常微分方程式

krollo966

目次

—この文書の読み方—

物理をやっていると常微分方程式がよく出てくるので、その解説をします。

1. 微分方程式とは

Definition 1.1 (微分方程式): 変数 t とその関数 $x(t)$ と、その有限階の同関数についての関数 $F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right)$ が与えられたとき、

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

の形の方程式を、$x(t)$ に関する**微分方程式**という。導関数の最高階数 n をこの微分方程式の**階数**という。また、この式を満たす関数 $x(t)$ をその**解**という。t を独立変数、$x = x(t)$ を従属変数と呼ぶ。独立変数が一つだけの場合を**常微分方程式**、複数の場合を**偏微分方程式**という。定数を含み、その微分方程式の解の全てを表現しているものを**一般解**という。

与えられた微分方程式から出発して、四則演算、微積分、関数の合成と逆関数を取る操作、初等関数への代入、およびそれらの有限回の組み合わせによって一般解を求めることとを**初等解法**または**求積法**という。

1 階微分方程式 $F(t, x, x') = 0$ が x' について解けているとき、すなわち

$$x' = f(t, x) \tag{2}$$

の形をしているとき、この方程式を**正規型**という。

2. 微分方程式の解法

2.1. 変数分離

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)g(x) \tag{3}$$

のように、右辺が t のみの関数と、x のみの関数の積の形に書けている方程式を**変数分離型**という。

これは $g(x) \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{g(x)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t) \tag{4}$$

だから、積分して

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{g(x(\tau))}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

左辺は $x(t_0) = x_0, x(t) = x$ という変数変換をすると