Классический симплекс-метод

Основные термины и определения

Оптимизация (в математике, информатике и исследовании операций) — это задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

Теорию и методы решения задачи оптимизации изучает **математическое программирование**.

Математическое программирование — это область математики, разрабатывающая теорию, численные методы решения многомерных задач с ограничениями.

Основные термины и определения

Линейное программирование – это набор математических и вычислительных инструментов, позволяющих найти конкретное решение системы, которое соответствует максимуму или минимуму какой-либо другой линейной функции.

Линейное программирование – это фундаментальный метод оптимизации, десятилетиями применяемый в областях, требующих большого объема математических вычислений.

Стандартная математическая задача оптимизации

Стандартная математическая задача оптимизации формулируется таким образом. Среди элементов χ, образующих множества Χ, найти такой элемент χ*, который доставляет минимальное значение f(χ*) заданной функции f(χ). Для того, чтобы корректно поставить задачу оптимизации, необходимо задать:

а) **Допустимое множество** — множество Χ , среди элементов которого ведется поиск;

б) **Целевую функцию** — отображение f();

в) **Критерий поиска** (max или min).

Ключевая идея симплекс-метода

Графический способ решения задачи ЛП показывает, что оптимальное решение этой задачи всегда ассоциируется с *угловой точкой* пространства решений (в математике она также называется **крайней точкой** множества). Это является ключевой идеей при разработке общего алгебраического *симплекс-метода* для решения любой задачи линейного программирования.

Переход от геометрического способа решения задачи ЛП к симплекс-методу лежит через алгебраическое описание крайних точек пространства решений. Для реализации этого перехода сначала надо привести задачу ЛП к **стандартной форме**, преобразовав неравенства ограничений в равенства путем введения дополнительных переменных.

Стандартная форма задачи ЛП

Стандартная форма задачи ЛП необходима, потому что она позволяет получить **базисное решение** (используя систему уравнений, порожденную ограничениями). Это (алгебраическое) базисное решение полностью определяет все (геометрические) крайние точки пространства решений Симплекс-метод позволяет эффективно найти оптимальное решение среди всех базисных.

Стандартная форма задачи ЛП

Стандартная форма записи задачи ЛП предполагает выполнение следующих требований.

1. Все ограничения (включая ограничения неотрицательности переменных) преобразуются в равенства с неотрицательной правой частью.
2. Все переменные неотрицательные.
3. Целевую функцию следует или максимизировать, или минимизировать.

Приведение к стандартной форме - шаг 1

1. *Преобразование неравенств в равенства.* Неравенства любого типа (со знаками неравенств ≤ или ≥) можно преобразовать в равенства путем добавления в левую часть неравенств дополнительных переменных — *остаточных* или *избыточных*

Пример неравенства типа "≤". Неравенство $x_1 + 2x_2 \le 3$ эквивалентно равенству $x_1 + 2x_2 + s_1 = 3$, где s_1 — остаточная переменная и $s_1 \ge 0$.

Пример неравенства типа "≥". Неравенство $3x_1 + x_2 \ge 5$ эквивалентно равенству $3x_1 + x_2 + S_1 = 5$, где S_1 — избыточная переменная и $S_1 \ge 0$.

Правую часть равенства всегда можно сделать неотрицательной путем умножения всего равенства на –1. Кроме того, заметим, что неравенство типа "≤" также преобразуется в неравенство типа "≥" посредством умножения обеих частей неравенства на –1. Например, неравенство $2 < 4$ после умножения на –1 становится неравенством $-2 > -4$.

Приведение к стандартной форме - шаг 2

2. *Преобразование свободных переменных в неотрицательные.* *Свободную* переменную x_j (т.е. переменную, которая может принимать как отрицательные, так и положительные значения) можно представить как разность двух *неотрицательных* переменных следующим образом.

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0.$$

Например, для $x_j = -5$ положим $x_j^+ = 0$ и $x_j^- = 5$. Если же $x_j = +5$, тогда $x_j^+ = 5$ и $x_j^- = 0$. В обоих случаях переменные x_j^+ и x_j^- неотрицательны.

Такое преобразование свободных переменных следует выполнить во всех неравенствах и в целевой функции. После решения задачи с переменными x_j^+ и x_j^- значения исходных переменных восстанавливаются с помощью обратной подстановки.

Приведение к стандартной форме - шаг 3

3. *Преобразование задачи максимизации в задачу минимизации.* Задача максимизации функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ эквивалентна задаче минимизации функции $-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, поскольку при решении обеих задач предоставляется один и тот же набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример приведения к стандартной форме

Преобразуем следующую задачу ЛП в стандартную форму.

$$\text{Максимизировать } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

при выполнении условий

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - x_3 \geq -5,\\
&-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4,\\
&x_1 + x_2 + 4x_3 = 10,\\
&x_1, x_2 \geq 0,\\
&x_3 \text{ — свободная переменная.}
\end{aligned}$$

Для преобразования задачи в стандартную форму выполним следующие действия.

1. Вычтем из левой части первого неравенства дополнительную (избыточную) переменную S_1 и затем умножим все неравенство на -1, для того чтобы правая часть неравенства стала положительной. (Другой путь преобразования неравенства: сначала умножим его на -1 — неравенство примет вид "$\leq$" вместо "$\geq$", далее к левой части неравенства прибавим дополнительную (остаточную) переменную s_1.)

Пример приведения к стандартной форме

2. Добавим дополнительную (остаточную) переменную s_2 к левой части второго неравенства.
3. Так как третье ограничение изначально записано в виде равенства, поэтому оставляем его без изменения.
4. Выполняем замену $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, где x_3^+, $x_3^- \geq 0$, во всех ограничениях и целевой функции.

Получаем следующую стандартную задачу линейного программирования.

Максимизировать $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^-$

при выполнении следующих условий

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 \geq -5, \\ & -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4, \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 10, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_3 \text{ — свободная переменная.} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & -x_1 - x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_4 = 5, \\ & -6x_1 + 7x_2 - 9x_3^+ + 9x_3^- + x_5 = 4, \\ & x_1 + x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- = 10, \\ & x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Определение базисных решений

Задача линейного программирования, записанная в стандартной форме, содержит m линейных равенств с n неизвестными переменными ($m < n$). Разделим n переменных на два множества: (1) $n - m$ переменные, которые положим равными нулю, и (2) оставшиеся m переменные, значения которых определяются как решение системы из m линейных уравнений.

Если это решение *единственное*, тогда соответствующие m переменные называются **базисными**, а остальные $n - m$ нулевые переменные — **небазисными**. В этом случае результирующие значения переменных составляют **базисное решение**. Если все переменные принимают неотрицательные значения, то такое базисное решение является *допустимым*. В противном случае — *недопустимым*.

Количество базисных решений

Основываясь на этих определениях, нетрудно подсчитать, что количество всех *положительных* базисных решений для m уравнений с n неизвестными не превосходит

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В любом базисном решении по крайней мере одна из переменных x_j^+ и x_j^- должна быть небазисной, т.е. нулевой

Пример различных решений

Рассмотрим следующую систему двух уравнений с пятью неизвестными ($m = 2$, $n = 5$)

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8,$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 4.$$

Определим различные решения этой системы. Количество положительных базисных решений равно $\frac{5!}{3!2!} = 10$. Ниже мы покажем, что некоторые из этих решений на самом деле не будут базисными.

По определению базисное решение включает только две ($= m$) переменные, предполагая, что небазисных *нулевых* переменных три ($= n - m$).

Пример различных решений

Случай 1. Допустимое базисное решение.

Нулевые (небазисные) переменные: x_2, x_4 и x_5.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 4. \end{aligned}}$$

Уравнения: $x_1 + 4x_3 = 8,$
$4x_1 + 2x_3 = 4.$

Решение: *единственное* решение $x_1 = 0$, $x_3 = 2$.

Заключение: базисное решение допустимо, так как $x_1, x_3 \geq 0$.

Случай 2. Недопустимое базисное решение.

Нулевые (небазисные) переменные: x_3, x_4 и x_5.

Уравнения: $x_1 + x_2 = 8,$
$4x_1 + 2x_2 = 4.$

Решение: *единственное* решение $x_1 = -6$, $x_3 = 14$.

Заключение: базисное решение недопустимо, так как $x_1 < 0$.

Пример различных решений

Случай 3. Решение не единственное.

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8,$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 4.$$

Нулевые (небазисные) переменные: x_1, x_2 и x_5

Уравнения:

$$4x_3 + x_4 = 8,$$
$$2x_3 + x_4 = 4.$$

Решение: единственного решения не существует, так как уравнения *зависимы* (если первое уравнение разделить на 2, то получим второе уравнение).

Заключение: бесконечное количество решений.

Случай 4. Решения не существует.

Нулевые (небазисные) переменные: x_1, x_3 и x_4.

Уравнения:

$$x_2 + 3x_5 = 8,$$
$$2x_2 + 6x_5 = 4.$$

Решение: решения не существует, так как уравнения *несовместны*.

Заключение: решения не существует.

Алгоритм симплекс-метода

Алгоритм симплекс-метода всегда начинается с некоторого допустимого базисного решения и затем пытается найти другое допустимое базисное решение, "улучшающее" значение целевой функции. Это возможно только в том случае, если *возрастание* какой-либо нулевой (небазисной) переменной ведет к улучшению значения целевой функции. Но для того, чтобы небазисная переменная стала положительной, надо одну из текущих базисных переменных сделать нулевой, т.е. перевести в небазисные. Это необходимо, чтобы новое решение содержало в точности m базисных переменных. (Напомним, что нас интересуют только *базисные* решения, содержащие в точности m базисных переменных.) В соответствии с терминологией симплекс-метода выбранная нулевая переменная называется **вводимой** (в базис), а удаляемая базисная переменная — **исключаемой** (из базиса).

Пример задачи СМ

Краска обоих видов производится из сырья M1 и M2. Первые два ограничения задачи порождены ограниченными ежедневными запасами сырья. Другие два отображают ограниченный рыночный спрос на краску. Прибыль от одной тонны краски для наружных работ составляет \$5000, а краски для внутренних работ — \$4000. Целевая функция задачи должна максимизировать общую прибыль. Для удобства вычислений доходность производства красок масштабирована в тысячах долларов.

x_1 = объем ежедневного производства краски для наружных работ (тонны),
x_2 = объем ежедневного производства краски для внутренних работ (тонны).

Пример задачи СМ

Эта задача в стандартной форме записывается так:

максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

при ограничениях

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \quad \text{(Ограничение на сырье M1)},$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \quad \text{(Ограничение на сырье M2)},$$
$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1 \quad \text{(Ограничение на спрос)},$$
$$x_2 + s_4 = 2 \quad \text{(Ограничение на спрос)},$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Здесь s_1, s_2, s_3, s_4 — дополнительные (остаточные) переменные, добавленные в неравенства для преобразования их в равенства.

Пример задачи СМ

Задачу ЛП в стандартной форме можно представить в виде следующей компактной таблицы.

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение	
z	1	–5	–4	0	0	0	0	0	z-строка
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	s_1-строка
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	s_2-строка
s_3	0	–1	1	0	0	1	0	1	s_3-строка
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	s_4-строка

Пример задачи СМ

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение	
z	1	–5	–4	0	0	0	0	0	z-строка
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	s_1-строка
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	s_2-строка
s_3	0	–1	1	0	0	1	0	1	s_3-строка
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	s_4-строка

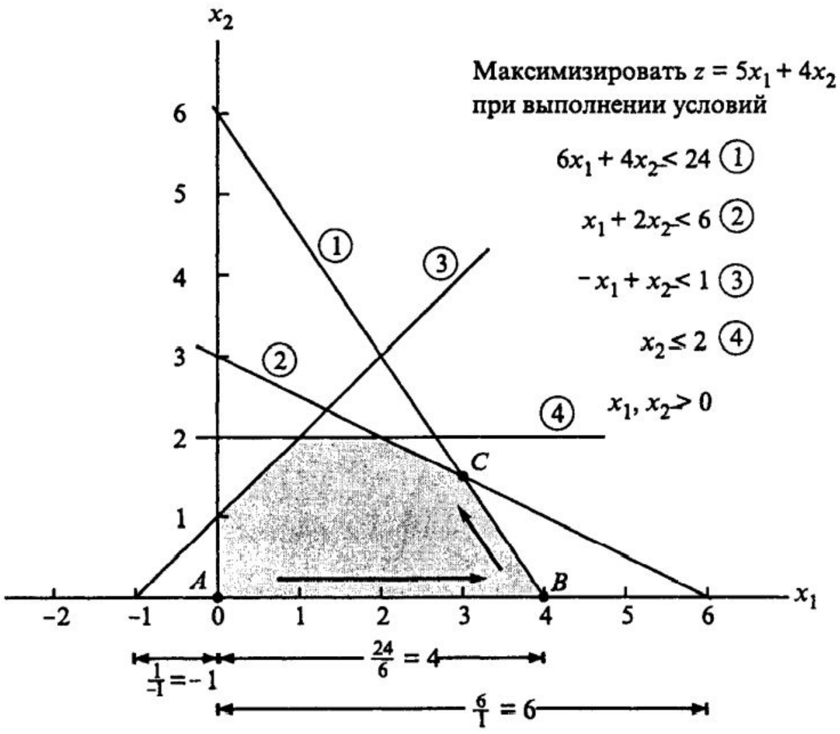
Нижние четыре строки этой таблицы представляют равенства ограничений; значения правых частей этих равенств даны в столбце "Решение". Строка z получена из равенства $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$.

Дополнительные переменные s_1, s_2, s_3 и s_4 составляют очевидное начальное *допустимое базисное* решение, при этом, поскольку небазисные переменные x_1 и x_2 равны нулю, их значения автоматически отображаются в столбце "Решение": $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 1$ и $s_4 = 2$. Значение целевой функции при этом решении равно нулю.

Пример задачи СМ

Будет ли это начальное решение оптимальным? Конечно, нет, поскольку переменные x_1 и x_2 здесь равны нулю, а возрастание этих переменных даже на единицу приводит к увеличению значения целевой функции $z = 5x_1 + 4x_2$ на 5 (при увеличении x_1) или 4 единицы (при увеличении x_2). Поскольку коэффициент при переменной x_1 в формуле целевой функции больше, чем коэффициент при x_2, переменную x_1 следует ввести в число базисных (в этом случае она станет *вводимой*). Если обратиться к приведенной выше таблице, то вводимая переменная определяется среди множества небазисных как переменная, имеющая наибольший отрицательный коэффициент в z-строке.

Включаемая переменная x_1 должна принять положительное значение. На рис. 3.1 видно, что, исходя из начальной точки A ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), наибольшее значение, которое можно присвоить переменной x_1 (не выходя из пространства допустимых решений), равно 4, что соответствует точке B ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$). Это означает, что решение переместилось от крайней точки A в крайнюю точку B.



Пример задачи СМ

Поскольку симплекс-метод не должен основываться на графическом представлении задачи ЛП, необходимо определить, как выбрать точку *B* алгебраически. Из рис. видно, что *B* является одной из точек пересечения прямых, соответствующих ограничениям, с осью x_1. Алгебраически точку пересечения можно найти как **отношение** правой части равенства (значение в столбце "Решение") к коэффициенту при переменной x_1 в этом равенстве, как показано в следующей таблице.

Базис	x_1	Решение	Отношение (точка пересечения)
s_1	6	24	24 / 6 = 4 (минимум)
s_2	1	6	6/1 = 6
s_3	–1	1	1/(–1) = –1 (Не подходит)
s_4	0	2	2/0 = ∞ (Не подходит)

Пример задачи СМ

Минимальное неотрицательное отношение равно значению вводимой переменной x_1 в новом решении, а именно $x_1 = 4$ (сравните с точкой B на рис.). Значение целевой функции при этом значении x_1 возрастет до 20 (= 5×4).

Теперь среди текущих базисных переменных s_1, s_2, s_3 и s_4 следует определить *исключаемую переменную*, которая примет нулевое значение после введения в базис переменной x_1. (Напомним, что в этом примере должно быть в точности 4 базисные переменные.) Поскольку наименьшее (неотрицательное) отношение соответствует переменной s_1, в точке B именно эта переменная обращается в нуль. Таким образом, переменная s_1 будет *исключаемой*, в этом случае переменная x_1 автоматически получает значение 4. Замена исключаемой переменной s_1 на вводимую переменную x_1 приводит к новому базисному решению (x_1, s_2, s_3, s_4).

Пример задачи СМ

Вычисление нового базисного решения основывается на методе исключения переменных (методе Гаусса–Жордана). В следующей таблице, которая пока совпадает с начальной таблицей задачи ЛП, определим **ведущий столбец**, ассоциируемый с вводимой переменной, и **ведущую строку**, ассоциируемую с исключаемой переменной. Элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки, назовем **ведущим**.

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение	
z	1	–5	–4	0	0	0	0	0	
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Ведущая строка
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	
s_3	0	–1	1	0	0	1	0	1	
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	
		Ведущий столбец							

Пример задачи СМ

Процесс вычисления нового базисного решения состоит из двух этапов.

1. Вычисление элементов новой ведущей строки.

   Новая ведущая строка = Текущая ведущая строка / Ведущий элемент.

2. Вычисление элементов остальных строк, включая z-строку.

   Новая строка = Текущая строка – Ее коэффициент в ведущем столбце × Новая ведущая строка.

В нашем примере ведущая строка (s_1-строка) делится на ведущий элемент (= 6). В следующей таблице показана новая ведущая строка, где вводимая (небазисная) переменная x_1 заменила исключаемую переменную s_1. В столбце "Решение" получаем новое значение переменной x_1 (= 4).

Пример задачи СМ

Вычисляем элементы остальных строк таблицы.

1. z-строка.

$$\begin{array}{rl} \text{Текущая } z\text{-строка:} & (1 \quad -5 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0) \\ -(-5) \times \text{Новая ведущая строка:} & (0 \quad 5 \quad 10/3 \quad 5/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 20) \\ = \text{Новая } z\text{-строка:} & (1 \quad 0 \quad -2/3 \quad 5/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 20) \end{array}$$

2. s_2-строка.

$$\begin{array}{rl} \text{Текущая } s_2\text{-строка:} & (0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 6) \\ -(1) \times \text{Новая ведущая строка:} & (0 \quad -1 \quad -2/3 \quad -1/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -4) \\ = \text{Новая } s_2\text{-строка:} & (0 \quad 0 \quad 4/3 \quad -1/6 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 2) \end{array}$$

3. s_3-строка.

$$\begin{array}{rl} \text{Текущая } s_3\text{-строка:} & (0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 1) \\ -(1) \times \text{Новая ведущая строка:} & (0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 4) \\ = \text{Новая } s_3\text{-строка:} & (0 \quad 0 \quad 5/3 \quad 1/6 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 5) \end{array}$$

4. s_4-строка. Новая s_4-строка повторяет текущую s_4-строку, поскольку ее коэффициент в *ведущем столбце* равен нулю.

Пример задачи СМ

Новая симплекс-таблица, соответствующая новому базисному решению (x_1, s_2, s_3, s_4), имеет следующий вид.

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	0	–2/3	5/6	0	0	0	20
x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
s_2	0	0	4/3	–1/6	1	0	0	2
s_3	0	0	5/3	1/6	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Из последней таблицы видно, что полученное базисное решение не является оптимальным, поскольку в z-строке переменная x_2 имеет отрицательный коэффициент.

Пример задачи СМ

Из последней таблицы видно, что полученное базисное решение не является оптимальным, поскольку в z-строке переменная x_2 имеет отрицательный коэффициент. Так же, как и в начальной таблице, строку z можно интерпретировать как уравнение

$$z = \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{6}s_1 + 20.$$

Из последнего уравнения следует, что увеличение значения переменной x_2 (ее текущее значение равно нулю) приведет к увеличению значения целевой функции. Таким образом, переменная x_2 должна стать вводимой в базис.

Пример задачи СМ

Далее определим исключаемую переменную. Для этого вычислим отношения правых частей равенств, соответствующих ограничениям, к коэффициентам, стоящим при x_2 в этих равенствах.

Базис	x_2	Решение	Отношение
x_1	2/3	4	$4/(2/3) = 6$
s_2	4/3	2	$2/(4/3) = 3/2$
s_3	5/3	5	$5/(5/3) = 3$
s_4	1	2	$2/1 = 2$

Вычисления показывают, что минимальное (неотрицательное) отношение соответствует переменной s_2, которая становится исключаемой; при этом значение отношения (= 3/2) равно новому значению переменной x_2. Соответствующее увеличение значения целевой функции составит $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$ и $z = 20 + 1 = 21$.

В этой ситуации ведущей строкой будет s_2-строка, а ведущим столбцом — столбец, соответствующий переменной x_2. Ведущий элемент равен 4/3.

Пример задачи СМ

Вычисляем элементы новой симплекс-таблицы.

1. Новая ведущая (s_2-) строка = Текущая s_2-строка / $\frac{4}{3}$.

2. Новая строка z-строка = Текущая z-строка – $(-\frac{2}{3})$ × Новая ведущая строка.

3. Новая x_1-строка = Текущая x_1-строка – $\frac{2}{3}$ × Новая ведущая строка.

4. Новая s_3-строка = Текущая s_3-строка – $\frac{5}{3}$ × Новая ведущая строка.

5. Новая s_4-строка = Текущая s_4-строка – 1 × Новая ведущая строка.

Эти вычисления приводят к следующей таблице.

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21
x_1	0	1	0	1/4	–1/2	0	0	3
x_2	0	0	1	–1/8	3/4	0	0	3/2
s_3	0	0	0	3/8	–5/4	1	0	5/2
s_4	0	0	0	1/8	–3/4	0	1	1/2

Пример задачи СМ

Поскольку z-строка не имеет отрицательных коэффициентов, соответствующих небазисным переменным s_1 и s_2, полученное решение оптимально.

Оптимальное решение задачи ЛП можно "считать" из симплекс-таблицы следующим образом. Неотрицательные (базисные) переменные представлены в столбце "Базис", а их значения — в столбце "Решение". В данном примере имеем следующее.

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21
x_1	0	1	0	1/4	–1/2	0	0	3
x_2	0	0	1	–1/8	3/4	0	0	3/2
s_3	0	0	0	3/8	–5/4	1	0	5/2
s_4	0	0	0	1/8	–3/4	0	1	1/2

Итоговое решение задачи СМ

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21
x_1	0	1	0	1/4	–1/2	0	0	3
x_2	0	0	1	–1/8	3/4	0	0	3/2
s_3	0	0	0	3/8	–5/4	1	0	5/2
s_4	0	0	0	1/8	–3/4	0	1	1/2

Переменные задачи	Оптимальные значения	Интерпретация
x_1	3	Ежедневно следует производить 3 т краски для наружных работ
x_2	3/2	Ежедневно следует производить 1.5 т краски для внутренних работ
z	21	Ежедневный доход составляет $21 000

Условия оптимальности и допустимости

Два правила выбора вводимых и исключающих переменных в симплекс-методе назовем **условием оптимальности** и **условием допустимости**. Сформулируем эти правила, а также рассмотрим последовательность действий, выполняемых при реализации симплекс-метода.

Условие оптимальности

Условие оптимальности. Вводимой переменной в задаче максимизации (минимизации) является *небазисная* переменная, имеющая наибольший отрицательный (положительный) коэффициент в z-строке. Если в z-строке есть несколько таких коэффициентов, то выбор вводимой переменной делается произвольно. Оптимальное решение достигнуто тогда, когда в z-строке все коэффициенты при небазисных переменных будут неотрицательными (неположительными).

Условие допустимости

Условие допустимости. Как в задаче максимизации, так и в задаче минимизации в качестве исключаемой выбирается *базисная* переменная, для которой отношение значения правой части ограничения к положительному коэффициенту ведущего столбца минимально. Если базисных переменных с таким свойством несколько, то выбор исключаемой переменной выполняется произвольно.

Итог: общая схема симплекс-метода

Шаг 0. Находится начальное допустимое базисное решение.

Шаг 1. На основе условия оптимальности определяется *вводимая* переменная. Если вводимых переменных нет, вычисления заканчиваются.

Шаг 2. На основе условия допустимости выбирается исключаемая переменная.

Шаг 3. Методом Гаусса–Жордана вычисляется новое базисное решение. Переход к шагу 1.