

# 静力学

krollo966

## 目次

1. 質点系の運動方程式とその帰結 .....	1
1.1. 質点系の運動量保存則 .....	1
1.2. 質点系の角運動量保存則 .....	2
2. 剛体の静力学 .....	4
3. 慣性力 .....	4
3.1. ガリレイ座標変換 .....	4
3.2. 慣性力 .....	5

—この文書の読み方—

力やモーメントが釣り合う場合を考える。

## 1. 質点系の運動方程式とその帰結

**Definition 1.1** (質点系と剛体):  $N$  個の質点からなる系を  $N$  質点系(system of  $N$  particles) という。質点系のうち、物体の任意の 2 点間の距離が変わらない物体を剛体(rigit body)という。

剛体は、固くて形の変わりにくい物体の理想化である。

### 1.1. 質点系の運動量保存則

$N$  質点系において、質点同士に働く力を内力(internal force)、それ以外の力を外力(external force)という。 $i$  番目の質点にはそれ以外の質点からの内力  $\sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbb{F}_{ij}$  と外力  $\mathbb{F}_i^{(e)}$  が働く。したがって  $i$  番目の質点 (質点  $i$  とする) に働く力は

$$\mathbb{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbb{F}_{ij} + \mathbb{F}_i^{(e)} \quad (1)$$

と表される (図 1)。質点  $i$  の運動方程式(equation of motion)は

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbb{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbb{F}_{ij} + \mathbb{F}_i^{(e)} \quad (2)$$

と表される。ここで  $m_i$  は質点  $i$  の質量、 $\mathbf{v}_i(t)$  は質点  $i$  の速度ベクトルである。

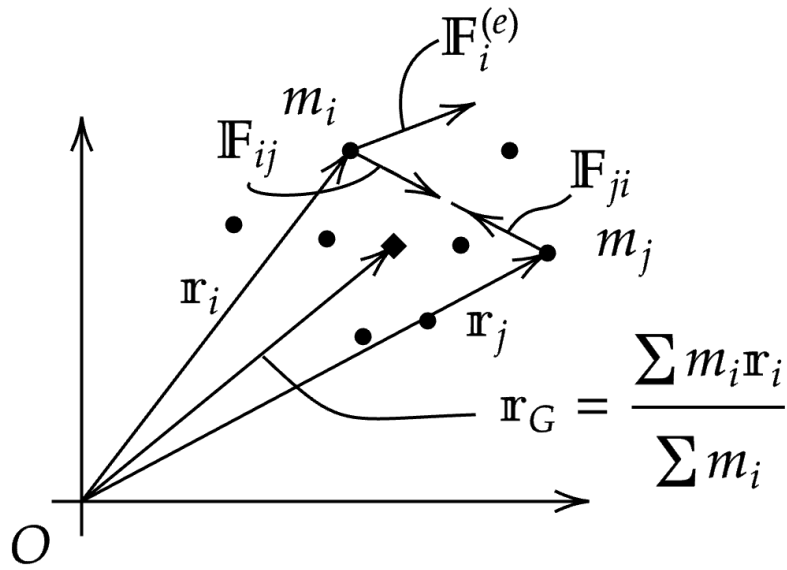


図 1:  $N$  質点系の図。質点  $i$  と  $j$  に互いに働く内力  $\mathbb{F}_{ij} = -\mathbb{F}_{ji}$ 、質点  $i$  に働く外力  $\mathbb{F}_i^{(e)}$ 、質量中心の位置ベクトル  $\mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$  を示してある。

運動方程式は質点系の全ての質点に対して成り立つから、その総和をとると、作用反作用の法則より  $\mathbb{F}_{ij} + \mathbb{F}_{ji} = 0$ 。よって内力の総和は  $0$  となる。したがって、全質量を  $M$ （すなわち  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ ）とおき、 $\mathbf{v}_G(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t)}{M}$  とおくと、運動方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i(t) &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbb{F}_{ij} + \mathbb{F}_i^{(e)} \right) \\
 M \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i(t)}{M} &= \sum_{i=1}^N \mathbb{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbb{F}_{ij} \right) \\
 M \dot{\mathbf{v}}_G(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{F}_i^{(e)} \tag{3}
 \end{aligned}$$

これは、全質点が集中した重心に全外力が働いたかのように重心が運動することを表している（作用反作用の法則が成り立つ場合の内力は重心の運動に影響しない）。

**Theorem 1.1.1** (全運動量保存則): 質点系に働く外力の合力  $\mathbb{F}^{(e)}$  が  $0$  のとき、質点系の全運動量  $\mathbb{P}(t) := M \mathbf{v}_G(t)$  は保存される。

## 1.2. 質点系の角運動量保存則

質点  $i$  の運動方程式に  $\mathbf{r}_i(t)$  を左から掛けて外積を作ると

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i(t) &= \mathbf{r}_i(t) \times \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i^{(e)} \\
m_i \mathbf{r}_i(t) \times \dot{\mathbf{v}}_i(t) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N (\mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_{ij}) + \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i^{(e)}
\end{aligned} \tag{4}$$

これを全質点について足し合わせると、

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t) \times \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_{ij} \right) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i^{(e)} \tag{5}$$

左辺について、積の微分公式より

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i \tag{6}$$

だが、 $\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = 0$  だから、 $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i$ 。よって左辺は  $\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$  となる。 $\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$  を質点  $i$  の**角運動量**(angular momentum)と呼び、 $\mathbf{L}_i$  とかく。この記号を使うと、左辺は  $\dot{\mathbf{L}} := \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{L}}_i$  となる。

また、右辺の内力のモーメントの和に現れる  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}$  は、作用反作用の強法則（作用と反作用が互いに逆ベクトルかつ同じ作用線に乗る）を満たすとすると 0 になる（図 2）。よって右辺は  $\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$  となる。 $\mathbf{N}_i^{(e)} := \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$  は質点  $i$  の原点に関する**トルク**(torque)という。この記法を使うと右辺は  $\mathbf{N}^{(e)} := \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i^{(e)}$  となる。したがって式 5 は

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \\
\therefore \dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{N}^{(e)}
\end{aligned} \tag{7}$$

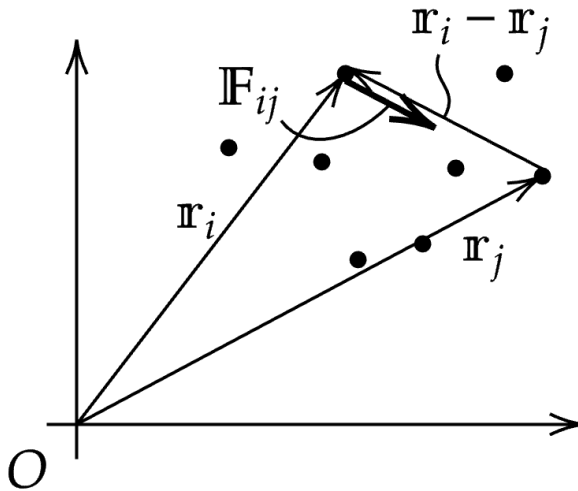


図 2: 作用反作用の強法則。  $\mathbf{F}_{ij} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  のとき外積の定義から  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$ 。

**Theorem 1.2.1** (全角運動量保存則): 質点系に働く外力のモーメント  $\mathbf{N}^{(e)}$  が  $\mathbf{0}$  のとき、質点系の全角運動量  $\mathbf{L}(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(t)$  は保存される。

## 2. 剛体の静力学

剛体が静止しているときには特に重心の速度  $\mathbf{v}_G$  について  $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$  だから、前節の式 3 の左辺を  $\mathbf{0}$  として

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}^{(e)} := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (8)$$

つまり外力が全て重心に集中しているとみなして力の釣り合いの式を立てることができる。さらに、剛体が回転していないときには、剛体の角運動量  $\mathbf{L}$  について  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$  だから、前節の式 5 の左辺を  $\mathbf{0}$  として

$$\mathbf{0} = \mathbf{N}^{(e)} := \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i^{(e)} \quad (9)$$

位置ベクトルの始点（座標系の原点）は任意だから、適当な点の周りのトルクの釣り合いの式を立てることができる。

## 3. 慣性力

### 3.1. ガリレイ座標変換

運動方程式の成り立つ系を**慣性系**(inertial system)という。原点を  $O$  とする慣性系  $S$  に対して等速度運動する系  $S'$  (原点を  $O'$  とする) を考える (図 3)。質量が  $m$  の質点の  $S$  における位置ベクトルを  $\mathbf{r}$ 、 $S'$  における位置ベクトルを  $\mathbf{r}'$  とする。また、 $S$  における  $O'$  の位置ベクトルを  $\mathbf{R}$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{r}' \\ \therefore \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{r}}' \end{aligned} \quad (10)$$

である（この座標変換を**ガリレイ変換**という）。 $S'$  が  $S$  に対して速度  $\mathbf{V}$  の等速度運動しているとき、 $\mathbf{R} = \mathbf{V}t$  だから、 $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}$ 、すなわち

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

である。 $S$  における運動方程式  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  に式 10 と式 11 を代入し、質点に働く力はその座標系においても同じであるとすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} &= m(\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{r}}') = m\ddot{\mathbf{R}} + m\ddot{\mathbf{r}}' = m\ddot{\mathbf{r}}' \\ \therefore m\ddot{\mathbf{r}}' &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (12)$$

つまり、 $S'$  においても運動方程式が成り立つ。慣性系に対して等速度運動する系もまた慣性系であることがわかった。

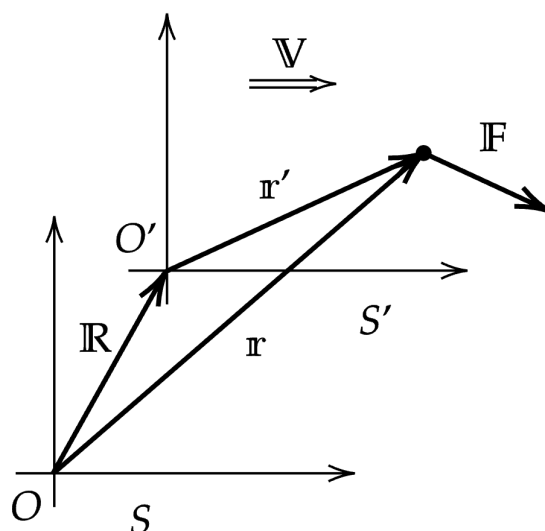


図 3: ガリレイ変換。慣性系  $S$  に対して等速度運動する系  $S'$  の図。

### 3.2. 慣性力

慣性系  $S$  に対して  $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}$  の加速度で運動する系  $S'$  においては

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{r}}') = m\ddot{\mathbf{R}} + m\ddot{\mathbf{r}}' \\ \therefore m\ddot{\mathbf{r}}' &= \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}\end{aligned}\quad (13)$$

となる。つまり慣性系においては外力  $\mathbf{F}$  に加えて、質量  $m$  の質点に働く力として  $-m\mathbf{a}$  が現れる。これを**慣性力**(inertial force)という (図 4)。慣性力はこれまで扱っていた力と違い、反作用が現れない点に留意しておこう。

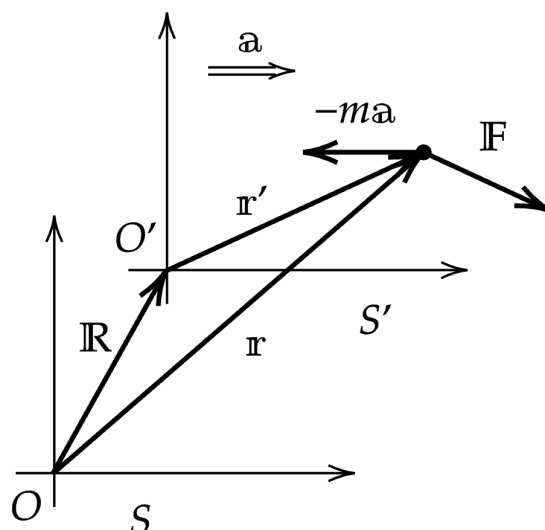


図 4: 慣性系  $S$  に対して加速度  $\mathbf{a}$  で運動する系  $S'$  では、質点に対して慣性力  $-m\mathbf{a}$  が現れる。

**問題 3.2.1** (例題 1. 剛体の釣り合い): 次の文中の  に適する数値 (非負整数) をそれぞれ記入せよ。

図 5 のように、直方体の一様な物体 A が、水平と  $45^\circ$  の傾斜をもつ地盤 B の上に、質量の無視できるロープ C によって取り付けられた構造物がある。物体 A と地盤 B とは、接触しているだけである。物体 A の質量は  $m = 1.0 \times 10^3 \text{ kg}$ 、重力加速度の大きさは  $g = 10 \text{ m/s}^2$ 、物体 A と地盤 B との間の静止摩擦係数および動摩擦係数は  $\mu = \frac{1}{3}$ 、 $\sqrt{2} = 1.4$  とし、ロープ C は十分強く、伸び縮みしないものとする。

- (1) 静止しているとき、ロープ C の張力は  $\square \times 10^3 \text{ N}$  であり、地盤 B が物体 A に作用する抗力の大きさは  $\square \times 10^3 \text{ N}$  である。
- (2) 地震によって、次第に強くなる上下動（鉛直方向の動き）がおこり、ある加速度が物体 A に働いたら、物体 A が転倒（物体 A が地盤 B に対して、滑り・離れなどの動きを起こし、回転して倒れる状態）を起こし始めた。その加速度の大きさは  $\square \text{ m/s}^2$  であり、ロープ C の張力は  $\square \times 10^3 \text{ N}$  である。
- (3) 地震によって、次第に強くなる水平移動が起こり、ある加速度が物体 A に働いたら、物体 A が転倒を起こし始めた。その加速度の大きさは  $\square \text{ m/s}^2$  であり、ロープ C の張力は  $\square \times 10^3 \text{ N}$  である。

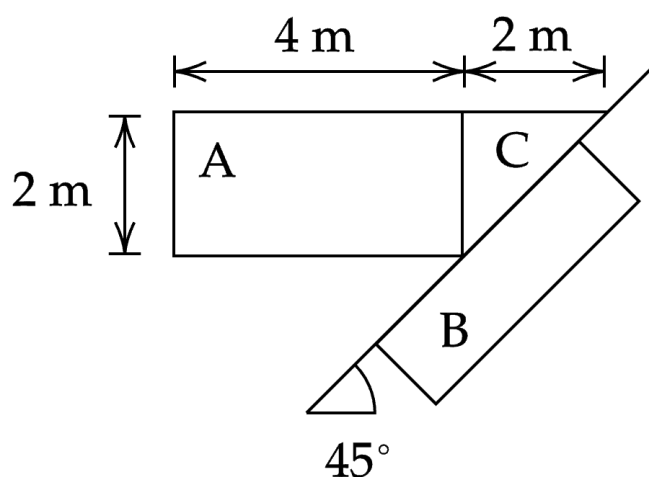


図 5: 問題の設定図。

**解答:** 前節で述べたことから、剛体の内力は剛体の運動に影響しないので、剛体に働く外力だけを考える。古典的な物理学で考える力は 2 種類、すなわち重力と電磁気力である。力学の分野では、地球上では重力、物体の接触している分に電磁気的な反発力が現れる。したがって、力学の問題を解くときにやることは以下の二つ：

1. 物体に働く重力と接触力を描きこみ（図 6）、
2. 適宜座標を設定し、運動方程式を立てて解く。

これで物体の運動の様子がわかる。特に静止剛体の場合、

3. 物体に働く力の釣り合いの式とトルクの釣り合いの式をそれぞれ考える。

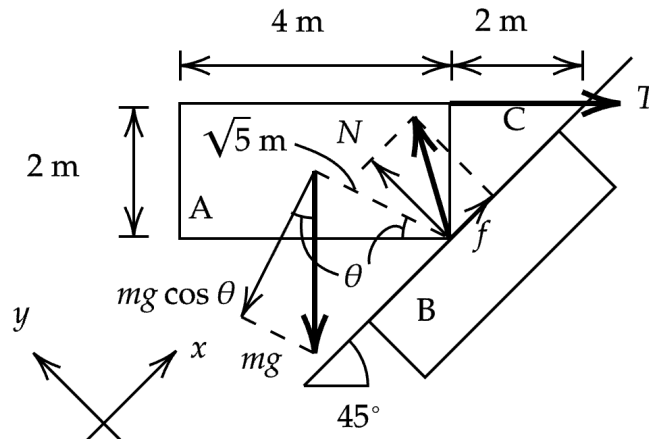


図 6: 重力と接触力を書き込む。抗力のうち、斜面に平行な成分を摩擦力、垂直な成分を垂直抗力と呼ぶ。ここでは、斜面に水平な方向を  $x$  軸、鉛直な方向を  $y$  軸とした。

- (1) 物体 A に働く力を描き込み (図 6)、A と B の接触点の周りのトルクの釣り合いの式を立てる： $2T = \sqrt{5}mg \cos \theta$ 。 $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  だから、 $T = mg = 10 \times 10^3 \text{ N}$ 。また、力の釣り合いの式を立てると、

- $x$  軸方向： $f + T \cos 45^\circ = mg \cos 45^\circ$
- $y$  軸方向： $N = T \sin 45^\circ + mg \sin 45^\circ$

だから、 $T = mg$  を代入すると  $f = 0$ 、抗力は  $\sqrt{N^2 + f^2} = N = \sqrt{2}mg = 14 \times 10^3 \text{ N}$ 。

- (2) 地盤が上下動することによってこの物体に働く加速度の大きさを  $a$  (下向きを正とする) とすると、地盤 B から見て物体 A には慣性力  $-ma$  が働く。するとこの系の下向きの重力加速度が  $g$  から  $g - a$  へと置き換わる (図 7)。したがって、このときのロープ C の張力を  $T'$ 、垂直抗力を  $N'$ 、摩擦力を  $f'$  として、(1) の解答において  $g$  を  $g - a$  に置き換えると、 $T' = m(g - a)$ 、 $N' = \sqrt{2}m(g - a)$ 、 $f' = 0$  となる。物体 A が転倒を起こし始めると  $T' = 0 \text{ N}$  (ロープ C による束縛が解かれてトルクの釣り合いが破れる) または  $N' = 0$  (垂直抗力による束縛が解かれて力の釣り合いが破れる) だから、いずれの場合も  $a = g = 10 \text{ m/s}^2$ 。

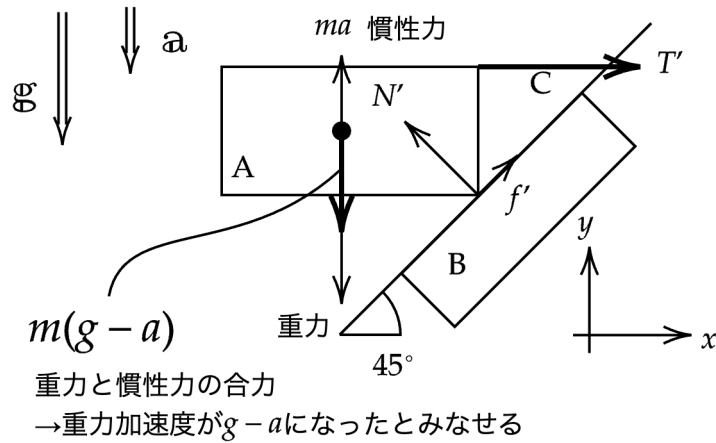


図 7: 物体 A が転倒を起こし始めるときの図。

(3) 慣性系から見た地盤 B の水平右向きの加速度を  $b$  とすると、物体 A には左向きの慣性力  $-mb$  が働く。このときのロープ C の張力を  $T''$ 、垂直抗力を  $N''$ 、摩擦力を  $F''$  とすると、

・力の釣り合い：

▶  $x$  軸方向： $T'' + \frac{1}{\sqrt{2}}f'' - \frac{1}{\sqrt{2}}N'' - mb = 0$

▶  $y$  軸方向： $\frac{1}{\sqrt{2}}f'' + \frac{1}{\sqrt{2}}N'' - mg = 0$

・トルクの釣り合い： $2T'' - 2mg - 1mb = 0$

連立方程式を解くと

$$T'' = \frac{m}{2}(2g + b), \quad N'' = \frac{\sqrt{2}m}{4}(4g - b), \quad F'' = \frac{\sqrt{2}mb}{4} \quad (14)$$

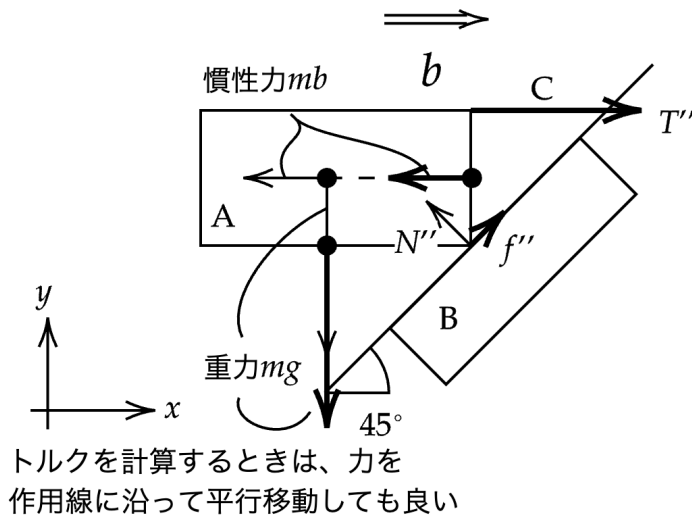


図 8: 物体 A が転倒を起こし始めるときの図。

問題文より、物体 A が転倒し始めるのは  $T'' = 0$  ( $\Leftrightarrow b = -2g$ ; 回転するとき) または  $N'' = 0$  ( $\Leftrightarrow b = 4g$ ; 離れを起こすとき) または  $F'' = \mu N''$  ( $\Leftrightarrow b = g$ ; 最大静止摩擦に達して滑りを起こすとき) のいずれかである。地震により加速



度  $b$  の絶対値  $|b|$  が次第に強くなる時、一番初めに起こるのは  $b = g$  の最大静止摩擦に達する場合だから、このときの加速度は  $b = g = 10 \text{ m/s}^2$  で、 $T'' = \frac{m}{2}(2g + b) = \frac{3}{2}mg = 15 \times 10^3 \text{ N}$ 。

**問題 3.2.2** (例題 2. 剛体の釣り合い): 図 9 のように、滑らかな水平面に置かれた、質量  $W \text{ kg}$ , 半径  $r \text{ m}$  の半円柱 (重心  $G$ ,  $OG = a \text{ m}$ ) に、2 辺の長さ  $h \text{ m}$ ,  $t \text{ m}$  ( $h > t$ )、質量  $f \text{ kg}$  の直方体 (重心  $H$ ) を乗せ、この位置を中心  $O$  より端部  $A$  の方に少しずつ変えたところ、重心  $H$  が  $O$  より  $b \text{ m}$  の位置に達したとき、直方体が滑り始めた。

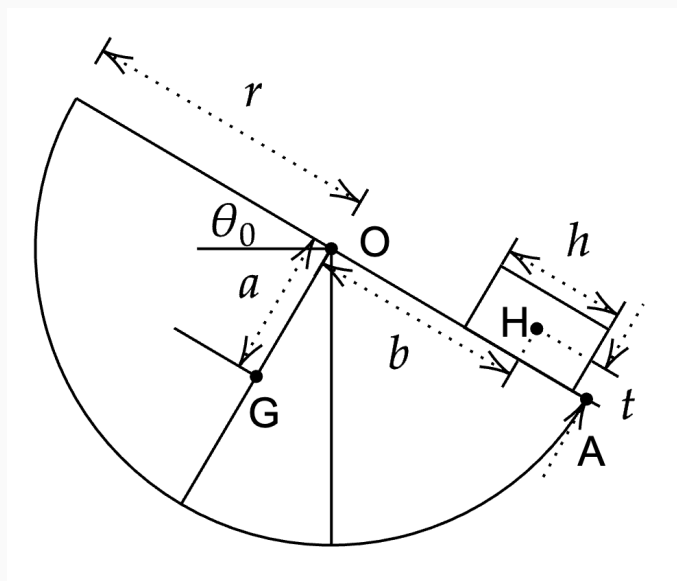


図 9: 問題の設定図。

次に、図 10 のように直方体を立てて、前と同様に、この位置を中心  $O$  より端部  $A$  の方に少しずつ変えたところ、 $H$  が  $O$  より  $c \text{ m}$  ( $c < b$ ) の位置に達したとき直方体が転倒した。以下の文章中の  をそれぞれ埋めよ。

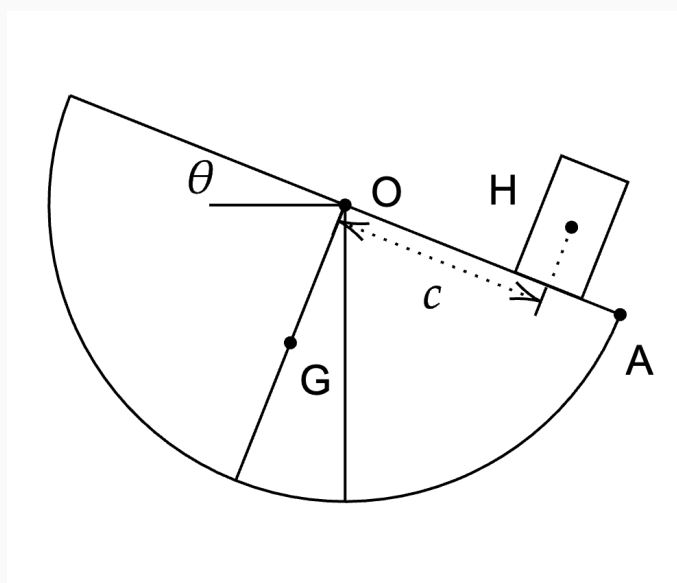


図 10: 問題の設定図。

- (1) 図 9 の直方体が滑り始める直前における OA の水平軸に対する傾斜角を  $\theta_0$  とすれば、このときの半円柱に働く力の、中心 O に関するモーメントの釣り合いの式は  $\boxed{\text{(ア)}}$  である。
- (2) 図 10 の直方体が転倒する直前における OA の水平軸に対する傾斜角を  $\theta$  とすれば、このときの半円柱に働く力の、中心 O に関するモーメントの釣り合いの式は  $\boxed{\text{(イ)}}$  である。また、直方体の転倒直前においては、 $\theta$  と  $h$  および  $t$  の間には、次の関係  $\boxed{\text{(ウ)}}$  が成立する。
- (3) したがって、 $h = \frac{1}{4}r$ ,  $t = \frac{1}{10}r$ ,  $a = \frac{4}{3\pi}r$ ,  $b = \frac{4}{5}r$ ,  $c = \frac{65}{100}r$  とするとき、直方体と半円柱の質量の比  $\frac{w}{W}$  は、式(イ)と式(ウ)にもとづいて計算され、その値は  $\boxed{\text{(エ)}}$  である。また、直方体と半円柱の間の静止摩擦係数は式(エ)にもとづいて計算され、その値は  $\boxed{\text{(オ)}}$  である。ただし、 $\pi \equiv 3.142$  とし、計算結果は四捨五入して小数点以下 2 桁まで求めよ。

解答:

- (1) 直方体は回転していない（角運動量が 0）なので、直方体に対する重力と半円柱から受ける抗力は同じ作用線に乗る。また、直方体が静止している（滑り出す直前）なので、直方体に働く力は釣り合う。つまり抗力は  $wg$ 。半円柱には、重力と直方体による接触力（直方体に対する抗力の反作用）が働く。それぞれ作用線に沿って移動して作用点を O の横に移動させると、力のモーメントの釣り合いは

$$Wga \sin \theta_0 - wg \left( b + \frac{t}{2} \tan \theta_0 \right) \cos \theta_0 = 0$$

$$\therefore \text{(ア)} \quad Wa \sin \theta_0 = w \left( b + \frac{t}{2} \tan \theta_0 \right) \cos \theta_0 \quad (15)$$

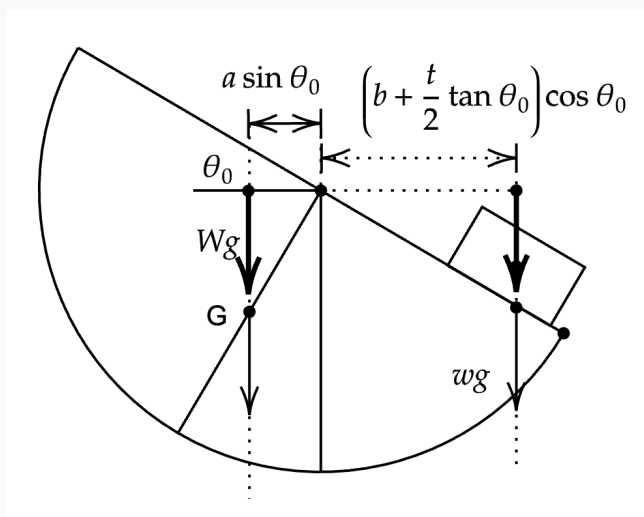


図 11: 問題の設定図。

- (2) 物体が転倒する直前では、抗力の作用線が直方体の対角線の延長にある。したがって、O の周りの力のモーメントの釣り合いは

$$\therefore (\text{1}) \quad W a \sin \theta = w \left( c + \frac{t}{2} \right) \cos \theta \quad (16)$$

で、 $\theta, h, t$  の関係は

$$(\text{ウ}) \quad \frac{t}{h} = \tan \theta \quad (17)$$

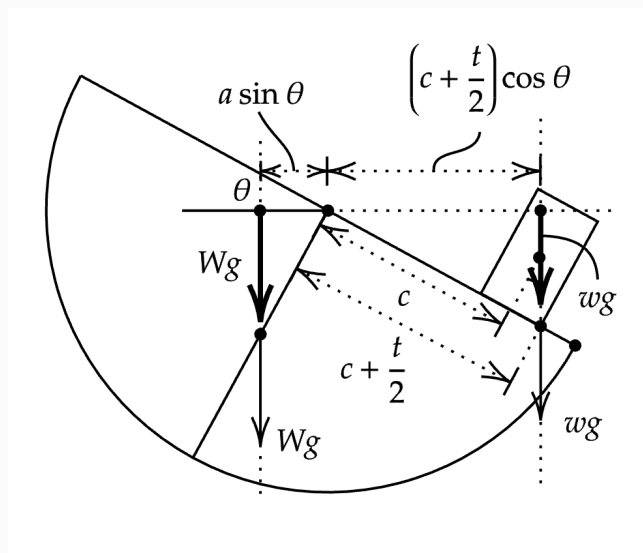


図 12: 問題の設定図。

(3) 式 16 と 式 17 を使うと、 $\frac{w}{W}$  の値は

$$\begin{aligned}\frac{w}{W} &= \frac{a \sin \theta}{(c + \frac{t}{2}) \cos \theta} = \frac{at}{(c + \frac{t}{2})h} \\ &= \frac{\frac{4}{3\pi}r \cdot \frac{1}{10}r}{(\frac{65}{100}r + \frac{1}{20}r) \cdot \frac{1}{4}r} \\ &= \frac{4 \cdot 400}{30\pi \cdot 70} = \frac{16}{21\pi} \\ &\doteq 0.242 \\ \therefore (\text{I}) \quad \frac{w}{W} &\doteq 0.24\end{aligned}\tag{18}$$

静止摩擦係数を  $\mu$  とすると、これは最大静止摩擦力が働くときの  $\tan \theta_0$  だから

$$\begin{aligned}
Wa \tan \theta_0 &= w \left( b + \frac{t}{2} \tan \theta_0 \right) \\
\therefore \tan \theta_0 &= \frac{wb}{Wa - \frac{wt}{2}} = \frac{\frac{w}{W}b}{a - \frac{w}{W}\frac{t}{2}} \\
&= \frac{\frac{16}{21\pi} \cdot \frac{4}{5}r}{\frac{4}{3\pi}r - \frac{16}{21\pi} \cdot \frac{1}{20}r} = \frac{8}{17} \doteq 0.471 \\
\therefore \text{(オ)} \quad \mu &\doteq 0.47
\end{aligned} \tag{19}$$

**問題 3.2.3** (例題 3. 剛体の釣り合い): 密度と厚さが一様な正三角形の板がある。この板は、中心  $O$  を通り板に垂直な水平固定軸の周りに、自由に回転できるようにしてある。その頂点  $A, B, C$  に、質量  $M_A, M_B, M_C$  のおもりを、それぞれのおもりの重心が各頂点に一致するように取り付ける (図 13)。

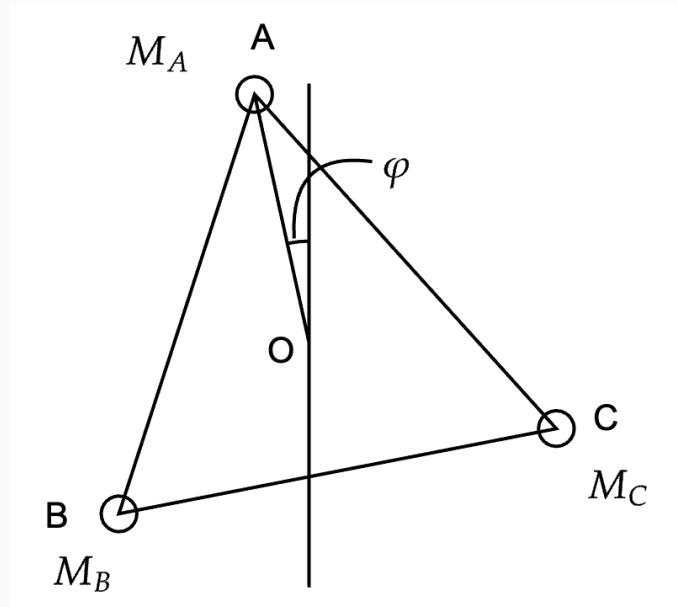


図 13: 問題の図。

- (1)  $OA$  が鉛直に対してなす角が  $\varphi$  のとき、全体が釣り合って静止した。 $\tan \varphi$  を  $M_A, M_B, M_C$  で表せ。
- (2) 次の場合に起こる状況の説明として適当なものを、下の文章 (ア)-(キ) から選んで、その記号で答えよ。
  - (a)  $M_A = M_B = M_C$  の場合
  - (b)  $M_A > M_B = M_C$  の場合
  - (c)  $M_A > M_C, M_B + M_C = 2M_A$  の場合
- (ア) どこにも釣り合う角度は見出せない。
- (イ) 任意の角度で釣り合い、静止状態しかあり得ない。
- (ウ) 任意の角度で釣り合うが、等速回転運動を続けるかもしれない。
- (エ)  $BC$  が鉛直になり、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$  なら安定、 $\varphi = \frac{3}{2}\pi$  なら不安定な釣り合い状態となる。

- (オ) BC が鉛直になり、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$  なら不安定、 $\varphi = \frac{3}{2}\pi$  なら安定な釣り合い状態となる。
- (カ) BC が水平になり、 $\varphi = 0$  なら安定、 $\varphi = \pi$  なら不安定な釣り合い状態となる。
- (キ) BC が水平になり、 $\varphi = 0$  なら不安定、 $\varphi = \pi$  なら安定な釣り合い状態となる。

(注) 「安定な釣り合い状態」とは、その状態から少し動かされても元に戻る状態をいい、「不安定な釣り合い状態」とは、その状態から少しでも動かされると元の状態から大きく離れてしまう状態をいう。

解答:

- (1) 静止しているので、O の周りの力のモーメント（反時計回りを正とする）が釣り合っている。三角形の重心から各頂点までの距離を  $r$  として加法定理を用いると、

$$\begin{aligned}
 & M_A gr \sin \varphi + M_B gr \cos \left( \frac{\pi}{6} + \varphi \right) - M_C gr \cos \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) = 0 \\
 \therefore & M_A \sin \varphi + M_B \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) - M_C \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) = 0 \\
 \therefore & (2M_A - M_B - M_C) \sin \varphi + \sqrt{3}(M_B - M_C) \cos \varphi = 0 \quad (20)
 \end{aligned}$$

- i)  $2M_A - M_B - M_C = 0$  かつ  $M_B - M_C = 0$ 、すなわち  $M_A = M_B = M_C$  のとき、 $\tan \varphi$  は不定。
- ii)  $2M_A - M_B - M_C = 0$  かつ  $M_B - M_C \neq 0$  のとき、 $\cos \varphi = 0$ 、 $\tan \varphi$  は定義されない。
- iii)  $2M_A - M_B - M_C \neq 0$  かつ  $M_B - M_C \neq 0$  のとき、 $\tan \varphi = \frac{M_C - M_B}{2M_A - M_B - M_C}$

よって

$$\tan \varphi = \frac{M_C - M_B}{2M_A - M_B - M_C} \quad (21)$$

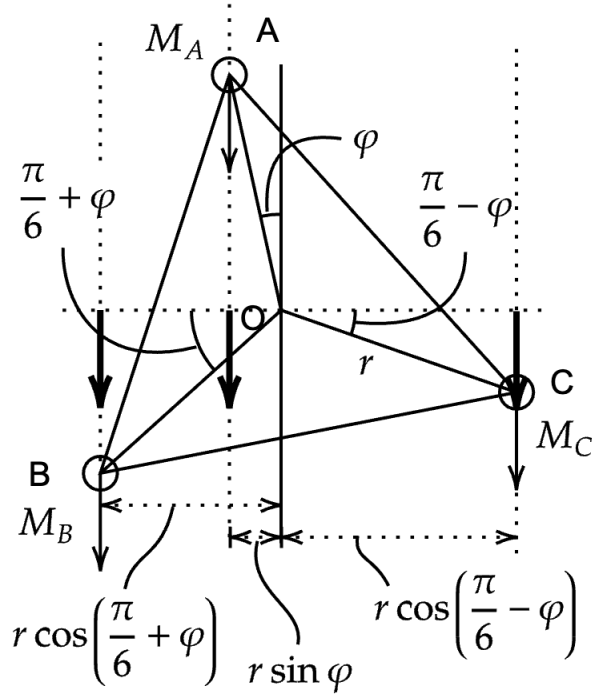


図 14: 問題の図。

(2) (a)  $M_A = M_B = M_C$  の場合、任意の角度  $\varphi$  に対して式 20 が成り立つので、常に力のモーメントが釣り合っている。よって角運動量が保存するので、はじめに角運動量を与えれば等速回転運動を続ける。よって (ウ)

(b) 式 20 の左辺は  $2(M_A - M_B) \sin \varphi$ 。  $M_A - M_B > 0$  だからトルクが釣り合う条件は  $\sin \varphi = 0$ 、すなわち  $\varphi = 0$  または  $\pi$ 。いずれも BC は水平になる。

(a)  $2(M_A - M_B) \sin(0 + \Delta\varphi) = 2(M_A - M_B) \sin \Delta\varphi$  は、 $\Delta\varphi$  は、 $\Delta\varphi$  の向きとトルクの向きが同じなので、不安定な釣り合い。

(b)  $2(M_A - M_B) \sin(\pi + \Delta\varphi) = -2(M_A - M_B) \sin \varphi$  は、 $\Delta\varphi$  の向きとトルクの向きが逆なので、安定な釣り合い。

よって (キ)。

(c) 式 20 の左辺は  $\sqrt{3}(M_B - M_C) \cos \varphi$ 。トルクが釣り合う条件は  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  または  $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ 。いずれも BC は鉛直になる。また、 $M_B + M_C = 2M_A > 2M_C$  より  $M_B - M_C > 0$ 。

(a)  $\sqrt{3}(M_B - M_C) \cos(\frac{\pi}{2} + \Delta\varphi) = -\sqrt{3}(M_B - M_C) \sin \Delta\varphi$  は、 $\Delta\varphi$  の向きとトルクの向きが逆なので、安定な釣り合い。

(b)  $\sqrt{3}(M_B - M_C) \cos(\frac{3}{2}\pi + \Delta\varphi) = \sqrt{3}(M_B - M_C) \sin \Delta\varphi$  は、 $\Delta\varphi$  の向きとトルクの向きが同じなので、不安定な釣り合い。

よって (エ)。