

難系物理 II 電磁気・原子

krollo966

この文書の読み方
難系物理 II の演習問題を解く。

1. 電磁気

1.1. 静電気

演習問題 1. 図のように、滑らかな水平面上に点 O がある。点 O から鉛直上方、および下方に距離 r m だけ離れたところに、点電荷 A, B が固定されている。A, B はともに $+e$ C の正電荷を持っている。水平面上、点 O から距離 r m の点を P とする。

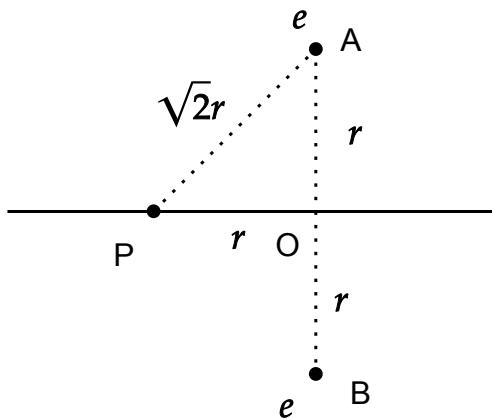


図 1: 問題の図。

いま、 $-e$ C の負電荷を持ち、質量 m kg の荷電粒子 E を考える。この粒子 E は、水平面上のみを運動できるものとする。また、重力の影響、および E 自身の運動による誘導起電力の影響は無視できるものとする。

クーロンの法則の比例定数を $k \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ として、以下の設問に単位を付して答えよ。

- (1) 点 O および点 P における電界の強さをそれぞれ求めよ。
- (2) 点 O および点 P における電位をそれぞれ求めよ。
- (3) 点 O から点 P に向かってわずかな距離 Δx m だけ離れた点を Q とする。 Δx は r に比べて十分小さいので、AQ, BQ の距離は、ともに r m に等しいとみなすことができる。粒子 E が点 Q に固定されているとき、A, B がつくる電界から E が受ける力の大きさを求めよ。
- (4) 点 Q において、静かに粒子 E をはなしたとき、E は点 O, P を含む直線上を、点 O を中心として单振動し始めた。この单振動の周期を求めよ。

- (5) 粒子 E を点 O に静止させた後, 点 P まで静かに移動させた. E を点 O から点 P まで運ぶときに必要な仕事の大きさを求めよ.
- (6) 粒子 E を, 点 P から水平面上直線 OP に垂直にある速さ v_1 で投げ出したとき, E は点 O を中心とした半径 $r \text{ m}$ の等速円運動をした. この時の速さ v_1 を求めよ.
- (7) 粒子 E を点 P から点 O に向かって, ある速さ v_2 で投げ出したとき, E は A, B から受ける力を振り切って系外へ飛び出した. v_2 に要求される最低の速さを求めよ.

解.

- (1) 点 O では A, B の電荷による電場が打ち消しあうので, 電場の大きさは

$$0 \text{ N C}^{-1} \quad (1)$$

また, A, B が点 P に及ぼす電場の大きさはそれぞれ $ke/(2r^2)$ で, その向きは図 2 のようになるから, これらの電場を合成するとその大きさは

$$\frac{ke}{\sqrt{2}r^2} \text{ N C}^{-1} \quad (2)$$

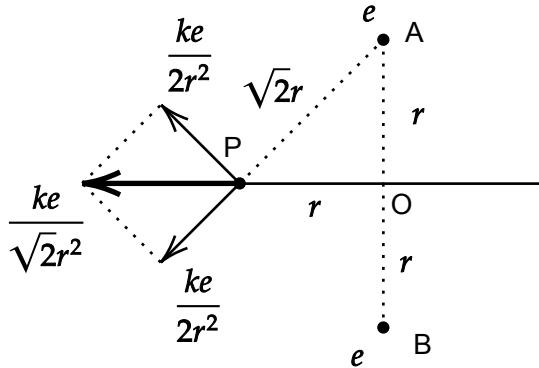


図 2: 点 P における電場の様子.

- (2) A と B が O に及ぼす電位はそれぞれ ke/r だから, 重ね合わせの原理より, O の電位を V_0 とすると

$$V_0 = \frac{2ke}{r} \text{ N m C}^{-1} \quad (3)$$

また, A と B が P に及ぼす電位はそれぞれ $ke/(\sqrt{2}r)$ だから, 重ね合わせの原理より, P の電位を V_P とすると

$$V_P = \frac{\sqrt{2}ke}{r} \text{ N m C}^{-1} \quad (4)$$

- (3) A, B が点 Q に及ぼす電場をそれぞれ E_{QA}, E_{QB} とすると, その大きさはいずれも ke/r^2 . 図 3 より点 Q における電場を E_Q とすると, 電荷 E が受ける力の大きさは

$$| -e \mathbf{E}_Q | = 2 \cdot \frac{ke^2}{r^2} \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{r^2 + (\Delta x)^2}} \doteq \frac{2ke^2}{r^3} \Delta x N \quad (5)$$

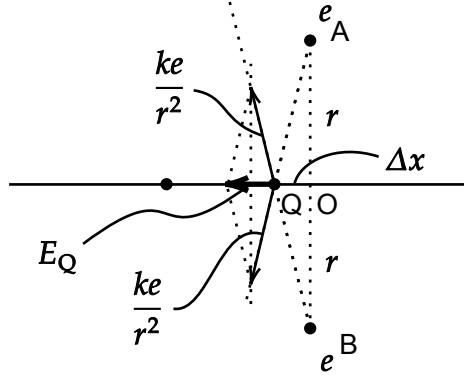


図 3: 点 Q における電場の様子.

- (4) 電荷 E は負電荷だから、電場とは逆向きに、つまり \overrightarrow{QO} 向きに力を受けて単振動する。 $K = 2ke^2/r^3$ とおくと、単振動の周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{mr^3}{2ke^2}} = \frac{\pi r}{e} \sqrt{\frac{2mr}{k}} s \quad (6)$$

- (5) 点 O から P まで電荷 E を運ぶのに必要な仕事を W_{OP} とすると、エネルギー保存則より

$$W_{OP} = -e(V_P - V_O) = (2 - \sqrt{2}) \frac{ke^2}{r} N m \quad (7)$$

- (6) 半径 r の等速円運動をするとき、向心方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{v_1^2}{r} &= \frac{ke^2}{\sqrt{2}r^2} \\ \therefore v_1 &= e \sqrt{\frac{k}{\sqrt{2}mr}} m s^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

- (7) エネルギー保存則より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 + (-e)V_P &= 0 \\ \therefore v_2 &= e \sqrt{\frac{2\sqrt{2}k}{mr}} m s^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

演習問題 2. 真空中の電荷と電界に関する下記の文において、(ア) から
(サ) に当てはまる式または記号を記せ。ただし、クーロンの法則の比例定数を $k_0 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ 、電子の電荷を $-e \text{ C}$ 、電子の質量を $m \text{ kg}$ とし、無限遠点での電位を 0 V とする。電界の方向については、図中に示された ①~⑧ の中から正しい方向を選んで、その番号を記せ。

- (1) 図のように水平面上に互いに直交する x 軸, y 軸をとり, 原点から d m 離れた x 軸上の点 A ($d, 0$) に電気量 QC ($Q > 0$) の点電荷を固定する. このとき, x 軸上の点 B ($-d, 0$) の電界の大きさは (ア) NC^{-1} で, 電界の方向は (イ) である. また, この点の電位は (ウ) V である.

点 A の電荷 Q がつくる電界中で, x 軸上の負の方向の無限遠点に置かれたもう一つの点電荷 QC を x 軸に沿って点 B まで動かす. このとき外力がする仕事は (エ) J である.

- (2) 点 A ($d, 0$) と点 B ($-d, 0$) に正の電荷 Q を固定すると, y 軸上の点 C ($0, d$) での電界の大きさは (オ) NC^{-1} 隣, この点に電子を置くと, 電子には (カ) N の力が働く.

次に, 点 C で速度 0 であった電子が電界で力を受けて y 軸上を動くとすると, 原点 O での速度は (キ) m s^{-1} となる.

問題を書き写すのが面倒になったので(3), (4)は省略.

演習問題 2.

- (1) (ア) 点 B における電界の大きさ E_B は

$$E_B = \frac{k_0 Q}{4d^2} \quad (10)$$

(イ) 向きは ⑦.

(ウ) 電位 V_B は

$$V_B = \frac{k_0 Q}{2d} \quad (11)$$

(エ) 外力がする仕事 W は

$$W = -Q(V_B - 0) = -\frac{k_0 Q^2}{2d} \quad (12)$$

- (2) (オ) 点 A, B において電荷 Q が点 C ($0, d$) に及ぼす電場の大きさはそれぞれ等しいので, それを E_C' とおき, 求める電場を E_C とおくと,

$$\begin{aligned} E_C &= 2\sqrt{2}E_C' \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{k_0 Q}{2d^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}k_0 Q}{d^2} \end{aligned} \quad (13)$$

(カ) 電子に働く力を F とおくと, これは電場と逆向きだから,

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{2}k_0 Q e}{d^2} \quad (14)$$

(キ) O, C における電位をそれぞれ V_O, V_C とおくと、重ね合わせの原理よりそれぞれの位置での電位は A, B の電荷による電位の和になるから、

$$\begin{aligned} V_O &= 2 \cdot \frac{k_0 Q}{d}, \\ V_C &= 2 \cdot \frac{k_0 Q}{\sqrt{2}d}. \end{aligned} \quad (15)$$

原点での速度を v とおくと、エネルギー保存則より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= -e(V_C - V_O) \\ &= -2e \frac{k_0 Q}{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{(2 - \sqrt{2})k_0 Q e}{d} \end{aligned} \quad (16)$$

したがって、

$$v = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})k_0 Q e}{md}} \quad (17)$$

(3) (ク) A, B の正電荷が D に及ぼす電場は E_C と同じ大きさで y 軸負の向き、C の負電荷が D に及ぼす電場は $k_0 Q/(4d^2)$ で y 軸正の向きだから、D における電場の合成は ⑤ の向きになる。

(ケ) 電位の重ね合わせの原理より、D における電位 V_D は A, B, C の電荷のつくる電位の和になる。A, B の電荷がつくる電位の和は V_C と同じで、C の電荷がつくる電位は $-kQ/(2d)$ だから、

$$\begin{aligned} V_D &= V_C - \frac{k_0 Q}{2d} \\ &= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{k_0 Q}{d} \\ &= \frac{(2\sqrt{2} - 1)k_0 Q}{2d} \end{aligned} \quad (18)$$

したがって、求める仕事を W_D とおくと、

$$\begin{aligned} W_D &= -(-Q)(V_D - 0) \\ &= \frac{(2\sqrt{2} - 1)k_0 Q^2}{2d} \end{aligned} \quad (19)$$

(4) (コ) 初期状態における電位を計算しよう。点 A, B, D の電荷による点 C での電位をそれぞれ V_{CA}, V_{CB}, V_{CD} とおき、その和を V_{C1} とおくと、

$$\begin{aligned}
V_{C1} &= V_{CA} + V_{CB} + V_{CD} \\
&= k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} + k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} - k_0 \frac{Q}{2d} \\
&= \frac{(2\sqrt{2}-1)k_0 Q}{2d}
\end{aligned} \tag{20}$$

また、点 A, C, D の電荷による点 B での電位をそれぞれ V_{BA}, V_{BC}, V_{BD} とおく、その和を V_{B1} とおくと、

$$\begin{aligned}
V_{B1} &= V_{BA} + V_{BC} + V_{BD} \\
&= k_0 \frac{Q}{2d} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} \\
&= \frac{(1-2\sqrt{2})k_0 Q}{2d}
\end{aligned} \tag{21}$$

したがって、初めの電荷の位置エネルギーの和を U_1 とおくと、

$$\begin{aligned}
U_1 &= V_{B1} + (-Q)V_{C1} \\
&= \frac{(1-2\sqrt{2})k_0 Q^2}{2d} - \frac{(2\sqrt{2}-1)k_0 Q^2}{2d} \\
&= \frac{(1-2\sqrt{2})k_0 Q^2}{d}
\end{aligned} \tag{22}$$

移動終了後も同様に電位を計算する。点 B, C の電位をそれぞれ V_{B2}, V_{C2} とおくと、

$$\begin{aligned}
V_{B2} &= V_{BA} + V_{BD} + k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} \\
&= k_0 \frac{Q}{2d} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} + k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} \\
&= k_0 \frac{Q}{2d}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
V_{C2} &= V_{CA} + V_{CD} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} \\
&= k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} - k_0 \frac{Q}{2d} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2d}} \\
&= -k_0 \frac{Q}{2d}
\end{aligned} \tag{24}$$

したがって、移動後の電荷の位置エネルギーの和を U_2 とおくと、

$$\begin{aligned}
U_2 &= -QV_{B2} + QV_{C2} \\
&= -k_0 \frac{Q^2}{2d} - k_0 \frac{Q^2}{2d} \\
&= -k_0 \frac{Q^2}{d}
\end{aligned} \tag{25}$$

外力がする仕事 W は,

$$\begin{aligned}
W &= -(U_2 - U_1) \\
&= \frac{(1 - 2\sqrt{2})k_0 Q^2}{d} + \frac{k_0 Q^2}{d} \\
&= \frac{2(1 - \sqrt{2})k_0 Q^2}{d}
\end{aligned} \tag{26}$$

(サ) 無限遠での位置エネルギーを U_∞ と書くと, 無限遠まで運ぶのに外力がする仕事は

$$W = -(U_\infty - U_2) = -k_0 \frac{Q^2}{d} \tag{27}$$