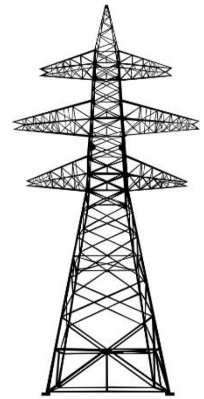
EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica



Transmisión de Potencia

IE-0365

Dr. Gustavo Valverde Mora
Profesor Catedrático

gustavo.valverde@ucr.ac.cr

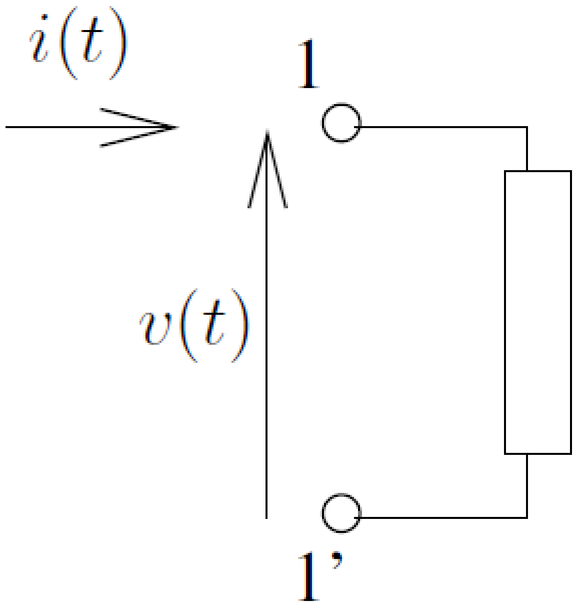
Introducción Personal

Introducción Estudiantes

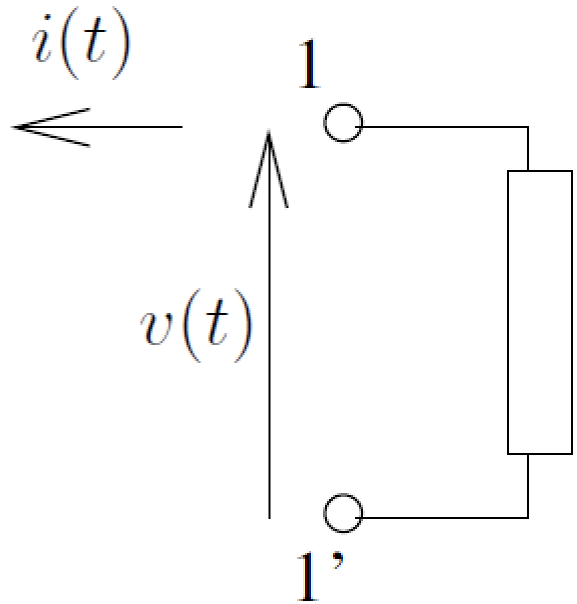
Carta al Estudiante

Convención y simbología

Convención y simbología usada en el curso:



Elemento tipo carga



Elemento tipo generador

Régimen sinusoidal: fasores

En régimen sinusoidal, toda tensión se representa por la forma:

$$v(t) = \sqrt{2}\, V \ \cos(\omega t + \phi)$$

- $\sqrt{2}V$ es el valor de cresta, o pico de la tensión sinusoidal.
- V es el valor eficaz (representa valor de tensión en CC que aplicada a una resistencia, disipa la misma potencia que al aplicarle la tensión sinusoidal).
- $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$
- ϕ es el ángulo de desfase de la tensión con respecto a una referencia arbitraria cuando t=0.

Régimen sinusoidal: fasores

Similarmente, para las corrientes:

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \ \cos(\omega t + \psi)$$

Se definen entonces las siguientes cantidades complejas:

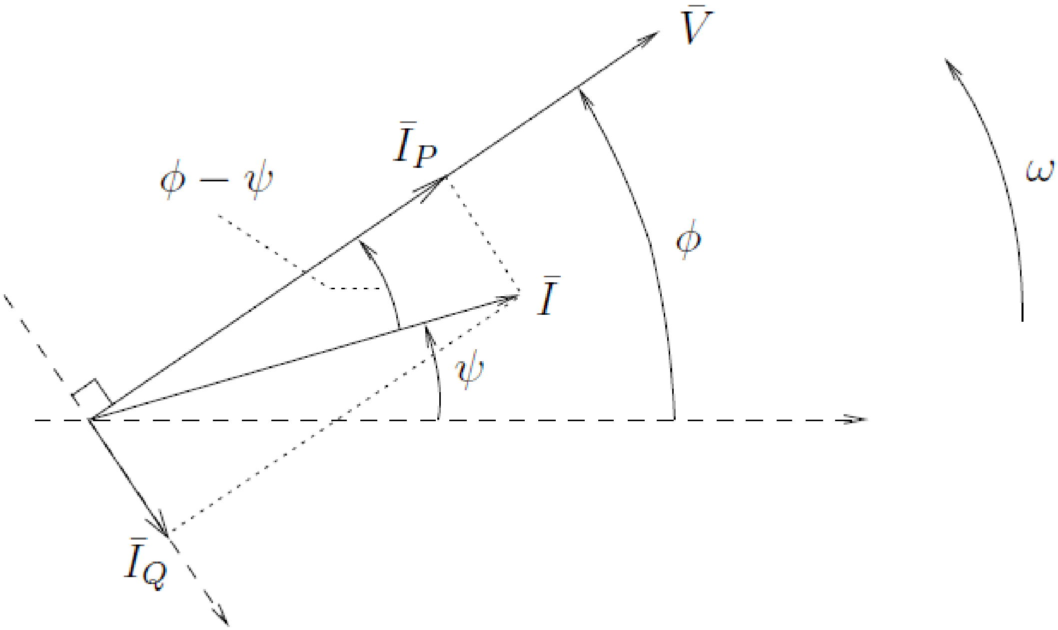
$$\bar{V} \;=\; V\, e^{j\phi} \longrightarrow \text{Fasor de } v(t)$$
$$\bar{I} \;=\; I\, e^{j\psi} \longrightarrow \text{Fasor de } i(t)$$

Note que:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2}\, re\left(V\, e^{j(\omega t+\phi)}\right) = \sqrt{2}\, re\left(\bar{V}\, e^{j\omega t}\right) \\ i(t) &= \sqrt{2}\, re\left(I\, e^{j(\omega t+\psi)}\right) = \sqrt{2}\, re\left(\bar{I}\, e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

Régimen sinusoidal: fasores

En el plano complejo, $\bar{V}\ e^{j\omega t}$ y $\bar{I}\ e^{j\omega t}$ se pueden asociar a vectores que rotan. La amplitud sinusoidal siempre es igual a $\sqrt{2}$ veces la proyección en el eje real del vector giratorio correspondiente.



$$
\begin{aligned}
v(t) &= \sqrt{2}\, re\left(\bar{V}\ e^{j\omega t}\right) \\
i(t) &= \sqrt{2}\, re\left(\bar{I}\ e^{j\omega t}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

La tensión $169{,}7\cos(\omega t + 60°)$ V en representación fasorial es:

Polar:

Rectangular:

La corriente $100\cos(\omega t + 45°)$ A en representación fasorial es:

Polar:

Rectangular:

Potencias Instantáneas

Expresamos la corriente instantánea $i(t)$ en función de corrientes activa y reactiva:

$$\begin{aligned} i(t) &= \sqrt{2}\, re\left(\bar{I}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\, re\left(\bar{I}_P e^{j\omega t} + \bar{I}_Q e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\, re\left(I_P e^{j(\omega t+\phi)} + I_Q e^{j(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \sqrt{2} I_P \cos(\omega t+\phi) + \sqrt{2} I_Q \sin(\omega t+\phi) \end{aligned}$$

Y recordando que $v(t) = \sqrt{2}\, V \ \cos(\omega t + \phi)$

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)\, i(t) &= 2VI_P \ \cos^2(\omega t+\phi) + 2VI_Q \ \cos(\omega t+\phi)\sin(\omega t+\phi) \\ &= \underbrace{VI_P \ [1+\cos 2(\omega t+\phi)]}_{\text{activo}} + \underbrace{VI_Q \ \sin 2(\omega t+\phi)}_{\text{reactivo}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)\, i(t) &= 2VI_P \ \cos^2(\omega t + \phi) + 2VI_Q \ \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \\ &= \underbrace{VI_P \ [1 + \cos 2(\omega t + \phi)]}_{\text{activo}} + \underbrace{VI_Q \ \sin 2(\omega t + \phi)}_{\text{reactivo}} \end{aligned}$$

- La potencia instantánea es la suma de dos componentes, una relacionada a la corriente activa, y la otra reactiva.
- La componente activa presenta un valor constante y un término oscilatorio de doble frecuencia. La suma de estos términos no cambia nunca el signo de dicha componente
- La componente relacionada a la corriente reactiva es oscilatoria, y tiene un valor promedio de cero.
- El valor promedio de la componente relacionada a la corriente activa se llama potencia activa:

$$P = V\, I_P \qquad\qquad P = V\, I \ \cos(\phi - \psi)$$

- La amplitud de la componente relacionada a la corriente reactiva se llama potencia reactiva:

$$Q = V\, I_Q \qquad\qquad Q = V\, I \ \sin(\phi - \psi)$$

$$
\begin{aligned}
p(t) = v(t)\, i(t) \quad &= \quad 2VI_P \ \cos^2(\omega t + \phi) + 2VI_Q \ \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \\
&= \quad \underbrace{VI_P \ [1 + \cos 2(\omega t + \phi)]}_{\text{activo}} + \underbrace{VI_Q \ \sin 2(\omega t + \phi)}_{\text{reactivo}}
\end{aligned}
$$

- En un circuito RLC, el desfase de la corriente con respecto a la tensión se debe al componente reactivo, debido a los elementos L y C.
- La potencia $VI_Q \ \sin 2(\omega t + \phi)$ se relaciona con la energía magnética $W_m = \frac{1}{2}Li^2$ almacenada en el inductor y en la energía electrostática $W_e = \frac{1}{2}Cv^2$ almacenada en el capacitor.
- La suma de los términos oscilatorios se llama potencia fluctuante (con valores de I_P e I_Q sustituidos en la expresión de $p(t)$):

$$
p_f(t) = VI\cos(\phi - \psi)\cos 2(\omega t + \phi) + VI\sin(\phi - \psi)\sin 2(\omega t + \phi) = VI\cos(2\omega t + \phi + \psi)
$$

- Esta potencia fluctuante tiene valor promedio igual a cero. Esta potencia no se asocia a ningún trabajo útil. De hecho solo la potencia activa es el único componente útil.

El producto $S = VI$ se le llama potencia aparente y sus unidades son los Volt-Ampere (VA).

La potencia compleja se define como $\bar{S} = \bar{V}\,\bar{I}^{\star}$, o sea:

$$\bar{S} = Ve^{j\phi}Ie^{-j\psi} = VIe^{j(\phi-\psi)} = VI\cos(\phi-\psi) + jVI\sin(\phi-\psi) = P + jQ$$

La magnitud de la potencia compleja se calcula:

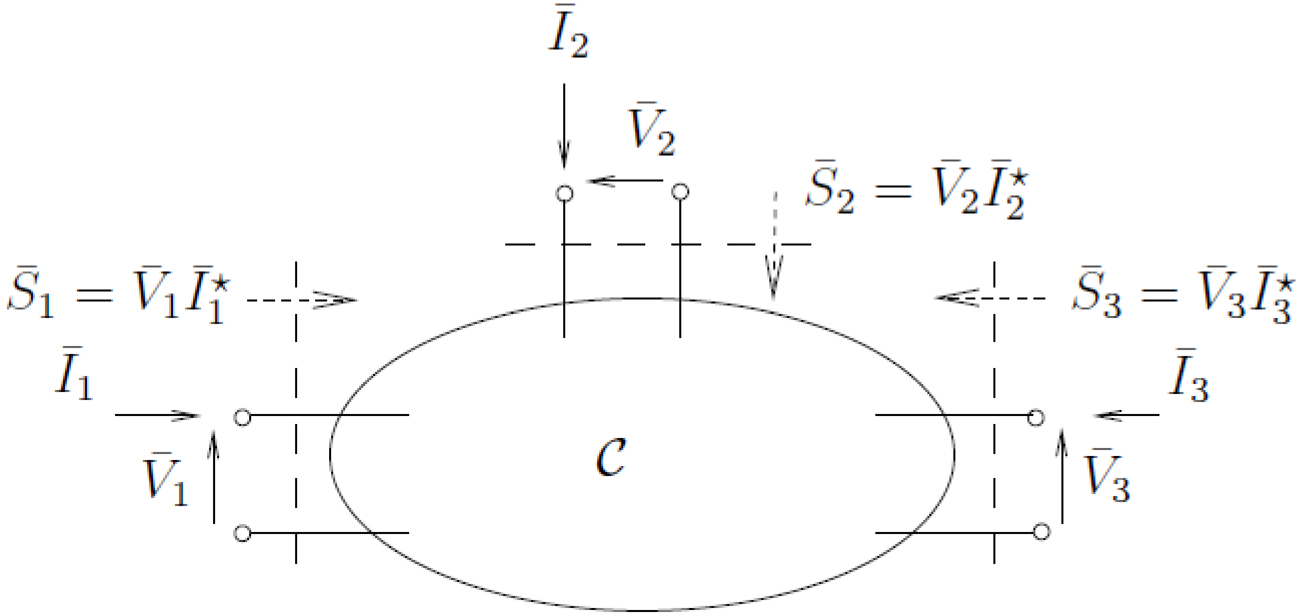
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI$$

Teorema de conservación de la potencia compleja: En un circuito alimentado por fuentes sinusoidales que operan a la misma frecuencia, la suma de las potencias complejas que entran al circuito es igual a la suma de las potencias complejas consumidas por cargas y elementos pasivos del circuito.

Teorema de conservación de la potencia compleja:

$$\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = \sum_i \bar{S}_{bi}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = \sum_i P_{bi}$$



Expresiones de potencia en elementos

$\bar{V} = Z\bar{I} = (R + jX)\bar{I}$ R resistencia X reactancia	$\bar{I} = Y\bar{V} = (G + jB)\bar{V}$ G conductancia B susceptancia
$S = ZI^2$ $P = RI^2$ $Q = XI^2$	$S = Y^*V^2$ $P = GV^2$ $Q = -BV^2$

Consumo de potencia

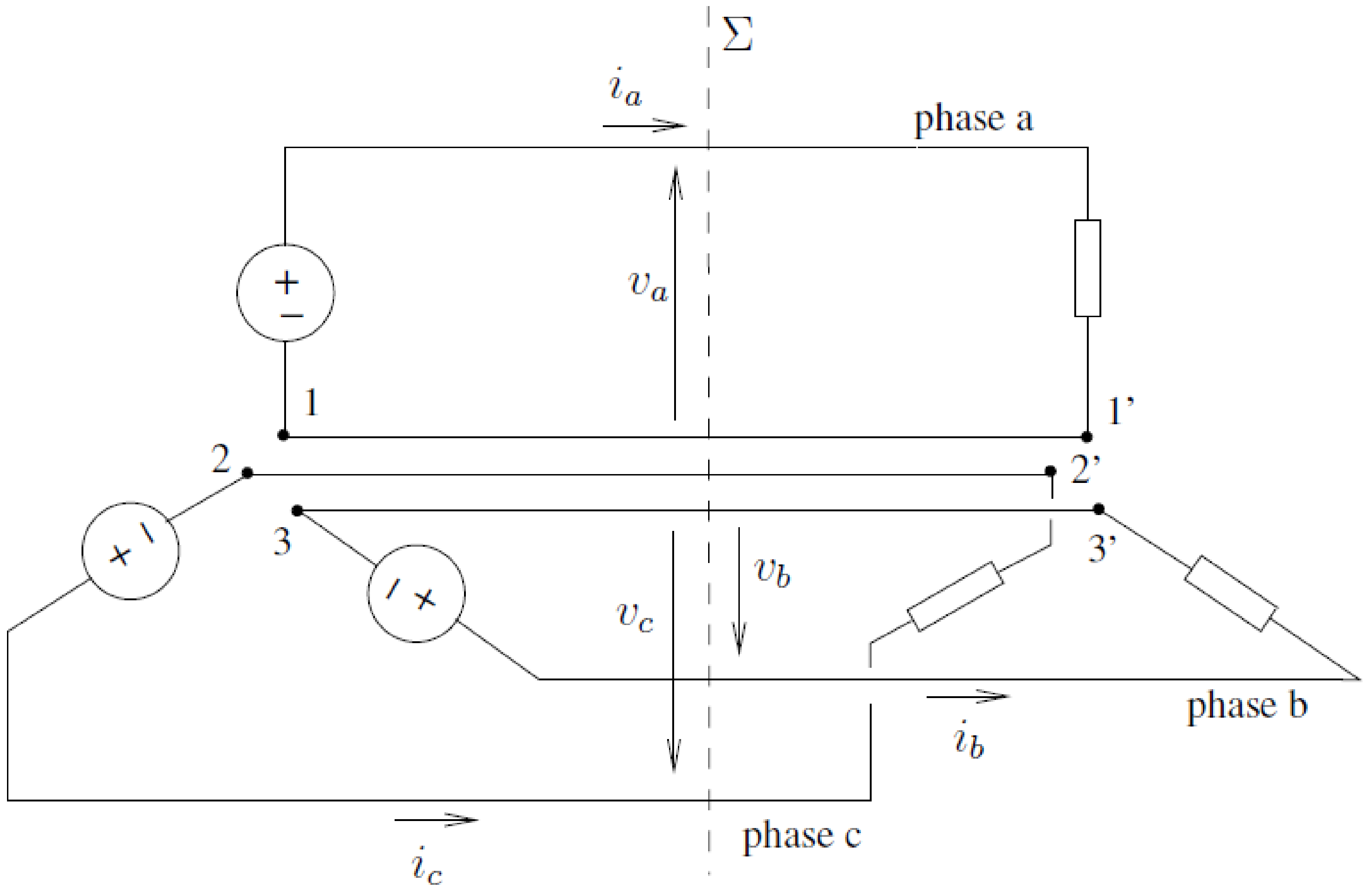
	resistencia	reactancia	capacitancia
$\phi - \psi$	0	$\pi/2$	$-\pi/2$
P	$RI^2 = \dfrac{V^2}{R}$	0	0
Q	0	$\omega LI^2 = \dfrac{V^2}{\omega L}$	$-\omega CV^2 = -\dfrac{I^2}{\omega C}$

Sistemas trifásicos equilibrados

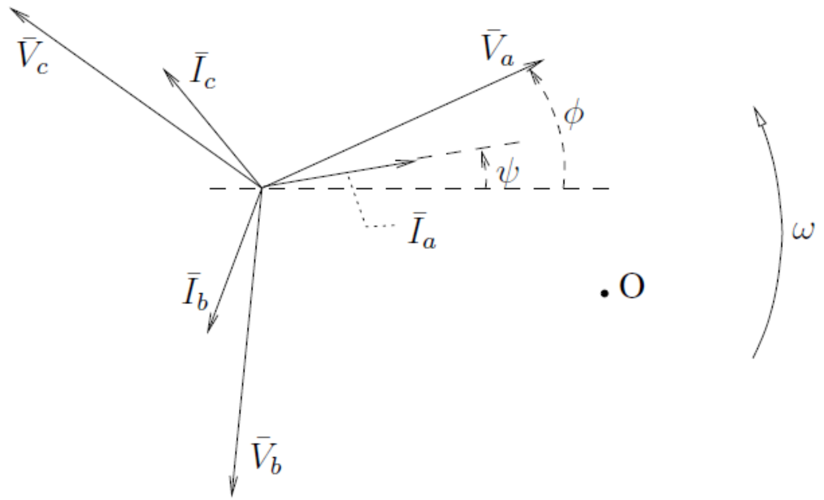
$$
\begin{aligned}
v_a(t) &= \sqrt{2}V\cos(\omega t + \phi) \\
v_b(t) &= \sqrt{2}V\cos(\omega(t - \frac{T}{3}) + \phi) = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{3}) \\
v_c(t) &= \sqrt{2}V\cos(\omega(t - \frac{2T}{3}) + \phi) = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \phi - \frac{4\pi}{3})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_a(t) &= \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi) \\
i_b(t) &= \sqrt{2}I\cos(\omega(t - \frac{T}{3}) + \psi) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\
i_c(t) &= \sqrt{2}I\cos(\omega(t - \frac{2T}{3}) + \psi) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3})
\end{aligned}
$$

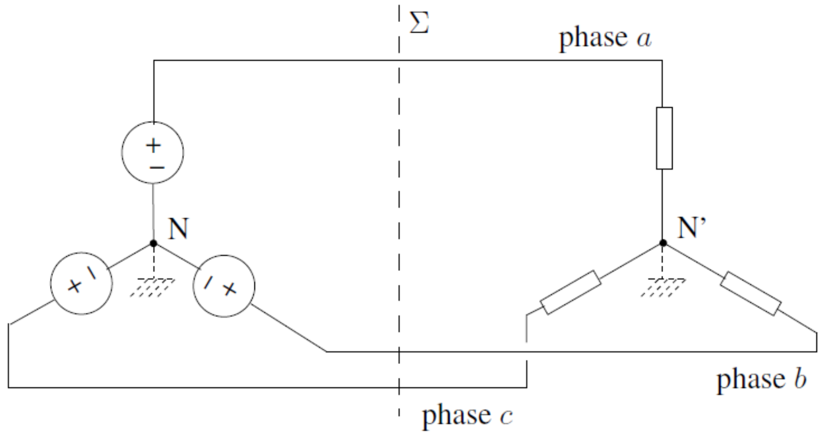
Sistemas trifásicos equilibrados



Sistemas balanceados:



$$
\begin{aligned}
\bar{I}_a &= Ie^{j\psi} \\
\bar{I}_b &= Ie^{j(\psi-\frac{2\pi}{3})} = \bar{I}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\
\bar{I}_c &= Ie^{j(\psi-\frac{4\pi}{3})} = \bar{I}_a e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \bar{I}_b e^{-j\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}
$$



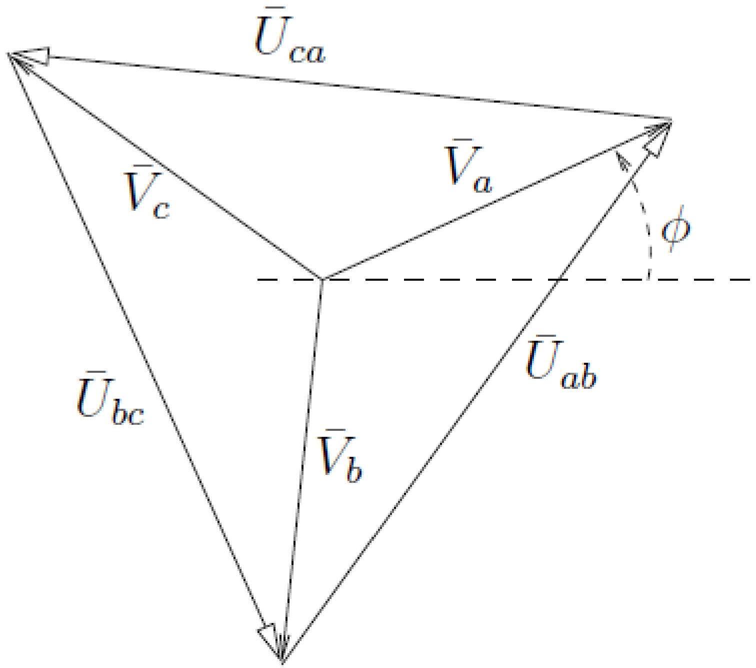
$$
\begin{aligned}
\bar{V}_a &= Ve^{j\phi} \\
\bar{V}_b &= Ve^{j(\phi-\frac{2\pi}{3})} = \bar{V}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\
\bar{V}_c &= Ve^{j(\phi-\frac{4\pi}{3})} = \bar{V}_a e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \bar{V}_b e^{-j\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c &= 0 \\
\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c &= 0
\end{aligned}
}
$$

La ventaja del sistema trifásico es que la potencia transmitida es 3 veces la potencia de una de sus fases, pero con solo 4 conductores en lugar de 6.

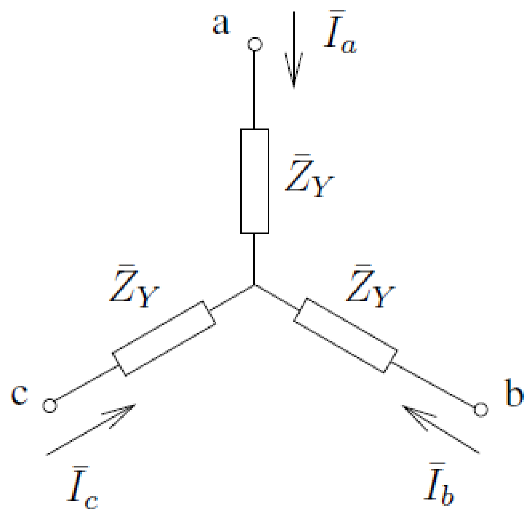
Tensiones de línea:

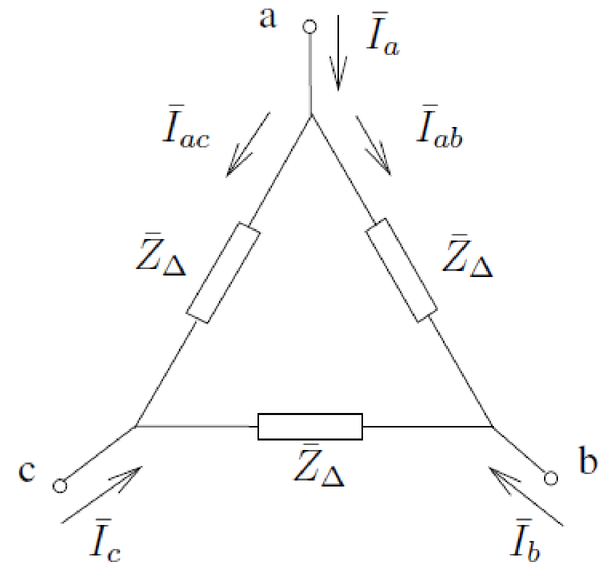
$$\begin{aligned} \bar{U}_{ab} &= \bar{V}_a - \bar{V}_b \\ \bar{U}_{bc} &= \bar{V}_b - \bar{V}_c \\ \bar{U}_{ca} &= \bar{V}_c - \bar{V}_a \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \bar{U}_{ab} &= \sqrt{3}\,\bar{V}_a\,e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\,V\,e^{j(\phi+\frac{\pi}{6})} \\ \bar{U}_{bc} &= \sqrt{3}\,\bar{V}_b\,e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\,V\,e^{j(\phi+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})} \\ \bar{U}_{ca} &= \sqrt{3}\,\bar{V}_c\,e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\,V\,e^{j(\phi+\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3})} \end{aligned}$$



- Note que en un sistema equilibrado y en condiciones de régimen permanente, la magnitud de la tensión de línea es 1.732 veces la tensión de fase.
- Al especificar la tensión de un equipo trifásico, se utiliza la tensión de línea, a menos que se indique lo contrario.
- En Costa Rica, las tensiones nominales de la red de transmisión son 138 kV y 230 kV. Estos son valores de línea o (L-L).

Conexiones estrella y delta





De la conexión delta se tiene que:

$$\bar{I}_a = \bar{I}_{ab} + \bar{I}_{ac} = \frac{\bar{U}_{ab} + \bar{U}_{ac}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{\bar{U}_{ab} - \bar{U}_{ca}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{\bar{U}_{ab} - \bar{U}_{ab} e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{\bar{U}_{ab}}{\bar{Z}_\Delta}(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}) = \sqrt{3}\, e^{-j\frac{\pi}{6}} \bar{I}_{ab}$$

Entonces:

$$\bar{I}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}}\, \bar{I}_a$$

Si se aplican las mismas tensiones de fase a ambas configuraciones, las corrientes de fase son iguales si se cumple que $\bar{Z}_\Delta = 3\, \bar{Z}_Y$

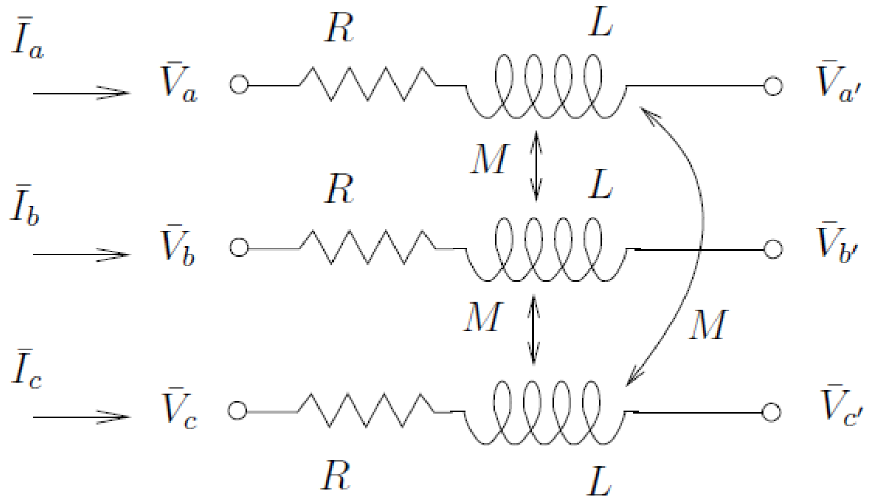
Análisis por fase de sistemas trifásicos balanceados

La simetría que existe entre las diferentes fases permite simplificar el análisis de un sistema trifásico equilibrado. Es suficiente determinar las tensiones y corrientes en una fase para obtener automáticamente las tensiones y corrientes en las otras fases.

Para poder determinar el estado eléctrico de una fase sin analizar las otras dos, se necesita primero dos operaciones:

- Reemplazar las cargas conectadas en delta por el esquema equivalente en estrella.
- Tratar el acoplamiento inductivo y capacitivo entre fases

Tratamiento de acoples inductivos entre fases



$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{a'} \\ \bar{V}_{b'} \\ \bar{V}_{c'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Z}_s & \bar{Z}_m & \bar{Z}_m \\ \bar{Z}_m & \bar{Z}_s & \bar{Z}_m \\ \bar{Z}_m & \bar{Z}_m & \bar{Z}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix}$$

La primera ecuación de la relación matricial anterior dice:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_{a'} + \bar{Z}_s \bar{I}_a + \bar{Z}_m \bar{I}_b + \bar{Z}_m \bar{I}_c$$

Tratamiento de acoples inductivos entre fases

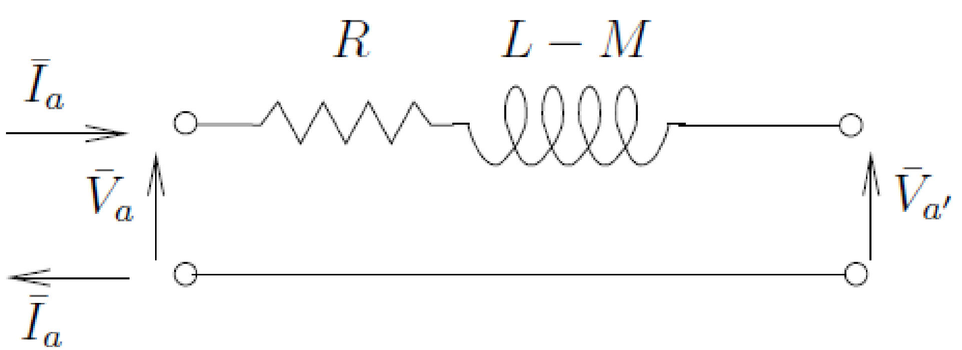
$$\bar{V}_a = \bar{V}_{a'} + \bar{Z}_s \bar{I}_a + \bar{Z}_m \bar{I}_b + \bar{Z}_m \bar{I}_c$$

Teniendo en cuenta que se trata de sistema balanceado y equilibrado:

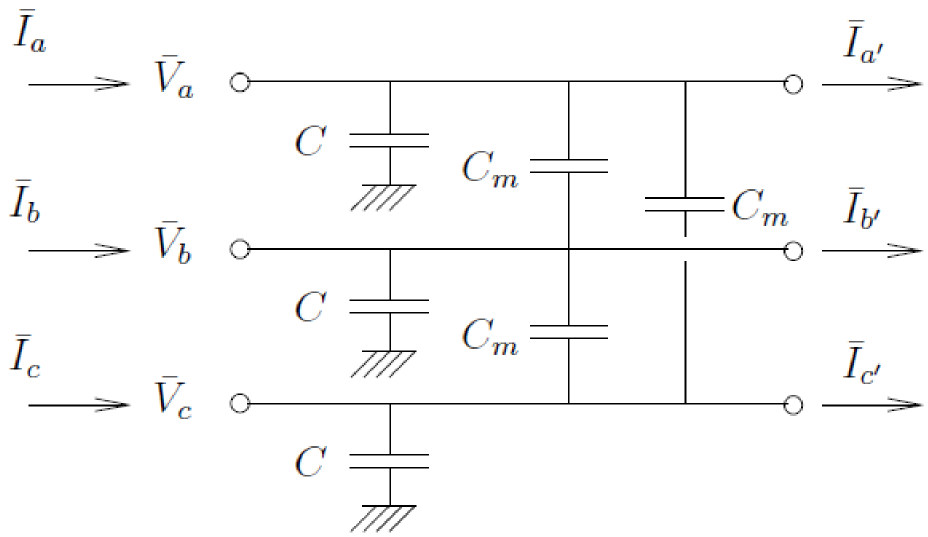
$$\begin{aligned} \bar{V}_a &= \bar{V}_{a'} + \left[\bar{Z}_s + \bar{Z}_m (e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}}) \right] \bar{I}_a \\ &= \bar{V}_{a'} + \left[\bar{Z}_s - \bar{Z}_m \right] \bar{I}_a \end{aligned}$$

De modo que se obtiene un equivalente para la fase a con impedancia:

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_s - \bar{Z}_m \longrightarrow \bar{Z}_{eq} = R + j\omega(L - M)$$



Tratamiento de acoples capacitivos entre fases



Es **demostrable** para el esquema anterior que:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_a - \bar{I}_{a'} \\ \bar{I}_b - \bar{I}_{b'} \\ \bar{I}_c - \bar{I}_{c'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega C + j2\omega C_m & -j\omega C_m & -j\omega C_m \\ -j\omega C_m & j\omega C + j2\omega C_m & -j\omega C_m \\ -j\omega C_m & -j\omega C_m & j\omega C + j2\omega C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix}$$

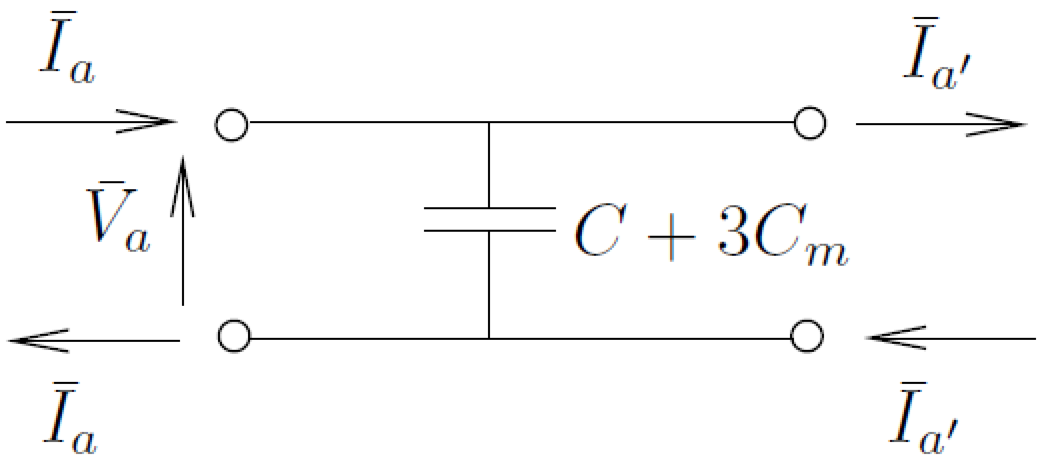
Tratamiento de acoples capacitivos entre fases

La primera ecuación de la relación matricial anterior dice:

$$\bar{I}_a - \bar{I}_{a'} = j\omega(C + 2C_m)\bar{V}_a - j\omega C_m \bar{V}_b - j\omega C_m \bar{V}_c$$

Teniendo en cuenta que se trata de sistema balanceado y equilibrado:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a - \bar{I}_{a'} &= j\omega \left[C + C_m(2 - e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right] \bar{V}_a \\ &= j\omega(C + 3C_m)\bar{V}_a\end{aligned}$$



Potencias trifásicas

La potencia instantánea en el circuito trifásico es:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \\
&= 2VI\left[\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\psi) + \cos(\omega t+\phi-\frac{2\pi}{3})\cos(\omega t+\psi-\frac{2\pi}{3}) + \right. \\
&\quad \left. + \cos(\omega t+\phi-\frac{4\pi}{3})\cos(\omega t+\psi-\frac{4\pi}{3})\right] \\
&= 3VI\cos(\phi-\psi) \\
&\quad +VI\left[\cos(2\omega t+\phi+\psi) + \cos(2\omega t+\phi+\psi-\frac{4\pi}{3}) + \cos(2\omega t+\phi+\psi-\frac{2\pi}{3})\right] \\
&= 3VI\cos(\phi-\psi) = 3P
\end{aligned}
$$

Los términos fluctuantes de la potencia instantánea se cancelan en el sistema trifásico balanceado. Aún así, en cada fase hay una potencia fluctuante correspondiente a la energía almacenada en las bobinas y condensadores de cada fase.

Potencia trifásica compleja

La potencia trifásica compleja es una extensión de la fórmula monofásica:

$$\bar{S}_{3\phi} = \bar{V}_a \bar{I}_a^\star + \bar{V}_b \bar{I}_b^\star + \bar{V}_c \bar{I}_c^\star = \bar{V}_a \bar{I}_a^\star + \bar{V}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} \bar{I}_a^\star e^{j\frac{2\pi}{3}} + \bar{V}_a e^{-j\frac{4\pi}{3}} \bar{I}_a^\star e^{j\frac{4\pi}{3}} = 3\bar{V}_a \bar{I}_a^\star$$

La parte real es la potencia activa trifásica:

$$P_{3\phi} = 3VI\cos(\phi - \psi) = 3P$$

La parte imaginaria es la potencia reactiva trifásica:

$$Q_{3\phi} = 3VI\sin(\phi - \psi) = 3Q$$

La noción de potencia reactiva trifásica es artificial en la medida en que no hay potencia trifásico fluctuante. De hecho, solo la potencia reactiva por fase Q tiene una interpretación. La potencia trifásica es una magnitud tan artificial como una "corriente trifásica". Sin embargo, este término se utiliza universalmente, por razones de simetría con potencia activa.