運動学

krollo966

目次

—この文書の読み方—

加速度が生じる場合の運動学です。

1. 運動学

法則 1.1 (運動方程式): 物体の加速度 (acceleration) $\ddot{\mathbb{r}}$ は

$$\ddot{\mathbb{r}}(t) = \frac{1}{m}\mathbb{F}(\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}, t) \tag{1}$$

という微分方程式で表すことができる。この式を**運動方程式**(equation of motion)と呼び、m を物体の**慣性質量**(inertial mass), $\mathbb{F}$ を**力**(force)という。

関数の引数は適宜省略する。例えば、$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}(t), t)$ は省略して $\mathbb{F}$ のように書く。

2. 等加速度運動

$\ddot{\mathbb{r}}(t) = \mathbb{a}$（等加速度）のときは、これを t で積分すると等加速度運動の公式を得る：

Theorem 2.1 (等加速度運動の公式): 初速度を $\mathbb{v}_0$、初期位置を $\mathbb{0}$ として、$\ddot{\mathbb{r}}(t) = \mathbb{a}$ を 0 から t まで積分すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{r}}(t) &= \mathbb{a}t + \mathbb{v}_0 \\ \mathbb{r}(t) &= \frac{1}{2}\mathbb{a}t^2 + \mathbb{v}_0 t \end{aligned} \tag{2}$$

問題 2.1 (例題 4. 等加速度運動): 図 1 のように、滑らかで水平な床に置かれた質量 M の台車の上に、質量 m の小物体が置かれている。台車の右端には質量の無視できる紐がつけられている。速度や加速度は図の力の向きのように右向きを正の方向にとるものとする。重力加速度の大きさを g とし、以下の問いに答えよ。

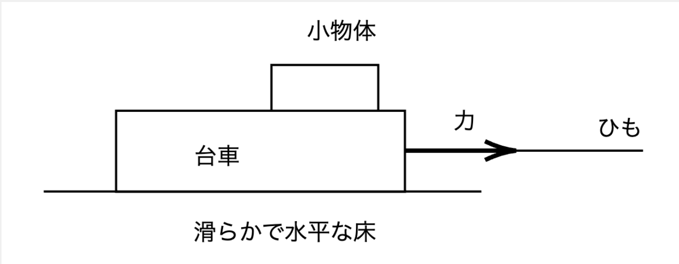

図 1: 台車と小物体の図

初めは、台車と小物体の間に摩擦がない場合を考えよう。

(1) 台車のひもを水平方向右向きに引き、台車に F_0 の力を加えた。台車の床に対する加速度を求めよ。

次に、台車と小物体の間に摩擦がある場合を考えよう。台車と小物体の間の静止摩擦係数を μ_0、動摩擦係数を μ_1 とする。

(2) 台車のひもを水平方向右向きに引き、台車に F_1 の力を加えたところ、小物体は台車の上で滑ることなく、台車と一体となって動いた。

  (a) 床に対する台車の加速度を求めよ。
  (b) 台車に固定した座標で見た場合、小物体は静止している。これは小物体に正と負の 2 種類の水平方向の力が働いているためと考えられる。これらの力の名称を述べよ。

(3) 台車を水平方向右向きに引っ張る力を F_2 まで増して行ったところ、小物体は台車上を滑り始めた。静止摩擦係数 μ_0 を求めよ。

(4) F_2 に比べ十分大きい水平方向右向きの力 F_3 を台車に時刻 $t = 0$ から $t = t_0$ まで加えた。ただし台車と小物体は時刻 $t = 0$ で静止していたとし、以下では速度や加速度は床に固定された座標で考えることにする。また、台車は充分に長く、小物体が台車から落ちることはないものとする。

  (a) 力 F_3 が台車に作用している間 ($0 \leq t \leq t_0$) の台車と小物体のそれぞれの加速度を求めよ。
  (b) 力 F_3 が働かなくなる瞬間 ($t = t_0$) における台車の速度 V_0 と小物体の速度 w_0 を求めよ。
  (c) 力 F_3 が働かなくなった直後の台車の加速度を求めよ。

(d) $t=t_0$ からある時間が経過し時刻 $t=t_1$ になったとき、台車は等速度運動を始めた。等速度運動を始めるまでの時間 t_1-t_0 および時刻 $t=t_1$ 以降の台車の速度 V_1 を、V_0 と w_0 などを用いて表せ。

(e) 以上を総合して、台車の速度 V と小物体の速度 w が時刻とともに変化する様子の概略を描け。

解答:

(1) 床に水平に x 軸をとり台車の x 座標を x とすると、台車の運動方程式より $\ddot{x}=\frac{F_0}{M}$。

(2) 小物体と台車が一体となって運動するので、加速度が同じになる。よって運動方程式は
- x 軸方向（台車）：$M\ddot{x}=F_1-f$
- y 軸方向（台車）：$0=N_M-N_m-Mg$
- x 軸方向（小物体）：$m\ddot{x}=f$
- y 軸方向（小物体）：$0=N_m-mg$

これを解くと $\ddot{x}=\frac{F_1}{M+m}$。

台車に固定した座標系では、小物体には摩擦力と慣性力が働いている。

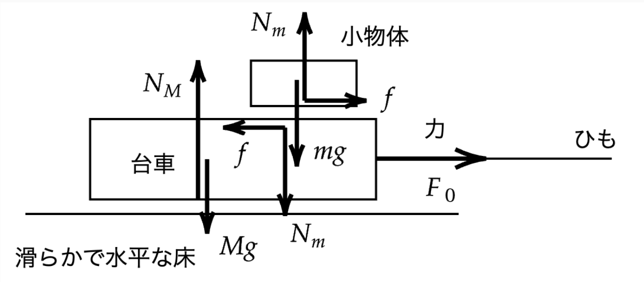

図 2: 摩擦のあるときの力の図

(3) 小物体が台車上を滑り始める直前、台車と小物体の間には最大静止摩擦力が働くので $f=\mu_0 N_m$ として運動方程式を立てると、
- x 軸方向（台車）：$M\ddot{x}=F_2-\mu_0 N_m$
- y 軸方向（台車）：$0=N_M-N_m-Mg$
- x 軸方向（小物体）：$m\ddot{x}=\mu_0 N_m$
- y 軸方向（小物体）：$0=N_m-mg$

これを解くと、$\mu_0=\frac{F_2}{(M+m)g}$。

(4) (a) $F_3>F_2$ だから台車と小物体の間には動摩擦が働く。台車と小物体の加速度をそれぞれ $\ddot{x}_M,\ddot{x}_m$ とすると、運動方程式は

- x 軸方向（台車）：$M\ddot{x}_M=F_3-\mu_1 N_m$

- y 軸方向（台車）：$0 = N_M - N_m - Mg$
- x 軸方向（小物体）：$m\ddot{x}_m = \mu_1 N_m$
- y 軸方向（小物体）：$0 = N_m - mg$

運動方程式を解くと $\ddot{x}_m = \mu_1 g, \ddot{x}_M = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M}$。

(b) 加速度を積分する：

$$w_0 = \int_0^{t_0} \ddot{x}_m \, \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \mu_1 g \, \mathrm{d}t = \mu_1 g t_0$$

$$V_0 = \int_0^{t_0} \ddot{x}_M \, \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} \, \mathrm{d}t = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} t_0 \tag{3}$$

(c) 力 F_3 が働かなくなった直後の運動方程式は

- x 軸方向（台車）：$M\ddot{x}_M = -\mu_1 N_m$
- y 軸方向（台車）：$0 = N_M - N_m - Mg$
- x 軸方向（小物体）：$m\ddot{x}_m = \mu_1 N_m$
- y 軸方向（小物体）：$0 = N_m - mg$

よって $\ddot{x_M} = -\mu_1 \frac{m}{M} g$。

(d) 小物体の加速度は $\ddot{x}_m = \mu_1 g$。 $t = t_1$ での台車の速度と小物体の速度は等しく V_1 となるので、

$$\begin{aligned}
\text{小物体の速度} &= -\mu_1 \frac{m}{M} g(t_1 - t_0) + V_0 \\
\text{台車の速度} &= \mu_1 g(t_1 - t_0) + w_0 \\
\therefore V_0 - w_0 &= \left(1 + \frac{m}{M}\right) \mu_1 g(t_1 - t_0) \\
\therefore t_1 - t_0 &= \frac{M(V_0 - w_0)}{\mu_1 (M + m) g} \\
\therefore V_1 &= \frac{M}{M + m}(V_0 - w_0) + w_0 \\
&= \frac{MV_0 + mw_0}{M + m} \qquad (4)
\end{aligned}$$

(e) 以上をまとめると 図 3 のようになる。

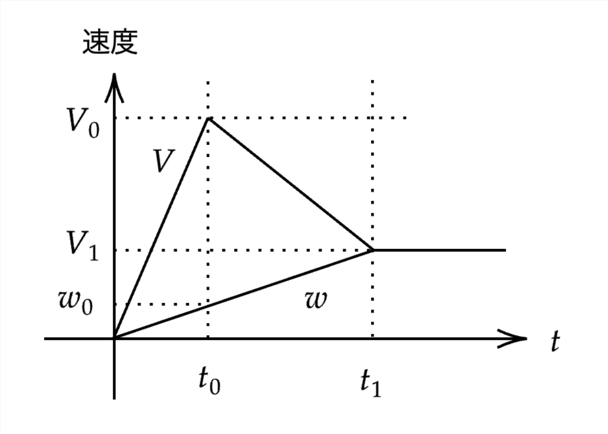

図 3: 台車と小物体の速度の変化

□

問題 2.2 (例題 5. 等加速度運動): 次の文中の $\boxed{}$ に適した式を記せ。

図 4 のように、水平な床の上に質量 M の台があり、はじめ静止している。台の上面は、水平と θ の角をなす斜面と水平面とが曲面で滑らかに接続されていて、水平面上の CD 間にのみ摩擦があり他は滑らかである。斜面上の AB 間と水平面上の CD 間の距離はともに l であり、水平面から測った A 点の高さは h である。大きさの無視できる質量 m の物体 P を A 点におき、静かにはなすと P は斜面を滑り始め、D 点で台から右方へと飛び出した。P と面 CD の間の動摩擦係数を μ とし、重力加速度の大きさを g とする。また、図の水平右向きに x 軸をとり、鉛直下向きに y 軸をとり、空気抵抗は無視できるものとする。

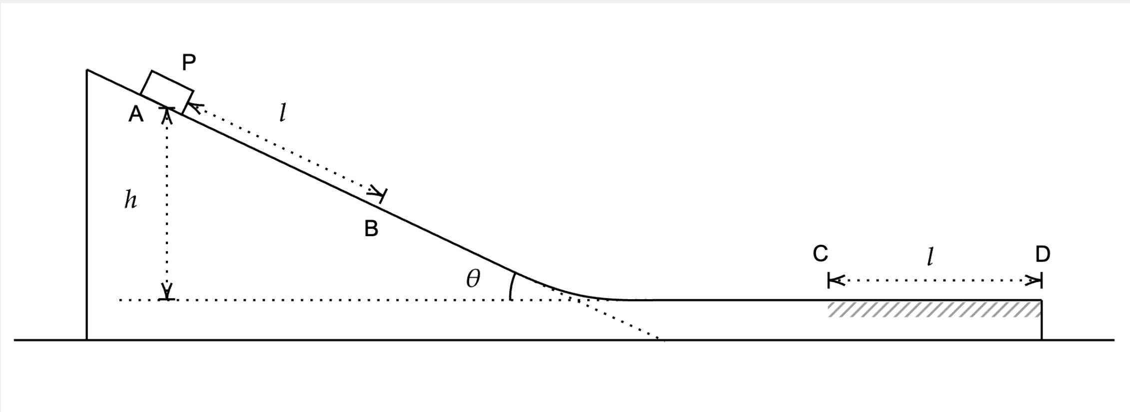

図 4: 斜面と水平面の図

[A] 台と床との間の摩擦により、台が動かない場合。

P が斜面上を滑っているとき、P が斜面から受ける垂直抗力の大きさは $\boxed{\text{(ア)}}$ であるから、台が床から受ける静止摩擦力の大きさは $\boxed{\text{(イ)}}$ である。したがって、台と床との静止摩擦係数を μ_0 とすると、このとき台が動かないための条件は $\mu_0 > \boxed{\text{(ウ)}}$ である。

次に、P が C 点に達したときの速度は $\boxed{\text{(エ)}}$ だから、P が CD 間を移動するのに要した時間は $\boxed{\text{(オ)}}$ である。ただし $h > \mu l$ とする。

[B] 床が滑らかで、台が x 軸方向には自由に動きうる場合。

P が斜面上を滑っているとき、P が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N、P の x, y 方向の加速度をそれぞれ α_x, α_y とすると、P の x 方向の運動方程式は $m\alpha_x = \boxed{\text{(カ)}}$ となり、P の y 方向の運動方程式は $m\alpha_y = \boxed{\text{(キ)}}$ となる。また、このとき、台の x 方向の加速度を β とすると、台の x 方向の運動方程式は $M\beta = \boxed{\text{(ク)}}$ となる。さらに、動いている台から見ると、P は水平と θ の角をなす方向に滑るので、$\alpha_x, \alpha_y, \beta$ を用いて $\tan\theta = \boxed{\text{(ケ)}}$ となる。(カ), (ク), (ケ)より、N と α_x を消去すると $\frac{\beta}{\alpha_y} = \boxed{\text{(コ)}}$ となるので、P が A 点から B 点まで移動する間に、台は x 方向に距離 $\boxed{\text{(サ)}}$ だけ移動する。なお、この P の運動を床（静止系）から見たときの、水平と P

との運動方向とのなす角を $\varphi\ (0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ とすると、M, m, θ を用いて、$\tan\varphi = \boxed{\text{（シ）}}$ となる。

解答:

[A] 力を書き込むと 図 5 のようになる。P が斜面を離れないので $N = mg\cos\theta$。

運動方程式は

- x 軸方向（P）：$m\alpha_x = N\sin\theta$
- y 軸方向（P）：$m\alpha_y = mg - N\cos\theta$
- x 軸方向（台）：$0 = f - N\sin\theta$
- y 軸方向（台）：$0 = Mg + N\cos\theta - n$

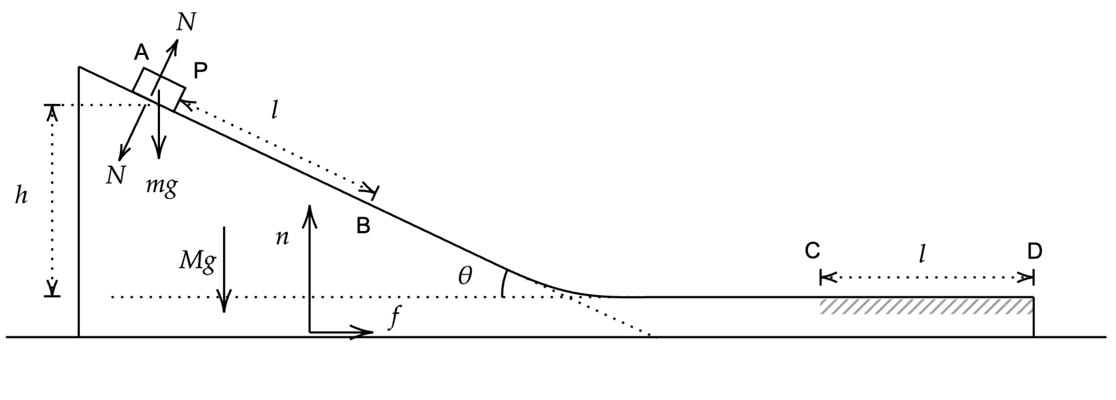

図 5: 斜面と水平面の図

□

3. 運動方程式の積分（質点系）

i は非負整数とする。質量 m_i の質点の位置ベクトルを $\mathbb{r}_i = \mathbb{r}_i(t)$ とし、速度を $\dot{\mathbb{r}}_i(t) = \mathbb{v}_i(t)$ とする。この質点に力 $\mathbb{F}_i = \mathbb{F}_i(t)$ が働くとする。

3.1. 運動量と力積

運動方程式 $m_i\dot{\mathbb{v}}_i(t) = \mathbb{F}_i$ を $t = t_0$ から $t = t_1$ まで積分すると

$$\int_{t_0}^{t_1} m\dot{\mathbb{v}}_i \,\mathrm{d}t = m\mathbb{v}_i(t_1) - m\mathbb{v}_i(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}_i \,\mathrm{d}t \tag{5}$$

を得る。右辺の量を**力積**という。これは、力積によって運動量が増加することを表す。

N 質点系のとき、$i = 1...N$ について 式 5 の和をとると

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbb{v}_i(t_1) - \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbb{v}_i(t_0) = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}_i \,\mathrm{d}t \tag{6}$$

を得る。特に、外力の総和が 0 のとき、運動量が保存する。

3.2. 運動エネルギーと仕事

運動方程式と $\mathbb{v}(t)$ の内積をとると、合成関数の微分法から、

$$m\dot{\mathbb{v}} \cdot \mathbb{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\mathbb{v}^2\right) = \mathbb{F} \cdot \mathbb{v} \tag{7}$$

を得る。$K(t) \coloneqq \frac{1}{2}m\mathbb{v}(t)^2$ を**運動エネルギー**といい、$\mathbb{F} \cdot \mathbb{v}$ を**仕事率**という。この式を $t = t_0$ から $t = t_1$ まで積分すれば、

$$K(t_1) - K(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F} \cdot \mathbb{v} \,\mathrm{d}t \tag{8}$$

を得る。この式の右辺を**仕事**という。これは、仕事によって運動エネルギーが変化することを表している。

右辺の仕事を W_{12} とする。W_{12} について、積分変数を変換する。つまり、$\mathrm{d}\mathbb{r} = \mathbb{v}\,\mathrm{d}t$ と置き換えて、t ではなく $\mathbb{r}$ についての積分だと思って、$\mathbb{r}(t_0) = \mathbb{r}_0$、$\mathbb{r}(t_1) = \mathbb{r}_1$ と書くと、

$$W_{12} = \int_{\mathbb{r}_0}^{\mathbb{r}_1} \mathbb{F} \cdot \mathrm{d}\mathbb{r} \tag{9}$$

となる（図 6）。

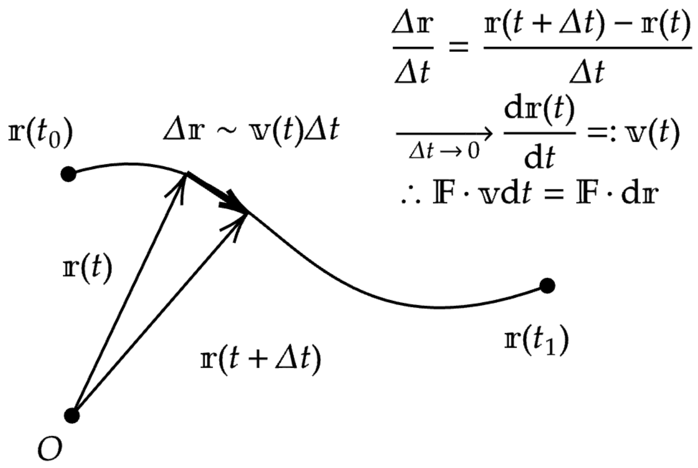

図 6: 仕事の図

(1) $W_{12} = 0$ のとき、$K(t_0) = K_0, K(t_1) = K_1$ と書くと 式 8 は

$$\begin{aligned} K_1 - K_0 &= 0 \\ \therefore K_0 &= K_1 \end{aligned} \tag{10}$$

となる。つまり物体に働く力が仕事をしないとき、運動エネルギーは保存する。

(2) $W_{12} \neq 0$ のとき：

仕事が経路に依存せず始点と終点だけで決まるとき、$\mathbb{F}$ は**保存力**という。つまり、関数 $V = -V(\mathbb{r}) = -V(\mathbb{r}(t))$ を用いて

$$W_{12} = \int_{\mathbb{r}_0}^{\mathbb{r}_1} \mathbb{F} \cdot \mathrm{d}\mathbb{r} = -(V(\mathbb{r}_1) - V(\mathbb{r}_0)) \tag{11}$$

と書けるとき、$V(\mathbb{r}_0) = V(t_0) = V_0, V(\mathbb{r}_1) = V(t_1) = V_1$ とすると、式 8 は

$$\begin{aligned} K_1 - K_0 &= -(V_1 - V_0) \\ \therefore K_0 + V_0 &= K_1 + V_1 \end{aligned} \tag{12}$$

となる。$V = -V(\mathbb{r})$ を**位置エネルギー**、$K + V$ を**力学的エネルギー**と呼ぶと、式 12 は一質点系の**力学的エネルギー保存則**を表す。(1) は (2) の特別な場合である。

N 質点系のとき、$i = 1...N$ について、式 8 の和をとると、

$$\sum_{i=1}^{N} K_i(t_1) - \sum_{i=1}^{N} K_i(t_0) = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbb{r}_i \tag{13}$$

力 $\mathbb{F}_i$ が全て保存力のとき、右辺の仕事は $-(V_i(t_1) - V_i(t_0))$ となる。したがって、

$$\sum_{i=1}^{N} (K_i(t_1) + V_i(t_1)) = \sum_{i=1}^{N} (K_i(t_0) + V_i(t_0)) \tag{14}$$

質点系に対しても力学的エネルギー保存則が成り立つ。

3.3. 角運動量とトルク

運動方程式の両辺に $\mathbb{r}$ を右から掛けると、

$$m\dot{\mathbb{v}} \times \mathbb{r} = \mathbb{F} \times \mathbb{r}(t) \tag{15}$$

を得る。左辺を**角運動量**、右辺を**トルク**という。

問題 3.3.1 (例題 17. 保存則): 図 7 のように、滑らかで水平な床の上に、長さ l, 質量 M の平たくて均質な板が置いてあり、その板の左端に質量 m の人が立っている。

(1) このとき、人と板との全体の重心は、板の左端からどれだけの距離のところにあるか。

(2) この人が板の上を歩いて、板に対して速さ v で、右の方向へ動くとき、板の速度の大きさと向きを答えよ。

(3) この人が板の上を、板から水平右向きに一定の力 f を受けて動くとする。動き始めてから時間が t だけ経過したとき、この人は板の上をどれだけ移動したか。ただし、このとき人は板の右端に達していないものとする。

(4) この人が板の上を、左端から右端まで静かに移動したとき、この人は床に対してどれだけ進んだことになるか。

(5) この板の上に静止している人が、質量 m' の球を、床に対する速さ u で水平方向に投げるには、どれだけのエネルギーを要するか。

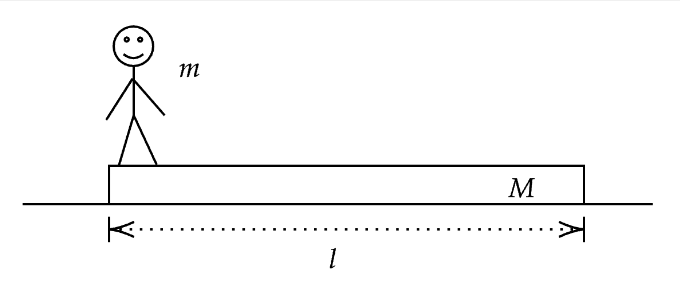

図 7: 板の上を歩く人の図

考え方 3.3.1:

(1) 重心の位置が知りたいので、座標系を設定しよう。板の右端を原点に取り、床に沿って x 軸をとろう。また、二つの物体の重心の x 座標 x_G は一般に

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \tag{16}$$

と書けるので、この式を使おう。

(2) x 軸方向には外力が働かないので、運動量が保存することを使おう。

(3) 力を受けて運動する物体に対しては、運動方程式を立てよう。

(4) どのように移動したのかがわからないので、等加速度運動の公式は使えない！このときは重心速度が一定になることを使おう。初め重心が静止していたら、その後も重心の位置は変わらない。

(5) エネルギーを計算しよう。

解答:

(1) 板の左端を原点に取り、床に沿って x 軸をとる（図 8)。重心の座標 x_G は定義より

$$x_G = \frac{M \cdot \frac{l}{2} + m \cdot 0}{M + m} = \frac{Ml}{2(M + m)} \tag{17}$$

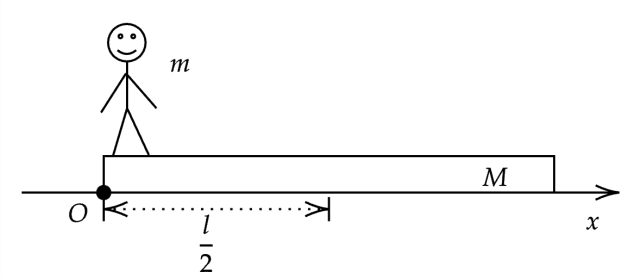

図 8: 板の上を歩く人の図

(2) x 軸方向には外力が働かないので、運動量の総和が保存する。床に対する板の速度を V とすると、

$$0 = m(v + V) + MV = mv + (M + m)V$$
$$\therefore V = -\frac{m}{M + m}v \tag{18}$$

よって、床に対する板の速さは $\frac{m}{M+m}v$ で、左向き。

(3) 人の重心と板の重心の座標をそれぞれ $x_{人}, x_{板}$ とする。板は f の反作用を受けるので、人と板の運動方程式はそれぞれ

- 人：$m\ddot{x}_{人} = f$
- 板：$M\ddot{x}_{板} = -f$

これを積分して

$$\frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{f}{M}\right)t^2 = \frac{(M+m)ft^2}{2Mm} \tag{19}$$

(4) 人が床に対して移動した距離を X とすると、板の重心の座標は $X - \frac{l}{2}$、人の重心の座標は X となる（図 9）。したがって、全体の重心位置は $x_{G'} = \frac{M(X-\frac{l}{2})+mX}{M+m} = \frac{2(M+m)X-Ml}{2(M+m)}$。系には内力しか働かないので、重心の位置が変わらない。よって $x_G = x_{G'}$、つまり $X = \frac{M}{M+m}l$。

(5) 球を投げた後、人と板は共に動くので、その共通の速度を w とすると、運動量保存則より

$$\begin{aligned} 0 &= Mw + mw + m'u \\ \therefore w &= -\frac{m'}{M+m}u \end{aligned} \tag{20}$$

このときのエネルギーの総和を E とすると、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(M+m)w^2 + \frac{1}{2}m'u^2 \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m'}{M+m}u\right)^2 + \frac{1}{2}m'u^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m'}{M+m}\right)m'u^2 \end{aligned} \tag{21}$$

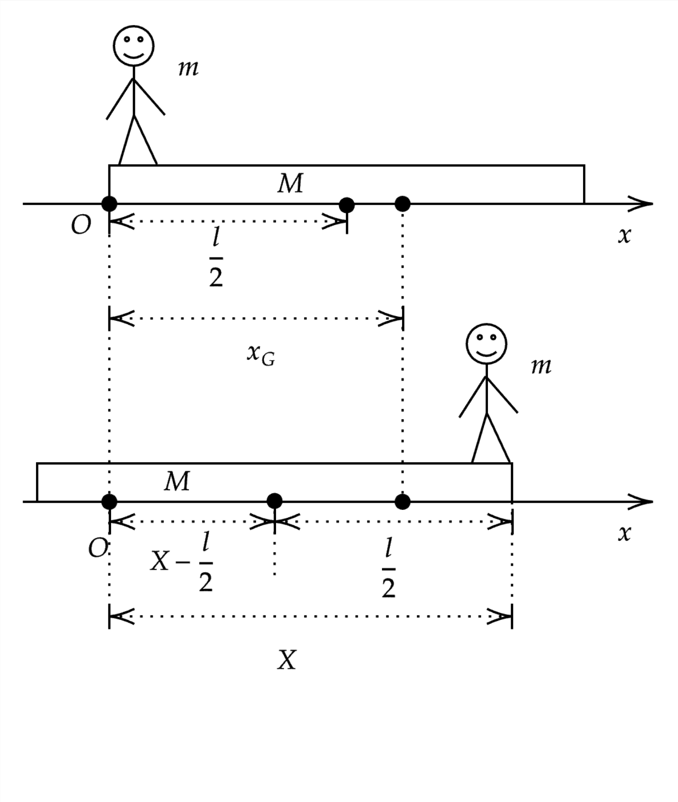

図 9: 板の上を歩く人の図

□

問題 3.3.2 (例題 19. 衝突): 図 10 のように、滑らかで水平な床の上に蓋のない直方体の箱があり、この箱と同じ質量 m を持つ質点が箱の中の底板の中央に置いてある。質点の直下の床面に原点を取り、箱の一つの側面に垂直に x 軸をとる。また、この側面の内側から反対側の側面の内側までの距離を l とする。この一対の側面はともに x 軸に垂直である。質点と箱の底板との間に摩擦はなく、質点と側面との間の跳ね返りの係数（反発係数）を e $(0 < e < 1)$ とする。以下の設問に答えよ。

(1) 質点を初速 v で x 軸の正の向きに運動させる。箱の側面に質点が衝突した後、質点の床に対する速さはいくらになるか。ただし、衝突の際に箱の底は床から離れないものとする。

(2) 次に質点が反対側の側面に衝突するとき、箱の中央の x 座標はいくらか。

(3) 設問(2)の衝突後、箱の床に対する速度はどうなるか。

(4) このように質点が箱の中で衝突を繰り返している間に、箱の床に対する速度は時間に対してどう変わるか。大体の様子を 3 回衝突が起こるまでについてグラフに示せ。

(5) 時間が十分に経過したのち、箱の速さはどうなるか。また、それまでに衝突によって失われる運動エネルギーは全部でいくらになるか。

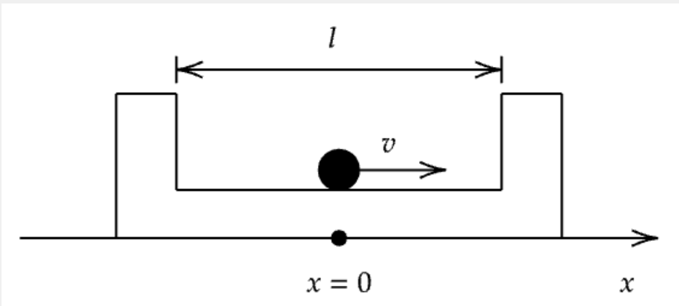

図 10: 箱の中の質点の図

考え方 3.3.2: 衝突の問題は運動量保存則とエネルギー保存則を使う。反発係数があればそれも使う。

(1) 衝突の前後での速度を訊かれているので、運動量保存則と反発係数を使おう。
(2) (1) で速度を求めたので、移動距離を計算できる。
(3) (2) の衝突前後での速度を考えるので、運動量保存則を使おう。
(4) 速さと時間のグラフを描く。衝突の間は等速度運動するので、v-t グラフは x 軸に平行な直線を繋ぎ合わせたものになる。
(5) 数学が好きなら数列の極限を考える。物理が好きなら終端速度を u などと置いて運動量保存則を考えよう。

解答:

(1) 衝突後の床に対する質点と箱の速度を v_1, V_1 とする。床から見た速度に対する運動量保存則は

$$
\begin{aligned}
mv &= mv_1 + mV_1 \\
\therefore v_1 + V_1 &= v \qquad (22)
\end{aligned}
$$

反発係数は

$$
\begin{aligned}
e &= -\frac{v_1 - V_1}{v} \\
\therefore v_1 - V_1 &= -ev \qquad (23)
\end{aligned}
$$

式 22 + 式 23 ÷ 2 より $\boldsymbol{v_1 = \frac{1-e}{2}v}$。

(2) また、1 回目の衝突後、床に対する箱の速度は $V_1 = \frac{1+e}{2}v$ となる。よってこのときの箱に対する質点の相対速度は $v_1 - V_1 = -ev$ となる。さらにこのとき質点は $\left|\frac{l}{v_1 - V_1}\right| = \frac{l}{ev}$ 秒で反対側の側面に移動するから、床に対する箱の移動距離、すなわち箱の x 座標は

$$
V_1 \cdot \frac{l}{ev} = \frac{1+e}{2}v \cdot \frac{l}{ev} = \boldsymbol{\frac{1+e}{2e}l} \qquad (24)
$$

(3) 2 回目の衝突前後での運動量保存則は 式 22 より

$$
\begin{aligned}
mv_1 + mV_1 &= mv_2 + mV_2 \\
\therefore v_2 + V_2 &= v_1 + V_1 \\
\therefore v_2 + V_2 &= v \qquad (25)
\end{aligned}
$$

反発係数は 式 23 より

$$e = -\frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} = -\frac{v_2 - V_2}{-ev}$$
$$\therefore v_2 - V_2 = e^2 v \tag{26}$$

式 25 – 式 26 ÷ 2 より

$$V_2 = \boldsymbol{\frac{1-e^2}{2}v} \tag{27}$$

また、$v_2 = \frac{1+e^2}{2}v$

(4) 2 回目の衝突後の運動量保存則と反発係数の式はそれぞれ (1)–(3) の計算より

$$mv_2 + mV_2 = mv_3 + mV_3$$
$$\therefore v_3 + V_3 = v \tag{28}$$

$$e = -\frac{v_3 - V_3}{v_2 - V_2} = -\frac{v_3 - V_3}{e^2 v}$$
$$\therefore v_3 - V_3 = -e^3 v \tag{29}$$

となる。よって、

$$V_3 = \frac{1+e^3}{2}v \tag{30}$$

また、2 回目と 3 回目の衝突の時間間隔は $\left| \frac{l}{v_2 - V_2} \right| = \frac{l}{e^2 v}$。1 回目の衝突が起こるまでの時間は $\frac{l}{2v}$。箱の床に対する速度を V として以上まとめると

$$\left(0 \leq t < \frac{l}{2v}\right)\frac{1+e}{2}v \quad \left(\frac{l}{2v} \leq t < \frac{l}{2} + \frac{l}{ev}\right)\frac{1-e^2}{2}v \quad \left(\frac{l}{2v} + \frac{l}{ev} \leq t < \frac{l}{2v} + \frac{l}{ev} + \frac{l}{e^2 v}\right)\frac{1+e^3}{2}v \quad \left(\frac{l}{2v} + \frac{l}{ev} + \frac{l}{e^2 v} \leq t < \frac{l}{2v} + \frac{l}{ev} + \right. \tag{31}$$

となる。$0 < e < 1$ より $V_1 > V_3 > V_2$ であることに注意してグラフを描くと図 11 のようになる。

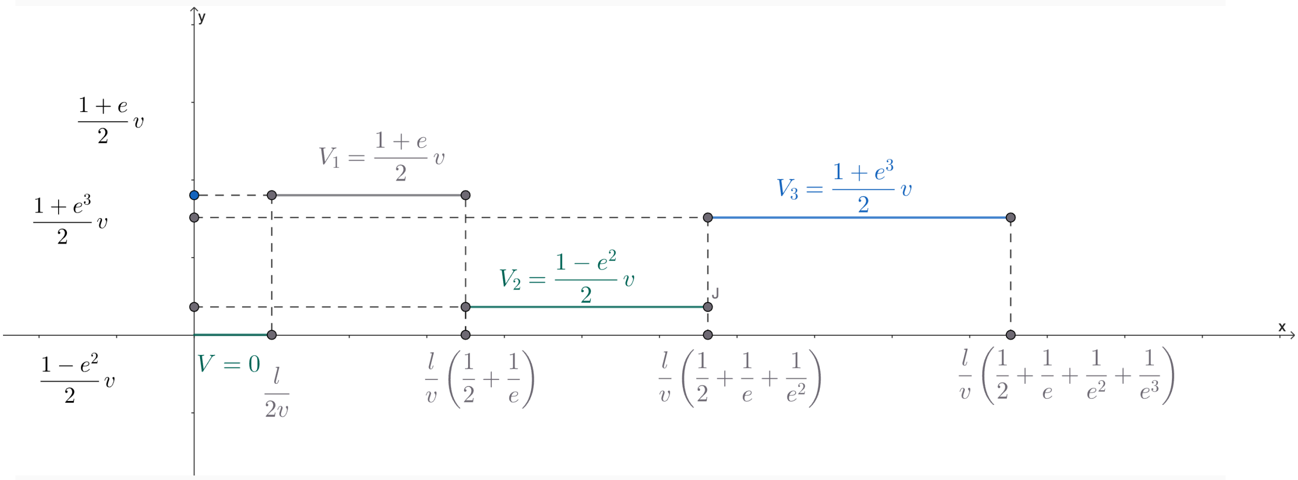

図 11: 箱の中の質点の速さの変化

(5) 箱と質点が衝突を繰り返すたびにエネルギーが失われていくので、最終的に箱から見た質点の速度は 0 になる。つまり、**箱と質点は床からみると同じ速度で移動する**。このときの速度を $v_{\rm final}$ とすると、運動量保存則より、

$$mv = 2mv_{\rm final}$$
$$\therefore v_{\rm final} = \frac{1}{2}v \tag{32}$$

失われたエネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(2m)v_{\rm final}^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}mv^2} \tag{33}$$

□