幾何力学

krollo966

目次

—この文書の読み方—

幾何力学（解析力学）の文書です。

1. 多様体

Definition 1.1 (位相空間):

Definition 1.2 (ハウスドルフ空間):

Definition 1.3 (第二可算空間):

Definition 1.4 (多様体):
- (局所 n 次元ユークリッド空間): 位相空間 M は、任意の点 $p \in M$ に対してある近傍 U が存在し、U から $\mathbb{R}^n$ の開集合の上への微分同相写像 φ が存在するとき、M は**局所 n 次元ユークリッド空間**であるという。
- (チャート): $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ を**チャート**といい、U は座標近傍あるいは座標開集合、φ は U 上の座標写像あるいは座標系という。$\varphi(p) = 0$ のとき、(U, φ) は $p \in U$ を中心とするという。
- (多様体): ハウスドルフかつ第二可算である局所ユークリッド空間を**位相多様体(topological manifold)**という。

Definition 1.5 (両立的なチャート):

Definition 1.6 (アトラス):

Definition 1.7 (滑らかな多様体(C^∞ 多様体)):

Definition 1.8 (導分(derivation)):

2. リー代数

Definition 2.1 (リー括弧):
- ($\mathbb{R}$-双線型):
- (歪対称):
- (リー代数): $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ のポアソン括弧が $\mathbb{R}$-双線型かつ歪対称で、以下のヤコビの恒等式

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0, \quad \forall f,g,h \in C^\infty(M) \tag{1}$$

を満たすとき、$(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ はリー代数という。

3. ポアソン多様体

Definition 3.1 (ポアソン多様体):
- (ポアソン括弧): 多様体 M 上の滑らかな関数のなす空間 $C^\infty(M)$ に対してリー括弧

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M) \tag{2}$$

  がライプニッツの等式

$$\{f, g\cdot h\} = g\cdot\{f,h\} + \{g, f\cdot h\}, \quad \forall f,g,h \in C^\infty(M) \tag{3}$$

  を満たすとき、ポアソン括弧という。
- (ポアソン多様体): ポアソン括弧を備えた多様体 M をポアソン多様体という。

ライプニッツの等式より、任意の $H \in C^\infty(M)$ に対し、$\{H,\cdot\}$ の演算が代数 $C^\infty(M)$ の導分であることが従う。よって、M 上のベクトル場 X_H を関係式

$$\{H,f\} = \mathcal{L}_{X_H}(f), \quad \forall f \in C^\infty(M) \tag{4}$$

で定められる。これを $H \in C^{\infty}(M)$ のハミルトンベクトル場と呼ぶ。

Definition 3.2 (ポアソン写像): ポアソン多様体 $(M_1, \{\cdot,\cdot\}_1)$ と $(M_2, \{\cdot,\cdot\}_2)$ の間の滑らかな写像 $\Phi : M_1 \to M_2$ がリー代数準同型

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \Phi, \quad \forall f, g \in C^{\infty(M_2)} \tag{5}$$

を誘導するとき、ポアソン写像という。