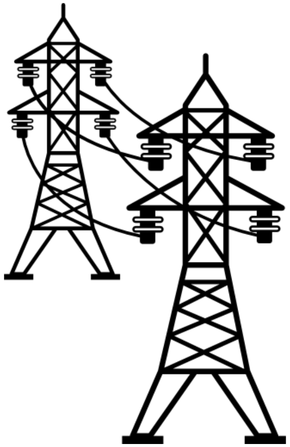
EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica



IE-0469 Sistemas de Potencia I

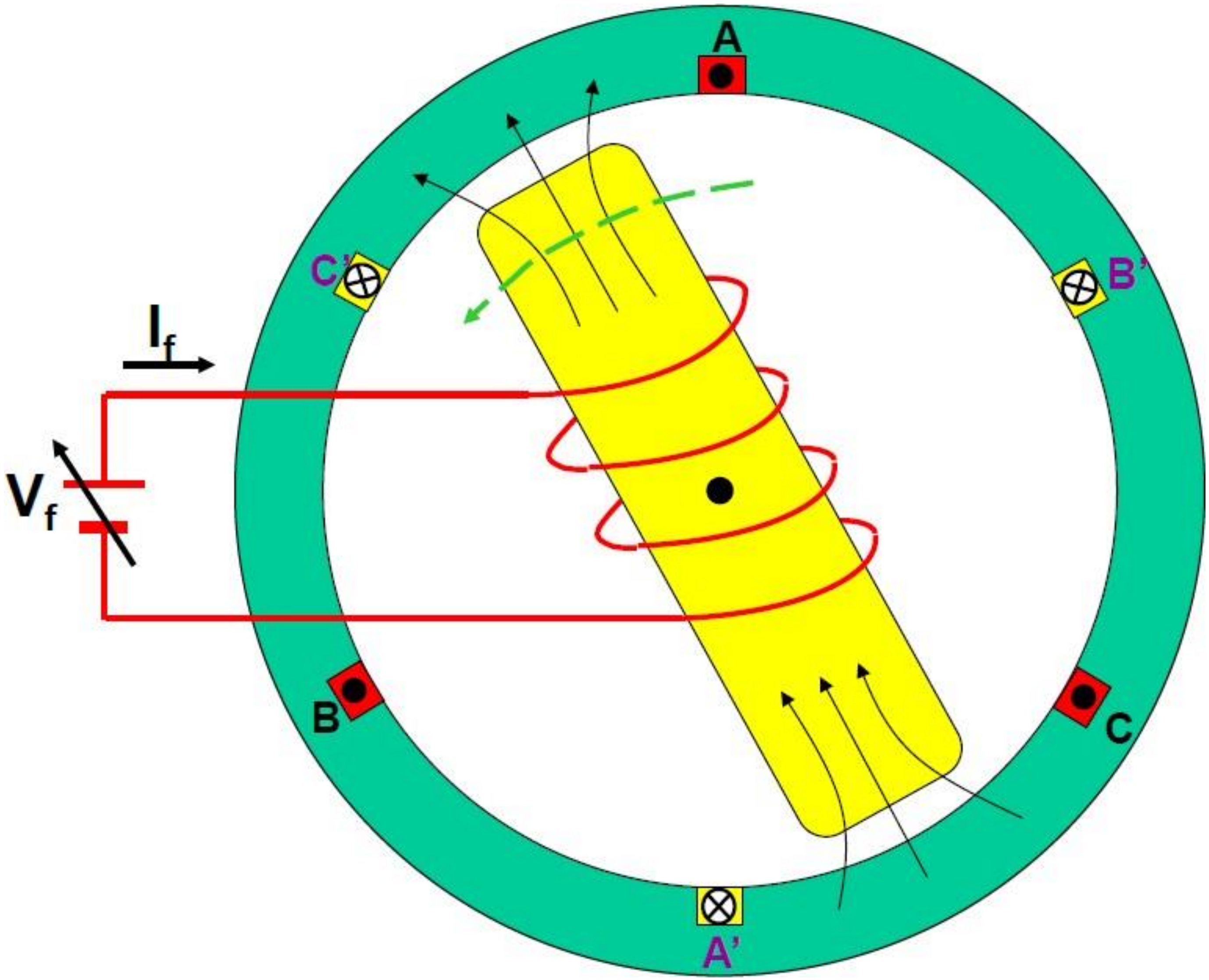
Presentación #8:
Máquina sincrónica

Dr. Andrés Argüello Guillén

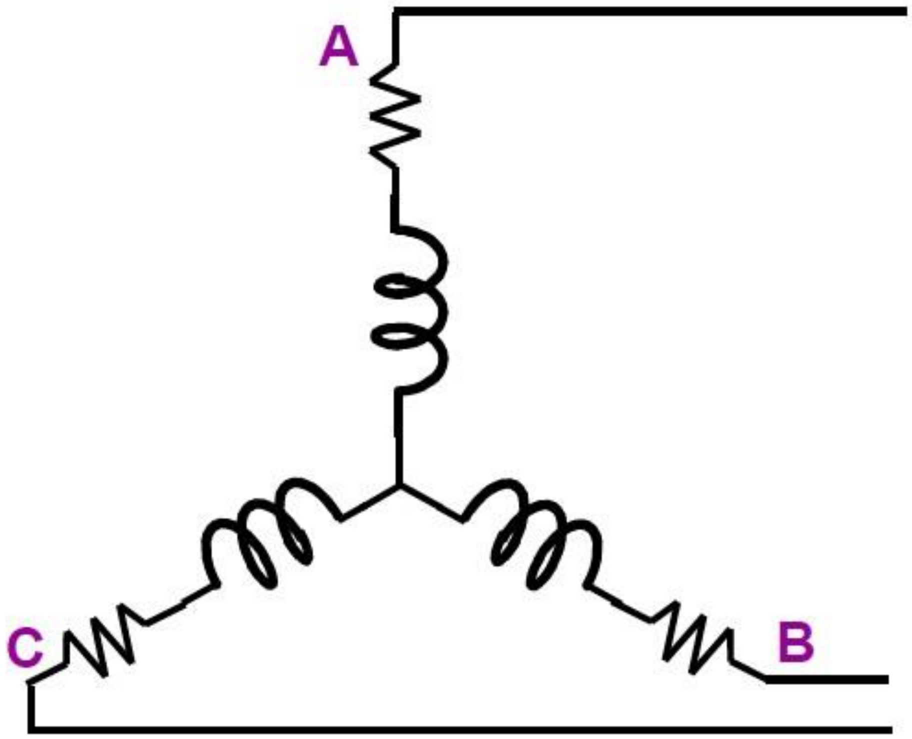
andres.arguelloguillen@ucr.ac.cr

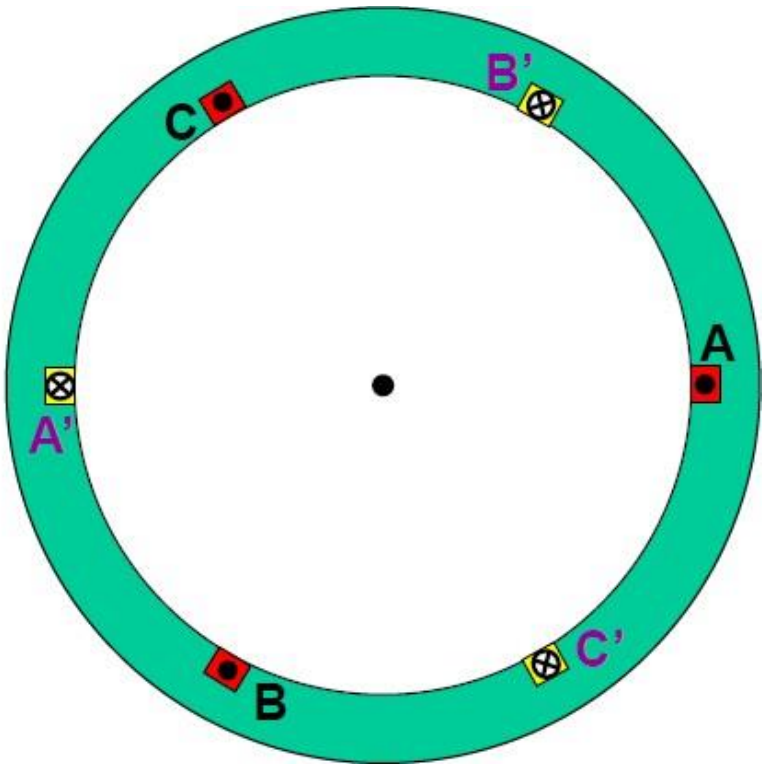
Modelado y Simulación de la Máquina Sincrónica

Devanado de campo

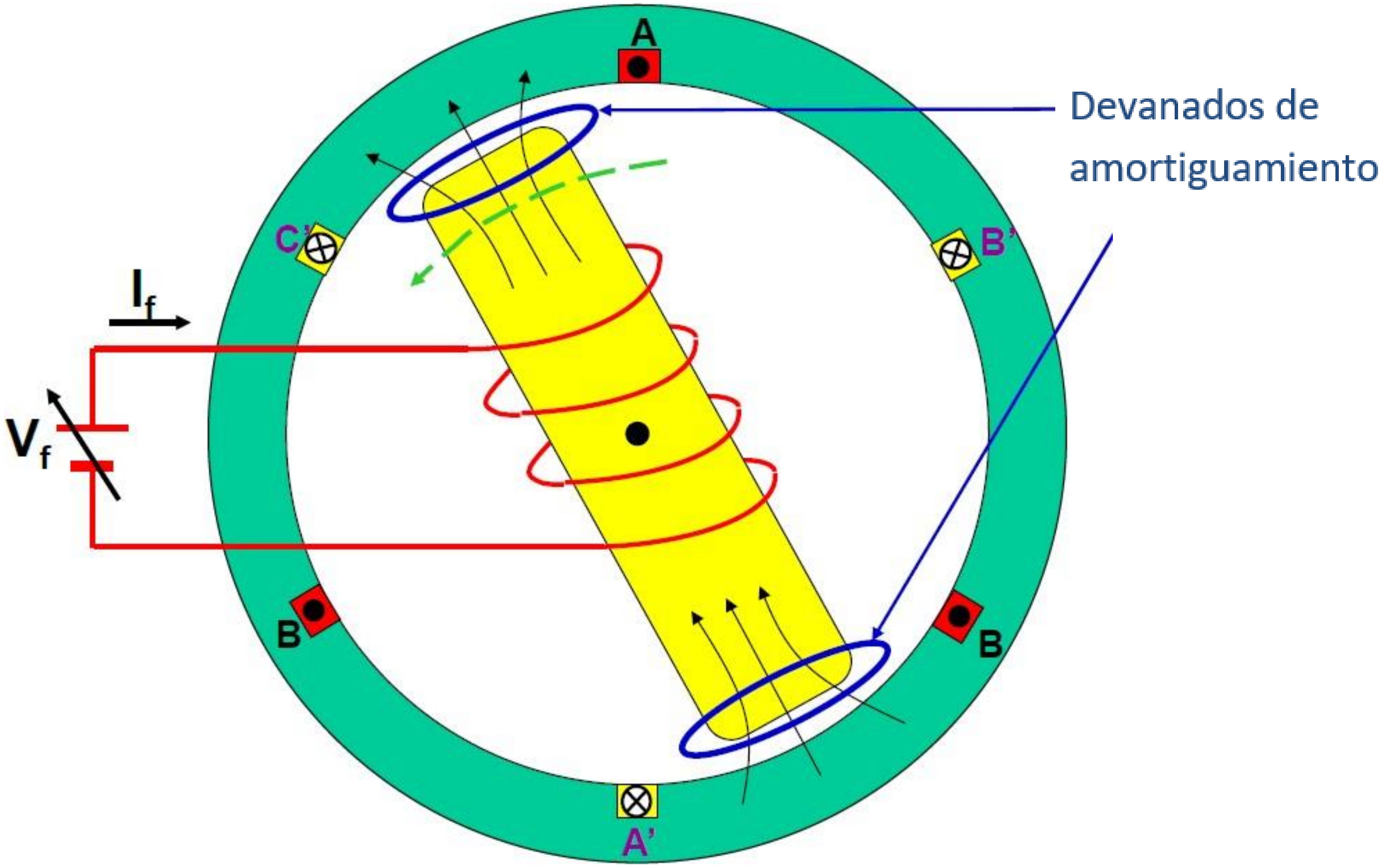


Devanados de estator



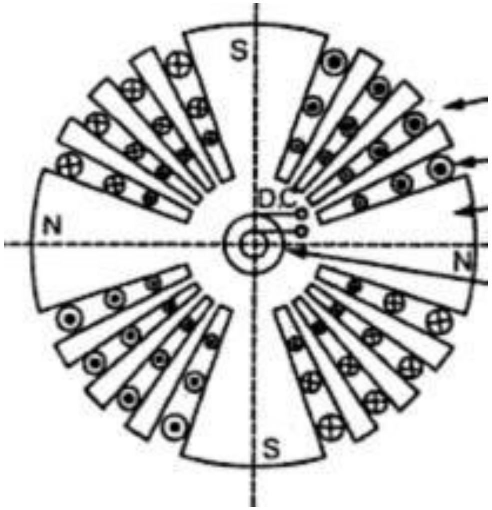


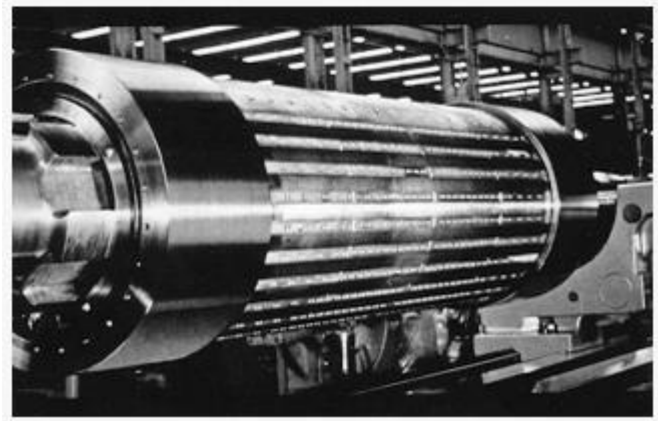
Devanados de amortiguamiento



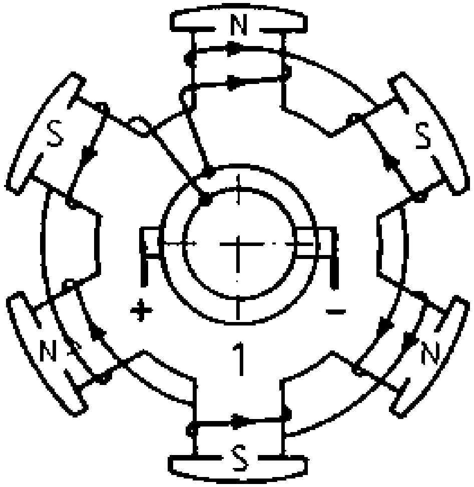
Tipos de rotores:

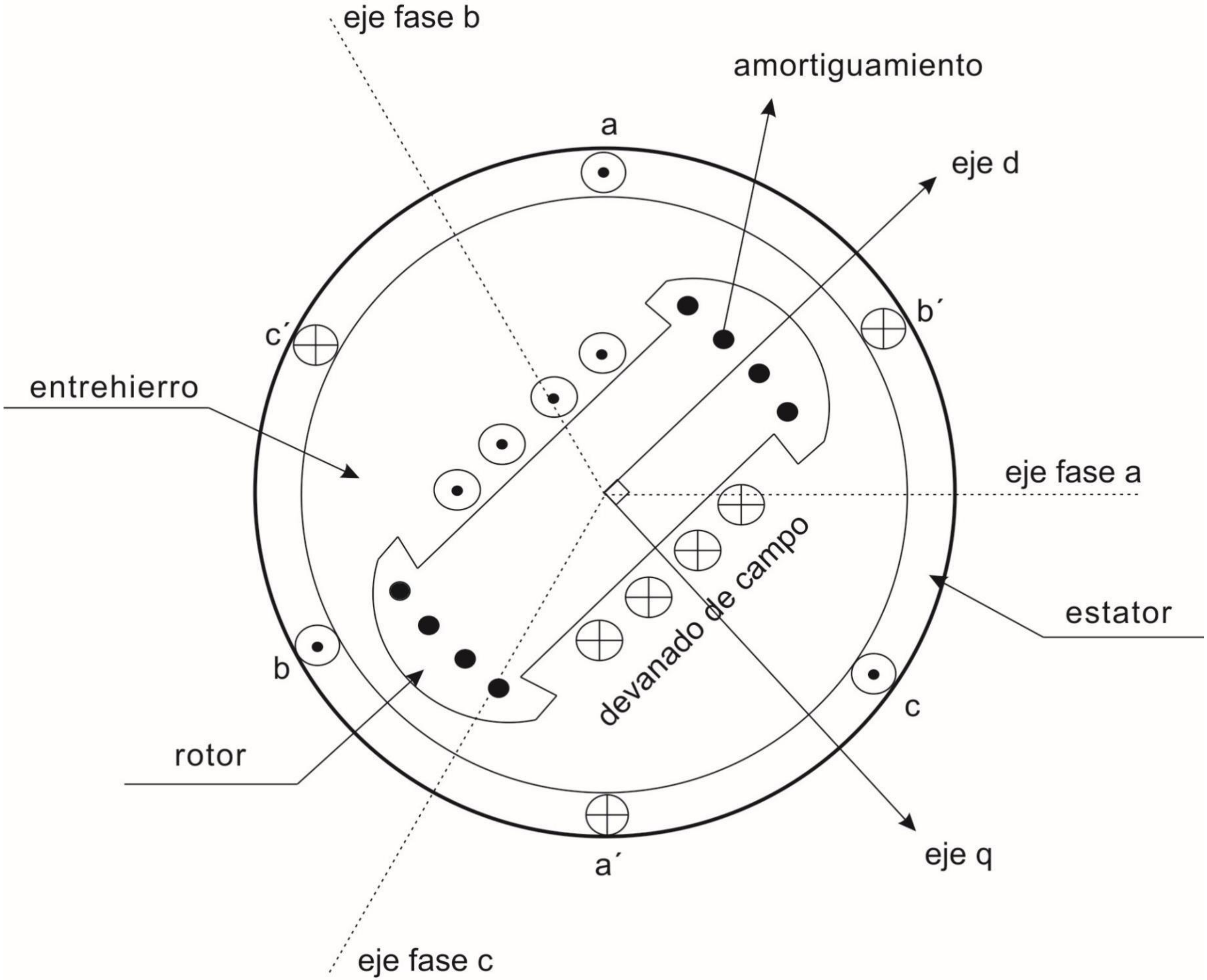
Rotor de polos lisos (cilíndrico)





Rotor de polos salientes




eje fase b
amortiguamiento
a
eje d
b´
c´
entrehierro
eje fase a
devanado de campo
estator
b
c
rotor
a´
eje q
eje fase c

Suposiciones para modelo matemático

- Se adopta corrientes positivas cuando salen del devanado del estator y corrientes positivas cuando entran a los devanados del rotor
- Los devanados del rotor están localizados sobre el eje directo "d", y cuadratura "q" (90° atrás). El eje directo coincide con el eje de campo. *En algunos libros ubican eje q 90° adelante, cuestión de gustos.*
- Para rotor de polos lisos se consideran tres devanados de amortiguamiento: d1, q1 y un tercero que representa corrientes parásitas (q2)
- Para rotor de polos salientes sólo se consideran dos devanados de amortiguamiento (d1 y q1)
- Los devanados de amortiguamiento están cortocircuitados y sus corrientes son cero en régimen permanente.

Suposiciones para modelo matemático

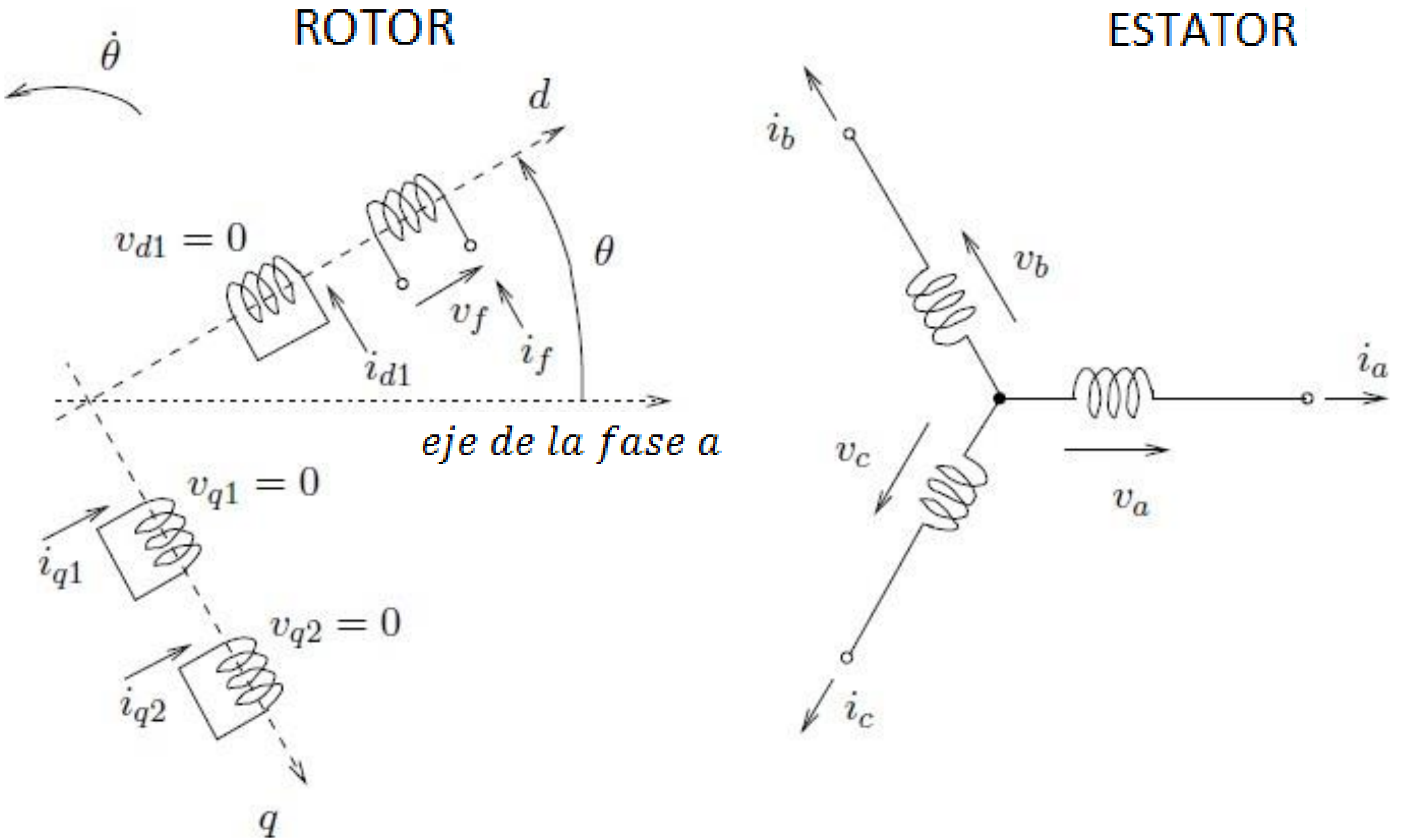
- Dos devanados con ejes perpendiculares no están acoplados magnéticamente
- Los efectos de saturación se ignoran inicialmente (luego se amplía el modelo para tomar en cuenta este efecto)
- El giro del rotor se representa por el ángulo eléctrico θ entre el eje directo y el eje de la fase a (en el estator)
- Cuando la máquina rota a la velocidad nominal, se tiene:

$$\theta = \omega_N t + \theta_0$$

$$\omega_N = \omega_s = 2\pi f_N$$

θ_0 es la posición angular del rotor cuando $t = 0$.

Suposiciones para modelo matemático



Modelo Máquina Sincrónica

$$
\begin{aligned}
v_a(t) &= -R_a i_a(t) - \frac{d\psi_a}{dt} \\
v_b(t) &= -R_a i_b(t) - \frac{d\psi_b}{dt} \\
v_c(t) &= -R_a i_c(t) - \frac{d\psi_c}{dt}
\end{aligned}
$$

R_a es la resistencia de armadura y se supone igual para las tres fases

ψ es el flujo concatenado de la fase respectiva

Y en forma compacta:

$$\mathbf{v}_T = -\mathbf{R}_T \mathbf{i}_T - \frac{d}{dt}\psi_T$$

donde $\mathbf{R}_T = \mathrm{diag}(R_a\ R_a\ R_a).$

Modelo Máquina Sincrónica

$$v_f(t) = R_f i_f(t) + \frac{d\psi_f}{dt}$$

devanado de campo

$$0 = R_{d1} i_{d1}(t) + \frac{d\psi_{d1}}{dt}$$

devanado de amortiguamiento en eje d

$$0 = R_{q1} i_{q1}(t) + \frac{d\psi_{q1}}{dt}$$

1er devanado de amortiguamiento en eje q

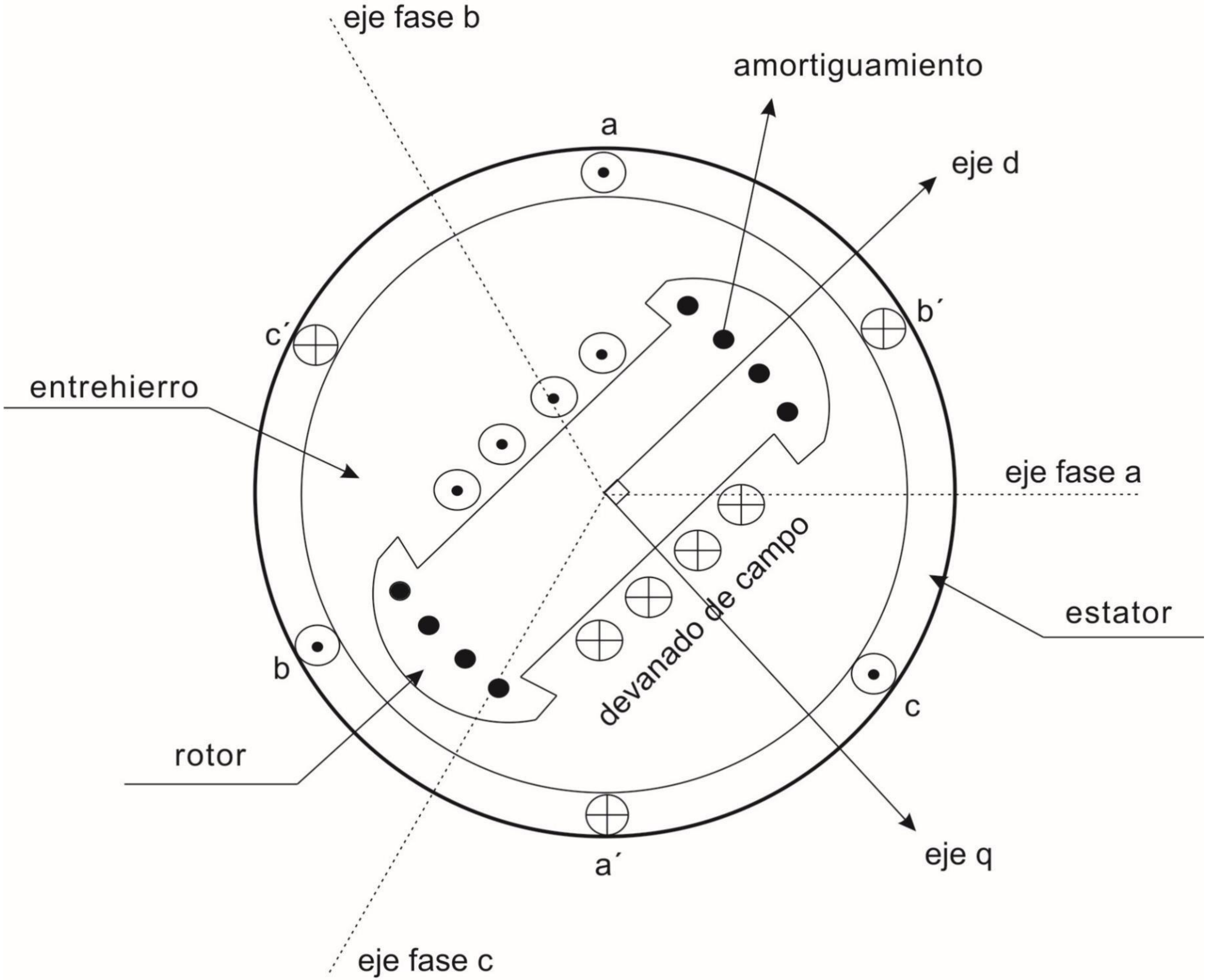
$$0 = R_{q2} i_{q2}(t) + \frac{d\psi_{q2}}{dt}$$

2do devanado de amortiguamiento en eje q

Y en forma compacta:

$$\mathrm{v}_r = \mathrm{R}_r \mathrm{i}_r + \frac{d}{dt}\psi_r$$

donde $\mathrm{R}_r = \mathrm{diag}(R_f \; R_{d_1} \; R_{q_1} \; R_{q_2}).$


eje fase b
amortiguamiento
a
eje d
b´
c´
entrehierro
eje fase a
devanado de campo
estator
b
c
rotor
a´
eje q
eje fase c

Inductancias Máquina Sincrónica

Los flujos concatenados son:

$$\begin{bmatrix} \psi_T \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT}(\theta) & \mathbf{L}_{Tr}(\theta) \\ \mathbf{L}_{Tr}^T(\theta) & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

Las submatrices de inductancias son:

$$\mathbf{L}_{TT}(\theta) = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix}$$

Subíndices con letra repetida corresponden a **inductancias propias**.

Subíndices con letras diferentes corresponden a **inductancias mutuas**.

$$\mathbf{L}_{Tr}(\theta) = \begin{bmatrix} l_{a} & l_{ad_1} & l_{aq_1} & l_{aq_2} \\ l_{bf} & l_{bd_1} & l_{bq_1} & l_{bq_2} \\ l_{cf} & l_{cd_1} & l_{cq_1} & l_{cq_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} l_{ff} & l_{fd1} & l_{fq1} & l_{fq2} \\ l_{d1f} & l_{d1d1} & l_{d1q1} & l_{d1q2} \\ l_{q1f} & l_{q1d1} & l_{q1q1} & l_{q1q2} \\ l_{q2} & l_{q2d1} & l_{q2q1} & l_{q2q2} \end{bmatrix}$$

Inductancias Máquina Sincrónica

Los flujos concatenados son:

$$\begin{bmatrix} \psi_T \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT}(\theta) & \mathbf{L}_{Tr}(\theta) \\ \mathbf{L}_{Tr}^T(\theta) & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

Las matrices de inductancias $\mathbf{L}_{TT}$ y $\mathbf{L}_{Tr}$ dependen de la posición del rotor

$$\mathbf{L}_{TT}(\theta) = \begin{bmatrix} L_0 + L_1 \cos 2\theta & -L_m - L_1 \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) & -L_m - L_1 \cos 2(\theta - \frac{\pi}{6}) \\ -L_m - L_1 \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) & L_0 + L_1 \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -L_m - L_1 \cos 2(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ -L_m - L_1 \cos 2(\theta - \frac{\pi}{6}) & -L_m - L_1 \cos 2(\theta + \frac{\pi}{2}) & L_0 + L_1 \cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{Tr}(\theta) = \begin{bmatrix} L_{af} \cos\theta & L_{ad1} \cos\theta & L_{aq1} \sin\theta & L_{aq2} \sin\theta \\ L_{af} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & L_{ad1} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & L_{aq1} \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & L_{aq2} \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ L_{af} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & L_{ad1} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & L_{aq1} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & L_{aq2} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Todas las constantes L son positivas

Inductancias Máquina Sincrónica

$$\mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} L_{ff} & L_{fd1} & 0 & 0 \\ L_{fd1} & L_{d1d1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{q1q1} & L_{q1q2} \\ 0 & 0 & L_{q1q2} & L_{q2q2} \end{bmatrix}$$

Como los devanados de amortiguamiento y de campo se encuentran montados sobre el rotor, las inductancias no dependen de la posición del rotor

Los elementos nulos en la matriz $\mathbf{L}_{rr}$ se justifica por el hecho que los ejes de los devanados respectivos son perpendiculares (magnéticamente desacoplados)

Recordando que:

$$\begin{bmatrix} \psi_T \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT}(\theta) & \mathbf{L}_{Tr}(\theta) \\ \mathbf{L}_{Tr}^T(\theta) & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

Es evidente que la relación es dependiente del tiempo (rotación del rotor) y el análisis de los flujos concatenados es muy complicado.

Transformación de Park

Transforma las variables del estator (a,b,c) en variables ficticias reflejadas en los ejes d y q de la máquina

Facilita el cálculo de los devanados porque las inductancias se vuelven independientes de la posición del rotor i.e. son constantes en el tiempo

$$\mathbf{v}_P = \mathcal{P}\,\mathbf{v}_T \qquad \mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} v_d & v_q & v_o \end{bmatrix}^T$$

$$\psi_P = \mathcal{P}\,\psi_T \qquad \psi_P = \begin{bmatrix} \psi_d & \psi_q & \psi_o \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{i}_P = \mathcal{P}\,\mathbf{i}_T \qquad \mathbf{i}_P = \begin{bmatrix} i_d & i_q & i_o \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Transformación de Park

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

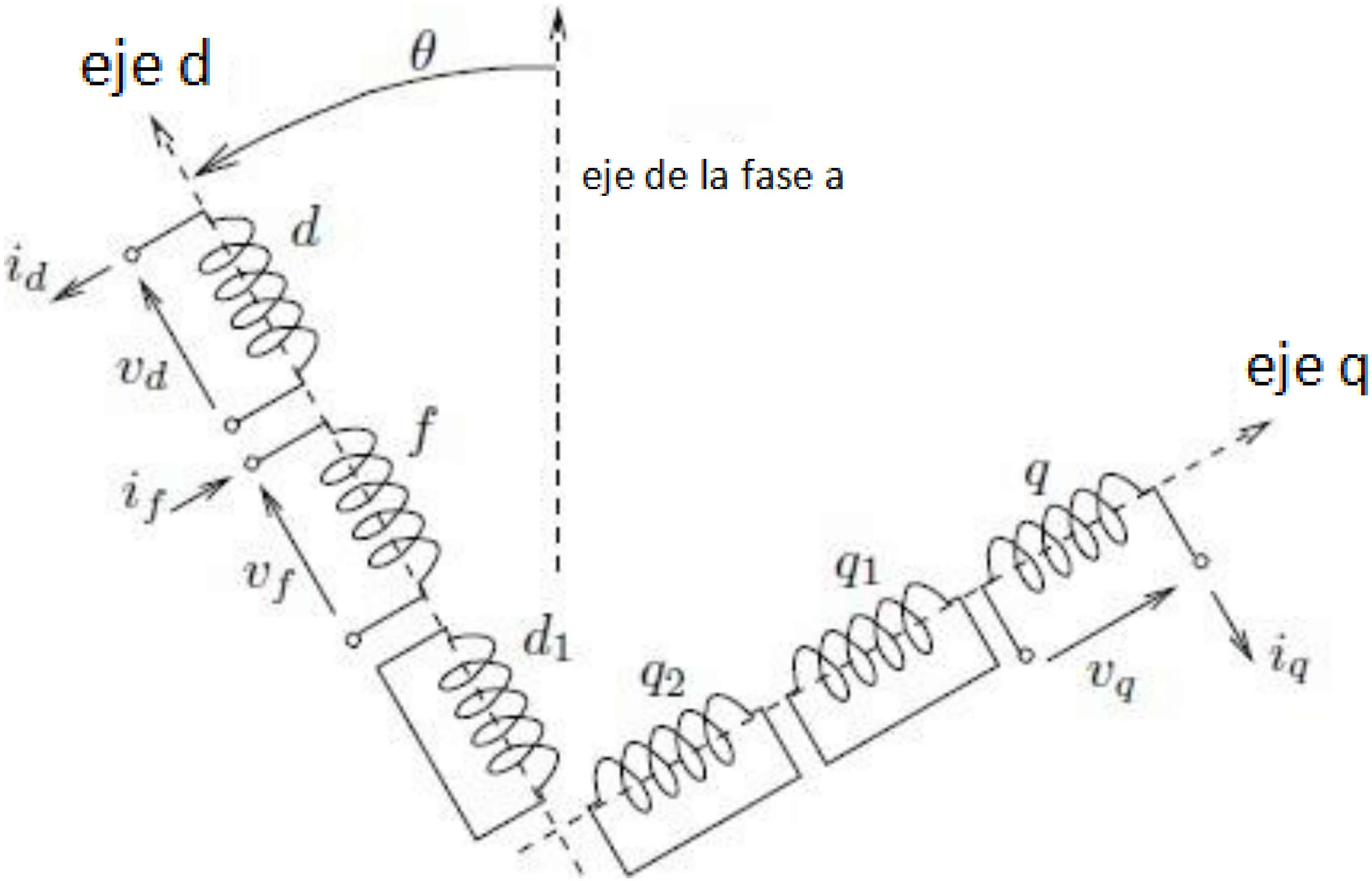
Propiedades de la matriz de transformación:

$$\mathcal{P}\,\mathcal{P}^T = \mathrm{I}$$

$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^T \longrightarrow$ matriz ortogonal

La secuencia cero se utiliza para operación desbalanceada de la máquina.
Corresponde a un devanado ficticio desacoplado de d y q.

Transformación de Park



Modelo en variables d,q,0:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathcal{P}\,\mathbf{v}_T \\ \psi_P &= \mathcal{P}\,\psi_T \\ \mathbf{i}_P &= \mathcal{P}\,\mathbf{i}_T \end{aligned}$$

A partir de la ecuación :

$$\mathbf{v}_T = -\mathbf{R}_T \mathbf{i}_T - \frac{d}{dt}\psi_T$$

$$\mathcal{P}^{-1}\,\mathbf{v}_P = -R_a \mathbf{I}\,\mathcal{P}^{-1}\,\mathbf{i}_P - \frac{d}{dt}(\mathcal{P}^{-1}\,\psi_P)$$

$$\mathbf{v}_P = -R_a \mathcal{P}\mathcal{P}^{-1}\mathbf{i}_P - \mathcal{P}\,(\frac{d}{dt}\mathcal{P}^{-1})\psi_P - \mathcal{P}\mathcal{P}^{-1}\frac{d}{dt}\psi_P$$

$$\mathbf{v}_P = -\mathbf{R}_P\,\mathbf{i}_P - \dot{\theta}\mathbf{P}\psi_P - \frac{d}{dt}\psi_P$$

$\dot{\theta} = \omega$ velocidad de giro rotor

donde $\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_T$ y $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Modelo en variables d,q,0:

De modo que si descomponemos la ecuación:

$$\mathrm{v}_P = -\mathrm{R}_P\,\mathrm{i}_P - \dot{\theta}\mathrm{P}\psi_P - \frac{d}{dt}\psi_P$$

Se obtiene:

$$v_d = -R_a i_d - \dot{\theta}\psi_q - \frac{d\psi_d}{dt}$$

$$v_q = -R_a i_q + \dot{\theta}\psi_d - \frac{d\psi_q}{dt}$$

$$v_o = -R_a i_o - \frac{d\psi_o}{dt}$$

Las ecuaciones de tensión para los devanados del rotor se mantienen igual.

Modelo en variables d,q,0:

Si analizamos los componentes de las ecuaciones que acabamos de obtener:

Tensiones de velocidad

$$v_d = \boxed{-R_a i_d} \boxed{-\dot{\theta}\psi_q} \boxed{-\frac{d\psi_d}{dt}}$$

$$v_q = \boxed{-R_a i_q} \boxed{+\dot{\theta}\psi_d} \boxed{-\frac{d\psi_q}{dt}}$$

$$v_o = \boxed{-R_a i_o} \boxed{-\frac{d\psi_o}{dt}}$$

Tensiones de transformador

Las tensiones de velocidad resultaron de la transformación de un marco de referencia estacionario a uno giratorio.

Inductancias de Park

A este punto, todavía necesitamos obtener una expresión para ψ_P

Recordando que:

$$\begin{bmatrix} \psi_T \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT} & \mathbf{L}_{Tr} \\ \mathbf{L}_{Tr}^T & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}^{-1}\psi_P \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT} & \mathbf{L}_{Tr} \\ \mathbf{L}_{Tr}^T & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{-1}\mathbf{i}_P \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_P \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}\mathbf{L}_{TT}\mathcal{P}^{-1} & \mathcal{P}\mathbf{L}_{Tr} \\ \mathbf{L}_{Tr}^T\mathcal{P}^{-1} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_P \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}\mathbf{L}_{TT}\mathcal{P}^{-1} & \mathcal{P}\mathbf{L}_{Tr} \\ \mathbf{L}_{Tr}^T\mathcal{P}^{-1} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{PP} & \mathbf{L}_{Pr} \\ \mathbf{L}_{rP} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix}$$

Inductancias de Park

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{PP} & \mathbf{L}_{Pr} \\ \mathbf{L}_{rP} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{dd} & & & L_{df} & L_{dd1} & & \\ & L_{qq} & & & & L_{qq1} & L_{qq2} \\ & & L_{oo} & & & & \\ L_{df} & & & L_{ff} & L_{fd1} & & \\ L_{dd1} & & & L_{fd1} & L_{d1d1} & & \\ & L_{qq1} & & & & L_{q1q1} & L_{q1q2} \\ & L_{qq2} & & & & L_{q1q2} & L_{q2q2} \end{bmatrix}$$

$$L_{dd} = L_0 + L_m + \frac{3}{2}L_1 \quad L_{qq} = L_0 + L_m - \frac{3}{2}L_1 \quad L_{df} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{af}$$

$$L_{dd1} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{ad1} \quad L_{qq1} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{aq1} \quad L_{qq2} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{aq2}$$

$$L_{oo} = L_0 - 2L_m$$

Modelo en variables d,q,0:

La matriz anterior se le llama matriz de inductancias de Park

Note que todas las inductancias son constantes, independientes de la posición del rotor. Esto se debe a que los "nuevos" devanados del estator (d y q) y los devanados del rotor (campo y amortiguamiento) están fijos unos a otros.

Sin considerar las corrientes de secuencia cero, debido a que analizamos operación balanceada de la máquina, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ -v_f \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_a & & \\ & R_f & \\ & & R_{d1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\theta}\psi_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_a & & \\ & R_{q1} & \\ & & R_{q2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}\psi_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix}$$

Modelo en variables d,q,0:

Y los flujos concatenados son:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{dd} & L_{df} & L_{dd1} \\ L_{df} & L_{ff} & L_{fd1} \\ L_{dd1} & L_{fd1} & L_{d1d1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{qq} & L_{qq_1} & L_{qq_2} \\ L_{qq1} & L_{q1q1} & L_{q1q2} \\ L_{qq2} & L_{q1q2} & L_{q2q2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix}$$

Se obtiene ahora un sistema de ecuaciones de tensiones en términos de corrientes, resistencias e inductancias.

Para resolver fuera de horas contacto.

Ejemplo 1:

Un generador sincrónico trifásico de 555 MVA, 24 kV, f.p. 0.9 y 60 Hz tiene las siguientes inductancias asociadas al devanado del estator y de campo:

$$l_{aa} = 3.2758 + 0.0458 \cdot \cos(2\theta)\, mH$$

$$l_{ab} = -1.6379 - 0.0458 \cdot \cos(2\theta + \pi/3)\, mH$$

$$l_{af} = 40\cos(\theta)\, mH$$

$$l_{ff} = 576.92\, mH$$

Determine L_{dd}, L_{qq} y L_{df}

Respuestas:

$$L_{dd} = 4.9825\, mH \qquad L_{qq} = 4.8451\, mH$$

$$L_{df} = 48.99\, mH$$

Ecuaciones en sistema p.u.:

Al utilizar el sistema p.u. según demostración en el Anexo B:

$$\left.\begin{aligned} v_d &= -R_a i_d - \dot{\theta}\psi_q - \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_d}{dt} \\ v_q &= -R_a i_q + \dot{\theta}\psi_d - \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_q}{dt} \\ v_o &= -R_a i_o - \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_o}{dt} \end{aligned}\right\} \text{Usado en simulaciones}$$

Todas las variables están en p.u. excepto ω_B (en rad/s) y el tiempo (en s). Para normalizar la derivada con respecto al tiempo, dividimos el denominador entre el tiempo base $t_B = \frac{1}{\omega_B}$, y se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} v_d &= -R_a i_d - \dot{\theta}\psi_q - \dot{\psi}_d \\ v_q &= -R_a i_q + \dot{\theta}\psi_d - \dot{\psi}_q \\ v_o &= -R_a i_o - \dot{\psi}_o \end{aligned}\right\} \text{Derivadas en p.u.}$$

Ecuaciones en sistema p.u.:

Para el caso del rotor se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}
v_f(t) &= R_f i_f(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_f}{dt} \\
0 &= R_{\mathrm{d1}} i_{\mathrm{d1}}(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_{\mathrm{d1}}}{dt} \\
0 &= R_{q1} i_{q1}(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_{\mathrm{q1}}}{dt} \\
0 &= R_{q2} i_{q2}(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_{q2}}{dt}
\end{aligned}\right\} \text{Usado en simulaciones}$$

Todas las variables están en p.u. excepto ω_B y el tiempo, al normalizarlo:

$$\left.\begin{aligned}
v_f(t) &= R_f i_f(t) + \dot{\psi}_f \\
0 &= R_{\mathrm{d1}} i_{\mathrm{d1}}(t) + \dot{\psi}_{d1} \\
0 &= R_{q1} i_{q1}(t) + \dot{\psi}_{q1} \\
0 &= R_{q2} i_{q2}(t) + \dot{\psi}_{q2}
\end{aligned}\right\} \text{Derivadas en p.u.}$$

Ecuaciones en sistema p.u.

En el sistema recíproco de inductancias:

$$L_{df} = L_{fd1} = L_{dd1} = \boxed{L_{md}} \qquad L_{qq1} = L_{qq2} = L_{q1q2} = \boxed{L_{mq}}$$

Y los flujos concatenados en p.u.:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{md} & L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{lf} + L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{md} & L_{ld_1} + L_{md} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{mq} & L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{lq_1} + L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{mq} & L_{lq_2} + L_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, debemos encontrar una expresión del par eléctrico de la máquina. Este es el par que iguala el par mecánico de la turbina.

Solución en Anexo C de la presentación.

Ejemplo 2:

Un generador sincrónico trifásico de 555 MVA, 24 kV, f.p. 0.9 y 60 Hz tiene las siguientes inductancias $L_{dd} = 4.9825\,mH$, $L_{qq} = 4.8451\,mH$, $L_{df} = 48.99\,mH$ y $L_{ff} = 576.92\,mH$, y resistencias $R_a = 0.0031\,\Omega$ y $R_f = 0.0715\,\Omega$. Si sabe que $L_l = 0.4129\,mH$ determine todos los parámetros en p.u.

Ejemplo 3:

Los siguientes son los parámetros en p.u. de un turbogenerador de 555 MVA, 24 kV, f.p. 0.9, 60 Hz, 3600 rpm:

$L_l = 0.15$, $L_{md} = 1.386$, $L_{mq} = 1.344$, $L_{lf} = 0.165$, $R_a = 0.003$ y $R_f = 0.0006$.

a) Calcule L_{dd}, L_{qq}, L_{ff}, L_{df}, X_d, X_q, X_{md} y X_{mq} en p.u.

Par eléctrico

La potencia en terminales de un generador es:

$$p_T(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c$$

Si aplicamos la transformación de Park a esta ecuación:

$$v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \mathbf{v}_T^T \mathbf{i}_T = \mathbf{v}_P^T \mathcal{P}\mathcal{P}^T \mathbf{i}_P = \mathbf{v}_P^T \mathbf{i}_P = v_d i_d + v_q i_q + v_o i_o$$

Si usamos las ecuaciones de tensiones en estator obtenemos:

$$p_T(t) = -\underbrace{(R_a i_d^2 + R_a i_q^2 + R_a i_o^2)}_{p_{Js}} - \underbrace{(i_d \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \frac{d\psi_q}{dt} + i_o \frac{d\psi_o}{dt})}_{dW_{ms}/dt} + \dot{\theta}(\psi_d i_q - \psi_q i_d)$$

Pérdidas de Joule

Energía magnética almacenada en dev. estator

Potencia transferida de rotor a estator

Par eléctrico

La potencia transferida del rotor al estator es:

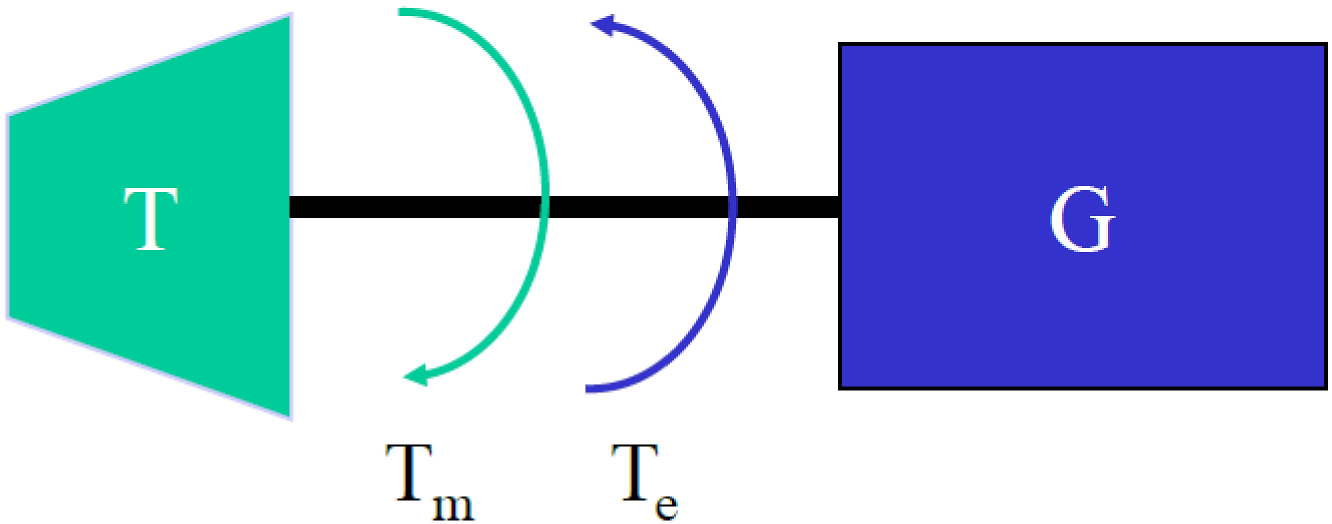
$$p_{r\rightarrow s} = \dot{\theta}(\psi_d i_q - \psi_q i_d)$$

Entonces, el par eléctrico en el entrehierro de la maquina es:

$$T_e = \frac{p_{r\rightarrow s}}{\omega} = \cancelto{1}{\frac{\theta}{\omega}}(\psi_d i_q - \psi_q i_d)$$

$$\boxed{T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d}$$

Dinámica del rotor del generador



Posición del rotor

$$J\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = T_m - T_e$$

Momento de inercia
de las masas rodantes

Par eléctrico del gen.

Par mecánico aplicado por turbina

Dinámica del rotor del generador

Inercia

$$H = \frac{energía\ cinética\ almacenada\ a\ vel.sinc.}{Potencia\ nominal\ de\ máquina} = \frac{\frac{1}{2}J\omega_m^2}{S_B} \sim \left[\frac{MW \cdot s}{MVA}\right]$$

H del generador es la EC de su masa rotando a velocidad síncrona y representa el tiempo [en s] que el generador podría continuar entregando la potencia nominal a la red si el par mecánico aplicado por la turbina pasara súbitamente a cero.

Valores típicos de H en unidades de generación:

Planta térmica $p = 1$	**2 – 6 s**
Planta térmica $p = 2$	3 – 10 s
Planta hidroeléctrica	1,5 – 4 s

Dinámica del rotor del generador (cont.)

La ecuación de dinámica del rotor se puede convertir en (ver Anexo D):

$$\boxed{2H\frac{d\omega_{pu}}{dt} = T_{m_{pu}} - T_{e_{pu}}}$$

En algunos software de simulación se utiliza:

Constante de amortiguamiento.

$$\boxed{2H\frac{d\omega_{pu}}{dt} = \frac{\boldsymbol{P_{m_{pu}}} - D(\omega_{pu} - 1)}{m_{\boldsymbol{pu}}} - T_{e_{pu}}}$$

Resumen del modelo del generador

$$v_d = -R_a i_d - \dot{\theta}\psi_q - \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_d}{dt}$$

$$v_q = -R_a i_q + \dot{\theta}\psi_d - \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_q}{dt}$$

$$v_o = -R_a i_o - \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_o}{dt}$$

$$v_f(t) = R_f i_f(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_f}{dt}$$

$$0 = R_{\mathrm{d}1} i_{\mathrm{d}1}(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_{\mathrm{d}1}}{dt}$$

$$0 = R_{q1} i_{q1}(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_{q1}}{dt}$$

$$0 = R_{q2} i_{q2}(t) + \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_{q2}}{dt}$$

$$T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e) \qquad \frac{d\delta}{dt} = \omega_B(\omega - \omega_s)$$

Todas las variables eléctricas en p.u., ω_B en rad/s, δ en rad, el tiempo y H en s.

Circuitos equivalentes del generador

El objetivo ahora es obtener circuitos equivalentes del generador en ejes d y q. Iniciamos con la ecuación **en p.u.**:

$$v_d = -R_a i_d - \dot{\theta}\psi_q - \dot{\psi}_d$$

Y sabiendo que:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{md} & L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{lf} + L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{md} & L_{ld_1} + L_{md} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix}$$

Podemos decir que:

$$\boxed{v_d = -R_a i_d - \omega\psi_q - L_l \frac{di_d}{dt} - L_{md}\left(\frac{di_d}{dt} + \frac{di_f}{dt} + \frac{di_{d1}}{dt}\right)}$$

Circuitos equivalentes del generador

Además de la ecuación:

$$v_f = R_f i_f + \dot{\psi}_f$$

Y sabiendo que:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{md} & L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{lf} + L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{md} & L_{ld_1} + L_{md} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix}$$

Podemos decir que:

$$\boxed{-v_f = -R_f i_f - L_{lf} \frac{di_f}{dt} - L_{md} \left(\frac{di_d}{dt} + \frac{di_f}{dt} + \frac{di_{d1}}{dt} \right)}$$

Circuitos equivalentes del generador

Finalmente para la ecuación del devanado de amortiguamiento en eje d:

$$0 = -R_{d1} i_{d1} - \dot{\psi}_{d1}$$

Y sabiendo que:

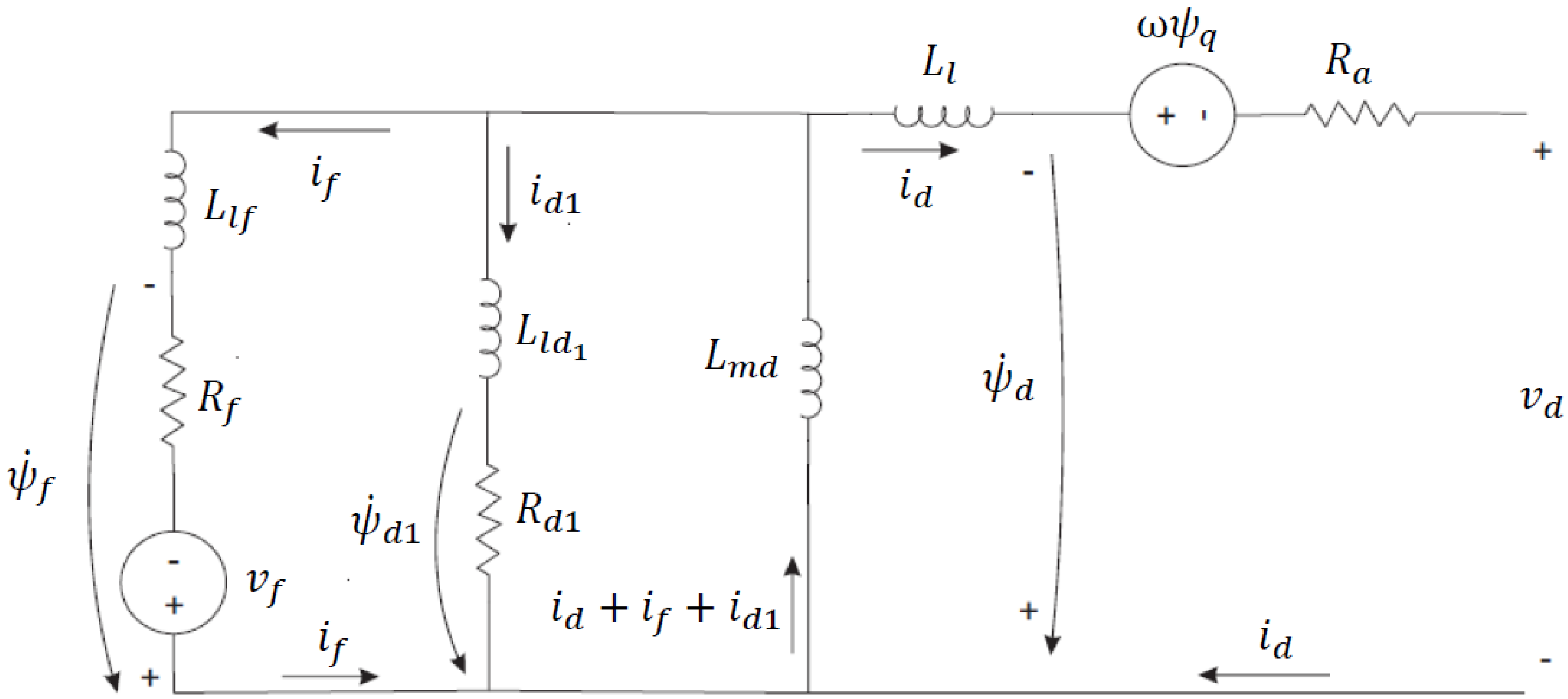
$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{md} & L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{lf} + L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{md} & L_{ld_1} + L_{md} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix}$$

Podemos decir que:

$$\boxed{0 = -R_{d1} i_{d1} - L_{ld_1} \frac{di_{d_1}}{dt} - L_{md} \left(\frac{di_d}{dt} + \frac{di_f}{dt} + \frac{di_{d1}}{dt} \right)}$$

Circuitos equivalentes del generador

Estas $\boxed{3}$ ecuaciones se cumplen con el siguiente circuito equivalente:



Circuitos equivalentes del generador

Ahora trabajamos de manera similar para las ecuaciones en eje q. Iniciamos con la ecuación del estator en p.u.:

$$v_q = -R_a i_q + \omega\psi_d - \dot{\psi}_q$$

Y sabiendo que:

$$\begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{mq} & L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{lq_1} + L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{mq} & L_{lq_2} + L_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix}$$

Podemos decir que:

$$\boxed{v_q = -R_a i_q + \omega\psi_d - L\,\frac{di_q}{dt} - L_{mq}\left(\frac{di_q}{dt} + \frac{di_{q1}}{dt} + \frac{di_{q2}}{dt}\right)}$$

Circuitos equivalentes del generador

Para la ecuación del devanado de amortiguamiento q1:

$$0 = -R_{q1} i_{q1} - \dot{\psi}_{q1}$$

Y sabiendo que:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{mq} & L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{lq_1} + L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{mq} & L_{lq_2} + L_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix}$$

Podemos decir que:

$$\boxed{0 = -R_{q1} i_{q1} - L_{lq_1} \frac{di_{q_1}}{dt} - L_{mq} \left(\frac{di_q}{dt} + \frac{di_{q_1}}{dt} + \frac{di_{q_2}}{dt} \right)}$$

Circuitos equivalentes del generador

Y para el devanado de amortiguamiento q2:

$$0 = -R_{q2} i_{q2} - \dot{\psi}_{q2}$$

Y sabiendo que:

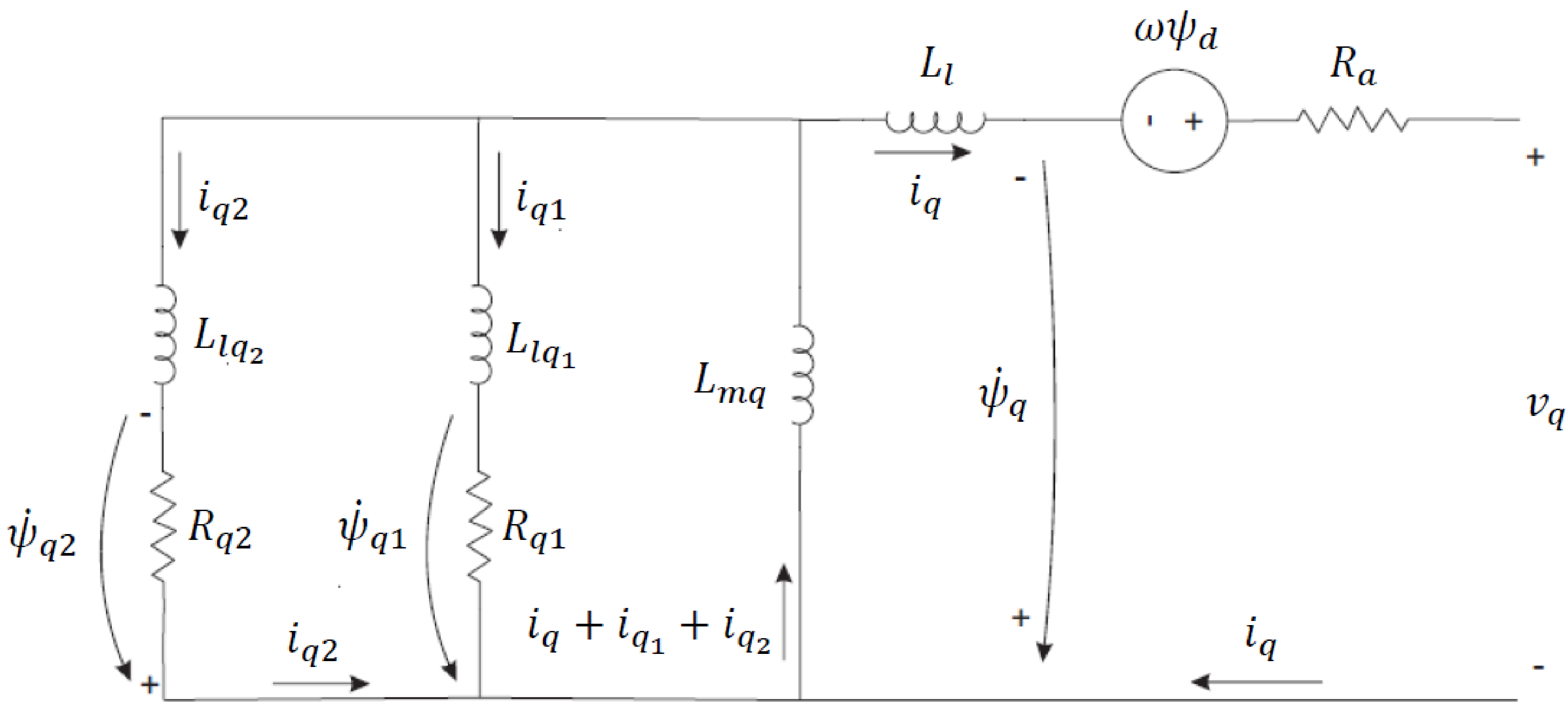
$$\begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{mq} & L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{lq_1} + L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{mq} & L_{lq_2} + L_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix}$$

Podemos decir que:

$$\boxed{0 = -R_{q2} i_{q2} - L_{lq_2} \frac{di_{q_2}}{dt} - L_{mq} \left(\frac{di_q}{dt} + \frac{di_{q_1}}{dt} + \frac{di_{q_2}}{dt} \right)}$$

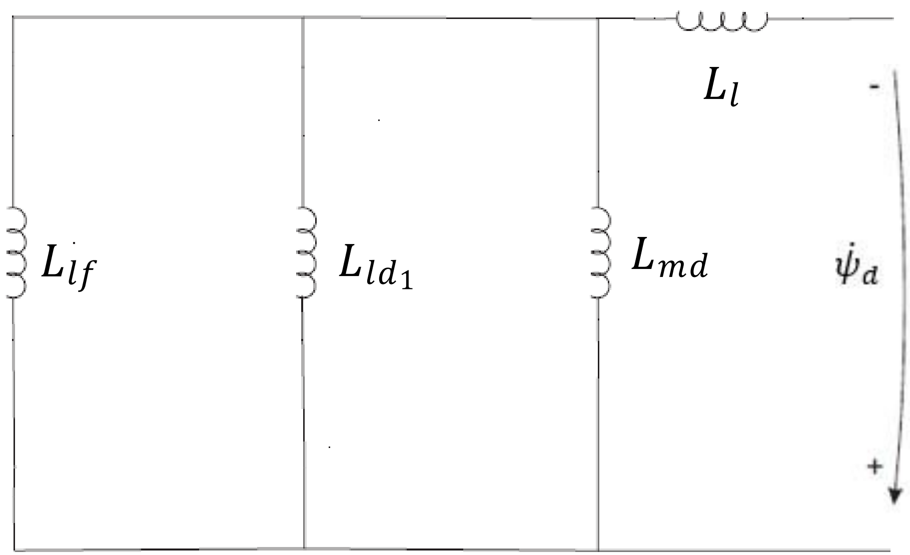
Circuitos equivalentes del generador

Estas $\boxed{3}$ ecuaciones se cumplen con el siguiente circuito equivalente:



Parámetros y constantes de tiempo

A partir de los circuitos equivalentes anteriores, inmediatamente después de una perturbación, el flujo en devanados <u>cerrados</u> no puede variar instantáneamente, entonces:

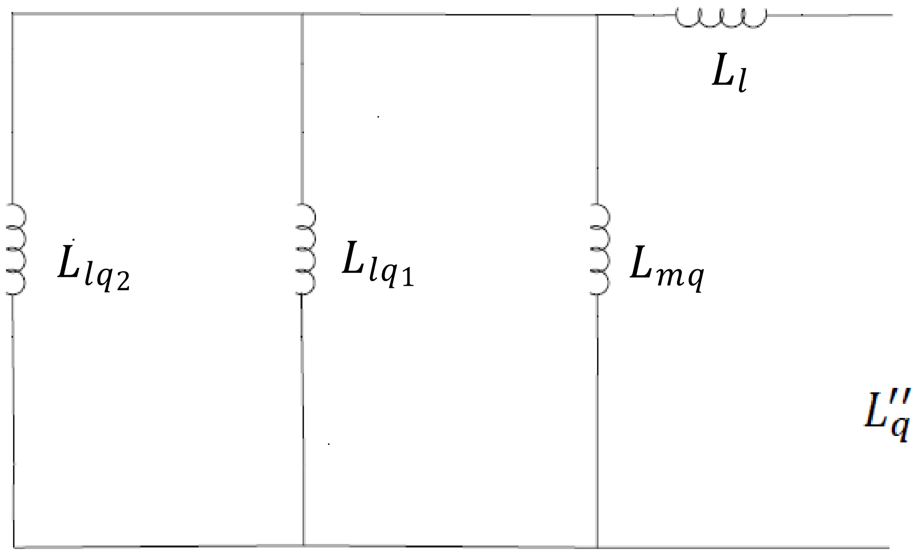


Inductancia subtransitoria de eje directo

$$L''_d = L_l + \frac{1}{\frac{1}{L_{md}} + \frac{1}{L_{lf}} + \frac{1}{L_{ld_1}}}$$

$$L''_d = L_l + \frac{L_{md} L_{lf} L_{ld_1}}{L_{md} L_{lf} + L_{md} L_{ld_1} + L_{lf} L_{ld_1}}$$

Parámetros y constantes de tiempo



Inductancia subtransitoria de eje en cuadratura

$$L_q'' = L_l + \frac{1}{\frac{1}{L_{mq}} + \frac{1}{L_{lq_1}} + \frac{1}{L_{lq_2}}}$$

$$L_q'' = L_l + \frac{L_{mq}\, L_{lq_1} L_{lq_2}}{L_{mq}\, L_{lq_1} + L_{mq}\, L_{lq_2} + L_{lq_1} L_{lq_2}}$$

En el caso de máquinas de polos salientes, solo se modela un devanado de amortiguamiento en eje q:

$$L_q'' = L_l + \frac{1}{\frac{1}{L_{mq}} + \frac{1}{L_{lq_1}}} = L_l + \frac{L_{mq}\, L_{lq_1}}{L_{mq} + L_{lq_1}}$$

Parámetros y constantes de tiempo

Cuando se ignora (o ya pasó) el efecto de los devanados de amortiguamiento, se trabaja en el periodo transitorio:

$$L'_d = L_l + \frac{1}{\frac{1}{L_{md}} + \frac{1}{L_{lf}}} = L_l + \frac{L_{md}L_{lf}}{L_{md} + L_{lf}}$$

$$L'_q = L_l + \frac{1}{\frac{1}{L_{mq}} + \frac{1}{L_{lq_1}}} = L_l + \frac{L_{mq}\,L_{lq_1}}{L_{mq} + L_{lq_1}}$$

Inductancias transitorias de eje d y q

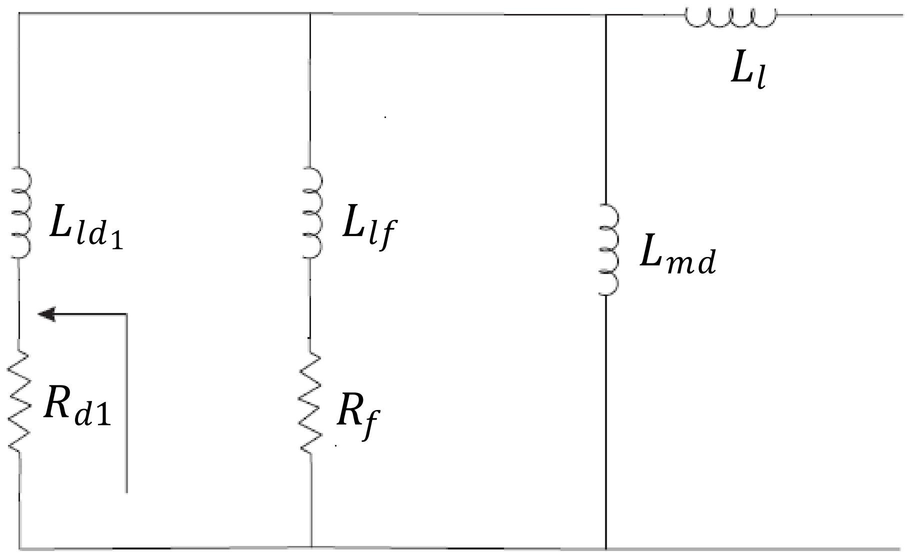
Y para el caso de una máquina de polos salientes, L'_q se toma igual a la inductancia de régimen permanente:

$$L'_q = L_l + \frac{1}{\frac{1}{L_{mq}}} = L_l + L_{mq} = L_{qq}$$

Parámetros y constantes de tiempo

Las constantes de tiempo transitoria y subtransitoria se determinan a partir de constante de tiempo del decaimiento de la corriente en un circuito RL, o sea $r = \frac{L}{R}$.

Para el caso de circuito abierto:

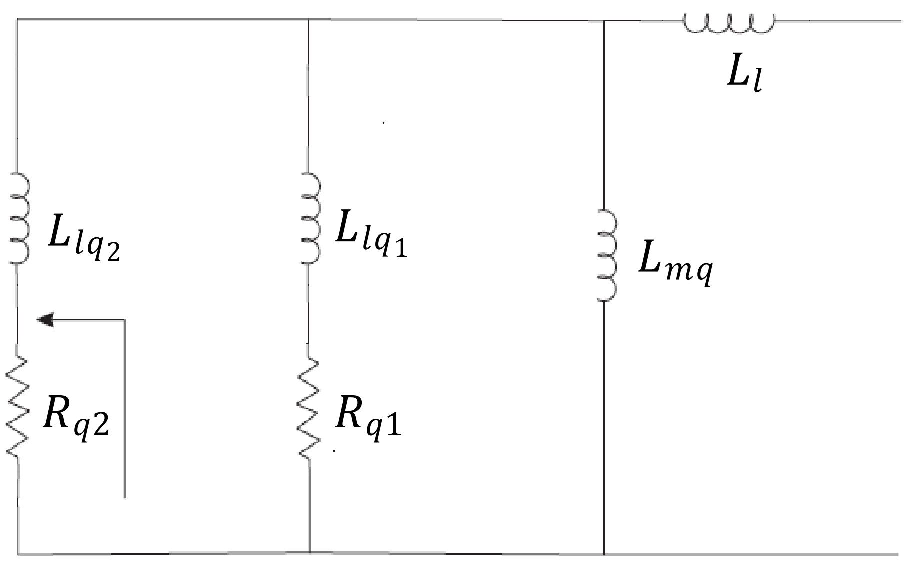


Constante de tiempo subtransitoria de eje d en circuito abierto

$$T''_{d0} = \frac{1}{R_{d1}}\left(L_{ld1} + \frac{L_{md}L_{lf}}{L_{md} + L_{lf}}\right)$$

Parámetros y constantes de tiempo

Para el caso de eje q y en circuito abierto:



Constante de tiempo subtransitoria de eje q en circuito abierto

$$T''_{q0} = \frac{1}{R_{q2}}\left(L_{lq_2} + \frac{L_{mq}L_{lq_1}}{L_{mq} + L_{lq_1}}\right)$$

Para una máquina de polos salientes:

$$T''_{q0} = \frac{1}{R_{q1}}\left(L_{lq1} + L_{mq}\right) \longleftarrow$$

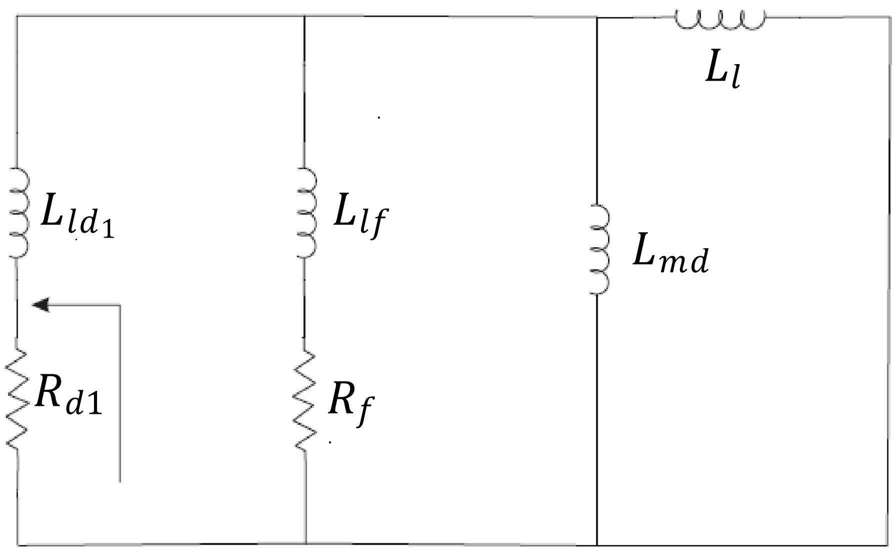
porque no hay devanado q2.

Parámetros y constantes de tiempo

Para el caso de cortocircuito, para eje d:

$$T_d'' = \frac{1}{R_{d1}}\left(L_{ld1} + \frac{L_{md}L_{lf}L_l}{L_{md}L_{lf} + L_{md}L_l + L_{lf}L_l}\right)$$

Constante de tiempo subtransitoria de eje d en cortocircuito

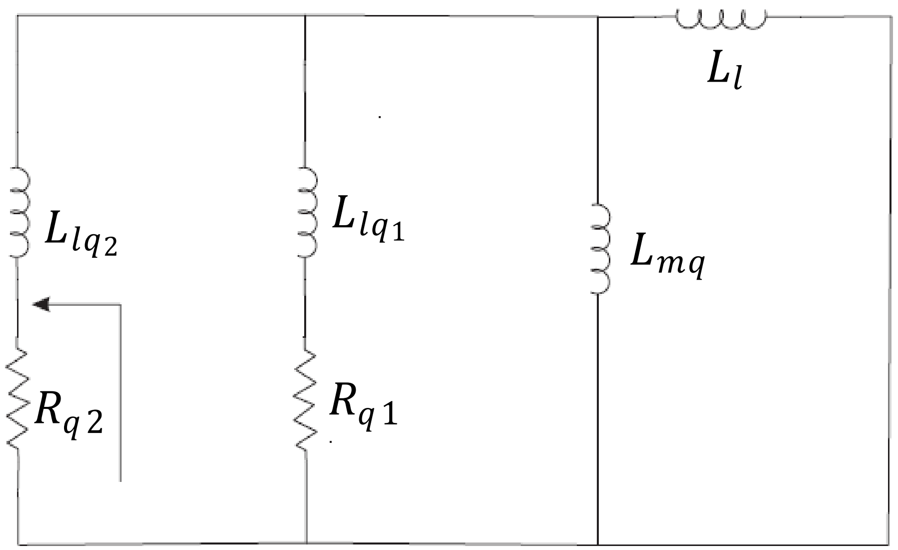


Parámetros y constantes de tiempo

Para el caso de cortocircuito, para eje q:

$$T_q'' = \frac{1}{R_{q2}}\left(L_{lq2} + \frac{L_{mq}\, L_{lq_1} L_l}{L_{mq}\, L_{lq_1} + L_{mq}\, L_l + L_{lq_1} L_l}\right)$$

Constante de tiempo subtransitoria de eje q en cortocircuito



Para una máquina de polos salientes:

$$T_q'' = \frac{1}{R_{q1}}\left(L_{lq1} + \frac{L_{mq}\, L_l}{L_{mq} + L_l}\right)$$

Parámetros y constantes de tiempo

Verifique que las constantes de tiempo transitoria en circuito abierto son:

$$T'_{d0} = \frac{1}{R_f}\left(L_l + L_{md}\right) \qquad T'_{q0} = \frac{1}{R_{q1}}\left(L_{lq_1} + L_{mq}\right)$$

Para una máquina de polos salientes no es aplicable T'_{q0}. Las constantes de tiempo transitorias en cortocircuito son:

$$T'_d = \frac{1}{R_f}\left(L_{lf} + \frac{L_{md}L_l}{L_{md} + L_l}\right) \qquad T'_q = \frac{1}{R_{q1}}\left(L_{lq_1} + \frac{L_{mq}\,L_l}{L_{mq} + L_l}\right)$$

Para una máquina de polos salientes tampoco hay T'_q.

$$0 < T''_d < T''_{d0} < T'_d < T'_{d0}$$
$$0 < T''_q < T''_{q0} < T'_q < T'_{q0}$$

Atención: Todas las constantes de tiempo están dadas en p.u. Para obtener su valor en segundos es necesario desnormalizarlos, o sea, multiplicándolos por $t_B = 1/\omega_B$.

Ejemplo 4

Una máquina sincrónica de 1330 MVA, 50 Hz, tiene las siguientes características:

$$
\begin{aligned}
X_\ell &= 0.20 \text{ pu} & \qquad R_a &= 0.004 \text{ pu} \\
X_d &= 2.10 \text{ pu} & X_q &= 2.10 \text{ pu} \\
X'_d &= 0.30 \text{ pu} & X'_q &= 0.73 \text{ pu} \\
X''_d &= 0.25 \text{ pu} & X''_q &= 0.256 \text{ pu} \\
T''_{do} &= 0.03 \text{ s} & T''_{qo} &= 0.20 \text{ s} \\
T'_{do} &= 9.10 \text{ s} & T'_{qo} &= 2.30 \text{ s}
\end{aligned}
$$

Determine las inductancias y resistencias del modelo de Park en pu.

Nota : Las constantes de tiempo deben ser convertidas a pu.

Simplificación de modelos

A partir de las ecuaciones:

$$v_d = -R_a i_d - \cancelto{1}{\dot{\theta}}\psi_q - \frac{1}{\omega_B}\cancelto{0}{\frac{d\psi_d}{dt}}$$

$$v_q = -R_a i_q + \cancelto{1}{\dot{\theta}}\psi_d - \frac{1}{\omega_B}\cancelto{0}{\frac{d\psi_q}{dt}}$$

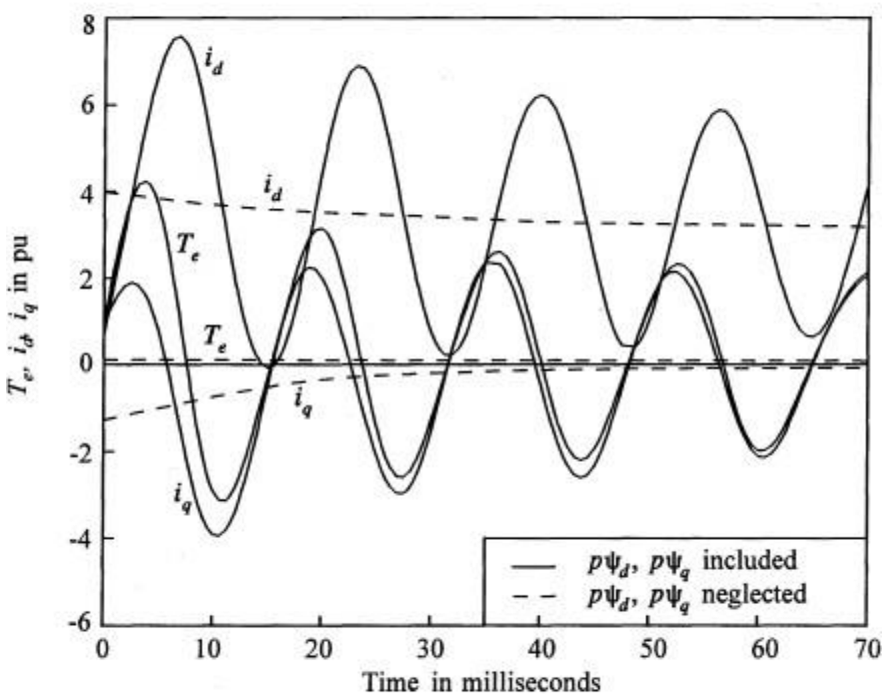
$$\cancelto{0}{v_o} = -\cancelto{0}{R_a i_o} - \frac{1}{\omega_B}\cancelto{0}{\frac{d\psi_o}{dt}}$$

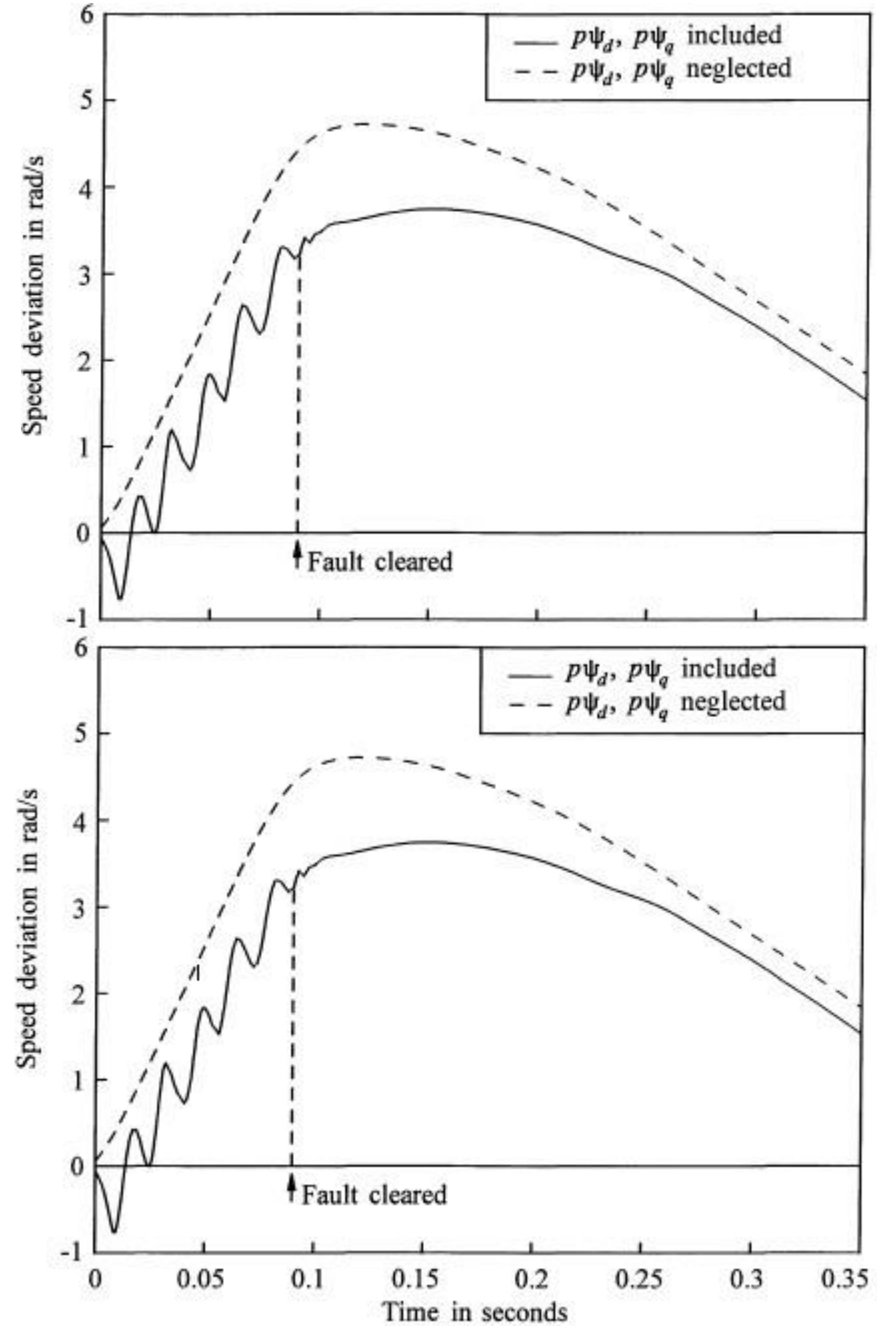
- Suponemos que la dinámica de los flujos de estator es muy rápida comparada con la dinámica de interés en estudios de estabilidad.
- Suponemos que la velocidad del rotor siempre se mantendrá cerca a la velocidad nominal, o sea que $\dot{\theta} = \omega \approx 1$.
- Suponemos que la máquina opera en condiciones balanceadas, entonces $v_0 = i_0 = 0$.

Simplificación de modelos

Efecto de ignorar transitorios del estator al simular una falla trifásica en terminales de generador.

Fuente: P. Kundur, 1994.





Simplificación de modelos

Y las ecuaciones del modelo simplificado son (en pu, excepto ω_B):

$$v_d = -r_a i_d - \psi_q \qquad v_q = -r_a i_q + \psi_d$$

$$v_f = R_f i_f + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_f \qquad 0 = R_{d1} i_{d1} + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_{d1}$$

$$0 = R_{q1} i_{q1} + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_{q1} \qquad 0 = R_{q2} i_{q2} + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_{q2}$$

$$\dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e)$$

PSS/e
DigSilent
EasyPower
ETAP
ePHASORSIM
…

Modelo de 6to orden de máquina sincrónica

Definimos $e_{FD} = \frac{L_m}{R_f} v_f$, $e_q^{'} = \frac{L_m}{L_{ff}} \psi_f$, $e_d^{'} = -\frac{L_{mq}}{L_{q1q1}} \psi_{q1}$, $e_q^{''} = \psi_{d1}$ y $e_d^{''} = -\psi_{q2}$

Es demostrable que el modelo anterior es equivalente a:

$$v_d = -r_a i_d - (i_q L_q'' - e_d'') \qquad v_q = -r_a i_q + (i_d L_d'' + e_q'')$$

$$\dot{e}_d'' = \frac{1}{T_{q0}''}\left(-e_d'' + e_d' - (L_q' - L_l) i_q\right) \qquad \dot{e}_q'' = \frac{1}{T_{d0}''}\left(-e_q'' + e_q' + (L_d' - L_l) i_d\right)$$

$$T_{q0}'\dot{e}_d' = -e_d' - (L_q - L_q')\left(i_q - \frac{L_q' - L_q''}{(L_q' - L_l)^2}\left(-e_d' - \psi_{q2} + (L_q' - L_l) i_q\right)\right)$$

$$T_{d0}'\dot{e}_q' = -e_q' + (L_d - L_d')\left(i_d - \frac{L_d' - L_d''}{(L_d' - L_l)^2}\left(e_q' - \psi_{d1} + (L_d' - L_l) i_d\right)\right) + e_{FD}$$

$$\dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e)$$

Modelo de 6to orden de máquina sincrónica

Simplificación de modelos

A partir del modelo anterior, es posible un nuevo set de ecuaciones en términos de reactancias con algunas aprox. (e.g. $x''_d \approx x_l$ y $x''_q \approx x_l$):

$$v_d = -r_a i_d - i_q x''_q + e''_d \qquad v_q = -r_a i_q + i_d x''_d + e''_q$$

Donde:

$$\dot{e}''_d = \frac{1}{T''_{q0}}\left(-e''_d + e'_d - \left(x'_q - x''_q\right)i_q\right) \qquad \dot{e}''_q = \frac{1}{T''_{d0}}\left(-e''_q + e'_q + (x'_d - x''_d)i_d\right)$$

$$\dot{e}'_d = \frac{1}{T'_{q0}}\left(-e'_d - \left(x_q - x'_q\right)i_q\right) \qquad \dot{e}'_q = \frac{1}{T'_{d0}}\left(-e'_q + (x_d - x'_d)i_d + e_{FD}\right)$$

$$\dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e)$$

Modelo simplificado de 6to orden de máquina sincrónica

Modelo de 5to orden de máquina sincrónica

Para el caso de una máquina de polos salientes (en plantas hidro), solo se usa un devanado de amortiguamiento en eje q:

$$v_d = -r_a i_d - \psi_q \qquad v_q = -r_a i_q + \psi_d \qquad v_f = R_f i_f + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_f$$

$$0 = R_{d1} i_{d1} + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_{d1} \qquad 0 = R_{q2} i_{q2} + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_{q2} \qquad \dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e)$$

Equivalente a decir que $x'_q \approx x_q \;\rightarrow\; e'_d \approx 0$:

$$v_d = -r_a i_d - i_q x''_q + e''_d \qquad v_q = -r_a i_q + i_d x''_d + e''_q$$

$$\dot{e}''_d = \frac{1}{T''_{q0}}\left(-e''_d + \boldsymbol{e'_d} - \left(\boldsymbol{x'_q} - x''_q\right) i_q\right) \qquad \dot{e}''_q = \frac{1}{T''_{d0}}\left(-e''_q + e'_q + (x'_d - x''_d) i_d\right)$$

$$\dot{e}'_q = \frac{1}{T'_{d0}}\left(-e'_q + (x_d - x'_d) i_d + e_{FD}\right) \qquad \dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e)$$

Modelo de 4to orden de máquina sincrónica

Si se ignoran los devanados de amortiguamiento d1 y q2:

$$v_d = -r_a i_d - \psi_q \qquad v_q = -r_a i_q + \psi_d \qquad v_f = R_f i_f + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_f$$

$$0 = R_{q1} i_{q1} + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_{q1} \qquad \dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e) - \underline{D(\omega - \omega_s)}$$

Equivalente a decir que $e_d'' = e_q'' \approx 0$:

$$v_d = -r_a i_d - i_q x_q' + e_d' \qquad v_q = -r_a i_q + i_d x_d' + e_q'$$

$$\dot{e}_d' = \frac{1}{T_{q0}'}\left(-e_d' - \left(x_q - x_q'\right) i_q\right) \qquad \dot{e}_q' = \frac{1}{T_{d0}'}\left(-e_q' + (x_d - x_d') i_d + e_{FD}\right)$$

$$\dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e) - D(\omega - \omega_s)$$

Modelo de 3er orden de máquina sincrónica

Si se ignoran los devanados de amortiguamiento d1, q1 y q2:

$$v_d = -r_a i_d - \psi_q \qquad v_q = -r_a i_q + \psi_d \qquad v_f = R_f i_f + \frac{1}{\omega_B}\dot{\psi}_f$$

$$\dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e) - \underline{D(\omega - \omega_s)}$$

Equivalente a decir que $e'_d = e''_d = e''_q \approx 0$ y $x'_q \approx x_q$:

$$v_d = -r_a i_d - i_q \boldsymbol{x'_q} + \boldsymbol{e'_d} \qquad v_q = -r_a i_q + i_d x'_d + e'_q$$

$$\dot{e}'_q = \frac{1}{T'_{d0}}\left(-e'_q + (x_d - x'_d)i_d + e_{FD}\right)$$

GENTRA en PSS/e

$$\dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e) - D(\omega - \omega_s)$$

Modelo de 2do orden de máquina sincrónica

El **modelo clásico** de la máquina sincrónica supone que la tensión de excitación v_f ni i_d varían mucho en el estado transitorio. Por lo tanto, el generador **se modelaba** como una fuente $e_q^{'}$ constante detrás de la reactancia transitoria $x_d^{'}$, además se usa la aproximación $x_q^{'} \approx x_d^{'}$.

$$v_d = -r_a i_d - i_q x_d'$$

$$v_q = -r_a i_q + i_d x_d' + e_q'$$

$$\dot{\delta} = \omega_B(\omega - \omega_s)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2H}(T_m - T_e) - D(\omega - \omega_s)$$

La constante de amortiguamiento se usa en modelo de orden 4 e inferior, pero a veces se ignora en el modelo de orden 2. Este es un modelo que se considera obsoleto por las capacidades de las computadoras actuales.

Saturación de la máquina

Al realizar la prueba de vacío a un generador es claro que la relación $V\ vs\ I_f$ deja de ser lineal. La saturación afecta las reactancias de **magnetización** X_{md} y X_{mq} según:

$$X_{md}^{s} = K_d X_{md} \quad \text{y} \quad X_{mq}^{s} = K_q X_{mq}$$

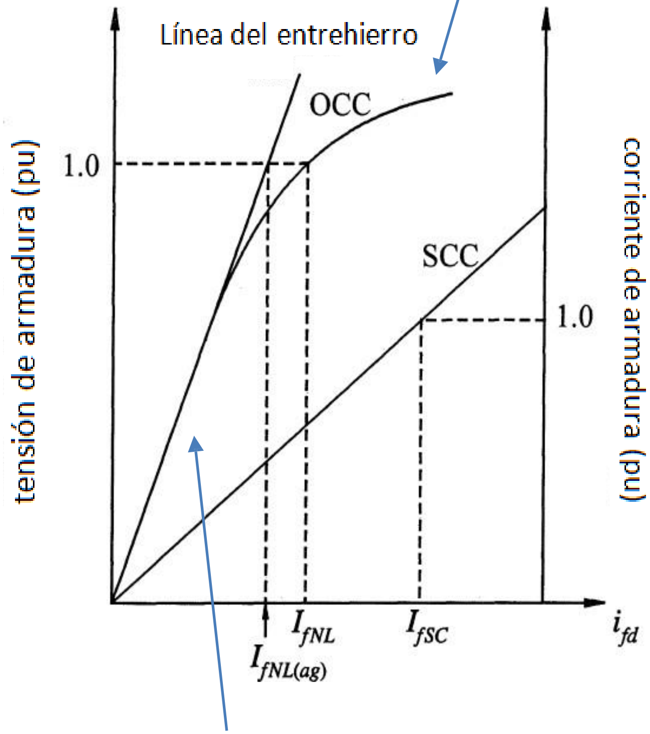
Donde K_d y K_q son los factores de saturación en eje d y q respectivamente.

Máquina de polos lisos: $K_q \approx K_d$.

Máquina de polos salientes:

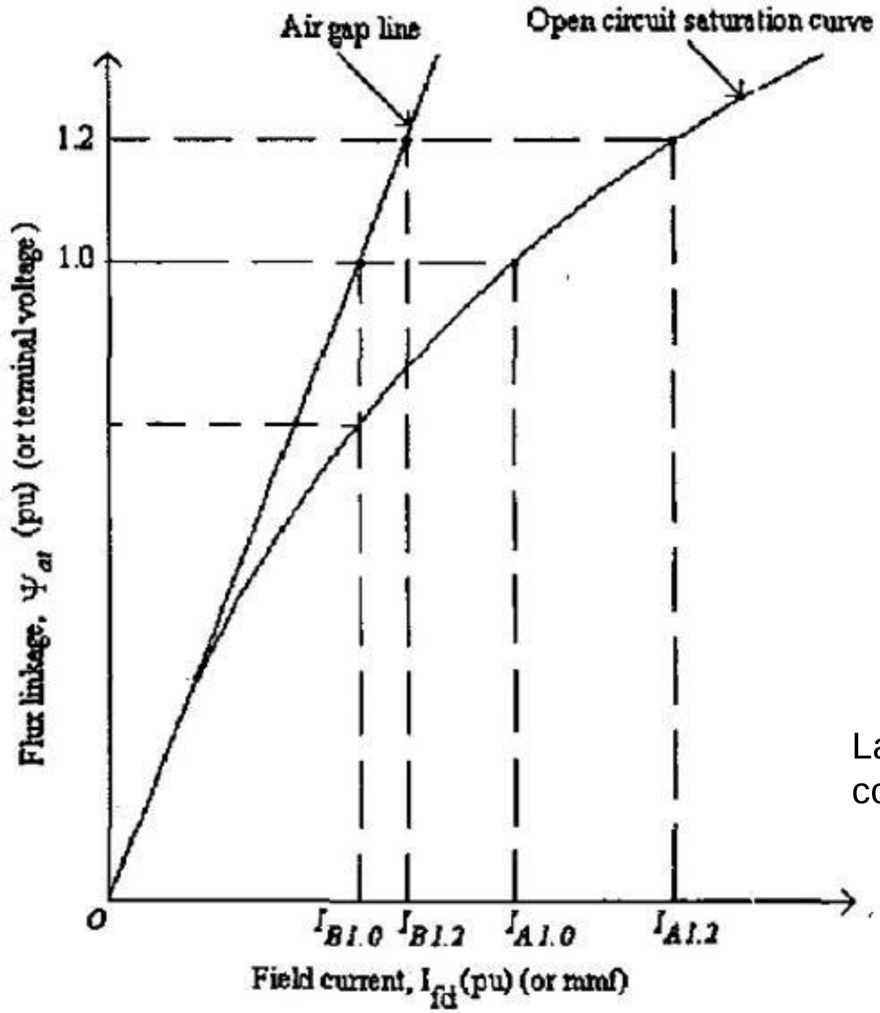
a) $K_q > K_d$
b) $K_q \approx 1$
c) $K_q \approx K_d$

$K < 1$ en zona no lineal



$K = 1$ en zona lineal

Método de 2 puntos (eje d)



PSS/e, ETAP, DigSilent

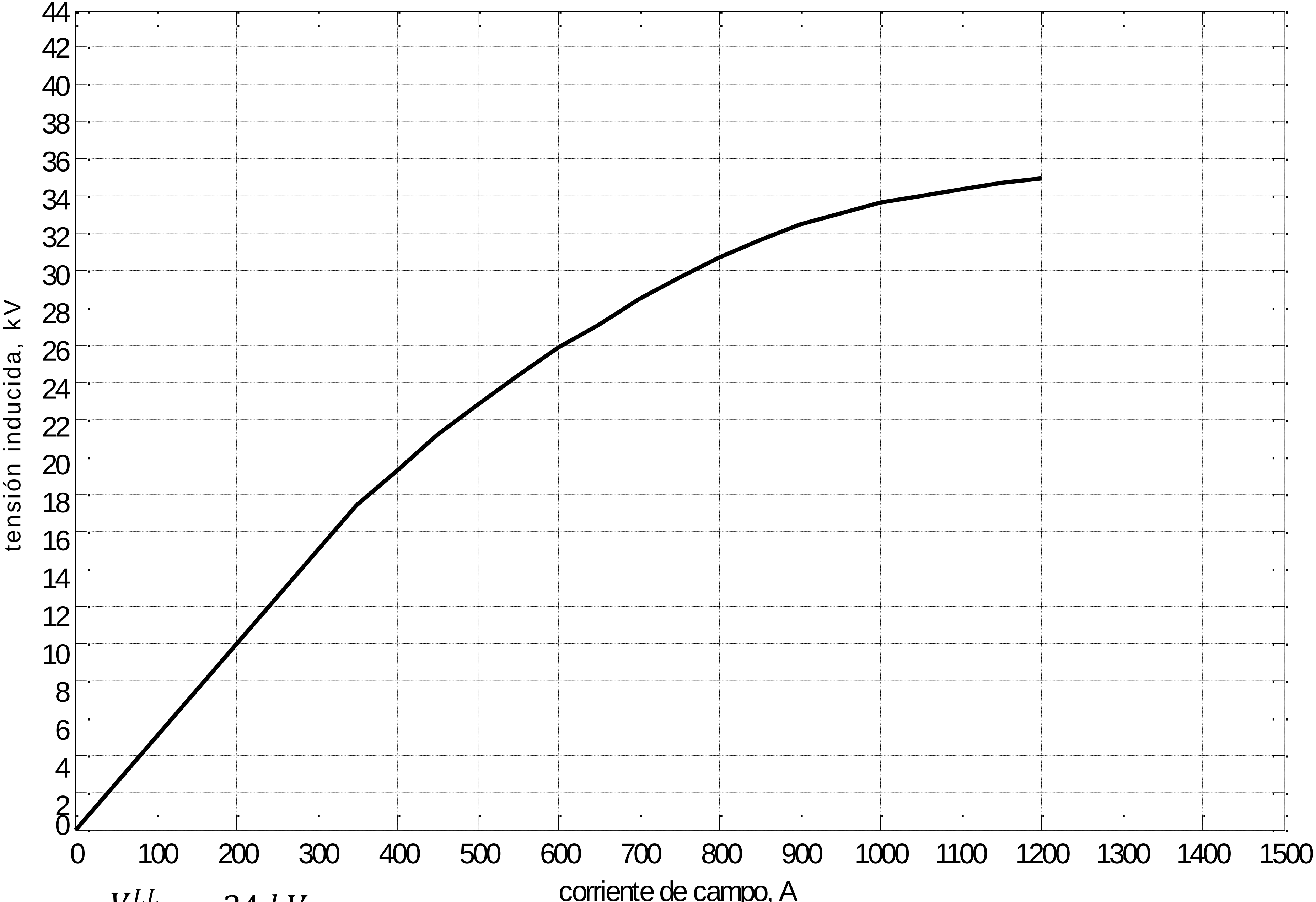
$$S_{1.0} = \frac{I_{A1.0} - I_{B1.0}}{I_{B1.0}}$$

$$S_{1.2} = \frac{I_{A1.2} - I_{B1.2}}{I_{B1.2}}$$

La saturación evaluada a cualquier tensión $V_x$en condiciones de vacío es:

$$K_x = \frac{1}{S_x + 1}$$

Para resolver fuera de horas contacto.



$V_{n\,o}^{LL} = 24\ kV$

Modelos de saturación (resumen)

Prácticamente todos los software de simulación del mercado ofrecen uno o varios modelos de saturación. Todos parten de los parámetros $S_{1.0}$ y $S_{1.2}$ para calcular los parámetros A y B correspondientes.

Nombre	Función	Software
Cuadrático	$Sat(x) = B(x-A)^2$	GE PSLF, PowerWorld
Cuadrático escalado	$Sat(x) = \frac{B(x-A)^2}{x}$	PSS/e, PowerWorld
Exponencial	$Sat(x) = B(x)^{\mathrm{A}}$	EUROSTAG, RAMSES* y algunos modelos específicos en PSS/e y PowerWorld.

*El software RAMSES usa los parámetros $m\ y\ n$ donde $m = B$ y $n = A$.

Modelos de saturación (1/3)

Modelo cuadrático:

$$Sat(x) = B\left(\overbrace{\sqrt{{\psi_{ad}}^2 + {\psi_{aq}}^2}}^{\psi_{AG}} + K_{is}\overbrace{\sqrt{{I_d}^2 + {I_q}^2}}^{I_a} - A\right)^2$$

$0.02 \leq K_{is} \leq 0.12$ típicamente.

Donde

$$\psi_{ad} = X^s_{md}\left(i_d + i_f + i_{d1}\right) \qquad \psi_{aq} = X^s_{m}\left(i_q + i_{q1} + i_{q2}\right)$$

Los parámetros A y B se calculan fácilmente de resolver las ecuaciones:

$$S_{1.0} = B(1.0 - A)^2 \qquad S_{1.2} = B(1.2 - A)^2$$

Donde $S_{1.0}$ y $S_{1.2}$ ya son valores conocidos de las curvas OCC y AG. Finalmente, K_{is} es un valor entre 0 y 1 para mostrar cómo se ve afectada la saturación por la corriente del estator, K_{is} se puede calcular de las curvas en V ($I_a \; vs \; i_{fd}$) del gen.

Modelos de saturación (2/3)

Modelo cuadrático escalado:

$$Sat(x) = \frac{B\left(\sqrt{{\psi_{ad}}^2+{\psi_{aq}}^2}+K_{is}\sqrt{{I_d}^2+{I_q}^2}-A\right)^2}{\sqrt{{\psi_{ad}}^2+{\psi_{aq}}^2}+K_{is}\sqrt{{I_d}^2+{I_q}^2}}$$

Los parámetros A y B se calculan fácilmente de resolver las ecuaciones:

$$S_{1.0} = \frac{B(1.0-A)^2}{1.0} \qquad S_{1.2} = \frac{B(1.2-A)^2}{1.2}$$

Donde $S_{1.0}$ y $S_{1.2}$ ya son valores conocidos de las curvas OCC y AG.

Modelos de saturación (3/3)

Modelo exponencial:

$$Sat(x) = B\left(\sqrt{{\psi_{ad}}^2 + {\psi_{aq}}^2} + K_{is}\sqrt{{I_d}^2 + {I_q}^2}\right)^{\mathrm{A}}$$

$K_{is} \approx 0$ (usualmente).

Los parámetros A y B se calculan al resolver las ecuaciones:

$$S_{1.0} = B(1.0)^A \qquad\qquad S_{1.2} = B\,(1.2\,)^A$$

Donde fácilmente se obtiene que:

$$B = S_{1.0}, \qquad A = \frac{\ln\left(\frac{S_{1.2}}{S_{1.0}}\right)}{\ln 1.2}$$

Saturación de la máquina

Modelo generalizado de saturación:

$$X_{m}^{s} = K_d X_{md} \text{ y } X_{mq}^{s} = K_q X_{mq}$$

$$\boxed{K_d = \frac{1}{1 + Sat(x)}}$$

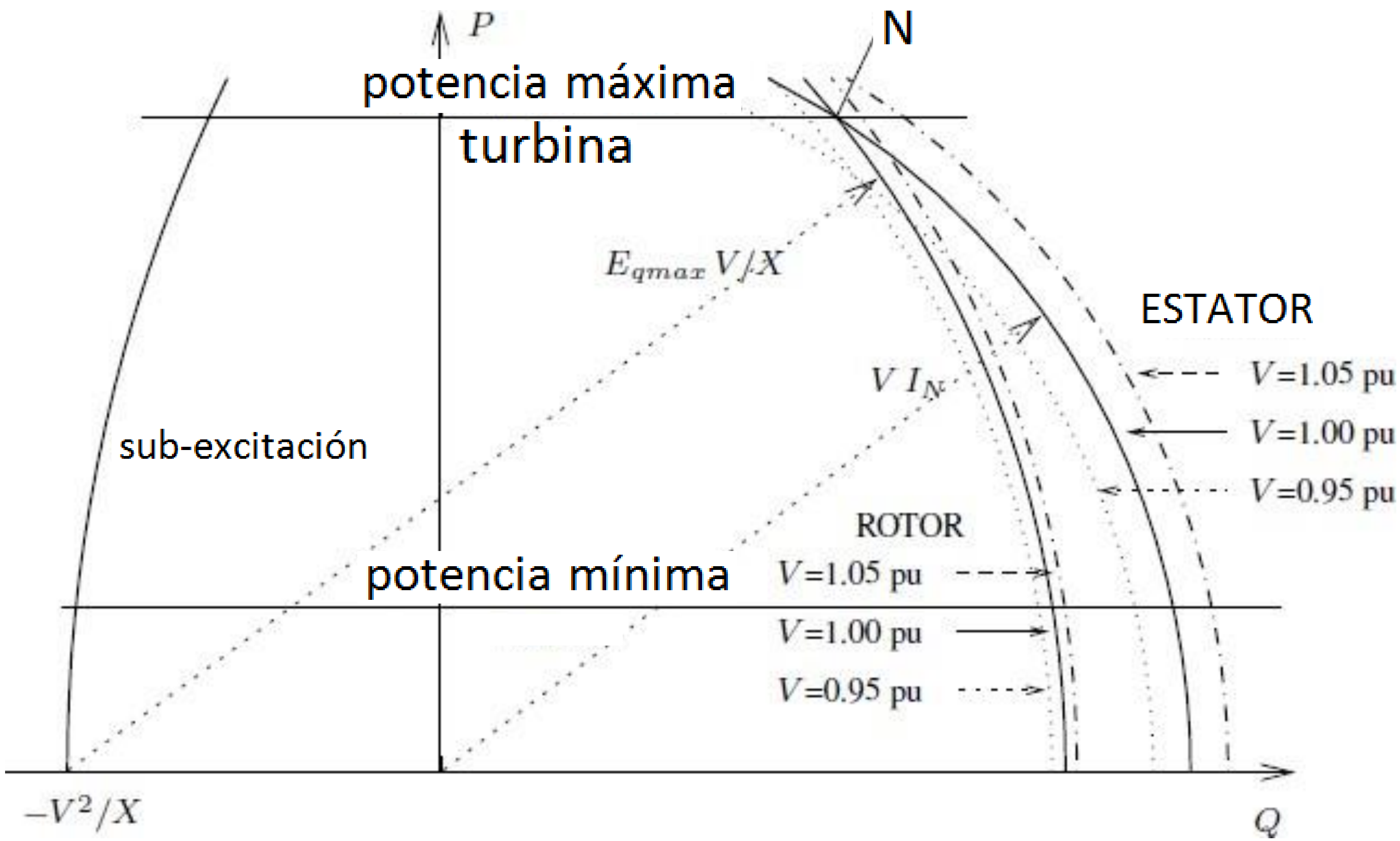
Donde $Sat(x)$ es la función de saturación.

Y para el eje q se tienen las siguientes opciones:

$$K_q = \frac{1}{1 + \frac{X_q}{X_d} Sat(x)}, \qquad K_q \approx 1 \qquad \text{ó} \qquad K_q \approx K_d.$$

Curvas de capacidad

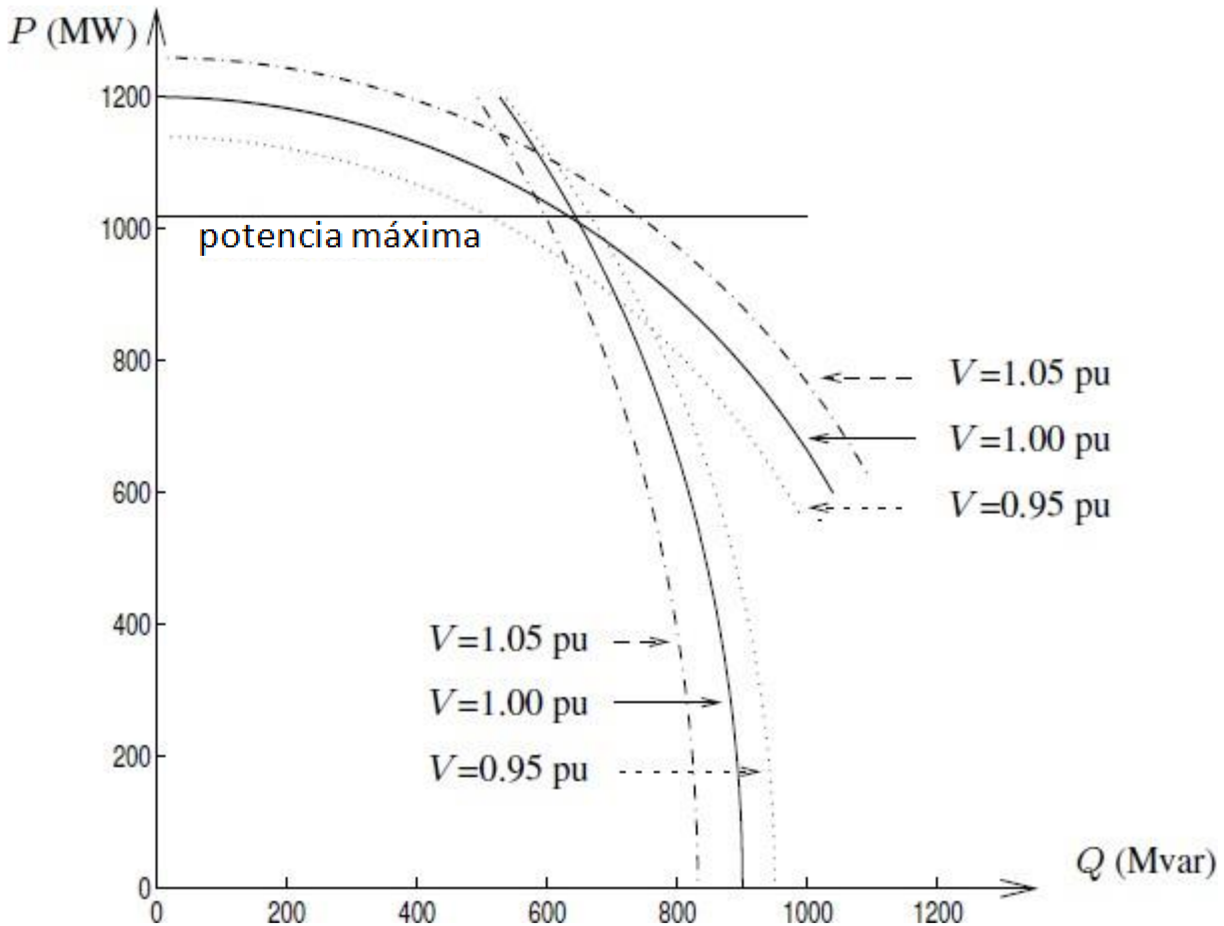
Máquina sincrónica de polos lisos (**sin considerar saturación**):



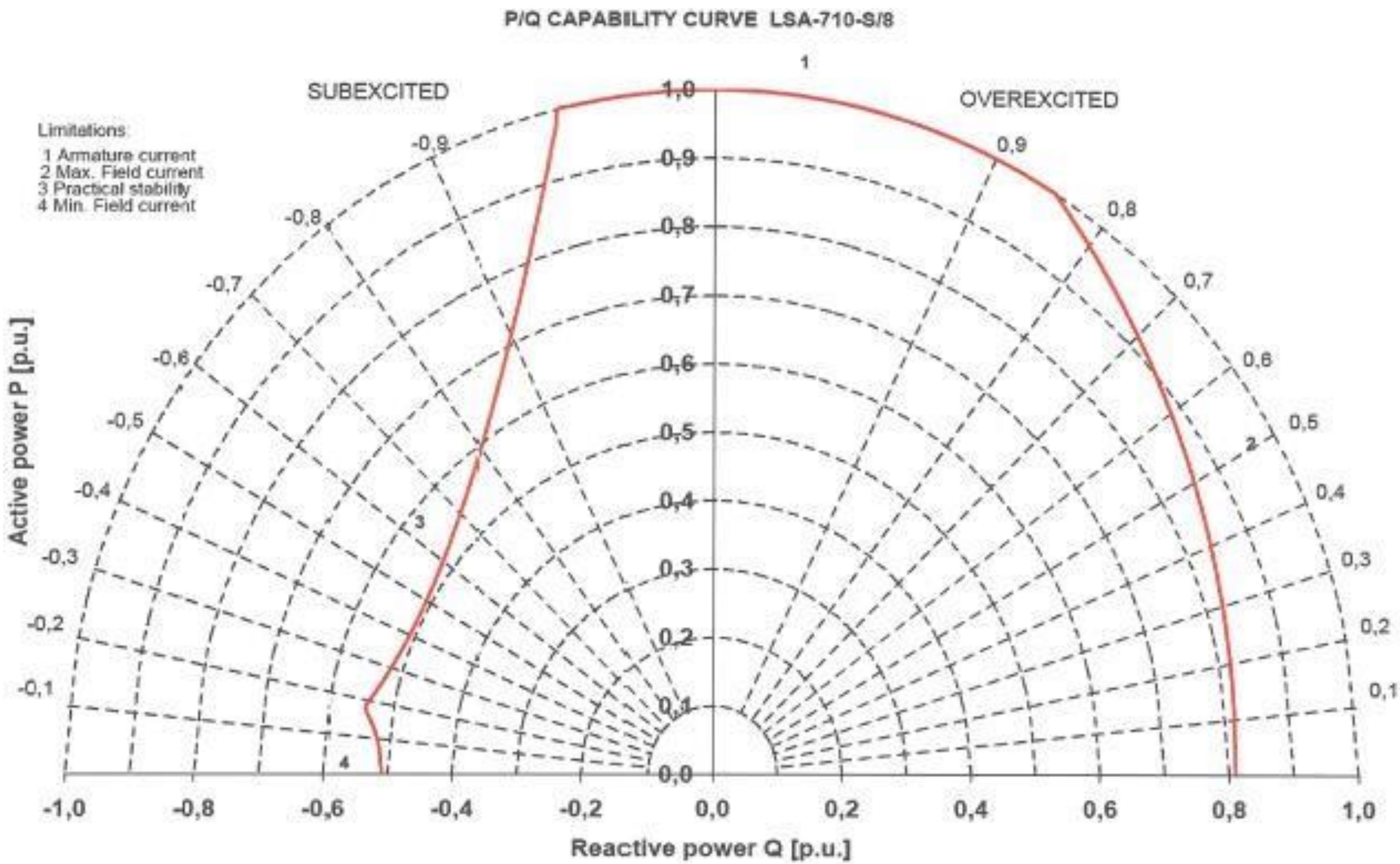
Curvas de capacidad

Curva de capacidad de un generador real en condición de sobreexcitación

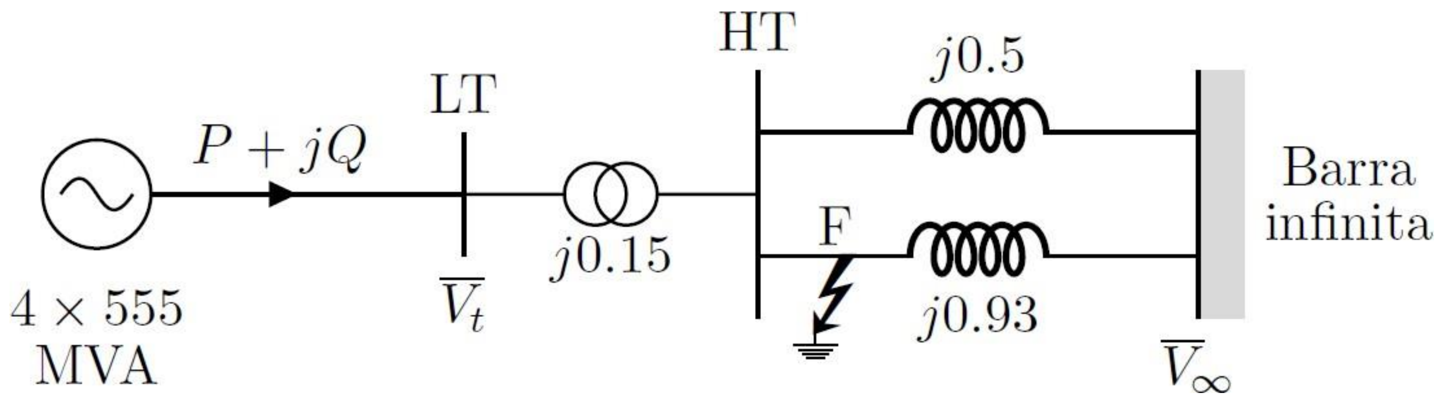
Cuando se incluye saturación en el modelo, se nota que al incrementar la tensión terminal de operación, se restringe la potencia reactiva producida debido al límite por corriente en el devanado campo.



Unidad de 3.25 MVA, 4.16 kV, f.p. 0.85, 900 rpm.



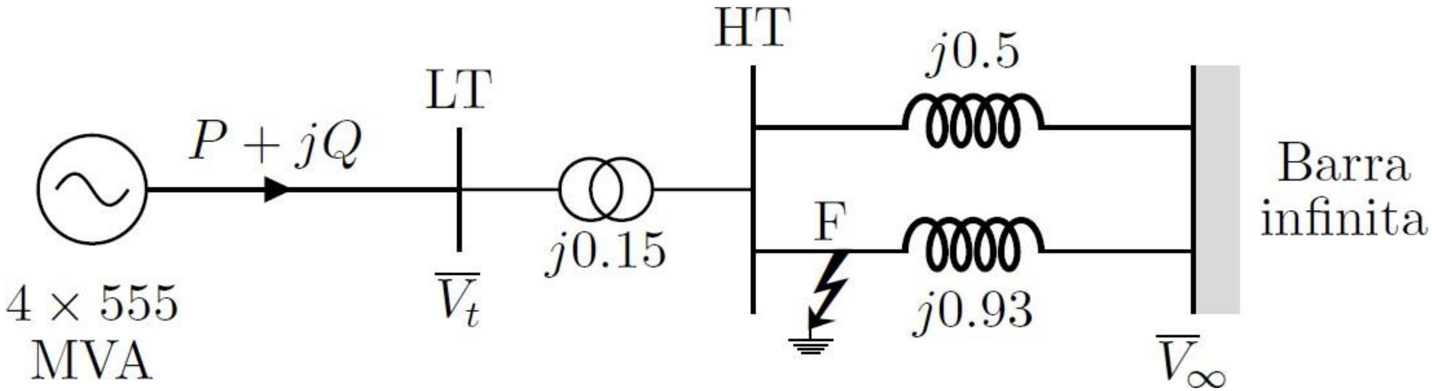
Simulación en RAMSES (o PSS/e)



$X_d = 1.81$	$X_q = 1.76$	$X'_d = 0.30$	$X'_q = 0.65$
$X''_d = 0.23$	$X''_q = 0.25$	$X_l = 0.15$	$R_a = 0.003$
$T'_{d0} = 8.0$ s	$T'_{q0} = 1.0$ s	$T''_{d0} = 0.03$ s	$T''_{q0} = 0.07$ s
$H = 3.5$	$K_D = 0$		

El generador opera a T_m y v_f constante. O sea, no tiene sistema de control de tensión de campo ni de velocidad. **Base sistema: 2220 MVA**.

Simulación en RAMSES (o PSS/e)

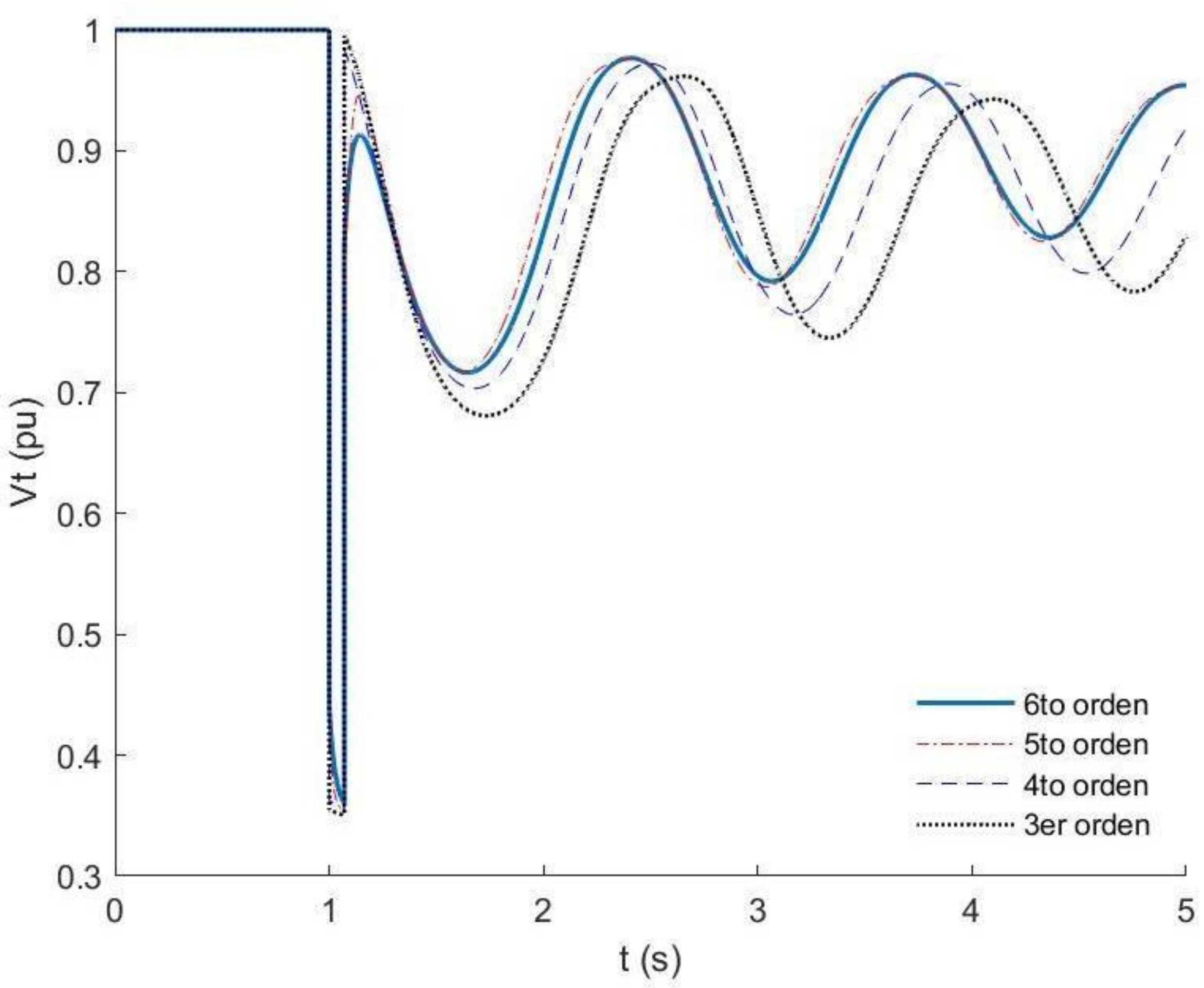


Simule la falla F. Considere modelo de generador de 6to orden.

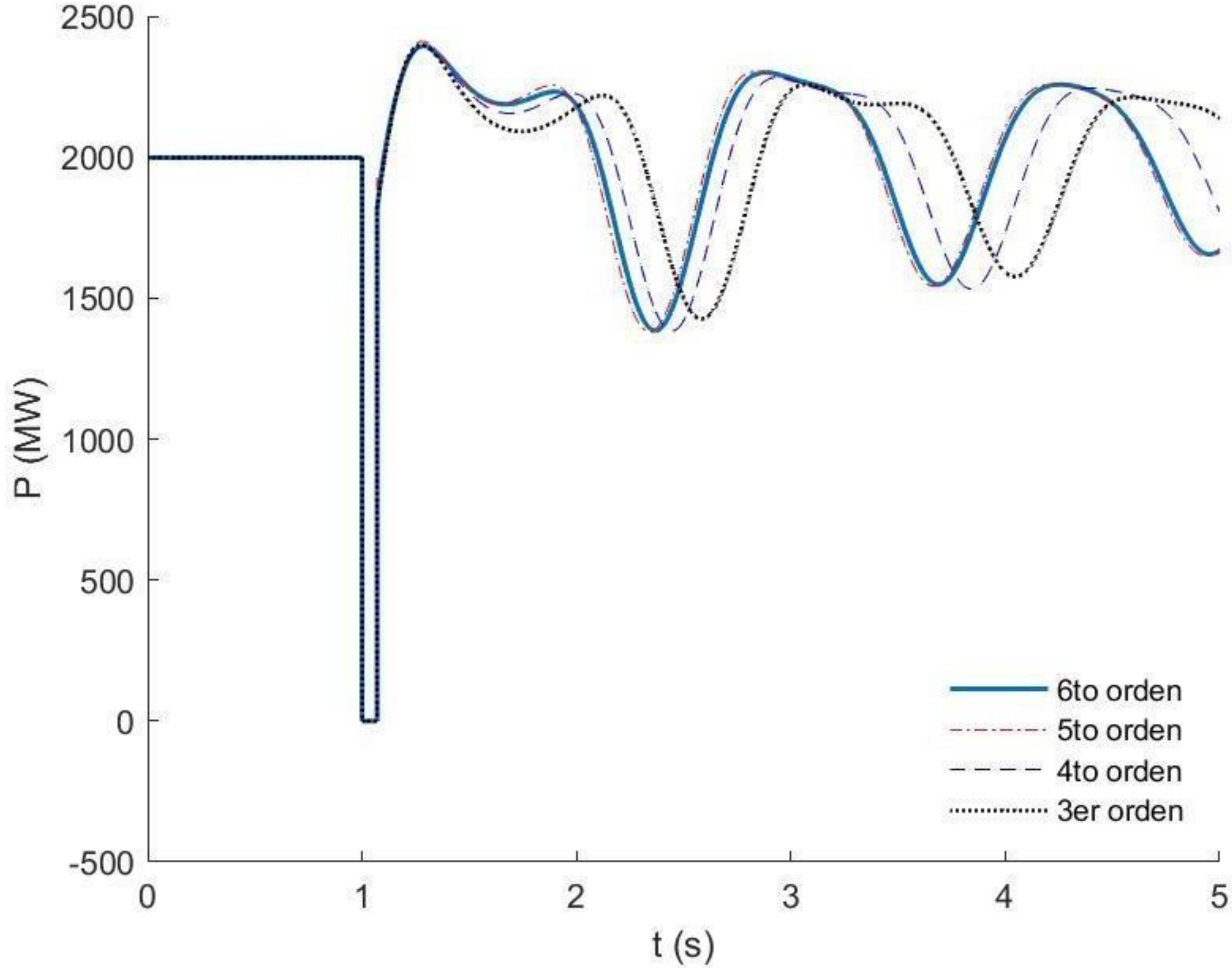
Para resolver fuera de horas contacto:

- Repita para modelo de gen. de 5to orden
- Repita para modelo de gen. de 4to orden (mantenga D=0)
- Repita para modelo de gen. de 3er orden (mantenga D=0)

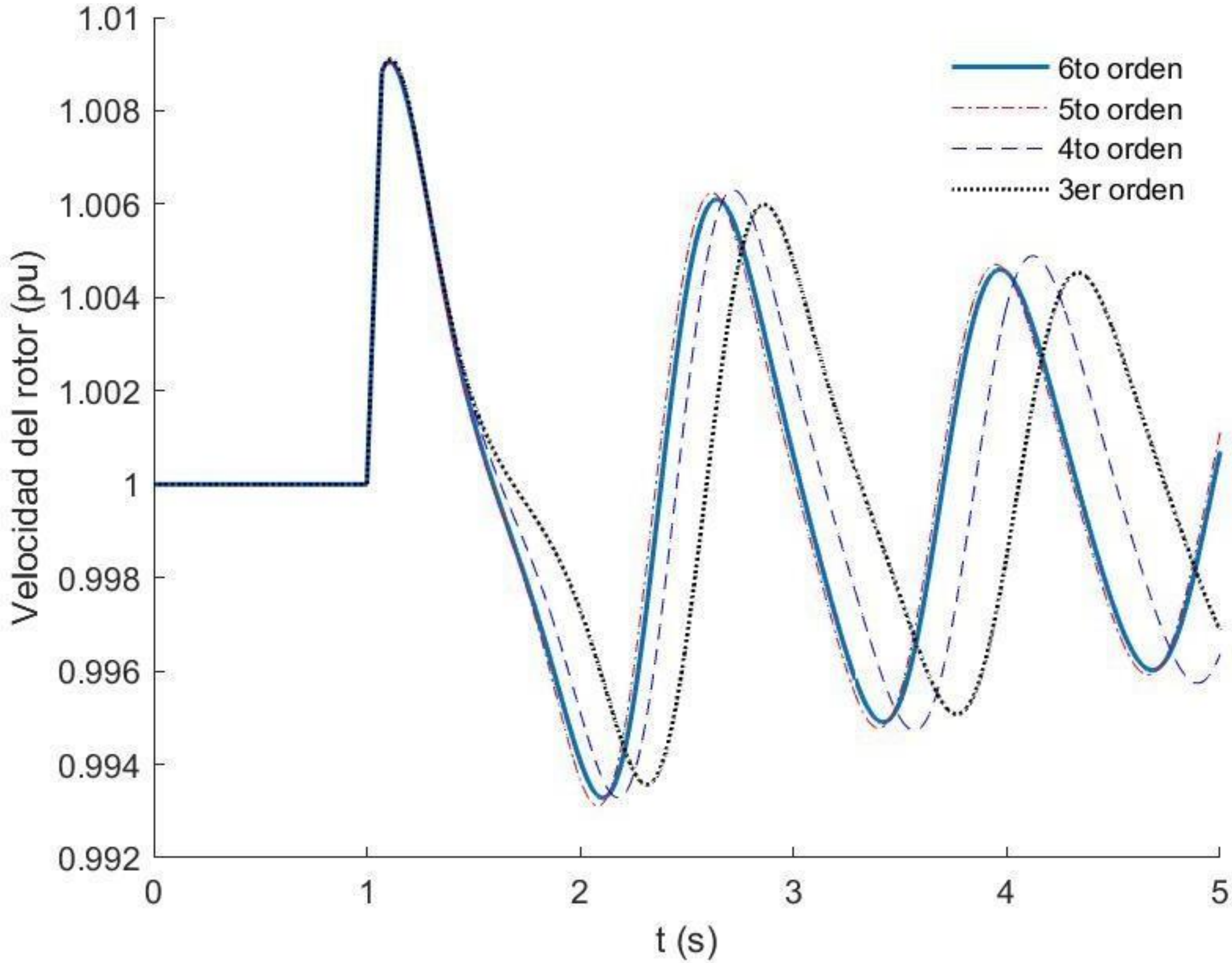
Simulación en RAMSES



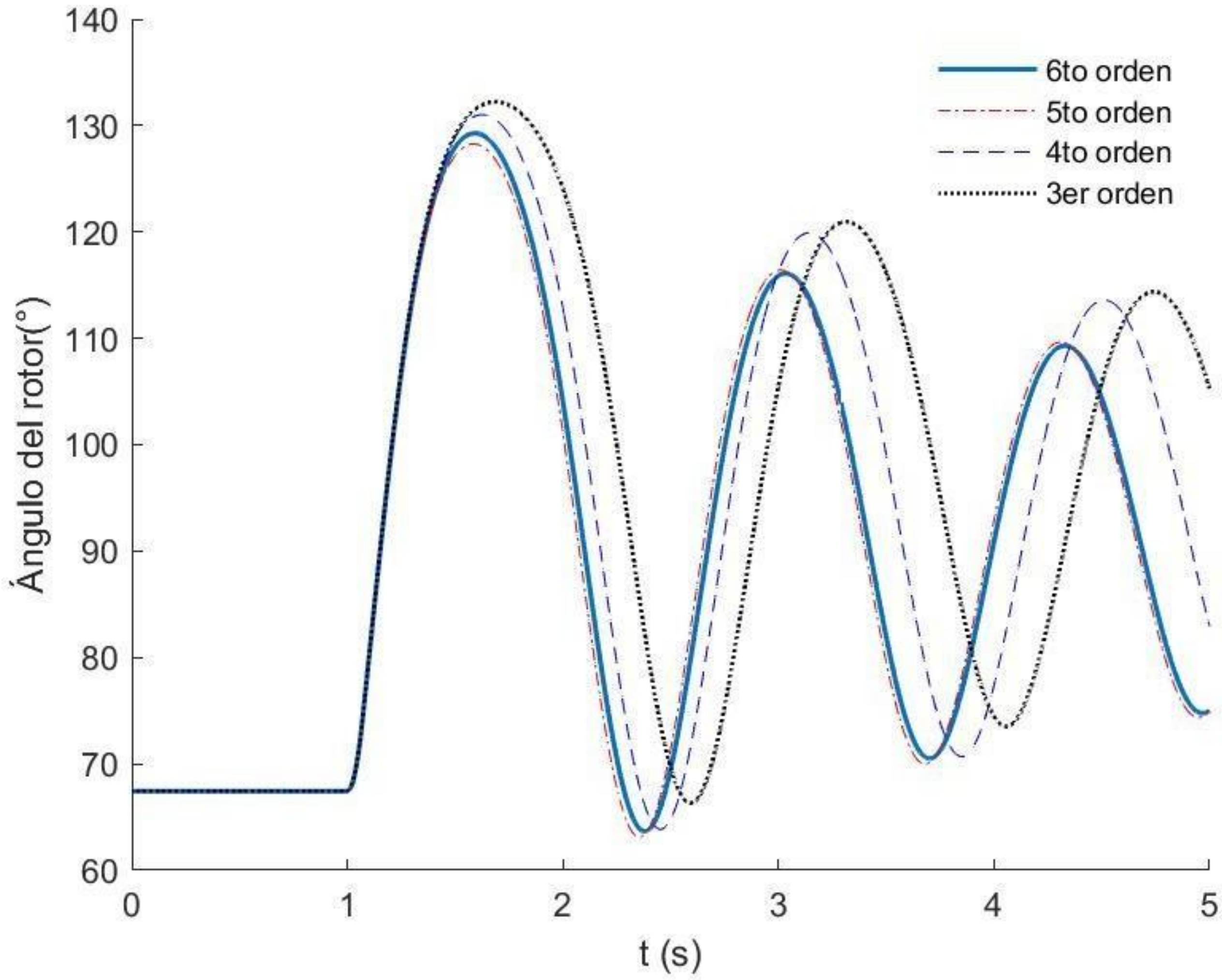
Simulación en RAMSES



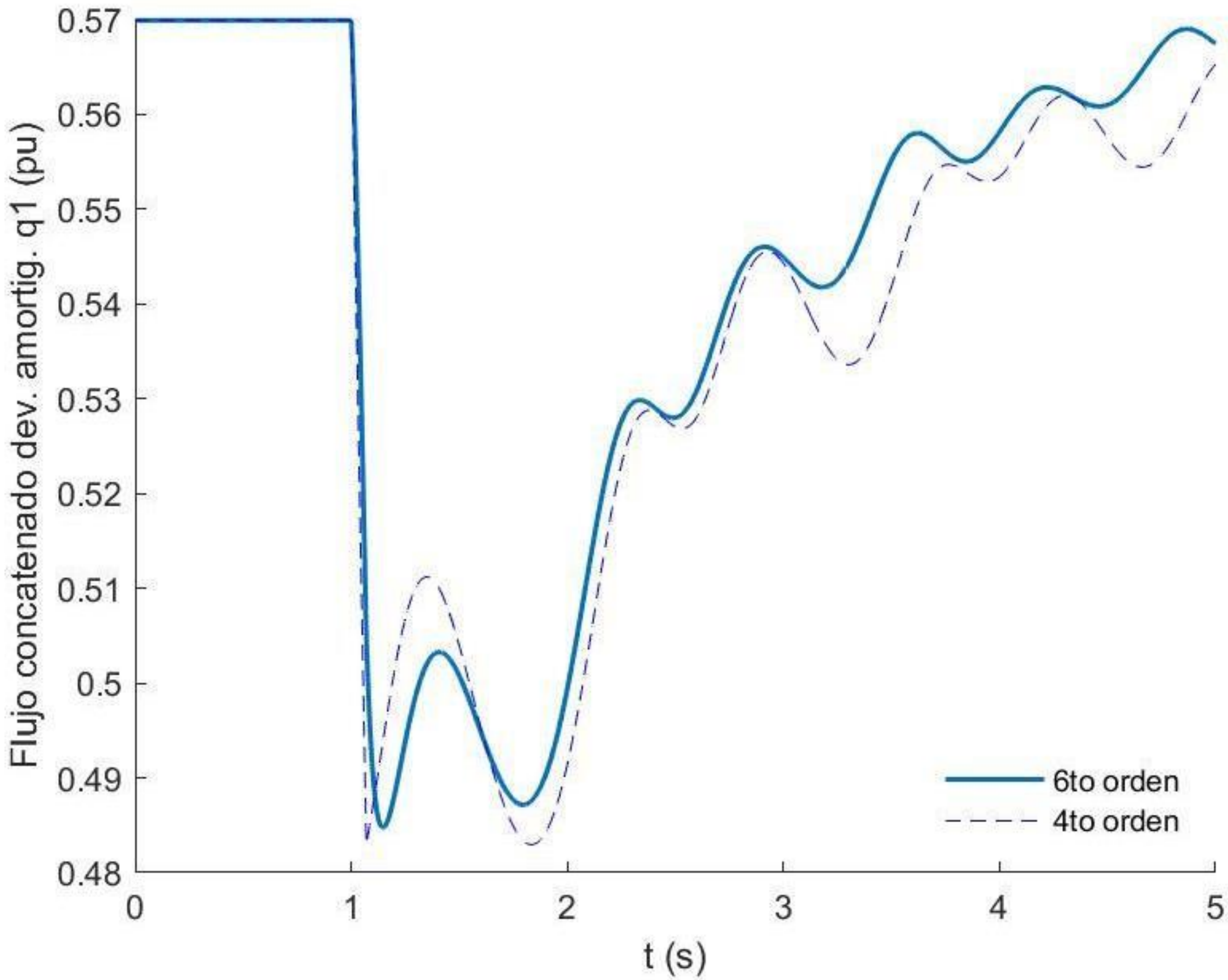
Simulación en RAMSES



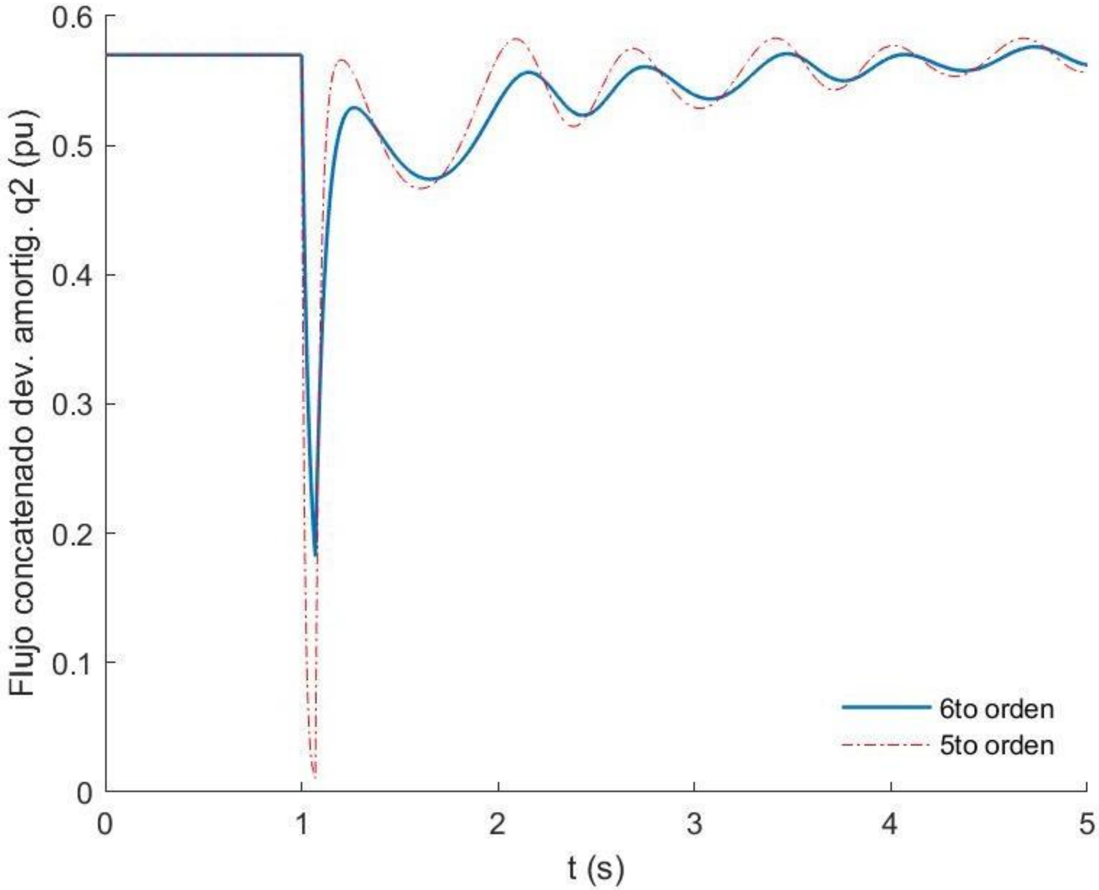
Simulación en RAMSES



Simulación en RAMSES



Simulación en RAMSES



ANEXOS

Anexo A: Variantes de Transformada de Park

Versión 1, utilizado en este curso:

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

En esta versión, los coeficientes son tales que se obtiene una transformación con potencia invariante:

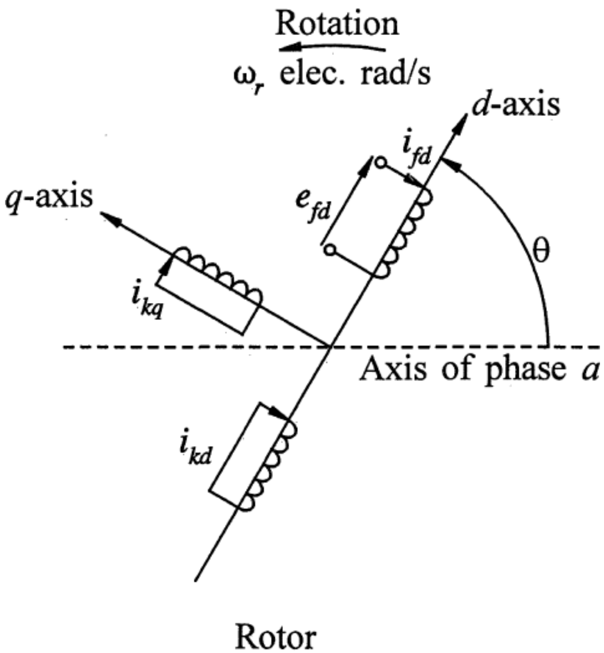
$$P_t = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c$$

$$= e_d i_d + e_q i_q + e_0 i_0$$

Anexo A: Variantes de Transformada de Park

Versión 2, eje q adelanta eje d:

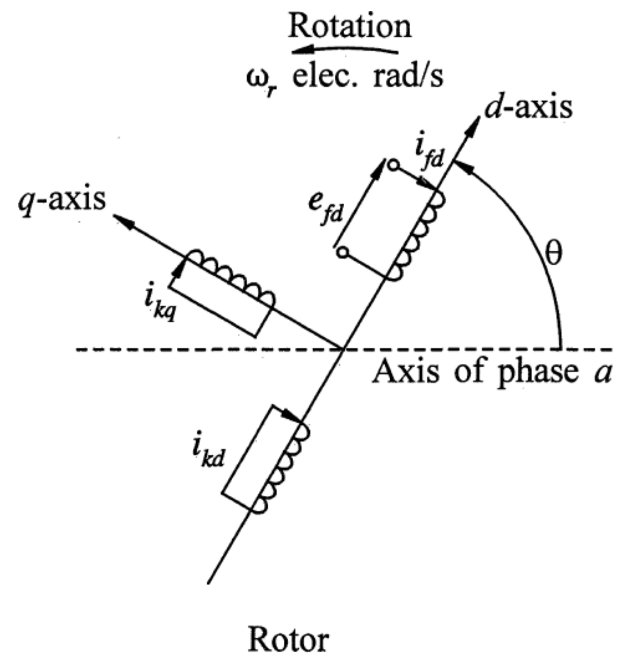
$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$



Anexo A: Variantes de Transformada de Park

Versión 3, Transformada Original, q adelanta a d:

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta-\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



$$P_t = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c \qquad P_t = \frac{3}{2}(e_d i_d + e_q i_q + 2e_0 i_0)$$

Anexo B: Ecuaciones en sistema p.u.

En el sistema p.u. se necesita definir dos valores base. Para el estator se **escoge** la tensión y potencia nominal como los valores base:

$$S_B = S_N = \sqrt{3} V_N I_N$$

$$V_B = \frac{V_N}{\sqrt{3}} \text{ , en } Y \qquad V_B = V_N \text{ , en } \Delta$$

Mientras que la corriente, impedancia e inductancia base son:

$$I_B = \frac{S_B}{3V_B} \qquad Z_B = \frac{3V_B^2}{S_B} = \frac{V_B}{I_B} \qquad L_B = \frac{Z_B}{\omega_B}$$

$$\psi_B = L_B I_B = \frac{Z_B}{\omega_B} I_B = \frac{V_B}{\omega_B} \qquad t_B = \frac{1}{\omega_B} \qquad \omega_B = 2\pi f_{no}$$

Anexo B: Ecuaciones en sistema p.u.

En el sistema p.u. las reactancias son iguales a las inductancias:

$$\frac{X}{Z_{base}} = \frac{2\pi f L}{Z_{base}}$$

con $Z_{base} = 2\pi f_{base} L_{base}$

$$\frac{X}{Z_{base}} = \frac{2\pi f L}{2\pi f_{base} L_{base}}$$

Si $f = f_{base}$

$$X_{p.u.} = L_{p.u.}$$

Anexo B: Ecuaciones en sistema p.u.

Para los devanados ficticios de Park **escogemos** las siguientes bases:

$$V_B^P = \sqrt{3} V_B$$

$$S_B^P = S_B = S_N$$

Entonces la corriente base e impedancia base son:

$$I_B^P = \frac{S_B^P}{V_B^P} = \frac{S_B}{\sqrt{3} V_B} = \sqrt{3} I_B \qquad Z_B^P = \frac{V_B^P}{I_B^P} = Z_B$$

Note que la impedancia base de los devanados ficticios de Park (en d y q) es igual a la impedancia base que calculamos para el estator.

Anexo B: Ecuaciones en sistema p.u.

Falta definir las bases para el devanado de campo:

$$S_B^f = S_B^P = S_B = S_N$$

En este caso **escogemos** una corriente base usando *el sistema recíproco de inductancias* que busca que las inductancias mutuas de devanados en el mismo eje sean iguales, en p.u.:

$$L_{df} = L_{fd1} = L_{dd1} = L_{md} \longrightarrow L_{md} = L_{dd} - L_l$$

$$L_{qq1} = L_{qq2} = L_{q1q2} = L_{mq} \longrightarrow L_{mq} = L_{qq} - L_l$$

donde L_l es la inductancia de dispersión del estator . L_{md} y L_{mq} son las inductancias de magnetización de eje directo y cuadratura

Anexo B: Ecuaciones en sistema p.u.

En el sistema recíproco de inductancias, con las inductancias en p.u.:

$$L_{df} = L_{fd1} = L_{dd1} = L_{md} \qquad L_{qq1} = L_{qq2} = L_{q1q2} = L_{mq}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{md} & L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{lf} + L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{md} & L_{ld_1} + L_{md} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l + L_{mq} & L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{lq_1} + L_{mq} & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{mq} & L_{lq_2} + L_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix}$$

L_{lf} es la inductancia de dispersión del devanado de campo

L_{ld_1} es la inductancia de dispersión del devanado de amortiguamiento *d1*.

L_{lq_1} es la inductancia de dispersión del devanado de amortiguamiento *q1*.

L_{lq_2} es la inductancia de dispersión del devanado de amortiguamiento *q2*.

Anexo B: Ecuaciones en sistema p.u.

El sistema recíproco de inductancias mutuas (*d - campo*) se logra si:

$$(L_{dd} - L_l)I_B^P = L_{df} I_B^f$$

Y despejando para I_B^f , se obtiene:

$$I_B^f = \sqrt{3} I_B \frac{L_{dd} - L_l}{L_{df}}$$

Y se calcula finalmente:

$$V_B^f = \frac{S_B^f}{I_B^f} \qquad Z_B^f = \frac{V_B^f}{I_B^f}$$

Anexo B: Ecuaciones en sistema p.u.

Las ecuación de tensión en p.u. del devanado ficticio se calcula al normalizar con respecto a $V_B^P = \sqrt{3}V_B$:

$$\frac{v_d}{\sqrt{3}V_B} = \frac{1}{\sqrt{3}V_B}\left(-R_a\, i_d - \dot{\theta}\,\psi_q - \frac{d\psi_d}{dt}\right)$$

Lo cual es equivalente a:

$$\frac{v_d}{\sqrt{3}V_B} = -\frac{R_a i_d}{\sqrt{3}Z_B I_B} - \frac{\dot{\theta}\,\psi_q}{\sqrt{3}\psi_B\omega_B} - \frac{1}{\sqrt{3}\psi_B\omega_B}\frac{d\psi_d}{dt}$$

$$\frac{v_d}{V_B^P} = -\frac{R_a i_d}{Z_B I_B^P} - \frac{\dot{\theta}\,\psi_q}{\omega_B\psi_B^P} - \frac{1}{\omega_B}\frac{d(\psi_d \mathrm{T} \psi_B^P)}{dt}$$

$$v_d = -R_a\, i_d - \dot{\theta}\,\psi_q - \frac{1}{\omega_B}\frac{d\psi_d}{dt}$$ en p.u.

Anexo C: Solución Ejemplo 2.

Un generador sincrónico trifásico de 555 MVA, 24 kV, f.p. 0.9 y 60 Hz tiene las siguientes inductancias $L_{dd} = 4.9825\, mH$, $L_{qq} = 4.8451\, mH$, $L_{df} = 48.99\, mH$ y $L_{ff} = 576.92\, mH$, y resistencias $R_a = 0.0031\, \Omega$ y $R_f = 0.0715\, \Omega$. Si sabe que $L_l = 0.4129\, mH$ determine todos los parámetros en p.u.

Valores base del estator:

$$S_B = S_N = 555\, MVA$$

$$V_B = \frac{V_N}{\sqrt{3}} = 13.856\, kV$$

$$I_B = \frac{S_B}{3V_B} = 13.351\, kA$$

$$\omega_B = 2\pi 60 = 377 \frac{rad}{s}$$

$$Z_B = \frac{3V_B^2}{S_B} = 1.03784\, \Omega$$

$$L_B = \frac{Z_B}{\omega_B} = 2.753\, mH$$

Anexo C: Solución Ejemplo 2.

Valores base del devanado de campo:

$$S_B^f = 555\, MVA$$

$$I_B^f = \sqrt{3} I_B \frac{L_{dd} - L_l}{L_{df}} = \sqrt{3}(13.351\ kA)\frac{(4.9825 - 0.4129)}{48.99} = 2.157\, kA$$

$$V_B^f = \frac{S_B^f}{I_B^f} = 257.300\, kV$$

$$Z_B^f = \frac{V_B^f}{I_B^f} = 119.29\ \Omega$$

$$L_B^f = \frac{Z_B^f}{\omega_B^f} = 316.4\, mH$$

Anexo C: Solución Ejemplo 2.

Los valores en p.u. son:

$$L_{dd}^{p.u.} = \frac{L_{dd}}{L_B} = \frac{4.9825\, mH}{2.753\, mH} = 1.81\, p.u.$$

$$L_{qq}^{p.u.} = \frac{L_{qq}}{L_B} = \frac{4.8451\, mH}{2.753\, mH} = 1.76\, p.u.$$

$$L_{l}^{p.u.} = \frac{L_{l}}{L_B} = \frac{0.4129\, mH}{2.753\, mH} = 0.15\, p.u.$$

$$L_{mq}^{p.u.} = L_{qq}^{p.u.} - L_{l}^{p.u.} = 1.61\, p.u. \qquad L_{md}^{p.u.} = L_{dd}^{p.u.} - L_{l}^{p.u.} = 1.66\, p.u.$$

$$L_{ff}^{p.u.} = \frac{L_{ff}}{L_B^f} = \frac{576.92\, mH}{316.4\, mH} = 1.823\, p.u.$$

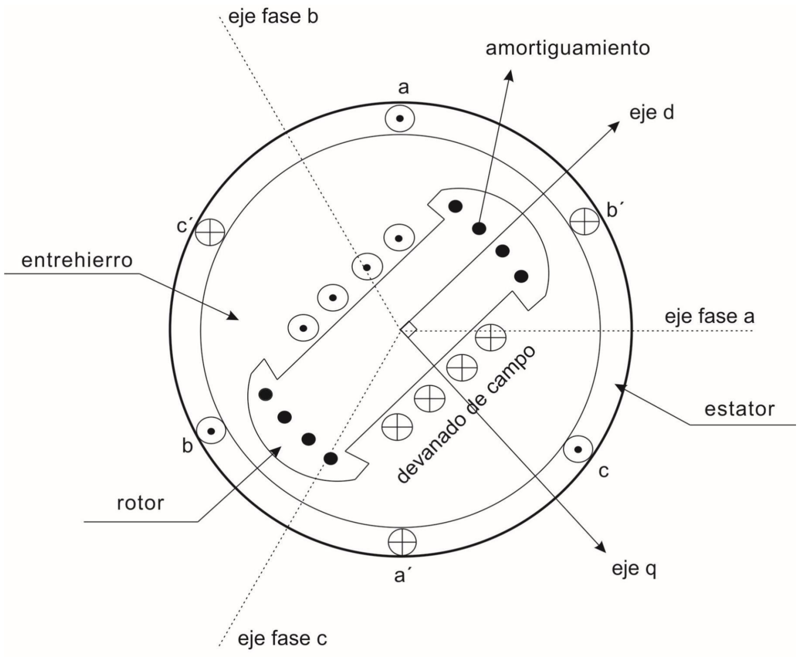
Anexo C: Solución Ejemplo 2.

Y para las resistencias:

$$R_a^{p.u.} = \frac{R_a}{Z_B} = \frac{0.0031\,\Omega}{1.03784\,\Omega} = 0.003\,p.u. \qquad R_f^{p.u.} = \frac{R_f}{Z_B^f} = \frac{0.0715\,\Omega}{119.29\,\;\Omega} = 5.9938x10^{-4}\,p.u.$$

Anexo D: Dinámica del rotor del generador

$$J\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = T_m - T_e$$



θ_m: ángulo mecánico entre un eje del rotor y otro del estator.

El ángulo eléctrico θ del rotor dependerá del número de **pares de polos** p, según:

$$\theta[°\,elec.] = p \cdot \theta_m[°\,mec.] = \omega t + \theta_0$$

La velocidad angular (mecánica) del rotor es:

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$$

Y la velocidad angular eléctrica:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = p\omega_m$$

Anexo D: Dinámica del rotor del generador

Si expresamos la ecuación de movimiento del rotor en términos de ω:

$$J\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta_m}{dt}\right) = J\frac{d}{dt}(\omega_m) = J\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega}{p}\right) = T_m - T_e$$

De modo que obtenemos:

$$J\frac{1}{p}\frac{d\omega}{dt} = T_m - T_e$$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre par base $T_B = \frac{S_B}{\omega_{mB}} = \frac{S_B}{\omega_B \mathrm{T} p}$:

$$\frac{1}{T_B}J\frac{1}{p}\frac{d\omega}{dt} = T_{m_{pu}} - T_{e_{pu}}$$

Anexo D: Dinámica del rotor del generador

Si expresamos la velocidad en p.u.:

$$\frac{1}{T_B} J \left(\frac{\omega_B}{p} \right) \frac{d\omega_{pu}}{dt} = \frac{1}{T_B} J (\omega_{mB}) \frac{d\omega_{pu}}{dt} = T_{m_{pu}} - T_{e_{pu}}$$

De modo que al sustituir $T_B = \frac{S_B}{\omega_{mB}}$ en la ecuación anterior obtenemos**:**

$$\frac{J\omega_{mB}^2}{S_B} \frac{d\omega_{pu}}{dt} = T_{m_{pu}} - T_{e_{pu}} \quad *$$

Anexo D: Dinámica del rotor del generador

Inercia

Inercia es la propiedad o tendencia de un objeto de mantenerse en reposo o en movimiento a velocidad constante.

La energía cinética (EC) almacenada en una masa rodante es:

$$EC[Ws] = \frac{1}{2} J[kgm^2] \left(\omega_m \left[\frac{rad.mec}{s} \right] \right)^2$$

La EC almacenada en los generadores síncronos provee una indicación de la inercia del sistema de potencia. La constante de inercia de un generador se define como:

$$H = \frac{energía\ cinética\ almacenada\ a\ vel.sinc.}{Potencia\ nominal\ de\ máquina} = \frac{\frac{1}{2} J \omega_m^2}{S_B} \sim \left[\frac{MW \cdot s}{MVA} \right]$$

Anexo D: Dinámica del rotor del generador

La expresión:

$$\frac{J\omega_{mB}^2}{S_B}\frac{d\omega_{pu}}{dt} = T_{m_{pu}} - T_{e_{pu}} \quad *$$

Puede expresarse en términos de $H = \frac{1}{2}\frac{J\omega_{mB}^2}{S_B}$:

$$\boxed{2H\frac{d\omega_{pu}}{dt} = T_{m_{pu}} - T_{e_{pu}}}$$

En algunos software de simulación se utiliza:

Constante de amortiguamiento.

$$\boxed{2H\frac{d\omega_{pu}}{dt} = \frac{\boldsymbol{P_{m_{pu}}} - D(\omega_{pu}-1)}{m_{\boldsymbol{pu}}} - T_{e_{pu}}}$$

Anexo D: Obtención de la ecuación de oscilación

En la literatura es usual representar la ecuación $\frac{J}{p}\frac{d^2\theta}{dt^2} = T_m - T_e$ en términos de δ, que es el ángulo eléctrico entre el eje q del rotor y un eje x que gira a la velocidad sincrónica:

$$\delta = \theta - \pi \mathrm{T} 2 - \omega_s t$$

Para esto, derivamos la ecuación anterior con respecto al tiempo:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \omega_s$$

Y si derivamos nuevamente obtenemos:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Anexo D: Obtención de la ecuación de oscilación

Sabiendo que:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{J}{p}\frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m - T_e}$$

Ecuación de oscilación

De la ecuación

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \omega_s \quad \rightarrow \quad \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s$$

Para normalizar las velocidades, dividimos en ambos lados por ω_B:

$$\frac{1}{\omega_B}\frac{d\delta}{dt} = \omega_{pu} - \omega_{s_{pu}} \quad \rightarrow \quad \dot{\delta} = \omega_B(\omega_{pu} - \omega_{s_{pu}})$$

Anexo E: Modelo Máquina en régimen permanente

La máquina opera a velocidad sincrónica

$$\theta = \theta_o + \omega_N t$$

Los devanados de amortiguamiento no conducen corriente

$$i_{d1} = i_{q1} = i_{q2} = 0$$

La corriente de campo es igual a la tensión aplicada entre la resistencia del devanado de campo:

$$i_f = \frac{V_f}{R_f}$$

La máquina opera en condiciones balanceadas

$$i_0 = 0$$

Anexo E: Modelo Máquina en régimen permanente

Caso #1: La máquina opera sin carga

$$i_a = i_b = i_c = 0$$

$$\mathbf{i}_P \;=\; \mathcal{P}\,\mathbf{i}_T \longrightarrow i_d = i_q = i_o = 0$$

Los flujos concatenados resultantes son:

$$\psi_d \;=\; L_{df} i_f$$

$$\psi_q \;=\; 0$$

A partir de las ecuaciones en d,q,0:

$$v_d \;=\; 0$$

$$v_q \;=\; \omega_N \psi_d = \omega_N L_{df} i_f$$

$$v_0 = 0$$

Anexo E: Modelo Máquina en régimen permanente

Caso #1: La máquina opera sin carga

Y regresando a variables estatóricas, la expresión de la tensión en la fase a:

$$\mathbf{v}_P = \mathcal{P}\, \mathbf{v}_T$$

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_N L_{df} i_f \sin(\theta_o + \omega_N t) = \sqrt{2} E_q \sin(\theta_o + \omega_N t)$$

$E_q = \dfrac{\omega_N L_{df} i_f}{\sqrt{3}}$ es una f.e.m. inducida en el devanado del estator debido a la corriente de campo

E_q es también la tensión rms en terminales de la máquina en condiciones de vacío

Anexo E: Modelo Máquina en régimen permanente

Caso #2: Operación con carga balanceada

$$
\begin{aligned}
v_a(t) &= \sqrt{2}V\cos(\omega_N t + \phi) \\
v_b(t) &= \sqrt{2}V\cos(\omega_N t + \phi - \frac{2\pi}{3}) \\
v_c(t) &= \sqrt{2}V\cos(\omega_N t + \phi + \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}
$$

Y las corrientes que salen del estator (conv. gen.):

$$
\begin{aligned}
i_a(t) &= \sqrt{2}I\cos(\omega_N t + \psi) \\
i_b(t) &= \sqrt{2}I\cos(\omega_N t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\
i_c(t) &= \sqrt{2}I\cos(\omega_N t + \psi + \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}
$$

Caso #2: Operación con carga balanceada

Utilizando la transformada de Park para corrientes, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
i_d &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}I\,[\cos(\theta_o+\omega_N t)\cos(\omega_N t+\psi)+\cos(\theta_o+\omega_N t-\frac{2\pi}{3})\cos(\omega_N t+\psi-\frac{2\pi}{3}) \\
&\quad +\cos(\theta_o+\omega_N t+\frac{2\pi}{3})\cos(\omega_N t+\psi+\frac{2\pi}{3})] \\
&= \frac{I}{\sqrt{3}}[\cos(\theta_o+2\omega_N t+\psi)+\cos(\theta_o+2\omega_N t+\psi-\frac{4\pi}{3})+\cos(\theta_o+2\omega_N t+\psi+\frac{4\pi}{3}) \\
&\quad +3\cos(\theta_o-\psi)] \quad = \quad \sqrt{3}I\cos(\theta_o-\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_q &= \sqrt{3}I\sin(\theta_o-\psi) \\
i_o &= 0
\end{aligned}
$$

Para las tensiones:

$$
v_d = \sqrt{3}V\cos(\theta_o-\phi) \qquad v_q = \sqrt{3}V\sin(\theta_o-\phi) \qquad v_o = 0
$$

Caso #2: Operación con carga balanceada

Note que en condiciones balanceadas las corrientes i_d e i_q son constantes

De acuerdo a las ecuaciones anteriores, los flujos también son constantes:

$$\psi_d = L_{dd} i_d + L_{df} i_f \qquad \psi_q = L_{qq} i_q$$

Entonces, para régimen permanente las ecuaciones de Park se expresan como:

$$v_d = -R_a i_d - \omega_N L_{qq} i_q = -R_a i_d - X_q i_q$$

$$v_q = -R_a i_q + \omega_N L_{dd} i_d + \omega_N L_{df} i_f = -R_a i_q + X_d i_d + \sqrt{3} E_q$$

Las reactancias $X_d = \omega_N L_{dd}$ y $X_q = \omega_N L_{qq}$ se conocen como reactancias de eje directo y cuadratura. **Para una máquina de polos lisos**

$$X_d = X_q.$$

Caso #2: Operación con carga balanceada

$$v_d = -R_a i_d - \omega_N L_{qq} i_q = -R_a i_d - X_q i_q$$

$$v_q = -R_a i_q + \omega_N L_{dd} i_d + \omega_N L_{df} i_f = -R_a i_q + X_d i_d + \sqrt{3} E_q$$

$-R_a i_d$ y $-R_a i_q$ representan la caída en la resistencia de armadura

$$\left.\begin{array}{l} -\omega_N L_{qq} i_q \\ \omega_N L_{dd} i_d \end{array}\right\} \text{Reacción del inducido}$$

E_q es la f.e.m. definida anteriormente y que depende de la corriente de campo

Anexo E: Modelo Máquina en régimen permanente

A partir de las relaciones anteriores, es demostrable que:

$$V\cos(\theta_o - \phi) \;=\; -R_a I\cos(\theta_o - \psi) - X_q I\sin(\theta_o - \psi)$$

$$V\sin(\theta_o - \phi) \;=\; -R_a I\sin(\theta_o - \psi) + X_d I\cos(\theta_o - \psi) + E_q$$

Estas ecuaciones son de hecho las proyecciones resultantes de la ecuación compleja:

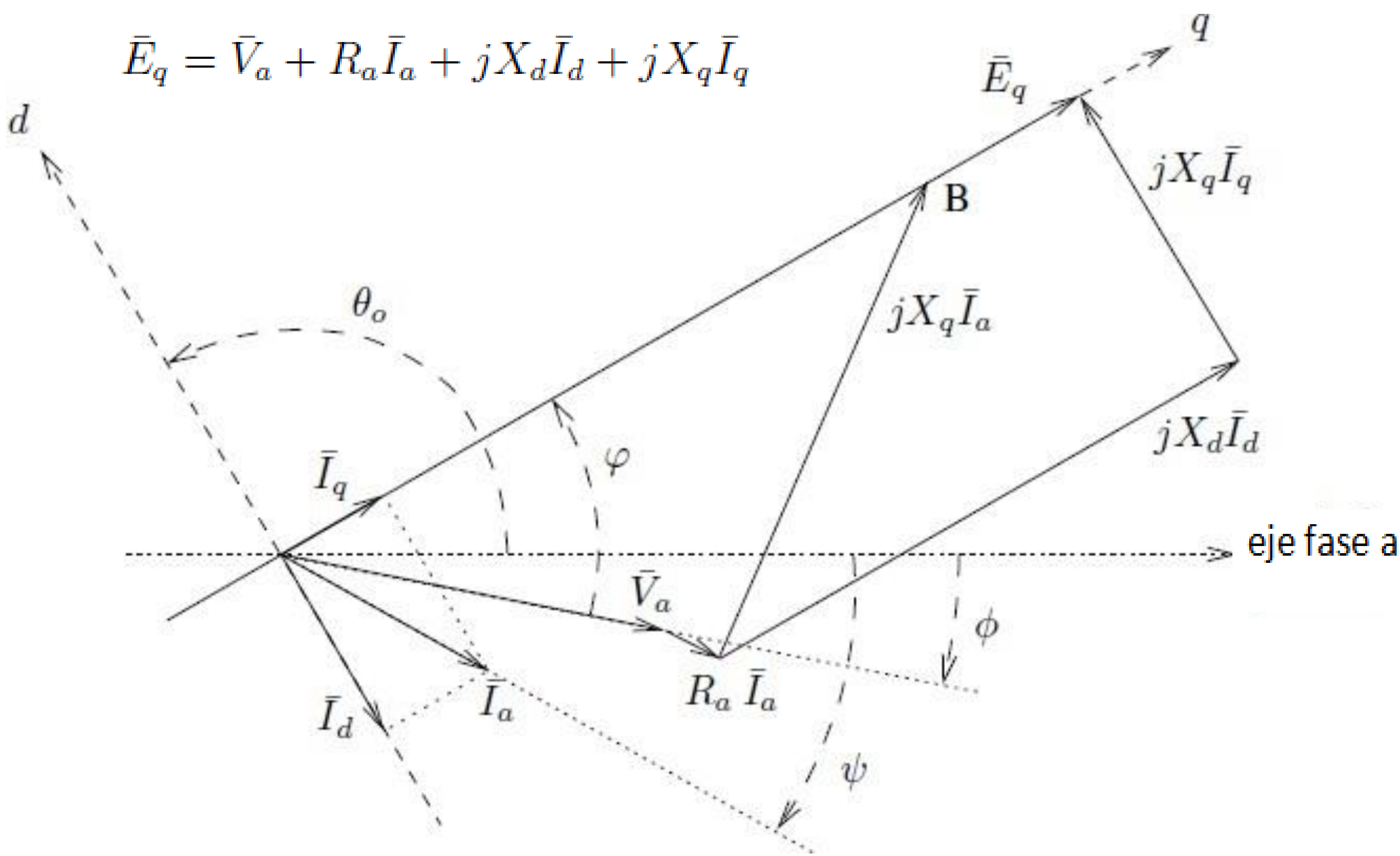
$$\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_d\bar{I}_d + jX_q\bar{I}_q$$

$\bar{E}_q$ es un fasor de f.e.m alineado con el eje q

$\bar{I}_d$ y $\bar{I}_q$ son las proyecciones de $\bar{I}_a$ en los ejes d y q respectivamente

Diagrama Fasorial (polos salientes)

$$\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_d\bar{I}_d + jX_q\bar{I}_q$$



Modelo en régimen permanente (polos salientes)

$$\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_d\bar{I}_d + jX_q\bar{I}_q$$

$$\bar{E}_q = E_q e^{j(\theta_o - \frac{\pi}{2})}$$

$$\bar{I}_d = I\cos(\theta_o - \psi)e^{j\theta_o} = \frac{i_d}{\sqrt{3}}e^{j\theta_o}$$

$$\bar{I}_q = I\sin(\theta_o - \psi)e^{j(\theta_o - \frac{\pi}{2})} = -j\frac{i_q}{\sqrt{3}}e^{j\theta_o}$$

$$\bar{I}_a = \bar{I}_d + \bar{I}_q = (\frac{i_d}{\sqrt{3}} - j\frac{i_q}{\sqrt{3}})e^{j\theta_o}$$

Para obtener $\bar{I}_d$ e $\bar{I}_q$ debemos encontrar el ángulo entre eje q y la tensión $\bar{V}_a$

Modelo en régimen permanente (polos salientes)

A partir del diagrama fasorial, es demostrable que la expresión:

$$\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_d\bar{I}_d + jX_q\bar{I}_q$$

Es igual a:

$$\boxed{\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_q\bar{I}_a + j(X_d - X_q)\bar{I}_d}$$

Ó:

$$\bar{E}_q = \bar{E}_Q + j(X_d - X_q)\bar{I}_d$$

$$\bar{E}_Q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_q\bar{I}_a$$

Note que $\bar{E}_Q$ se encuentra sobre el eje q, entonces si calculamos el ángulo de este fasor, también calculamos la posición del eje q con respecto a $\bar{V}_a$

Ejemplo Anexo E1:

Un generador hidroeléctrico trifásico de 325 MVA, 20 kV, f.p. 0.85 y 60 Hz tiene los siguientes parámetros: $R_a = 0.00234\,\Omega$, $X_d = 1.0467\,\Omega$ y $X_q = 0.5911\,\Omega$. Para condición de operación nominal determine $\bar{E}_Q$, $\bar{E}_q$ y el ángulo interno φ.

Solución:

$$|S_N| = \sqrt{3}|\bar{V}_N||\bar{I}_N|$$

$$|\bar{I}_N| = \frac{|S_N|}{\sqrt{3}|\bar{V}_N|} = \frac{325MVA}{\sqrt{3}\cdot 20kV} = 9.3819\,kA$$

A partir del factor de potencia:

$$\phi - \psi = \cos^{-1}(0.85) = 31.8°$$

Ejemplo Anexo E1:

Si usamos la tensión en terminales como la referencia entonces $\phi = 0$ y $\psi = -31.8°$

$$\Rightarrow \bar{V}_a = \frac{20}{\sqrt{3}} < 0° \, kV$$

$$\Rightarrow \bar{I}_a = 9.3819 \; < -31.8° \, kA$$

Y se calcula

$$\bar{E}_Q = \bar{V}_a + R_a \bar{I}_a + jX_q \bar{I}_a = \frac{20000}{\sqrt{3}} + (0.00234 + j0.5911) \cdot 9381.9 < -31.8°$$

$$\bar{E}_Q = 15.231 \; < \; 18° \, kV$$

Como $\bar{E}_Q$ coincide con el eje en cuadratura, entonces $\varphi = 18°$, y el ángulo del eje directo es $\theta_0 = 90 + \varphi = 108°$, con respecto a la referencia $\bar{V}_a$.

Ejemplo Anexo E1:

Ahora,

$$\bar{I_d} = |\bar{I_a}|\cos(\theta_0 - \psi)\, e^{j\theta_0} = 9.3819\ \cos(108° + 31.8°) < 108°\, kA$$

$$\bar{I_d} = 9.3819\ (-0.7638) < 108°\, kA$$

$$\bar{I_d} = -7.1628 < 108°\, kA \longrightarrow \bar{I_d} = 7.1628 < -72°\, kA$$

$$\bar{E}_q = \bar{E}_Q + j(X_d - X_q)\bar{I_d}$$

$$\bar{E}_q = 15200 < 18° + j(1.0467 - 0.5911)(7162.8 < -72°)$$

$$\bar{E}_q = 15200 < 18° + (1.0467 - 0.5911)(7162.8 < 18°)$$

$$\bar{E}_q = 18.494 < 18°\, kV$$

Modelo en régimen permanente (polos lisos)

Partimos de $\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_d\bar{I}_d + jX_q\bar{I}_q$

$$X_d = X_q = X_s$$

$$\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_s(\bar{I}_d + \bar{I}_q)$$

$$\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a\bar{I}_a + jX_s\bar{I}_a$$

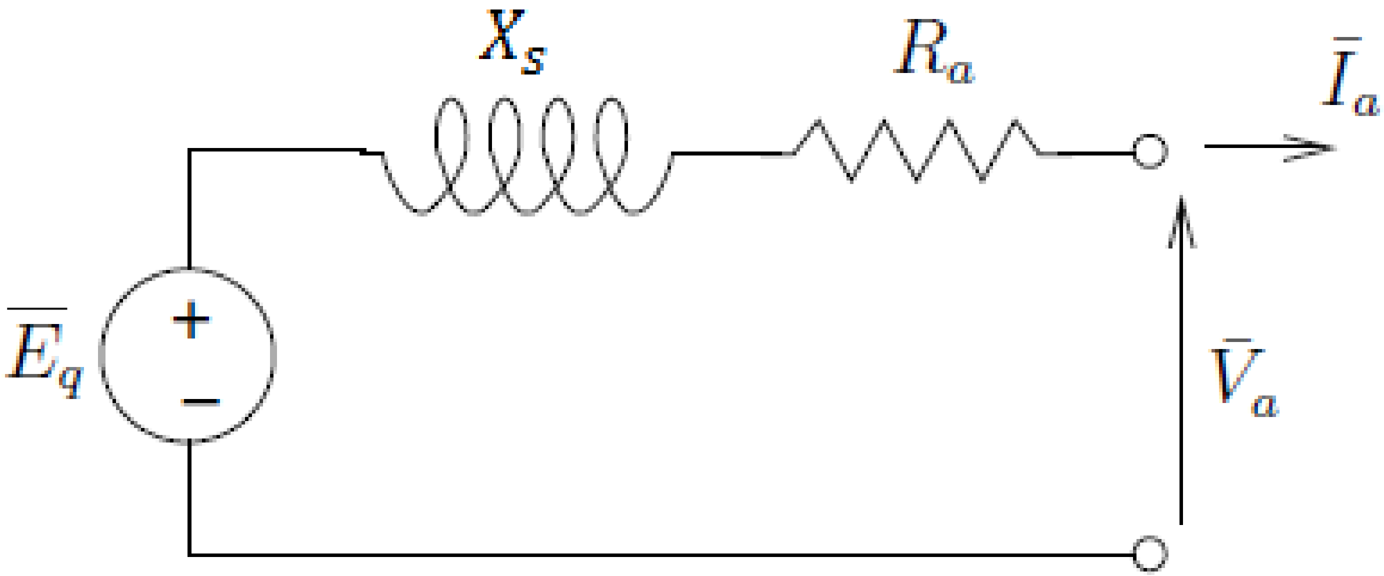


Diagrama Fasorial (polos lisos)

$$\bar{E}_q = \bar{V}_a + R_a \bar{I}_a + jX_s \bar{I}_a$$