波動論

krollo966

目次

―この文書の読み方―

波動の分野についてのテキストです。

1. 予備知識

1.1. 複素数の定義と性質

定義 1.1.1 (複素数)

$i := \sqrt{-1}$ を**虚数単位**という。定義より $i^2 = -1$。

$z = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R})$ を**複素数**という。複素数全体を $\mathbb{C}$ と書き、$z \in \mathbb{C}$ のように書く。

$z^* := x - iy$ を $z = x + iy$ の**複素共役（共役複素数）**という。♣

1.2. オイラーの公式

定義 1.2.1 (複素数の極座標表示)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおき、$\cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r}$ とおくと、

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

と表記できる。この表示を極座標表示とか極形式と呼ぶ。

$\cos\theta + i\sin\theta$ の部分が頻繁に出てくるので、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と書くことにする。これをオイラーの公式と呼ぶ。♣

$e^{i\theta}$ と（指数関数と同じように）書いたが、実はこのように定義した $e^{i\theta}$ が実数の場合と同じように指数法則を満たす。

定理 1.2.2 (指数法則の一部と微分公式)

$\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ とすると、

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\ \left(e^{i\theta}\right)^n &= e^{in\theta} \\ \left(e^{i\theta}\right)' &= ie^{i\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

♡

証明.

$$
\begin{aligned}
e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\
\left(e^{i\theta}\right)^n &= e^{i\theta}e^{i\theta}...e^{i\theta} \\
&= e^{i(\theta+...+\theta)} \\
&= e^{in\theta} \\
\left(e^{i\theta}\right)' &= (\cos\theta + i\sin\theta)' \\
&= -\sin\theta + i\cos\theta \\
&= i(i\sin\theta + \cos\theta) \\
&= ie^{i\theta}
\end{aligned} \tag{3}
$$

□

厳密には複素引数の指数関数を矛盾なく定義してオイラーの公式を証明したりする必要がある。この資料では詳細は割愛する。$e^{i\theta}$ は $\cos\theta + i\sin\theta$ の便利な略記くらいに思っておけば OK。

また、このあと e^{λ} $(\lambda \in \mathbb{C})$ が出てくるが、これも $\lambda = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とすると $e^{\lambda} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ の略記だとして、実数のときと同じように指数法則や微積分の公式が成り立ってると思ってよい。

1.3. 微分方程式

波動方程式を解くときに定数係数の 2 階常微分方程式が出てくるので、その説明。

1.3.1. 定数係数の 2 階斉次常微分方程式

$\gamma \in \mathbb{R}$ として

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \gamma y \tag{4}
$$

という形の方程式を定数係数の 2 階斉次常微分方程式と呼ぶ。

定理 1.3.1 (線型方程式)

y_1, y_2 が独立な解のとき、その線型結合 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ も解。また、これが一般解（この形のものに尽きる）。

♡

これは 2 階微分して再び y が現れているので、そのような関数として $y(x) = e^{\alpha x}$, $(\alpha \in \mathbb{C})$ がある。

$y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ である。 これを 式 4 に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 e^{\alpha x} &= \gamma e^{\alpha x} \\
(\alpha^2 - \gamma)e^{\alpha x} &= 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

$e^{\alpha x} \neq 0$ だから、

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \gamma &= 0 \\ \alpha &= \pm\sqrt{\gamma} \end{aligned} \tag{6}$$

よって $\gamma \neq 0$ のとき、二つの解 $e^{\pm\sqrt{\gamma}x}$ を持つ。

線型常微分方程式の性質から、$\gamma \neq 0$ のときの一般解は $c_1 e^{\sqrt{\gamma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}x}$ である。

$\sqrt{\gamma}$ の γ の正負によって場合分けが発生する。

i) $\gamma > 0$ の場合

一般解は

$$c_1 e^{\sqrt{\gamma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}x} \tag{7}$$

ii) $\gamma < 0$ の場合

$\gamma = -\omega^2$ $(\omega \in \mathbb{R})$ とおくと、$\alpha^2 = \gamma = -\omega^2 = (i\omega)^2$ だから　$\alpha = \pm i\omega$ という純虚数になる。

よってオイラーの公式から一般解は

$$\begin{aligned} c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x} &= (c_1 + c_2)\cos(\omega x) + (c_1 - c_2) i \sin(\omega x) \\ &= A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \quad (A = c_1 + c_2, B = (c_1 - c_2)i) \end{aligned} \tag{8}$$

また、$\gamma = 0$ の場合は　$\alpha = 0$ であり独立な 2 つの解を持たないので、個別に考える。$\gamma = 0$ の場合は方程式が $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ だから、これを積分して $y = c_1 x + c_2$ $(c_1, c_2$ は積分定数) を得る。

2. 波動

2.1. 波動方程式

(x, t) における弦の変位を $u(x, t)$ とする。

弦の $[x, x + \Delta x]$ の部分に対する運動方程式を考える。

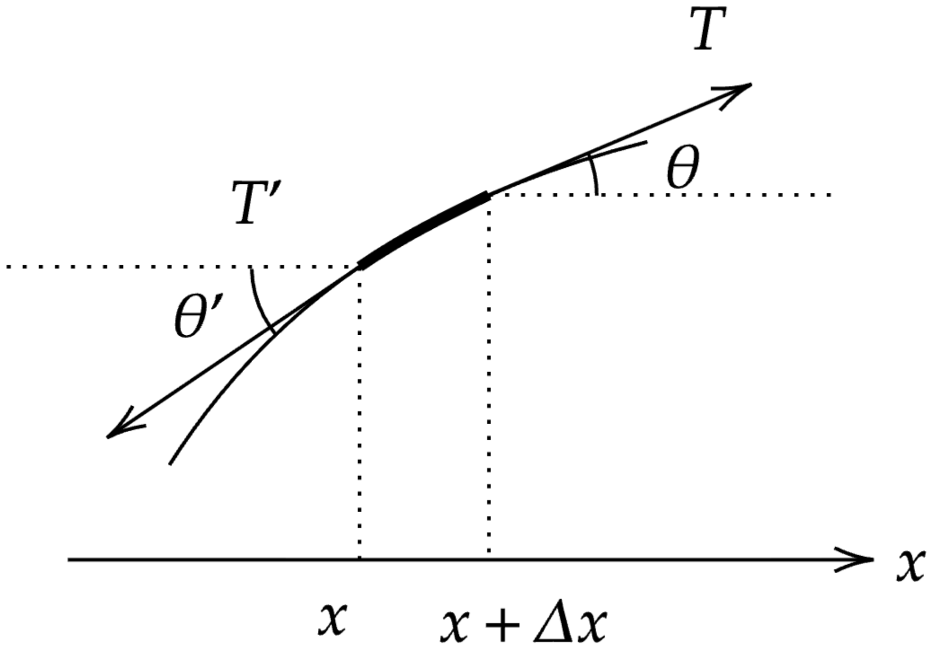

図 1: 弦の微小部分にかかる力

微小区間での質量を Δm とする。微小区間では弦は上下方向にのみ運動すると仮定してよい。したがって水平方向の力は釣り合っているので、

$$T\cos\theta = T'\cos\theta'$$
$$\Delta m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T\sin\theta - T'\sin\theta' \tag{9}$$

変位が小さいのでしたがって θ, θ' も小さいので、$\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$ と近似すると

$$T = T'$$
$$\Delta m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T(\theta - \theta') \tag{10}$$

ここで、θ, θ' はそれぞれ $x+\Delta x, x$ における傾きだから、$\theta \approx \theta$ という近似を使うと

$$\theta = \tan\theta = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$
$$\theta' = \tan\theta' = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$
$$\therefore \theta - \theta' = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{11}$$

ここで、テイラー展開を用いると

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x \tag{12}$$

だから、 式 11 と 式 12 を 式 9 に代入して

$$\Delta m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Delta x \tag{13}$$

である。$\sigma = \Delta m / \Delta x$ とおくと、これは単位長あたりの質量（線密度）である。一様な弦の場合は σ は定数である。 $v^2 = T/\sigma$ とおくと　式 13 は

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{14}$$

である。これを**波動方程式** と呼ぶ。

2.2. 連続の式

定義 2.2.1 (エネルギー密度とエネルギー流束)

$$\begin{gathered} \mathcal{E} := \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ J := -v^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \end{gathered} \tag{15}$$

をそれぞれ**エネルギー密度**、**エネルギー流束**という。 ♣

法則 2.2.2 (連続の式)

$\mathcal{E}$ をエネルギー密度、J をエネルギー流束とすると、

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

が成り立つ。これを**連続の式**という。 ♡

証明.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \tag{17}$$

波動方程式の両辺に $\frac{\partial u}{\partial t}$ をかけると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-v^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) = 0
\end{aligned} \tag{18}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\
J = \left(-v^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

とおくと

$$
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \tag{20}
$$

□

2.3. 固定端の弦の振動

$x = 0, L$ で固定された弦の変位を $u(x,t)$ とする。

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ のもとで波動方程式 式 14 を解く。

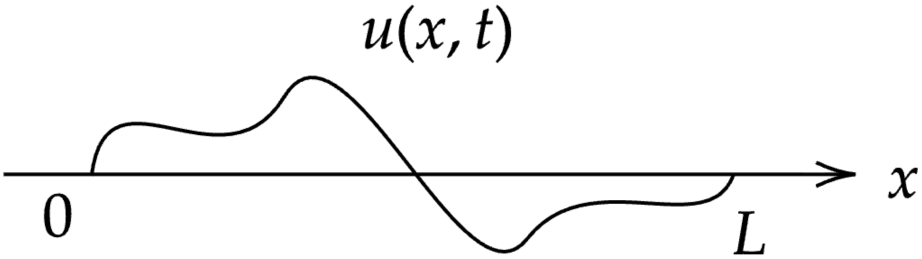

図 2: 固定端の弦

$u(x,t) = X(x)T(t)$ が解になっていると仮定して 式 14 に代入すると、

$$
\begin{aligned}
X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2 T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \\
\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{21}
$$

これは定数関数でなくてはならないので、その定数を κ とおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\kappa}{v^2} X(x) \\
\frac{\mathrm{d}^2 T(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \kappa T(t)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

これらはそれぞれ 2 階の定数係数常微分方程式。

2.3.1. 空間解 $X(x)$

まずは空間解 $X(x)$ について。

$\frac{\kappa}{v^2} = \gamma$ とおくと、κ の正負は　γ　の正負に一致する。

i) $\gamma > 0$ のとき

一般解は $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\gamma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}x}$。$X(0) = X(L) = 0$ という境界条件から、

$$
\begin{aligned}
X(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\
X(L) &= c_1 e^{\sqrt{\gamma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}L} = 0 \\
c_1 e^L &\left(e^{\sqrt{\gamma}} - e^{-\sqrt{\gamma}}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

で、$e^{\sqrt{\gamma}} \neq e^{-\sqrt{\gamma}}$ であるから、$c_1 = 0$ である。つまり一般解も 0 だけであり、これは弦が全く振動しない場合に相当する。

ii) $\gamma = 0$ のとき

$X(x) = c_1 x + c_2$ であり、$X(0) = c_2 = 0, X(L) = c_1 L + c_2 = c_1 L = 0$ だから $c_1 = 0$ となる。つまり、この場合も弦が振動しない場合に対応する。

iii) $\gamma < 0$ のとき

$\gamma = -k^2$ $(k \in \mathbb{R})$ とおくと一般解は

$$
X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \tag{24}
$$

で、$X(0) = A = 0$ である。$X(L) = B\sin(kL) = 0$ だから、

$$
\begin{aligned}
\sin(kL) &= 0 \\
\therefore k &= \frac{m\pi}{L} \quad (m \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
\tag{25}
$$

という条件が得られる。ここで、$\sin(-x) = -\sin(x)$ で、$\sin(0) = 0$ だから、

$$
X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{26}
$$

が第一式の解である。

2.3.2. 時間解 $T(t)$

$\gamma > 0$ とするとあまり意味のある関数が出てこないので、以後 $\gamma < 0$ とする。

$\gamma = \frac{\kappa}{v^2} < 0$ だから $\kappa < 0$ である。$\kappa = -\omega^2$ $(\omega \in \mathbb{R})$ とおくと、$T(t)$ は

$$
T(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{27}
$$

となる。C, D は初期条件によって定まる。

$\kappa = \gamma v^2 = -k^2 v^2 = -(kv)^2 = -\omega^2$ だから、$\omega = kv$ で、$k = m\pi/L$ だから、$\omega = mv\pi/L$

$$\omega = \frac{mv\pi}{L} \quad (m \in \mathbb{Z}) \tag{28}$$

よって第二式の解は

$$T_n(t) = \left(C_n \cos\left(\frac{nv\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{nv\pi}{L}t\right)\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{29}$$

$B_n C_n = a_n, B_n D_n = b_n$ とすると、 式 26 、 式 29 の和をとったものもまた解になることから、波動方程式の解　$u(x,t) = X(x)T(t)$ は

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(a_n \cos\left(\frac{nv\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{nv\pi}{L}t\right)\right) \end{aligned} \tag{30}$$

となる。微分方程式の解の存在と一意性という数学の一般論から、解はこれに尽きる。

2.4. 気柱の共鳴

2.4.1. 気柱の運動方程式

円柱状の密度 ρ の気柱を考え、微小な厚み Δx を持つ空気塊に注目する(図 3)。この空気塊の質量は $\Delta m = \rho S \Delta x$。

この微小な空気塊の (x,t) における圧力を $p(x,t)$ と書くと、空気塊が受ける力は

$$\begin{aligned} F &= S(p(x,t) - p(x+\Delta x, t)) \\ &= -S\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \end{aligned} \tag{31}$$

だから、運動方程式は

$$\begin{aligned} \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -S\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \tag{32}$$

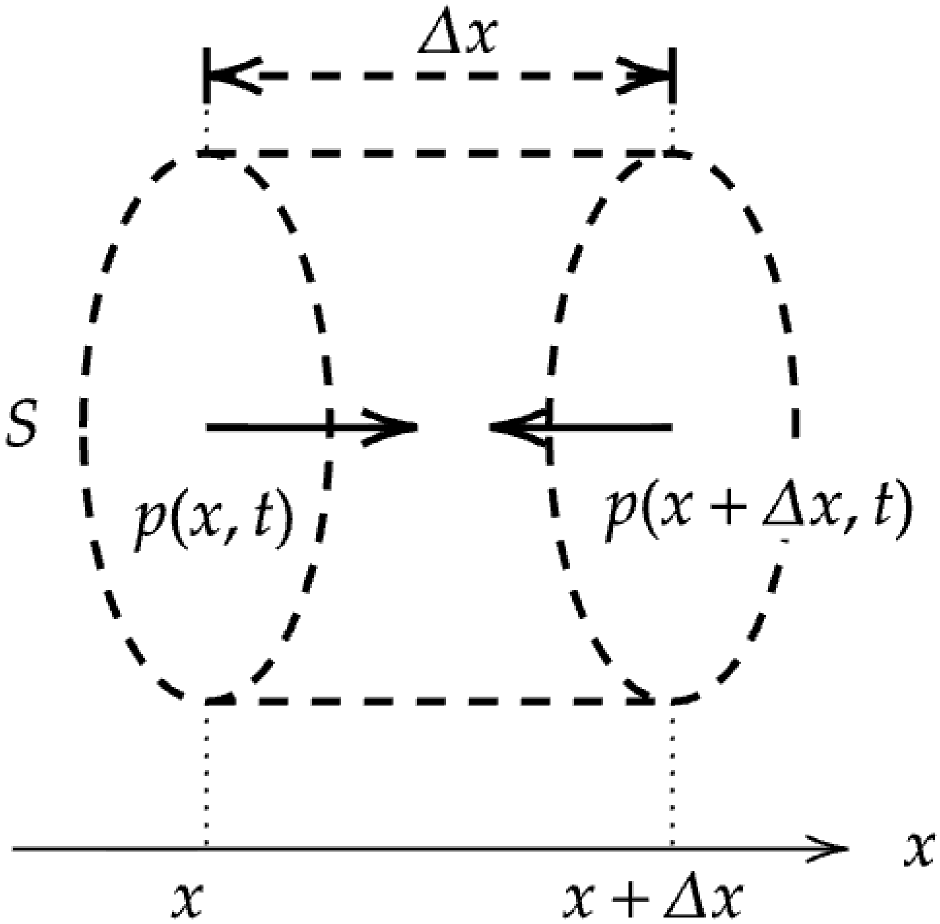

図 3: 微小な空気塊に働く力

2.4.2. 体積弾性率

- 体積歪み $\Delta V/V$: もとの体積 V に対して圧力をかけたことで変化した体積 ΔV の比率
- 応力 Δp: 加わった圧力の変化分 $\Delta p = p - p_0$

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} \tag{33}$$

体積弾性率は、直観的には「力を加えたときどのくらい歪むか」を表す。音波による圧力の変化を考えるとき、Δp も ΔV も充分小さく、その比 $\Delta p/\Delta V$ は定数、すなわち体積弾性率は定数であるような範囲にあるとしてよい。

気柱内の空気は、音波により変位することで、各地点の体積が変化する。気柱の断面積を S として、点 x における微小な厚み Δx を持つ空気塊の体積は $V = S\Delta x$ から $V + \Delta V = S(\Delta x + u(x+\Delta x,t) - u(x,t)$ に変化するので、

$$\begin{aligned}\Delta V &= S(u(x+\Delta x,t) - u(x,t)) \\ &= S\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x \end{aligned} \tag{34}$$

よって体積歪み $\Delta V/V$ は

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{35}$$

したがって圧力の変化は

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} = -K\frac{\partial u}{\partial x} \tag{36}$$

よって

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Delta p}{\partial x} = -K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{37}$$

だから、

これを 式 32 に代入すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{38}$$

$v^2 = K/\rho$ とおくと、

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{39}$$

となり、式 14 に一致する。したがって、気柱内部の音波についても、波動方程式に適当な境界条件を与えて解けばよい。

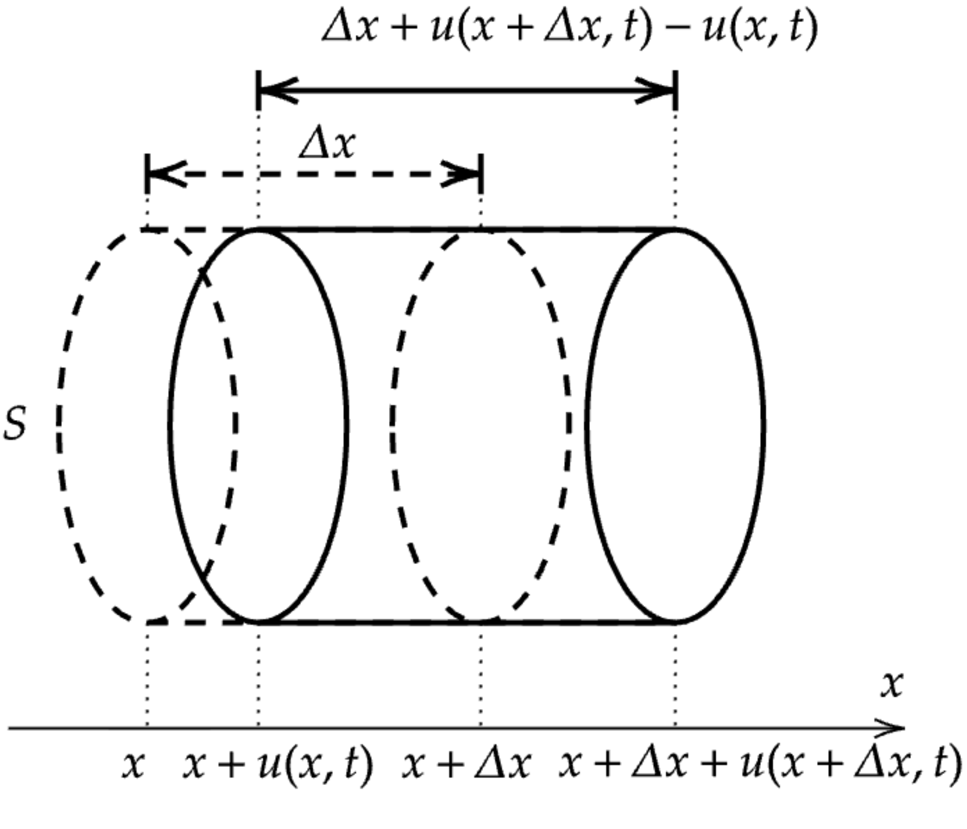

図 4: 体積の変化

2.4.3. 気柱の波動方程式

片側が閉じていて片側が開いている気柱を考える。

境界条件について：

- 閉口端では空気が変位できないので、$u(0, t) = 0$。
- 開口端では外気に触れているので、圧力が大気圧と同じで、 $p(L, t) = p_0$ になっている。したがって $-K\frac{\partial u}{\partial x} = \Delta p = p(L, t) - p_0 = 0$。よって $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$

この境界条件 $(\partial u(L, t))/(\partial x) = 0$ は、$x = L$ のところで変位が極大または極小になる、すなわち $x = L$ が定常波の腹になることを表している。

これも固定端の弦のときと同じように $X(x)T(t)$ という解を持つ。

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(kx) + B\sin(kx) \\
X'(x) &= -kA\sin(kx) + kB\cos(kx)
\end{aligned}
\tag{40}
$$

これに境界条件を代入すると

$$
\begin{aligned}
X(0) &= A = 0 \\
X'(L) &= kB\cos(kL) = 0 \\
k_m \coloneqq k &= \frac{(2m-1)\pi}{2L} \quad (m \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$\cos(-k_m x) = \cos(k_m x)$ だから、$n \in \mathbb{N}$ の範囲で $B_n \in \mathbb{C}$ として

$$
X_n = B_n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2L}x \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{42}
$$

が空間解。

時間解は前節と同様、$\omega_n = k_n v$ として

$$
T_n(t) = C_n\cos\left(\frac{(2n-1)v\pi}{2L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{(2n-1)v\pi}{2L}t\right) \tag{43}
$$

したがって、前節と同様に $B_n C_n = a_n, B_n D_n = b_n$ とおいて、すべてのモードを重ね合わせると

$$
u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)\left(a_n\cos\left(\frac{(2n-1)v\pi}{2L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{(2n-1)v\pi}{2L}t\right)\right) \tag{44}
$$

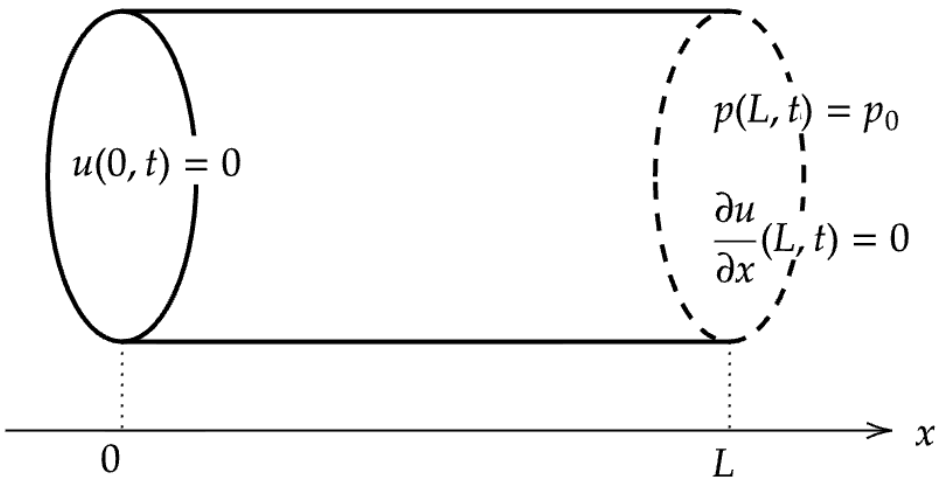

図 5: 片側が開いた気柱

2.4.4. 開口端補正

現実の気柱では、定常波の開口端における腹は、空気の慣性により管の端 $x=L$ よりも少しだけはみ出た位置 $x=L+\Delta L$ の部分に位置している。このはみ出した分 $\Delta L \approx 0.6\times$ 半径 を開口端補正と呼び、実効的な管の長さを $L+\Delta L$ として計算することで、より正確な共鳴周波数を求めることができる。

2.5. うなり

2.6. 光

2.6.1. 真空中のマクスウェル方程式

真空($\rho=0, \boldsymbol{j}=0$)でのマクスウェル方程式(電場と磁場が満たす偏微分方程式)は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \quad (\text{電場のガウスの法則}) \tag{45}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad (\text{磁場のガウスの法則}) \tag{46}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (\text{ファラデーの電磁誘導の法則}) \tag{47}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (\text{アンペールの法則と変位電流}) \tag{48}$$

式 47 に回転 $\nabla\times$ をかけると

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\times\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{49}$$

である。また、ベクトル解析の公式 式 85 より

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{50}$$

この公式に電場のガウスの法則 式 45 を代入すると

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{51}$$

この式とアンペールの法則 式 48 を　式 49 に代入すると

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2 \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \\
&= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \qquad (52)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \boldsymbol{E} \qquad (53)
$$

これは 3 次元の波動方程式なので、電場の振動は波動として光速　$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ で空間を伝わることがわかる。

2.6.2. 屈折率

3. 付録

以下に出てくる関数は必要な回数微分ができるものとする。

4. ベクトル解析

4.1. 3 次元ベクトルの外積

命題 4.1.1 (外積の分配法則)

外積について分配法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ が成り立つ ♠

証明. 図 6 から、外積について分配法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ が成り立つ：

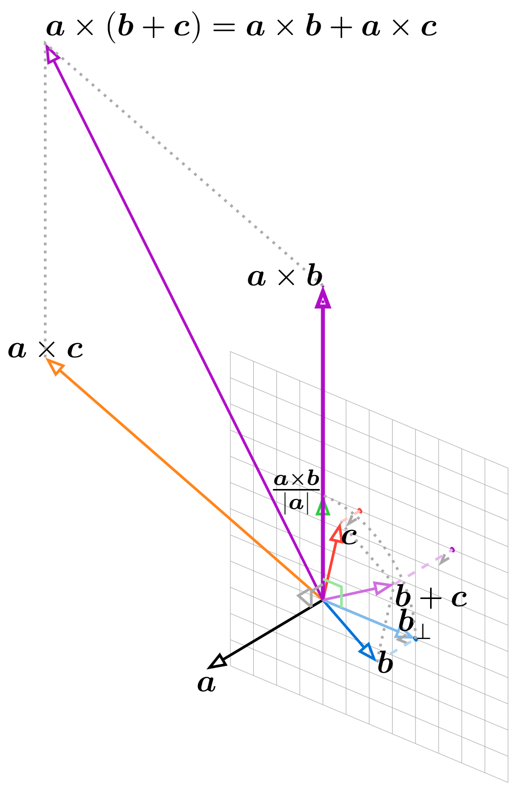

図 6: 外積の分配法則の幾何学的解釈

□

定義 4.1.2 (自然基底)

$\mathbb{R}^3$ における単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{54}$$

を自然基底という。

♣

自然基底同士は互いに直交する単位ベクトルなので、以下の等式が成り立つ：

命題 4.1.3 (自然基底の外積)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x,\\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y,\\ \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x,\\ \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_y,\\ \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0,\end{gathered} \tag{55}$$

♠

命題 4.1.4 (外積の成分計算)

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{56}$$

♠

証明. 自然基底を使うと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{b} &= b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y + b_z \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{57}$$

とおけるので、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は自然基底の外積と分配法則より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z) \times (b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y + b_z \boldsymbol{e}_z) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{58}$$

□

4.2. ベクトル解析の略記

4.2.1. アインシュタインの縮約記法

ベクトル解析の計算では和の記号 $\sum_{i=1}^{n}$ が頻繁に出てくるので、同じ添字が 2 回出てきたらその添字について 1 から n までの和をとることにする。この省略記法をアインシュタインの縮約記法という。

例. $n = 3$ (3 次元)のとき、

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_i B_i \quad (\text{内積}) \tag{59}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \partial_i A_i \quad (\text{発散}) \tag{60}$$

4.2.2. クロネッカーのデルタ

定義 4.2.1 (クロネッカーのデルタ)

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{61}$$

をクロネッカーのデルタという。

♣

4.2.3. エディントンのイプシロン

定義 4.2.2 (エディントンのイプシロン)

以下のように定められる記号 ε_{ijk} ($i, j, k \in \{x, y, z\}$) をエディントンのイプシロン（あるいはレヴィ＝チヴィタ記号）という：

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (x,y,z) \text{ or } (y,z,x) \text{ or } (z,x,y) \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (z,y,x) \text{ or } (x,z,y) \text{ or } (y,x,z) \\ 0 & \text{if } i = j \text{ or } j = k \text{ or } k = i \end{cases} \tag{62}$$

♣

明示的に書くとこう：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1 \quad & (x, y, z \text{ の並びを変えない}) \\ \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = -1 \quad & (x, y, z \text{ の隣り合う一文字を入れ替える}) \\ \text{otherwise} = 0 \quad & (\varepsilon_{xxy} \text{ など添え字に重複がある}) \end{aligned} \tag{63}$$

命題 4.2.3 (イプシロンと外積)

$i, j, k \in \{x, y, z\}$ とすると

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{64}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k \tag{65}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \tag{66}$$

♠

証明. エディントンのイプシロンとアインシュタインの縮約記法を用いると、式 55 は

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{67}$$

であり、ベクトル $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = b_i \boldsymbol{e}_i$ の外積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_i \boldsymbol{e}_i) \times (b_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= a_i b_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \\ &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k \end{aligned} \tag{68}$$

よって $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の第 k 成分 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k$ は

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \tag{69}$$

□

命題 4.2.4 (ε-δ の公式)

アインシュタインの規約を使うと、δ_{ij} と ε_{ijk} の間には以下の関係式が成り立つ：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{70}$$

♠

証明. 左辺は k についての和であり、i, j, k が全て異なり、かつ k, l, m が全て異なる場合にのみ項が 0 にならずに残る。

i, j を決めれば k が決まり、k は l, m と異なる。つまり、$\{i, j\} = \{l, m\}$ となっている必要がある。

i) $i = l$ かつ $j = m$ の場合。

左辺は $\left(\varepsilon_{ijk}\right)^2 = 1$ で、右辺は $\delta_{ii}\delta_{ij}\delta_{ji} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ となり両辺は一致する。

ii) $i = m$ かつ $j = l$ の場合。

左辺はイプシロンの反対称性から $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -\left(\varepsilon_{ijk}\right)^2 = -1$ で、右辺は $\delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$ となり両辺は一致する。

iii) それ以外の場合。

左辺は 0 で、右辺も 0。

したがって、いずれの場合も両辺は一致する。 □

4.3. ベクトル解析における種々の定義

定義 4.3.1 (スカラー場、ベクトル場、ナブラ)

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を**スカラー場**という。
- $A_x, A_y, A_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とすると、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を**ベクトル場**という。
- $\nabla_x := \frac{\partial}{\partial x}$ のように書くことにする。

$$\nabla := \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{pmatrix} \tag{71}$$

と書いて、ナブラと読む。

$$\mathrm{grad}\ \varphi := \nabla\varphi = \begin{pmatrix} \nabla_x \varphi \\ \nabla_y \varphi \\ \nabla_z \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{スカラー場の勾配})$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} := \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z \quad (\text{ベクトル場の発散})$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} := \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \nabla_y A_z - \nabla_z A_y \\ \nabla_z A_x - \nabla_x A_z \\ \nabla_x A_y - \nabla_y A_x \end{pmatrix} \quad (\text{ベクトル場の回転}) \tag{72}$$

$$\Delta := \nabla^2 := \nabla \cdot \nabla = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 \quad (\text{ラプラシアン}) \tag{73}$$

♣

4.4. ベクトル解析の公式

定義 4.4.1 (等位集合)

スカラー場 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して以下のように定義した集合を**等位面**という：

$$S = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \ \mathtt{mid}\ \varphi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{74}$$

♣

命題 4.4.2 (等位面と勾配の直交性)

等位面は $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ と直交する。

♠

証明.

$$S = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{75}$$

の点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) S$ に対して以下が成り立つ：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = c \tag{76}$$

この式の両辺を t で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\boldsymbol{r}(t)) = \boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0 \tag{77}$$

これは $\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}))$ と $\boldsymbol{r}'(t)$ が直交することを意味する。

□

命題 4.4.3 (スカラー三重積)

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{78}$$

♠

証明. アインシュタインの規約とエディントンのイプシロンを使うと

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{79}$$

□

命題 4.4.4 (ベクトル三重積)

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{80}$$

♠

証明.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))_i &= \varepsilon_{jki} a_j (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_k \\
&= \varepsilon_{jki} a_j \varepsilon_{lmk} b_l c_m \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
&= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) a_j b_l c_m \\
&= \delta_{il}\delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im}\delta_{jl} a_j b_l c_m \\
&= a_j b_i c_j - a_j b_j c_i \\
&= b_i \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - c_i (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})
\end{aligned} \tag{81}$$

他の成分についても同じように計算できるので、

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{82}$$

□

命題 4.4.5 (回転の発散)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{83}$$

♠

証明. 偏微分は可換だがイプシロンは反対称であることに気をつける。また、和の順序は自由なのでダミー変数を途中で入れ替えてよい。アインシュタインの規約を使って計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}_i(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_i \\ &= \boldsymbol{\nabla}_i\varepsilon_{jki}\boldsymbol{\nabla}_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k \\ &= \varepsilon_{jik}\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{\nabla}_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k \end{aligned} \tag{84}$$

$\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k = -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k$ なので $\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j A_k = 0$ 。

□

命題 4.4.6 (回転の回転)

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{85}$$

♠

証明. ベクトル三重積の公式において $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\nabla$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}$ と置き換えると、

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{86}$$

となる。 □

命題 4.4.7 (勾配の回転)

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0 \tag{87}$$

♠

証明. 命題 4.4.5 の証明と同じようにダミー変数の入れ替えと偏微分の可換性、イプシロンの反対称性を用いて

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi))_k &= \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\left(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi\right) \\ &= \varepsilon_{jik}\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{\nabla}_i\varphi \\ &= -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{\nabla}_j\varphi \end{aligned} \tag{88}$$

$\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\left(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi\right) = -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\left(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi\right)$ なので $\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_i\left(\boldsymbol{\nabla}_j\varphi\right) = 0$。したがって
$(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi))_k = 0$。 □

定理 4.4.8 (ガウスの定理)

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{89}$$

♡

証明.

Prove it later.

□

定理 4.4.9 (ストークスの定理)

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{90}$$

♡

証明.

Prove it soon.

□

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ のとき、 命題 4.4.7 $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0$ より $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ となる。この逆が成り立つ。つまり $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ のとき $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ となるスカラー場 φ が存在する。

定理 4.4.10 (ポテンシャルの存在条件)

領域が単連結のとき（穴とか空いてないとき）ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の条件は同値：

- $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ となるスカラー場 φ が存在する
- 領域内の任意の点で $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
- 領域内の任意の 2 点を結ぶ線積分が途中の経路によらない:

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{91}$$

- 領域内の任意の閉曲線 C について線積分が 0:

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{92}$$

♡

証明.

ストークスの定理を使って証明する。証明は略。

□