指数関数と対数関数

krollo966

目次

―この文書の読み方―

この文書は指数関数・対数関数の説明書です。まず初めに指数関数の定義域を正整数から実数へと拡張し、指数関数の性質を確認します。その後、対数を定義します。途中に問題があるので解いてください。

1. 指数関数の定義域の拡張

正の実数[1] a に対して、その正整数[2] 乗

$$f(n) = a^n$$

は定義域を正整数全体 $\mathbb{N}_+$ とした関数と見做せる[3]。この関数の定義域を整数や有理数に拡張したい（ n に分数や負の数を代入したい）[4]。

> **問題 1.1**: 有理数 r に対し、 a^r や a^{-r} をどのように定義すればいいだろうか？

正整数乗がもつ性質を満たすように拡張する。

[1]負の実数の累乗を考えるのは大変なので、高校の数学では底（ a^n と書いたときの a のこと）が正である場合だけを考える。

[2]高校の数学では自然数といえば正の整数（ $1, 2, 3, \ldots$ ）を指すが、文脈によっては自然数に 0 を含むことがあるので、この資料では誤解がないように 1 以上の整数を正整数と書くことにする。

[3]この資料では正整数の集合を $\mathbb{N}_+$ と書くことにする（一般的な書き方ではない）。$n \in \mathbb{N}_+$ は「n は正整数である」という意味。

[4]$f(x) = a^x$ の形をした関数を**指数関数**という。指数関数を微積分するために定義域を拡張する。

2. 指数法則と有理数乗

正実数の正整数乗が満たす性質は以下の**指数法則**である。

Theorem 2.1 (指数法則): 正実数 a, b と $m, n \in \mathbb{N}_+$ に対して以下が成り立つ：

$$a^{n+m} = a^n a^m$$
$$(a^n)^m = a^{nm}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

Example: $a = 2, b = 3, n = 2, m = 3$ のとき、

$$2^{2+3} = 2^5 = 2^3 2^2$$
$$\left(2^2\right)^3 = \left(2^2\right)\left(2^2\right)\left(2^2\right) = 2^6$$
$$(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3)(2 \cdot 3) = 2^2 3^3$$

となり、確かに指数法則が成り立つことがわかる[5]。

この指数法則を満たすように、 a^0 （0 乗）, $a^{\frac{m}{n}}$ （正の有理数乗）, a^{-r} （負の有理数乗）を定義していこう。

問題 2.1: 正実数 a , 正整数 m, n , 正有理数 r に対し、指数法則を満たすように $a^0, a^{\frac{m}{n}}, a^{-r}$ を定義せよ。

この問題は自分で考えた方がいいので、まずは以下の解説を見ずに自力で考えてみよう。

解答 2.1.1:
1. a^0 が指数法則を満たすとすると、 $a = a^1 = a^{1+0} = a^1 a^0 = aa^0$ だから、 $a\left(a^0 - 1\right) = 0$ 。 $a > 0$ のとき $a^0 = 1$ でなくてはならない。
2. 正整数 m, n に対し $a^{\frac{m}{n}}$ が指数法則を満たすとき、 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m$ 。 よって $a^{\frac{m}{n}}$ は n 乗すると a^m になるような数[6] 、つまり $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$。
3. 正の有理数 r に対し a^{-r}が指数法則を満たすとき、$1 = a^0 = a^{-r+r} = a^{-r} a^r$ 。 つまり $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ （ a^r の逆数)。

[5]正確に証明するには数列の分野で勉強する数学的帰納法が必要なので、ここでは例を挙げるに留める。

[6]2 乗して a (> 0) になる数 $\sqrt{a}$ と書いて a の**平方根**（2 乗根）と呼んでいた。同様に、 n $(\in \mathbb{N}_+)$ 乗して a になる数を $\sqrt[n]{a}$ と書いて a の $\boldsymbol{n}$ **乗根**と呼ぶ。 n 乗根をまとめて**累乗根**と呼ぶ。

Definition 2.1: 正実数 a , 正整数 m, n , 正有理数 r に対し、その累乗を以下のように定義する：

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} \\
a^{-r} &= \frac{1}{a^r}
\end{aligned}
$$

Theorem 2.2 (指数法則): 上記のように定めた正実数 a の累乗は指数法則をみたす[7]。

指数法則や累乗根を使った問題を解いてみよう。

問題 2.2: 次の式を簡単にせよ。ただし、$a > 0, b > 0$ とする。

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \div 3^5 \times 27^{-1} & (2) & a^{\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{1}{6}} \times \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2 \\
(3) & \left(\frac{a^2}{b}\right)^{-3} \times \left(\frac{b^3}{a}\right)^2 \div \left(a^{-4}\right)^2 & (4) & 24^3 \times 18^2 \div 27^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \\
(5) & \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18} & (6) & \sqrt{a} \div \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^2} \\
(7) & \sqrt[3]{-12} \times \sqrt[6]{96} \div \sqrt{54} & (8) & \sqrt[3]{\sqrt{a}} \div \sqrt{\sqrt[4]{a}}
\end{array}
$$

解答 2.2.1:

$$
\begin{array}{llllllll}
(1) & \frac{1}{81} & (2) & a & (3) & b^9 & (4) & 2 \\
(5) & 6 & (6) & \sqrt[3]{a} & (7) & -\frac{2}{3} & (8) & \sqrt[24]{a}
\end{array}
$$

3. 無理数乗

Remark: この節は難しいので、興味がなければ読み飛ばして構わないです。

[7] というより、指数法則を満たすように有理数乗を定義した。

$f(r) = a^r$ の定義域を正整数全体 $\mathbb{N}_+$ から有理数全体 $\mathbb{Q}$ まで拡張できた[8]。無理数乗はどのように定義されるだろうか？[9]

有理数乗の場合は正整数乗の場合に帰着できたが、無理数乗の場合は単に指数法則を使ってもうまくいかない。

> **Example**: $3^{\sqrt{2}}$ が指数法則を満たすとする。これと有理数乗を組み合わせて、$\left(3^{\sqrt{2}}\right)^r = 3^{r\sqrt{2}}$ や $3^{\sqrt{2}+r} = 3^{\sqrt{2}}3^r$ などと計算してみても、指数の無理数が解消されない。指数法則だけを考えても既知の有理数乗の場合に帰着できなさそう。

だが、 $\sqrt{2} = 1.41421356...$ と十進小数表記すると、 $3^{\sqrt{2}} = 3^{1.41421356...} \fallingdotseq 3^{1.41421356}$ と、任意のところで指数の計算を打ち切れば有理数乗で近似できそうなことがわかる。さらに、指数の十進展開を途中で打ち切らなければ結局、有理数列 2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, $2^{1.41421}$, ... の極限値として無理数乗が得られることが予想できるだろう。つまり、 $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ...$ と $\sqrt{2}$ に収束する数列を r_1, r_2, ..., r_n, ... として

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{r_n}$$

と定めればよいと期待できる。一般に、次の補題が知られている[10]。

> **Lemma 3.1** (無理数は有理数列の極限値): 任意の無理数 s に対し、 $r_n \underset{n\to\infty}{\to} s$ となるような有理数列 $r_1, r_2, ...r_n, ...$ が存在する。

> **Example**: $\sqrt{3}$ に収束する有理数列が欲しければ 1, 1.7, 1.73, 1.732, ... と十進展開すればよい。 π に収束する有理数列が欲しければこれも 3, 3.1, 3.14, 3.1415, 3.14159, ... と十進展開すればよい。

> **Definition 3.1** (無理数乗): s を無理数とし、 s に収束する有理数列を r_1, r_2, ..., r_n, ... とするとき、正実数 a の s 乗は以下のように定義される：
>
> $$a^s = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

このように定義された無理数乗もまた指数法則を満たすことが知られている：

[8] すべての有理数の集合を $\mathbb{Q}$ と書く。

[9] この項では無理数乗を定義するためにいろいろ議論しているが、難しければ読み飛ばしても構わない。

[10] 数学書において「次の定理が知られている」とは「有用な定理ですが証明が大変なのでとりあえず真と認めて読み進めてください」という意味。

Theorem 3.2 (指数法則)：正実数 a, b と任意の実数 x, y に対し指数法則が成り立つ[11]：

$$
\begin{aligned}
a^{x+y} &= a^x a^y \\
(a^x)^y &= a^{xy} \\
(ab)^x &= a^x b^x
\end{aligned}
$$

これで、有理数乗・無理数乗いずれに対して累乗を定義できたので、正実数 a に対する指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域が実数全体 $\mathbb{R}$ まで拡張された[12]。

Definition 3.2 (指数関数)：$f(x) = a^x$ を、**底**を a とする**指数関数**という。

高校の数学では $a > 0$ に対する指数関数だけを考える[13]。

4. 指数関数のグラフ

例として $y = 2^x, y = 3^x, y = 2^{-x}, y = 3^{-x}$ のグラフをプロットすると 図 1 のようになる：

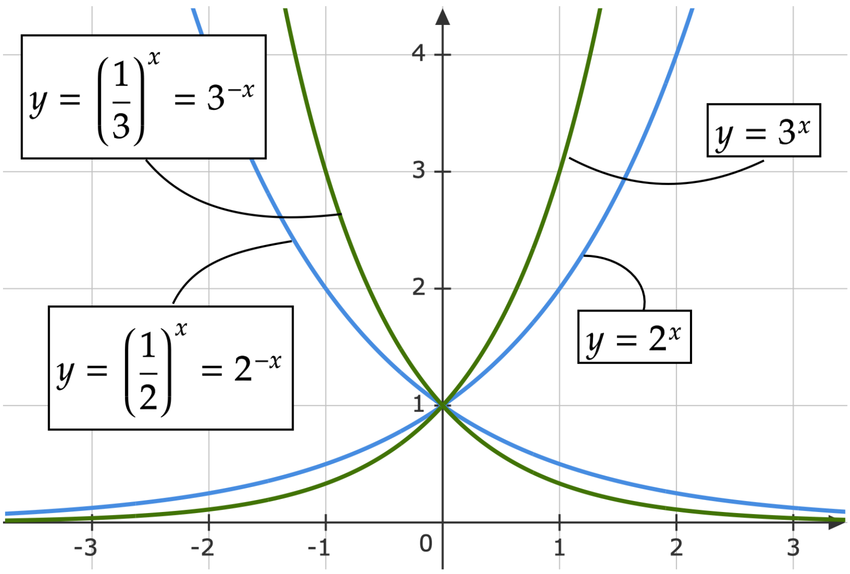

図 1: 指数関数 $y = 2^x$ のグラフ

[11] 厳密な証明を与えるには大学の学部で習う数学が必要なので省略する。

[12] すべての実数からなる集合を $\mathbb{R}$ と書く。

[13] 負の実数の指数関数は一般に実数でない値をとるので、高校ではやらない。例えば $a = -1$ と単純な負数の有理数乗でさえ $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$（虚数）、$(-1)^2 = 1$（正整数）、$(-1)^{-1} = -1$（負整数）とさまざまな値を取り、取り扱いが大変。

5. 指数関数の大小関係

Theorem 5.1: $a > 0$ を指数関数の底とするとき、指数関数の大小関係について以下が成り立つ：

- 底が $a > 1$ のとき、$x < y \iff a^x < a^y$（底が 1 より大きいときは単調増加）
- 底が $a < 1$ のとき、$x < y \iff a^x > a^y$（底が 1 より小さいときは単調減少）

底が揃っていると指数関数の大小を比較しやすいが、底の大きさに注意しよう。

問題 5.1: 次の各組の数の大小を比べよ。

$$\begin{array}{llll} (1) & \sqrt{2}\ ,\quad 0.5^{-\frac{3}{4}}\ ,\quad \sqrt[5]{8}\ ,\quad 2 & (2) & 0.2^{-0.1}\ ,\quad 0.2^{3}\ ,\quad 0.2^{\frac{3}{2}} \\ (3) & 3^{55}\ ,\quad 4^{44}\ ,\quad 5^{33} & (4) & 2^{\frac{1}{2}}\ ,\quad 3^{\frac{1}{3}}\ ,\quad 6^{\frac{1}{6}} \end{array}$$

解答 5.1.1:

$$\begin{array}{llll} (1) & \sqrt{2} < \sqrt[5]{8} < 0.5^{-\frac{3}{4}} < 2 & (2) & 0.2^{3} < 0.2^{\frac{3}{2}} < 0.2^{-0.1} \\ (3) & 5^{33} < 3^{55} < 4^{44} & (4) & 6^{\frac{1}{6}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} \end{array}$$

6. 対数の定義

a を 1 でない正実数とする[14]。 $x = a^{\square}$ とすると、 $\square$ に入る数は x と a により決まるので、これを $\square = \log_a x$ と書き、**対数**(logarithm)と呼ぶ。

Definition 6.1 (対数): 1 でない正実数 a と 正実数 x に対し、対数 $\log_a x$ を以下のように定義する：

$$\log_a x = y \underset{\text{def}}{\iff} x = a^y$$

a を対数の**底**といい、 x を**真数**という。

対数の定義の仕方から、以下の二つの条件は常に成り立っている：

[14] $a = 1$ のときは任意の実数 y に対し $1^y = 1$ となる。つまり底が 1 のとき対数は $\log_1 1$ というもののしか考えられないので、以後は $a = 1$ を除外する。

Remark (底の条件と真数条件): 対数 $\log_a x$ において

- （底の条件） 底 a は 1 でない正実数であり（ $a > 0$ かつ $a \neq 1$ ）、
- （真数条件） 真数 x は正実数である（ $x > 0$ ）。

この条件を見落とさないようにしよう[15]。

7. 指数法則の対数版

指数法則を対数を使って書き換える：

Theorem 7.1 (指数法則の対数版): 正実数 x, y, a（ただし $a \neq 1$ ）とする。対数 $\log_a x$ は以下を満たす：

$$(1)\quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad (2)\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$(3)\quad \log_a x^y = y \log_a x \qquad (4)\quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Proof of (1): $a^{\spadesuit} = xy$ となる $\spadesuit$ が $\log_a xy$ だから、 $a^{\heartsuit} = x, a^{\diamondsuit} = y$ とおくと図 2 のようになる。

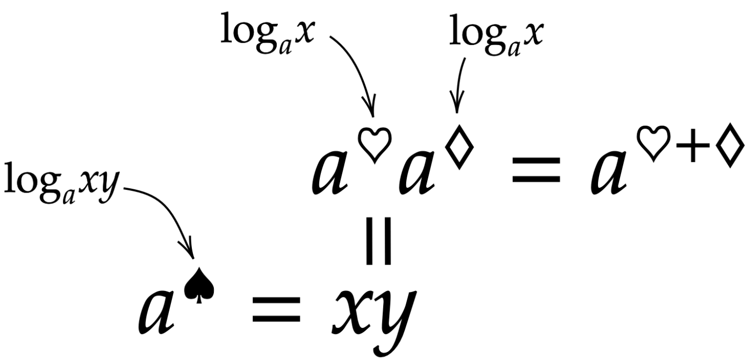

図 2: 指数法則の対数版[16]。

□

問題 7.1 (指数法則の対数版): Theorem 7.1 の(2)–(4)を 図 2 と同様にして確認せよ。

[15] $x^2 = x$ の両辺を単に x で割ってはいけない（ $x = 0$ の場合を分けて考える必要がある）のと同様に、うっかりしやすいので注意しよう。

[16] 指数法則を対数に置き換えていることが納得できるまで、よく眺めたり自分で書いてみたりしてほしい。

問題 7.2: 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ (2) $\log_{10} \dfrac{3}{2} + \log_{10} \dfrac{10}{3} - \log_{10} \dfrac{1}{2}$

(3) $3\log_3 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_3 6 - \log_3 4$ (4) $2^{\log_2 3}$

解答 7.2.1:

$$(1)\quad -5 \quad (2)\quad 1 \quad (3)\quad \frac{1}{2} \quad (4)\quad 3$$

問題 7.3: 次の値を求めよ。

(1) $\log_2 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 7 \cdot \log_{49} 16$ (2) $\log_4 9 - \log_2 12$

(3) $(\log_3 25 + \log_9 5)(\log_5 9 + \log_{25} 3)$

解答 7.3.1:

$$(1)\quad 2 \quad (2)\quad -2 \quad (3)\quad \frac{25}{4}$$

問題 7.4: $\log_{10} 2 = a, \log_{10} 3 = b$ とするとき、次の式の値を a, b で表せ。

(1) $\log_{10} 5$ (2) $\log_{10} 45$

(3) $\log_{10} \sqrt{0.6}$ (4) $\log_6 0.75$

解答 7.4.1:

$$(1)\quad 1-a \quad (2)\quad 1-a+2b \quad (3)\quad \frac{1}{2}(a+b-1) \quad (4)\quad \frac{b-2a}{a+b}$$

8. 対数関数のグラフ

9. 対数関数の大小関係

対数の大小関係について以下が成り立つ：

Theorem 9.1 (対数の大小関係):

- $a > 1$ を底とするとき、 $x < y \Longleftrightarrow \log_a x < \log_a y$ （底が 1 より大きいときは単調増加）
- $0 < a < 1$ を底とするとき、 $x < y \Longleftrightarrow \log_a x > \log_a y$ （底が 1 より小さいときは単調減少）

10. ネイピア数

$f(x) = a^x$ を微分すると[17]、

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$ となる底 a を e と書くと、

$$(e^x)' = e^x$$

となる。この定数 e を**ネイピア数**と呼ぶ。

また、 $\Delta x \fallingdotseq 0$ のとき、 $\dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \fallingdotseq 1$ を変形すると

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \fallingdotseq 1$$
$$e^{\Delta x} \fallingdotseq 1 + \Delta x$$
$$e \fallingdotseq (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

すなわち $e = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$ となることがわかる[18]。

Definition 10.1 (ネイピア数): 以下の極限値 e を**ネイピア数**と呼ぶ：

$$e = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

[17] 本当に微分可能な関数なのか、すなわち極限値 $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ が存在するのかは検討する必要がありますが、説明が長くなるので省略します。

[18] これも厳密な議論は省略します。式変形を見て納得できればよいです。

Definition 10.2 (自然対数): ネイピア数 e を底とする対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼ぶ。

Remark: 自然対数は 底を省略して $\log x$ と書いたり、$\ln x$ と書くことが多い。

11. 指数関数と対数関数の微分法

11.1. 指数関数の微分

ネイピア数の定義より以下が成り立つ：

Theorem 11.1.1 (指数関数の微分): ネイピア数 e を底とする指数関数 $f(x) = e^x$ の導関数は再び e^x になる：

$$(e^x)' = e^x$$

11.2. 対数関数の微分

Theorem 11.2.1 (自然対数の微分): 自然対数 $f(x) = \log x$ の導関数について以下が成り立つ：

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

特に $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$。

Proof: まず $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を示し、次に $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ を示す。

$$
\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \\
&= \frac{1}{x} \log_e e \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

これを用いて次に $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ を示す。

(1)　$x > 0$ のとき $(\log|x|)' = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2)　$x < 0$ のとき、合成関数の微分法を使うと

$$
(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}
$$

□