

難系物理Ⅱ 電磁気・原子

krollo966

この文書の読み方

難系物理Ⅱの演習問題を解く.

1. 電磁気

1.1. 静電気

演習問題 1. 図のように，滑らかな水平面上に点 O がある．点 O から鉛直上方，および下方に距離 $r\text{ m}$ だけ離れたところに，点電荷 A, B が固定されている． A, B はともに $+e\text{ C}$ の正電荷を持っている．水平面上，点 O から距離 $r\text{ m}$ の点を P とする．

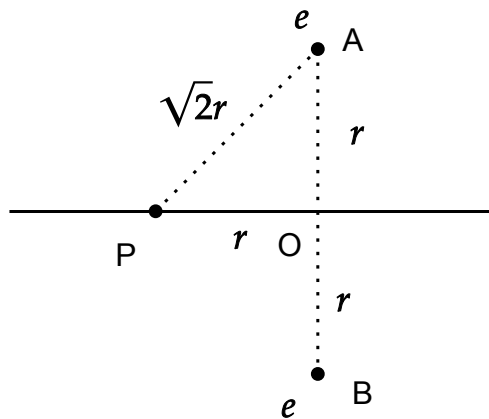


図 1: 問題の図.

いま， $-e\text{ C}$ の負電荷を持ち，質量 $m\text{ kg}$ の荷電粒子 E を考える．この粒子 E は，水平面上のみを運動できるものとする．また，重力の影響，および E 自身の運動による誘導起電力の影響は無視できるものとする．

クーロンの法則の比例定数を $k\text{ N m}^2\text{ C}^{-2}$ として，以下の設問に単位を付して答えよ．

- (1) 点 O および点 P における電界の強さをそれぞれ求めよ．
- (2) 点 O および点 P における電位をそれぞれ求めよ．
- (3) 点 O から点 P に向かってわずかな距離 $\Delta x\text{ m}$ だけ離れた点を Q とする． Δx は r に比べて十分小さいので， AQ, BQ の距離は，ともに $r\text{ m}$ に等しいとみなすことができる．粒子 E が点 Q に固定されているとき， A, B がつくる電界から E が受ける力の大きさを求めよ．
- (4) 点 Q において，静かに粒子 E をはなしたとき， E は点 O, P を含む直線上を，点 O を中心として単振動し始めた．この単振動の周期を求めよ．

- (5) 粒子 E を点 O に静止させた後、点 P まで静かに移動させた。E を点 O から点 P まで運ぶときに必要な仕事の大きさを求めよ。
- (6) 粒子 E を、点 P から水平面上直線 OP に垂直にある速さ v_1 で投げ出したとき、E は点 O を中心とした半径 r m の等速円運動をした。この時の速さ v_1 を求めよ。
- (7) 粒子 E を点 P から点 O に向かって、ある速さ v_2 で投げ出したとき、E は A, B から受ける力を振り切って系外へ飛び出した。 v_2 に要求される最低の速さを求めよ。

解.

- (1) 点 O では A, B の電荷による電場が打ち消しあうので、電場の大きさは

$$0 \text{ N C}^{-1} \quad (1)$$

また、A, B が点 P に及ぼす電場の大きさはそれぞれ $ke/(2r^2)$ で、その向きは図 2 のようになるから、これらの電場を合成するとその大きさは

$$\frac{ke}{\sqrt{2}r^2} \text{ N C}^{-1} \quad (2)$$

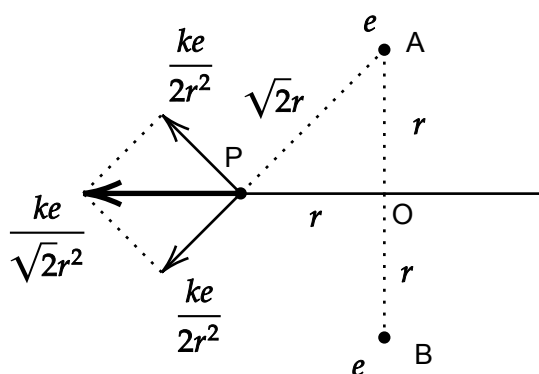


図 2: 点 P における電場の様子.

- (2) A と B が O に及ぼす電位はそれぞれ ke/r だから、重ね合わせの原理より、O の電位を V_O とすると

$$V_O = \frac{2ke}{r} \text{ N m C}^{-1} \quad (3)$$

また、A と B が P に及ぼす電位はそれぞれ $ke/(\sqrt{2}r)$ だから、重ね合わせの原理より、P の電位を V_P とすると

$$V_P = \frac{\sqrt{2}ke}{r} \text{ N m C}^{-1} \quad (4)$$

- (3) A, B が点 Q に及ぼす電場をそれぞれ \mathbf{E}_{QA} , \mathbf{E}_{QB} とすると、その大きさはいずれも ke/r^2 . 図 3 より点 Q における電場を \mathbf{E}_Q とすると、電荷 E が受ける力の大きさは

$$|-e\mathbf{E}_Q| = 2 \cdot \frac{ke^2}{r^2} \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{r^2 + (\Delta x)^2}} \doteq \frac{2ke^2}{r^3} \Delta x \text{ N} \quad (5)$$

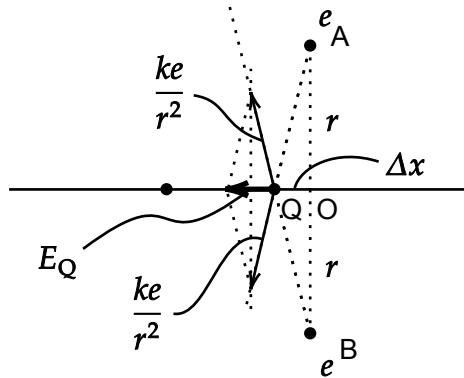


図 3: 点 Q における電場の様子.

- (4) 電荷 E は負電荷だから，電場とは逆向きに，つまり \overrightarrow{QO} 向きに力を受けて単振動する． $K = 2ke^2/r^3$ とおくと，単振動の周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{2ke^2}} = \frac{\pi r}{e}\sqrt{\frac{2mr}{k}}\text{ s} \quad (6)$$

- (5) 点 O から P まで電荷 E を運ぶのに必要な仕事を W_{OP} とすると、エネルギー保存則より

$$W_{\text{OP}} = -e(V_{\text{P}} - V_0) = (2 - \sqrt{2}) \frac{ke^2}{r} \text{ N m} \quad (7)$$

- (6) 半径 r の等速円運動をするとき，向心方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{v_1^2}{r} &= \frac{ke^2}{\sqrt{2}r^2} \\ \therefore v_1 &= e \sqrt{\frac{k}{\sqrt{2}mr}} \text{ m s}^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

- (7) エネルギー保存則より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 + (-e)V_P &= 0 \\ \therefore v_2 &= e\sqrt{\frac{2\sqrt{2}k}{mr}} \text{ m s}^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

演習問題 2. 真空中の電荷と電界に関する下記の文において、ア から

(サ) に当てはまる式または記号を記せ. ただし, クーロンの法則の比例定数を $k_0 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, 電子の電荷を $-e \text{ C}$, 電子の質量を $m \text{ kg}$ とし, 無限遠点での電位を 0 V とする. 電界の方向については, 図中に示された ①～⑧の中から正しい方向を選んで, その番号を記せ.

- (1) 図のように水平面上に互いに直交する x 軸, y 軸をとり, 原点から d m 離れた x 軸上の点 A ($d, 0$) に電気量 QC ($Q > 0$) の点電荷を固定する. このとき, x 軸上の点 B ($-d, 0$) の電界の大きさは (ア) NC^{-1} で, 電界の方向は (イ) である. また, この点の電位は (ウ) V である.

点 A の電荷 Q がつくる電界中で, x 軸上の負の方向の無限遠点に置かれたもう一つの点電荷 QC を x 軸に沿って点 B まで動かす. このとき外力がする仕事は (エ) J である.

- (2) 点 A ($d, 0$) と点 B ($-d, 0$) に正の電荷 Q を固定すると, y 軸上の点 C ($0, d$) での電界の大きさは (オ) NC^{-1} 隣, この点に電子を置くと, 電子には (カ) N の力が働く.

次に, 点 C で速度 0 であった電子が電界で力を受けて y 軸上を動くとする, 原点 O での速度は (キ) ms^{-1} となる.

問題を書き写すのが面倒になったので(3), (4)は省略.

演習問題 2.

- (1) (ア) 点 B における電界の大きさ E_B は

$$E_B = \frac{k_0 Q}{4d^2} \quad (10)$$

(イ) 向きは ⑦.

(ウ) 電位 V_B は

$$V_B = \frac{k_0 Q}{2d} \quad (11)$$

(エ) 外力がする仕事 W は

$$W = -Q(V_B - 0) = -\frac{k_0 Q^2}{2d} \quad (12)$$

- (2) (オ) 点 A, B においた電荷 Q が点 C ($0, d$) に及ぼす電場の大きさはそれぞれ等しいので, それを E_C' とおき, 求める電場を E_C とおくと,

$$\begin{aligned} E_C &= 2\sqrt{2}E_C' \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{k_0 Q}{2d^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}k_0 Q}{d^2} \end{aligned} \quad (13)$$

(カ) 電子に働く力を F とおくと, これは電場と逆向きだから,

$$F = -\frac{\sqrt{2}k_0 Qe}{d^2} \quad (14)$$

(キ) O, C における電位をそれぞれ V_O, V_C とおくと、重ね合わせの原理よりそれぞれの位置での電位は A, B の電荷による電位の和になるから、

$$\begin{aligned} V_O &= 2 \cdot \frac{k_0 Q}{d}, \\ V_C &= 2 \cdot \frac{k_0 Q}{\sqrt{2}d}. \end{aligned} \quad (15)$$

原点での速度を v とおくと、エネルギー保存則より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= -e(V_C - V_O) \\ &= -2e \frac{k_0 Q}{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{(2 - \sqrt{2})k_0 Qe}{d} \end{aligned} \quad (16)$$

したがって、

$$v = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})k_0 Qe}{md}} \quad (17)$$

(3) (ク) A, B の正電荷が D に及ぼす電場は E_C と同じ大きさで y 軸負の向き, C の負電荷が D に及ぼす電場は $k_0 Q/(4d^2)$ で y 軸正の向きだから, D における電場の合成は ⑤ の向きになる.

(ケ) 電位の重ね合わせの原理より, D における電位 V_D は A, B, C の電荷のつくる電位の和になる. A, B の電荷がつくる電位の和は V_C と同じで, C の電荷がつくる電位は $-kQ/(2d)$ だから,

$$\begin{aligned} V_D &= V_C - \frac{k_0 Q}{2d} \\ &= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{k_0 Q}{d} \\ &= \frac{(2\sqrt{2} - 1)k_0 Q}{2d} \end{aligned} \quad (18)$$

したがって、求める仕事を W_D とおくと、

$$\begin{aligned} W_D &= -(-Q)(V_D - 0) \\ &= \frac{(2\sqrt{2} - 1)k_0 Q^2}{2d} \end{aligned} \quad (19)$$

(4) (コ) 初期状態における電位を計算しよう. 点 A, B, D の電荷による点 C での電位をそれぞれ V_{CA}, V_{CB}, V_{CD} とおき, その和を V_{C1} とおくと,

$$\begin{aligned}
V_{C1} &= V_{CA} + V_{CB} + V_{CD} \\
&= k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} + k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} - k_0 \frac{Q}{2d} \\
&= \frac{(2\sqrt{2} - 1)k_0 Q}{2d}
\end{aligned} \tag{20}$$

また，点 A, C, D の電荷による点 B での電位をそれぞれ V_{BA}, V_{BC}, V_{BD} とおき，その和を V_{B1} とおくと，

$$\begin{aligned}
V_{B1} &= V_{BA} + V_{BC} + V_{BD} \\
&= k_0 \frac{Q}{2d} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} \\
&= \frac{(1 - 2\sqrt{2})k_0 Q}{2d}
\end{aligned} \tag{21}$$

したがって，初めの電荷の位置エネルギーの和を U_1 とおくと，

$$\begin{aligned}
U_1 &= V_{B1} + (-Q)V_{C1} \\
&= \frac{(1 - 2\sqrt{2})k_0 Q^2}{2d} - \frac{(2\sqrt{2} - 1)k_0 Q^2}{2d} \\
&= \frac{(1 - 2\sqrt{2})k_0 Q^2}{d}
\end{aligned} \tag{22}$$

移動終了後も同様に電位を計算する．点 B, C の電位をそれぞれ V_{B2}, V_{C2} とおくと，

$$\begin{aligned}
V_{B2} &= V_{BA} + V_{BD} + k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} \\
&= k_0 \frac{Q}{2d} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} + k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} \\
&= k_0 \frac{Q}{2d}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
V_{C2} &= V_{CA} + V_{CD} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} \\
&= k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} - k_0 \frac{Q}{2d} - k_0 \frac{Q}{\sqrt{2}d} \\
&= -k_0 \frac{Q}{2d}
\end{aligned} \tag{24}$$

したがって，移動後の電荷の位置エネルギーの和を U_2 とおくと，

$$\begin{aligned}
U_2 &= -QV_{B2} + QV_{C2} \\
&= -k_0 \frac{Q^2}{2d} - k_0 \frac{Q^2}{2d} \\
&= -k_0 \frac{Q^2}{d}
\end{aligned} \tag{25}$$

外力がする仕事 W は,

$$\begin{aligned}
W &= -(U_2 - U_1) \\
&= \frac{(1 - 2\sqrt{2})k_0 Q^2}{d} + \frac{k_0 Q^2}{d} \\
&= \frac{2(1 - \sqrt{2})k_0 Q^2}{d}
\end{aligned} \tag{26}$$

(サ) 無限遠での位置エネルギーを U_∞ と書くと, 無限遠まで運ぶのに外力がする仕事は

$$W = -(U_\infty - U_2) = -k_0 \frac{Q^2}{d} \tag{27}$$