逆関数とその性質

krollo966

目次

—この文書の読み方—

逆関数とその微積分の解説です。

1. 逆関数の定義

Definition 1.1 (逆関数)：関数 $y = f(x)$ の x と y を入れ替えた関数 $x = f(y)$ を y について解いた関数 $y = g(x)$ を $y = f(x)$ の**逆関数**と呼び、$y = f^{-1}(x)$ と書く。

Example：

(1) $y = x^2 - 4x \ (x \leq 2)$ の逆関数：

$y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \geq -4$ つまり $y \geq -4$。

x と y を入れ替えると、$y \leq 2$ かつ $x \geq -4$ となるから、

$$\begin{aligned} x &= y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4 \\ \therefore (y-2)^2 &= x + 4 \\ \therefore y - 2 &= -\sqrt{x+4} \quad (\because y - 2 \leq 0) \\ \therefore \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 2 - \sqrt{x+4} \quad (x \geq -4)} \end{aligned} \tag{1}$$

(2) $y = \frac{2x+1}{x-1}$ の逆関数：

$$y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} \neq 2$$
$$\therefore y \neq 2 \tag{2}$$

x と y を入れ替えると $x \neq 2$ で、

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2y+1}{y-1} \\
\therefore x(y-1) &= 2y+1 \\
\therefore xy - x &= 2y+1 \\
\therefore (x-2)y &= x+1 \\
\therefore \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\frac{x+1}{x-2} \quad (x \neq 2)} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

(3) $y = 3^{2x-1}$ の逆関数：

$$
\begin{aligned}
y = 3^{2x-1} &> 0 \\
\therefore y &> 0 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

x と y を入れ替えると $x > 0$ で、逆関数は

$$
\begin{aligned}
x &= 3^{2y-1} \\
\therefore 2y-1 &= \log_3 x \\
\therefore 2y &= \log_3 x + 1 \\
\therefore y &= \frac{\log_3 x + 1}{2} \\
\therefore \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\frac{\log_3 x + 1}{2} \quad (x > 0)} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

問題 1.1 (練習 87. 逆関数): 次の関数の逆関数を求め、その定義域を求めよ。

(1) $y = -2\sqrt{1-x} \quad (x \leq 1)$ (2) $y = \dfrac{1-x}{x+1}$ (3) $y = 2\log_2 x$

解答:

(1) $y = -2\sqrt{1-x} \leq 0$ の x と y を入れ替えて

$$
\begin{aligned}
x &= -2\sqrt{1-y} \\
\left(-\frac{x}{2}\right)^2 &= 1-y \\
y &= 1 - \frac{x^2}{4} \quad (x \leq 0) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1-x}{x+1} = \frac{2-(x+1)}{x+1} \\
&= \frac{2}{x+1} - 1 \neq -1 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

の x と y を入れ替えて

$$x = \frac{2}{y+1} - 1$$

$$y = \frac{2}{x+1} - 1 \quad (x \neq -1) \tag{8}$$

(3) $y = 2\log_2 x$ の x と y を入れ替えて

$$x = 2\log_2 y$$

$$\frac{x}{2} = \log_2 y$$

$$2^{\frac{x}{2}} = y$$

$$y = \left(\sqrt{2}\right)^x \tag{9}$$

□

2. 逆関数の微分法

Theorem 2.1 (逆関数の微分法): $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \tag{10}$$

つまり、逆関数の微分は、元の関数の微分の逆数になる。

この公式自体よりも、証明の方が重要です。

Proof: $y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$ の両辺を x で微分すると、合成関数の微分法より

$$1 = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \tag{11}$$

□

Example:

(1) $y = \log x$ の微分：

$y = \log x \Longleftrightarrow x = e^y$ の両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
1 &= e^y y' \\
\therefore y' &= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(2) $x = y^2 - 2y$ について、y' を y の式で表す：

両辺を x で微分して、

$$
\begin{aligned}
1 &= 2yy' - 2y' = 2y'(y-1) \\
\therefore y' &= \frac{1}{2(y-1)} \quad (y \neq 1)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(3) $y^2 = 3x + 1$ における y' を y の式で表す：

両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
2yy' &= 3 \\
\therefore y' &= \frac{3}{2y} \quad (y \neq 0)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

問題 2.1 (例題 146. 逆関数の微分法): 次の関係式において、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を y の式で表せ。

$$
(1) \quad y^3 = 2x - 1 \qquad (2) \quad x(y^2 - 2y + 1) = 1
$$

解答:

(1) $y^3 = 2x - 1$ の両辺を x で微分して

$$
3y^2y' = 2 \tag{15}
$$

$$
\therefore y' = \frac{2}{3y^2} \quad (y \neq 0) \tag{16}
$$

(2) $x(y^2 - 2y + 1) = 1$ の両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
(y^2 - 2y + 1) + x(2yy' - 2y') &= 0 \\
(y-1)^2 + 2y'x(y-1) &= 0 \\
(y-1)(y - 1 + 2y'x) &= 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

問題の式より $y \neq 1$ かつ $x \neq 0$ だから、

$$
y - 1 + 2y'x = 0 \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore y' &= -\frac{y-1}{2x} \\
&= -\frac{(y-1)^3}{2}
\end{aligned} \tag{19}
$$

□

3. 逆三角関数

Definition 3.1 (逆三角関数)：

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), \\
y &= \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi), \\
y &= \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{20}
$$

の逆関数をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right), \\
y &= \arccos x \quad (0 \leq y \leq \pi), \\
y &= \arctan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{21}
$$

と書く。

Example：

$$
\begin{aligned}
\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{6} \\
\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\pi}{4} \\
\arctan(1) &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned} \tag{22}
$$

Lemma 3.1 (逆三角関数の微分法)：、

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin x, \\
y &= \arccos x, \\
y &= \arctan x
\end{aligned} \tag{23}
$$

の微分はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
y' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned} \tag{24}
$$

Proof:

(1) $x = \sin y$ の両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
1 = y' \cos y = y' \sqrt{1-\sin^2 y} = y' \sqrt{1-x^2} \\
\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned} \tag{25}
$$

(2) $x = \cos y$ の両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
1 = -y' \sin y = -y' \sqrt{1-\cos^2 y} = -y' \sqrt{1-x^2} \\
\therefore y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned} \tag{26}
$$

(3) $x = \tan y$ の両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{y'}{\cos^2 y} = y'\left(1+\tan^2 y\right) = y'\left(1+x^2\right) \\
\therefore y' = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned} \tag{27}
$$

□