# ベクトル解析

**この文書の読み方**

物理で使うベクトル解析の内容をまとめたノートです。

以下に出てくる関数は必要な回数微分ができるものとする。

# 1. ベクトル解析

## 1.1. 3 次元ベクトルの外積

**命題 1.1.1 (外積の分配法則)**

外積について分配法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ が成り立つ ♠

証明. 図 1 から、外積について分配法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ が成り立つ：

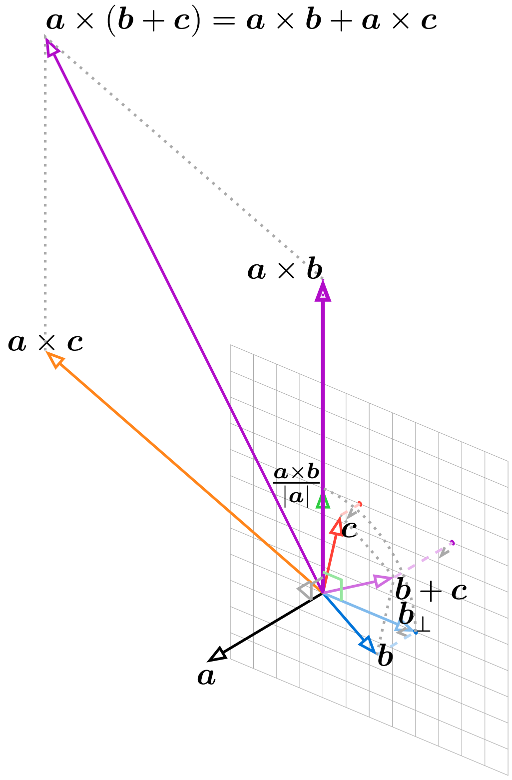


図 1: 外積の分配法則の幾何学的解釈

□

**定義 1.1.2 (自然基底)**

$\mathbb{R}^3$ における単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

を自然基底という。 ♣

自然基底同士は互いに直交する単位ベクトルなので、以下の等式が成り立つ：

**命題 1.1.3 (自然基底の外積)**

$$\begin{gathered} \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x, \\ \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

♠

**命題 1.1.4 (外積の成分計算)**

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{3}$$

♠

証明. 自然基底を使うと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{b} &= b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y + b_z \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{4}$$

とおけるので、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は自然基底の外積と分配法則より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \left(a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z\right) \times \left(b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y + b_z \boldsymbol{e}_z\right) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{e}_y + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\boldsymbol{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

□

## 1.2. ベクトル解析の略記

### 1.2.1. アインシュタインの縮約記法

ベクトル解析の計算では和の記号 $\sum_{i=1}^{n}$ が頻繁に出てくるので、同じ添字が 2 回出てきたらその添字について 1 から $n$ までの和をとることにする。この省略記法をアインシュタインの縮約記法という。

例. $n = 3$ (3 次元)のとき、

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_i B_i \quad (\text{内積}) \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \partial_i A_i \quad (\text{発散}) \tag{7}$$

### 1.2.2. クロネッカーのデルタ

**定義 1.2.1 (クロネッカーのデルタ)**

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{8}$$

をクロネッカーのデルタという。 ♣

### 1.2.3. エディントンのイプシロン

**定義 1.2.2 (エディントンのイプシロン)**

以下のように定められる記号 $\varepsilon_{ijk}$ ( $i, j, k \in \{x, y, z\}$ ) をエディントンのイプシロン（あるいはレヴィ＝チヴィタ記号）という：

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (x,y,z) \text{ or } (y,z,x) \text{ or } (z,x,y) \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (z,y,x) \text{ or } (x,z,y) \text{ or } (y,x,z) \\ 0 & \text{if } i = j \text{ or } j = k \text{ or } k = i \end{cases} \tag{9}$$

♣

明示的に書くとこう：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1 &\quad (x, y, z \text{ の並びを変えない}) \\ \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = -1 &\quad (x, y, z \text{ の隣り合う一文字を入れ替える}) \\ \text{otherwise} = 0 &\quad (\varepsilon_{xxy} \text{ など添え字に重複がある}) \end{aligned} \tag{10}$$

**命題 1.2.3 (イプシロンと外積)**

$i, j, k \in \{x, y, z\}$ とすると

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{11}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \tag{13}$$

♠

証明. エディントンのイプシロンとアインシュタインの縮約記法を用いると、式 2 は

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{14}$$

であり、ベクトル $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$ の外積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_i\boldsymbol{e}_i) \times (b_j\boldsymbol{e}_j) \\ &= a_i b_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \\ &= \varepsilon_{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k \end{aligned} \tag{15}$$

よって $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の第 $k$ 成分 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k$ は

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \tag{16}$$

□

**命題 1.2.4 ($\varepsilon$-$\delta$ の公式)**

アインシュタインの規約を使うと、$\delta_{ij}$ と $\varepsilon_{ijk}$ の間には以下の関係式が成り立つ：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{17}$$

♠

証明. 左辺は $k$ についての和であり、$i, j, k$ が全て異なり、かつ $k, l, m$ が全て異なる場合にのみ項が 0 にならずに残る。

$i, j$ を決めれば $k$ が決まり、$k$ は $l, m$ と異なる。つまり、$\{i, j\} = \{l, m\}$ となっている必要がある。

1. $i = l$ かつ $j = m$ の場合。

左辺は $(\varepsilon_{ijk})^2 = 1$ で、右辺は $\delta_{ii}\delta_{ij}\delta_{ji} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ となり両辺は一致する。

2. $i = m$ かつ $j = l$ の場合。

左辺はイプシロンの反対称性から $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -(\varepsilon_{ijk})^2 = -1$ で、右辺は $\delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$ となり両辺は一致する。

3. それ以外の場合。

左辺は 0 で、右辺も 0。

したがって、いずれの場合も両辺は一致する。 □

## 1.3. ベクトル解析における種々の定義

**定義 1.3.1 (スカラー場、ベクトル場、ナブラ)**

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を**スカラー場**という。
- $A_x, A_y, A_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とすると、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を**ベクトル場**という。
- $\nabla_x := \frac{\partial}{\partial x}$ のように書くことにする。

$$\nabla := \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{pmatrix} \tag{18}$$

と書いて、ナブラと読む。

$$\mathrm{grad}\ \varphi := \nabla\varphi = \begin{pmatrix} \nabla_x\varphi \\ \nabla_y\varphi \\ \nabla_z\varphi \end{pmatrix} \quad \text{(スカラー場の勾配)}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} := \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z \quad \text{(ベクトル場の発散)}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} := \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \nabla_y A_z - \nabla_z A_y \\ \nabla_z A_x - \nabla_x A_z \\ \nabla_x A_y - \nabla_y A_x \end{pmatrix} \quad \text{(ベクトル場の回転)} \tag{19}$$

$$\Delta := \nabla^2 := \nabla \cdot \nabla = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 \quad \text{(ラプラシアン)} \tag{20}$$

♣

## 1.4. ベクトル解析の公式

**定義 1.4.1 (等位集合)**

スカラー場 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して以下のように定義した集合を**等位面**という：

$$S = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3\ \texttt{mid}\ \varphi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{21}$$

♣

**命題 1.4.2 (等位面と勾配の直交性)**

等位面は $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ と直交する。

♠

証明.

$$S = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{22}$$

の点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) S$ に対して以下が成り立つ：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = c \tag{23}$$

この式の両辺を $t$ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\boldsymbol{r}(t)) = \boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0 \tag{24}$$

これは $\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}))$ と $\boldsymbol{r}'(t)$ が直交することを意味する。

□

**命題 1.4.3 (スカラー三重積)**

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{25}$$

♠

証明. アインシュタインの規約とエディントンのイプシロンを使うと

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{26}$$

□

**命題 1.4.4 (ベクトル三重積)**

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{27}$$

♠

証明.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))_i &= \varepsilon_{jki} a_j (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_k \\
&= \varepsilon_{jki} a_j \varepsilon_{lmk} b_l c_m \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
&= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) a_j b_l c_m \\
&= \delta_{il}\delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im}\delta_{jl} a_j b_l c_m \\
&= a_j b_i c_j - a_j b_j c_i \\
&= b_i \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - c_i (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})
\end{aligned} \tag{28}$$

他の成分についても同じように計算できるので、

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{29}$$

□

**命題 1.4.5 (回転の発散)**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{30}$$

♠

証明. 偏微分は可換だがイプシロンは反対称であることに気をつける。また、和の順序は自由なのでダミー変数を途中で入れ替えてよい。アインシュタインの規約を使って計算すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}_i (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_i \\
&= \boldsymbol{\nabla}_i \varepsilon_{jki} \boldsymbol{\nabla}_j A_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{\nabla}_j A_k \\
&= \varepsilon_{jik} \boldsymbol{\nabla}_j \boldsymbol{\nabla}_i A_k \\
&= -\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{\nabla}_j A_k
\end{aligned} \tag{31}
$$

$\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{\nabla}_j A_k = -\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{\nabla}_j A_k$ なので $\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{\nabla}_j A_k = 0$ 。

□

**命題 1.4.6 (回転の回転)**

$$
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{32}
$$

♠

証明. ベクトル三重積の公式において $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \nabla, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}$ と置き換えると、

$$
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{33}
$$

となる。 □

**命題 1.4.7 (勾配の回転)**

$$
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \varphi) = 0 \tag{34}
$$

♠

証明. 命題 1.4.5 の証明と同じようにダミー変数の入れ替えと偏微分の可換性、イプシロンの反対称性を用いて

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \varphi))_k &= \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i (\boldsymbol{\nabla}_j \varphi) \\
&= \varepsilon_{jik} \boldsymbol{\nabla}_j \boldsymbol{\nabla}_i \varphi \\
&= -\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{\nabla}_j \varphi
\end{aligned} \tag{35}
$$

$\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i (\boldsymbol{\nabla}_j \varphi) = -\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i (\boldsymbol{\nabla}_j \varphi)$ なので $\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\nabla}_i (\boldsymbol{\nabla}_j \varphi) = 0$。したがって
$(\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \varphi))_k = 0$。 □

**定理 1.4.8 (ガウスの定理)**

$$
\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{36}
$$

♡

証明.

Prove it later.

□

**定理 1.4.9 (ストークスの定理)**

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{37}$$

♡

証明.

Prove it soon.

□

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ のとき、命題 1.4.7 $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0$ より $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ となる。この逆が成り立つ。つまり $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ のとき $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ となるスカラー場 $\varphi$ が存在する。

**定理 1.4.10 (ポテンシャルの存在条件)**

領域が単連結のとき（穴とか空いてないとき）ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の条件は同値：

- $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ となるスカラー場 $\varphi$ が存在する
- 領域内の任意の点で $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
- 領域内の任意の 2 点を結ぶ線積分が途中の経路によらない:

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{38}$$

- 領域内の任意の閉曲線 $C$ について線積分が 0:

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{39}$$

♡

証明.

ストークスの定理を使って証明する。証明は略。

□