微分法まとめ

krollo966

目次

—この文書の読み方—

色付きのブロックの中に覚えておくべき公式が書いてあります：

Theorem 0.1 (なんかとてもすごい公式[1]):

$$x \times 0 = 0$$

そのあとに証明が書いてあり、証明の終わりには □ が書いてあります：

Proof:[2] （単位的）環 R の任意の元 x と加法の単位元 0 に対し、

$$0 = 0x + (-(0x)) = (0 + 0)x + (-(0x)) = 0x + 0x + (-(0x)) = 0x$$

□

節によっては何か定義が書いてあることもあります：

Definition 0.1 (定義の定義[3]): ある言葉の正確な意味や用法について、人々の間で共通認識を定めるよう行われる作業のことを**定義**という。

さらに、定義や公式の運用を練習するための問題が用意してあります：

問題 0.1: 問題とは何か述べよ。

解答は用意しますが、問題は NEW ACTION LEGEND という問題集から引用しているのでそれを確認してくれてもいいです。

それでは次の節から、数学 III で勉強する微分法の説明をします。

[1]Theorem は**定理**という意味です。真偽が判断できる文（**命題**）うち、真であるものを**定理**と呼びます。その意味で定理は無数にあります（ $1 = 1$ なども真である命題なので定理と言ってよい）が、数学の教科書ではその中でも特に使い勝手がよい定理を採り上げます。

[2]Proof は**証明**という意味です。

[3]Definition は**定義**という意味です。

1. 積の微分法

Theorem 1.1 (積の微分法):

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Proof:

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

□

2. 商の微分法

Theorem 2.1 (商の微分法):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

□

問題 2.1:
1. 次の関数を微分せよ

$$(1)\quad y=(2x^2+1)(x^2+x+1) \qquad (2)\quad y=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

$$(3)\quad y=\frac{2x}{x^2+1} \qquad (4)\quad y=\frac{x^2+3x-3}{x-1}$$

2. 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ が微分可能であるとき、次を示せ。

$$\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

解答 2.1.1:
1. 途中式は省略する。

$$(1)\quad y'=8x^3+6x^2+6x+1 \qquad (2)\quad y'=-\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$(3)\quad y'=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \qquad (4)\quad y'=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

2. $(f(x)g(x))'h(x)+(f(x)g(x))h'(x)$ として計算を続ければわかる。

3. 合成関数とその微分法

Definition 3.1 (合成関数の定義): 2つの関数 $y=f(X)$ と $X=g(x)$ があるとき、 $X=g(x)$ を $f(X)$ に代入すると新たな関数 $f(g(x))$ ができる。これを f と g の**合成関数**といい、 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ と書く。

Example: $y=(2x^3-5)^5$ は、関数 $y=f(X)=X^5$ に関数 $X=g(x)=2x^3-5$ を代入してできる合成関数。

Theorem 3.1 (合成関数の微分法):

$$(f(g(x))'=f'(g)g'(x)$$

Proof: $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ を微分する。 $\Delta g=g(x+\Delta x)-g(x)$ とおき $g=g(x)$ と書くと、 $\Delta x\to 0\Leftrightarrow \Delta g\to 0$ だから

$$
\begin{aligned}
(f(g(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= f'(g)g'(x)
\end{aligned}
$$

□

これは

1. $g = g(x)$ を変数だと思って $f(g)$ を微分して
2. 中身の g の微分をかける

という形になっている[4]。

問題 3.1: 次の関数を微分せよ。

$$(1)\quad y = (2x^3 - 5)^5 \qquad (2)\quad y = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^4 \qquad (3)\quad y = (3x-1)\sqrt{x^2+1}$$

解答 3.1.1:

$$(1)\quad y' = 30x^2(2x^3-5)^4 \qquad (2)\quad y' = -\frac{4x^3(x^2-1)}{(x^2+1)^5} \qquad (3)\quad y' = \frac{6x^2-x+3}{\sqrt{x^2+1}}$$

4. 三角関数の微分法

Theorem 4.1 (三角関数の微分法):

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

[4] この特別な例として $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$ を 取り扱ったことがある。 $f(x)^n$ は $y = X^n$ に $X = f(x)$ を代入した合成関数。

証明には以下の事実を用いる：

Lemma 4.2 (三角関数の極限公式): [5]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

まずはこの極限公式が成立することを確かめる。

Proof of $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

厳密な証明は少し面倒なのでグラフを描いて説明するに留めるが、図 1 を見たらわかると思う。 $x = 0$ の近傍では $\sin x \fallingdotseq x$ だから $\frac{\sin x}{x} \fallingdotseq 1$ 。よって $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

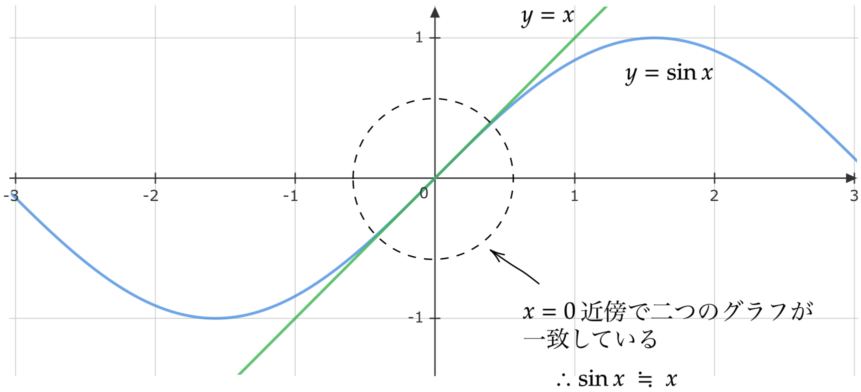

図 1: $x = 0$ 近傍で $y = x$ と $y = \sin x$ の一致している様子。

あるいは、単位円の円弧の長さと中心角は等しいので、中心角が 0 に近いところでは $\sin x = x$ となることもわかる（図 2）。

[5]Lemma とは**補題**という意味です。また、補題は定理と同じ意味ですが、ある特定の重要な定理を示すために必要な定理、という意図が含まれています。

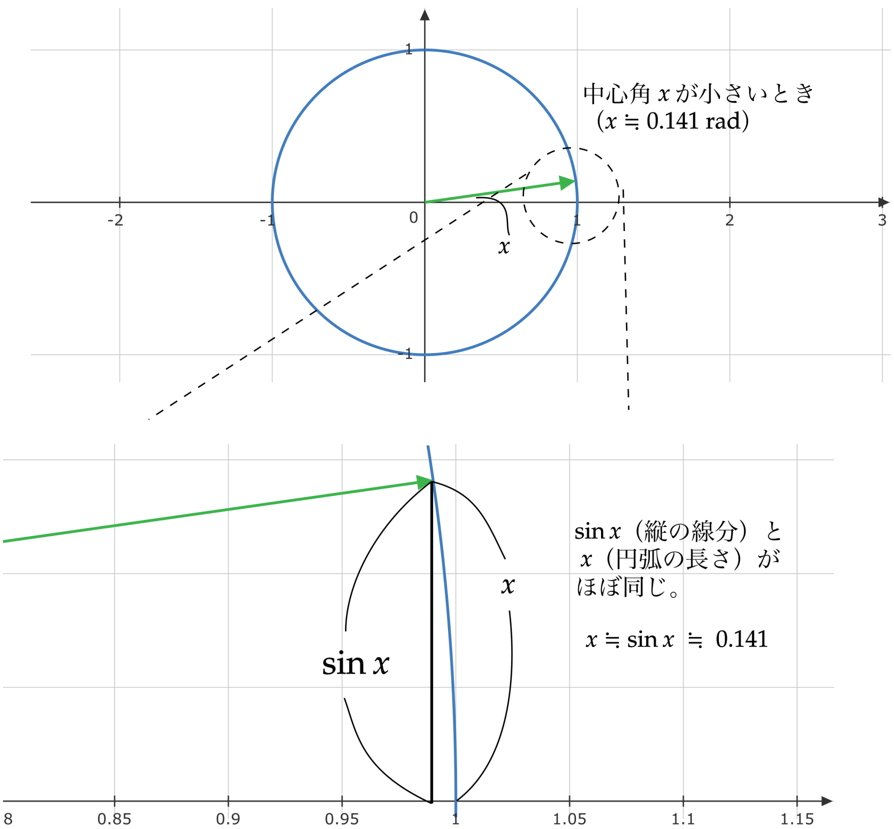

図 2: 単位円における x と $\sin x$ の様子。

□

Proof of $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$:

$$\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = \frac{(\cos \Delta x - 1)(\cos \Delta x + 1)}{\Delta x(\cos \Delta x + 1)} = \frac{\cos^2 \Delta x - 1}{\Delta x(\cos \Delta x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \frac{\sin \Delta x}{\cos \Delta x + 1} \to -1 \cdot 0 = 0 \quad (\Delta x \to 0)$$

つまり $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$ 。 □

Proof of $(\sin x)' = \cos x$: 定義に従って $\sin x$ を微分すると、上の二つの極限と加法定理を用いて

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

□

Proof of $(\cos x)' = -\sin x$: 合成関数の微分法を用いて

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

すなわち $(\cos x)' = -\sin x$ 。 □

4.1. $y = (\sin x)' = \cos x$ のグラフ

導関数 $(\sin x)'$ は、 $y=\sin x$ の傾きを表すグラフだから、 $y=\sin x$ のグラフの各点での傾きを調べてプロットすると、 $y=\cos x$ のグラフになることがわかる（図 3）。

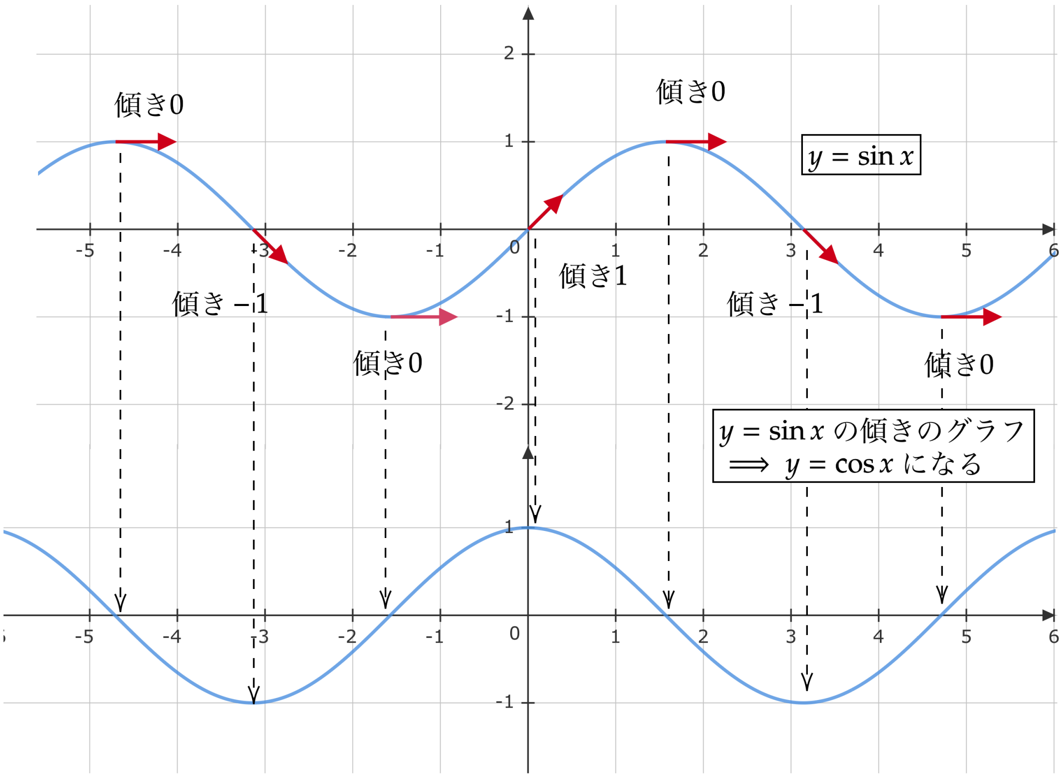

図 3: $y=\sin x$ のグラフの傾き（図中の矢印）のプロットが $y=\cos x$ のグラフになる様子。

問題 4.1.1:

1. 次の関数を微分せよ。

$$\begin{array}{llllll}
(1) & y=\tan x & (2) & y=\sin(3x+1) & (3) & y=\tan(\cos x) \\
(4) & y=\sin x\cos x & (5) & y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x} & (6) & y=\sin^2\dfrac{x}{2}
\end{array}$$

解答 4.1.1.1:

$$(1)\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (2)\quad y' = 3\cos(3x+1) \qquad (3)\quad y' = -\frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$$

$$(4)\quad y' = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad (5)\quad y' = \frac{1}{1+\cos x} \qquad (6)\quad y' = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

5. 対数関数の微分法

Theorem 5.1 (対数関数の微分法[6]):

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

特に

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

ここで log とネイピア数について復習しておく。

Definition 5.1 (ネイピア数):

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

をネイピア数（自然対数）という[7]。 e を底とした対数 $\log_e x$ は底を省略して単に $\log x$ と書く。

ネイピア数の定義を少し書き換えると以下の極限が成り立つ。

[6]高校の間では真数条件（$\log X$ の X には正の数だけを代入する）があるので、たとえば $y = \log X$ と $X = \tan x$ の合成関数を考えるときにそのまま代入して $y = \log(\tan x)$ としてはいけない（ $\tan x \leq 0$ になる x に対して真数条件を満たさない）。 $X = |\tan x|$ かつ $x \neq m\pi$ （ m は整数） であれば常に $X > 0$ を満たすので、合成関数 $y = \log|\tan x|$ を考えてよい。要するに、関数を合成する際に正の値を代入するために $\log|x|$ を考えている。

[7]ネイピア数を十進小数で表記すると $e \fallingdotseq 2.718281828459...$ となる。また、ネイピア数は無理数になることが知られている。ネイピア数の定義の右辺の極限が収束することの証明は別資料に用意する（つもり）。

Lemma 5.2:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$$

Proof: $a = \dfrac{\Delta x}{x}$ とすると、 $\Delta x \to 0 \Longleftrightarrow a \to 0$ だから、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{a \to 0} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = e$$

□

まず Lemma 5.2 を用いて $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を示し、これを利用して $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ を示す。

Proof of $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log \frac{x + \Delta x}{x} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x} \log e \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

□

Proof of $\log|x|' = \dfrac{1}{x}$:

1. $x > 0$ のときは $\log|x| = \log x$。
2. $x < 0$ のとき、合成関数の微分法を用いると

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

□

問題 5.1: 次の関数を微分せよ。

$$(1)\quad y=\log(x^2+1) \qquad (2)\quad y=\log|\tan x| \qquad (3)\quad y=\log_2|3x+2|$$
$$(4)\quad y=x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad (5)\quad y=\frac{(\log x)^2}{x}$$

解答 5.1.1:

$$(1)\quad y'=\frac{2x}{x^2+1} \qquad (2)\quad y'=\frac{1}{\sin x\cos x}$$
$$(3)\quad y'=\frac{3}{(3x+2)\log 2} \qquad (4)\quad y'=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$(5)\quad y'=\frac{2\log x-(\log x)^2}{x^2}$$

6. 対数微分法

Theorem 6.1 (対数微分法): $f(x)\neq 0$ である x に対して

$$(\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Proof: 合成関数と対数関数の微分法と用いると $(\log|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 。 □

log をつけると次数を減らせる（ $\log x^y=y\log x$ ）ので、関数に指数がついているような場合には対数微分法の利用を試みよう。

問題 6.1: 次の関数を微分せよ。

$$(1)\quad y=\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x(x-2)^2}} \qquad (2)\quad y=x^x \quad (x>0)$$

解答 6.1.1:

$$(1)\quad -\frac{4x^2+3x-2}{3x(x-2)\sqrt[3]{x(x-2)^2(2x+1)^2}} \qquad (2)\quad (\log x+1)x^x$$

7. ベクトル値関数の微分

7.1. 内積・外積の微分