微分法

この文書の読み方
微分法の問題集。

1. 微分

1.1. 問題集

2022 年度第 *1* 問.

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,\mathrm{d}t \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

が最小値を持つことを示す問題。

解.

(1) 微分して増減表を作れば OK。
(2) 積分していく。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos t}{1-\sin t} + \frac{\cos t}{1+\sin t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{(1-\sin t)'}{1-\sin t} + \frac{(1+\sin t)'}{1+\sin t}\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2}$$

としたらあとは $\log$ になる。

2022 年度第 *4* 問.

$$C : y = f(x) = x^3 - x \tag{3}$$

上の点に関する問題。

解.

(1)
$$l : y = mx + n \tag{4}$$

とおいて C と l を連立すると 3 次方程式が現れる。

- $m \neq \infty$ の場合は 3 点で交わらないので除外できることを書いておく。
- この 3 次方程式が解を持つのは
  (i) $f(x)$ が極値を持つ
  (ii) 極値を $f(\alpha)$, $f(\beta)$ とすると $f(\alpha)f(\beta) < 0$

(2) 積分の計算をしてもいいけど、

- 3 次関数は原点対称で、
- l が原点を通るとき C と l で囲まれた 2 つの図形が合同で、
- l が原点を通らないときはそもそも C と l で囲まれた図形の面積は等しくならない

という方針で示したほうが明快。