

# 単元テストの解答

krollo966

単元テストの 18 と 19 の解答です。

**問題 (18. 斜方投射):** 図のように傾角  $30^\circ$  の斜面がある。最下点から斜面に対して初速  $v_0$  で投げ出した。

- (1) 斜面との衝突点までの距離  $l$  を求めなさい。
- (2) 衝突するまでの時間  $t$  を求めなさい。

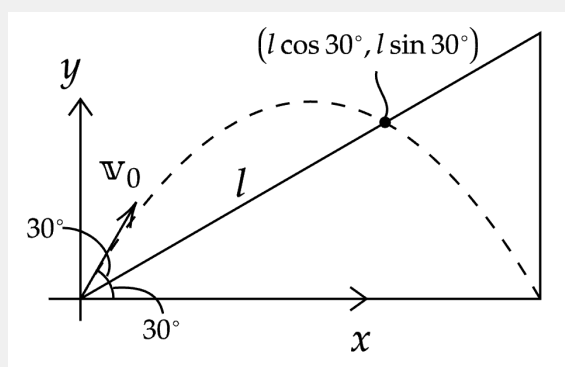


図 1: 問題 18 の図。

**解答:** 図 1 のように、物体を投げ出した点を原点として、水平面を  $x$  軸、重力方向を  $y$  軸とした座標系を設定する。

- (1) 初速度ベクトルが  $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos 60^\circ \\ v_0 \sin 60^\circ \end{pmatrix}$  であることに注意して加速度の積分を実行していくと、

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, & \ddot{y} &= -g, \\ \dot{x} &= v_0 \cos 60^\circ, & \dot{y} &= -gt + v_0 \sin 60^\circ, \\ x &= v_0 \cos 60^\circ t, & y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin 60^\circ t \end{aligned} \tag{1}$$

となる。衝突点の座標は  $(x, y) = (l \cos 30^\circ, l \sin 30^\circ)$  だから、これを 式 1 に代入すると

$$\begin{aligned} l \cos 30^\circ &= v_0 \cos 60^\circ t \\ \therefore \sqrt{3}l &= v_0 t \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} l \sin 30^\circ &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin 60^\circ t \\ \therefore l &= -gt^2 + \sqrt{3}v_0 t \end{aligned} \tag{3}$$

式 2 より

$$t = \frac{\sqrt{3}l}{v_0} \quad (4)$$

だから、これを 式 3 に代入すると

$$\begin{aligned} l &= -g \left( \frac{\sqrt{3}l}{v_0} \right)^2 + \sqrt{3}v_0 \frac{\sqrt{3}l}{v_0} = -\frac{3gl^2}{v_0^2} + 3l \\ \therefore 2l - \frac{3gl^2}{v_0^2} &= l \left( 2 - \frac{3gl}{v_0^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$l > 0$  だから、 $l = \frac{2v_0^2}{3g}$ 。

(2) 式 4 に (1) の結果を代入して  $t = \frac{\sqrt{3}}{v_0} \cdot \frac{2v_0^2}{3g} = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3g}$  となる。  $\square$

**問題 (19. 終端速度):** 図は、雨粒が自由落下し、終端速度<sup>1</sup> $v_f$  に達するまでの  $v$ - $t$  図である。この曲線の傾きが ( ) を表している。

- (1) 空欄に入る言葉を漢字三文字で答えなさい。
- (2) 下の文章で正しいものを全て選び記号で答えなさい。
  - (ア) 自由落下する物体の速さはどんどん速くなるが、終端速度に達して速度が一定となるのは、空気抵抗の影響を受けるから。
  - (イ) 真空中では、物体は空気抵抗を受けないため、その形状や質量に関わらず同じ速度で落下する。
  - (ウ) 空気抵抗を受け自由落下する物体の加速度は減少するが、速さは減少しない。
- (3) 重力と抵抗力が釣り合っているのは、図の a - c のどれか。

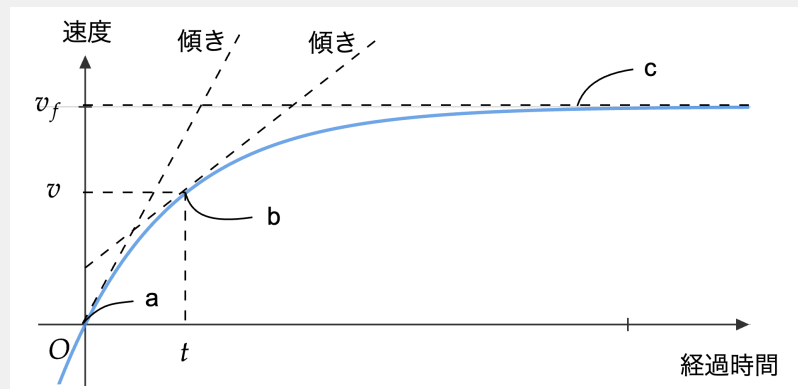


図 2: 問題 19 の図。

**解答:**

<sup>1</sup>地球上において物体が速度に比例する空気抵抗を受けて落下すると、最終的に重力と空気抵抗が釣り合って物体に働く力の合力が 0、すなわち加速度が 0 になり、等速直線運動をする。このときの速度を終端速度(final velocity)という。

- (1) 図 2 のグラフは  $v$ - $t$  グラフ（速度の時間変化を表すグラフ）であり、グラフの傾きは微分係数だから、この問題においてはグラフの傾きは速度の時間微分、すなわち**加速度**を表す。
- (2) (ア) 正しい。グラフより、自由落下する物体の速度が増すが、空気抵抗を受けるためにグラフの傾きは小さくなっていることがわかる。

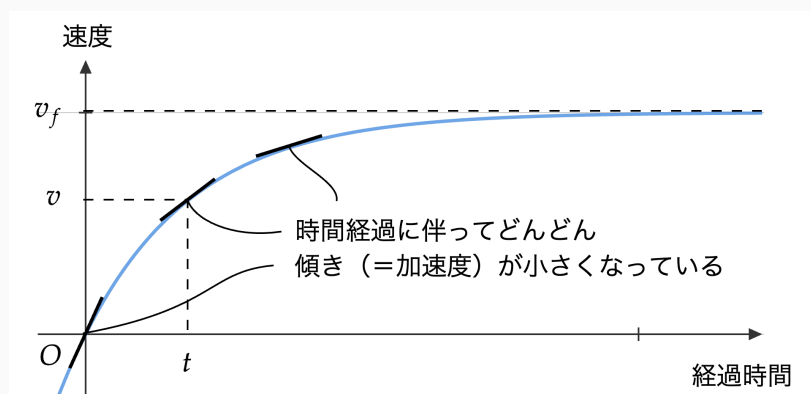


図 3:  $v$ - $t$  グラフの傾きが加速度を表すので、時間の経過とともに加速度（つまりグラフの傾き）が小さくなっていることが読み取れる。

- (イ) (落下の初期条件<sup>2</sup>が同じであれば) 正しいが、そうでなければ一般には正しくない。真空中では、物体は空気抵抗を受けないため、初期条件が同じであればその形状や質量に関わらず同じ速度で落下するが、初期条件が異なれば異なる速度で落下する<sup>3</sup>。
- (ウ) 正しい。空気抵抗を受け自由落下する物体の加速度は減少する（ $v$ - $t$  グラフの傾きが小さくなっていく）が、速さは増加する（減少しない）。
- (3) 重力と抵抗力が釣り合うと、雨粒にかかる力の合力が 0 となる。したがって、運動方程式より加速度が 0 になるので、等速度運動を続ける。図 2 において加速度、すなわちグラフの傾きが 0 になっている点は c である。

□

<sup>2</sup>物体の初速度や初期位置（加速度の積分をする際の積分定数に相当する）を**初期条件**という。

<sup>3</sup>物体の座標を  $y$ （下向きが正）とし、初速度を  $v_0$ 、初期位置を  $y_0$  とすると、 $\ddot{y} = g$ 、 $\dot{y} = gt + v_0$  となるので、初期条件（特に初速度）が異なれば当然違う速度になる。例えば“自由”落下と明記してあれば初速度は 0 として良いが、本問はそうっていないので、真偽を確かめるためにはこの問題文では条件が不足している。解釈の幅が大きいのに真偽を訊くタイプの問題にしているのは、適切な問題設定とは言えない。