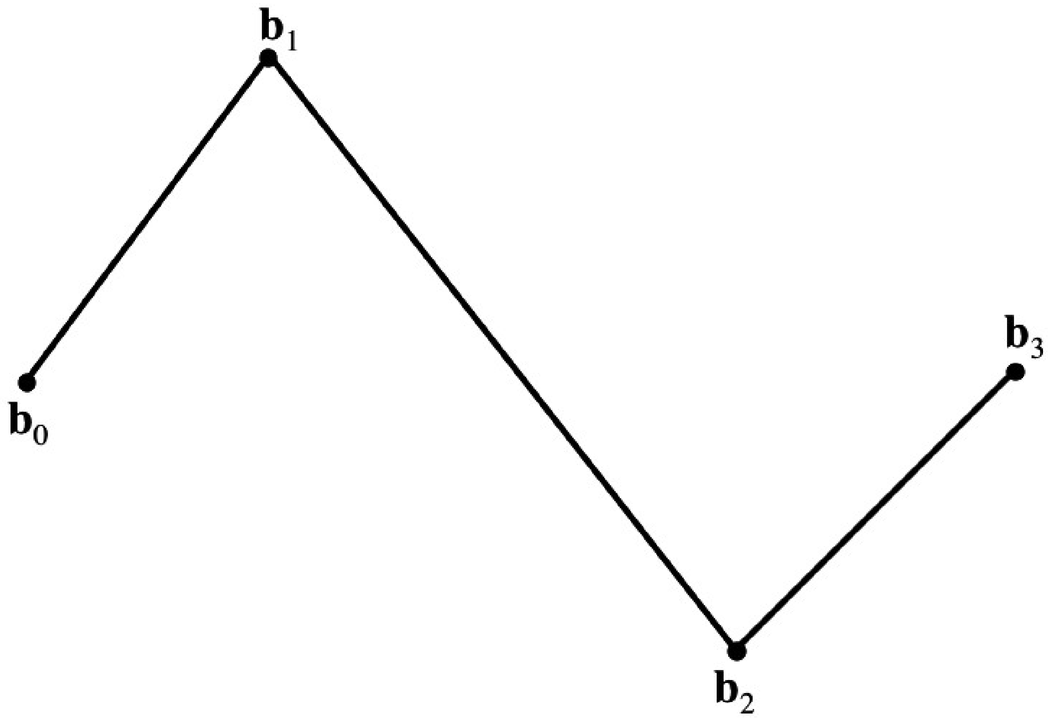
Übungsblatt 10

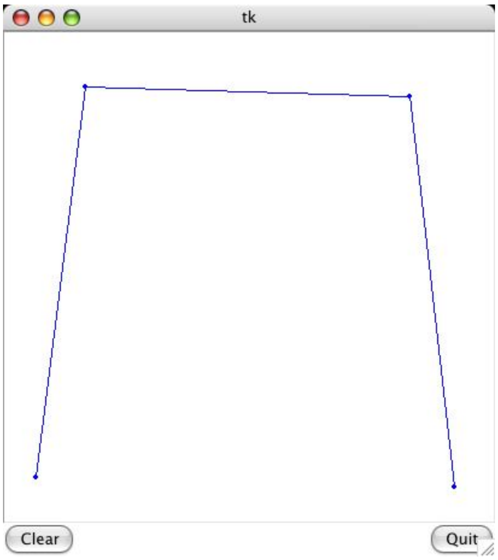
Aufgabe 1. Das unten abgebildete Polygon sei das Kontrollpolygon einer, über dem Intervall $[0, 1]$ definierten, Bézier-Kurve.

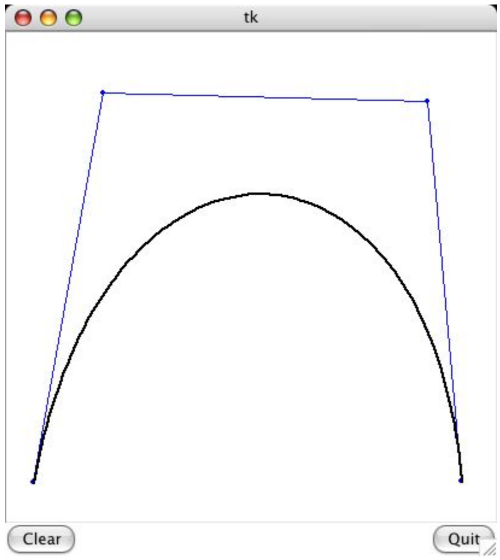


1. Welchen Polynomgrad hat die zugehörige Bézier-Kurve?
2. Kann die zugehörige Bézier-Kurve einen Wendepunkt haben?
3. Muss die zugehörige Bézier-Kurve einen Wendepunkt haben?
4. Zeichnen Sie die Konvexe-Hülle des Kontrollpolygons ein.
5. Zeichnen Sie die Kurven-Punkte und Tangenten zu den Parameterwerten 0, $\frac{1}{2}$ und 1 ein.
6. Zeichnen Sie eine Näherung der Bézier-Kurve ein, indem Sie die Kurve mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus an den Parameterwerten $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ unterteilen. Eine gute Näherung an die ursprüngliche Bézier-Kurve besteht dann aus den Kontrollpolygonen zu den Bézier-Kurven über den Intervallen $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ und $[\frac{3}{4}, 1]$.

Aufgabe 2. Unter `www.mi.hs-rm.de/~schwan/Vorlesungen/GenCG/` finden Sie das Programm **`bezierTemplate.py`**. Es erlaubt Ihnen, mit der Maus Punkte in einem Fenster auszuwählen. Sind mindestens zwei Punkte ausgewählt worden, wird ein Polygon durch die Punkte gezeichnet (siehe Abbildung unten links).

Erweitern Sie das Programm so, dass es zusätzlich die Bézier-Kurve einzeichnet, welche durch das (Kontroll-)Polygon definiert wird (siehe Abbildung unten rechts).





Implementieren Sie die Darstellung der Bézier-Kurve auf die beiden folgenden, unterschiedlichen Arten.

1. Gegen Sie davon aus, dass die Bézier-Kurve über dem Parameterintervall $[a, b]$ definiert ist und berechnen Sie mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus $N + 1$ Kurven-Punkte $\mathbf{x}(t_i)$ zu den Parameterwerten $t_i = a + \frac{i}{N}(b - a), i = 0, \ldots, N$. Zur Vereinfachung können Sie $a = 0$ und $b = 1$ setzen. Als Näherung für die Bézier-Kurve zeichnen Sie dann das Polygon durch die Punkte $\mathbf{x}(t_i)$, $i = 0, \ldots, N$.

2. Unterteilen Sie die Bézier-Kurve mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus K-mal in der Mitte des Parameterintervalls. Setzt man $a = 0$ und $b = 1$, so entstehen 2^K Bézier-Kurven über den Parameterintervallen $\left[\frac{i}{2^K}, \frac{i+1}{2^K}\right]$, $i = 0, \ldots, 2^K - 1$ welche alle zusammen die ursprüngliche Bézier-Kurve beschreiben. Zeichnen Sie die Kontroll-Polygone dieser Bézier-Kurven als Näherung für die ursprüngliche Bézier-Kurve.

   Hinweis: Dieses Verfahren *konvergiert sehr schnell* gegen die Bézier-Kurve. Es reichen daher im Allgemeinen 3 oder 4 Unterteilungsschritte, um eine sehr gute Näherung der Bézier-Kurve zu erreichen.