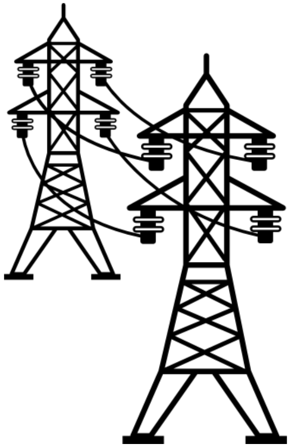
EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica



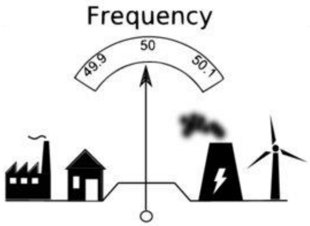
IE-0469 Sistemas de Potencia I

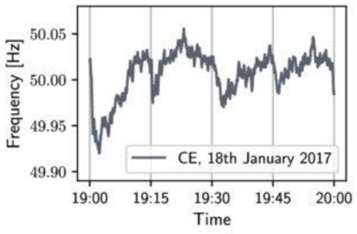
Presentación #6:
Despacho económico

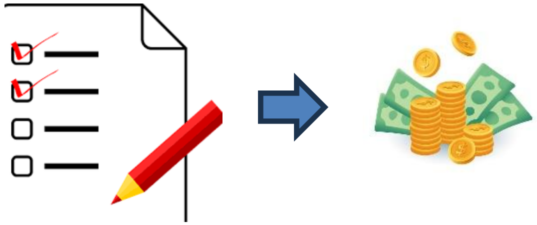
Dr. Andrés Argüello Guillén
andres.arguelloguillen@ucr.ac.cr

¿Porqué aprender de despacho económico?

- El sistema de potencia es básicamente, un conjunto de generadores y cargas interconectadas. Para suplir la carga, puedo seleccionar cualquiera de los generadores que cumpla la restricción técnica.
- Sin embargo, resulta interesante tomar en cuenta costos de transmisión y de generación, ya que esos costos de generación y operación se trasladan a los clientes e inversionistas.
- Los flujos de potencia hasta ahora son herramientas muy útiles que nos permiten entender el estado de la red, pero no agregaban restricciones económicas.
- El despacho económico involucra metodologías de optimización, que será una de las herramientas más útiles en su carrera de ingeniería.
- Necesitaremos algunos conceptos básicos de economía para hablar el mismo idioma, lo que es muy útil de refrescar/aprender







Factor de Planta

También conocido como *factor de capacidad*, es el cociente entre la energía real generada por una unidad (o planta) de generación en un periodo T y la energía generada si pudiera trabajar a potencia nominal durante ese mismo periodo. El factor de planta no debe confundirse con factor de disponibilidad o con eficiencia de la unidad.

$$factor\ planta = \frac{Energía\ generada\ en\ T}{P_{nom} \times T} \times 100$$

Ejemplo: Una planta solar fotovoltaica de 15 MW produce 12.286 MWh en 6 meses (o 4380 h). Determine el factor de planta del proyecto en ese periodo.

$$factor\ planta = \frac{12.286\ MWh}{15\ MW \times 4380\ h} \times 100 = 18.7\ \%$$

Costos de producir electricidad

Los costos de producción de una unidad incluye los costos incurridos en la construcción, financiamiento, operación y mantenimiento de la planta (fijos y variables). Estos costos se dan en diferentes tiempos.

Una métrica muy utilizada para plantas de generación de electricidad es el costo nivelado de generación (LCOE):

$$LCOE = \frac{\sum_{t=0}^{n} \frac{I_t + M_t + F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=0}^{n} \frac{E_t}{(1+r)^t}}$$

I_t son los costos de inversión en el año t
M_t son los costos de operación y mantenimiento en el año t
F_t son los gastos de combustible en el año t
E_t es la energía generada en el año t
r es la tasa de descuento (costo de capital) del proyecto
n es el número de años del proyecto

LCOE

$$LCOE = \frac{\sum_{t=0}^{n} \frac{I_t + M_t + F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=0}^{n} \frac{E_t}{(1+r)^t}}$$

El LCOE es el precio de la electricidad en valor presente necesario en un proyecto para que los ingresos equiparen los costos y la obtención de un rendimiento r sobre el capital invertido.

Un precio de la electricidad por encima de LCOE produciría un mayor rendimiento del capital, mientras que un precio por debajo produciría un menor rendimiento, o incluso una pérdida para el inversionista.

Ejemplo LCOE

Suponga que se desea instalar una planta fotovoltaica de 5000 kW en un sitio particular. Determine el LCOE de la planta si los datos del proyecto son:

Datos de entrada	
Periodo en años (n)	25
Tasa de descuento (r)	7%
Tamaño proyecto, en kW	5000
Costo de inversión en año 0, en $/kW	1050
Factor de planta	18%
Costos fijos de O&M, en $/kW/año	25
Costos variables O&M en $/kWh/año	0,002

R: 0.075 $/kWh

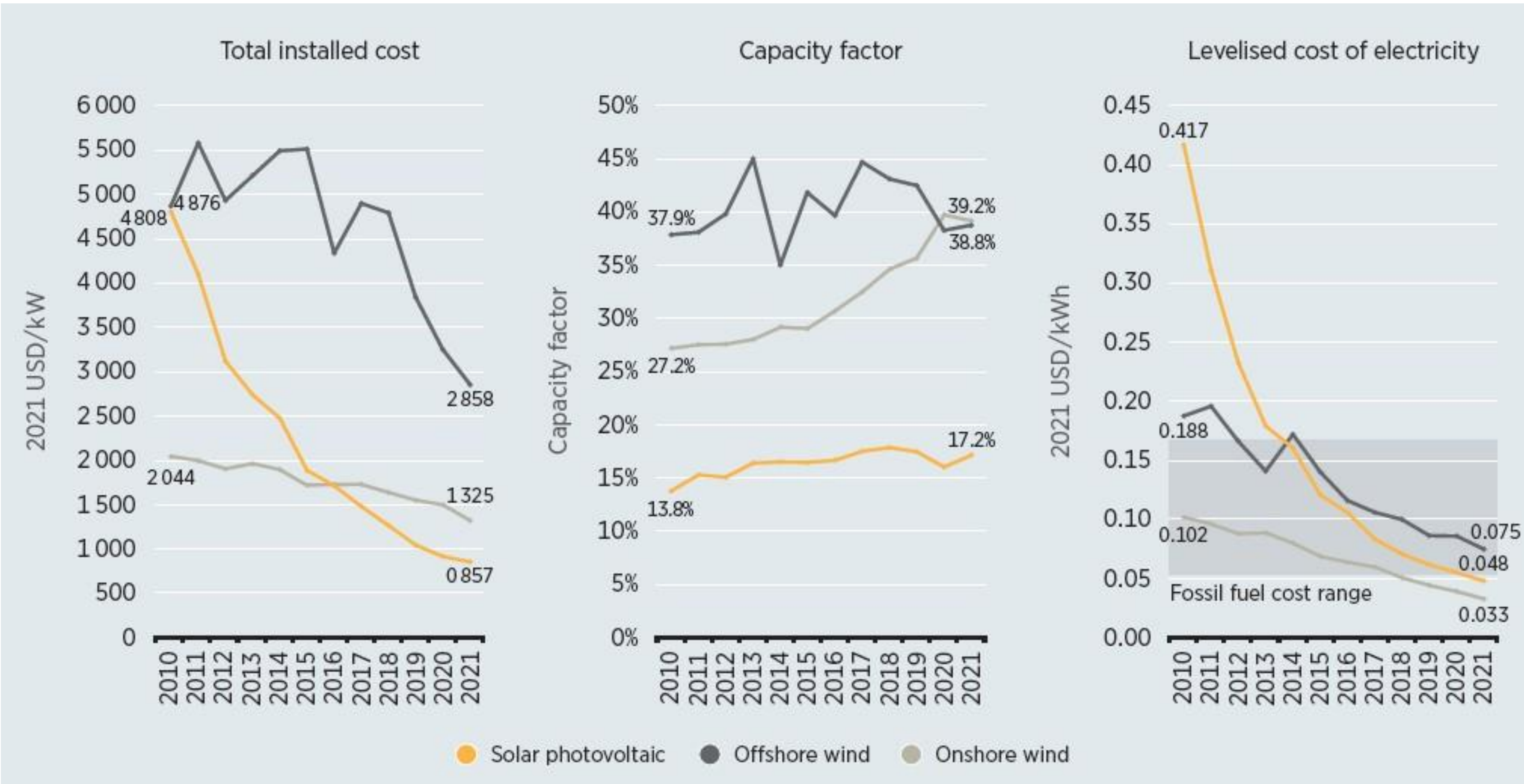
Datos de entrada LCOE

IRENA
International Renewable Energy Agency

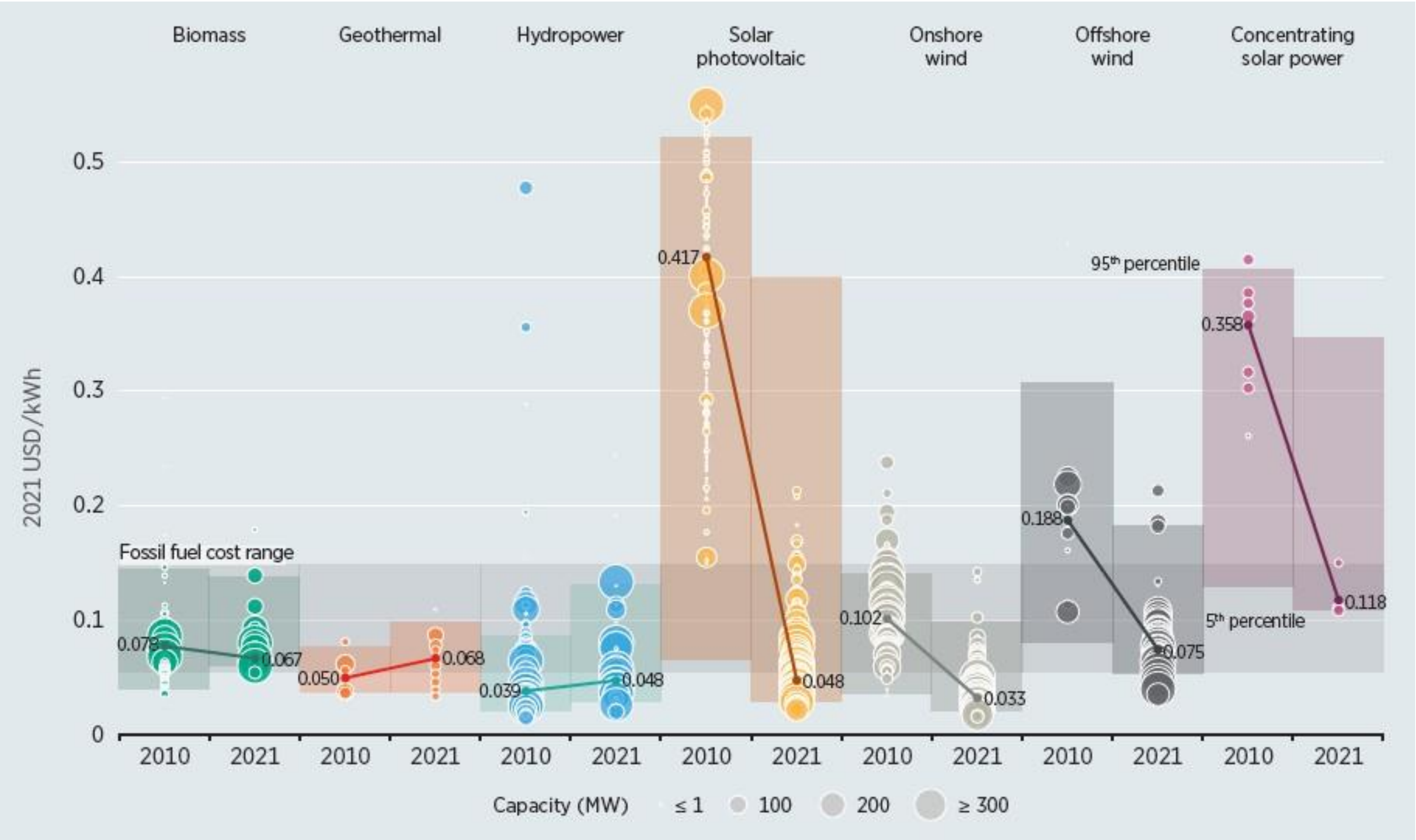
Technology	Economic life (years)	Weighted average cost of capital (real)	
		OECD and China	Rest of the world
Wind power	25	7.5% in 2010 falling to 5% in 2020	10% in 2010 falling to 7.5% in 2020
Solar PV	25		
CSP	25		
Hydropower	30		
Biomass for power	20		
Geothermal	25		

Fuente: Renewable Power Generation Costs 2021, IRENA 2022.

Costos de generación PV y eólica

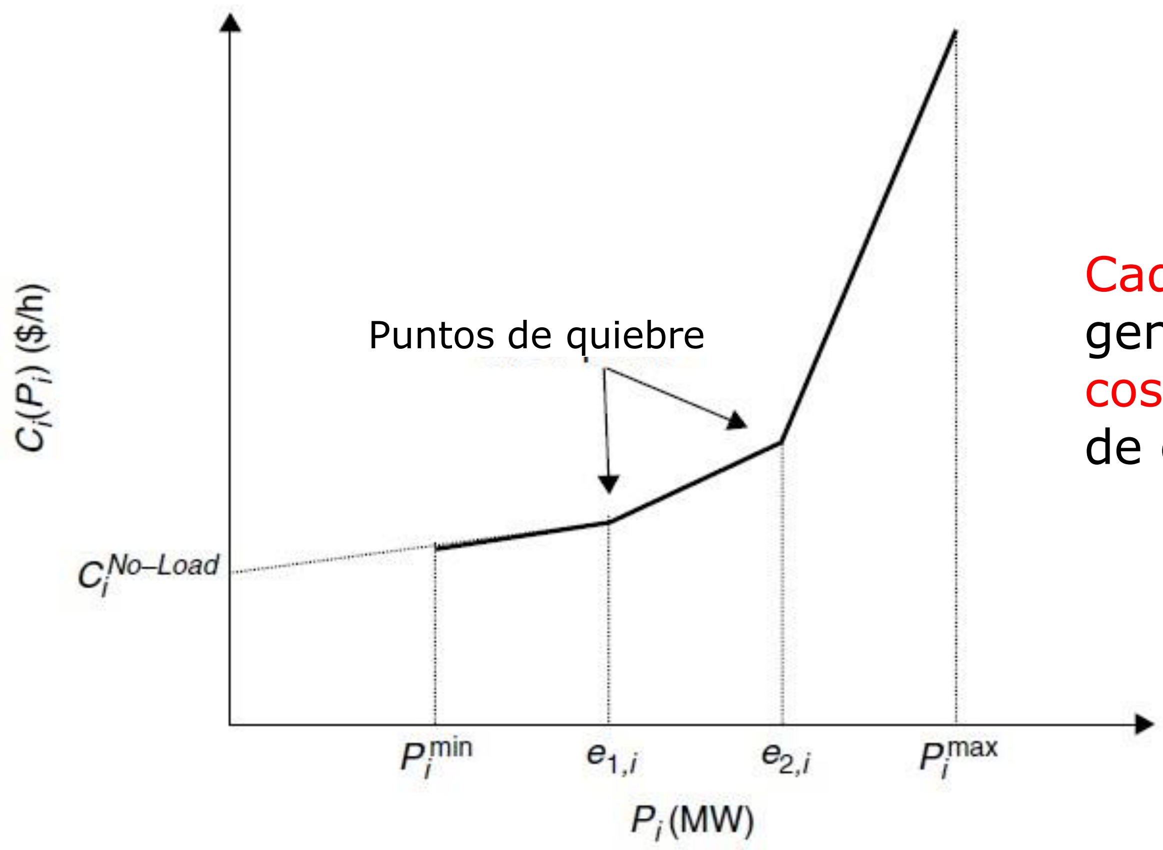


Evolución de LCOE de renovables



Costos de producción de **corto plazo**

El problema de despacho económico es de corto plazo y consiste en abastecer la demanda de la manera más económica posible si se conocen los costos de producción de corto plazo.



Cada unidad de generación tiene un costo de producción de corto plazo.

El **costo marginal** (o incremental) se obtiene al derivar la curva de costo de producción.

$$\frac{dC(P)}{dP} = \lambda$$

El **costo marginal** λ de una unidad representa el costo de producir un MW extra durante 1 h (más adelante se retoma este tema).

El **costo marginal** se relaciona con los **costos variables:** costo del combustible y costos de O&M variable.

Algunos **costos fijos** como amortizaciones de los costos de construcción de la planta, costos fijos de O&M y costos fijos de personal de la planta **no se toman en cuenta** en el costo marginal (irrelevantes para estimar costos de producción de corto plazo).

***Amortización**: reducción del valor de un activo o un pasivo con el paso del tiempo

Costos de producción de corto plazo

Las plantas térmicas se caracterizan por **curvas entrada-salida** que especifican la cantidad de combustible H requerido para producir una potencia eléctrica P constante durante 1 h.

Ejemplo: Considere una unidad térmica $100 \text{ MW} \leq P \leq 500 \text{ MW}$ a la cual se le estimó la curva entrada-salida a partir de mediciones en planta:

$$H(P) = 110 + 8.2P + 0.002P^2 \qquad MJ/h$$

El costo por hora de operar esta unidad se obtiene de multiplicar $H(P)$ por el costo del combustible F en \$/MJ:

$$C(P) = 110F + 8.2FP + 0.002FP^2 \qquad \$/h$$

Si suponemos que el costo del combustible es $F = 1.3\$/MJ$, la curva de costo de esta unidad será:

$$C(P) = 143 + 10.66P + 0.0026P^2 \qquad \$/h$$

Se obtiene ganancia cuando el precio de mercado es igual o mayor al costo marginal.

Costo marginal y precios de mercado

Si el precio al que se puede vender la electricidad es 12 \$/MWh, la potencia del salida que debe producir esta unidad será:

$$\frac{dC(P)}{dP} = 10.66 + 0.0052P = 12\ \$/\text{MWh} \quad \text{o sea} \quad P = 257.7\ \text{MW}$$

El generador debe operar a su potencia máxima siempre que el precio de la electricidad sea mayor o igual a:

$$\left.\frac{dC(P)}{dP}\right|_{P=500\ MW} = 10.66 + 0.0052(500) = 13.26\ \$/MWh$$

El generador tendrá pérdidas económicas si el precio de la electricidad es menor que:

$$\left.\frac{dC(P)}{dP}\right|_{P=100\ MW} = 10.66 + 0.0052(100) = 11.18\ \$/MWh$$

Costos de operación sin carga y costos de arranque

Los productores no deciden la potencia que venden únicamente basado en la comparación entre el precio de mercado y su costo marginal. El productor debe considerar:

Costos de operación sin carga: Representa los costos incurridos por operar una unidad sin producir energía y se relaciona con el costo del combustible para mantener esa unidad operando. Este no es un modo de operación continua para la mayoría de plantas.

Costos de arranque: Representa el costo de llevar a una unidad de generación lista para producir después de estar apagada. Los generadores Diésel y turbinas de gas tienen costos de arranque bajos porque arrancan muy fácilmente. Otras unidades térmicas más grandes tienen costos de arranque muy altos (Bunker).

Costos de producción de corto plazo de plantas hidro y renovables

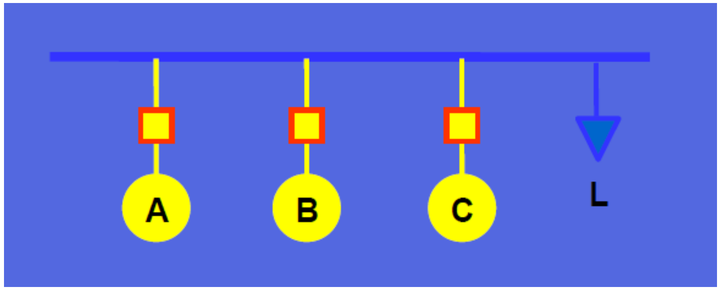
La producción de energía hidro y renovable no tiene costo en el corto plazo. A las plantas hidro con embalse se les asigna un precio ficticio para que el problema de optimización no las opere a *full* todo el tiempo.

Este costo de producción ficticio se calcula como el costo de oportunidad por desplazar térmico en el futuro. O sea, un problema de mediano plazo es quien define el costo de producción de corto plazo.

En varios mercados se ha presentado que los precios de las plantas renovables son negativos. Ocurren cuando se combinan muchas renovables con plantas poco flexibles y baja demanda.

***Costo de oportunidad:** cantidad de otros bienes o servicios a los que debe renunciarse para obtener algún bien o servicio.

Despacho económico (*DE*)



Si conocemos las funciones de costo de los generadores, así como la demanda por abastecer, el problema de *DE* se traduce a:

Función objetivo:

$$min\ C = C_A(P_A) + C_B(P_B) + C_C(P_C)$$

Restricción:

$$L = P_A + P_B + P_C$$

¿Cómo se resuelve este problema de optimización con restricción de igualdad?

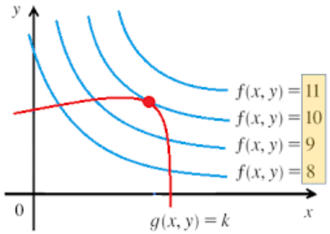
Optimización 101, derivando

Optimización con Python:

https://www.youtube.com/watch?v=cXHvC_FGx24

Multiplicadores de Lagrange

https://www.youtube.com/watch?v=yuqB-d5MjZA&t=3s



Optimización con restricciones de igualdad

El problema generalizado con n variables de decisión es encontrar $\boldsymbol{x}^*$ que minimice:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$m > n \rightarrow$ **sobrerestringida**
(usualmente no hay solucíón)

sujeto a:

$$\underbrace{\begin{matrix} \omega_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \omega_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{matrix}}_{m \text{ restricciones de igualdad}}$$

$m = n \rightarrow$ **determinado**
(puede haber solución)

$m < n \rightarrow$ **subrestringida**
(posibilidad de optimizar)

Optimización con restricciones de igualdad

El problema anterior se puede resolver con la función Lagrangiana:

$$l = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \omega_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m \omega_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Note que el resultado de la función Lagrangiana es igual al resultado de la función objetivo en $\boldsymbol{x}^*$.
- Hay un multiplicador de Lagrange λ por cada restricción
- Hay $n + m$ variables por resolver

Optimización con restricciones de igualdad

$$l = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \omega_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m \omega_m (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Las condiciones de optimalidad se dan cuando:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \omega_m}{\partial x_1} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial l}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \omega_m}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\} \text{n ecuaciones}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \lambda_1} &= \omega_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda_m} &= \omega_m (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}\right\} \text{m ecuaciones}$$

n+m variables en n+m ecuaciones

Optimización con restricciones de igualdad

Ejemplo 1:

Minimice $f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + x_2^2$

Sujeto a $\omega(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2 = 0$

Primero definimos la función Lagrangiana:

$$l(x_1, x_2, \lambda) = 0.25x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$$

Y las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial l(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = 0.5x_1 - \lambda = 0 \rightarrow \ x_1 = 2\lambda$$

$$\frac{\partial l(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\lambda$$

$$\frac{\partial l(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$\lambda = 2$

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$

Optimización con restricciones de igualdad

Aplicación al problema de *Despacho Económico*:

$$\min f(x_1, x_2) = C_1(x_1) + C_2(x_2)$$
$$\text{s.a. } \omega(x_1, x_2) = L - x_1 - x_2 = 0$$

De modo que:

$$l(x_1, x_2, \lambda) = C_1(x_1) + C_2(x_2) + \lambda(L - x_1 - x_2)$$

Y las condiciones de optimalidad ocurren cuando:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial l(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} &= \frac{dC_1}{dx_1} - \lambda = 0\\ \frac{\partial l(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} &= \frac{dC_2}{dx_2} - \lambda = 0\end{aligned}\right\} \quad \frac{dC_1}{dx_1} = \frac{dC_2}{dx_2} = \lambda$$

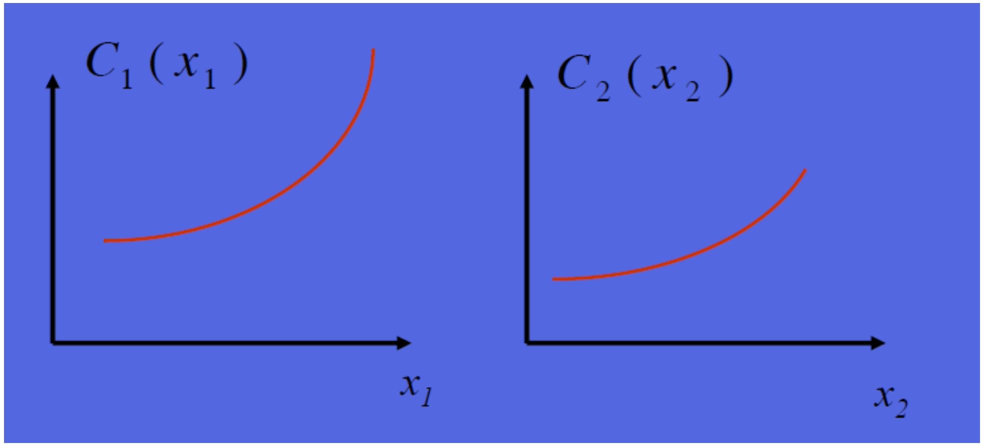
$$\frac{\partial l(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = L - x_1 - x_2 = 0$$

Costo incremental igual

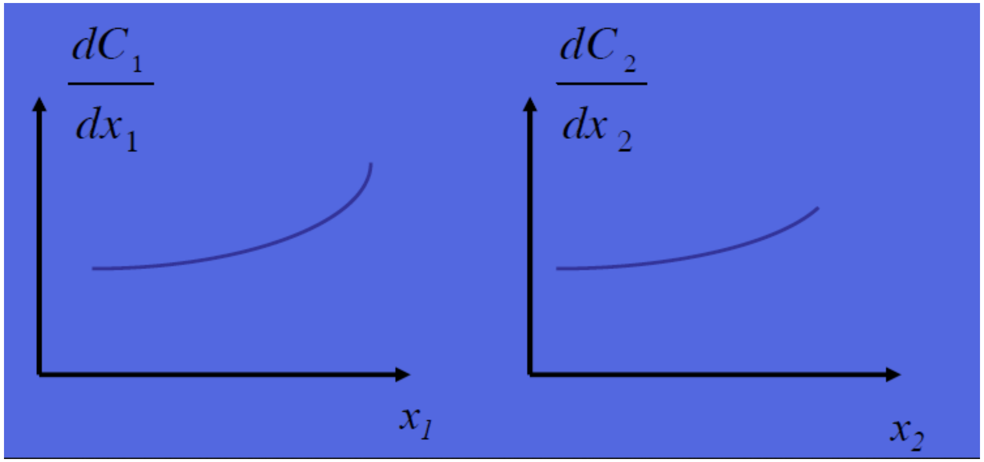
Optimización con restricciones de igualdad

Interpretación de λ

Curvas de costo

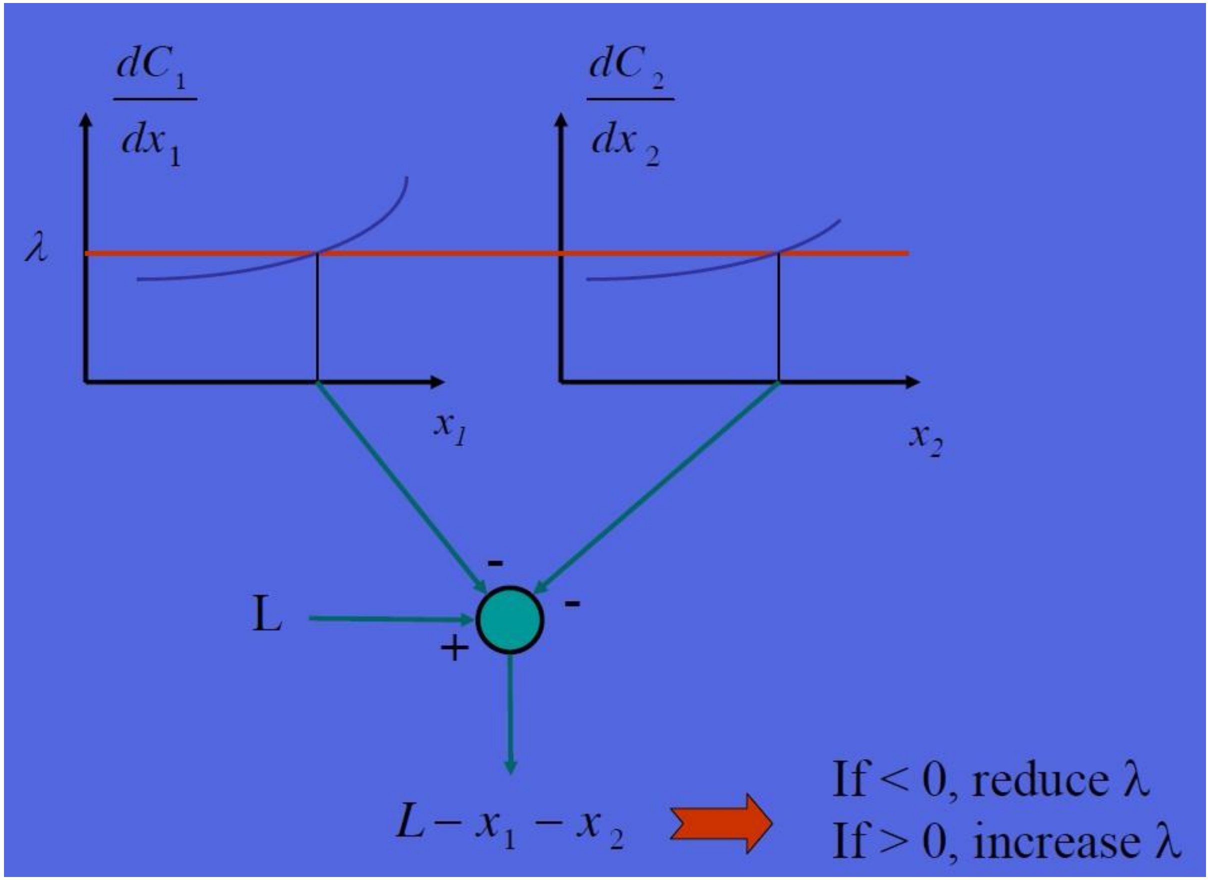


Curvas de costo incremental



Optimización con restricciones de igualdad

Interpretación de λ



Optimización con restricciones de igualdad

Nota importante:

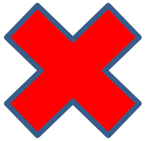
Si la restricción es de la forma $ax_1 + bx_2 = L$

Esta se debe incluir en el Lagrangeano como:

$$l = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda(L - ax_1 - bx_2)$$

Y no como:

$$l = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda(ax_1 + bx_2)$$



Optimización con restricciones de igualdad

Ejemplo 2

Una carga de 300 MW debe ser suplida a costo mínimo por medio de 2 plantas térmicas y una planta hidro filo de agua. La planta hidro produce 40 MW de manera constante y las funciones de costo de las plantas térmicas son:

$$C_{\mathrm{A}} = 20 + 1.7\, P_{\mathrm{A}} + 0.04\, P_{\mathrm{A}}^2 \$/\mathrm{h}$$

$$C_{\mathrm{B}} = 16 + 1.8\, P_{\mathrm{B}} + 0.03\, P_{\mathrm{B}}^2 \$/\mathrm{h}$$

Como el costo de operación de la planta hidro es despreciable, el Lagrangeano será (con $L = 260\ MW$):

$$\ell = C_{\mathrm{A}}(P_{\mathrm{A}}) + C_{\mathrm{B}}(P_{\mathrm{B}}) + \lambda(L - P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}})$$

Optimización con restricciones de igualdad

Ejemplo 2

Al calcular las derivadas parciales e igualarlas a cero se obtiene:

$$\frac{\partial \ell}{\partial P_{\mathrm{A}}} \equiv 1.7 + 0.08\, P_{\mathrm{A}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial P_{\mathrm{B}}} \equiv 1.8 + 0.06\, P_{\mathrm{B}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} \equiv L - P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}} = 0$$

Y al resolver este sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas se obtiene:

$$P_{\mathrm{A}} = 112.13\,\mathrm{MW} \qquad \lambda = 10.67\,\$/\mathrm{MWh}$$

$$P_{\mathrm{B}} = 147.87\,\mathrm{MW} \qquad C = C_{\mathrm{A}}(P_{\mathrm{A}}) + C_{\mathrm{B}}(P_{\mathrm{B}}) = 1{,}651.63\,\$/\mathrm{h}$$

Optimización por computadora

La mayoría de problemas de optimización de gran complejidad se resuelven con *solvers* comerciales (propietarios) como Xpress de FICO, Gurobi, entre otros.

Ambos solvers tienen una interfaz con Python lo cual facilita su uso y la formulación del problema. En el curso veremos de manera general la formulación de un DE con la herramienta **Xpress (licencia comunitaria)**. La sintaxis de Gurobi no es igual, pero sí muy parecida al de Xpress.

Uso de FICO Xpress

Instalación

Paso 1: Abra el prompt de Anaconda 3

Paso 2: Digite *conda install -c fico-xpress xpress*

Paso 3: Oprima ENTER y siga instrucciones del instalador

ó desde la terminal de windows: pip install xpress

Uso del solver

Cuando quiera usar el solver escriba en la parte superior del script en Python:

import xpress as xp

Ejemplo 2 resuelto en Xpress

```python
import xpress as xp

# pip install xpress==8.11.3

# define variables
pA = xp.var(vartype=xp.continuous, name="PA")
pB = xp.var(vartype=xp.continuous, name="PB")


# funcion objetivo
CA = 20+1.7*pA + 0.04*pA**2
CB = 16+ 1.8*pB+0.03*pB**2
objetivo= CA+CB

# Restricciones
rest1=pA+pB==260

# crea modelo matematico
model = xp.problem()
model.addVariable(pA,pB)
model.setObjective(objetivo,sense=xp.minimize)
model.addConstraint(rest1)

# resuelve problema
model.solve()
sol=model.getSolution()


print("status: ", model.getProbStatus())
print("string: ", model.getProbStatusString())
print("solution:", model.getSolution())

# reporte de solucion en archivo externo
model.writeslxsol ('Solucion', 'd')
```

- Definición de variables
- Definición de func. objetivo
- Definición de restricciones
- Creación del modelo
- Solución del problema
- Impresión de resultados

Optimización con restricciones de igualdad

Ejemplo 3

Determine el DE de 3 unidades que deben abastecer 850 MW si sabe que sus costos de generación en \$/h son:

$$C_A(P_A) = 561 + 7.92P_A + 0.001562P_A^2$$
$$C_B(P_B) = 310 + 7.85P_B + 0.00194P_B^2$$
$$C_C(P_C) = 78 + 7.97P_C + 0.00482P_C^2$$

$$P_A + P_B + P_c = L$$

El problema se formula como:

$$\min C_A(P_A) + C_B(P_B) + C_C(P_C)$$
$$\text{s.a. } 850 - P_A - P_B - P_c = 0$$

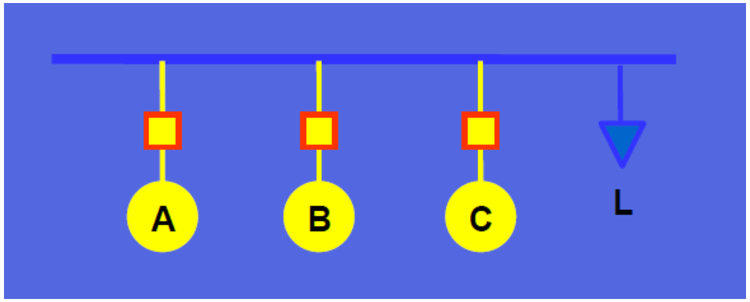
Optimización con restricciones de igualdad

Ejemplo 3

Respuesta:

$$\lambda = 9.148\ \$/MWh$$
$$P_A = 393.2\ MW$$
$$P_B = 334.6\ MW$$
$$P_C = 122.2\ MW$$

$$P_A + P_B + P_c = 850\ MW$$



Optimización con restricciones de desigualdad
Más sencillo para el optimizador

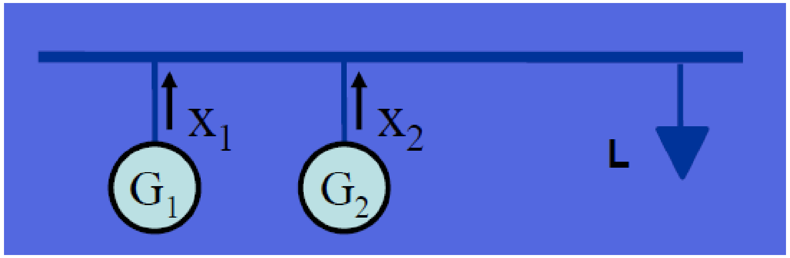
Minimice $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{c} \omega_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \omega_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Restricciones de igualdad}$$

$$\left.\begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ \vdots \\ g_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \end{array}\right\} \quad \text{Restricciones de desigualdad}$$

Optimización con restricciones de **des**igualdad



$$x_1^{\min} \le x_1 \le x_1^{\max}$$

$$x_2^{\min} \le x_2 \le x_2^{\max}$$

Función objetivo:

$$min\ \ C = a_1 + b_1 x_1^2 + a_2 + b_2\, x_2^2$$

Restricciones:

$$L = x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_1^{\max} \le 0$$
$$x_1^{\min} - x_1 \le 0$$

$$x_2 - x_2^{\max} \le 0$$
$$x_2^{\min} - x_2 \le 0$$

Optimización con restricciones de **des**igualdad

La restricción de desigualdad vinculante es una restricción de igualdad que se cumple exactamente.

Por ejemplo:

Si tenemos la desigualdad $x_1 \leq {x_1}^{\max}$, y la solución del problema de optimización es tal que $x_1 = {x_1}^{\max}$, entonces se dice que la restricción de desigualdad es vinculante.

Para recordar:

- Todas las restricciones de desigualdad deben cumplirse
- Solo algunas de ellas son vinculantes (activas)
- No sabemos de antemano cuáles restricciones de desigualdad van a ser vinculantes
- Por definición, todas las restricciones de igualdad son vinculantes

Optimización con restricciones de **des**igualdad

Condiciones de optimalidad: También conocido como las condiciones Karam Kuhn Tucker (KKT) para problemas convexos.

$$l(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \omega_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \; g_j(x)$$

$$\frac{\partial l(x,\lambda,\mu)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \omega_k(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial l(x,\lambda,\mu)}{\partial \lambda_k} = \omega_k(x) = 0$$

$$\frac{\partial l(x,\lambda,\mu)}{\partial \mu_j} = g_j(x) \leq 0$$

$$\mu_j g_j(x) = 0$$
$$\mu_j \geq 0$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Karush%E2%80%93Kuhn%E2%80%93Tucker_conditions

Optimización con restricciones de **des**igualdad

$$\mu_j g_j(x) = 0$$
$$\mu_j \geq 0$$

Hay dos posibilidades para cada restricción j:

Opción 1:

$\mu_j = 0 \Rightarrow$ la restricción no es vinculante, o sea que $g_j(x) < 0$

O

Opción 2:

$g_j(x) = 0 \Rightarrow$ la restricción es vinculante, o sea que $\mu_j > 0$

Las restricciones vinculantes deben ser identificadas por prueba y error.

Optimización con restricciones de **des**igualdad

Ejemplo 4:

$$\min f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + x_2^2$$

Sujeto a:

$$\omega(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2 = 0$$

$$g(x_1, x_2) = x_1 + 0.2x_2 - 3 \leq 0$$

Función Lagrangiana:

$$l(x_1, x_2, \lambda, \mu) = f(x_1, x_2) + \lambda\omega(x_1, x_2) + \mu g(x_1, x_2)$$

Optimización con restricciones de **des**igualdad

$$l(x_1, x_2, \lambda, \mu) = 0.25x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2) + \mu(x_1 + 0.2x_2 - 3)$$

Condiciones KKT:

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = 0.5x_1 - \lambda + \mu = 0 \qquad \frac{\partial l}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda + 0.2\mu = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0 \qquad \frac{\partial l}{\partial \mu} = x_1 + 0.2x_2 - 3 \leq 0$$

$$\mu g(x_1, x_2) = \mu(x_1 + 0.2x_2 - 3) = 0 \qquad \mu \geq 0$$

Optimización con restricciones de **des**igualdad

KKT no nos indica cuáles restricciones son vinculantes, debemos usar prueba y error.

Prueba 1: Suponemos que la restricción de desigualdad no es vinculante $\Rightarrow \ \mu = 0$, o sea: $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$, pero este resultado nos indica que:

$$x_1 + 0.2x_2 - 3 = 1.2 > 0$$

Prueba 2: Suponemos que la restricción de desigualdad es vinculante, de modo que:

$$x_1 + 0.2x_2 - 3 = 0 \quad \text{y} \quad \mu > 0$$

Optimización con restricciones de **des**igualdad

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0 \qquad \frac{\partial l}{\partial \mu} = x_1 + 0.2x_2 - 3 = 0$$

De donde se obtiene:

$$x_1 = 2.5 \text{ y } x_2 = 2.5.$$

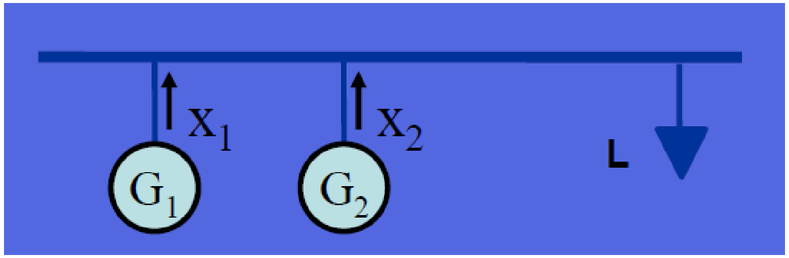
Además sabiendo que,

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = 0.5x_1 - \lambda + \mu = 0 \qquad \frac{\partial l}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda + 0.2\mu = 0$$

$$\lambda = 5.9375 \text{ y } \mu = 4.6875$$

Todas las condiciones KKT se cumplen. Esta solución sí es aceptable.

Restricciones de **des**igualdad en DE



Función objetivo:

$$min\ \ f(x_1, x_2) = C_1(x_1) + C_2(x_2)$$

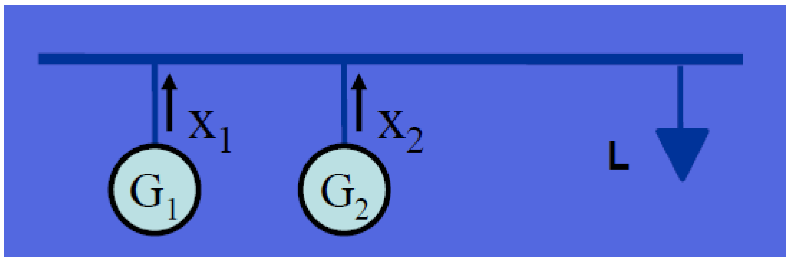
Restricciones:

$$\omega(x_1, x_2) = L - x_1 - x_2 = 0$$

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 - x_1^{\max} \leq 0$$
$$g_2(x_1, x_2) = x_1^{\min} - x_1 \leq 0$$

$$g_3(x_1, x_2) = x_2 - x_2^{\max} \leq 0$$
$$g_4(x_1, x_2) = x_2^{\min} - x_2 \leq 0$$

Restricciones de **des**igualdad en DE



$$x_1^{\min} \le x_1 \le x_1^{\max}$$
$$x_2^{\min} \le x_2 \le x_2^{\max}$$

$$l(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = C_1(x_1) + C_2(x_2) + \lambda(L - x_1 - x_2)$$
$$+\mu_1(x_1 - x_1^{\max}) + \mu_2\left(x_1^{\min} - x_1\right) + \mu_3(x_2 - x_2^{\max}) + \mu_4(x_2^{\min} - x_2)$$

Condiciones KKT:

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = \frac{dC_1}{dx_1} - \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{dC_2}{dx_2} - \lambda + \mu_3 - \mu_4 = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = L - x_1 - x_2 = 0$$

Restricciones de **des**igualdad en DE

Condiciones KKT (continuación):

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_1} = x_1 - x_1^{\max} \leq 0 \qquad \mu_1(x_1 - x_1^{\max}) = 0; \mu_1 \geq 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_2} = x_1^{\min} - x_1 \leq 0 \qquad \mu_2(x_1^{\min} - x_1) = 0; \mu_2 \geq 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_3} = x_2 - x_2^{\max} \leq 0 \qquad \mu_3(x_2 - x_2^{\max}) = 0; \mu_3 \geq 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_4} = x_2^{\min} - x_2 \leq 0 \qquad \mu_4(x_2^{\min} - x_2) = 0; \mu_4 \geq 0$$

Restricciones de **des**igualdad en DE

Prueba 1: Ningún generador se encuentra en los límites:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$$

Entonces,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial x_1} = \frac{dC_1}{dx_1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{dC_2}{dx_2} - \lambda = 0\end{aligned}\right\} \quad \frac{dC_1}{dx_1} = \frac{dC_2}{dx_2} = \lambda$$

$$\downarrow$$

Costo incremental igual

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = L - x_1 - x_2 = 0$$

Restricciones de **des**igualdad en DE

Prueba 2: Generador 1 está en el límite máximo, las demás restricciones de desigualdad son no vinculantes:

$$x_1 - x_1^{max} = 0 \Rightarrow \mu_1 > 0;\ \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = \frac{dC_1}{dx_1} - \lambda + \mu_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC_1}{dx_1} = \lambda - \mu_1$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{dC_2}{dx_2} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC_2}{dx_2} = \lambda$$

Note que el costo incremental de la unidad 1 es menor. Si fuese posible usaríamos más potencia de la unidad 1.

Restricciones de **des**igualdad en DE

Prueba 3: Generador 1 está en el límite mínimo, las demás restricciones de desigualdad son no vinculantes:

$$x_1^{min} - x_1 = 0 \Rightarrow \mu_2 > 0;\ \mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = \frac{dC_1}{dx_1} - \lambda - \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC_1}{dx_1} = \lambda + \mu_2$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{dC_2}{dx_2} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC_2}{dx_2} = \lambda$$

Note que el costo incremental de la unidad 1 es mayor. Si fuese posible usaríamos menos potencia de la unidad 1.

Restricciones de **des**igualdad en DE

- Las restricciones vinculantes siempre incrementan los costos de un despacho porque inducen un punto “sub-óptimo”.
- Los multiplicadores de Lagrange dan el costo incremental de las restricciones vinculantes en el nuevo punto óptimo.
- Las restricciones de desigualdad que no son vinculantes tienen un costo incremental igual a cero.

Ejemplo 5 en Xpress

FICO® Xpress Optimization

Determine el DE de 3 unidades que deben abastecer 850 MW si sabe que sus costos de generación en \$/h son:

$$C_A(P_A) = 561 + 7.92P_A + 0.001562P_A^2$$
$$C_B(P_B) = 310 + 7.85P_B + 0.00194P_B^2$$
$$C_C(P_C) = 78 + 7.97P_C + 0.00482P_C^2$$

$$P_A + P_B + P_c = L$$

Las restricciones de las unidades son:

$$0 \leq P_A \leq 350\ MW$$
$$0 \leq P_B \leq 380\ MW$$
$$0 \leq P_C \leq 250\ MW$$

¿Cuál es el costo del despacho?

¿Cuál es el costo incremental? Compare con Ejemplo 3.

Restricciones de **des**igualdad en DE

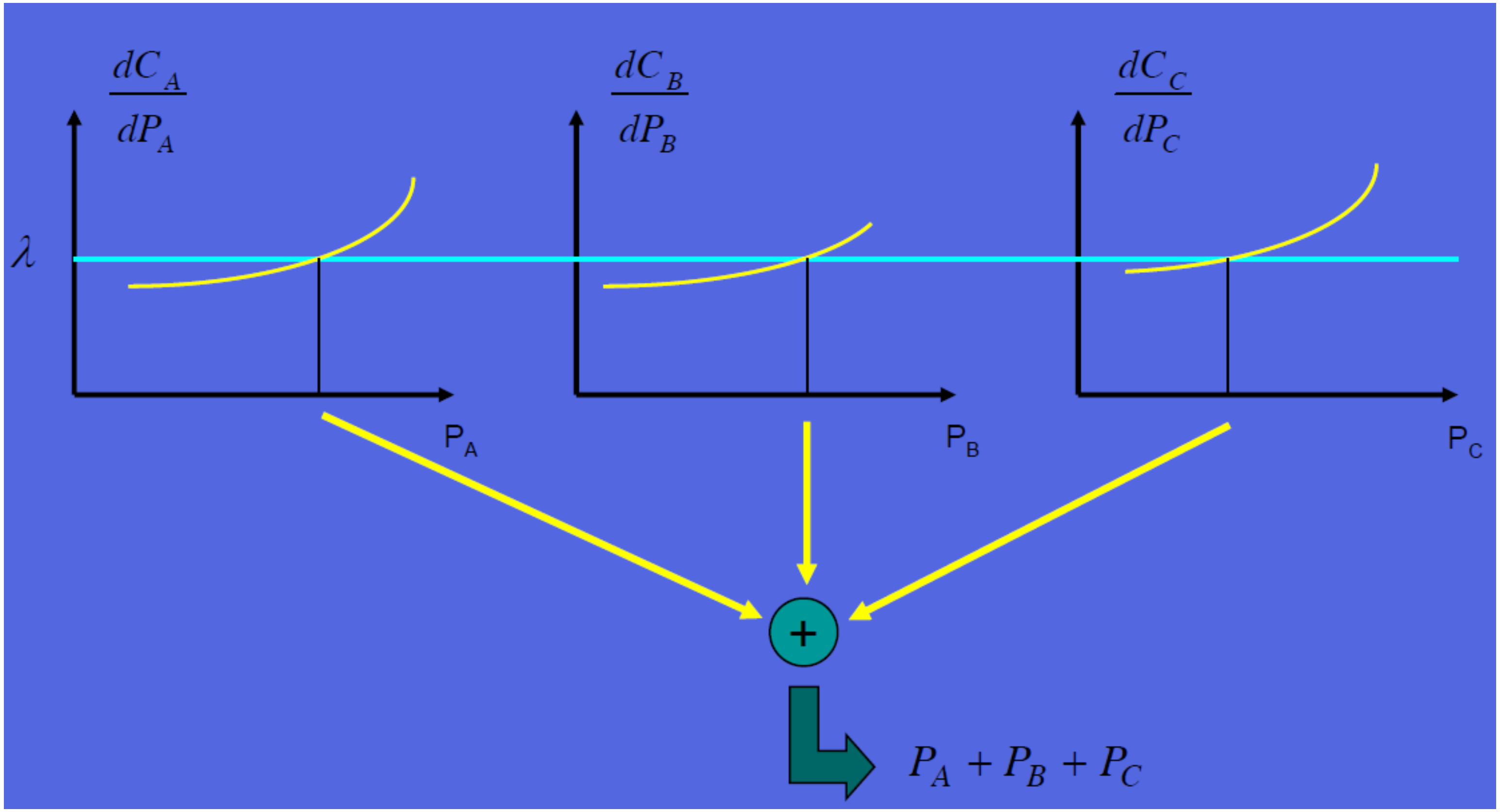
FICO® Xpress Optimization

Ejemplo 6:

$$min_{P_{G1},P_{G2}}(900 + 45P_{G1} + 0.01P_{G1}^2 + 2500 + 43P_{G2} + 0.003P_{G2}^2)$$
$$s.t. \quad 700 - P_{G1} - P_{G2} = 0$$
$$-P_{G1} \leq 0$$
$$P_{G1} - 200 \leq 0$$
$$-P_{G2} \leq 0$$
$$P_{G2} - 600 \leq 0$$

Despacho económico práctico #1

Despacho por costo incremental igual



Despacho económico práctico #1

Algoritmo de despacho por costo incremental igual

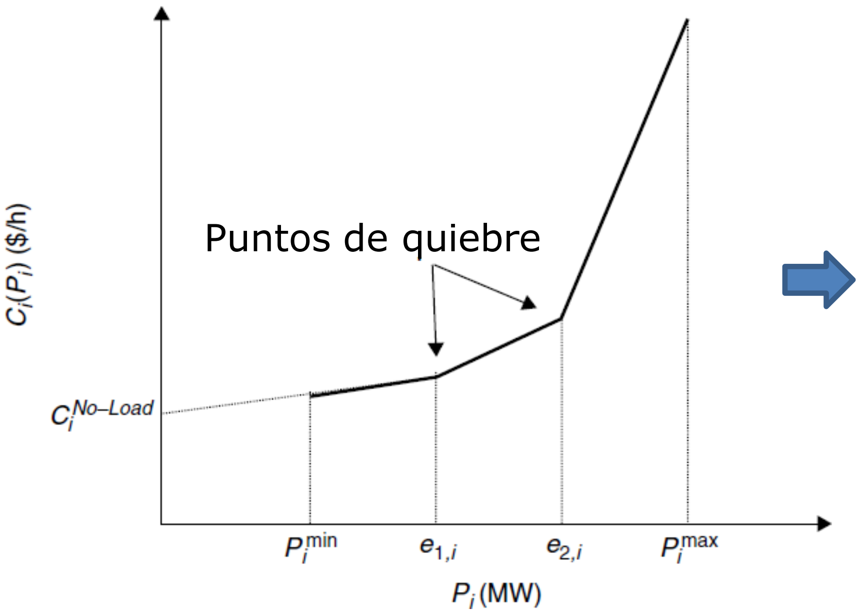
1. Escoja un valor inicial para λ
2. Calcule P_A, P_B, P_C tal que $\frac{\partial C_A(P_A)}{\partial P_A} = \frac{\partial C_B(P_B)}{\partial P_B} = \frac{\partial C_C(P_C)}{\partial P_C}$
3. Si alguna de estas potencias excede su valor máximo o mínimo, se fija la potencia al valor límite.
4. Calcule $P_{Total} = P_A + P_B + P_C$
5. Si $P_{Total} < L$, incremente el valor de λ, y regrese a paso 2.

   Si $P_{Total} > L$, reduzca el valor de λ, y regrese a paso 2.

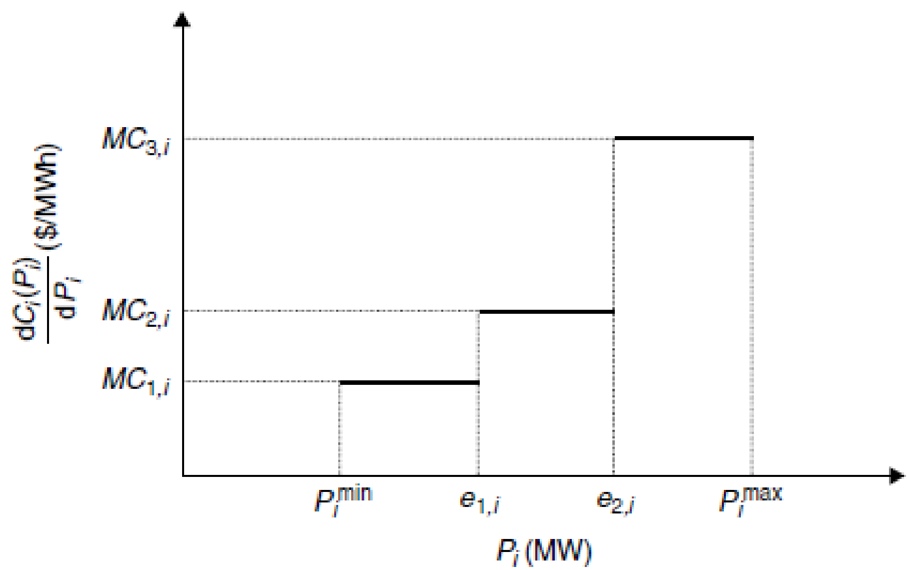
   Si $P_{Total} \approx L$, fin.

Curvas de costo linealizadas

Curva de costo de producción



Curva de costo incremental (marginal)



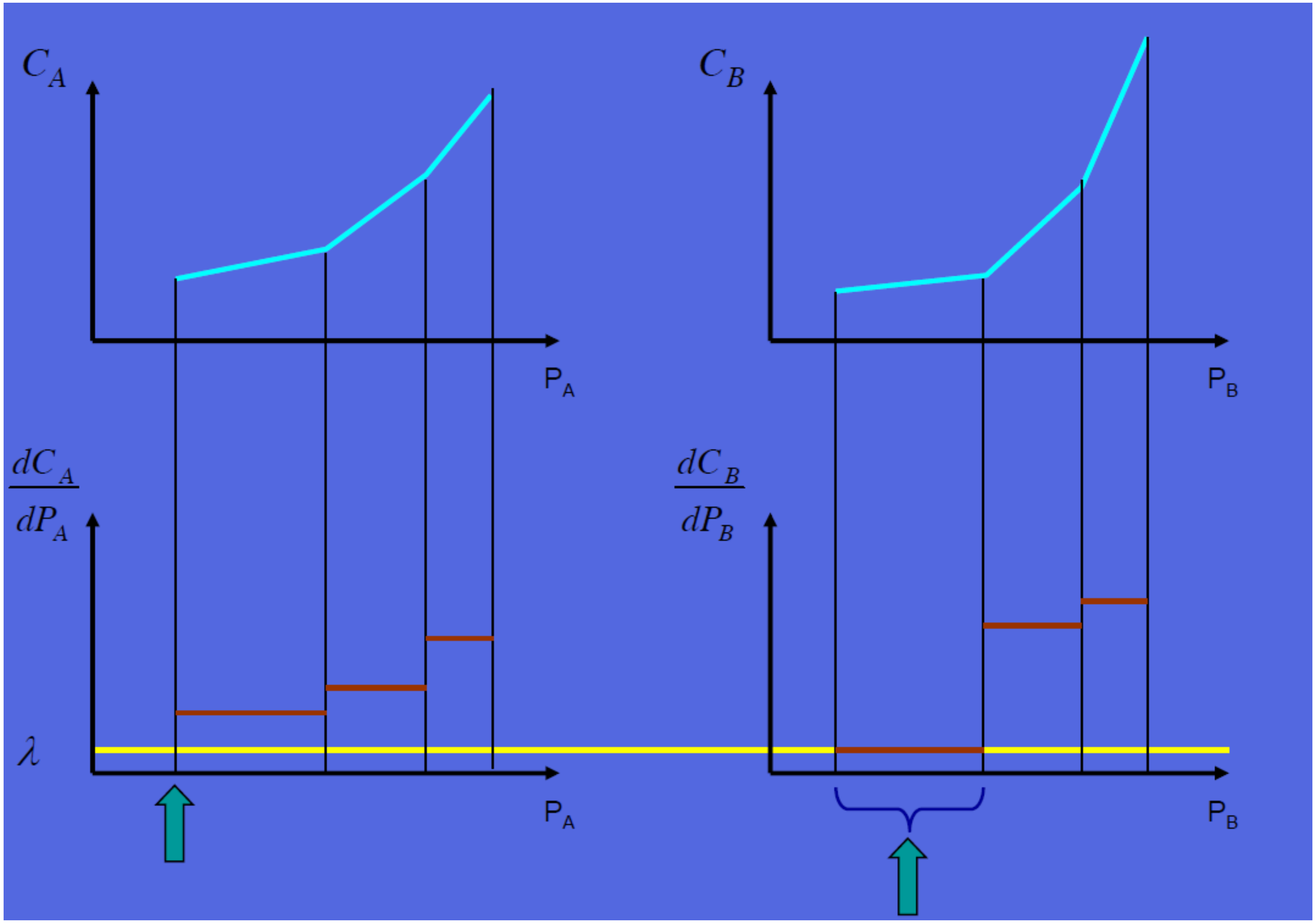
Este es un modelo simplificado que lleva a trabajar con curvas de costo incremental discontinuas.

Despacho económico práctico #2

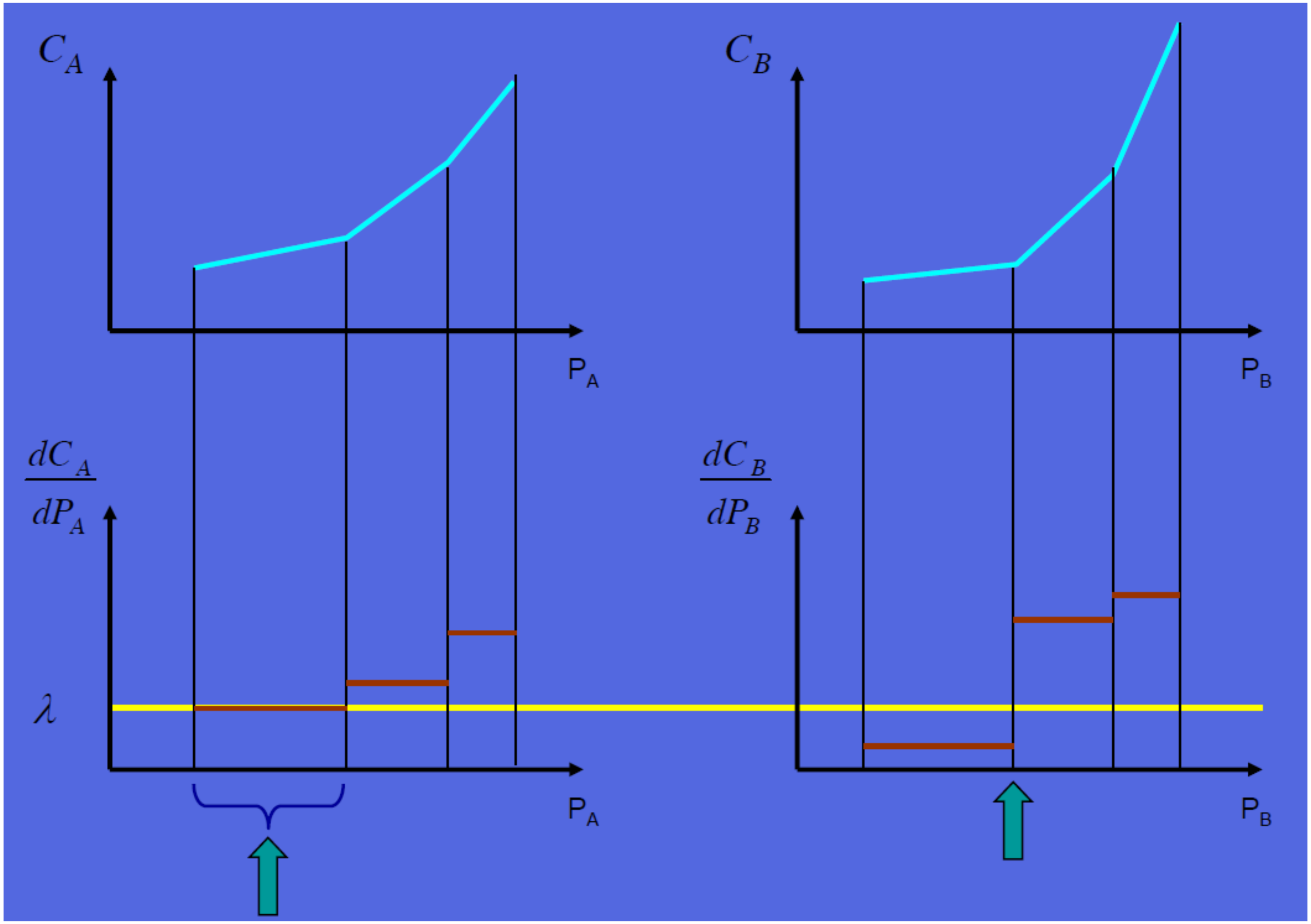
Algoritmo mediante curvas de costo lineales

1. Linealice las curvas de costo de producción de los generadores
2. La potencia de la unidad de generación con el costo incremental más bajo se carga a su valor máximo
3. La potencia de la unidad con el segundo costo incremental más bajo se incrementa (segunda unidad más barata)
4. Continua hasta que la generación satisface la carga.

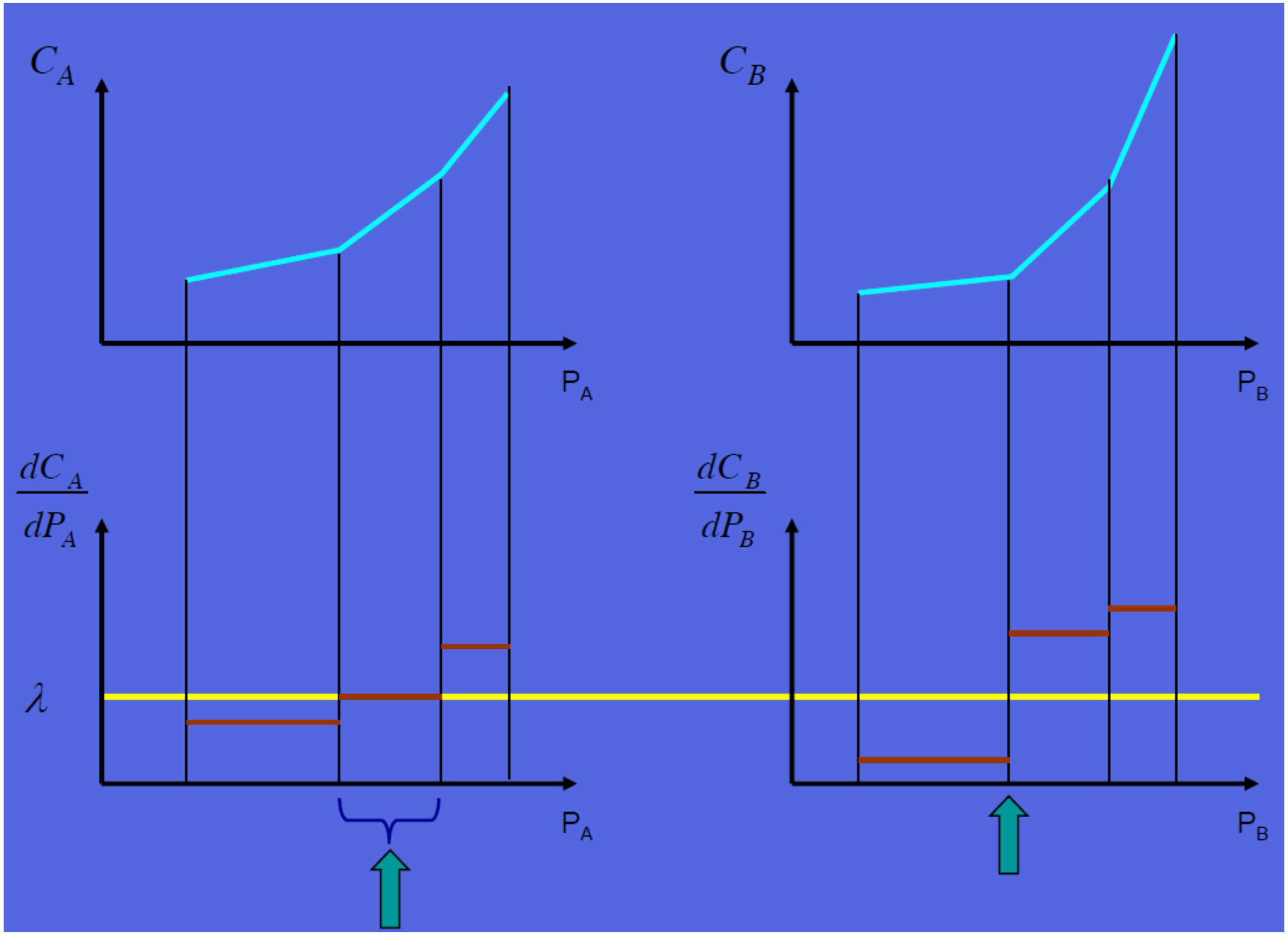
Despacho económico práctico #2



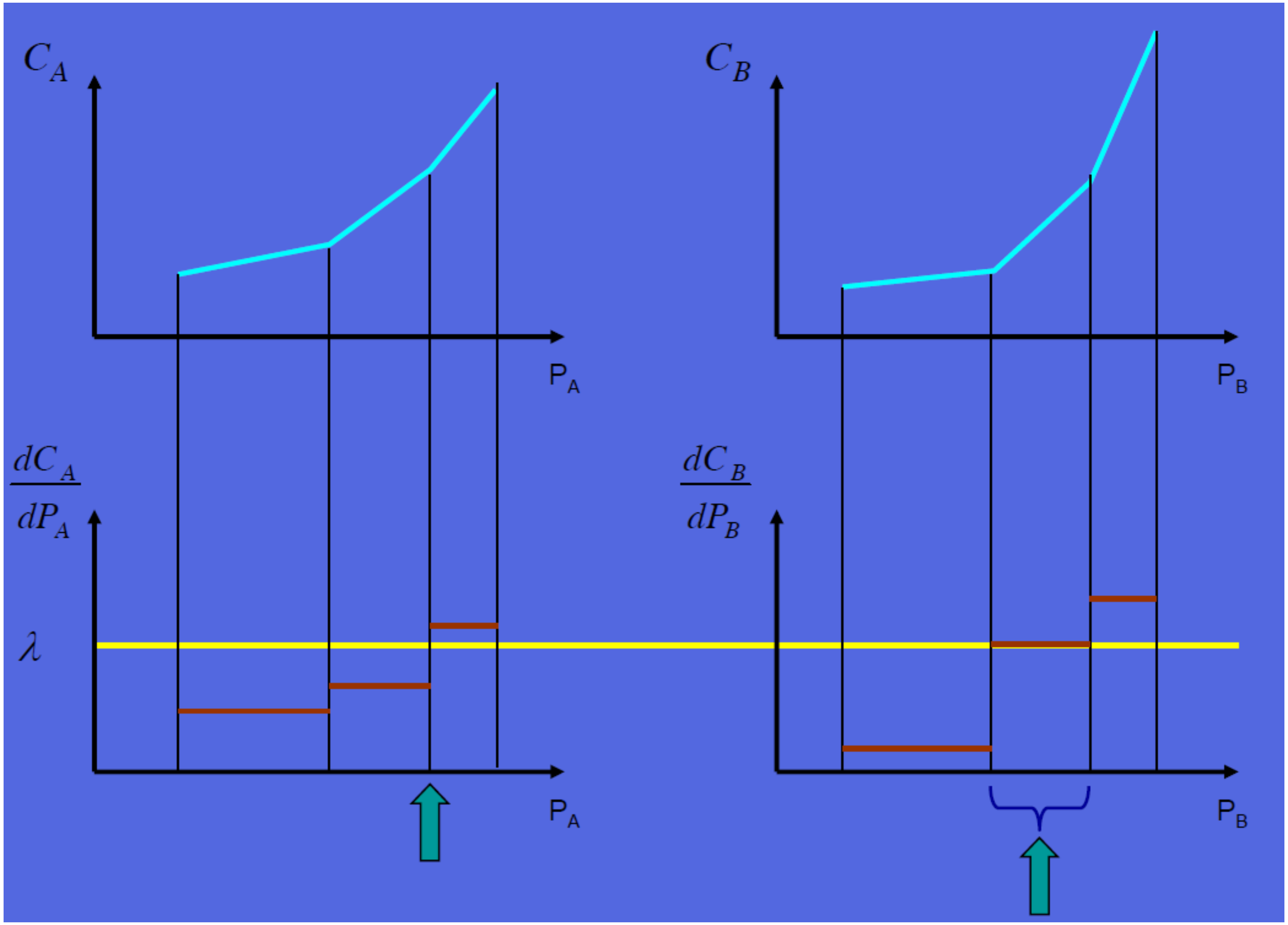
Despacho económico práctico #2



Despacho económico práctico #2

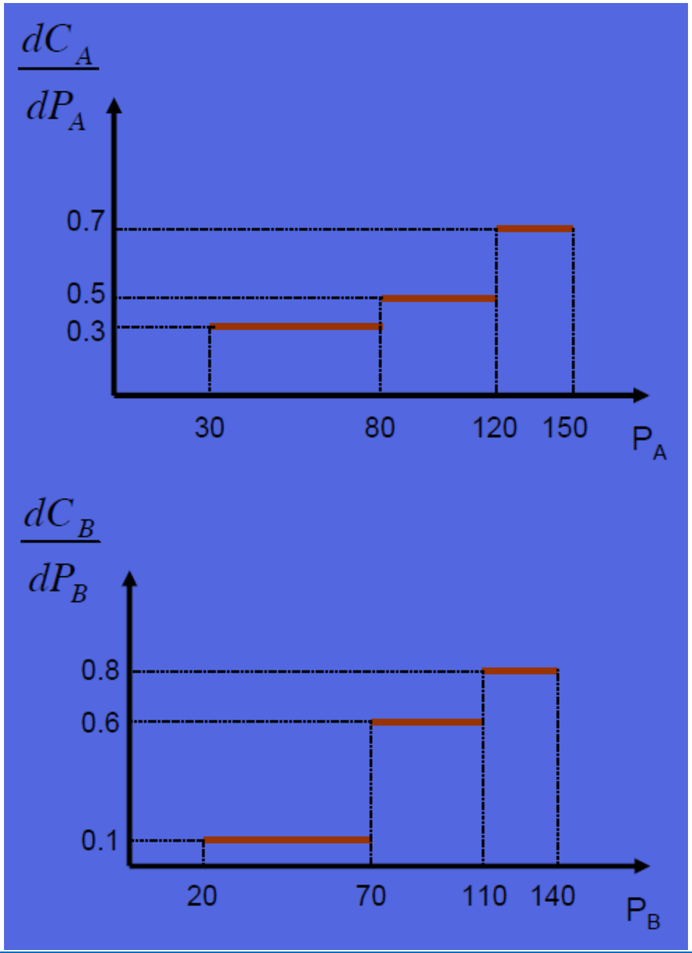


Despacho económico práctico #2



Despacho económico práctico #2

Ejemplo 7: Si $L = 210\ MW$, determine el despacho óptimo.



Unit	$P_{Segment}$	P_{total}	Lambda
A&B min	20+30 = 50	50	
B	70-20=50	100	0.1
A	80-30=50	150	0.3
A	120-80=40	190	0.5
B	110-70=40	230	0.6
A	150-120=30	260	0.7
B	140-110=30	290	0.8

Despacho económico con pérdidas

Suponga que el Generador A es más barato que B, pero para suplir la carga desde A, causamos más pérdidas de transmisión.

Debemos tomar las pérdidas en consideración cuando se realiza el despacho.

Despacho económico con pérdidas

Función Lagrangeana:

$$l = C_A(P_A) + C_B(P_B) + \lambda(L + P_L - P_A - P_B)$$

Condiciones de optimalidad:

$$\frac{\partial l}{\partial P_A} = \frac{dC_A}{dP_A} - \lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_A}\right) = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial P_B} = \frac{dC_B}{dP_B} - \lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_B}\right) = 0$$

$$\frac{1}{1-\frac{\partial P_L}{\partial P_A}} \frac{dC_A}{dP_A} = \frac{1}{1-\frac{\partial P_L}{\partial P_B}} \frac{dC_B}{dP_B} = \lambda$$

Factores de penalización

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = L + P_L - P_A - P_B = 0$$

Despacho económico con pérdidas

- Para calcular los factores de penalización, se necesita conocer la relación entre pérdidas y la potencia de salida de cada generador.
- Esta relación no es sencilla y depende de las inyecciones de potencia en todo el sistema
- No se consideran las restricciones de la red
- Una solución rigurosa requiere de un estudio de Flujos de Potencia Óptimo (**OPF** por sus siglas en inglés.)