# 単振動

krollo966

## 目次



**—この文書の読み方—**

単振動の問題です。

# 1. 予備知識

## 1.1. 微分方程式

# 2. 単振動（調和振動）

**Definition 2.1** (調和振動): 点 $\boldsymbol{r}$ に働く力が $-k\boldsymbol{r}$ のとき、つまり質点に働く力がフックの法則に従うとき、この力を**線形復元力**といい、この力に従う運動を**調和振動（単振動）**、調和振動を行う質点を**調和振動子**という。

$\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ のときは 1 次元調和振動、$\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2$ のときは 2 次元調和振動という。

## 2.1. 1 次元調和振動

**Theorem 2.1.1** (1 次元調和振動の運動方程式): 質量が $m$ の調和振動子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = x(t) \in \mathbb{R}$ とする。この調和振動子の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -kx(t) \tag{1}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とすると、この方程式の解は $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ となる。ここで、$A, B$ は任意定数で、$A$ は初期位置、$B\omega$ が初速度を表す。

**Proof**:

$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ とおくと、この運動方程式は

$$
\begin{aligned}
D^2 x(t) &= -\omega^2 x(t), \\
(D^2 + \omega^2) x(t) &= 0, \\
(D + i\omega)(D - i\omega) x(t) &= 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

$y(t) = (D - i\omega)x(t)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
(D + i\omega) y(t) &= 0, \\
D y(t) &= -i\omega y(t)
\end{aligned} \tag{3}
$$

これを解くと $y(t) = ce^{-i\omega t}$ $(c \in \mathbb{R})$ である。

よって

$$
(D - i\omega) x(t) = ce^{-i\omega t} \tag{4}
$$

$x(t) = z(t)e^{i\omega t}$ となる $z(t) = x(t)e^{-i\omega t}$ を微分すると、

$$
\begin{aligned}
Dz(t) &= Dx(t)e^{-i\omega t} - i\omega x(t) e^{-i\omega t} \\
&= (D - i\omega) x(t) e^{-i\omega t} \\
&= ce^{-2i\omega t}
\end{aligned} \tag{5}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{ce^{-2i\omega t}}{-2i\omega} + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C}), \\
\therefore x(t) = z(t)e^{i\omega t} &= \alpha e^{i\omega t} + \frac{c}{-2i\omega} e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{6}
$$

$\beta = c/(-2i\omega)$ とすれば

$$
x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} \tag{7}
$$

となる。$c \in \mathbb{C}$ が任意定数だから、$\beta \in \mathbb{C}$ も任意定数。

$x(t) \in \mathbb{R}$ でなくてはいけないので、$x(t)^* = x(t)$、つまり

$$
\begin{aligned}
\alpha^* e^{-i\omega t} + \beta^* e^{i\omega t} &= \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}, \\
(\alpha - \beta^*) e^{i\omega t} &= (\alpha^* - \beta) e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{8}
$$

式 8 は任意の $t \in \mathbb{R}$ について成り立つので、特に $t = 0$ のときも成り立つ。
よって、

$$
\alpha - \beta^* = \alpha^* - \beta \tag{9}
$$

式 8 を微分すると $i\omega(\alpha - \beta^*)e^{i\omega t} = -i\omega(\alpha^* - \beta)e^{-i\omega t}$。これに $t = 0$ を代入して整理すると

$$
\alpha - \beta^* = -\alpha^* + \beta \tag{10}
$$

式 9 と 式 10 より $\alpha^* = \beta$。したがって、式 7 より、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \alpha e^{i\omega t} + \alpha^* e^{-i\omega t} \\
&= \alpha(\cos\omega t + i\sin\omega t) + \alpha^*(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\
&= (\alpha + \alpha^*)\cos\omega t + i(\alpha - \alpha^*)\sin\omega t \\
&= A\cos\omega t + B\sin\omega t
\end{aligned} \tag{11}
$$

ただし $A = \alpha + \alpha^*, B = i(\alpha - \alpha^*)$ とした。$\alpha \in \mathbb{C}$ は任意定数なので、$A, B \in \mathbb{R}$ も任意定数である。よって、これが調和振動の方程式の一般解となる。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\
\dot{x}(t) &= -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t
\end{aligned} \tag{12}
$$

に $t = 0$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
x(0) &= A, \\
\dot{x}(0) &= B\omega
\end{aligned} \tag{13}
$$

□

## 2.2. 一般解からわかること

**Lemma 2.2.1**: 一般解が $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ の単振動の周期を $T$ とする。

一般解から、周期がわかる：

$$
\begin{aligned}
\omega T &= \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi, \\
\therefore T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}
\end{aligned} \tag{14}
$$

**問題 2.2.1** (例題 11. 単振動): 質量 $m$ の 2 つの質点 A と B がばね定数 $k$ の 3 個の弦巻ばね $S_1, S_2, S_3$ に図のように結びつけられて、摩擦のない水平面上に置かれている。ばね $S_1$ の左端 P とばね $S_3$ の右端 Q は壁に固定されているが、釣り合いの状態ではどのばねも自然の長さ $l$ になっていて、ばねも質点も全て P と Q を結ぶ直線に沿って並んでいる。以下の問いでは、質点に働く力はいつも直線 PQ に沿ったものだけであり、したがってその運動も変位も直線 PQ 上で起こるものとする。ばねの質量と空気の抵抗は無視できるものとして、次の各問に答えよ。

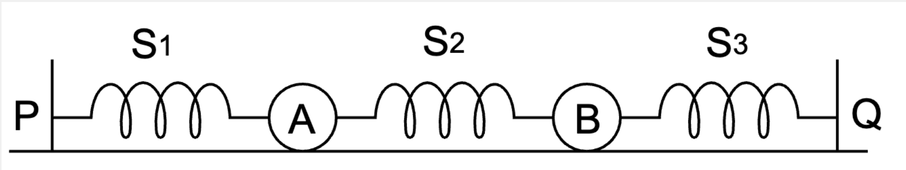


図 1: 問題の図

(1) 質点 B に力を加えて、右方に $x$ だけ変位させた。
   (a) 質点 A は右方にどれだけ変位したか。
   (b) このとき質点 B に外から加えている力の大きさはいくらか。

(2) 質点 B を最初の釣り合いの位置に固定したまま、質点 A に力を加えて大きさ $x$ の変位を与えてからこの力を取り去ったとき、質点 A は単振動をした。
   (a) このときの単振動の周期を求めよ。
   (b) 質点 A が初めの釣り合いの位置を通るときの速さを求めよ。

(3) 質点 A と B の両方に力を加えて、同じ向きに等しい大きさ $x$ の変位を与えてから同時に力を取り去ったとき、両質点は単振動をした。このとき質点 A の単振動の周期は(2)の場合の周期の何倍か。

(4) 質点 A と B の両方に力を加えて、互いに逆向きに等しい大きさ $x$ の変位を静かに与え、両方の質点に加えられている力を同時に取り去ったとき、両質点は単振動をした。質点 A の単振動の周期は(2)の場合の周期の何倍か。

(5) 図に示した右側の固定壁を右方に $x$ だけ移動した。
   (a) このとき、質点 B はどれだけ右方に変位したか。
   (b) 次に、この状態のまま、(4)の場合と同じように質点 A と B を単振動させた。このときの質点 A の単振動の周期は(2)の場合の周期の何倍か。

**考え方 2.2.1**:

(1) 質点 B を変位させ、その後静止している。このとき質点 A, B に働く力は釣り合っていると考えられるので、力の釣り合いの式を立てよう。その際、聞かれている変位や力を $x'$ とか $F$ といった記号で表す。

(2) B を固定して A だけを動かすことを考える。A に働く力の合力を考えると、ばねが一つだけの運動に帰着できるので、そのときの単振動の周期を計算しよう。速さについては、調和振動子の速度を直接計算してもいいが、エネルギー保存則を用いる方が簡潔に解ける。

(3) A と B に働く力を考えると、(2)と同じように単振動の周期が求まる。ばね $S_2$ の伸び縮みが運動とともにどうなるか考えよう。

(4) これも、ばね $S_1$, $S_2$, $S_3$ の伸び縮みと A, B に働く力を考えよう。

**解答**:

(1) (a) 質点 A の右方への変位を $x'$ とすると、質点 A の力の釣り合いより

$$k(x - x') = kx',$$
$$\therefore x' = \frac{x}{2} \tag{15}$$

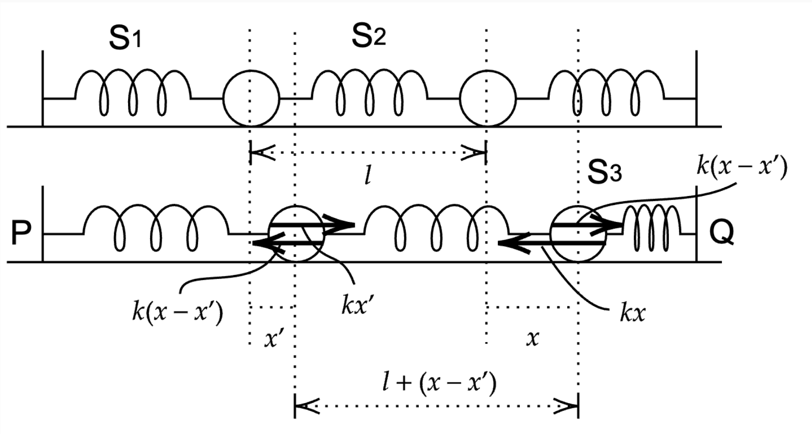


図 2: 質点 A の力の釣り合い。

(b) 質点 B に働く力の釣り合いを考えると、

$$F = k(x - x') + kx = \frac{3}{2}kx \tag{16}$$

(2) (a) はじめの釣り合っているときの A の位置を原点にとる。A を変位させて座標が $d$ になったとき、A に働く力はフックの法則より $-2kd$。したがって A はばね定数が $2k$ のばねが一つだけのときと同じ運動をするので、単振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{2\frac{k}{m}}$。

(b) エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}2kx^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$\therefore v = x\sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{17}$$

(別解) 調和振動子の座標 $d$ は $m\ddot{d} = -2kd$ の解だから、

$$d = x\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right),$$

$$\therefore \dot{d} = -x\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) \tag{18}$$

よって $t = \frac{\pi}{4}T$ のとき、速さは最大値 $x\sqrt{\frac{2k}{m}}$ をとる。

(3) A と B が共に同じ向きに変位しているので、力を取り去った瞬間のばね $S_2$ の伸びは 0 である。このとき A と B はいずれも $kx$ の力を受けて同じ向きに動くので、ばね $S_2$ の伸びは常に 0 である。したがって、A はばね $S_1$ だけから力を受けて振動する。振動中心を原点に取り直線 PQ に沿った座標系をとると

$$m\ddot{d} = -kd \tag{19}$$

したがって振動周期を $T^{(3)}$ とすると、$T^{(3)} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ であり、

$$\frac{T^{(3)}}{T} = \sqrt{2} \tag{20}$$

(4) A の釣り合い位置を原点にして座標系をとり、力を書き込むと 図 3 のようになる。このとき A の運動方程式は

$$m\ddot{d} = -3kd, \tag{21}$$

となるから、周期を $T^{(4)}$ とすると、

$$T^{(4)} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}},$$

$$\therefore \frac{T^{(4)}}{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{22}$$

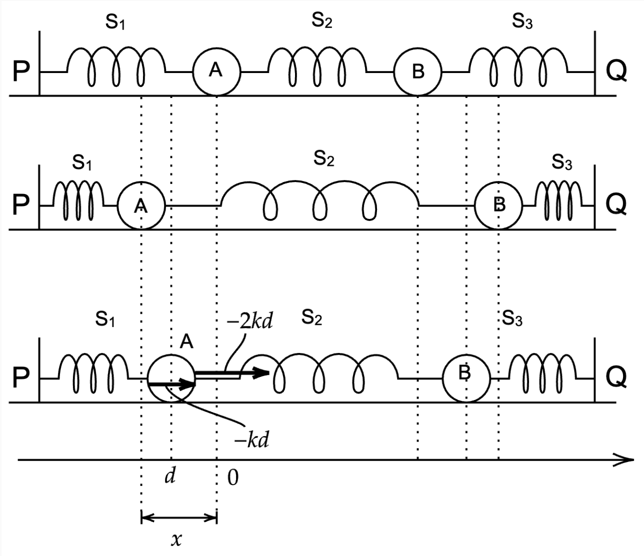


図 3: 質点 A に働く力。

(5) (a) $S_1, S_2, S_3$ の伸びをそれぞれ $x_1, x_2, x_3$ とすると、$x_1 + x_2 + x_3 = x$ で、力の釣り合いより $x_1 = x_2 = x_3$ だから、$x_1 = x_2 = x_3 = x/3$。B は初めの位置より右方に $2x/3$ の位置にいる。

(b) A, B がそれぞれ左右に $d$ だけ変位したとする（A, B がそれぞれ右と左に変位したときも以下同様の議論が成り立つ）。A が受ける力は右向きに $k\left(\frac{x}{3} + 2d\right) - k\left(\frac{x}{3} - d\right) = 3kd$ である（自然長に比べて、$S_1$ は $\frac{x}{3} - d$, $S_2$ は $\frac{x}{3} + 2d$ 伸びている）。したがって、A, B はいずれもばね定数が $3k$ の一つのばねにつながっているときと同じ単振動をするので、周期を $T^{(5)}$ とすると、

$$T^{(5)} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}},$$

$$\therefore \frac{T^{(5)}}{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{23}$$

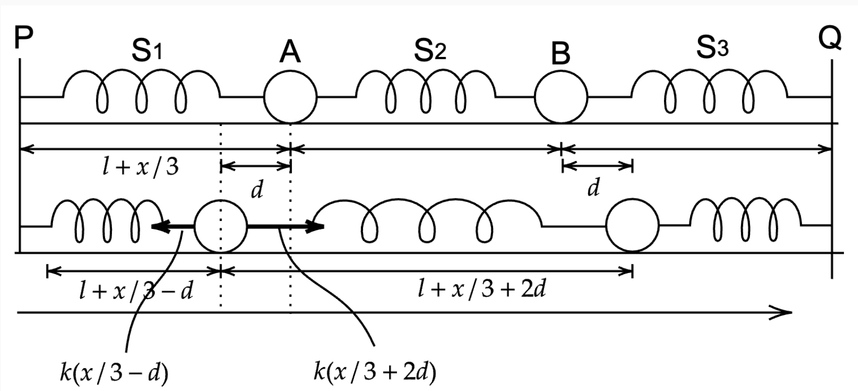


図 4: 質点 A の変位と弾性力。

□

**問題 2.2.2** (例題 13. 単振動): 図 5 のように、水平床面で一端を固定したばね（ばね定数 $k$）の他端に物体 M（質量 $m$）を取り付ける。物体 M とばねの運動方向は図の $x$ 軸方向に限られ、物体 M の位置を座標 $x$ で表す。ばねが自然長の状態にあるとき $x = 0$ とし、伸びる向きに $x$ の正の向きを定める。物体と床面の間には摩擦が働くものとして次のような振動実験を行う。

まず、物体 M を $x$ の位置まで引っ張って静かに手放すことを、$x$ の値を変えて繰り返し、$x$ がある値 $d$ より小さいときには物体は動かず、$d$ より大きいときには滑り出すことを確かめた。

次に、物体を位置 $x_0(>d)$ まで引っ張って静かに手放し、その瞬間からの時間を $t$ として物体の動きを観察した。物体ははじめ次第に速さを増し、最大の速さに達したのち減速して、速さが 0 となった。その時の位置は $x_1$ $(<0)$ であった。その後、物体は再び逆向きに動き出し、何回かの折り返しを繰り返したのち、ついに $n$ 回目の折り返し点 $x_n$ で停止した。このとき、以下の設問に答えよ。結果だけでなく、考え方や途中の計算も簡単に示せ。ただし、重力加速度は $g$ で表し、ばねの質量や空気抵抗は無視しうるものとする。

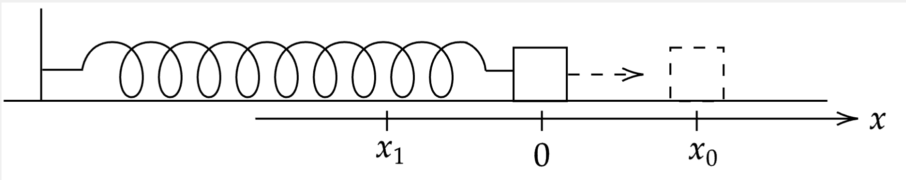


図 5: 問題の図

(1) 物体 M と床面との間の静止摩擦係数 $\mu_0$ と動摩擦係数 $\mu$ を求めよ。

(2) 位置 $x_1$ で速さが 0 となった時間 $t_1$ を求めよ。

(3) はじめて速さが最大に達した時の位置 $a$ とその時間 $t_a$ を求めよ。

(4) 最後に位置 $x_n$ で停止するまでに物体が運動した全行程の長さ $L$ と $x_n$ との関係を求めよ。

(5) 物体 M の位置 $x_n$ と時間 $t$ との関係を 図 6 に示すようなグラフに図示せよ。ただし、この設問においては $x_0 = 3.5d, x_1 = -2.5d$ とする。

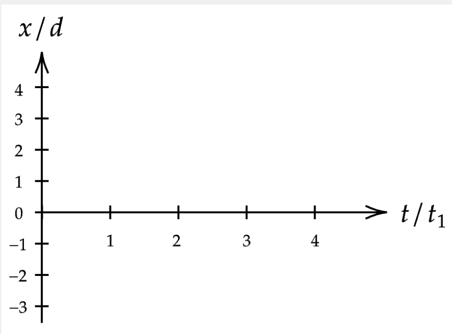


図 6: 解答の図

**解答**:

(1) ばねの伸びが $d$ のとき最大静止摩擦力と弾性力が釣り合うので、

$$\mu_0 mg = kd,$$
$$\therefore \mu_0 = \frac{kd}{mg} \tag{24}$$

また、物体が $x_0$ から $x_1$ に移動するまでに摩擦力による仕事でエネルギーが失われるので、

$$\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \mu mg(x_0 - x_1),$$
$$\therefore \mu = \frac{k(x_0 + x_1)}{2mg} \tag{25}$$

(2) 物体が $x_1$ で止まるまでの間の物体は弾性力と動摩擦力を受けるので、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg,$$
$$\therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right) \tag{26}$$

これは振動中心が $x = \mu mg/k$ の単振動を意味する。振動の周期を $T_0$ とすると、求める時間は $T_0/2$ だから、

$$\frac{T_0}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{27}$$

(3) 単振動する物体は振動中心で速度が最大になるから、

$$a = \frac{\mu mg}{k} = \frac{x_0 + x_1}{2},$$
$$t_a = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{28}$$

(4) 全行程に対するエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}kx_0^2 - \mu mgL = \frac{1}{2}kx_n^2,$$
$$\therefore L = \frac{x_0^2 - x_n^2}{x_0 + x_1} \tag{29}$$

(5) $|x| < d$ になると物体 M が止まることに注意する。

また、振動を続けている間、運動方程式が

$$m\ddot{x} = -kx \pm \mu mg,$$
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x \mp \frac{\mu mg}{k}\right) \tag{30}$$

となるので、常に周期が $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ のたんしんどうをして、$t_1 = T_0/2$ の時間が経過するごとに折り返す（つまり $1 \leq k \leq n$ となる整数 $k$ に対し $x_k = x(kt_1)$ である）ことに注意する。

(i) $0 \leq t \leq t_1$ のとき

$x_0 = x(0) = 3.5d,\ x_1 = x(t_1) = -2.5d$ で、この間の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg,$$
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right) \tag{31}$$

したがって、振動中心が $x = \mu mg/k$, 周期が $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ の単振動をする。 $|x_1| = 2.5d > d$ なので、$x_1$ に達した後も運動を続ける。

(ii) $t_1 \leq t \leq 2t_1$ のとき

この間の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - \mu mg,$$
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right) \tag{32}$$

したがって、$x_2 = x(2t_1)$ とすると、振動中心は

$$\begin{aligned}
-\frac{\mu mg}{k} &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\
\therefore x_2 &= -\left(x_1 + \frac{2\mu mg}{k}\right) \\
&= -(x_0 + 2x_1) \\
&= -(3.5d - 5d) \\
&= 1.5d
\end{aligned} \tag{33}$$

$x_2 = 1.5d > d$ なので、$x_2$ に達した後も運動を続ける。

(iii) $2t_1 \leq t \leq 3t_1$ のとき 運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg,$$
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right) \tag{34}$$

だから、$x_3 := x(3t_1)$ と振動中心について

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu mg}{k} &= \frac{x_2 + x_3}{2}, \\
\therefore x_3 &= -x_2 + \frac{2\mu mg}{k} \\
&= -1.5d + d \\
&= -0.5d \qquad (35)
\end{aligned}
$$

$|x_3| = 0.5d < d$ なので、$x_3$ に達したのち物体は止まる。

以上より、グラフは 図 7 のようになる。

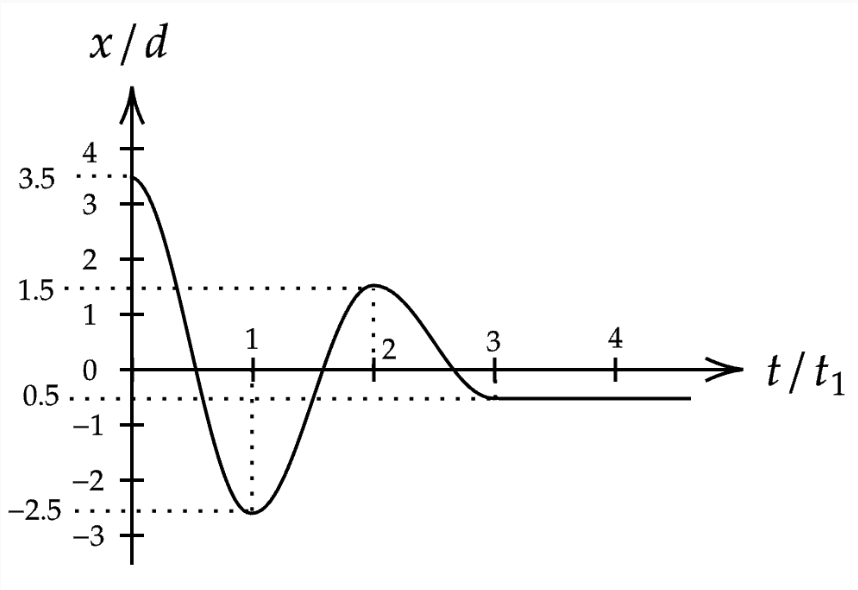


図 7: 解答の図

□

**問題 2.2.3** (例題 15. 単振動): 下部に鉛をつけた一様な断面積 $S\,\mathrm{cm}^2$、高さ $H\,\mathrm{cm}$ のフロートがある。これを水面に静かに浮かべたら 図 8 (a) のように頭を水面上に $H/3$ だけ出して釣り合ったという。

水の密度を $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$、重力加速度を $g\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ とし、フロートの運動は鉛直方向に限られるものとする。さらに、この運動に伴う水の抵抗と水面の変化は無視して、下記の問いに答えよ。

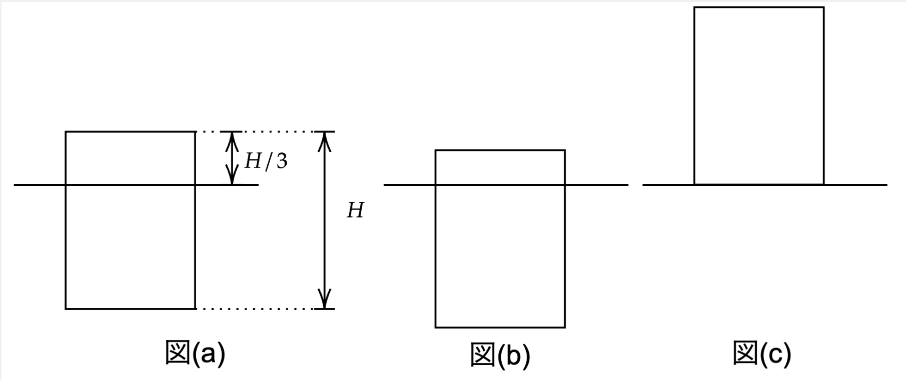


図 8: 問題の図

(1) フロートの全質量 $M$ はいくらか。

(2) フロートをその上面が水中に沈まない程度に鉛直に押し下げ（図 8 (b)）、手を離すとフロートは上下振動を始めるが、この周期 $T$ はいくらか。

(3) 図 8 (c) のように、フロートの底面を水面と接するように保ち、手を離した。フロートが沈んでいき、ちょうど上面が水面と一致したときの速度 $v$ はいくらか。

(4) 問(3)に続き、フロートはさらに沈んでいくが、最も深く沈んだとき、その上面の水面下の深さ $D$ はいくらか。

(5) 手を離してから、フロートが最も深く沈むまでの時間 $T_0$ はいくらか。

**考え方 2.2.2**:

(1) 力の釣り合いの式を作る。

(2)

**解答**:

(1) フロートに働く力の釣り合いより

$$Mg = \frac{2}{3}SHg,$$

$$\therefore M = \frac{2SH}{3} \tag{36}$$

(2)

□

**問題 2.2.4** (例題 23. 単振動と保存則): 図のように、下端が固定されて鉛直に保たれたばね（ばね定数 $k$）があり、その上端は、水平に保たれた硬くて薄い板（質量 $M$）の重心に取り付けられている。初め、板は静止している。その重心の鉛直上方 $H$ の高さから、小物体（質量 $m, m < M$）を初速度無しで落とし、板に衝突させる。この衝突は完全弾性衝突とする。重力の加速度を $g$ とし、次の問いに対して、主な計算式を記して答えよ。ただし、ばねの変形はフックの法則が成立する範囲内にあるとし、また、ばねの質量と空気の抵抗とを無視する。

(1) 第 1 回目の衝突の直後における、(イ) 小物体の速さ $v$ と、(ロ) 板の速さ $V$ とを求めよ。

(2) 第 1 回目の衝突によって起こされる板の変位の最大値 $A$ を求めよ。ただし、この変異の最大値に達するまで、第 2 回目の衝突は起こらないものとする。

(3) (イ) 板が第 1 回目の衝突によって動き始め、いったん下がった後、上昇して、初めの静止の位置に戻った瞬間に、第 2 回目の衝突が起こるためには、$H$ をいくらにしておけばよいか。
(ロ) またこの $H$ の値のとき、第 1 回目と第 2 回目の衝突の間で、衝突点から小物体が遠ざかる距離の最大値 $L$ はいくらか。

(4) もし小物体と板との衝突が、完全非弾性衝突($e = 0$)だとすると、衝突後小物体と板は一体となって振動を始める。この振動の周期 $T$ と、振幅 $B$ の値をそれぞれ求めよ。