

多変数関数の微積分

krollo966

目次

- 1. 関数と座標変換 — 1 —
- 2. n 次元ベクトル空間と自然基底 — 1 —
- 3. 多変数関数と偏微分 — 1 —

—この文書の読み方—

物理学では複数の変数を持つ関数（**多変数関数**という）を扱うことがよくあるので、（高校の数学の範囲は少々逸脱しますが）多変数関数とその微積分について説明します。まずは具体例として二変数関数を取り扱った後、多変数関数の説明をします。

1. 関数と座標変換

2. n 次元ベクトル空間と自然基底

Theorem 2.1 (n 次元ベクトルの表示): n 次元ベクトル \boldsymbol{x} は、自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を用いて $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$ と表せる。

3. 多変数関数と偏微分

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (n 次元ベクトルに実数を対応させる関数) を多変数実数値関数という。 \mathbb{R}^n の元 \boldsymbol{x} を、自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を用いて $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$ と表すとき、 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ と書くことにする。 \boldsymbol{e}_k 方向の微分、すなわち多変数関数をその一つの変数に関して微分することを**偏微分**するという：

Definition 3.1 (偏微分と偏導関数): $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、一つの変数に関して微分すること（それ以外を定数とみなして微分すること）を**偏微分**といい、偏微分してあらわれる導関数を**偏導関数**という。 $f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ の x_k に関する偏導関数は $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ と書く：

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$