力学

krollo966

目次

—この文書の読み方—

この文書は力学を説明するための文書です。

1. 運動学

Definition 1.1 (系): 注目している対象群と、その対象群と相互作用している周りの部分をまとめて**系**(system)という[1]。

Example: ある電子回路、ある一つの細胞、一匹の犬、地球、太陽系、など。

理想的には

1. 系に属している部分とそうでない部分が区別できて、
2. 系に属しているものは相互作用をしていて、系外との相互作用は別に取り扱うことができる

ということ。とにかく注目している対象をまとめて系と呼んでいると思ってほしい。

いうまでもなく、現実の系はとても複雑で、一般には理論的な解析が難しい。

Example (摩擦): 机に本を置く。机を傾けても本が滑り落ちないのは、机と本の間に摩擦が働いているからである。しかし、本も机も無数の粒子で構成されている。その形は不規則で材質も多様であり（例えば本にはインクが付着している部分とそうでない部分があるし、机に塗られたニスにも濃淡があるはず)、さらには本と机以外の机の汚れなどといった要素もあるので、摩擦を理論だけで厳密に解析することは難しい。系によっては、そもそも原子が球形というモデルが適切かどうか、ミクロな系でもニュートンの法則は成り立つのか、といったことも考慮に入れる必要がある。

> しかし、すべての構成粒子の相互作用の合力を摩擦力だと考えると、一点に摩擦力が働いているとして、ある程度の考察を進めることはできる。

現実の系は無数の粒子から構成されているが、それらの合力は一点に働くと考えられる。このとき、系の大きさや材質などといった情報は捨象され、問題は質点の力学に帰着される。力学では、数学的に取り扱いやすいように系を適当に理想化する。

1.1. 質点系

力学では、質量を持ち大きさの無視できる点状の粒子を**質点**という。質点からなる系を**質点系**というこの講義では、一質点系から始めて、二体問題、さらに剛体の力学へと進めていく予定。

1.2. 座標系

力学とは、系に力が働くときの運動を考える学問である。力は物体の位置と時間によって決まるので、物体の位置を表す座標系が必要になる。力学では、物体の位置を表す座標系として**直交座標系**を用いる（図 1)。場合によっては、他の座標系を用いることもある（例えば、円運動を取り扱うときには極座標系を用いることがある）。

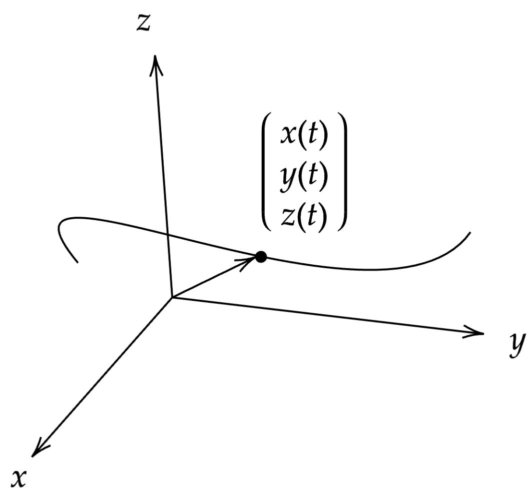

図 1: 質点の運動の例。直交座標系を使うと、質点の軌道を数学的に取り扱うことができる。

質点の位置の座標を時間の関数として $(x(t), y(t), z(t))$ と表すことが質点系の力学の目標だといってよい。質点の座標を原点に関する位置ベクトルを用いて $\mathbb{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ と表すこともある。

1.3. 速度、加速度

Definition 1.3.1 (速度): 質点の位置の時間微分を**速度**という。質点の位置を $\mathbb{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ とすると、$\mathbb{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$ は

$$\mathbb{v}(t) \coloneqq \dot{\mathbb{r}}(t) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\mathbb{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

Definition 1.3.2 (加速度): 質点の速度の時間微分を**加速度**という。質点の速度を $\mathbb{v}(t)$ とすると、

$$\mathbb{a}(t) \coloneqq \dot{\mathbb{v}}(t) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\mathbb{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

1.4. 力

Definition 1.4.1 (力の定義): 物体の速度が変化したとき、その物体に**力が働いた**という。つまり**物体の速度の変化要因**のことを**力**(force)と呼ぶ。

物体に働く力はその物体の位置と時間によって決まる（つまり力は物体の位置と時間の関数）と思えるので、 $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x, y, z, t)$[1] と書くことにする[2]。

[1]数学ではベクトルを $\vec{p}$ と書くが、物理ではベクトルを太字あるいは黒板太字を用いて $\boldsymbol{p}$ や $\mathbb{p}$ と書く。

[2]数学では変数とその関数を区別して $y = f(x)$ のように書いていたが、物理では誤解の恐れがなければ $y = y(x)$ のように従属変数とその関数を同じ記号で表す。例えば物体の位置を表す変数 $\mathbb{x}$ は時間によって変わる関数だと見做せるので $\mathbb{x} = \mathbb{f}(t)$ とは書かずに $\mathbb{x} = \mathbb{x}(t)$ と書く。

2. 運動方程式

法則 2.1 (ニュートンの法則): 加速度は力の単調増加関数で、しかも比例関係にあることを主張するのがニュートンの第二法則：

$$\mathbb{a} \propto \mathbb{F}$$

この比例関係の比例定数を $\frac{1}{m}$ と書いた方程式を**運動方程式**という：

$$m\mathbb{a}(t) = m\ddot{\mathbb{r}}(t) = \mathbb{F}(x, y, z, t)$$

右辺の $\mathbb{F}(x, y, z, t)$ は考えている系によって決まる。

Example (雨滴の終端速度): 重力方向に沿って落ちる質量 m の雨滴の速度を考えよう。雨滴には 図 2 のように、重力の他に速度に比例した空気抵抗が働いている。よってこの雨滴の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - kv(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}\left(v(t) - \frac{mg}{k}\right)$$

と変形できる。ここで $v(t) - \dfrac{mg}{k} = u(t)$ とおくと $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ だから、運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}u(t)$$
$$\frac{1}{u(t)}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}$$
$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -\frac{k}{m}$$

となる。両辺を t で積分し、積分定数を C と書くと[3]

$$\int \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = -\frac{k}{m}\int t\,\mathrm{d}t$$
$$\log|u(t)| = -\frac{k}{m}t + C$$
$$\therefore\ |u(t)| = e^C e^{-\frac{k}{m}t}$$

ここで $\pm e^C$ をあらためて C とおくと、

[3] $(\log|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を対数微分法と呼ぶ。これを積分すると $\log|f(x)| + C = \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}t$（$C$ は積分定数）を得る。

$$u(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$
$$\therefore v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

ここで、初速度を 0 とすれば、

$$0 = v(0) = C + \frac{mg}{k} \quad \therefore C = -\frac{mg}{k}$$
$$\therefore v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

グラフの概形は 図 3 のようになる。

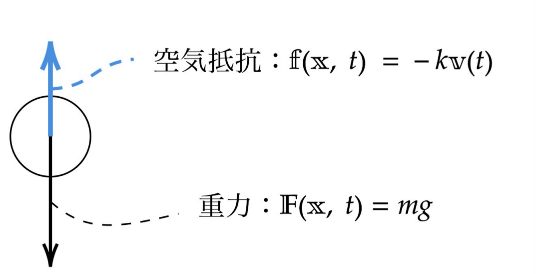

図 2: 雨滴に働く力

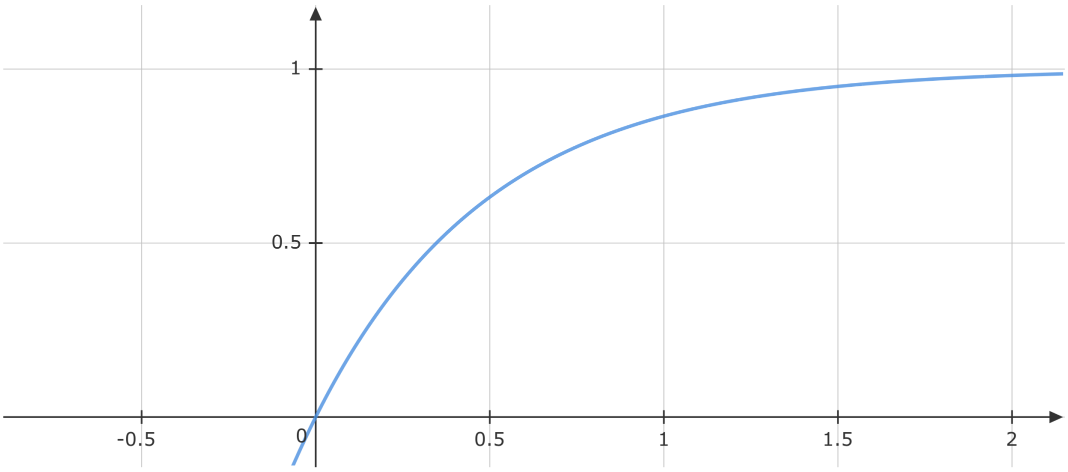

図 3: $v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ の概形

2.1. 運動方程式の積分

運動方程式 $m\mathbb{v}(t) = \mathbb{F}(x, y, z, t)$ を $t = t_0$ から $t = t_1$ まで積分すると

$$\int_{t_0}^{t_1} m\dot{\mathbb{v}}(t)\,\mathrm{d}t = m\mathbb{v}(t_1) - m\mathbb{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}(x, y, z, t)\,\mathrm{d}t$$

を得る。右辺の量を**力積**という。これは、力積によって運動量が増加することを表す。

また、運動方程式と $\mathbb{v}(t)$ の内積をとると、合成関数の微分法から、

$$m\dot{\mathbb{v}}(t) \cdot \mathbb{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\mathbb{v}(t)^2\right) = \mathbb{F}(x, y, z, t) \cdot \mathbb{v}(t)$$

を得る。$K(t) \coloneqq \frac{1}{2}m\mathbb{v}(t)^2$ を**運動エネルギー**といい、$\mathbb{F}(x, y, z, t) \cdot \mathbb{v}(t)$ を**仕事率**という。この式を $t = t_0$ から $t = t_1$ まで積分すれば、

$$K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}(x, y, z, t) \cdot \mathbb{v}(t) \, \mathrm{d}t$$

を得る。この式の右辺を**仕事**という。これは、仕事によって運動エネルギーが変化することを表している。

運動方程式の両辺に $\mathbb{r}(t)$ を右から掛けると、

$$m\dot{\mathbb{v}}(t) \times \mathbb{r}(t) = \mathbb{F}(x, y, z, t) \times \mathbb{r}(t)$$

を得る。左辺を**角運動量**、右辺を**トルク**という。

3. 力の場、保存力、ポテンシャル、エネルギー保存則

力が質点の運動に依存せず $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x, y, z, t)$ と書けるとき、この力が働く空間を力の**場**という。例えば、重力場中の力は質点の運動とは独立した重力を受ける。さらに、力の場が時間によらない関数 $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x, y, z)$ のとき、この力の場から受ける力は**保存力**であるという。例えば、重力は時間に依存しないので保存力である。

4. 摩擦

参考文献

[1] 大野克嗣, 非線形な世界 (東京大学出版会, 2009).