

座標幾何学

この文書の読み方
座標幾何の問題です。

1. 座標幾何学

1.1. Tips

命題 1.1.1

傾きが a の直線の $\alpha < x < \beta$ の区間の長さは

$$(\beta - \alpha)\sqrt{1 + a^2} \quad (1)$$

と書ける。特に接線のときこの線分の長さは

$$(\beta - \alpha)\sqrt{1 + f'(a)} \quad (2)$$

証明. 三平方の定理より

$$\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (a(\beta - \alpha))^2} = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + a^2} \quad (3)$$

□

1.2. 問題集

2023 年度第 3 問.

(1) $(0, a)$ を中心とした半径 1 の円が $y > x^2$ の範囲に含まれる条件

(2)

解.

(1) C は円なので、 C 上の点を $(\cos \theta, a + \sin \theta)$ と表す。

(2) 命題 1.1.1 より

$$L_P = \frac{(4a - 1)\sin^2 \theta + 4\sin \theta + 1}{\sin^4 \theta} \quad (4)$$

が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$ の範囲で同じ値を 2 回とれば OK。 $t = 1/\sin \theta$ とおくと $t \leq -1$ で、

$$f(t) = (4a - 1)t^2 + 4t^3 + t^4 \quad (5)$$

が $y = c$ という定数関数と 2 回交わる。これは $t \leq -1$ の範囲で増減が変化すればいいので、 $f'(t)$ を考えれば OK。