

積分の攻略

この文書の読み方
積分の攻略本

1. 積分

1.1. 説明

1.1.1. 積分と不等式

命題 1.1.1 (積分と不等式)

$a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

また、

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (2)$$

1.1.2. 区分求積法

定義 1.1.2 (区分求積法)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \quad (3)$$

□ 注意

和の区間が変わると積分範囲も変わる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n-1}^{5n+10} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_3^5 f(x) dx \quad (4)$$

$k = 3n - 1 \approx 3n$, $k = 5n + 10 \approx 5n$ を代入すると端点がわかる。

1.2. 問題集

2023 年度第 1 問.

(1) 正の整数 k に対し、

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx \quad (5)$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad (6)$$

(2) 正の整数 n に対し

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx \quad (7)$$

とおく。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ。

解.

(1) $\sin(x^2)$ は積分できないので $t = x^2$ において積分区間と積分変数を書き換えていく。 $dx = \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ だから、

$$A_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \frac{dt}{2\sqrt{t}} \quad (8)$$

そして今回は不等式を示したい。

- 命題 1.1.1 を使う。
- $|\sin(t)| \leq 1$ はわかっているので、その積分の値も評価できる。

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t dt = 2 \quad (9)$$

- $1/\sqrt{t}$ の評価をしよう。 $k\pi \leq t \leq (k+1)\pi$ を変形して

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt &\leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt \end{aligned} \quad (10)$$

(2) 挾み撃ちの原理。

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{n\pi}^{2n\pi} |\sin(t)| \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{n(k+1)\pi}} \\
&= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{n}\pi}} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} [2x^{\frac{1}{2}}]_1^2 \\
&= \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned} \tag{13}$$

2019年度第1問.

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx \tag{14}$$

解. 被積分関数を展開して

$$x^2 + x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(1+x^2)^{-2} \tag{15}$$

$$(i) \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \tag{16}$$

$$(ii) \quad \int_0^1 x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx \tag{17}$$

は $1+x^2 = t$ と置換する。

$$\begin{aligned}
(iii) \quad \int_0^1 x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1+x^2)'(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 \\
&= \sqrt{2} - 1
\end{aligned} \tag{18}$$

$$(iv) \quad \int_0^1 x^2(1+x^2)^{-2} dx \tag{19}$$

は $x = \tan \theta$ と置換する。