積分の攻略

この文書の読み方
積分の攻略本

1. 積分

1.1. 説明

1.1.1. 積分と不等式

命題 1.1.1 (積分と不等式)

$a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

また、

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

♠

1.1.2. 区分求積法

定義 1.1.2 (区分求積法)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

♣

注意

和の区間が変わると積分範囲も変わる。

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3n-1}^{5n+10} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$k = 3n - 1 \approx 3n$, $k = 5n + 10 \approx 5n$ を代入すると端点がわかる。

1.2. 問題集

2023 年度第 *1* 問.

(1) 正の整数 k に対し、

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \left|\sin(x^2)\right|\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \tag{6}$$

(2) 正の整数 n に対し

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \left|\sin(x^2)\right| \mathrm{d}x \tag{7}$$

とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

解.

(1) $\sin(x^2)$ は積分できないので $t = x^2$ とおいて積分区間と積分変数を書き換えていく。$\mathrm{d}x = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ だから、

$$A_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \tag{8}$$

そして今回は不等式を示したい。

- 命題 1.1.1 を使う。
- $|\sin(t)| \leq 1$ はわかっているので、その積分の値も評価できる。

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = 2 \tag{9}$$

- $1/\sqrt{t}$ の評価をしよう。 $k\pi \leq t \leq (k+1)\pi$ を変形して

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \,\mathrm{d}t \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \,\mathrm{d}t \tag{10}$$

(2) 挟み撃ちの原理。

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \left|\sin(x^2)\right| \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{n\pi}^{2n\pi} |\sin(t)| \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k \end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{n(k+1)\pi}}$$
$$= \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{n}\pi}}\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$$
$$= \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}} \tag{13}$$

2019 年度第 *1* 問.

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x \tag{14}$$

解. 被積分関数を展開して

$$x^2 + x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(1+x^2)^{-2} \tag{15}$$

(i)

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \tag{16}$$

(ii)

$$\int_0^1 x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \tag{17}$$

は $1+x^2=t$ と置換する。

(iii)

$$\int_0^1 x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}(1+x^2)'(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$
$$= \sqrt{2}-1 \tag{18}$$

(iv)

$$\int_0^1 x^2(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x \tag{19}$$

は $x=\tan\theta$ と置換する。