ケプラーの法則

krollo966

目次

—この文書の読み方—

この文書では、ケプラーの法則について説明します。

1. 等速円運動

物体がある点 O の周りを角速度 ω で半径 r の等速円運動しているとき、O を基準とした位置ベクトルは $\mathbb{r}(t) = r\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$ で、その速度は $\dot{\mathbb{r}}(t) = r\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}$ で、加速度は $\ddot{\mathbb{r}}(t) = -r\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} = -\omega^2\mathbb{r}(t)$ である。したがって運動方程式は

$$m\ddot{\mathbb{r}}(t) = -m\omega^2\mathbb{r}(t) \tag{1}$$

となる。これは、大きさ $mr\omega^2$ の向心力が働くことを表している。

また、速さは $v = |\dot{\mathbb{r}}| = r\omega$ となるから、$\omega = \frac{v}{r}$ となる。これを運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbb{r}}(t) &= -m\left(\frac{v}{r}\right)^2 r\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} \\ &= -m\frac{v^2}{r}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

となるので、向心力の大きさは $m\frac{v^2}{r}$ と表すこともできる。

運動を向心方向と接線方向に分解すると、運動方程式は

$$\begin{aligned} &\text{向心方向：}\quad \mathbb{F}_{\text{向心}} = -m\frac{v^2}{r} \\ &\text{接線方向：}\quad \mathbb{F}_{\text{接線}} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

問題 1.1 (例題 9. 等速円運動): 次の文の $\boxed{}$ に当てはまる式または記号を、また、{　　} の中の正しいものの番号を記せ。

水平面と角 α rad の傾きをなす直線軌道上に、車輪止めによって停止している台車がある。この台車に乗っている人が、図のように、長さ l m の軽い糸の上端を固定し、下端に小さな質量 M kg をもったおもりをつけて、水平面内で等速円運動させた。重力の加速度を $g\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ とし、空気抵抗は無視できるものとする。

今、おもりが静止した時の糸の方向と円運動をさせた時の糸とのなす角（半頂角）を θ rad とすると、おもりに働く糸の張力と重力との合力が(イ) { (1) 向心力 (2) 慣性力 (3) 遠心力 } となって、おもりは等速円運動を続ける。この合力の大きさは $\boxed{\text{(ロ)}}$ N であり、張力の大きさは $\boxed{\text{(ハ)}}$ N である。したがって、角速度の大きさは $\boxed{\text{(ニ)}}$ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ となり、おもりの円運動の周期は $\boxed{\text{(ホ)}}$ s となる。また、このおもりのもつエネルギーは、おもりが静止している状態から $\boxed{\text{(ヘ)}}$ J だけ増加している。次に、車輪止めを外したところ、台車は動き始めた。この時、台車に乗っている人が、おもりの運動を止めて静かに吊るすと、おもりには台車の進行方向と (ト) { (1) 同じ向き (2) 垂直 (3) 反対 } 方向の大きさ $\boxed{\text{(チ)}}$ N の慣性力が働き、糸は鉛直線（重力方向）と $\boxed{\text{(リ)}}$ rad の角度をなして傾いた。そこで、糸に垂直な平面内でおもりに半頂角 θ rad の等速円運動をさせたところ、おもりの角速度は $\boxed{\text{(ヌ)}}$ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ となり、円運動の周期は $\boxed{\text{(ル)}}$ s となった。ただし、台車が動くときの空気抵抗と車輪の慣性モーメントは無視できるものとする。

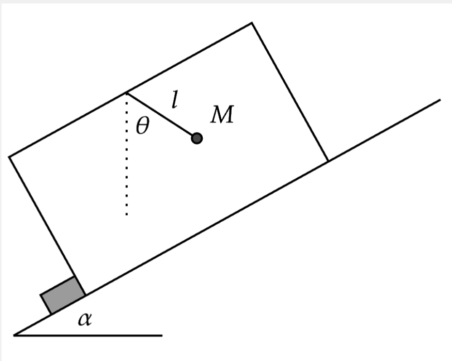

図 1: 問題の設定図。

解答:

(イ) 等速円運動をするときは向心力が働くので **(1)**。

(ロ) 重力と張力の合力が向心力になるので、図 2 のような図になる。三角比を考えれば $\boldsymbol{Mg\tan\theta}$。

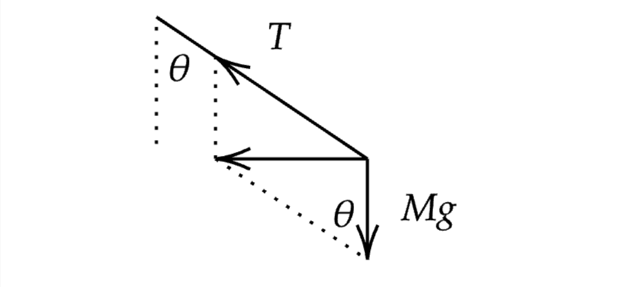

図 2: 向心力の図。

(ハ) 図 2 において三角比を考えると、

$$\boldsymbol{T = \frac{Mg}{\cos\theta}} \tag{4}$$

(ニ) 円運動の半径は $l\sin\theta$ だから、向心方向の運動方程式は

$$M(l\sin\theta)\omega^2 = \frac{Mg}{\cos\theta}$$
$$\therefore \omega = \sqrt{\boldsymbol{\frac{g}{l\cos\theta}}} \tag{5}$$

(ホ) 周期はおもりが円を一周するのにかかる時間、すなわち中心角が 2π になるときの時間だから、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\boldsymbol{\frac{l\cos\theta}{g}}} \tag{6}$$

(ヘ) 糸が静止している状態を位置エネルギーの基準にとると、等速円運動している時の位置エネルギーは 図 3 より $Mgl(1-\cos\theta)$。また、速さは $v = (l\sin\theta)\omega$ だから、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{gl\sin^2\theta}{\cos\theta}$。したがって、等速円運動している時の力学的エネルギーは

$$E = Mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}M\frac{gl\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= Mgl\left(1-\cos\theta+\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right) \tag{7}$$

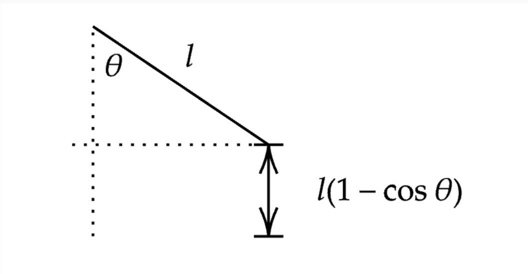

図 3: 位置エネルギーの図。

(ト) 車輪止めを外すと、台車は重力を受けて斜面方向に加速度 $g\sin\alpha$ で滑り始める。台車とともに動く座標系においてはおもりに慣性力が進行方向と逆向きに働く。∴ **(3)**

(チ) 慣性力の大きさは $\boldsymbol{Mg\sin\alpha}$。

(リ) 求める角度を β とする。おもりは静止しているので、慣性力も含めて斜面方向の力の釣り合いのを考えると 図 4 より

$$Mg\sin\alpha = Mg\sin\beta$$
$$\therefore \beta = \boldsymbol{\alpha} \tag{8}$$

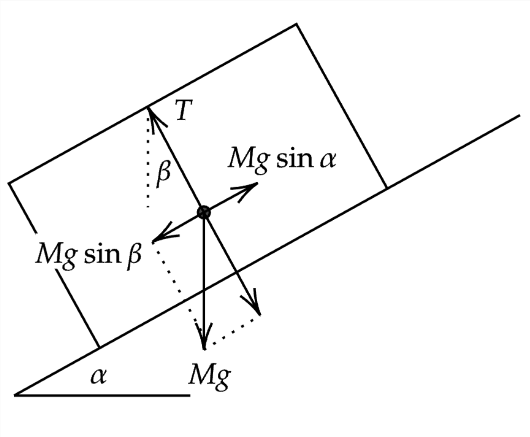

図 4: おもりに働く力。

(ヌ) おもりに $g\cos\alpha$ の重力加速度がかかっているのと同じなので、問題の前半で求めた角速度において $g \mapsto g\cos\alpha$ と置き換えれば良い。したがって、角速度は

$$\omega = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g\cos\alpha}}{\boldsymbol{l\cos\theta}}} \tag{9}$$

(ル) 周期は

$$T = \boldsymbol{2\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{l\cos\theta}}{\boldsymbol{g\cos\alpha}}} \tag{10}$$

□

問題 1.2 (例題 10. 等速円運動): 図 5 はレールに乗っている列車を正面から見た図である。レールの幅は $2w$ であり、列車の質量は M である。列車の重心 G は、レールの中心線上で、レールと車輪の接触点から高さ h の位置にある。空気の抵抗や摩擦力などは無視できるものとして、以下の問いに答えなさい。

(1) この列車が、平らな地面に水平に敷かれた円形の曲線路を、一定の速さで通過している。

 (a) 重力加速度を g、列車に作用する慣性力を F として、曲線路の内側のレールから列車が受ける垂直抗力 R_{y1} と、外側のレールから列車が受ける垂直抗力 R_{y2} を、それぞれ M, w, g, F, h を使って表しなさい。

 (b) 曲線路の半径を r、列車の速さを v として、慣性力 F を M, r, v を使って表しなさい。ただし、r はレール幅 $2w$ に比べて十分に大きいものとする。

 (c) 列車の速さが大きくなると、R_{y1} が減少し、やがて列車は転覆する。この場合の限界の速さを v_c を w, r, g, h を使って表しなさい。

(2) 曲線路では、列車の安定を増すために、通常、曲線路の外側のレールを少し高くしている。図 6 に示すように、線路が角度 θ の傾きをつけて敷かれているとして、列車が転覆する限界の速さ $v_{c\theta}$ を w, r, g, h, θ を使って表しなさい。

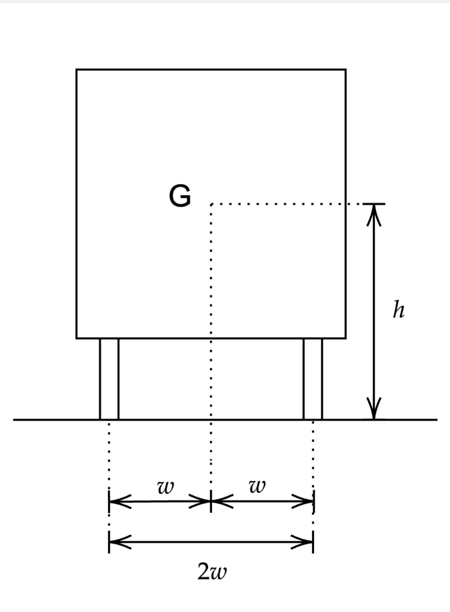

図 5: 列車の図。

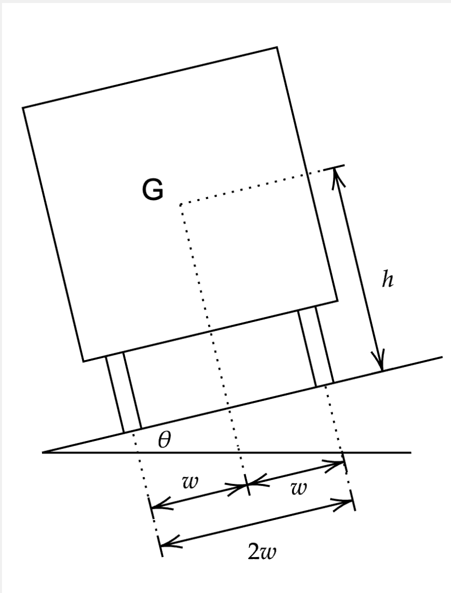

図 6: 軌道を傾けた図。

解答:

(1) (a) 車輪とレールの接点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ とし、列車に働く力を書き込むと 図 7 のようになる。鉛直方向の力の釣り合いより

$$R_{y1} + R_{y2} - Mg = 0 \tag{11}$$

P_1 の周りの力のモーメントの釣り合いより

$$R_{y2} \cdot 2w - Mg \cdot w - F \cdot h = 0 \tag{12}$$

となるから、

$$R_{y1} = \frac{1}{2}Mg - \frac{h}{2w}F$$
$$R_{y2} = \frac{1}{2}Mg + \frac{h}{2w}F \tag{13}$$

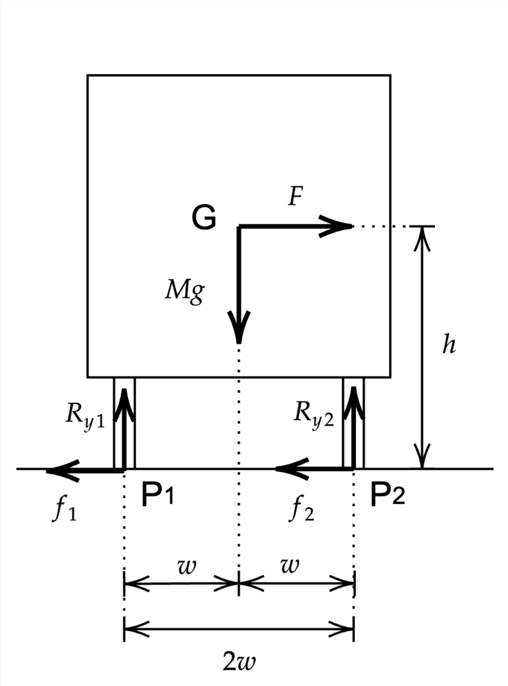

図 7: 列車に働く力。

(b) 列車とともに動く座標系において、列車に働く向心力と慣性力が釣り合って静止しているように見える。速さが v で半径が r の等速円運動での向心力は Mv^2/r だから、

$$F = M\frac{v^2}{r} \tag{14}$$

(c) 転覆するのは、内側のレールからの垂直抗力 R_{y1} が 0 になるときである。したがって、$R_{y1} = 0$ のときの速さが v_c である。$R_{y1} = 0$ のとき 式 13 と 式 14 より

$$R_{y1} = \frac{1}{2}Mg - \frac{h}{2w}\frac{Mv_c^2}{r} = 0$$

$$\therefore v_c = \sqrt{\frac{rwg}{h}} \tag{15}$$

(2) 軌道が傾いているときに列車に働く力や腕の長さは 図 8 のようになる。斜面に垂直な方向の力の釣り合いは

$$R'_{y1} + R'_{y2} - Mg\cos\theta - M\frac{v_{c\theta}^2}{r} = 0 \tag{16}$$

P_2 の周りの力のモーメントの釣り合いより

$$R'_{y1}\cdot 2w - Mg\cos\theta\cdot(w + h\tan\theta) + M\frac{v_{c\theta}^2}{r}\cos\theta\cdot(h - w\tan\theta) = 0 \tag{17}$$

転覆する直前では $R'_{y1} = 0$ だから、

$$v_{c\theta} = \sqrt{\frac{rg(w + h\tan\theta)}{h - w\tan\theta}} \tag{18}$$

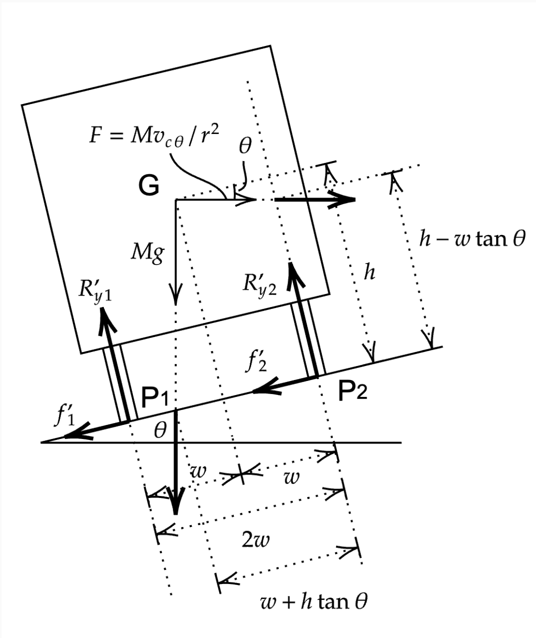

図 8: 軌道を傾けた図。

□

2. 楕円

2.1. 楕円の定義

Definition 2.1.1 (楕円): F, F' を平面 $\mathbb{E}^2$ 上の二点とし、$a > 0$ を定数とするとき、(F, F', a) より定まる部分集合

$$O_{F,F'}(a) = \left\{P \in \mathbb{E}^2 \mid \overline{FP} + \overline{F'P} = 2a\right\} \tag{19}$$

すなわち、二点 F, F' からの距離の和が常に一定で $2a$ であるような点 P の集合を、**楕円**と呼ぶ。F, F' を楕円の**焦点**、a を**長半径**と呼ぶ。

直線 FF' と楕円の交点を A, B とするとき、AB を**長軸**という。

線分 FF' の中点を通り長軸に垂直な直線が楕円と交わる点を C, D とするとき、CD を楕円の**短軸**といい、$\overline{CD}/2$ を**短半径**という。

長軸と短軸の交点を楕円の**中心**という。

$$\varepsilon = \frac{FF'}{2a} \quad (< 1) \tag{20}$$

を、楕円の**離心率**（または**扁平率**）という。

2.2. 楕円の方程式の標準形

楕円を表す方程式、つまり楕円上の点の座標の満たす式を求めよう。

楕円の焦点 F, F' の座標を $(-k, 0), (k, 0)$ とし、楕円上の点 P の座標を $P(x, y)$ とする。$FP = r, F'P = r'$ とすると、

$$r^2 = (x + k)^2 + y^2, \tag{21}$$

$$r'^2 = (x - k)^2 + y^2, \tag{22}$$

$$r + r' = 2a \tag{23}$$

式 21 – 式 22 と 式 23 より

$$(r + r')(r - r') = 2a(r - r') = 4kx$$
$$\therefore r - r' = \frac{kx}{a} \tag{24}$$

式 23 と 式 24 より

$$r = a + \frac{k}{a}x, \tag{25}$$

$$r' = a - \frac{k}{a}x \tag{26}$$

これを 式 21 に代入すると

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{k}{a}x\right)^2 &= (x+k)^2+y^2 \\ \left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)x^2+y^2 &= a^2-k^2 \qquad (27)\end{aligned}$$

ここで $b=\sqrt{a^2-k^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2 &= b^2 \\ \therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1 \qquad (28)\end{aligned}$$

これを楕円 $O_{F,F'}(a)$ の方程式の**標準形**という。a は長半径（長径の半分)、b は短半径（短径の半分）である。

このとき、離心率 $2k/2a=\frac{k}{a}$ は、

$$\varepsilon=\frac{k}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \qquad (29)$$

2.3. 楕円の極方程式

$r=FP, \theta=\angle F'FP$ とおくと、

$$x=-k+r\cos\theta \qquad (30)$$

これを 式 25 に代入し、r について解くと

$$\begin{aligned}r &= a+\frac{k}{a}(-k+r\cos\theta), \\ r &= \frac{a^2-k^2}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{a}\cos\theta} \qquad (31)\end{aligned}$$

離心率の定義から $k=a\varepsilon$。これを代入して

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon\cos\theta}=\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon\cos\theta} \qquad (32)$$

これを楕円の**極方程式**または**極座標表示**という。

問題 2.3.1 (例題 3. 楕円の定義): 二点 $F(4,0)$, $F'(-4,0)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡を求めよ。

解答: 楕円

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \tag{33}$$

□

問題 2.3.2 (例題 4. 楕円の焦点・長軸・短軸): 次の楕円の頂点と焦点の座標、長軸と短軸の長さを求め、その概形をかけ。

$$(1)\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1 \quad (2)\quad 2x^2+y^2=8$$

解答:

(1) 頂点は $(3,0),(-3,0),\left(0,\sqrt{3}\right),\left(0,-\sqrt{3}\right)$。焦点は $\left(\sqrt{6},0\right),\left(-\sqrt{6},0\right)$。長軸の長さは 6, 短軸の長さは $2\sqrt{3}$。概形は省略する。

(2) 頂点は $(\pm 2,0),\left(0,\pm 2\sqrt{2}\right)$。焦点は $(0,\pm 2)$。長軸の長さは $4\sqrt{2}$、短軸の長さは 4。概形は省略。

□

問題 2.3.3 (例題 6. 楕円と円): 円 C: $x^2+y^2=9$ 上の点 P の座標を次のように拡大または縮小した点を Q とする。点 P が円 C 上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

$$(1)\quad y \text{ 座標を } \frac{2}{3} \text{ 倍に縮小} \quad (2)\quad x \text{ 座標を 2 倍に拡大}$$

解答:

(1) 楕円

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \tag{34}$$

(2) 楕円

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1 \tag{35}$$

□

3. ケプラーの法則

3.1. 万有引力からのケプラーの法則の導出

この節では、万有引力 $\Longrightarrow$ ケプラーの法則 という順で説明をする。つまり、万有引力の大きさ F が $F = GMm/r^2$ となることを認めて二体問題の運動方程式を解くと、ケプラーの法則が導出できることを示す。また、次の節ではその逆、つまり
ケプラーの法則 $\Longrightarrow$ 万有引力 という順で説明をする。

3.1.1. 二体問題の運動方程式

内力だけが働く二つの質点 m_1, m_2 を考える（e.g. 互いに重力を及ぼしあう二つの天体)。内力には強い意味での作用反作用の法則が成り立つとする。二つの質点の慣性系における位置ベクトルを $\mathbb{r}_1 = \mathbb{r}_1(t), \mathbb{r}_2(t)$ とすると、これらの運動方程式は

$$m_1 \ddot{\mathbb{r}}_1 = \mathbb{F} \tag{36}$$

$$m_2 \ddot{\mathbb{r}}_2 = -\mathbb{F} \tag{37}$$

重心の位置ベクトルを $\mathbb{r}_G$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathbb{r}_G &= \frac{m_1 \mathbb{r}_1 + m_2 \mathbb{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \therefore \ddot{\mathbb{r}}_G &= \frac{m_1 \ddot{\mathbb{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbb{r}}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{38}$$

式 36 と 式 37 を一本にまとめる。つまり、式 36 $\times\, m_2 -$ 式 37 $\times\, m_1$ より、

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (\ddot{\mathbb{r}}_1 - \ddot{\mathbb{r}}_2) &= (m_1 + m_2)\mathbb{F} \\ \therefore \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\ddot{\mathbb{r}}_1 - \ddot{\mathbb{r}}_2) &= \mathbb{F} \end{aligned} \tag{39}$$

ここで、$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \mathbb{r}_{12} := \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$ とおくと、式 39 は

$$\mu \ddot{\mathbb{r}}_{12} = \mathbb{F} \tag{40}$$

これは、質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ の質点が $\mathbb{r}_{12}$ に存在するときの運動方程式に一致している。つまり、二体問題を一体問題に帰着できた。

3.1.2. 角運動量保存則とその帰結

Theorem 3.1.2.1: $\mathbb{r}_0$ の周りの角運動量 $\mathbb{L}$ が保存するとき、$(\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \cdot \mathbb{L} = 0$ で、$\mathbb{r}$ の運動はある平面に束縛される。

Proof: ベクトル解析の公式から、$(\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \cdot \mathbb{L} = (\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \cdot ((\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \times \mathbb{p}) = \mathbb{p} \cdot ((\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \times (\mathbb{r} - \mathbb{r}_0)) = \mathbb{p} \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$ □

したがって、原点の周りの角運動量が保存するとき、質点の位置ベクトルを

$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

としてよい。したがって、合成関数の微分法より

$$\dot{\mathbb{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

3.1.3. 万有引力とニュートン・ポテンシャル、エネルギー保存則

二つの質点 $m_1 m_2$ の間に働く万有引力 $\mathbb{F}$ の大きさ $|\mathbb{F}|$ は、万有引力定数 G を用いて

$$|\mathbb{F}| = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbb{r}|^2} \tag{43}$$

と表される（ニュートンの万有引力の法則）。$\mathbb{r}$ 方向の単位ベクトルは $\mathbb{r}/|\mathbb{r}|$ だから、万有引力は

$$\mathbb{F} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbb{r}|^2}\frac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|} \tag{44}$$

これを 式 40 に代入すると、

$$\begin{aligned} \mu\ddot{\mathbb{r}}_{12} &= -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbb{r}_{12}|^2}\frac{\mathbb{r}_{12}}{|\mathbb{r}_{12}|} \\ \therefore \mu\ddot{\mathbb{r}}_{12} &= -G\frac{m_1 + m_2}{|\mathbb{r}_{12}|^3}\mathbb{r}_{12} \end{aligned} \tag{45}$$

$G(m_1 + m_2) =: \kappa$, $\mathbb{r}_{12} =: \mathbb{r}$, $|\mathbb{r}_{12}| =: r_{12} =: r$ とおくと、

$$\mu\ddot{\mathbb{r}} = -\frac{\kappa}{r^3}\mathbb{r} \tag{46}$$

ここで、

$$-\frac{\kappa}{r^3}\mathbb{r} = -\nabla\left(-\frac{\kappa}{r}\right) \tag{47}$$

となるから、万有引力に対するポテンシャル（ニュートン・ポテンシャルと呼ぶ）は $-\kappa/r$ である。したがって $v := |\dot{\mathbb{r}}|$ とおくと、式 46 とエネルギー保存則より

$$\frac{\mu v^2}{2} - \frac{\kappa}{r} = E = \text{const.} \tag{48}$$

式 42 より

$$\begin{aligned} v^2 = |\dot{\mathbb{r}}|^2 &= \left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{49}$$

だから、式 48 は、

$$\frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\kappa}{r} = E \tag{50}$$

3.1.4. 角運動量保存則

式 46 より、原点の周りのトルクは $\mathbb{0}$ だから、角運動量は保存する。したがって、

$$\mathbb{L} \coloneqq \mathbb{r} \times \mu\dot{\mathbb{r}} = \text{ const.} \tag{51}$$

$\mathbb{r} = \binom{x}{y}$ を極座標表示すると、

$$\begin{aligned}
\mathbb{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \\
\dot{\mathbb{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{r} \times \mu\dot{\mathbb{r}} &= \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} \\
&= \mu r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta\left(\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right) - \sin\theta\left(\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu r^2\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \left(\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\right)
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
\therefore L \coloneqq |\mathbb{L}| &= \mu r^2\dot{\theta} = \text{ const.} \\
\therefore \dot{\theta} &= \frac{L}{\mu r^2} = \text{ const.}
\end{aligned} \tag{54}$$

3.1.5. ケプラーの第一法則

r を θ の式で表し、それが楕円の極方程式に一致することを示す。

エネルギー保存則の式(式 50)に角運動量保存則の式(式 54)を代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{L^2}{\mu^2 r^4}\right) - \frac{\kappa}{r} &= E \\
\frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + \left(\frac{L}{\mu r}\right)^2\right) - \frac{\kappa}{r} &= E \\
\dot{r}^2 + \left(\frac{L}{\mu r}\right)^2 &= \frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\kappa}{r}\right)
\end{aligned} \tag{55}$$

r を θ で表したい。$r' \coloneqq \mathrm{d}r/\,\mathrm{d}\theta$ とすると、式 54 と合成関数の微分法より

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
\therefore \dot{r} &= \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{L}{\mu r^2} r'
\end{aligned}
\tag{56}
$$

式 55 に 式 56 を代入する。

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{L}{\mu r^2} r'\right)^2 + \left(\frac{L}{\mu r}\right)^2 = \frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\kappa}{r}\right) \\
\left(\frac{r'}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{2\mu}{L^2}\left(E + \frac{\kappa}{r}\right) \\
\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} r^2 + \frac{2\mu\kappa}{L^2} r - 1 \\
\frac{r'}{r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} r^2 + \frac{2\mu\kappa}{L^2} r - 1} \\
\frac{\mathrm{d}r}{\pm r\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} r^2 + \frac{2\mu\kappa}{L^2} r - 1}} = \mathrm{d}\theta
\end{gathered}
\tag{57}
$$

問題 3.1.5.1 (例題 29. 万有引力による運動): 次の問題の $\boxed{}$ の中に入れるべき正しい答えを記せ。

質量が M_1 kg、M_2 kg の 2 つの天体 A, B がそれらの重心 C の周りに、同一周期 T s で、それぞれの速さ $v_1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の等速円運動をする場合を考察する（図 9)。$\overline{\mathrm{AC}} = a_1\,\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{CB}} = a_2\,\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{AB}} = a\,\mathrm{m}$ とする。なお、A および B は質点とみなし、大きさを無視できるものとする。下記の設問に答えよ。ただし、万有引力の定数を $G = 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ とする。

(1) $M_1 = 2.0 \times 10^{28}\,\mathrm{kg}$, $M_2 = 1.0 \times 10^{28}\,\mathrm{kg}$, $a = 1.2 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ のとき、

(a) 距離 a_1 は $\boxed{\text{（ア）}}$ m である。
(b) 速さ v_1 は $\boxed{\text{（イ）}}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。
(c) 速さ v_2 は $\boxed{\text{（ウ）}}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。
(d) 周期 T は $\boxed{\text{（エ）}}$ s である。

(2) a^3/T^2 を M_1 と M_2 とを用いて書き表す公式は

$$\frac{a^3}{T^2} = \boxed{\text{（オ）}}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}} \tag{58}$$

である。

(3) M_1 が M_2 に比べて十分大きく、M_1 に対して M_2 を省略できるとき、a^3/T^2 は M_1 のみで表すことができることを利用して、地球を回る人工衛星の周期 T_0 を求めることができる。地球より月までの距離を 4.0×10^5 km とすると、人工衛星が地球を一回転する時間は

$$T_0 = \boxed{\text{（カ）}}\,\mathrm{h} \tag{59}$$

である。

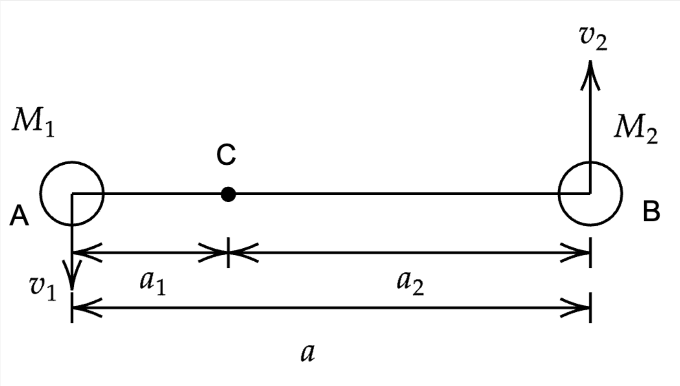

図 9: 天体の運動の図。

考え方:

(1) (a) 重心からの距離が a_1 なので、重心の位置を計算すれば a_1 がもとまります。

(b) 円運動の運動方程式に v_1 が現れます。

(c) 上に同じです。

(2) (1) の結果から計算できます。

(3) 数値を代入しましょう。

解答:

(1) (a) C を原点にとって直線 AB を x 軸として重心の位置を計算すると、

$$0 = \frac{M_1 a_1 - M_2(a - a_1)}{M_1 + M_2} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 &= \frac{M_2}{M_1 + M_2} a \\ &= 4.0 \times 10^{10}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{61}$$

(b) A に働く向心力は B による万有引力だから、運動方程式は

$$M_1 \frac{v_1^2}{a_1} = G\frac{M_1 M_2}{a^2} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \therefore v_1 &= \sqrt{\frac{GM_2 a_1}{a^2}} \\ &\fallingdotseq 1.36 \times 10^3 \\ &\fallingdotseq 1.4 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{63}$$

(c) B に働く向心力は A による万有引力だから、運動方程式は

$$M_2 \frac{v_2^2}{a - a_1} = G\frac{M_1 M_2}{a^2} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \therefore v_2 &= \sqrt{GM_1 \frac{a - a_1}{a^2}} \\ &\fallingdotseq 2.72 \times 10^3 \\ &\fallingdotseq 2.7 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{65}$$

(d) 周期 T は

$$T = \frac{2\pi a_1}{v_1} \fallingdotseq 1.8 \times 10^8\,\mathrm{s} \tag{66}$$

(2) (1) の結果から、

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2} \tag{67}$$

(3) $M_1 \gg M_2$ のとき、$M_1 + M_2 \fallingdotseq M_1$ なので、

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_1}{4\pi^2} = \text{const.} \tag{68}$$

地球の質量を M_1, 人工衛星と月の軌道半径をそれぞれ a_0, a_L, 月の周期を T_L とすると、

$$\frac{a_L^3}{T_L^2} = \frac{a_0^3}{T_0^2}$$

$$\therefore T_0 = T_L\sqrt{\left(\frac{a_0}{a_L}\right)^3} = 27\times 24\sqrt{\left(\frac{8.0\times10^3}{4.0\times10^5}\right)^3} \fallingdotseq 1.8\,\mathrm{h} \tag{69}$$

□

問題 3.1.5.2 (例題 31. 万有引力による運動):

(A) 地表から $h\,\mathrm{km}$ の高さを、地球の中心を中心とする円軌道を描いて一定の速さで飛んでいる質量 $M\,\mathrm{kg}$ の衛星船がある。地球は半径 $R\,\mathrm{km}$ の完全な球で、その時点の影響はないと考える。地表での重力の加速度の大きさを $g\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として、次の問いに答えよ。

(1) この衛星船の加速度の大きさとその方向を求めよ。
(2) この衛星船の運動エネルギーを求めよ。
(3) この衛星船の周期を求めよ。
(4) この衛星船が軌道を変えるために、その質量の一部分 $m\,\mathrm{kg}$ を、投げ出す前の衛星船に対して $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の速さで後方に投げ出した。このときの衛星船本体の速さはどうなるか。ただし、この(4)に関する限り、それまでの衛生船の速さを $V\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ とおく。

(B) 地上における体重が 60.0 kgw（衣服の重さは考えない）で、地面から 50.0 cm の高さまで跳び上がることのできる人が、月に行ったとして、次の問いに答えよ。ただし、月も完全な球と考え、その半径は地球のそれの 1/3.65 で、月表面における重力の加速度の大きさは地球表面におけるそれの 1/6.00 であるとする。

(1) この人が月の上で、天秤およびばね秤を用いてその体重を測るときは、それぞれどうなるか。
(2) 月の質量は地球の何分の一か。
(3) この人が跳び上がるときに地面と月面とを蹴る力積が相等しいとすれば、月面を離れる瞬間の速さは地面を離れる瞬間の速さの何倍か。ただし、この人は月の上では、地上で測れば 20.0 kgw の宇宙服を着ているものとする。
(4) (7)の場合、この人は月面からどれだけの高さまで跳び上がることができるか。