PÉRIODICITÉS GLOBALES D'HOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE ORDINAIRE

PO HU, IGOR KRIZ, BAR ROYTMAN, AND PETR SOMBERG

RÉSUMÉ: Pour un groupe fini, nous observons des périodicités dans sa cohomologie équivariante ordinaire, qui montrent comment, dans le cadre global, le calcul de coefficients avec des valeurs en représentations virtuelles peut être réduit.

Lorsqu'on considère l'homologie et la cohomologie G-équivariante pour un groupe fini G, pour avoir la dualité de Spanier-Whitehead G-équivariante, il faut que la théorie soit stable non seulement sous la suspension ordinaire, mas aussi sous toutes les suspensions par les compactifications à 1 point des G-représentations réelles de dimension finie. Or, un G-CW-complexe non G-fixé (même à nombre fini de cellules) ne peut être plongé dans une sphère fixée. Les théories d'homologie et cohomologie avec dualité sont alors forcément graduées non seulement par $\mathbb{Z}$, mais par l'anneau de représentations réelles $RO(G)$ du groupe G (voir [7]).

Comme dans le cas non équivariant, on a en particulier des théories de (co)homologie équivariantes « ordinaires » (voir [8]), qui satisfont

$$H^n(*) = H_{-n}(*) = 0 \text{ lorsque } 0 \neq n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Ici, M est un foncteur de Mackey, c'est-à-dire une paire de foncteurs covariants et contravariants des G-ensembles finis vers des groupes abéliens qui coïncident sur des objets et satisfont la formule de projection (voir [4]). De même que les groupes abéliens sont identifiés aux $\mathbb{Z}$-modules, les foncteurs de Mackey de G sont identifiés aux modules, au bon sens du terme, sur le foncteur de Mackey Burnside $\mathcal{A}_G$, qui est un objet d'anneau commutatif parmi les foncteurs Mackey (ce qui s'appelle un *foncteur de Green*).

Le calcul de $HM_\alpha(*)$ est un problème intéressant et non résolu. Même des calculs partiels ont eu de fortes applications, la plus spectaculaire étant [5]. Un obstacle majeur réside dans la croissance rapide de l'anneau de représentations $RO(G)$ avec le groupe G. Même pour $G = \mathbb{Z}/p$ pour un nomber premier p, son rang croît linéairement avec p.

Dans ce cas, il a été observé dans [11] que si l'on travaille p-localement, la (co)homologie équivariante est périodique par rapport à la différence de deux représentations irréductibles non triviales de $\mathbb{Z}/p$.

Dans la présente note, nous considérons les périodicités globales dans les théories de (co)homologie G-équivariantes satisfaisant (1). Deux G-représentations de dimension finie V et W sont dites *équivalentes* si leurs points fixes sous chaque sous-groupe $H \subseteq G$ ont des dimensions égales :

$$dim(V^H) = dim(W^H).$$

Cela revient à dire que V et W ont la même *perversité* au sens de [3, 1]. Ceci définit un homomorphisme naturel des groupes abéliens

$$\kappa : RO(G) \to RO'(G)$$

où $RO'(G)$ est le quotient du groupe abélien de $RO(G)$ modulo la relation d'équivalence des représentations. Notre principal résultat est :

1. **Théorème.** *Soit $\alpha \in Ker(\kappa)$. Alors il existe un $\mathcal{A}_G$-module inversible $\mathcal{A}'_G$ tel que*

$$\Sigma^\alpha H\mathcal{A}_G = H\mathcal{A}'_G$$

où Σ^α désigne la suspension par α. De plus, après localisation à un premier rationnel arbitraire p, on a

$$(\mathcal{A}_G)_{(p)} \cong (\mathcal{A}'_G)_{(p)}. \tag{2}$$

En fait, on peut être beaucoup plus explicite. Soit K le corps de nombres engendré par les valeurs des caractères de G. Alors $K \subseteq \mathbb{Q}[\zeta_N]$ où $N = N(G)$ est le plus petit commun multiple des ordres des éléments de G (i.e. *l'exponsant* de G). Alors le groupe de Galois $Gal(K/\mathbb{Q})$ (qui est naturellement un quotient de $\mathbb{Z}/N^\times = Gal(\mathbb{Q}[\zeta_N]/\mathbb{Q})$) agit sur les représentations de G par son action sur les caractères. Pour $g \in Gal(K/\mathbb{Q})$ et une représentation de dimension finie V, désignons par V^g la représentation obtenue par l'action de g. On a maintenant

2. **Lemme.** *Deux représentations G réelles de dimension finie V, W qui ont la même perversité sont $Gal(K/\mathbb{Q})$-conjuguées.*

Preuve: (d'après, par exemple, Isaacs [6]) Il est bien connu que deux G-représentations de dimension finie ayant la même perversité dont les caractères ne prennent que des valeurs rationnelles sont isomorphes. Ainsi, dans le cas complexe, si $\overline{V}$, respectivement $\overline{W}$ désigne les sommes des conjugués de V, resp. W par $Gal(K/\mathbb{Q})$, alors $\overline{V} \cong \overline{W}$, ce qui donne le résultat. Dans le cas réel, on procède de la même manière tandis que l'on remplace K par le sous-corps K^r engendré par les valeurs des caractères réels de G. $\square$

Il suffit donc de calculer $\Sigma^{Vi-V}H\mathcal{A}_G$. Soit $H\subseteq G$. On désigne par $\mathcal{A}_{G,H}$ le foncteur libre G-Mackey sur le système de coefficients $\mathbb{Z}_H$: $\mathcal{O}_G^{Op}\to Ab$ (où $\mathcal{O}_G$ est la catégorie d'orbites de G) qui est $\mathbb{Z}$ en isotropie conjuguée à H et 0 ailleurs. Nous pouvons identifier la valeur de $\mathcal{A}_{G,H}$ dans le groupe d'isotropie K avec

$$\mathbb{Z}(W(H)\backslash((G/K)^H)).$$

En particulier, si $H\lhd G$, la valeur de $\mathcal{A}_{G,H}$ dans l'isotropie K est $\mathbb{Z}$ si $H\subseteq K$ et 0 sinon.

1. **Proposition.** *Soit i un entier premier avec $|G|$. Alors*

$$\mathcal{A}_G/(i)\cong\bigoplus_{(H)}\mathcal{A}_{G,H}/(i)$$

où la sommation s'effectue sur les classes de conjugaison des sous-groupes H.

Preuve: On désigne par $A(G)$ l'anneau de Burnside de G. On désigne ensuite par $A(G,H)$ le $A(G)$-module cyclique sur un générateur x_H où

$$[G/K]x_H=|W(H)\backslash([G/K)^H)|x_H. \tag{3}$$

Le foncteur oubli des foncteurs de Mackey vers les $A(G)$-modules par restriction à l'isotropie G possède maintenant un adjoint à gauche, désigné par $\iota_\sharp$.

Par définition, la restriction de $\mathcal{A}_{G,H}$ à l'isotropie G est $A(G,H)$. D'autre part, on constate que la restriction à l'isotropie H du générateur de $\mathcal{A}_{G,H}$ est $|W(H)|$ fois le générateur libre. On conclut donc que

$$\iota_\sharp(A(G,H)/i)=\mathcal{A}_{G,H}/(i).$$

Notre énoncé revient alors à dire que $A(G)/(i)$ est la somme directe de ses modules $A(G,H)/(i)$. On recherche donc des éléments $x_H\in A(G)/(i)$ satisfaisant (3). De plus, on souhaite que

$$x_H=[G/H]+\sum_{(J)\lneq H}a_J[G/J]$$

où $\lneq$ désigne une sous-conjugaison propre. Nous allons d'abord résoudre les équations

$$((([G/H]+\sum_{(L)\lneq H}a_L[G/L])[G/J])^J=0 \tag{4}$$

pour tout J proprement sous-conjugué à H. Ceci est possible car, en supposant que a_L est connu pour toutes les classes de conjugaison comprises entre (J) et (H), a_J est la seule inconnue de (4) de coefficient

$|W(J)|^2$, qui est inversible dans $\mathbb{Z}/(i)$. Cependant, en supposant (4) pour tout $J \lneq H$, pour un sous-groupe $K \lneq J$, nous devons également vérifier

$$(([G/H] + \sum_{(L) \lneq H} a_L[G/L])[G/J])^K = 0.$$

Mais nous avons

$$\begin{array}{l}(([G/H] + \sum_{(L) \lneq H} a_L[G/L])[G/J])^K|W(K)| = \\ (([G/H] + \sum_{(L) \lneq H} a_L[G/L])[G/J])^K(G/K)^K = \\ (([G/H] + \sum_{(L) \lneq H} a_L[G/L])[G/J][G/K])^K = \\ (([G/H] + \sum_{(L) \lneq H} a_L[G/L])[G/K])^K[G/J]^K\end{array}$$

où le côté droit est 0 par (4). □

Considérons maintenant la suite exacte de foncteurs de Mackey

$$0 \to \mathcal{A}_G^{H,i} \to \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_{G,H}/(i) \to 0. \tag{5}$$

2. **Proposition.** *Pour i, j premiers avec $|G|$,*

$$\mathcal{A}_G^{H,i} \Box \mathcal{A}_G^{H,j} \cong \mathcal{A}_G^{H,ij} \tag{6}$$

(voir [4] *pour la définition du produit $\Box$) De plus, si $i \equiv 1 \mod |G|$,*

$$\mathcal{A}_G^{H,i} \cong \mathcal{A}_G. \tag{7}$$

En particulier, tous les foncteurs de Mackey $\mathcal{A}_G^{H,i}$ pour i premiers avec $|G|$ sont inversibles.

Preuve: Là encore, on peut travailler avec des modules d'anneaux de Burnside plutôt qu'avec des foncteurs de Mackey. En effet, $\iota_\sharp$ est exact à droite et, par définition,

$$\iota_\sharp(M \otimes_{A(G)} N) = (\iota_\sharp M)\Box(\iota_\sharp N).$$

D'autre part, d'après la proposition 1,

$$L_j \iota_\sharp A(G,H)/(i) = 0 \text{ pour } j > 0,$$

ce qui montre qu'on peut obtenir la suite exacte (5) en appliquant $\iota_\sharp$ à la suite exacte courte des $A(G)$-modules

$$0 \to A_H^i(G) \to A(G) \to A(G,H)/(i) \to 0. \tag{8}$$

Alors (6) est équivalent à

$$A_H^i(G) \otimes_{A(G)} A_H^j(G) \cong A_H^{ij}(G). \tag{9}$$

D'après la version en anneaux de Burnside de la Proposition 1, nous remarquons d'abord que les $A(G)$-modules $A(G,H)/(i)$ sont de dimension Tor 1, et donc que les $A(G)$-modules $A^i_H(G)$ sont plats. Considérons maintenant le diagramme des $A(G)$-modules

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^i_H(G) \otimes A^j_H(G) \arrow[r] \arrow[d, "Id"'] & A^j_H(G) \arrow[r] \arrow[d] & A(G,H)/i \otimes A^j_H(G) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^i_H(G) \otimes A^j_H(G) \arrow[r] & A(G) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & A(G,H)/j \arrow[r, "Id"] \arrow[d] & A(G,H)/j \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

(où tous les produits tensoriels sont sur $A(G)$). La dernière colonne est le quotient de la deuxième colonne par la première colonne. Puisque X est un module cyclique, il suffit de prouver que

$$A(G,H)/(i) \otimes A^j_H(G) \cong A(G,H)/(i). \tag{11}$$

Pour cela, il suffit de considérer la suite exacte longue des Tor issue du tensoring $A(G,H)/(i)$ avec

$$0 \to A^j_H(G) \to A(G) \to A(G,H)/(j) \to 0.$$

Pour prouver (7), on cherche un élèment de la forme

$$x = 1 + b[G/H] \tag{12}$$

dans $\mathcal{A}^{H,i}_G$. Mais en multipliant (12) par $[G/H]$, on obtient

$$b|W(H)| = i - 1,$$

qui est résoluble par notre hypothèse sur i. Or, x est un générateur libre de $\mathcal{A}^{H,I}_G$ en isotropie G. $\square$

3. **Proposition.** *Soit V une G-représentation réelle de dimension finie et soit $i \in \mathbb{Z}$ premier avec $|G|$. Alors il existe une application G-équivariante basée*

$$f : S^V \to S^{V^i} \tag{13}$$

telle que pour tout $H \subseteq G$, le degré de $f^H : S^{V^H} \to S^{(V^i)^H}$ soit premier avec $|G|$.

Preuve: L'application (13) peut être construite par induction inverse sur l'isotropie. Pour chaque sous-groupe d'isotropie $H \subseteq G$ donné, nous devons construire une restriction $W(H)$-équivariante f_H de f de la forme

$$f_H : S^{V^H} \to S^{(V^i)^H} \tag{14}$$

qui a déjà été construite sur le sous-complexe d'isotropies non triviales. Mais cela signifie que pour construire (14), il suffit de l'étendre sur des cellules $W(H)/I$-libres où I est le groupe d'inertie de $W(H)$ sur V^H, pour lequel il n'y a pas d'obstruction. En considérant les sous-groupes cycliques élémentaires, nous verrons que le degré sera toujours premier avec $|W(H)/I|$, et en ajoutant un multiple de $|W(H)/I|$ (sans obstruction), on peut alors le rendre premier avec $|G|$. □

Preuve du théorème 1. Or, si, pour l'application (14), on a

$$deg(f^H) = i_H,$$

alors, d'après la proposition 1, on a

$$\mathcal{A}_G \otimes_{\mathcal{O}_G^{Op}} \widetilde{C}_*(Cofib(f)) \cong \bigoplus_{(H)} \mathcal{A}_{G,H}/(i_H)[dim_{\mathbb{R}}(V^H)]$$

Il résulte alors de la dualité que

$$H\mathcal{A}_G \wedge S^{-V^i} \wedge Cofib(f)$$

peut être représenté au niveau des chaînes par

$$\bigoplus_{(H)} \mathcal{A}_{G,H}/(i_H).$$

Ainsi, Par définition,

$$H\mathcal{A}_G \wedge S^{V-Vi} \sim H(\Box_{(H)}\mathcal{A}_G^{H,i_H}),$$

ce qui implique l'énoncé.

Pour prouver (2), si $p \mid |G|$, puisque le nombre i est inversible dans $\mathbb{Z}_{(p)}$, on a $(\mathcal{A}^i_{G,H})_{(p)} \cong (\mathcal{A}^1_{G,H})_{(p)} = (\mathcal{A}_G)_{(p)}$ (voir proposition 2).

Si, en revanche, $p \nmid |G|$, alors par la proposition 1 et le théorème chinois des restes, $(\mathcal{A}_G)_{(p)}$ est un produit de copies de $\mathbb{Z}_{(p)}$, et donc son groupe de Picard n'a pas de torsion. □

Exemple: 1. Pour un groupe cyclique primaire $G = \mathbb{Z}/(p^n)$, si V est une représentation complexe irréductible d'inertie $\mathbb{Z}/(p^k)$, alors on trouve par cette méthode que

$$H\mathcal{A}_G \wedge S^V \wedge S^{V^i} \sim H(\Box_{j \leq k}\mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}/(p^j),i})$$

Les foncteurs de Mackey $\Box_{j\leq n}\mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}/(p^j),i_j}$ sont tous non isomorphes pour differents choix de $i_j \in (\mathbb{Z}/p^j)^\times$. Cela peut être établi par un calcul direct. (On peut aussi appliquer les résultats dérivés de Ayala, Mazel-Gee, Rozenblyum [2]; voir [1] pour le contexte).

2. Soit G le groupe de Heisenberg sur le corps $\mathbb{F}_{p^3}$ d'ordre p^3 et soit V l'une de ses $(p-1)$ représentations de Heisenberg non isomorphes. Alors G possède $(p+1)$ classes de conjugaison de sous-groupes cycliques P_j, $j=0,\dots,p$ d'ordre p. On trouve que l'application f de (13) posséde

$$i_{P_j}=i,\ i_G=i^p.$$

On obtient donc

$$H\mathcal{A}_G\wedge S^{V-V^i}\sim H(\ \Box_{j=0}^p\mathcal{A}_G^{P_j,i}\Box\mathcal{A}_G^{G,i^p}).$$

Ces foncteurs de Mackey sont aussi tous différents pour différents choix de $i\in(\mathbb{Z}/p)^\times$.

Remarque: Le côté des anneaux de Burnside, que nous avons utilisé techniquement, a été largement étudié dans la littérature (voir par exemple [12, 14, 13, 9, 10]), même en vue d'applications à la théorie de l'homotopie stable équivariante. Nos énoncés techniques peuvent être largement déduits de ces références. Cependant, à notre connaissance, le théorème 1 est nouveau.

Bibliographie

[1] D. Ayala, A. Mazel-Gee, N. Rozenblyum: *Stratified noncommutative geometry*, Mem. Amer. Math. Soc. 297 (2024), no. 1485, iii+260 pp.

[2] D. Ayala, A. Mazel-Gee, N. Rozenblyum: Derived Mackey functors and C_{p^n}-equivariant cohomology, arXiv: 2105.02456

[3] V. Burghardt, P. Hu, I. Kriz, P. Somberg: Perverse Mackey functors, to appear

[4] A. W. M. Dress: Contributions to the theory of induced representations, in: “Classical” Algebraic K-Theory, and Connections with Arithmetic, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 342 Springer, Berlin, (1973) 181-240

[5] M. A. Hill, M. J. Hopkins, D. C. Ravenel: Equivariant stable homotopy theory and the Kervaire invariant problem, *Ann. of Math.* (2) 184 (2016), no. 1, 1-262

[6] I. M. Isaacs: The Fixed-Point-Space Dimension Function for a Finite Group Representation, *Proceedings AMS* 107, 4 (1989) 867-872

[7] L. G. Lewis, Jr., J. P. May, M. Steinberger, and J. E. McClure: *Equivariant stable homotopy theory*, volume 1213 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986. With contributions by J. E. McClure.

[8] L. G. Jr. Lewis, J. P. May, J. E. McClure: Ordinary RO(G)-graded cohomology, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 4 (1981), no. 2, 208-212

[9] A. Raggi-Cardenas: Burnside rings of finite representation type, *Bull. Aust. Math. Soc.* 42 (1990), 247-251

[10] U. Reichenbach: Representations of Burnside rings, *Forum Math.* 14 (2002) 325-344

[11] K. Sankar, D.Wilson: On the C_p-equivariant dual Steenrod algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* 150 (2022), 3635-3647

[12] T. tom Dieck: The Picard group of the Burnside ring, *J. Reine Angew. Math.* 361 (1985), 174-200

[13] T. tom Dieck: Homotopy equivalent group representations and Picard groups of the Burnside ring and the character ring, *Manuscripta Math.* 26 (1978/79), no. 1-2, 179-200

[14] T. tom Dieck, T. Petrie: Geometric modules over the Burnside ring, *Invent. Math.* 47 (1978), no. 3, 273-287