数列の問題とその解答

krollo966

—この文書について—

授業で間に合わなかった数列の問題（ネットから拾った B7 と書いてある問題）の解答です。はじめに必要な公式を紹介した後に、問題とその解答を載せています。

予備知識:

(1) 冪乗の和の公式：

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{2}$$

が成り立つ。

式 1 は等差数列（初項と公差が 1）の和の公式を用いればわかる。

式 2 は $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ の和をとると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1) \\
(n+1)^3 - 1 &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
n^3 + 3n^2 + 3n &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n \\
\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad (3)
\end{aligned}$$

(2) 部分分数分解： 分数 $1/(ab)$ を

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{4}$$

と差の形に表すことを**部分分数分解**という。

特に $\frac{1}{k(k+1)}$ のような形の分数は

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \tag{5}$$

と部分分数分解すると、その和は

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1} \tag{6}$$

と計算できる。

問題: 等差数列 $\{a_n\}$ があり、$a_3=5,\ a_1+a_4=9$ を満たしている。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。

(2)
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-2)(a_k-1)\quad(n=1,2,3,\dots) \tag{7}$$

とするとき、S_n を n を用いて表せ。

(3) (2) のとき、

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{S_k} \tag{8}$$

とする。T_n を n を用いて表せ。

解答:

(1) 公差を d とすると、

$$a_3=a_1+2d=5,$$
$$a_1+(a_1+3d)=2a_1+3d=9 \tag{9}$$

だから、これを解いて $\boldsymbol{d=1,a_1=3}$ を得る。

(2) (1) より $a_n=n+2$ だから、

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-2)(a_k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\quad(\text{冪乗の和の公式})$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)} \tag{10}$$

(3) (2) より

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{k(k+1)(k+2)} \\
&= 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= 3\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \quad \text{(部分分数分解)} \\
&= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \boldsymbol{\frac{3n}{2(n+2)}} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

□