電磁気学

この文書の読み方

電磁気学のノートです。

目次

1. 物理量

定義 1.1

- 電荷 $Q \in \mathbb{R}$
- 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t) := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$: 微小体積 $\mathrm{d}V$ での電荷 $\mathrm{d}Q$
- 電流 $I := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$: 微小時間 $\mathrm{d}t$ にある断面を貫く電荷 $\mathrm{d}Q$
- 電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) := \rho(\boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$

♣

例

微小時間 $\mathrm{d}t$ で微小断面積 $\mathrm{d}S$ の円柱を底面に垂直に $\mathrm{d}Q$ の電荷が通過するとき、微小断面 $\mathrm{d}S$ を通過する電流 $\mathrm{d}I$ は $|\boldsymbol{v}| = v$, $|\boldsymbol{j}| = j$ とすると

$$\mathrm{d}Q = \rho \,\mathrm{d}S v \,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \rho \,\mathrm{d}S v = j \,\mathrm{d}S \tag{1}$$

また、この j を使うと $\mathrm{d}Q = j \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t$

法則 1.2 (ローレンツ力)

空間の各点に電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が定義され、点電荷 $q \in \mathbb{R}$ が速度 $\boldsymbol{v}$ で動くときに電荷が電磁場から受ける力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)) \tag{2}$$

となる。この力をローレンツ力という。

♡

定義 1.3 (流束)

ベクトル場 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r},t)$ が境界を持つ曲面 S を貫くとき、流束を以下のように定める：

$$\int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{h} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3}$$

♣

境界を持つ曲面を微小な面積要素 $\mathrm{d}S$ に分けて、面積要素に垂直なベクトル場の成分 $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ は面積要素 $\mathrm{d}S$ の単位法線ベクトル) と面積要素 $\mathrm{d}S$ の積 $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ を境界を持つ曲面全体にわたって足し合わせている。

定義 1.4 (循環)

ベクトル場 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r},t)$ と閉曲線 C に対し、循環を以下のように定める：

$$\oint_C \boldsymbol{h} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4}$$

♣

閉曲線を微小な線分ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ に分割し、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ に沿ったベクトル場の成分 $\boldsymbol{h} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を閉曲線一周にわたって足し合わせている。

例

- 電流密度 $\boldsymbol{j}$ の流束が電流 $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
  - 電流が断面 S を垂直に貫くとき、$I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_S |\boldsymbol{j}||\boldsymbol{n}| \cos 90° \,\mathrm{d}S = jS$
- 電場 $\boldsymbol{E}$ の流束は $\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
- 磁場 $\boldsymbol{E}$ の流束(磁束)は $\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
  - 一様な磁場が平面 S を垂直に貫くとき、$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = BS$

2. マクスウェル方程式

法則 2.1 (電場に関するガウスの法則(積分型))

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{5}$$

♡

注意

$$\text{閉曲面 } S \text{ を貫く電場 } \boldsymbol{E} \text{ の流束} = \frac{\text{閉曲面 } S \text{ 内の総電荷 } Q}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

という形の式で、$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C\,V^{-1}\,m^{-1}}$ は真空の誘電率という。

法則 2.2 (クーロンの法則)

点電荷 q を原点として位置 $\boldsymbol{r}$ の位置にできる電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \tag{7}$$

証明. 原点を中心とする半径が r の球に対して、電場は原点を中心とした球対称性を持つので、電場は半径方向の成分 E だけを持ち、接線成分は 0。したがって 法則 2.1 を適用すると電場の大きさについて

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{8}$$

また、$\boldsymbol{r}$ 方向なので、

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{9}$$

□

法則 2.3 (クーロン力)

2 つの点電荷 q_1, q_2 があるとき、q_i が受ける力 $\boldsymbol{F}_i$ は q_j の位置を原点とし q_i の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とすると、

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}_i}{r^2} \tag{10}$$

証明. 法則 2.2 に 法則 1.2 を適用すればよい。 □

法則 2.4 (電場に関するガウスの法則(微分型))

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{11}$$

証明. 法則 2.1 にガウスの定理 定理 5.4.8 を適用すると

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, \mathrm{d}V \tag{12}$$

で、これが任意の体積領域 V で成り立つので、

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{13}$$

でなければならない。 □

法則 2.5 (磁場に関するガウスの法則(積分型))

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{14}$$

注意

任意の閉曲面に対して磁場の湧き出しも吸い込みもない、つまり磁荷が存在しないことを主張している。

法則 2.6 (磁場に関するガウスの法則(微分型))

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{15}$$

証明. 法則 2.5 にガウスの定理 定理 5.4.8 を適用すると

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{16}$$

で、これがあらゆる体積領域について成り立つので、

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{17}$$

でなければならない。 □

法則 2.7 (ファラデーの法則(積分型))

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{18}$$

注意

境界 C を持つ任意の曲面 S を貫く磁場 $\boldsymbol{B}$ の流束の時間変化によって閉曲線 C の周りの電場 $\boldsymbol{E}$ の循環が生まれる。左辺は単位電荷が電場から力を受けて閉曲線 C に沿って動くときになされる仕事で、誘導機電力と呼ぶ。

法則 2.8 (ファラデーの法則(微分型))

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{19}$$

証明. 曲面 S が時間変化しない場合、時間微分を積分の中に入れてよいので、 法則 2.7 にストークスの定理 定理 5.4.9 を適用すると

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{20}$$

これが任意の曲面 S で成り立つので、

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{21}$$

でなくてはならない。 □

法則 2.9 (アンペール・マクスウェルの法則(積分型))

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{22}$$

注意

電流と電場の流速の時間変化によってその周りに磁場が発生する。

例

直線状に一定の電流 I が流れているとき、電流から r 離れたところの磁場は、対称性から円周上のどこでも同じ B になっているので、

$$\begin{aligned} 2\pi r B &= \mu_0 I \\ \therefore B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned} \tag{23}$$

で、円周に沿った向き(円周に垂直な成分は磁場のガウスの法則から 0 になる)。

法則 2.10 (アンペール・マクスウェルの法則(微分型))

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{24}$$

証明. 曲面 S が時間変化しない場合、時間微分を積分の中に入れてよいので、 法則 2.9 にストークスの定理 定理 5.4.9 を適用すると

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(\mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{25}$$

これが任意の曲面 S で成り立つので、

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{26}$$

でなくてはならない。 □

法則 2.11 (重ね合わせの原理)

$\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{B}_i$ $(i\in\mathbb{N})$ がマクスウェル方程式の解のとき、その和 $\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{E}_i, \sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{B}_i$ もマクスウェル方程式の解である。

♡

2.1. 電磁ポテンシャル

定義 2.1.1 (電磁ポテンシャル)

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{27}$$

となる任意の関数 $\boldsymbol{A}$ を **ベクトル・ポテンシャル**という。

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \tag{28}$$

となる任意の関数 ϕ を**スカラー・ポテンシャル**という。

♣

このようにおくと、ベクトル解析の公式から、マクスウェル方程式のうち磁場に関するクーロンの法則とファラデーの誘導法則に関する式は自動的に満たされる：

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = -\nabla\times(\nabla\phi) = 0\end{gathered} \tag{29}$$

2.2. 電荷保存則

法則 2.2.1 (電荷保存則)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{30}$$

♡

証明. アンペール・マクスウェルの法則 法則 2.10 の両辺の $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ をとるとベクトル解析の公式 命題 5.4.5 と 法則 2.4 (電場に関するガウスの法則) より

$$
\begin{aligned}
0 &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \\
&= \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \\
&= \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \\
&= \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \mu_0 \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \qquad (31)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (32)
$$

□

注意

これは、電荷密度が時間変化するためには電流密度の湧き出しまたは吸い込みが生じることを意味する。

　積分形になおすと、

$$
\begin{aligned}
\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \, \mathrm{d}V &= \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \mathrm{d}V &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho \, \mathrm{d}V \qquad (33)
\end{aligned}
$$

第一式は領域 V から外に出ていく電流 I で、右辺は V 内の全電荷 Q の時間変化だから、

$$
I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad (34)
$$

これは、閉曲面から電流が流れ出ると内部の電荷が減少することを意味している。

3. 静電気

時間変化がない場合の電磁気学を静電気学という。静電気学では、マクスウェル方程式とクーロンの法則＋重ね合わせの原理が等価である。前節でマクスウェル方程式からクーロンの法則と重ね合わせの原理を示したので、ここでは逆にクーロンの法則と重ね合わせの原理からマクスウェル方程式が導かれることを示す。

法則 3.1 (クーロン電場と点電荷に対するガウスの法則)

位置 $\boldsymbol{r}_q$ にある電荷 q が位置 $\boldsymbol{r}$ に及ぼす電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q\right|^3} \tag{35}$$

と書けるとき、法則 2.1 が成り立つ。♡

証明. • □

法則 3.2 (クーロン電場と点電荷に対するファラデーの法則)

クーロン電場があるとき、ファラデーの法則が成り立つ。♡

証明. ∘ □

法則 3.3 (重ね合わせの原理)

重ね合わせの原理が成り立つとき、複数の電荷があっても変わらず 法則 2.1 と法則 2.7 が成り立つ。♡

証明. ⬩ □

法則 3.4 (静電気学でのマクスウェル方程式)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(電場のガウスの法則)} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 && \text{(磁場のガウスの法則)} \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= 0 && \text{(ファラデーの法則)} \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= -\mu_0\boldsymbol{j} && \text{(アンペールの法則)} \end{aligned} \tag{36}$$

♡

定義 3.5 (静電ポテンシャル)

クーロン電場 $\boldsymbol{E}$ に対し、

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi \tag{37}$$

となるスカラー場 φ を**静電ポテンシャル**または**電位**という。♣

注意

φ が静電ポテンシャルのとき、$\varphi + c$ (c は定数) も静電ポテンシャルになる。

• 立体角を使って微小な箱型の図形を考えてそこから出ていく電場の流束を考えればOK。そのうち書く。

∘ クーロン力が保存力なのでその線積分が経路によらないことを示す。これもいつかきっと書く。

⬩ 点電荷の場合は書いた。複数電荷とその電荷たちの作るクーロン電場を考えればOK。

法則 3.6 (静電ポテンシャルの存在)

クーロン電場に対して静電ポテンシャルが存在する。

証明. 法則 3.4 の $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ と 定理 5.4.10 よりわかる。 □

注意

位置 $\boldsymbol{r}_a$ と $\boldsymbol{r}_b$ を結ぶ任意の曲線上の線積分は

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}_b) - \varphi(\boldsymbol{r}_a) &= \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= -\int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{38}$$

よって、基準点 $\boldsymbol{r}_0 := \boldsymbol{r}_a$ として、$\varphi(\boldsymbol{r}_0) = 0$ となるように任意定数を選べば、φ は終点 $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{r}_b$ の関数

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{39}$$

を得る。つまりクーロン電場が与えられると静電ポテンシャルが計算できる。

これに電荷 q をかけると、

$$q\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} (-q\boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{40}$$

となるが、これは $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ まで電場に逆らって q を動かす仕事なので、これは位置エネルギーを表す。よって

$$U(\boldsymbol{r}) = q\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{41}$$

を**静電ポテンシャルエネルギー**と呼ぶ。

法則 3.7 (ポアソン方程式)

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{42}$$

証明. 法則 3.4 の電場のガウスの法則に $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ を適用して

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi = \nabla^2\varphi \tag{43}$$

□

注意

マクスウェル方程式から静電ポテンシャルとポアソン方程式を導いたが、逆に静電ポテンシャルとポアソン方程式からマクスウェル方程式を導くことができる。

実際、命題 5.4.7 より

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \times (-\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{0} \tag{44}$$

であり、$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ に $\boldsymbol{\nabla} \cdot$ を作用させて

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{45}$$

4. 具体例

4.1. 点電荷

ノート全体をまとめ直して点電荷の具体例はここに書きたいかも。

4.2. 線電荷

例：線電荷

1. **電場 (直接計算)**

   無限に長い直線上に単位長あたり λ の電荷が分布するときに、この線電荷が距離 r の点 P につくる電場を求めると、

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda r}{(r^2\tan^2\theta + r^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{r}{\cos^2\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned} \tag{46}$$

   そのうち作図したい。

2. **電場 (対称性)**

   線密度 λ の一様な線電荷を考える。半径 r で長さ L の円筒状の閉曲面 S について、対称性からこの円筒から出ていく電場の流束は底面で 0、側面ではどこでも等しく大きさが E_r とする。S に対して 法則 2.1 (ガウスの法則) を適用すると

$$
\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 2\pi r L E_r \\
\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, \mathrm{d}V &= \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

これらが等しいので

$$
\begin{aligned}
2\pi r L E_r &= \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \\
\therefore E_r &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}
\end{aligned}
\tag{48}
$$

3. **静電ポテンシャル**

   位置 $\boldsymbol{r}_0$ を基準としたときのポテンシャル $\boldsymbol{r}$ は、電場が線電荷に対して垂直なので再び対称性を用いて

   ちゃんと議論した方がいいと思う。

$$
\begin{aligned}
\varphi(r) &= -\int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \, \mathrm{d}r \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)
\end{aligned}
\tag{49}
$$

4.3. 面電荷

例：面電荷

1. **電場** $x = 0$ の平面状の一様な電荷面密度 σ の作る電場は対称性から x 成分だけを持ち、面の両側で反対方向を向く。

   この平面を横切る断面 S の柱状の閉曲面を考えると、法則 2.1 (ガウスの法則)　より面電荷の作る電場の大きさは

$$
\begin{aligned}
2SE &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \\
\therefore E &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

   で、向きは x 軸方向で面から遠ざかる向き。

2. **静電ポテンシャル**

   $x = 0$ を基準とすると電磁ポテンシャルは

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= -\int_0^x \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x & x \geq 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x & x < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{51}
$$

4.4. 平行板コンデンサー

例：平行板コンデンサー

$x = 0$ に面密度 σ, $x = d$ に面密度 $-\sigma$ の平行板が配置しているとする。

1. **電場**

   平行板の外側では電場が内消しあって 0。

   平行板の間では電場が強め合って

$$
E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times 2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{52}
$$

2. **静電ポテンシャル**

   $x = 0$ を基準にしたときの静電ポテンシャルは

$$
\varphi(x) = \{ \tag{53}
$$

以下に出てくる関数は必要な回数微分ができるものとする。

5. ベクトル解析

5.1. 3 次元ベクトルの外積

命題 5.1.1 (外積の分配法則)

外積について分配法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ が成り立つ

♠

証明. 図 1 から、外積について分配法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ が成り立つ：

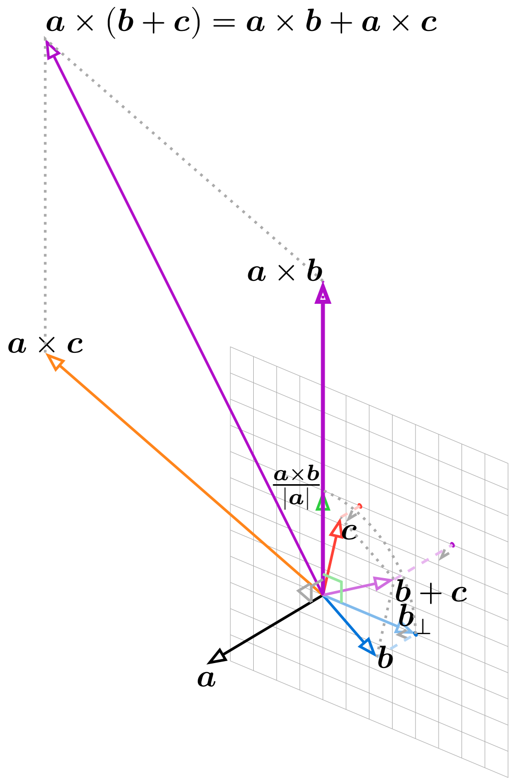

図 1: 外積の分配法則の幾何学的解釈

□

定義 5.1.2 (自然基底)

$\mathbb{R}^3$ における単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

を自然基底という。

♣

自然基底同士は互いに直交する単位ベクトルなので、以下の等式が成り立つ：

命題 5.1.3 (自然基底の外積)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y &= \boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_x, \\
\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x &= \boldsymbol{e}_y, \\
\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x &= -\boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y &= -\boldsymbol{e}_x, \\
\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z &= -\boldsymbol{e}_y, \\
\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y &= \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0,
\end{aligned} \tag{55}$$

♠

命題 5.1.4 (外積の成分計算)

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{56}$$

♠

証明. 自然基底を使うと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{b} &= b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y + b_z \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{57}$$

とおけるので、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は自然基底の外積と分配法則より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \left(a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z\right) \times \left(b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y + b_z \boldsymbol{e}_z\right) \\ &= \left(a_y b_z - a_z b_y\right) \boldsymbol{e}_x + \left(a_z b_x - a_x b_z\right) \boldsymbol{e}_y + \left(a_x b_y - a_y b_x\right) \boldsymbol{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{58}$$

□

5.2. ベクトル解析の略記

5.2.1. アインシュタインの縮約記法

ベクトル解析の計算では和の記号 $\sum_{i=1}^{n}$ が頻繁に出てくるので、同じ添字が 2 回出てきたらその添字について 1 から n までの和をとることにする。この省略記法をアインシュタインの縮約記法という。

例. $n = 3$ (3 次元)のとき、

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_i B_i \quad \text{(内積)} \tag{59}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \partial_i A_i \quad \text{(発散)} \tag{60}$$

5.2.2. クロネッカーのデルタ

定義 5.2.1 (クロネッカーのデルタ)

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{61}$$

をクロネッカーのデルタという。

♣

5.2.3. エディントンのイプシロン

定義 5.2.2 (エディントンのイプシロン)

以下のように定められる記号 ε_{ijk} ($i, j, k \in \{x, y, z\}$) をエディントンのイプシロン（あるいはレヴィ＝チヴィタ記号）という：

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (x,y,z) \text{ or } (y,z,x) \text{ or } (z,x,y) \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (z,y,x) \text{ or } (x,z,y) \text{ or } (y,x,z) \\ 0 & \text{if } i=j \text{ or } j=k \text{ or } k=i \end{cases} \tag{62}$$

♣

明示的に書くとこう：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} &= 1 \quad (x, y, z \text{ の並びを変えない}) \\ \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} &= -1 \quad (x, y, z \text{ の隣り合う一文字を入れ替える}) \\ \text{otherwise} &= 0 \quad (\varepsilon_{xxy} \text{ など添え字に重複がある}) \end{aligned} \tag{63}$$

命題 5.2.3 (イプシロンと外積)

$i, j, k \in \{x, y, z\}$ とすると

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{64}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k \tag{65}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \tag{66}$$

♠

証明. エディントンのイプシロンとアインシュタインの縮約記法を用いると、式 55 は

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{67}$$

であり、ベクトル $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$ の外積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_i\boldsymbol{e}_i) \times (b_j\boldsymbol{e}_j) \\ &= a_i b_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \\ &= \varepsilon_{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k \end{aligned} \tag{68}$$

よって $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の第 k 成分 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k$ は

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \tag{69}$$

□

命題 5.2.4 (ε-δ の公式)

アインシュタインの規約を使うと、δ_{ij} と ε_{ijk} の間には以下の関係式が成り立つ：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{70}$$

♠

証明. 左辺は k についての和であり、i, j, k が全て異なり、かつ k, l, m が全て異なる場合にのみ項が 0 にならずに残る。

i, j を決めれば k が決まり、k は l, m と異なる。つまり、$\{i, j\} = \{l, m\}$ となっている必要がある。

1. $i = l$ かつ $j = m$ の場合。

左辺は $(\varepsilon_{ijk})^2 = 1$ で、右辺は $\delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{ji} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ となり両辺は一致する。

2. $i = m$ かつ $j = l$ の場合。

左辺はイプシロンの反対称性から $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -(\varepsilon_{ijk})^2 = -1$ で、右辺は $\delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$ となり両辺は一致する。

3. それ以外の場合。

左辺は 0 で、右辺も 0。

したがって、いずれの場合も両辺は一致する。 □

5.3. ベクトル解析における種々の定義

定義 5.3.1 (スカラー場、ベクトル場、ナブラ)

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を**スカラー場**という。
- $A_x, A_y, A_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とすると、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を**ベクトル場**という。
- $\nabla_x := \frac{\partial}{\partial x}$ のように書くことにする。

$$\nabla := \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{pmatrix} \tag{71}$$

と書いて、ナブラと読む。

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &:= \nabla\varphi = \begin{pmatrix} \nabla_x\varphi \\ \nabla_y\varphi \\ \nabla_z\varphi \end{pmatrix} \quad \text{(スカラー場の勾配)} \\ \text{div } \boldsymbol{A} &:= \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z \quad \text{(ベクトル場の発散)} \\ \text{rot } \boldsymbol{A} &:= \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \nabla_y A_z - \nabla_z A_y \\ \nabla_z A_x - \nabla_x A_z \\ \nabla_x A_y - \nabla_y A_x \end{pmatrix} \quad \text{(ベクトル場の回転)} \end{aligned} \tag{72}$$

$$\Delta := \nabla^2 := \nabla \cdot \nabla = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 \quad \text{(ラプラシアン)} \tag{73}$$

♣

5.4. ベクトル解析の公式

定義 5.4.1 (等位集合)

スカラー場 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して以下のように定義した集合を**等位面**という：

$$S = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \ \texttt{mid} \ \varphi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{74}$$

♣

命題 5.4.2 (等位面と勾配の直交性)

等位面は $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ と直交する。

♠

証明.

$$S = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{75}$$

の点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) S$ に対して以下が成り立つ：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = c \tag{76}$$

この式の両辺を t で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\boldsymbol{r}(t)) = \boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0 \tag{77}$$

これは $\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}))$ と $\boldsymbol{r}'(t)$ が直交することを意味する。

□

命題 5.4.3 (スカラー三重積)

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{78}$$

♠

証明. アインシュタインの規約とエディントンのイプシロンを使うと

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{79}$$

□

命題 5.4.4 (ベクトル三重積)

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{80}$$

♠

証明.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))_i &= \varepsilon_{jki} a_j (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_k \\
&= \varepsilon_{jki} a_j \varepsilon_{lmk} b_l c_m \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
&= \big(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\big) a_j b_l c_m \\
&= \delta_{il}\delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im}\delta_{jl} a_j b_l c_m \\
&= a_j b_i c_j - a_j b_j c_i \\
&= b_i \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - c_i (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})
\end{aligned} \tag{81}$$

他の成分についても同じように計算できるので、

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{82}$$

□

命題 5.4.5 (回転の発散)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{83}$$

♠

証明. 偏微分は可換だがイプシロンは反対称であることに気をつける。また、和の順序は自由なのでダミー変数を途中で入れ替えてよい。アインシュタインの規約を使って計算すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}_i(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_i \\
&= \boldsymbol{\nabla}_i\varepsilon_{jki}\boldsymbol{\nabla}_j A_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k \\
&= \varepsilon_{jik}\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{\nabla}_i A_k \\
&= -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k
\end{aligned} \tag{84}
$$

$\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k = -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k$ なので $\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k = 0$ 。

□

命題 5.4.6 (回転の回転)

$$
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{85}
$$

♠

証明. ベクトル三重積の公式において $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\nabla$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}$ と置き換えると、

$$
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{86}
$$

となる。 □

命題 5.4.7 (勾配の回転)

$$
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0 \tag{87}
$$

♠

証明. 命題 5.4.5 の証明と同じようにダミー変数の入れ替えと偏微分の可換性、イプシロンの反対称性を用いて

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi))_k &= \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi) \\
&= \varepsilon_{jik}\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{\nabla}_i\varphi \\
&= -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j\varphi
\end{aligned} \tag{88}
$$

$\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi) = -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi)$ なので $\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi) = 0$。したがって $(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi))_k = 0$。 □

定理 5.4.8 (ガウスの定理)

$$
\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{89}
$$

♡

証明.

Prove it later.

□

定理 5.4.9 (ストークスの定理)

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{90}$$

♡

証明.

Prove it soon.

□

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ のとき、 命題 5.4.7 $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0$ より $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ となる。この逆が成り立つ。つまり $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ のとき $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ となるスカラー場 φ が存在する。

定理 5.4.10 (ポテンシャルの存在条件)

領域が単連結のとき（穴とか空いてないとき）ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の条件は同値：

- $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ となるスカラー場 φ が存在する
- 領域内の任意の点で $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
- 領域内の任意の 2 点を結ぶ線積分が途中の経路によらない:

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{91}$$

- 領域内の任意の閉曲線 C について線積分が 0:

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{92}$$

♡

証明.

ストークスの定理を使って証明する。証明は略。

□