数列

この文書の読み方

数列の攻略。

1. 数列

1.1. 問題集

2022 年度第 *2* 問. 漸化式から数列の項の性質を調べる問題。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \tag{1}$$

解.

(1) 数学的帰納法で示す。まずは実験する。 5 の倍数であることを示すので、5 で割った余りを考えて表を作る。

(2) a_n が a_k の倍数 $\Longleftrightarrow a_n \equiv 0 \bmod a_k$ なので a_k で割った余りを考える。 (1) で $k = 3$ のときの表を作っていて、k が周期になっていると予想できる。

$$\begin{gathered} a_1 \not\equiv 0, ..., a_{k-1} \not\equiv 0; a_k \equiv 0, \\ a_{k+1} \not\equiv 0, ..., a_{k+(k-1)} \not\equiv 0; a_{2k} \equiv 0, \\ a_{2k+1} \not\equiv 0, ..., a_{2k+(k-1)} \not\equiv 0; a_{3k} \equiv 0, \\ \vdots \\ a_{m(k-1)+1} \not\equiv 0, ..., a_{(m-1)k+(k-1)} \not\equiv 0; a_{mk} \equiv 0 \end{gathered} \tag{2}$$

つまり n が k の倍数だと予想できるので、これを帰納法で示す。つまり

$$a_{l(k-1)+1} \not\equiv 0, ..., a_{(l-1)k+(k-1)} \not\equiv 0; a_{lk} \equiv 0 \tag{3}$$

を示す。

$$1 = a_1 < ... < a_{k-1} < a_k \tag{4}$$

$$\because a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \tag{5}$$

(3) $8091 = 2022 \times 4 + 3 = 8088 + 3$ だから、a_{8088} が a_{2022} の倍数で、特に

$$a_{8091} \equiv 3 \pmod{a_{2022}} \tag{6}$$

だから、以下 $\bmod a_{2022}$ とすると、

$$\begin{gathered} a_{8088} \equiv 0, \\ a_{8089} = (a_{8088})^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 = 1, \\ a_{8090} = (a_{8089})^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 = 2, \\ a_{8091} = (a_{8090})^2 + 1 \equiv 2^2 + 1 = 5 \end{gathered} \tag{7}$$

$$a_{8091} = Aa_{2022} + 5 \tag{8}$$

となる自然数 A が存在する。この形から、a_{8091} と a_{2022} は 5 以外の共通の素因数を持たない（例えば 7 を共通素因数として持つとすると両辺が 7 で割れないといけないが、5 は 7 では割れない。）

$2022, 8091$ は 3 の倍数なので a_{2022}, a_{8091} はいずれも 5 で割り切れる。

さらに、25 では割り切れない。$\mathrm{mod}\,25$ として

$a_1 \equiv 1, a_2 \equiv 2, a_3 \equiv 5, ...$ となり、25 で割った余りは $1, 2, 5$ を繰り返し 0 にはならない。

よって最大公約数は 5。