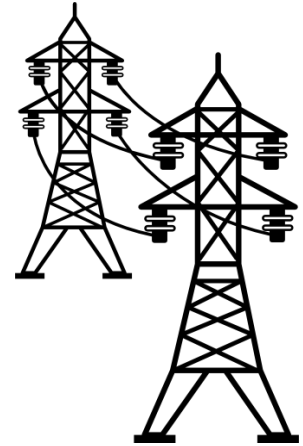




EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica



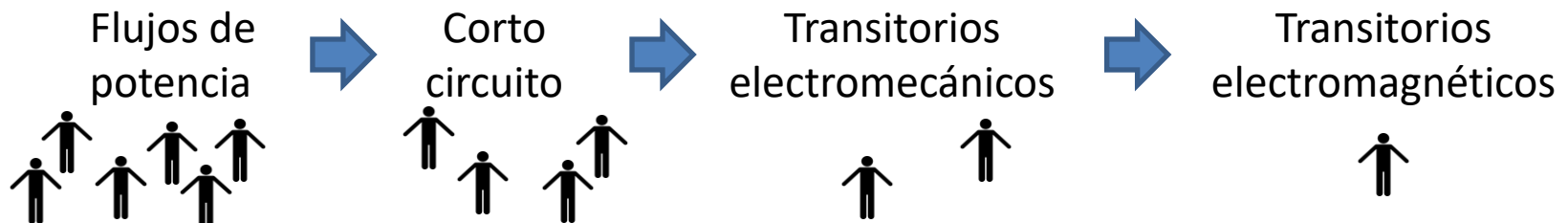
IE-0469 Sistemas de Potencia I

Presentación #3 Cálculo de flujos de potencia

Dr. Andrés Argüello Guillén
andres.arguelloguillen@ucr.ac.cr

¿Porqué aprender **flujos de potencia**?

- La mayoría de las cargas se modelan con su potencia y tensión en terminales. Y fijamos los modos de operación de los generadores. Con esta información, podemos **calcular** el resto de las variables del sistema (**tensiones, potencias, corrientes**) para entender el camino de la energía de las fuente a la carga.
- La solución para obtener estas variables, involucra sistemas de **ecuaciones no lineales** de orden elevado (muchas ecuaciones). Así, es más práctica una **solución numérica** sistemática por medio de un algoritmo y una computadora, que la analítica.
- Los flujos de potencia son la **base de la mayoría de estudios** de sistemas de potencia (cargabilidad, planeamiento, estabilidad).



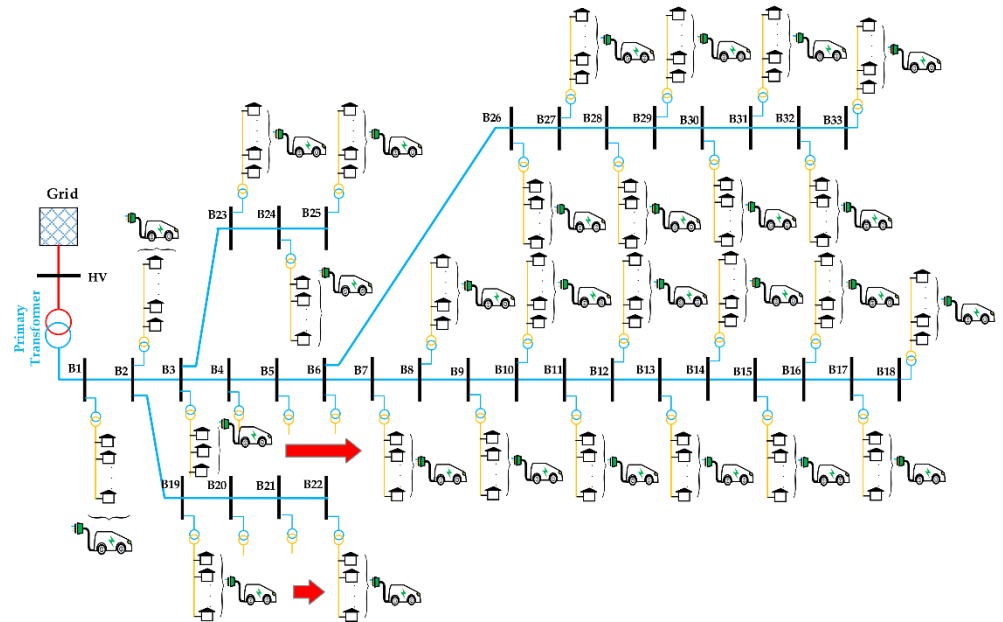
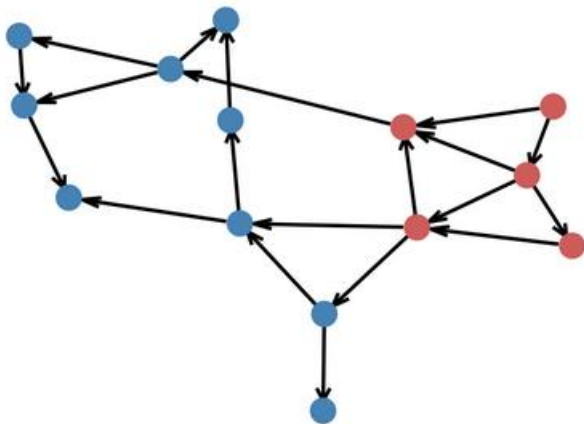
Referencia:

- Sección 6.4 “AC Transmission, Power-flow analysis”, Power System Stability and Control (Kundur).

Vamos a ver basicamente 3 algoritmos:

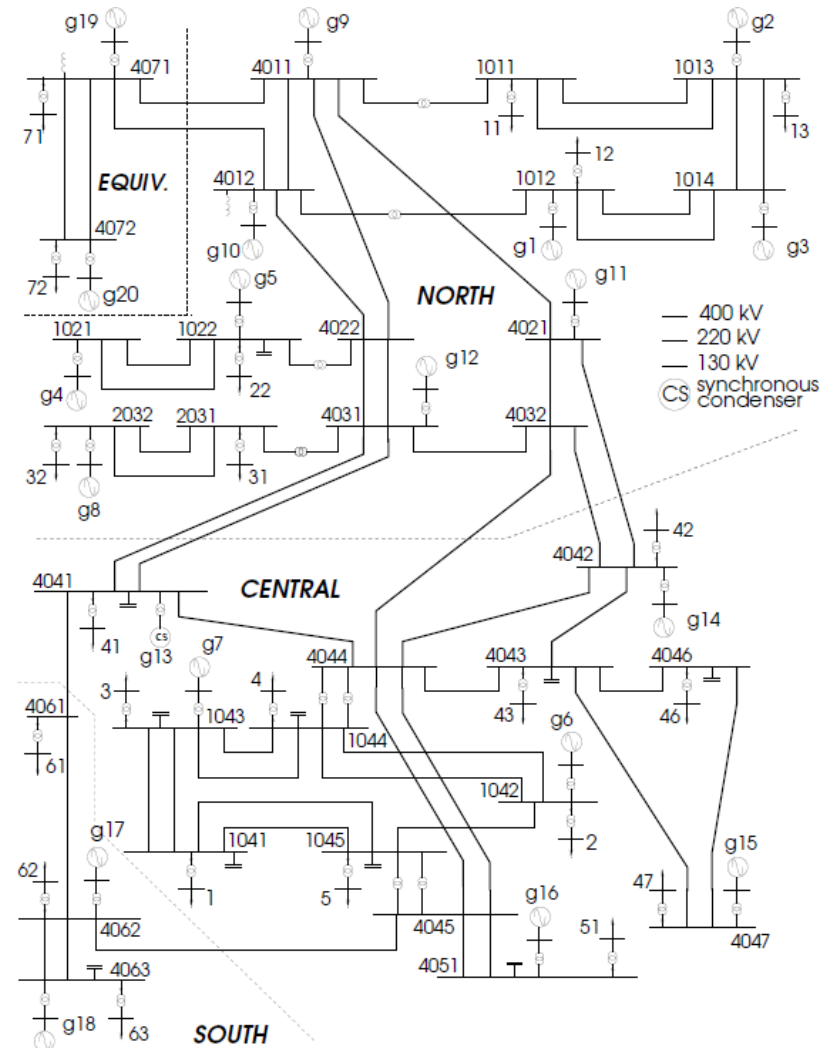
- **Newton Raphson** (completo, desacoplado, deshonesto)
- **Gauss Seidel**
- **DC**

Cada uno tiene sus ventajas y desventajas, que los hacen más favorables para ciertas aplicaciones.



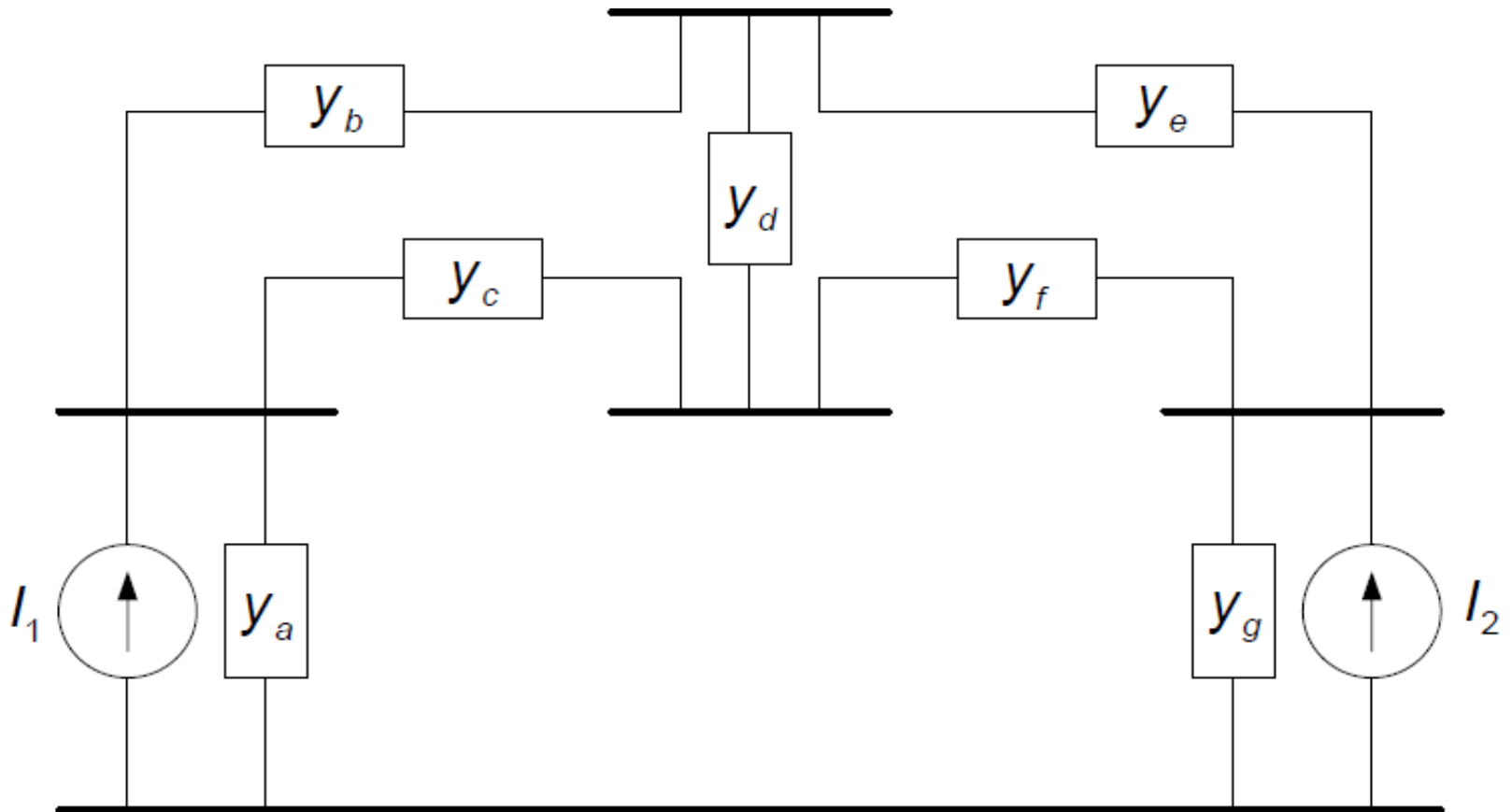
Análisis nodal del sistema de potencia

- Las redes de transmisión usualmente consisten de cientos o **miles de barras** (nodos) **y ramales** (líneas y transformadores).
- Hay necesidad de usar un **método sistemático** para formular las **ecuaciones que describen el comportamiento** de estas redes.
- Se requieren métodos rápidos y exactos **para resolver estas ecuaciones**.



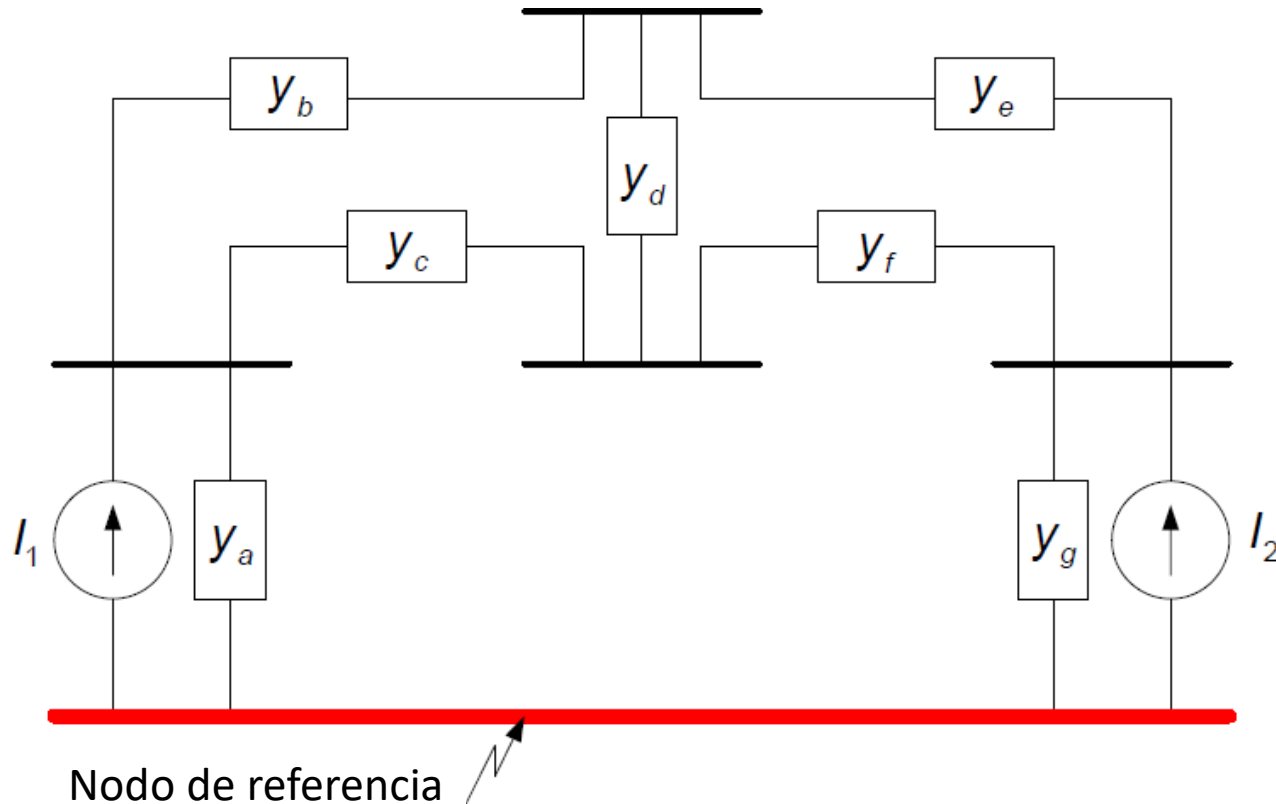
Vamos a plantear un algoritmo sistemático basado en la técnica “**nodos**” de **Circuitos Lineales 1**. Es importante destacar que: $\text{Nodos} > \text{Mallas}$.

Considere la siguiente red. Nosotros ya sabemos construir la matriz de admitancias nodales \mathbf{Y} . Se desea conocer las tensiones en todos los nodos y las corrientes en todas las ramas.

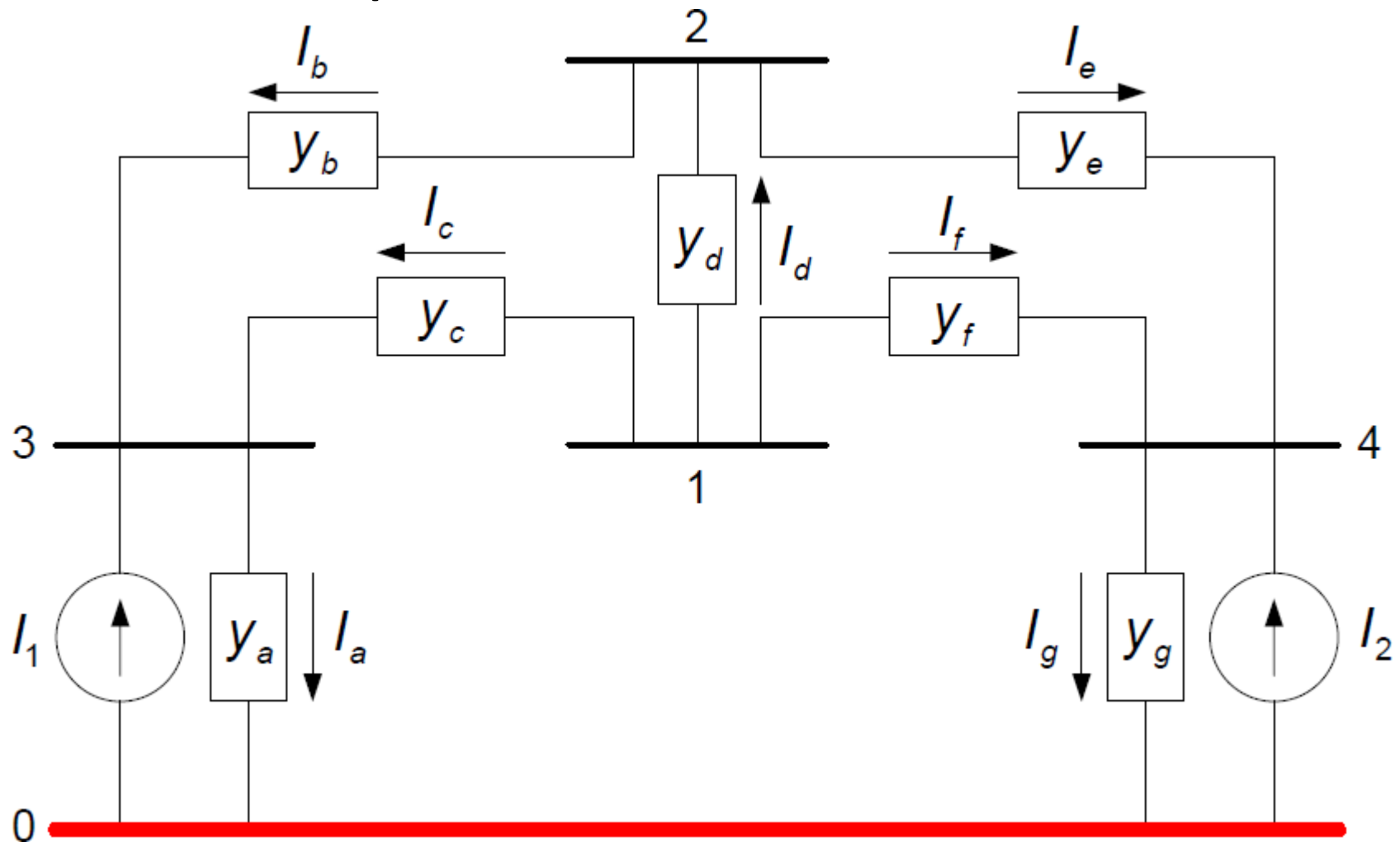


Paso 1: Definición de una referencia

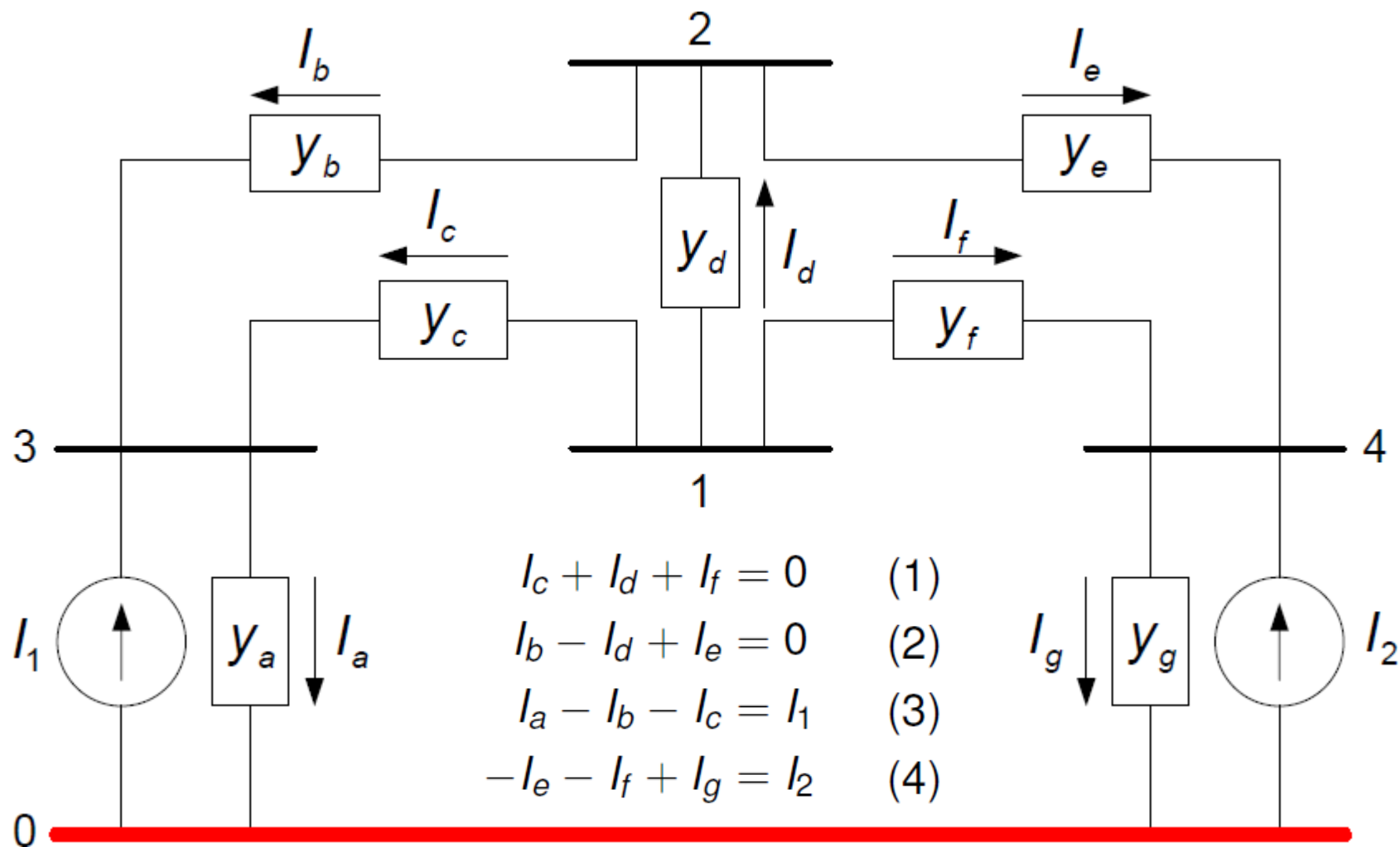
La selección del nodo de referencia es arbitraria. Sin embargo, lo natural es utilizar la tierra como referencia.



Paso 2: Definición de la dirección de las corrientes por todos los ramales

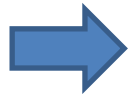


Paso 3: Enumeración de los nodos y Ley de Corrientes de Kirchhoff en cada nodo



Paso 4: Implementación de la Ley de Ohm dentro de las ecuaciones anteriores para expresarlas en términos de las tensiones nodales. Aquí usamos admitancias.

$$\begin{aligned}I_c + I_d + I_f &= 0 \\I_b - I_d + I_e &= 0 \\I_a - I_b - I_c &= I_1 \\-I_e - I_f + I_g &= I_2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y_c(V_1 - V_3) + y_d(V_1 - V_2) + y_f(V_1 - V_4) &= 0 \\y_b(V_2 - V_3) - y_d(V_1 - V_2) + y_e(V_2 - V_4) &= 0 \\y_a(V_3 - 0) - y_b(V_2 - V_3) - y_c(V_1 - V_3) &= I_1 \\-y_e(V_2 - V_4) - y_f(V_1 - V_4) + y_g(V_4 - 0) &= I_2\end{aligned}$$

Paso 5: Acomodar en forma matricial para dejar las tensiones en un vector columna

$$\begin{bmatrix} y_c + y_d + y_f & -y_d & -y_c & -y_f \\ -y_d & y_b + y_d + y_e & -y_b & -y_e \\ -y_c & -y_b & y_a + y_b + y_c & 0 \\ -y_f & -y_e & 0 & y_e + y_f + y_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

En forma compacta:

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}$$

Donde \mathbf{Y} es la matriz de admitancias de la red, y \mathbf{V} e \mathbf{I} son los vectores de tensiones nodales y corrientes netas inyectadas a los nodos.

El cálculo de las tensiones es posible si la matriz \mathbf{Y} es invertible.

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{ZI}$$

Repaso: Construcción de la matriz de admitancias Y

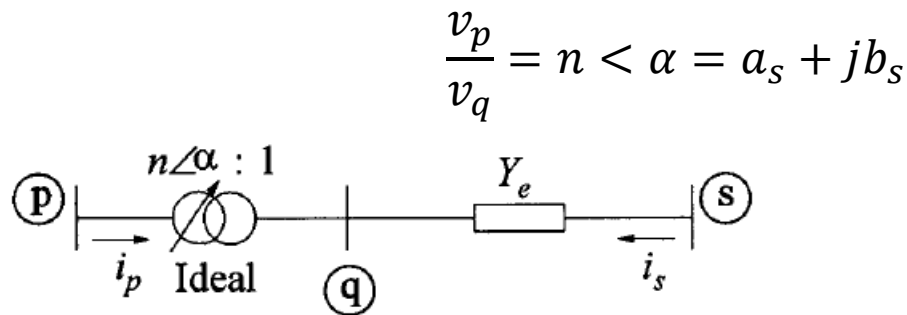
- Cada fila y columna representa un nodo.
- Los elementos de la **diagonal** se calculan como la **suma de las admitancias** conectadas al nodo.
- Los elementos **fuera de la diagonal** son iguales al **negativo de la admitancia que conecta ambos nodos**.

Note como la matriz acomodada del ejemplo anterior es igual a la matriz de admitancia nodal utilizada en transmisión para el estudio de corto-circuito.

$$\begin{bmatrix} y_c + y_d + y_f & -y_d & -y_c & -y_f \\ -y_d & y_b + y_d + y_e & -y_b & -y_e \\ -y_c & -y_b & y_a + y_b + y_c & 0 \\ -y_f & -y_e & 0 & y_e + y_f + y_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Propiedades de matriz Y

- La matriz es no-singular, es decir, tiene inversa.
 - Su determinante es diferente de cero.
 - Tiene rango completo.
 - Todas sus filas y columnas son linealmente independientes.
- La matriz es simétrica a menos que hayan **cambiadores de fase** en la red (transformadores con relación de transformación compleja).

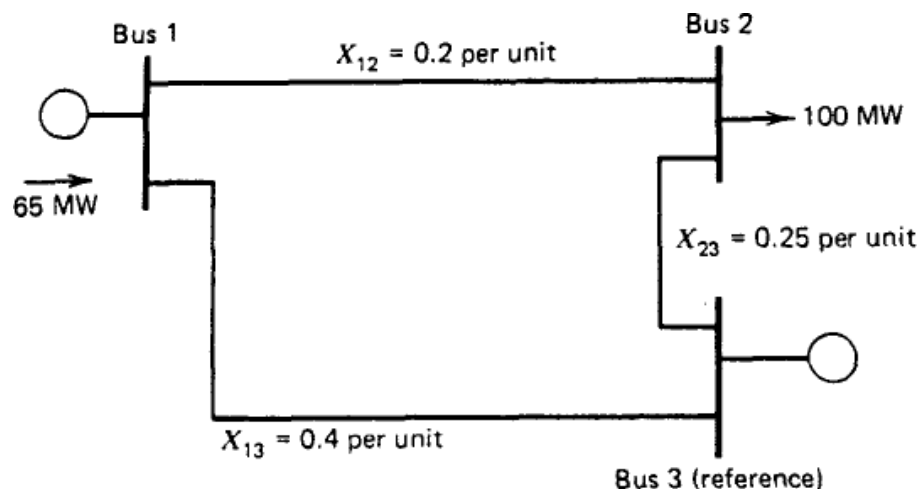


$$\begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} = Y_e \begin{bmatrix} \frac{1}{a_s^2 + b_s^2} & \frac{-1}{a_s + jb_s} \\ \frac{-1}{a_s + jb_s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ v_s \end{bmatrix}$$

- Los elementos diagonales de la matriz son diferente de cero.
- La matriz es generalmente dispersa (muchos ceros).

Ejemplo

Determine la matriz \mathbf{Y} del sistema de potencia cuyas líneas de transmisión se modelan únicamente por reactancias serie.



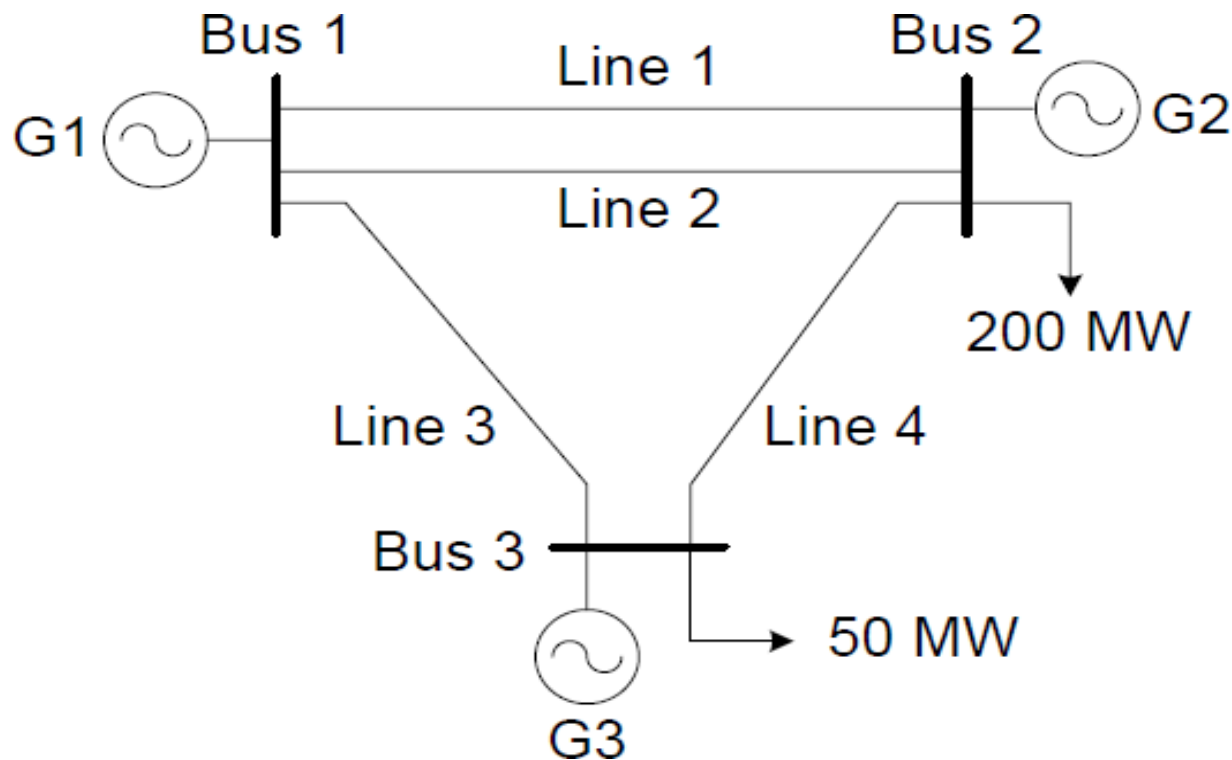
$$y_{12} = -j5 \text{ pu} \quad y_{23} = -j4 \text{ pu}$$

$$y_{13} = -j2.5 \text{ pu}$$

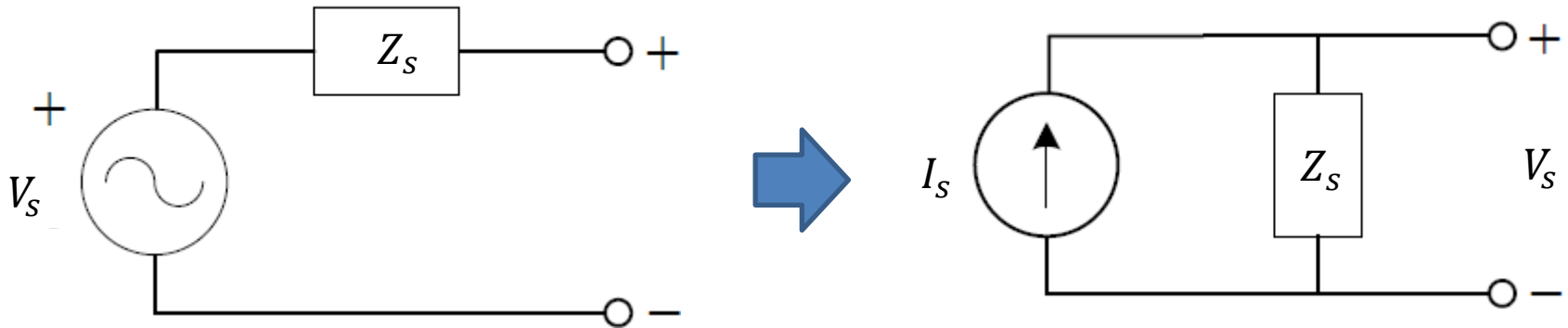
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{13} + y_{23} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -7.5 & 5 & 2.5 \\ 5 & -9 & 4 \\ 2.5 & 4 & -6.5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Determine la matriz Y del sistema de potencia de 3 barras. Las reactancias de las líneas son 0.2 pu en base común. La susceptancia total de cada línea es de 3 pu en base común.



Manejo de fuentes de tensión



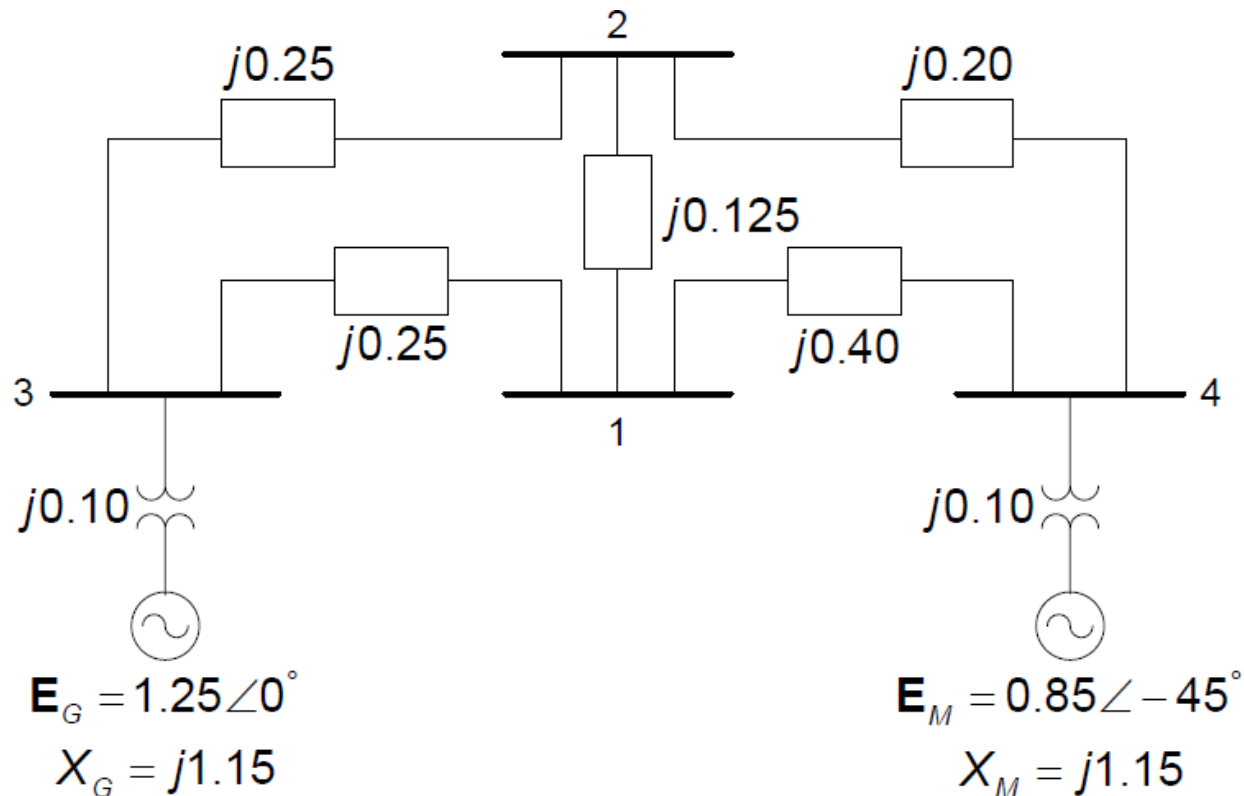
$$I_S = V_S / Z_S$$

$$Y_S = 1 / Z_S$$

- Las fuentes de tensión **se transforman a equivalente Norton**.
- La admitancia de la fuente se incluye en el nodo de interés de \mathbf{Y} .
- Se incluye la fuente de corriente I_S en la respectiva fila de \mathbf{I} .

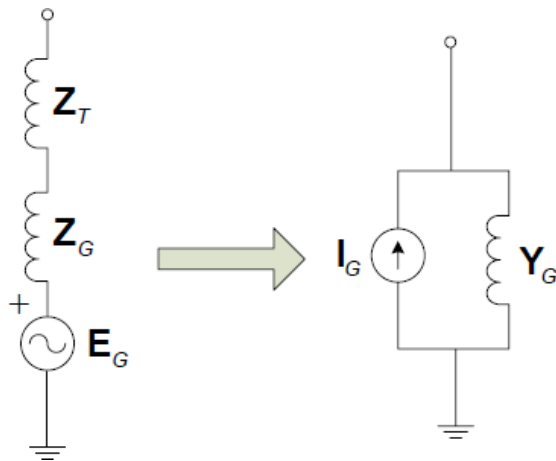
Ejemplo

Calcule la tensión en todos los nodos y las corrientes en todas las ramas de la red. Se presentan las impedancias en pu (base común)



Aquí tenemos un generador, y un motor (carga) que se puede modelar como una fuente de tensión. Esto es común en estudios de cortocircuito. Vamos a transformarlos en equivalentes de Norton.

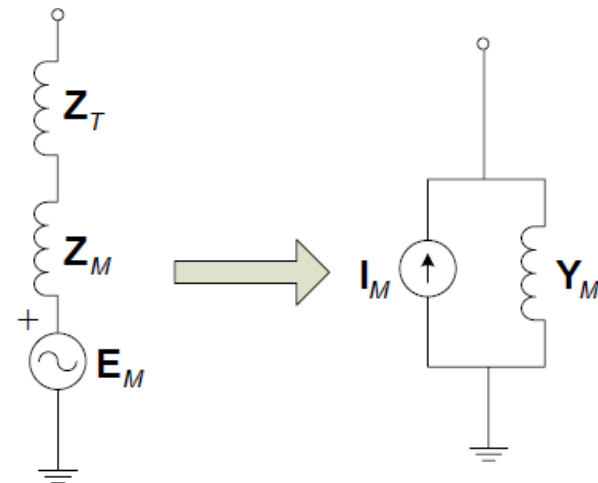
Generador



$$I_G = \frac{E_G}{Z_T + Z_G} = \frac{1.25}{1.25 \angle 90^\circ} = 1 \angle -90^\circ$$

$$Y_G = \frac{1}{Z_T + Z_G} = 0.8 \angle -90^\circ$$

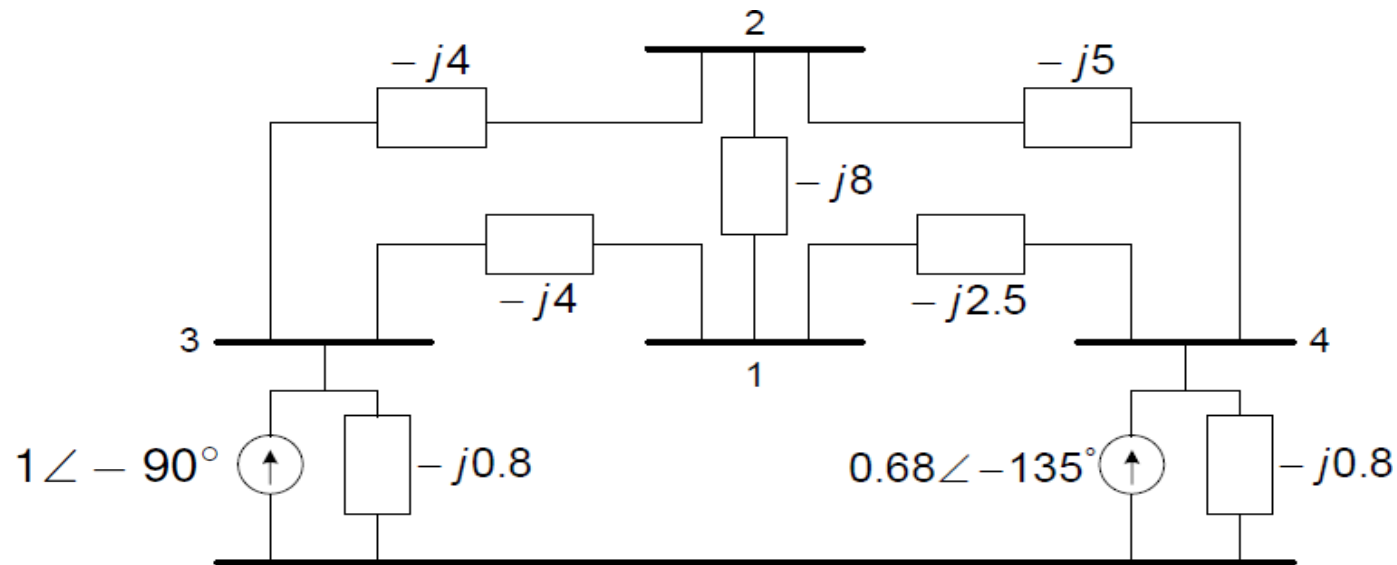
Carga



$$I_M = \frac{E_M}{Z_T + Z_M} = \frac{0.85 \angle -45^\circ}{1.25 \angle 90^\circ} = 0.68 \angle -135^\circ$$

$$Y_M = \frac{1}{Z_T + Z_M} = 0.8 \angle -90^\circ$$

Así, se puede construir la matriz de admitancias nodales y el vector de inyecciones de corriente:



$$\begin{bmatrix} -j14.5 & j8 & j4 & j2.5 \\ j8 & -j17 & j4 & j5 \\ j4 & j4 & -j8.8 & 0 \\ j2.5 & j5 & 0 & -j8.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\angle -90^\circ \\ 0.68\angle -135^\circ \end{bmatrix}$$

Y para obtener las tensiones nodales, se calcula la inversa de \mathbf{Y} y se multiplica por el vector de corrientes:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} j0.7187 & j0.6688 & j0.6307 & j0.6193 \\ j0.6688 & j0.7045 & j0.6242 & j0.6258 \\ j0.6307 & j0.6242 & j0.6840 & j0.5660 \\ j0.6193 & j0.6258 & j0.5660 & j0.6840 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\angle -90^\circ \\ 0.68\angle -135^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.9750 \angle 72.21^\circ \\ 0.9728 \angle 71.98^\circ \\ 0.9941 \angle 74.11^\circ \\ 0.9534 \angle 69.82^\circ \end{bmatrix}$$

- El cálculo de inversas matriciales es altamente demandante a nivel computacional.
- Además, las cargas aquí descritas permiten estos cálculos porque eran lineales (modeladas como impedancias y fuentes de tensión y corriente). Pero es más común el modelo de potencia constante, que es no lineal.
- Así, se vuelven necesarios algoritmos de cálculo numérico.

Formulación del problema de Flujos de Potencia

Permite conocer la tensión (fasorial) de cada barra y con esto:

- Encuentra la corriente y flujos de potencia en cada rama
- El objetivo es revisar si el sistema de potencia opera en una condición aceptable

Debe ser capaz de trabajar con sistemas muy grandes

Parte del análisis nodal explicado anteriormente

$$YV = I$$

Adaptación del análisis nodal

Cargas:

- No se expresan en términos de corrientes ni impedancias.
- Se indica la **potencia activa y reactiva demandada** (MW y fp, o MW y MVar).

Generadores:

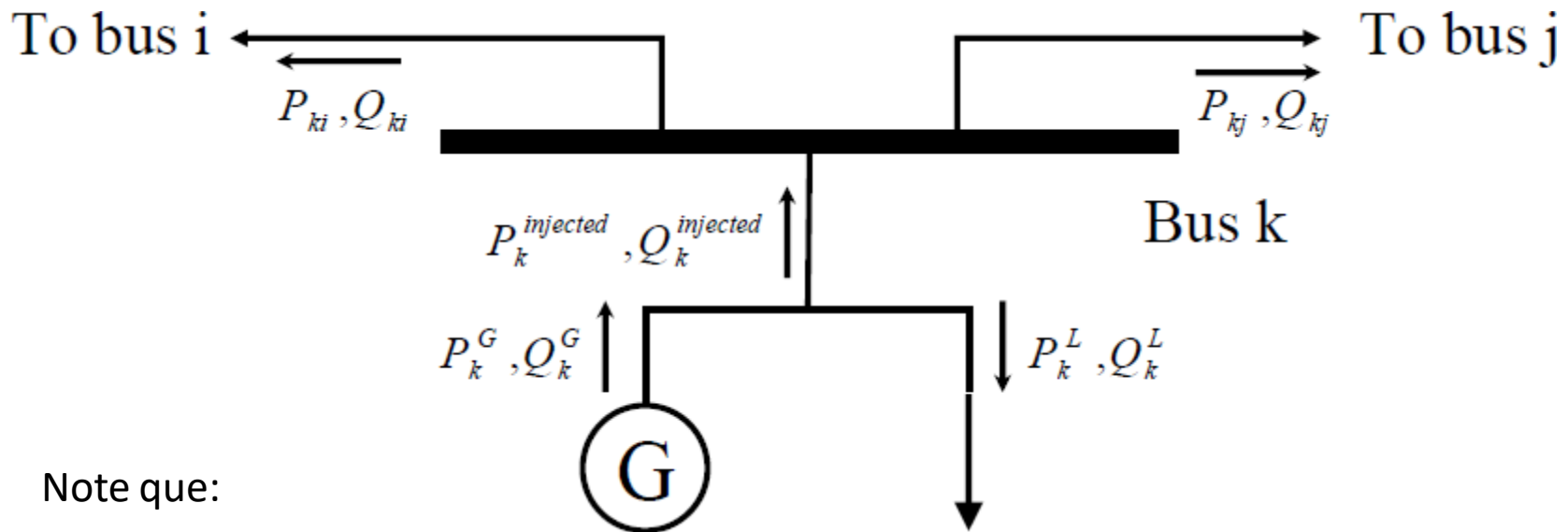
- No se modelan como fuentes de tensión o corriente.
- Típicamente Se expresa la **potencia activa producida y la tensión terminal**.
- ¿A qué se debe el hecho que se conoce P y V?

Barras

- Se calcula el **balance de potencia en cada barra k** .

Balance de potencias

Suponga un nodo genérico k con generación, carga y dos líneas conectadas. Como las potencias se conservan, podemos definir:



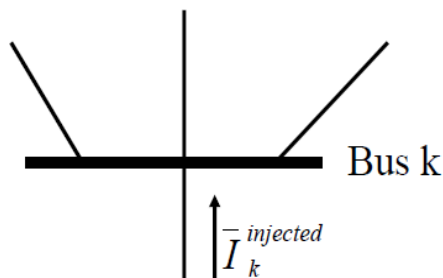
Note que:

$$P_k^{injected} = P_k^G - P_k^L = \sum_{i=1}^{N_k} P_{ki}$$

$$Q_k^{injected} = Q_k^G - Q_k^L = \sum_{i=1}^{N_k} Q_{ki}$$

- Suma de potencias que fluyen en las ramas conectadas al nodo k
- N_k es el número de barras que conectan con la barra k

Y nos podemos **apoyar en** la relación entre las tensiones y las corrientes del análisis nodal con **la matriz de admitancia**.
Suponiendo que hay **N nodos en el sistema**:



$$I^{injected} = Y V$$



Usando apenas la fila de k

$$\bar{I}_k^{injected} = \sum_{i=1}^N Y_{ki} \bar{V}_i$$

Así, calculamos la potencia inyectada con esa corriente y con la tensión nodal:

$$\bar{S}_k^{injected} = P_k^{injected} + jQ_k^{injected} = \bar{V}_k (\bar{I}_k^{injected})^* = \bar{V}_k \sum_{i=1}^N (Y_{ki} \bar{V}_i)^* = \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \bar{V}_k \bar{V}_i^*$$

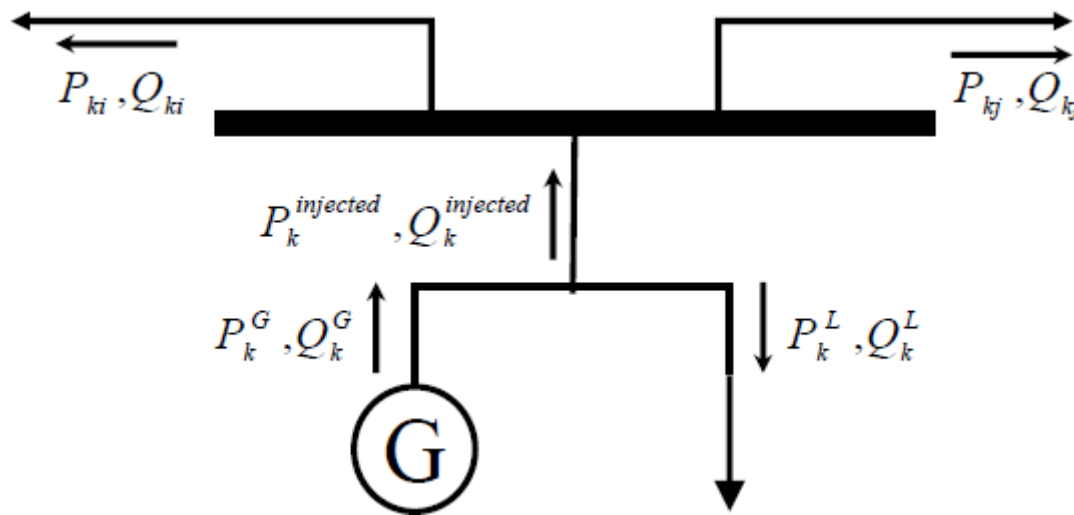
Y con las definiciones $\bar{V}_k = V_k \angle \theta_k$, $\bar{V}_i = V_i \angle \theta_i$ y $Y_{ki} = G_{ki} + jB_{ki}$, es posible expresar las potencias en forma trigonométrica:

$$\bar{S}_k^{injected} = \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \bar{V}_k \bar{V}_i^* = V_k V_i (G_{ki} - jB_{ki}) [\cos(\theta_k - \theta_i) + j \sin(\theta_k - \theta_i)]$$

Tipos de barras

Barras PQ

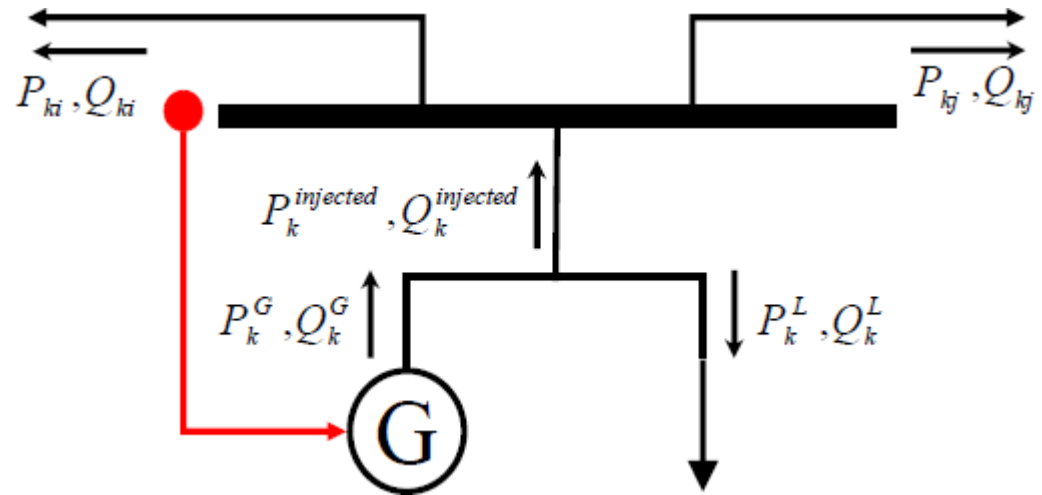
- Se conoce la potencia activa y reactiva inyectada a la barra
- No se conoce la magnitud de tensión ni el ángulo de la barra (esto saldrá del cálculo de flujo de potencia)
- Usualmente las barras de carga son tipo PQ
- Las barras de carga usualmente inyectan potencia negativa



Tipos de barras

Barras PV

- Se **conoce la potencia activa y magnitud de la tensión** (por el gobernador y AVR)
- **No se conoce la potencia reactiva ni el ángulo** de la barra (esto se calculará en el cálculo de flujo de potencia)
- Usualmente las barras de **generación** son tipo PV
- Las barras de generación usualmente **inyectan potencia positiva**



Barra **oscilante**

- **Se conoce la tensión y el ángulo** de la barra (arbitrariamente se escoge como la referencia → ángulo es 0°)
- **No se conoce la potencia activa ni reactiva** generada o consumida
- Esta barra se encarga de generar o consumir el desbalance entre generación y cargas más pérdidas en la red:

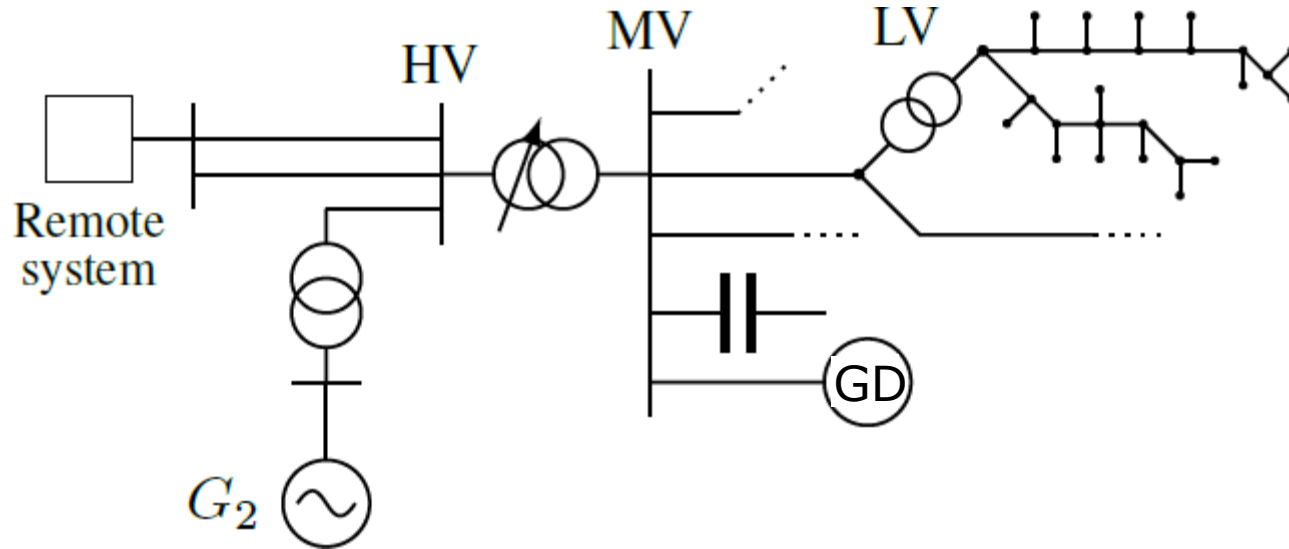
$$\Sigma S_{gen} = \Sigma S_{demás} + \Sigma Pérdidas$$

Barra **oscilante**

- Las pérdidas dependen de los flujos en las ramas, y estos flujos dependen de las tensiones que no son conocidas. Las pérdidas tampoco son conocidas antes de correr flujo de potencia.
- Usualmente se escoge una barra generadora como la barra oscilante porque la potencia activa y reactiva de ese generador puede ser ajustada por el flujo de potencia.
- **En la vida real no existe la barra oscilante.** Los operadores de la red ajustan todos los generadores para mantener el balance $\text{carga} + \text{pérdidas} = \text{generación}$. Pero en los análisis, escogen al generador más grande, por lo general el que tenga capacidad de regular frecuencia.

Generación distribuída (GD) en estudios de flujos de potencia

Si tenemos GD con capacidad suficiente para ser representada en los estudios de flujo de potencia a nivel de transmisión, ¿Qué tipo de barra debe ser definida para la barra MV?



Barra PQ

Si generadores no controlan tensión. Se modelan como potencias que restan a cargas.

Barra PV

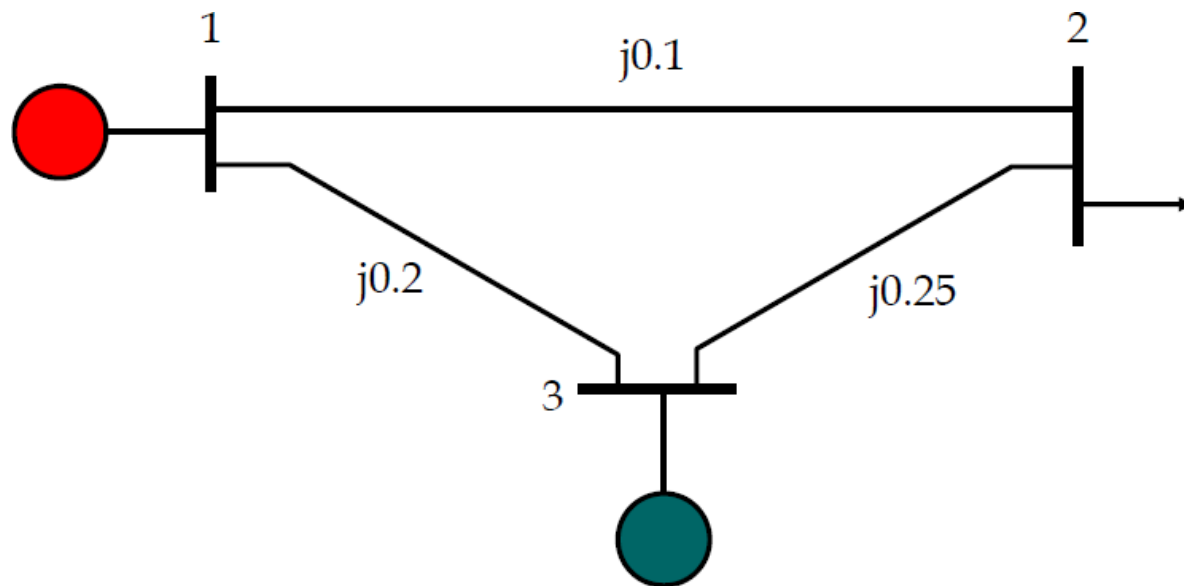
Si generadores tienen capacidad de controlar la tensión en MV.

Resumen de ecuaciones y variables

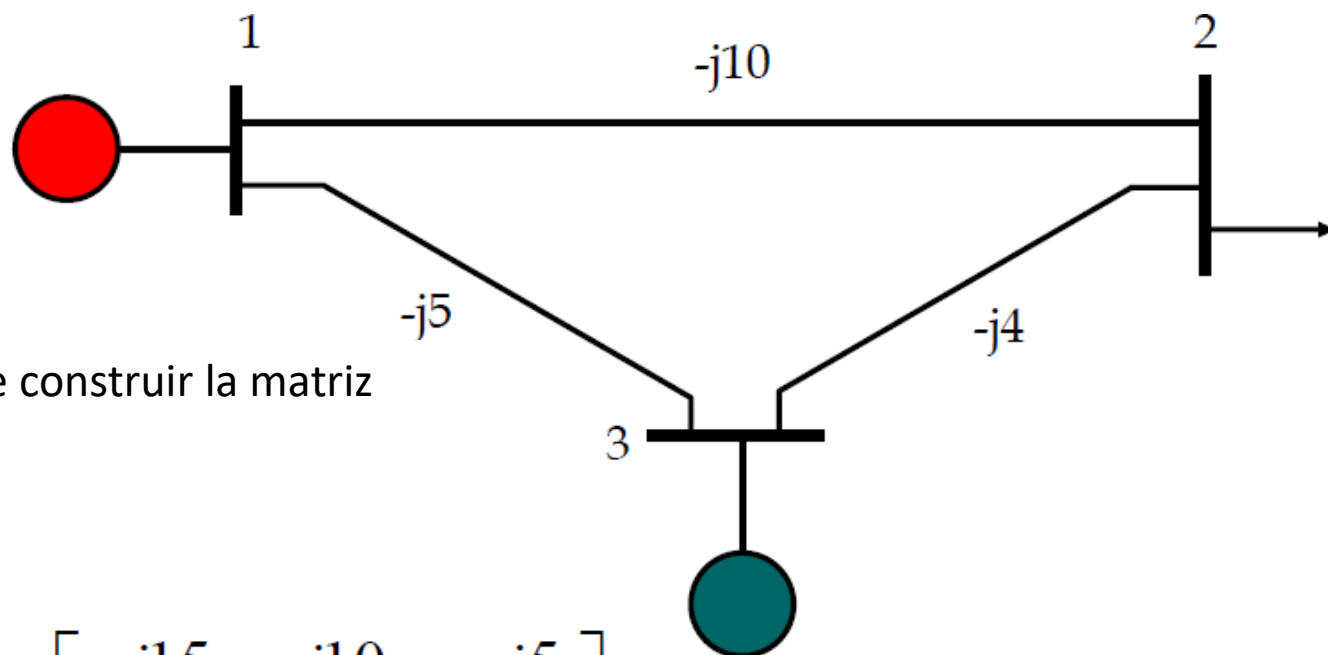
- N barras
- 2N ecuaciones (o sea, 2 en cada barra, P_{inj} y Q_{inj})
- 4N variables (P , Q , V y θ)
- 2N variables **desconocidas** (2 en cada barra)
 - V y θ en barras PQ
 - Q y θ en barras PV
 - P y Q en barra oscilante
- 2N variables **conocidas** (2 en cada barra)
 - P y Q en barras PQ
 - P y V en barras PV
 - V y θ en barra oscilante

Ejemplo

Formule las ecuaciones de flujo de potencia del sistema mostrado en la figura:



Las impedancias están dadas en p.u. en base del sistema



De la figura, se puede construir la matriz de admitancias.

$$Y = G + jB = \begin{bmatrix} -j15 & j10 & j5 \\ j10 & -j14 & j4 \\ j5 & j4 & -j9 \end{bmatrix}$$

Usando las ecuaciones genéricas:

$$\theta_{ki} = \theta_k - \theta_i$$

$$P_k = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \cos \theta_{ki} + B_{ki} \sin \theta_{ki}]$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \sin \theta_{ki} - B_{ki} \cos \theta_{ki}]$$

$$Y = G + jB = \begin{bmatrix} -j15 & j10 & j5 \\ j10 & -j14 & j4 \\ j5 & j4 & -j9 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = -15V_1V_1 \sin \theta_{11} + 10V_1V_2 \sin \theta_{12} + 5V_1V_3 \sin \theta_{13}$$

$$Q_1 = +15V_1V_1 \cos \theta_{11} - 10V_1V_2 \cos \theta_{12} - 5V_1V_3 \cos \theta_{13}$$

$$P_2 = +10V_2V_1 \sin \theta_{21} - 14V_2V_2 \sin \theta_{22} + 4V_2V_3 \sin \theta_{23}$$

$$Q_2 = -10V_2V_1 \cos \theta_{21} + 14V_2V_2 \cos \theta_{22} - 4V_2V_3 \cos \theta_{23}$$

$$P_3 = +5V_3V_1 \sin \theta_{31} + 4V_3V_2 \sin \theta_{32} - 9V_3V_3 \sin \theta_{33}$$

$$Q_3 = -5V_3V_1 \cos \theta_{31} - 4V_3V_2 \cos \theta_{32} + 9V_3V_3 \cos \theta_{33}$$

Simplificamos las ecuaciones sabiendo que:

$$\sin \theta_{11} = \sin \theta_{22} = \sin \theta_{33} = \sin 0^\circ = 0$$

$$\cos \theta_{11} = \cos \theta_{22} = \cos \theta_{33} = \cos 0^\circ = 1$$

Entonces:

$$P_1 = +10V_1 V_2 \sin \theta_{12} + 5V_1 V_3 \sin \theta_{13}$$

$$Q_1 = +15V_1^2 - 10V_1 V_2 \cos \theta_{12} - 5V_1 V_3 \cos \theta_{13}$$

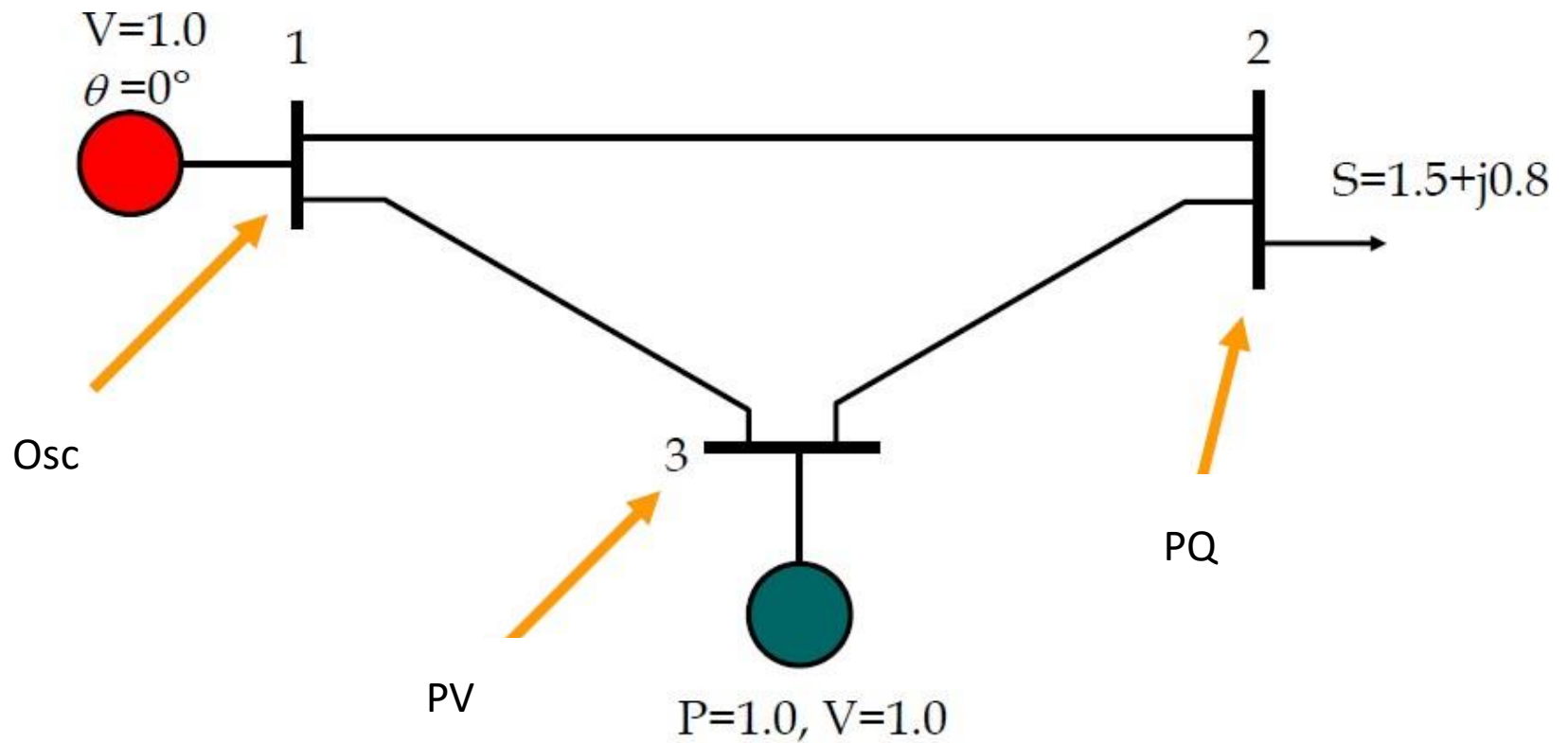
$$P_2 = +10V_2 V_1 \sin \theta_{21} + 4V_2 V_3 \sin \theta_{23}$$

$$Q_2 = -10V_2 V_1 \cos \theta_{21} + 14V_2^2 - 4V_2 V_3 \cos \theta_{23}$$

$$P_3 = +5V_3 V_1 \sin \theta_{31} + 4V_3 V_2 \sin \theta_{32}$$

$$Q_3 = -5V_3 V_1 \cos \theta_{31} - 4V_3 V_2 \cos \theta_{32} + 9V_3^2$$

Ahora debemos asignar el tipo a las barras:



Y con el conocimiento del tipo de barra, se puede incluir la información del punto de operación en las ecuaciones. Así, separamos las ecuaciones en:

- Ecuaciones implícitas (aquellas que conocemos potencia inyectada)

$$P_2 = +10V_2V_1 \sin \theta_{21} + 4V_2V_3 \sin \theta_{23} \quad \Rightarrow \quad \text{P de barra PQ}$$

$$Q_2 = -10V_2V_1 \cos \theta_{21} + 14V_2^2 - 4V_2V_3 \cos \theta_{23} \quad \Rightarrow \quad \text{Q de barra PQ}$$

$$P_3 = +5V_3V_1 \sin \theta_{31} + 4V_3V_2 \sin \theta_{32} \quad \Rightarrow \quad \text{P de barra PV}$$

- Ecuaciones explícitas (donde no conocemos las inyecciones de potencia)

$$P_1 = +10V_1V_2 \sin \theta_{12} + 5V_1V_3 \sin \theta_{13} \quad \Rightarrow \quad \text{P de barra oscilante}$$

$$Q_1 = +15V_1^2 - 10V_1V_2 \cos \theta_{12} - 5V_1V_3 \cos \theta_{13} \quad \Rightarrow \quad \text{Q de barra oscilante}$$

$$Q_3 = -5V_3V_1 \cos \theta_{31} - 4V_3V_2 \cos \theta_{32} + 9V_3^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Q de barra PV}$$

Ecuaciones implícitas

Variables conocidas: $P_2, Q_2, P_3, V_1, V_3, \theta_1$

Variables desconocidas: V_2, θ_2, θ_3

$$-1.5 = +10V_2 \sin \theta_{21} + 4V_2 \sin \theta_{23}$$

$$-0.8 = -10V_2 \cos \theta_{21} + 14V_2^2 - 4V_2 \cos \theta_{23}$$

$$1.0 = +5 \sin \theta_{31} + 4V_2 \sin \theta_{32}$$

3 ecuaciones y 3 incógnitas. Note que las potencias de las ecuaciones explícitas se pueden obtener una vez que se calculen V_2, θ_2, θ_3

¿Cómo se resuelve este sistema de ecuaciones no lineales?

Método de Newton

También conocido como el *Newton-Raphson* es un método numérico que encuentra, iterativamente, aproximaciones de los ceros de una función $f(x)$.

En otras palabras, determina x tal que $f(x) = 0$. El método necesita que se pueda evaluar $f(x)$ y $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ para cualquier valor de x .

Aproximando $f(x)$ mediante series de Taylor, alrededor de un punto x^0 , y truncando en la primera derivada, se obtiene:

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2}f''(x^0)(x - x^0)^2 + \dots$$

$$f(x) \approx f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$$

Entonces x es una solución de $f(x)=0$, si:

$$f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) = 0$$

$$x = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$$

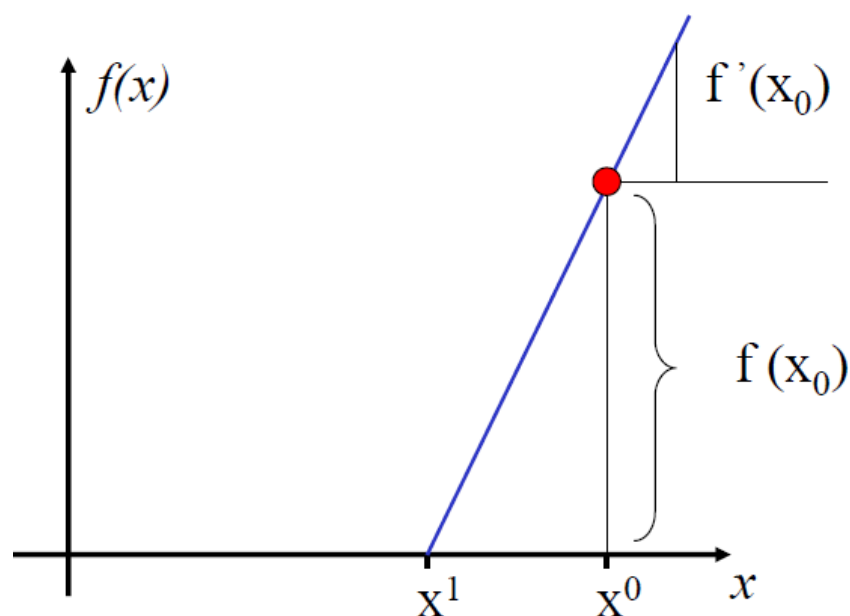
Sin embargo, dado que truncamos la expansión de Taylor, debemos usar un método iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

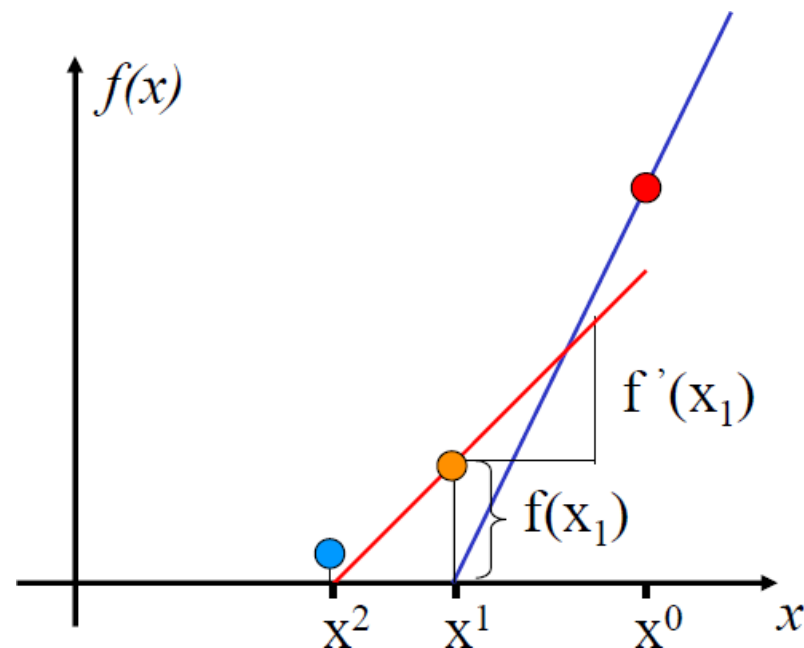
Si el valor inicial de x se encuentra lejos de la solución, el método puede divergir o encontrar una solución local, o errónea.

Gráficamente, observe como sucesivamente nos aproximamos al 0 con cada iteración:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$



Iteración 1



Iteración 2

Método de Newton multivariable

Considere el caso que tiene 2 ecuaciones y 2 incógnitas. Determine x y y tal que:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Expresamos las funciones mediante series de Taylor:

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x^0, y^0) + \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial x}(x - x^0) + \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial y}(y - y^0) + \dots \\ g(x, y) = g(x^0, y^0) + \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial x}(x - x^0) + \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial y}(y - y^0) + \dots \end{cases}$$

Truncamos las series de orden superior a 1, y definimos:

$$\begin{cases} x - x^0 = \Delta x \\ y - y^0 = \Delta y \end{cases}$$

Aproximamos las funciones como:

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x^0, y^0) + \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial y} \Delta y \\ g(x, y) = g(x^0, y^0) + \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial y} \Delta y \end{cases}$$

Si x y y son soluciones, debemos tener que:

$$\begin{cases} f(x^0, y^0) + \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial y} \Delta y = 0 \\ g(x^0, y^0) + \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial y} \Delta y = 0 \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x^0, y^0) \\ g(x^0, y^0) \end{pmatrix}$$

Así, surge el Jacobiano:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^0, y^0)}{\partial y} \end{pmatrix}}_{=J(x_0, y_0)} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x^0, y^0) \\ g(x^0, y^0) \end{pmatrix}$$

Matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -J^{-1}(x^0, y^0) \begin{bmatrix} f(x^0, y^0) \\ g(x^0, y^0) \end{bmatrix}$$

Se obtiene $\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ y se repite el procedimiento hasta que:

$$\max \left(\begin{vmatrix} f(x^k, y^k) \\ g(x^k, y^k) \end{vmatrix} \right) \leq \varepsilon$$

Tolerancia o error máximo

Ejemplo

Resuelva mediante el método de Newton, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y) \equiv x + y - 15 = 0 \\ g(x, y) \equiv x \cdot y - 50 = 0 \end{cases}$$

Inicie con los valores $x^0 = 4$, $y^0 = 9$:

Solución:

Calculamos el Jacobiano:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Iteración #1:

$$x^0 = 4 ; y^0 = 9$$

$$\begin{cases} f(x^0, y^0) \equiv x^0 + y^0 - 15 = -2 \\ g(x^0, y^0) \equiv x^0 \cdot y^0 - 50 = -14 \end{cases}$$

$$\mathbf{J}(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{J}^{-1}(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.2 \\ 1.8 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}(x^0, y^0) \begin{pmatrix} f(x^0, y^0) \\ g(x^0, y^0) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -0.8 & 0.2 \\ 1.8 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5.2 \\ 9.8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iteración #2:

$$x^1 = 5.2 ; y^1 = 9.8$$

$$\begin{cases} f(x^1, y^1) \equiv x^1 + y^1 - 15 = 0 \\ g(x^1, y^1) \equiv x^1 \cdot y^1 - 50 = 0.96 \end{cases}$$

$$J(x^1, y^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9.8 & 5.2 \end{pmatrix} \longrightarrow J^{-1}(x^1, y^1) = \begin{pmatrix} -1.13 & 0.217 \\ 2.13 & -0.217 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} &= -J^{-1}(x^1, y^1) \begin{pmatrix} f(x^1, y^1) \\ g(x^1, y^1) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -1.13 & 0.217 \\ 2.13 & -0.217 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.209 \\ 0.209 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5.2 \\ 9.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.209 \\ 0.209 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4.991 \\ 10.009 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iteración #3:

$$x^2 = 4.991 ; y^2 = 10.009$$

$$\begin{cases} f(x^2, y^2) \equiv x^2 + y^2 - 15 = 0 \\ g(x^2, y^2) \equiv x^2 \cdot y^2 - 50 = -0.045 \end{cases}$$

$$J(x^2, y^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10.009 & 4.991 \end{pmatrix} \longrightarrow J^{-1}(x^2, y^2) = \begin{pmatrix} -0.995 & 0.1993 \\ 1.995 & -0.199 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} &= -J^{-1}(x^2, y^2) \begin{pmatrix} f(x^2, y^2) \\ g(x^2, y^2) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -0.995 & 0.1993 \\ 1.995 & -0.199 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0.045 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.009 \\ -0.009 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4.991 \\ 10.009 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.009 \\ -0.009 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iteración #4:

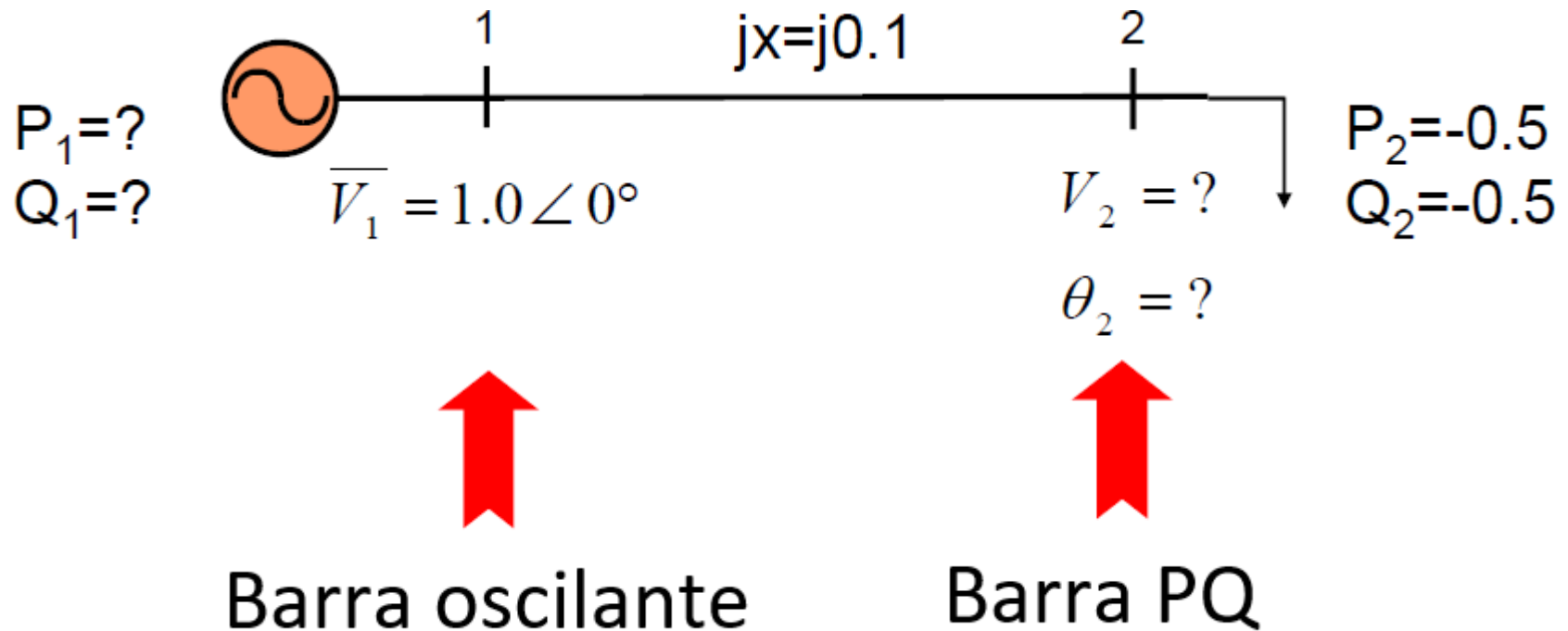
$$x^3 = 5.0 ; y^3 = 10.0$$

$$\begin{cases} f(x^3, y^3) \equiv x^3 + y^3 - 15 = 0 \\ g(x^3, y^3) \equiv x^3 \cdot y^3 - 50 = 0 \end{cases}$$

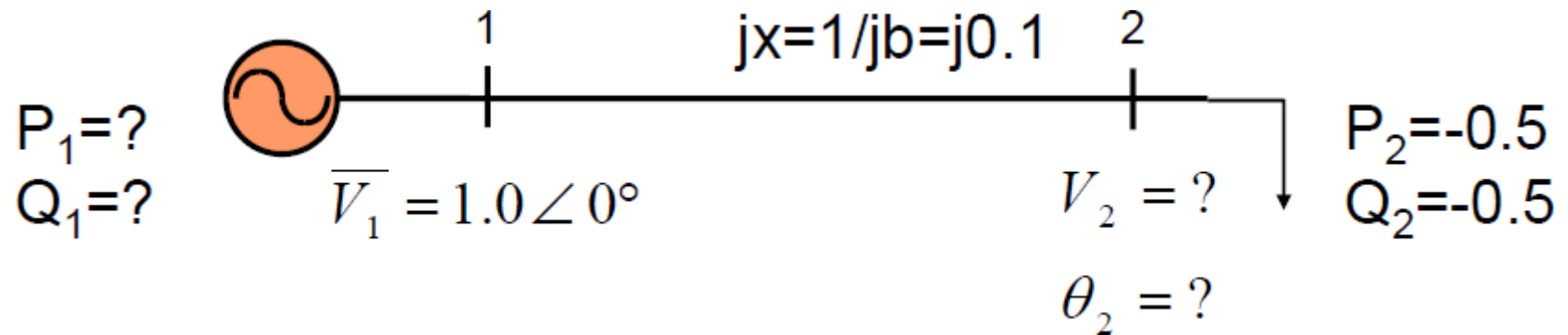
Aquí termina el procedimiento iterativo porque encontramos una solución. En casos generales no logramos 0 pero el método termina cuando los cambios son menores a la tolerancia ϵ que definamos.

NR para solución de flujos de potencia

Ejemplo: Considere el sistema de 2 barras



Seguimos el mismo procedimiento que anteriormente para plantear el sistema de ecuaciones para la solución:



$$P_k = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \cos \theta_{ki} + B_{ki} \sin \theta_{ki}]$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \sin \theta_{ki} - B_{ki} \cos \theta_{ki}]$$

$$Y = G + jB = j \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$P_k = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \cos \theta_{ki} + B_{ki} \sin \theta_{ki}]$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \sin \theta_{ki} - B_{ki} \cos \theta_{ki}]$$

Ecuaciones implícitas:

$$P_2 = -bV_1V_2\sin(\theta_2)$$

$$Q_2 = -bV_2^2 + bV_1V_2\cos(\theta_2)$$

Ecuaciones explícitas:

$$P_1 = -bV_1V_2\sin(-\theta_2)$$

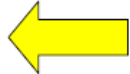
$$Q_1 = -bV_1^2 + bV_1V_2\cos(\theta_2)$$

Reacomodamos las ecuaciones implícitas (se excluye índice 2 por simplicidad):

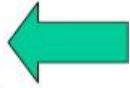
$$\begin{cases} P(\theta, V) \equiv 10V \sin \theta + 0.5 = 0 \\ Q(\theta, V) \equiv 10V^2 - 10V \cos \theta + 0.5 = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(\theta, V)}{\partial \theta} & \frac{\partial P(\theta, V)}{\partial V} \\ \frac{\partial Q(\theta, V)}{\partial \theta} & \frac{\partial Q(\theta, V)}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10V \cos \theta & 10 \sin \theta \\ 10V \sin \theta & 20V - 10 \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = -J^{-1} \begin{pmatrix} P(\theta^0, V^0) \\ Q(\theta^0, V^0) \end{pmatrix}$$

- Primera iteración: $\begin{cases} \theta^0 = 0.0 \\ V^0 = 1.0 \end{cases}$  "Flat Start"

Se revisa el *mismatch* con las variables dadas:

$$\begin{cases} P(\theta^0, V^0) \equiv 10V^0 \sin \theta^0 + 0.5 = 0.5 \\ Q(\theta^0, V^0) \equiv 10V^{0^2} - 10V^0 \cos \theta^0 + 0.5 = 0.5 \end{cases}$$


$$J = \begin{pmatrix} 10V^0 \cos \theta^0 & 10 \sin \theta^0 \\ 10V^0 \sin \theta^0 & 20V^0 - 10 \cos \theta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = -J^{-1} \begin{pmatrix} P(\theta^0, V^0) \\ Q(\theta^0, V^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.05 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \theta^1 \\ V^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ V^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.95 \end{pmatrix}$$

- 2da iteración:
$$\begin{cases} \theta^1 = -0.05 \\ V^1 = 0.95 \end{cases}$$

Se revisa el *mismatch* con las variables dadas:

$$\begin{cases} P(\theta^1, V^1) \equiv 10 V^1 \sin \theta^1 + 0.5 = 0.0252 \\ Q(\theta^1, V^1) \equiv 10 (V^1)^2 - 10 V^1 \cos \theta^1 + 0.5 = 0.0369 \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 9.488 & -0.4998 \\ -0.4748 & 9.5119 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = -J^{-1} \begin{pmatrix} P(\theta^1, V^1) \\ Q(\theta^1, V^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00287 \\ -0.00369 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \theta^2 \\ V^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ V^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0529 \\ 0.9460 \end{pmatrix}$$

- 3ra iteración: $\begin{cases} \theta^2 = -0.0529 \\ V^2 = 0.9460 \end{cases}$

Se revisa el *mismatch* con las variables dadas:

$$\begin{cases} P(\theta^2, V^2) \equiv 10V^2 \sin \theta^2 + 0.5 = 0.00011 \\ Q(\theta^2, V^2) \equiv 10(V^2)^2 - 10V^2 \cos \theta^2 + 0.5 = 0.0022 \end{cases}$$



Casi suficiente
para parar!

$$J = \begin{pmatrix} 9.4466 & -0.5284 \\ -0.4999 & 9.4730 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = -J^{-1} \begin{pmatrix} P(\theta^2, V^2) \\ Q(\theta^2, V^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00003 \\ -0.0002 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \theta^3 \\ V^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^2 \\ V^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.052893 \\ 0.94575 \end{pmatrix}$$

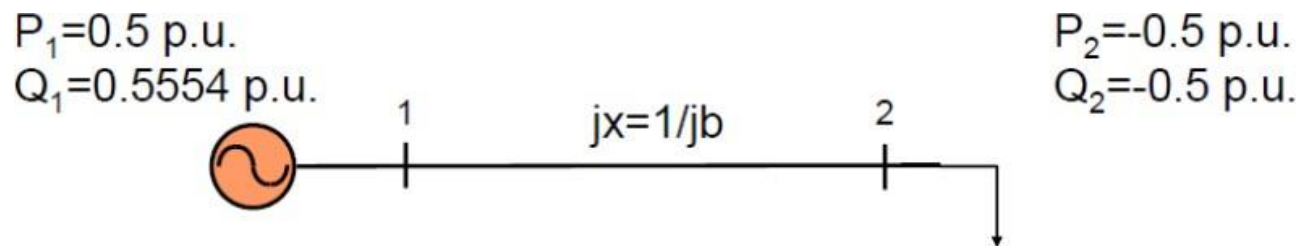
Después de una iteración más:

$$\begin{cases} \theta_2 = -0.0529 \text{ rad} = -3.03^\circ \\ V_2 = 0.9457 \text{ p.u.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = -b \cdot V_1 V_2 \cdot \sin(-\theta_2) = 0.5 \\ Q_1 = -b \cdot V_1^2 + b \cdot V_1 V_2 \cos \theta_2 = 0.5554 \end{cases}$$



Ecuaciones explícitas



Generalización a N barras

$$P_k^{injected} = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \cos \theta_{ki} + B_{ki} \sin \theta_{ki}]$$

$$Q_k^{injected} = \sum_{i=1}^N V_k V_i [G_{ki} \sin \theta_{ki} - B_{ki} \cos \theta_{ki}]$$



$$\left\{ \begin{array}{l} P_2 (\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) = 0 \\ \vdots \\ P_N (\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Una ecuación P para barras PQ y PV}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{k+1} (\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) = 0 \\ \vdots \\ Q_N (\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Una ecuación Q para barras PQ}$$

Matriz Jacobiana

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_N} & \frac{\partial P_2}{\partial V_{k+1}} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial V_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial P_N}{\partial V_{k+1}} & \dots & \frac{\partial P_N}{\partial V_N} \\ \hline \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial \theta_N} & \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial V_{k+1}} & \dots & \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial V_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_N}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial Q_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial Q_N}{\partial V_{k+1}} & \dots & \frac{\partial Q_N}{\partial V_N} \end{array} \right]$$

(barra 1 oscilante, hay N barras en el sistema y k barras tipo "V")

Matriz Jacobiana

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -V_i \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i^2 B_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = V_i \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - V_i^2 G_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = -V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + V_i G_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i B_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

Método iterativo

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_N \\ \Delta V_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta V_N \end{pmatrix} = -J^{-1} \begin{pmatrix} P_2(\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) \\ \vdots \\ P_N(\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) \\ Q_{k+1}(\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) \\ \vdots \\ Q_N(\theta_2, \dots, \theta_N, V_{k+1}, \dots, V_N) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \theta_N^{(k+1)} \\ V_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ V_N^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2^{(k)} \\ \vdots \\ \theta_N^{(k)} \\ V_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ V_N^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_N \\ \Delta V_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta V_N \end{pmatrix}$$

Método iterativo


De manera compacta, el método NR es:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad [\mathbf{f}_{\mathbf{x}}]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad i, j = 1, \dots, n$$

A partir de un valor inicial $\mathbf{x}^{(0)}$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Hasta que:


$$\max_i |f_i(\mathbf{x}^{(k+1)})| < \epsilon$$

En la práctica la matriz Jacobiana no se invierte.

Método Newton Raphson

En la práctica, y para efectos de eficiencia en cálculos, la matriz Jacobiana no se invierte, sino que se resuelve el sistema lineal:

$$\mathbf{f}_x(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Para ello, se factoriza la matriz Jacobiana:

$$\mathbf{f}_X = \mathbf{LU}$$

Si \mathbf{f}_X fuera una matriz de 3x3, entonces:

$$\mathbf{f}_X = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Método Newton Raphson

Entonces en cada iteración (k) debemos resolver:

$$\mathbf{LU}\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}$$

Paso 1: Se resuelve para \mathbf{y} , con $\mathbf{y} = \mathbf{U}\Delta\mathbf{x}$:

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = -\mathbf{f} \quad \leftarrow$$

Use *solver* de sistema de ecuaciones lineales (sel)

Paso 2: se resuelve para $\Delta\mathbf{x}$:

$$\mathbf{U} \Delta\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \leftarrow$$

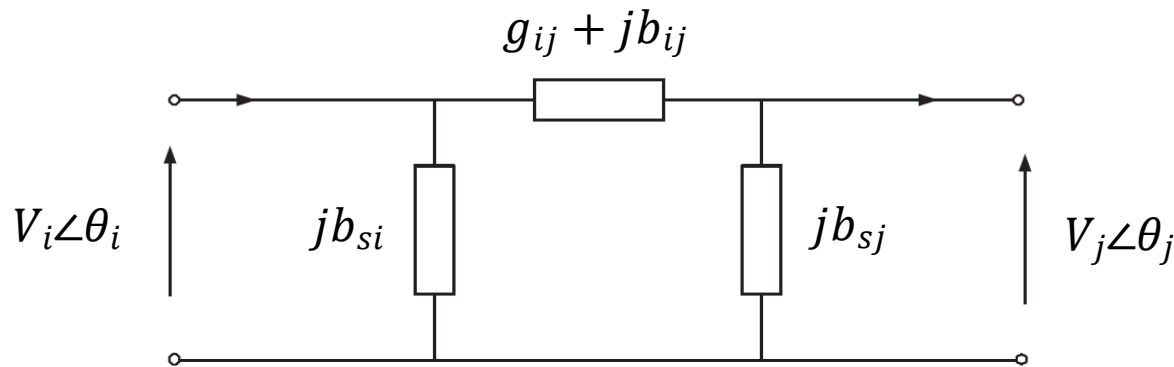
Use *solver* de sel

Finalmente:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}$$

Cálculo de flujos en líneas

Si se utiliza el modelo pi de la línea **en admitancias**:

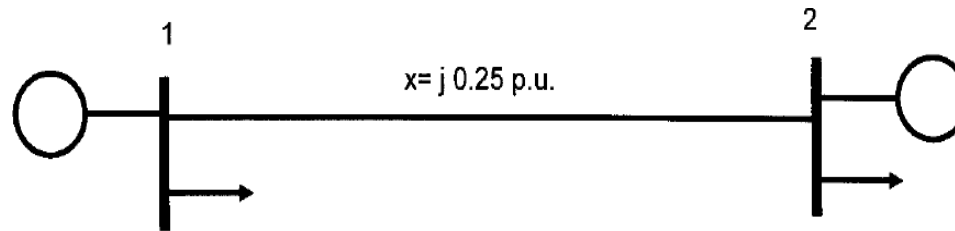


Las expresiones de flujos de potencia activa y reactiva desde la barra i hasta la barra j son:

$$P_{ij} = g_{ij}V^2 - V_iV_j(g_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + b_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j))$$

$$Q_{ij} = -(b_{ij} + b_{si})V^2 - V_iV_j(g_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - b_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j))$$

Ejemplo



La reactancia de la línea está dada en base de 100 MVA. La carga conectada en la barra 2 es de 80 MW a factor de potencia 0.85 en atraso y el generador en la misma barra produce 20 MW y 15 MVAR. La carga conectada en la barra 1 es de 100 MW a factor de potencia 0.9 en atraso. El generador conectado en la barra 1 mantiene su tensión terminal a 1 pu.

- Calcule la potencia neta (activa y reactiva) demandada en la barra 2
- Identifique las barras como tipo PQ, PV u oscilante
- Escriba las ecuaciones de potencia y clasifique ecuaciones implícitas y explícitas
- Calcule la matriz Jacobiana para el sistema en iteración 0 (flat start)
- Utilice Newton Raphson para calcular la tensión en la barra 2 así como la potencia activa y reactiva generada por el generador en barra 1.
- Determine las pérdidas activas y reactivas en la línea de transmisión

Nota: Para el uso de Newton Raphson, utilice condiciones *flat start* al inicio del proceso iterativo y deténgase cuando el máximo *mismatch* de potencia es menor a 0.02 pu (base de 100 MVA). No realice más de 3 iteraciones.