**, y los pares se expresan en pu.  **$T_m$**  es el par de carga, que se usa para modelar diferentes procesos dependientes de la velocidad:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{2H} (T_e - T_m)$$

$$T_m = T_{m0} (A\omega_r^2 + B\omega_r + C)$$

$$A + B + C = 1$$



# Parámetros típicos para procesos modelados como par mecánico de motores de inducción:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>H</i> (s)
Bomba de calor, aire acondicionado	0.2	0	0.8	0.28
Refrigerador, congelador	0.2	0	0.8	0.28
Lavadora de platos	1	0	0	0.28
Lavadora de ropa	1	0	0	1.5
Secadora de ropa	1	0	0	1.3
Bombas, ventiladores y otros motores	1	0	0	0.7
Motor industrial pequeño	1	0	0	0.7
Motor industrial grande	1	0	0	1.5
Auxiliares de plantas de energía	1	0	0	1.5
Bomba de agua para agricultura	1	0	0	0.4

Component	Static characteristics						Dynamic Characteristics													
	PF	$P_v$	$P_f$	$Q_v$	$Q_f$	$N_{in}$	$PF_{min}$	$P_{v_{min}}$	$P_{f_{min}}$	$Q_{v_{min}}$	$Q_{f_{min}}$	$R_s$	$X_s$	$X_m$	$R_r$	$X_r$	A	B	H	$LF_{in}$
Resistance space heater	1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Heat pump space heating	0.84	0.2	0.9	2.5	-1.3	0.9	1.0	2.0	0	0	0	.33	.076	2.4	.048	.062	0.2	0	0.28	0.6
Heat pump central air cond.	0.81	0.2	0.9	2.5	-2.7	1.0	-	-	-	-	-	.33	.076	2.4	.048	.062	0.2	0	0.28	0.6
Central air conditioner	0.81	0.2	0.9	2.2	-2.7	1.0	-	-	-	-	-	.33	.076	2.4	.048	.062	0.2	0	0.28	0.6
Room air conditioner	0.75	0.5	0.6	2.5	-2.8	1.0	-	-	-	-	-	.10	.10	1.8	.09	.06	0.2	0	0.28	0.6
Water heater	1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Range	1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Refrigerator and freezer	0.84	0.8	0.5	2.5	-1.4	0.8	1.0	2.0	0	0	0	.056	.087	2.4	.053	.082	0.2	0	0.28	0.5
Dishwasher	0.99	1.8	0.0	3.5	-1.4	0.8	1.0	2.0	0	0	0	.11	.14	2.8	.11	.065	1.0	0	0.28	0.5
Clothes washer	0.65	0.08	2.9	1.6	1.8	1.0	-	-	-	-	-	.11	.12	2.0	.11	.13	1.0	0	0.69	0.4
Incandescent lighting	1.0	1.54	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Clothes dryer	0.99	2.0	0.0	3.3	-2.6	0.2	1.0	2.0	0	0	0	.12	.15	1.9	.13	.14	1.0	0	0.11	0.4
Colored television	0.77	2.0	0.0	5.2	-4.6	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Furnace fan	0.73	0.08	2.9	1.6	1.8	1.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Commercial heat pump	0.84	0.1	1.0	2.5	-1.3	0.9	1.0	2.0	0	0	0	.53	.83	1.9	.036	.068	0.2	0	0.28	0.6
Heat pump commercial A/C	0.81	0.1	1.0	2.5	-1.3	1.0	-	-	-	-	-	.53	.83	1.9	.036	.068	0.2	0	0.28	0.6
Commercial central A/C	0.75	0.1	1.0	2.5	-1.3	1.0	-	-	-	-	-	.53	.83	1.9	.036	.068	0.2	0	0.28	0.6
Commercial room A/C	0.75	0.5	0.6	2.5	-2.8	1.0	-	-	-	-	-	.10	.10	1.8	.09	.06	0.2	0	0.28	0.6
Fluorescent lighting	0.90	1.0	1.0	3.0	-2.8	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Pumps, fans, other motors	0.87	0.08	2.9	1.6	1.8	1.0	-	-	-	-	-	.079	.12	3.2	.052	.12	1.0	0	0.7	0.7
Electrolysis	0.90	1.8	-0.3	2.2	0.6	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Arc furnace	0.72	2.3	-1.0	1.61	-1.0	0.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Small industrial motors	0.83	0.1	2.9	0.6	-1.8	1.0	-	-	-	-	-	.031	.10	3.2	.018	.18	1.0	0	0.7	0.6
Large industrial motors	0.89	0.05	1.9	0.5	1.2	1.0	-	-	-	-	-	.013	.067	3.8	.009	.17	1.0	0	1.5	0.8
Agricultural water pumps	0.85	1.4	5.6	1.4	4.2	1.0	-	-	-	-	-	.025	.088	3.2	.016	.17	1.0	0	0.8	0.7
Power plant auxiliaries	0.80	0.08	2.9	1.6	1.8	1.0	-	-	-	-	-	.013	.14	2.4	.009	.12	1.0	0	1.5	0.7

Fuente: Carson W. Taylor "Power System Voltage Stability", EPRI.

# Modelo de 3er orden

Para transitorios electromecánicos (estabilidad) no se consideran la dinámicas electromagnéticas de la red, es decir, del estator.

$$\frac{d\psi_{ds}}{dt} = \frac{d\psi_{qd}}{dt} = 0$$

Las otras ecuaciones se mantienen igual:

$$\frac{d\psi_{dr}}{dt} = -R_r i_{dr} - (\omega_s - \omega_r) \psi_{qr}$$

$$\psi_{ds} = L_{ss} i_{ds} + L_{sr} i_{dr}$$

$$\psi_{dr} = L_{sr} i_{ds} + L_{rr} i_{dr}$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{2H} (T_e - T_m)$$

$$\frac{d\psi_{qr}}{dt} = -R_r i_{qr} + (\omega_s - \omega_r) \psi_{dr}$$

$$\psi_{qs} = L_{ss} i_{qs} + L_{sr} i_{qr}$$

$$\psi_{qr} = L_{sr} i_{qs} + L_{rr} i_{qr}$$

$$T_m = T_{m0} (A\omega_r^2 + B\omega_r + C)$$

# Software de Simulación

Matlab - Simulink

<https://ci.ucr.ac.cr/matlab>

PSS/e - Python

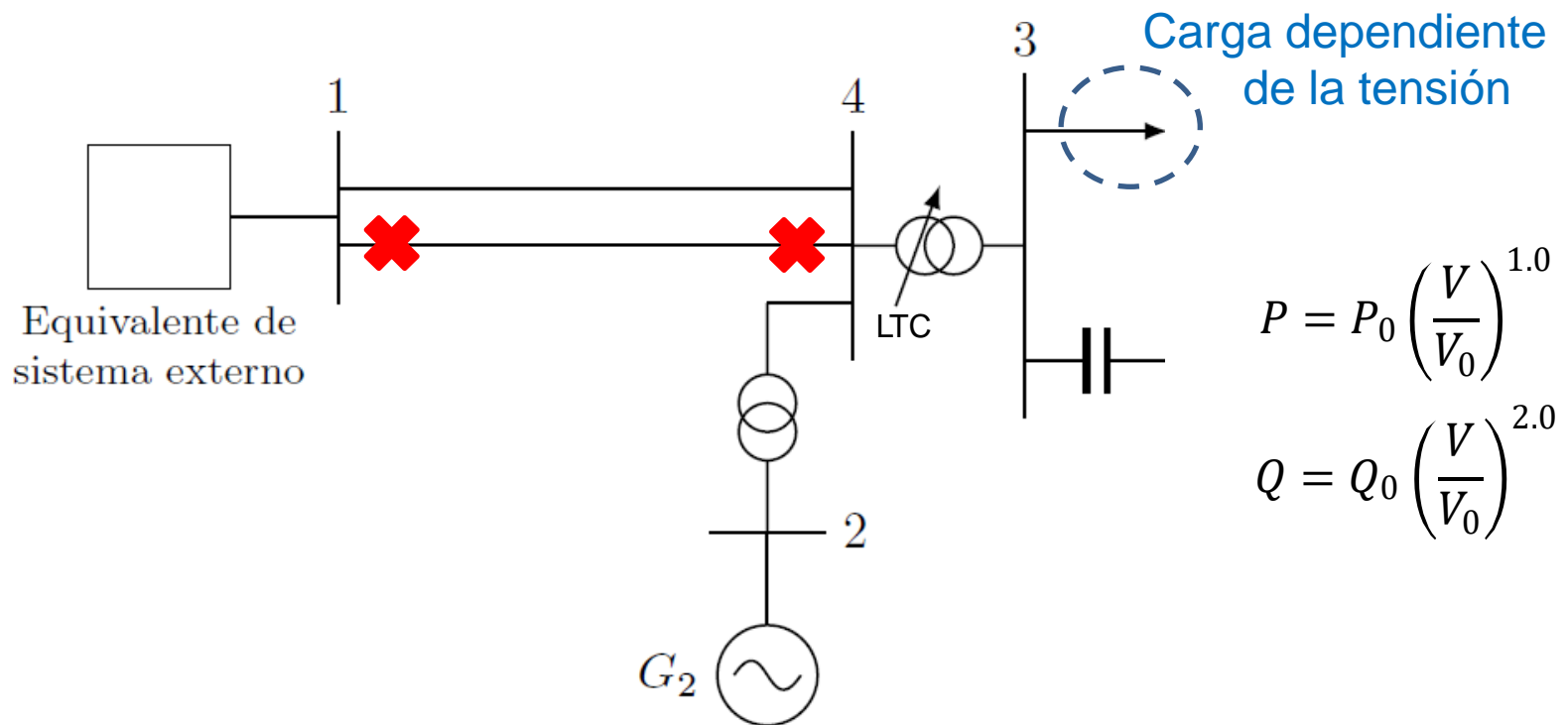
<https://new.siemens.com/global/en/products/energy/energy-automation-and-smart-grid/pss-software/psse-xplore-order-form.html>

<https://www.anaconda.com/distribution/>

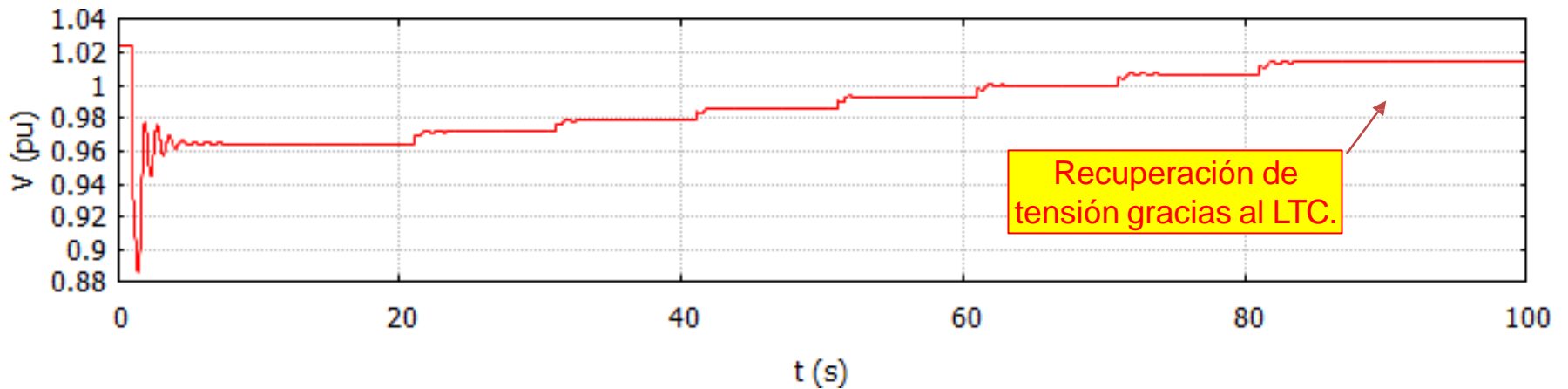


# Simulación de cargas estáticas

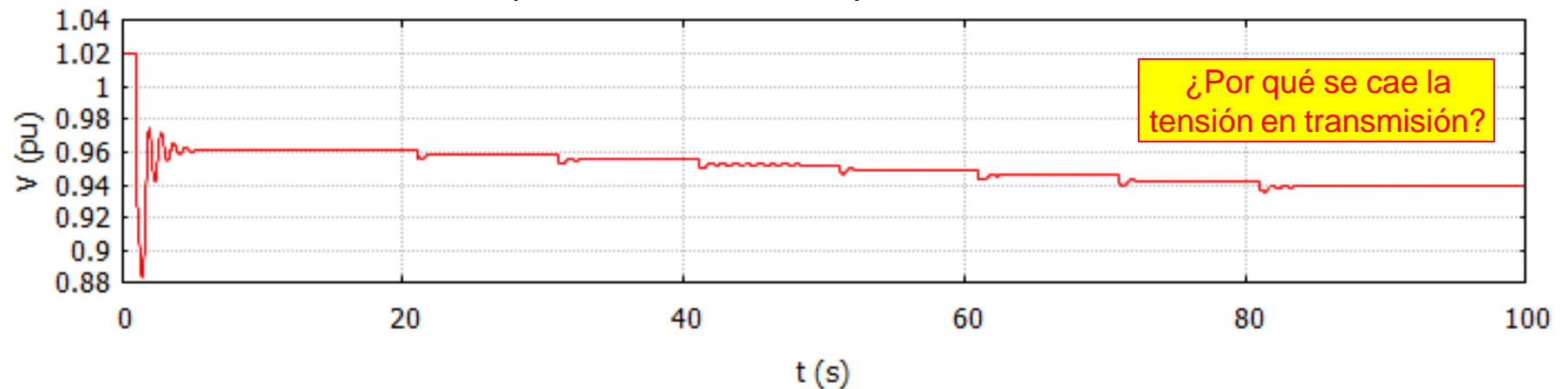
Simulación de la salida de una línea de transmisión, que conlleva a caída de tensión en una carga estática con modelo exponencial...



## Tensión en barra 3 (de distribución)

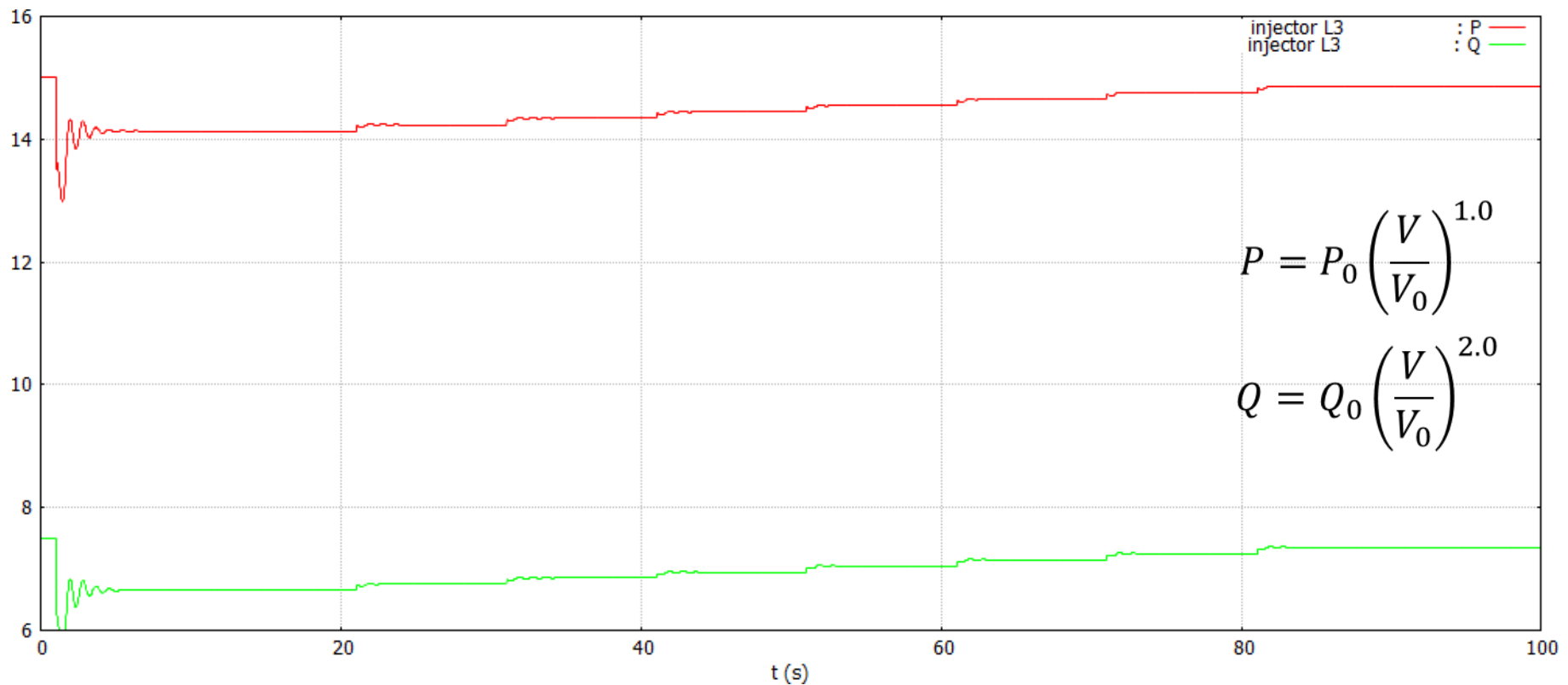


## Tensión en barra 4 (de transmisión)



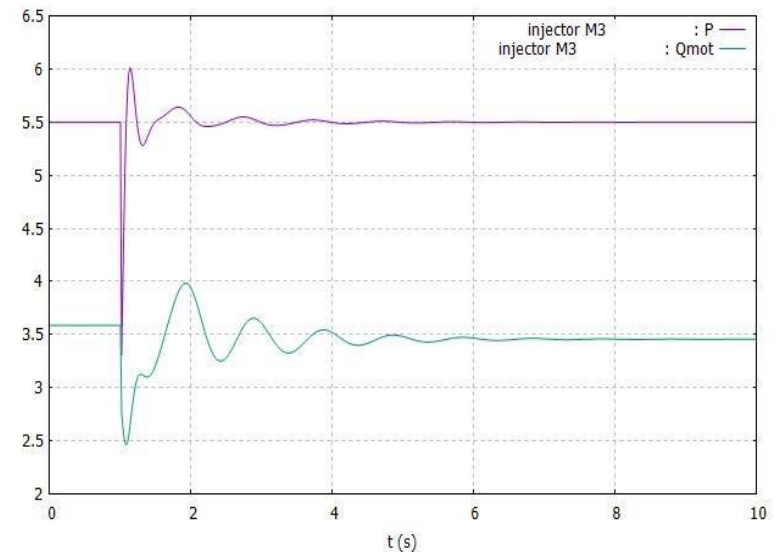
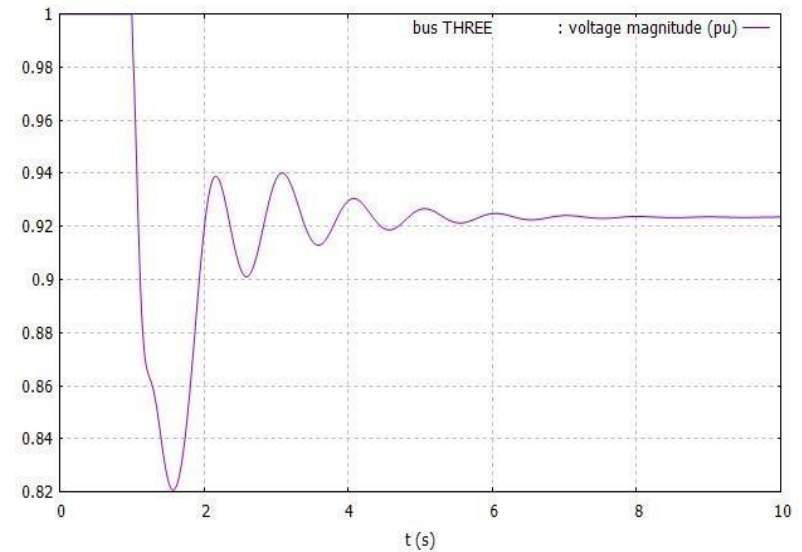
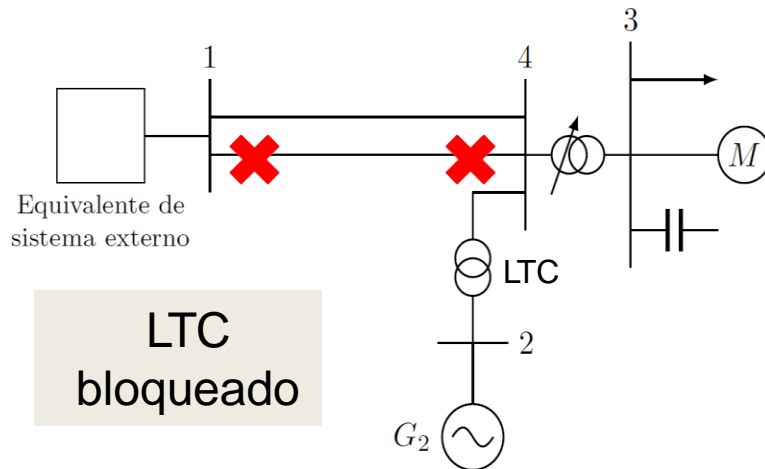
# Simulación en PSS/e

Potencia activa y reactiva demandada por la carga en barra 3



# Simulación de motor de inducción

Simulación de la salida de una línea de transmisión que conlleva a caída de tensión en terminales del motor



$$X_s = 0.1 \quad X_r = 0.18 \quad X_m = 3.2 \text{ pu} \quad R_r = 0.018 \text{ pu} \quad H = 0.5 \text{ s}$$



# Comparación del modelo de orden 5 y de orden 3

