三角関数の加法定理

krollo966

目次

—この文書の読み方—

この文書は三角関数の加法定理と呼ばれる定理を説明するためのものです。加法定理の説明のために三角関数の関係を復習する必要があるので初めに掲載します。次に加法定理とはどういう定理かを述べ、最後に三角関数の加法定理の証明を与えます。途中と最後に問題があるので解いてください。

1. 三角関数の関係

三角関数には以下の関係が成り立つ：

Theorem 1.1 (三角関数の関係)：

$$\begin{aligned}
&\sin(-\theta) = -\sin\theta && \cos(-\theta) = \cos\theta && \tan(-\theta) = -\tan\theta \\
&\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta && \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin\theta && \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\frac{1}{\tan\theta} \\
&\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta && \cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta && \tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta
\end{aligned}$$

Proof: $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ を単位円[1]上にプロットすると 図 1 のようになるので、$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ がわかる。他の関係も同様に、単位円上に点をプロットするとわかる。

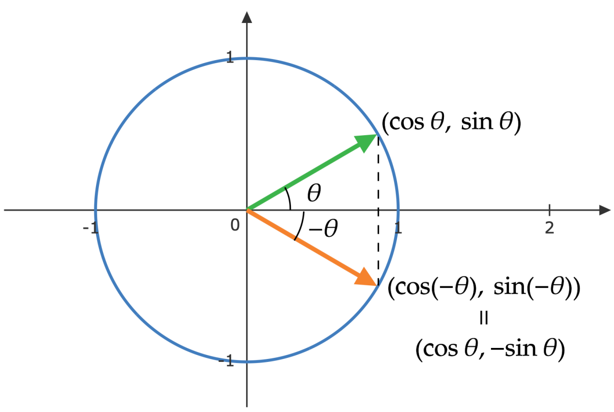

図 1: $(\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = (\cos\theta, -\sin\theta)$ であることを表す図。

□

[1]原点を中心とする半径 1 の円のことを**単位円**(unit circle)という。

問題 1.1: 他の関係についても単位円を描いて確認せよ。

2. 加法定理とは？

Remark: この節では、加法定理とは何かを説明するために一旦指数関数を復習しています。三角関数にはあまり関係がないので興味がなければ読み飛ばしていいです。

ここで、加法定理の説明をするために一旦指数関数を復習する。指数関数を $e^x = \exp x$ と書くことにする。指数関数について以下の公式（指数法則）が成り立つ：

$$\exp(x+y) = \exp x \exp y$$

これは「成分の和 $x+y$ の指数関数 $\exp(x+y)$ が、成分の指数関数 $\exp x, \exp y$ で表せる」という形をしている。こういった形の公式を「加法定理」と呼ぶ：

Definition 2.1 (加法定理): 任意の実数 x , y と関数 f に対し、

$$f(x+y) = G(f(x), f(y))$$

となる関数 G が存在するとき、 f に対して「加法定理が成り立つ」という。

$G(f(x), f(y))$ は $f(x), f(y)$ から計算される関数を表していると思ってほしい。指数関数の場合、 G は積を表す関数で、 $G(\exp x, \exp y) = \exp x \exp y$ 。

3. 三角関数の加法定理

三角関数に対しても加法定理が存在する。成分の和 $\alpha+\beta$ の三角関数 $\sin(\alpha+\beta)$ や $\cos(\alpha+\beta)$ が、その成分の三角関数 $\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta$ の積の和で表せる：

Theorem 3.1 (加法定理): 任意の実数 α , β に対し

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

証明は

1. まず $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ を示す。
2. 1. を用いて $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ などを示す

という順に進める。

Proof of $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$:

点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $B(\cos\beta,\sin\beta)$ をとる。この 2 点をそれぞれ原点の周りに $-\beta$ 回転した点は $A'(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$, $B'(1,0)$（図 2 を参照）。このとき $AB^2=A'B'^2$ だから

$$
\begin{gathered}
(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha-\beta)2、\\
\therefore 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)\\
\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta
\end{gathered}
$$

□

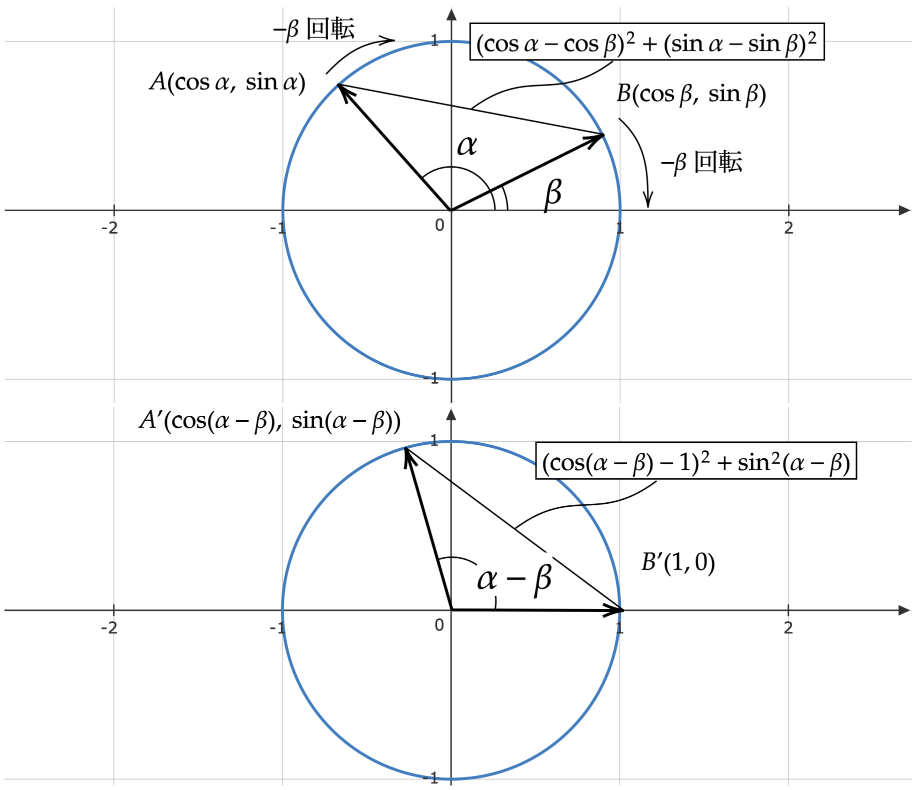

図 2: 三角関数の加法定理の証明の図。点 A, B を $-\beta$ 回転させて A', B' としても、$AB=A'B'$ の距離が変わらない（単位円上の 2 点を原点の周りに同じ角度だけ動かしてもその距離は変わらない）ことを利用する。

これを用いて、他の加法定理も証明できる：

[2] xy 平面上の 2 点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) の距離の 2 乗は、三平方の定理より $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ であることを思い出そう。

問題 3.1 (加法定理の証明): $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ を用いて、他の加法定理

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

を示せ。

解答 3.1.1:
1. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ において、β に $-\beta$ を代入すると $\cos(\alpha+\beta)$ が得られる。
2. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ において、β に $\frac{\pi}{2}-\beta$を代入すると $\sin(\alpha+\beta)$ が得られる。
3. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta$ において、β に $-\beta$ を代入すると $\sin(\alpha-\beta)$ が得られる。

tan の加法定理も記憶しよう：

Theorem 3.2 (tan の加法定理): 任意の実数 α,β に対し

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

問題 3.2 (tan の加法定理の証明):

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

を証明せよ。

解答 3.2.1: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ として加法定理を使い、分子と分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割る。 $\tan(\alpha-\beta)$ についても同様。

4. 問題集

三角関数の加法定理は、証明そのものというよりはその運用が重要です。以下の問題を解きましょう。

問題 4.1 (加法定理): $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \pi < \beta < \dfrac{3}{2}\pi$ で、$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}, \cos\beta = -\dfrac{3}{5}$ のとき

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。 (2) $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

(3) $\alpha-\beta$ の大きさを求めよ。

解答 4.1.1: (1) $-\dfrac{24}{25}$ (2) -1 (3) $-\pi$

問題 4.2 (加法定理): 加法定理を用いて、次の三角関数の値を求めよ。

$$(1) \quad \sin 75^\circ \quad (2) \quad \tan 195^\circ \quad (3) \quad \cos\frac{\pi}{12}$$

解答 4.2.1:

$$(1) \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad (2) \quad 2-\sqrt{3} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

問題 4.3 (加法定理): $0 \leq y \leq x \leq \pi$ を満たす x, y について $p = 2\sin x + \sin y$, $q = 2\cos x + \cos y$ とおく。

(1) $\cos(x-y)$ を p, q で表せ。

(2) $p^2+q^2=3$ が成り立つとき、y を x の式で表せ。

解答 4.3.1:

$$(1) \quad \cos(x-y) = \frac{p^2+q^2-5}{4} \quad (2) \quad y = x - \frac{2}{3}\pi$$