

# 問題の解答

krollo966

## この文書の読み方

辻が送った問題の解答.

問題.  $s, t$  を実数とする. 二つのベクトル  $\vec{u} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$  のなす角が, どのような実数  $t$  に対しても鋭角となるための必要十分条件を  $s$  を用いて表せ.

解.  $u, v$  のなす角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) とする.

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{st + t^2 + 6}{\sqrt{s^2 + t^2 + 9} \sqrt{2t^2 + 4}} \quad (1)$$

だから,

$$\begin{aligned} \theta \text{ が鋭角} &\iff 0 < \cos \theta < 1 \iff 0 < \cos \theta \leq 1 \text{ かつ } \cos \theta \neq 1 \\ &\iff 0 < st + t^2 + 6 \text{ かつ } \theta \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

1.  $0 < st + t^2 + 6$  が任意の実数  $t$  に対して成り立つような実数  $s$  の範囲は

$$st + t^2 + 6 = t^2 + st + 6 = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 + 6 - \frac{s^2}{4} \geq 6 - \frac{s^2}{4} \quad (3)$$

より,  $6 - \frac{s^2}{4} > 0$ , すなわち  $-2\sqrt{6} < s < 2\sqrt{6}$ .

2.  $\theta \neq 0 \iff \vec{u} = k\vec{v}$  となる実数  $k$  が存在しない  $\iff s \neq 0$  かつ  $t \neq 0$

1, 2 より  $-2\sqrt{6} < s < 0$  または  $0 < s < 2\sqrt{6}$ .