

# ベクトル

krollo966

## 目次

1. ベクトルとは .....	— 1 —
2. ベクトル空間の定義 .....	— 2 —
3. 位置ベクトル .....	— 3 —
4. 同値な有向線分 .....	— 4 —
5. ベクトルの成分表示 .....	— 5 —
6. ベクトルの内積 .....	— 6 —
7. ベクトルの外積 .....	— 7 —

—この文書の読み方—

ニュートン力学におけるベクトルについてまとめます。

## 1. ベクトルとは

力学で出てくる基本的な物理量である速度・加速度・力などには共通の性質がある：

1. 合成と分解を考えることができる（“和”を考えることができる）。
2. 同じ方向（または反対方向）への働きに強弱をつけて考えることができる（“スカラーバイ”）が考えられる。

これら二つの算法を考えられるものをベクトルと呼ぶ。正確な定義は次節で述べる。

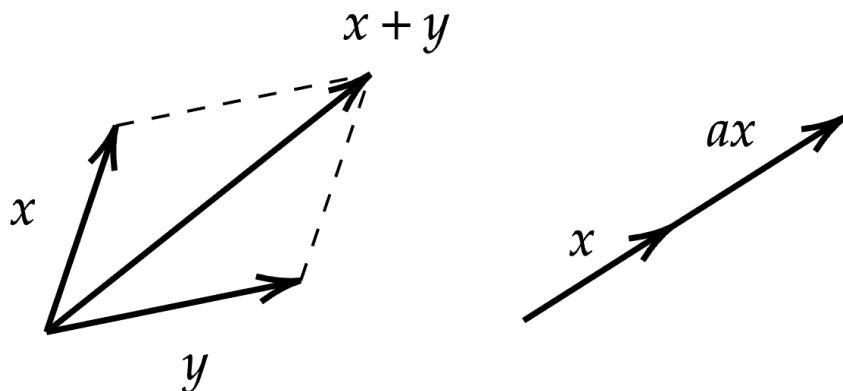


図 1: 矢印を使ってベクトルの和と実数倍を表した図。ベクトル空間の定義を満たしているものは何でもベクトル空間と呼ぶので、矢印でイメージしにくいベクトルも存在する。

## 2. ベクトル空間の定義

**Definition 2.1** (ベクトル空間の定義): 集合  $\mathbb{V}$  において、 $\mathbb{V}$  の任意の元  $x, y$  と任意の実数  $a$  に対して

- ベクトルの和:  $x + y$
- ベクトルのスカラー一倍  $ax$

が以下を満たすように定義されているとき、 $\mathbb{V}$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間と呼ぶ：

$x, y, z$  は  $\mathbb{V}$  の任意の元、 $a, b$  は任意の実数として

1. (和の可換則) :  $x + y = y + x$
2. (和の結合則) :  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. (零元の存在) :  $x + \theta = x$  となる元  $\theta$  が存在する。
4. (和に関する逆元の存在) :  $x + x' = \theta$  となる元  $x'$  が存在する。
5. (分配則) :  $a(x + y) = ax + ay$
6. (分配則) :  $(a + b)x = ax + bx$
7. (スカラー一倍の両立性) :  $(ab)x = a(bx)$
8. (1 の作用) :  $1x = x$

ベクトル空間の元をベクトルと呼ぶ。

力学的には、「作用点を一つ定め、その点に作用する力の合成・分解と強弱の性質を抽象化するとベクトル空間の公理が現れる」と言える。つまり、ある作用点に働く力について、ベクトルの和が定義できるとは「力は合成できる」ということであり、「ベクトルのスカラー倍が定義できる」とは「力は同一（または反対）方向に強弱をつけることができる」と置き換えると、ベクトル空間の定義は次のように解釈される：

1. (和の可換則) : 2つの力の合成は、順序に依存しない。
2. (和の結合則) : 3つの力の合成は、順序や組み合わせに依存しない。
3. (零元の存在) : 作用点および作用点において力の働いていない状態の存在。
4. (和に関する逆元の存在) : 反作用の存在（作用・反作用の法則）。
5. (分配則) : 力の合成に関する強弱の分配則（合成された力のスカラー倍は、スカラー倍された力の合成に等しい）。
6. (分配則) : 同一の力に対する強弱の和の分配則（一つの力に対して 2つのスカラーの和をスカラー倍にした力は、それぞれスカラー倍した力の合成に等しい）。

7. (スカラー倍の両立性) : 同一の力に対する強弱の積の両立性 (一つの力に対して 2 つのスカラーの積をスカラー倍にした力は、スカラー倍を繰り返した力に等しい)。

8. (1 の作用) : 力の 1 倍は元の力に等しい。

ベクトル空間の公理的取り扱いに慣れるために次の問題を解いてみよう :

**問題 2.1 (ベクトル空間の公理):**  $V$  をベクトル空間とし、 $\mathbf{v}$  は  $V$  に属するベクトルとする。 $\mathbf{0}$  は  $V$  の零元、 $-\mathbf{v}$  は  $\mathbf{v}$  の逆ベクトル、 $k$  は任意のスカラーとする。次を示せ :

$$(1) \quad 0\mathbf{v} = k\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (2) \quad (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad (3) \quad k\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ ならば } k = 0 \text{ または } \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

**解答 2.1.1:**

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{0} = 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = (0+0)\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = (0\mathbf{v}+0\mathbf{v}) + (-0\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} + \\ & (0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v})) = 0\mathbf{v} + \mathbf{0} = 0\mathbf{v} \text{。また、} \mathbf{0} = k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0}) = k(\mathbf{0} + \mathbf{0}) + \\ & (-k\mathbf{0}) = (k\mathbf{0} + k\mathbf{0}) + (-k\mathbf{0}) = k\mathbf{0} + (k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0})) = k\mathbf{0} + \mathbf{0} = k\mathbf{0} \\ (2) \quad & \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = (1 + (-1))\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ (3) \quad & k = 0 \text{ ならば命題は真なので } k \neq 0 \text{ とすると、} \mathbf{v} = 1\mathbf{v} = (k^{-1}k)\mathbf{v} = \\ & k^{-1}(k\mathbf{v}) = k^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

### 3. 位置ベクトル

始点を一点固定して、始点から伸びる矢印 (有向線分) の集合に和とスカラー倍を、

- $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  :  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  を一辺とする平行四辺形の対角線
- $a\mathbf{x}$  :  $\mathbf{x}$  の長さを  $a$  倍し、向きを変えない

と定義すると、この集合がベクトル空間の公理を満たすことがわかる (例えば結合律について、次節で導入する「同値な有向線分」の概念を使うと 図 2 のように示すことができる)。始点を  $P$  とする有向線分を、 $P$  に関する位置ベクトルと呼ぶ。終点が  $Q$  のとき、 $\overrightarrow{PQ}$  と表す。

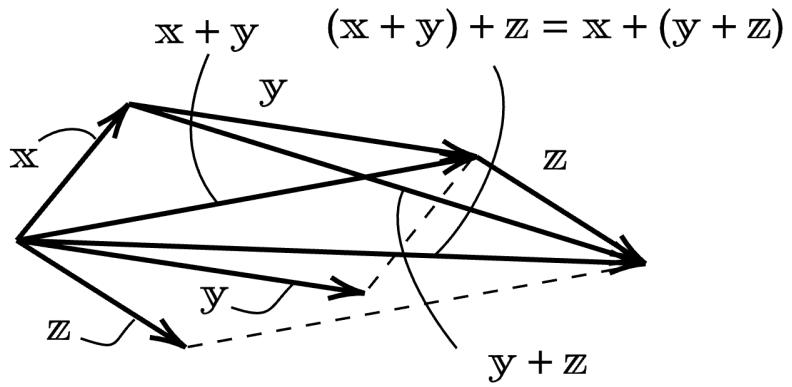


図 2: 位置ベクトルが結合律を満たす（次節の「同値な有向線分」を利用している）。

#### 4. 同値な有向線分

平行移動で重なる有向線分は同値であるという。つまり、図 3 のように、始点の異なる位置ベクトルは異なるベクトル空間に属するが、同値な有向線分である。力学的には、作用点が異なっていても、同じ大きさ・同じ向きの力は同じ力であることを意味する。

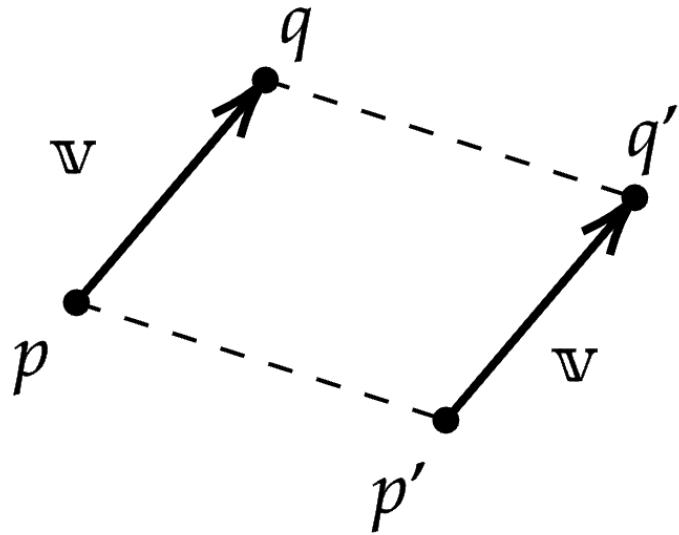


図 3: 同値な有向線分

同値な有向線分の考え方を使うと、始点の異なる有向線分に対しても 図 4 のように和を定義できる。

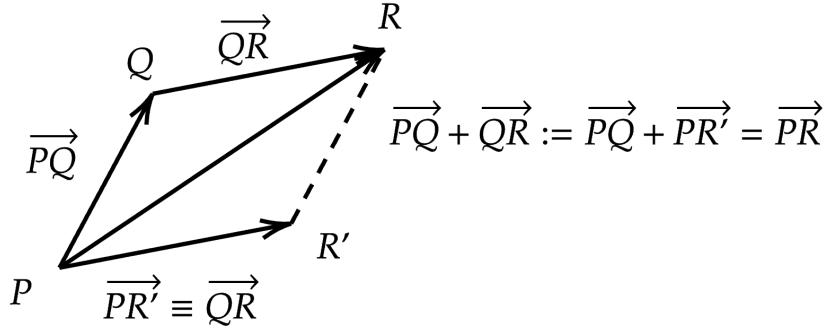


図 4: 同値な有向線分の和。 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ 。

## 5. ベクトルの成分表示

始点を  $p$  とする長さ 1 の垂直な位置ベクトル  $e_1, e_2$  を自然基底という。自然基底を使うと、始点が  $p$  の位置ベクトルを 図 5 のように表示できる。 $\vec{pq} = x_1 e_1 + x_2 e_2 =: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  を、 $e_1, e_2$  に関する  $\vec{pq}$  の成分表示と呼ぶ。 $\vec{pq} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  と書かれていたら、始点を  $p$  とする自然基底が適当に定まっているものとする。

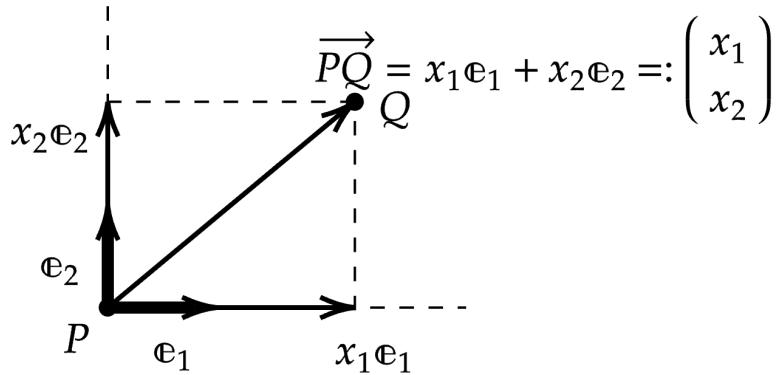


図 5: ベクトルの成分表示

また、原点を  $O$  とする座標平面上に 2 点  $P(x_1, x_2), Q(y_1, y_2)$  があるとき、 $R(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$  とすると、 $PQ \parallel OR$  だから、二つの有向線分  $\overrightarrow{PQ}$  と  $\overrightarrow{OR}$  は同値な有向線分である（図 6 参照）。つまり、座標平面上の有向線分は、終点の座標から始点の座標を引くことで、原点を始点とする有向線分に平行移動することができるので、 $\overrightarrow{OR}$  の成分表示を  $\overrightarrow{PQ}$  の成分表示だと思って、 $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$  と書くことにする。こうして、座標平面上の有向線分はその座標を使って成分表示できる。

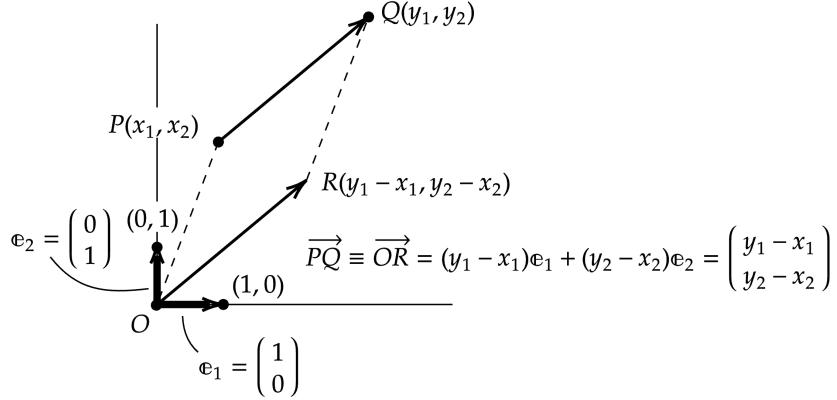


図 6: 座標平面上の有向線分  $\overrightarrow{PQ}$  は  $\overrightarrow{OR}$  と同値。

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  のように成分表示したベクトルの和とスカラー倍は以下のように表される:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ a\mathbf{x} &= a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 6. ベクトルの内積

二つのベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  の各成分の積和をベクトルの内積といい、 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  と表す:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

内積を使ってベクトルのノルム（大きさ）が定義できる：

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

ベクトルの内積について分配法則が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \\ (a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{w}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}\end{aligned}$$

ベクトルのノルムと分配法則、三角形に対する余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2 |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta\end{aligned}$$

となる。最後の二つの式を比較して、以下の式を得る：

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta$$

二つのベクトルの内積は、二つのベクトルのうち一方のベクトルの方向についての成分を考えて、その積をとっていると解釈できる（図 7）。

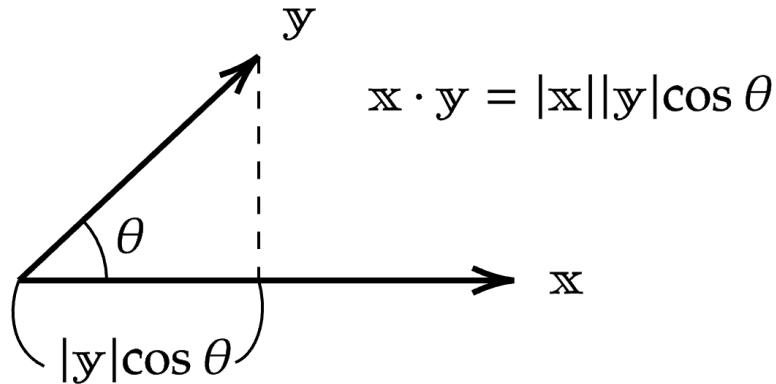


図 7：ベクトルの内積の図。 $\mathbf{y}$  の  $\mathbf{x}$  方向の成分  $y \cos \theta$  と  $\mathbf{x}$  の大きさを掛けている。

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  は直交する。

## 7. ベクトルの外積

二つの空間ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  の外積  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  を以下のように定義する：

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$