Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Работа допущена к защите
Руководитель ОП
__________ К.Н. Козлов
«_____» __________ 2025 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**
**РАБОТА БАКАЛАВРА**
**ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ ЦЕЛЕЙ ГРУППЕ РОБОТОВ**

по направлению подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль): 01.03.02_02 Системное программирование

Выполнил
студент гр. 5030102/10201 М.А. Кромачев

Руководитель
Доцент,
кандидат физико-математических наук И.Е. Ануфриев

Консультант
Кандидат технических наук,
старший научный сотрудник,
директор НТЦ разработки
программного обеспечения и СППР, АО НПП
«Авиационная и морская электроника» С.А. Васильковский

Консультант
по нормоконтролю Л.А. Арефьева

Санкт-Петербург — 2025

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

**Физико-механический институт**

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель образовательной программы «Прикладная математика и информатика»
__________ К.Н. Козлов
«_____» __________2025 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Кромачеву Максиму Александровичу гр. 5030102/10201

1. Тема работы: «Децентрализованное решение задачи о назначениях целей группе роботов».
2. Срок сдачи студентом законченной работы: июнь 2025г.
3. Исходные данные по работе: ТЗ на ОКР «БЭС-О», инструментальные средства: языки программирования C++, Python, пакет MATLAB, ключевые источники литературы [3.1], [3.2], [3.3], [3.4], [3.5].


3.1. *Bertsekas Dimitri P.* The Auction Algorithm for Assignment and Other Network Flow Problems: A Tutorial. — 1990. — URL: https://web.mit.edu/dimitrib/www/Auction_Interfaces_Published.pdf.

3.2. *Kuhn Harold W.* The Hungarian Method for the Assignment Problem. — 1955. — URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nav.3800020109.

3.3. *Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. — 2009. — URL: https://www.litres.ru/get_pdf_trial/18402114.pdf.

3.4. *Gerkey Brian P.* On Multi-Robot Task Allocation. — 2003. — URL: https://ai.stanford.edu/~gerkey/research/final_papers/diss.pdf.

3.5. *Пшихопов В. Х., Соловьев В. В., Титов А. Е., Финаев В. И, Шаповалов И. О.* Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах. — 2015. — (Group-Control-of-Mobile-Objects-in-Uncertain–Environments.pdf).

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
   4.1. Введение. Обоснование актуальности проблемы.
   4.2. Постановка и формализация задачи.
   4.3. Обзор существующих подходов.
   4.4. Модификация алгоритма аукционного торга для случая ограниченных областей видимости и связи роботов.
   4.5. Вычислительные эксперименты.
   4.6. Результаты и их сравнительный анализ.
   4.7. Выводы.
   4.8. Заключение.
5. Дата выдачи задания: 03.02.2025.

Руководитель ВКР ____________ И.Е. Ануфриев

Консультант ____________ С.А. Васильковский

Задание принял к исполнению 03.02.2025.

Студент ____________ М.А. Кромачев

# РЕФЕРАТ

На 34 с., 6 рисунков, 0 таблиц, 0 приложений

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ, АУКЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ, ВЕНГЕРСКИЙ АЛГОРИТМ, ОГРАНИЧЕННАЯ КОММУНИКАЦИЯ, РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СИСТЕМЫ, ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМАЛЬНОСТЬ.

**Тема выпускной квалификационной работы**: «Децентрализованное решение задачи о назначениях целей группе роботов».

В данной работе объектом исследования являются распределённые системы управления роботами в условиях ограниченной коммуникации. Предмет исследования — алгоритмы назначения целей, учитывающие топологические ограничения сети связи. Основная цель работы — повышение эффективности распределения целей в системах роботов с ограниченными областями связи путём разработки и применения модифицированного аукционного алгоритма.

Решаемые задачи в ходе исследования:

– Изучение существующих алгоритмов назначения, включая аукционный и венгерский методы.
– Анализ влияния ограниченной коммуникации на эффективность алгоритмов.
– Разработка модификации аукционного алгоритма, учитывающей топологические ограничения.
– Реализация предложенного алгоритма и венгерского алгоритма в программной среде.
– Проведение сравнительного тестирования алгоритмов на модельных задачах с различными характеристиками коммуникационных ограничений.

По результатам экспериментов сделаны выводы о высокой эффективности модифицированного аукционного алгоритма в условиях ограниченной коммуникации, особенно при высоких скоростях обмена данными. Установлено, что аукционный алгоритм, в отличие от венгерского, позволяет учитывать погрешности в измерениях матрицы выгод путём выбора параметра точности $\varepsilon$ соразмерно этим погрешностям, что обеспечивает высокую точность при меньших вычислительных затратах. Венгерский алгоритм, не учитывающий погрешности и лишённый параметра $\varepsilon$, стремится к точному решению, которое в условиях реальных погрешностей и ограниченного радиуса связи недостижимо, что делает аукционный алгоритм более эффективным. Выявлена зависимость числа итераций и точности от параметров радиуса связи, размера задачи и параметра $\varepsilon$. Алгоритм применим в военных робототехнических системах, поисково-спасательных операциях и промышленной автоматизации.

## ABSTRACT

34 pages, 6 figures, 0 tables, 0 appendices

**KEYWORDS**: ASSIGNMENT PROBLEM, AUCTION ALGORITHM, HUNGARIAN ALGORITHM, RESTRICTED COMMUNICATION, DISTRIBUTED SYSTEMS, DECENTRALIZED CONTROL, OPTIMALITY.

**Title of the Thesis**: “Decentralized Solution to the Target Assignment Problem for a Group of Robots”.

This work focuses on distributed robot control systems under conditions of restricted communication. The subject of the study is target assignment algorithms that account for topological constraints of the communication network. The primary goal is to enhance the efficiency of target allocation in robotic systems with restricted communication ranges by developing and applying a modified auction algorithm.

The tasks addressed in the study include:

– Analysis of existing assignment algorithms, including the auction and Hungarian methods.
– Evaluation of the impact of restricted communication on algorithm performance.
– Development of a modified auction algorithm that accounts for topological constraints.
– Implementation of the proposed algorithm and the Hungarian algorithm in a software environment.
– Comparative testing of the algorithms on model problems with varying communication constraints.

Experimental results confirm the high efficiency of the modified auction algorithm under restricted communication conditions, particularly with high data exchange rates. It was established that, unlike the Hungarian algorithm, the auction algorithm accounts for measurement errors in the utility matrix by selecting the accuracy parameter $\varepsilon$ proportional to these errors, achieving high accuracy with lower computational costs. The Hungarian algorithm, which does not account for errors and lacks the $\varepsilon$ parameter, aims for an exact solution that is unattainable under real-world measurement errors and restricted communication range, making the auction algorithm more effective. The dependence of iteration count and accuracy on communication range, problem size, and the $\varepsilon$ parameter was identified. The algorithm

is applicable to military robotic systems, search and rescue operations, and industrial automation.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Развитие робототехники и распределенных систем управления в последние десятилетия привело к значительному росту интереса к задачам оптимального распределения ресурсов в условиях ограниченной коммуникации. Такие задачи, известные как задачи назначения, требуют эффективного распределения ограниченного набора ресурсов (например, задач или объектов) между агентами (роботами) для максимизации общей выгоды. В условиях ограниченных областей связи, когда не все роботы могут взаимодействовать друг с другом или отсутствует единый центр управления, традиционные алгоритмы, такие как венгерский метод, сталкиваются с вычислительными трудностями или вообще неприменимы. Это подчеркивает необходимость разработки новых алгоритмов, способных учитывать топологические ограничения и обеспечивать высокую эффективность.

**Актуальность исследования** обусловлена растущей потребностью в автоматизации сложных систем управления в робототехнике, где ограниченные области связи создают дополнительные проблемы для координации роботов. По данным исследований [1], аукционные алгоритмы демонстрируют высокую эффективность для задач назначения в распределенных системах, однако их применение в робототехнике с учетом топологических ограничений остается недостаточно изученным. Это определяет актуальность данной работы, направленной на разработку и исследование новых подходов к решению задач назначения.

**Объект исследования** — распределенные системы управления роботами, функционирующие в условиях ограниченной коммуникации.

**Предмет исследования** — алгоритмы назначения, обеспечивающие оптимальное распределение целей между роботами с учетом ограниченных областей связи.

**Цель исследования** — повышение эффективности распределения целей в распределенных системах роботов с ограниченными областями связи путем разработки и применения модифицированного аукционного алгоритма.

**Задачи исследования**:

A. Изучить существующие алгоритмы решения задачи назначения, включая аукционный и венгерский методы.

B. Проанализировать влияние ограниченных областей связи на эффективность алгоритмов назначения.
C. Разработать модификацию аукционного алгоритма, учитывающую топологические ограничения в системах роботов.
D. Реализовать предложенный алгоритм и венгерский алгоритм в программной среде.
E. Провести сравнительное тестирование алгоритмов на модельных задачах с различными характеристиками коммуникационных ограничений.

**Теоретическая база исследования** включает работы по задачам назначения и групповому управлению роботами. Основой послужили исследования Д. Бертсекаса [1], описывающие аукционный алгоритм и его преимущества, а также работы Х. Куна [2] по венгерскому методу. Значительное внимание уделено работам по распределённым системам управления [3], [4], а также проблемам оптимального распределения целей в мультироботных системах [5]. В процессе подготовки исследования были изучены такие дисциплины, как «Алгоритмы и структуры данных», «Робототехника» и «Теория оптимизации».

**Методологическая база** включает общенаучные методы (анализ, моделирование, эксперимент) и конкретно-научные методы (методы линейного программирования, венгерский алгоритм, аукционные алгоритмы, алгоритмы на графах). В работе применены подходы к распараллеливанию вычислений, а также методы сравнительного анализа алгоритмов.

**Информационная база** включает материалы учебных дисциплин, данные из научных публикаций, а также результаты моделирования, полученные в ходе выполнения данной ВКР.

**Степень научной разработанности** проблемы характеризуется значительным вниманием к задачам назначения в работах Д. Бертсекаса, Х. Куна и других авторов [1]-[5]. Исследования группового управления роботами, включая работы В.Х. Пшихопова [3] и И.А. Каляева [4], подчеркивают важность учета коммуникационных ограничений. Однако адаптация аукционных алгоритмов к ограниченным областям связи в робототехнике остается малоисследованной, что определяет необходимость разработки новых подходов.

**Научная новизна** заключается в разработке модифицированного аукционного алгоритма, адаптированного для распределенных систем роботов с ограниченными областями связи. Новизна проявляется в учете топологических ограничений коммуникации, что позволяет повысить эффективность алгоритма по сравнению с традиционными методами. Также новизна состоит в сравнительном анализе аукционного и венгерского алгоритмов в контексте робототехнических приложений.

**Практическая значимость** заключается в возможности применения разработанного алгоритма для оптимизации распределения задач в системах управления роботами, работающих в условиях ограниченной коммуникации, таких как складская логистика, автономные транспортные системы и роевые робототехнические платформы. Результаты работы могут быть использованы для повышения эффективности реальных систем и дальнейших исследований в области распределенного управления.

**Апробация результатов** включает представление результатов на защите ВКР и размещение работы на портале СПбПУ.

Введение определяет рамки исследования, обосновывая актуальность проблемы оптимального распределения целей в распределённых системах управления роботами, особенно в условиях ограниченной коммуникации. Оно формулирует цель работы — повышение эффективности распределения задач путём разработки нового подхода, основанного на аукционном алгоритме, а также связывает поставленные задачи с главами работы, задавая структуру исследования.

Первая глава посвящена анализу существующих алгоритмов назначения. В ней рассматриваются классические методы, их математические основы, преимущества и ограничения, с акцентом на их применимость в робототехнических системах. Особое внимание уделяется анализу их применимости в условиях, где связи между роботами ограничены, что подчёркивает необходимость нового подхода.

Вторая глава сосредоточена на разработке модифицированного аукционного алгоритма. Она описывает математическую модель задачи, учитывающую топологические ограничения сети, и представляет изменения, внесённые в классический аукционный метод, чтобы адаптировать его к условиям ограниченной связи. Также обсуждаются теоретические аспекты, включая сходимость и оценку производительности алгоритма.

Третья глава посвящена программной реализации предложенного модифицированного алгоритма и его классического аналога. В ней описывается используемая программная среда, структура кода и подходы к моделированию распределённых систем. Особое внимание уделяется методам тестирования и визуализации результатов, которые позволяют оценить поведение алгоритмов при различных сценариях.

Четвёртая глава фокусируется на тестировании и сравнительном анализе разработанного алгоритма с классическим методом. Она представляет результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих влияние ключевых параметров на производительность и точность. Графики и численные данные иллюстрируют, как алгоритм справляется с задачами в условиях ограниченной коммуникации.

Пятая глава обсуждает перспективы дальнейшего развития исследования. В ней рассматриваются возможные улучшения алгоритма. Также анализируются потенциальные области применения, подчёркивая практическую значимость разработки.

Заключение подводит итоги исследования, суммируя достигнутые результаты. Оно также указывает на направления для будущих исследований, которые могут расширить применимость разработанного подхода.

# ГЛАВА 1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ НАЗНАЧЕНИЯ

## 1.1. Введение в предметную область

Задача назначения — одна из ключевых проблем комбинаторной оптимизации, широко применяемая в робототехнике, логистике и управлении ресурсами. Согласно [1], задача заключается в распределении $n$ агентов (например, роботов) по $m$ объектам (например, задачам или целям) для максимизации суммарной выгоды, заданной матрицей $\{a_{ij}\}$, где $a_{ij}$ — выгода от назначения агента $i$ объекту $j$. Постановка задачи в общем случае:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij_i} \to \max,$$

где $j_i$ — объект, назначенный агенту $i$, при условии, что каждый агент получает не более одного объекта, и каждый объект назначается не более чем одному агенту. Если $n \neq m$, некоторые агенты или объекты могут остаться неназначенными.

В робототехнике задача назначения актуальна для распределения целей между роботами в условиях ограниченной коммуникации, когда роботы обмениваются информацией только с соседями. Такие ограничения, обусловленные топологией сети, требуют алгоритмов, эффективных в распределенных системах.

Цель главы — проанализировать аукционный и венгерский алгоритмы, включая их математические основы, сходимость и оптимальность, а также оценить их применимость в робототехнике. Анализ обосновывает необходимость модифицированного аукционного алгоритма для ограниченной коммуникации.

## 1.2. Аукционный алгоритм

Аукционный алгоритм, предложенный Д. Бертсекасом [1], представляет собой итеративный метод для решения задачи назначения, моделирующий процесс аукциона, где роботы делают ставки на цели, а цены корректируются для достижения оптимального распределения.

### *1.2.1. Постановка задачи*

Задача назначения заключается в нахождении оптимального соответствия между $n$ роботами и $m$ целями с учетом матрицы выгод $\{a_{ij}\}$, где $a_{ij}$ — выгода робота $i$ при назначении ему цели $j$. Цель — максимизировать суммарную выгоду:

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_{ij_i},$$

где $j_i$ — цель, назначенная роботу $i$, при условии, что каждый робот получает не более одной цели, и каждая цель назначается не более чем одному роботу. Эта задача эквивалентна задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij},\\
&\text{при ограничениях:}\\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1, \quad \forall j = 1, \ldots, m,\\
&\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n,\\
&x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j,
\end{aligned}$$

где $x_{ij} = 1$, если робот $i$ назначен цели $j$, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Аукционный алгоритм решает эту задачу приближенно, обеспечивая суммарную выгоду, которая, согласно [1], находится в пределах $\min(n, m)\varepsilon$ от оптимального значения, где $\varepsilon > 0$ — параметр точности, определяющий степень приближения. Это означает, что если $A^*$ — оптимальная выгода, а $A$ — выгода, полученная алгоритмом, то:

$$A^* - \min(n, m)\varepsilon \leqslant A \leqslant A^*.$$

Для целочисленных $a_{ij}$ и $\varepsilon < 1/\min(n, m)$, алгоритм гарантирует точное оптимальное решение.

### *1.2.2. Описание алгоритма*

Согласно [1], аукционный алгоритм работает с матрицей выгод $\{a_{ij}\}$, где $a_{ij}$ — выгода робота $i$ при назначении цели $j$, и использует цены $\{p_j\}$, где $p_j \geqslant 0$ — цена, связанная с целью $j$, отражающая текущую стоимость ее назначения и регулирующая конкуренцию между роботами. Алгоритм начинается с произвольного распределения роботов по целям (возможно, пустого) и начальных цен $\{p_j\}$, обычно равных нулю. Ключевые определения:

- *Почти счастье*: Робот $i$, назначенный цели $j_i$, почти счастлив, если:

$$a_{ij_i} - p_{j_i} \geqslant \max_{j=1,\ldots,m} \{a_{ij} - p_j\} - \varepsilon,$$

  где $\varepsilon > 0$ — параметр точности.
- *Почти равновесие*: Распределение и цены, при которых все назначенные роботы почти счастливы.

Шаги алгоритма [1]:

A. Проверить, все ли назначенные роботы почти счастливы. Если да, завершить.
B. Выбрать робота $i$, не почти счастливого (или неназначенного), и найти цель $j_i$:

$$j_i \in \arg\max_{j=1,\ldots,m} \{a_{ij} - p_j\}.$$

C. Переназначить: робот $i$ получает цель $j_i$, а робот, ранее назначенный на $j_i$, получает цель, принадлежавшую $i$, или остается неназначенным.
D. Увеличить цену $p_{j_i}$ на:

$$\gamma_i = v_i - w_i + \varepsilon,$$

   где $v_i = \max_{j=1,\ldots,m}\{a_{ij} - p_j\}$, $w_i = \max_{j \neq j_i}\{a_{ij} - p_j\}$.
E. Повторить с шага 1.

### *1.2.3. Сходимость алгоритма*

**Теорема 1.1** (Сходимость аукционного алгоритма [1])**.** *Для произвольных $n$ роботов и $m$ целей аукционный алгоритм завершается за конечное число шагов с распределением и ценами, при которых каждый назначенный робот получает* *уникальную цель и является почти счастливым, а неназначенные роботы возможны только при $n > m$.*

**Доказательство**. Аукционный алгоритм итеративно назначает цели роботам, корректируя цены $\{p_j\}$. Робот $i$, назначенный цели $j_i$, почти счастлив, если:

$$a_{ij_i} - p_{j_i} \geqslant \max_{j=1,\ldots,m} \{a_{ij} - p_j\} - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр точности. На каждой итерации алгоритм выбирает робота $i$, который либо неназначен, либо не почти счастлив, и определяет цель $j_i$, максимизирующую:

$$j_i \in \arg\max_{j=1,\ldots,m} \{a_{ij} - p_j\},$$

увеличивая цену $p_{j_i}$ на:

$$\gamma_i = v_i - w_i + \varepsilon, \quad \text{где} \quad v_i = \max_{j=1,\ldots,m} \{a_{ij} - p_j\}, \quad w_i = \max_{j \neq j_i} \{a_{ij} - p_j\}.$$

Робот $i$ назначается цели $j_i$, становясь почти счастливым, так как:

$$a_{ij_i} - (p_{j_i} + \gamma_i) = a_{ij_i} - p_{j_i} - (v_i - w_i + \varepsilon) = w_i - \varepsilon \geqslant \max_{j \neq j_i} \{a_{ij} - p_j\} - \varepsilon.$$

Если цель $j_i$ уже была назначена роботу $k$, то $k$ становится неназначенным, а $i$ получает $j_i$. Это обеспечивает уникальность назначений: каждая цель назначается не более чем одному роботу.

Алгоритм продолжает итерации, пока существуют неназначенные или не почти счастливые роботы. На каждой итерации неназначенный робот $i$ выбирает цель $j_i$, увеличивая ее цену на $\gamma_i \geqslant \varepsilon$. Если $j_i$ занята роботом $k$, то $k$ становится неназначенным и в следующей итерации выбирает новую цель. Цены $p_j$ монотонно возрастают, что делает уже назначенные цели менее привлекательными для неназначенных роботов, так как $a_{ij} - p_j$ уменьшается с ростом $p_j$.

Если цель $j$ получила много ставок, ее цена $p_j \geqslant m'\varepsilon$, где $m'$ — число ставок. При большом $p_j$, $a_{ij} - p_j$ становится меньше, чем $a_{ik} - p_k$ для цели $k$ с низкой ценой (например, $p_k = 0$, если $k$ не получала ставок). Таким образом, неназначенные роботы предпочитают цели с низкими ценами, которые часто свободны или менее востребованы. Поскольку рост цен ограничен (максимум $C + \varepsilon$, где $C = \max_{i,j} |a_{ij}|$, так как $a_{ij} - p_j < 0$ невыгодно), число ставок на конкретную цель конечно, и далее, после какого-то порогового значения цены, она не будет выбираться другими роботами.

При $n \leqslant m$, алгоритм стремится назначить каждому из $n$ роботов уникальную цель, так как целей достаточно. Итерации продолжаются, пока все роботы не станут почти счастливыми, что возможно, так как число целей $m \geqslant n$. Когда все $n$ роботов назначены и почти счастливы, алгоритм завершается. При $n > m$, максимум $m$ роботов могут быть назначены, так как целей только $m$. В этом случае после назначения $m$ целей неназначенные $n - m$ роботы остаются без целей, и алгоритм завершается, так как все назначенные роботы почти счастливы, а неназначенным роботам не хватает целей для новых назначений. Уникальность назначений сохраняется на всех итерациях, так как переназначение освобождает цель ровно для одного робота.

Число итераций конечно из-за конечности $n, m$ и ограниченности роста цен. Таким образом, алгоритм завершается за конечное число шагов, обеспечивая, что каждый назначенный робот получает уникальную цель и является почти счастливым, а неназначенные роботы возможны только при $n > m$.

**Теорема 1.2** (Оценка числа итераций аукционного алгоритма)**.** *Количество итераций аукционного алгоритма в худшем случае равно* $\frac{m \cdot C}{\varepsilon}$*, где* $m$ *— число целей,* $C = \max_{i,j} |a_{ij}|$ *— максимальная абсолютная величина выгоды от назначения робота на цель, а* $\varepsilon$ *— минимальный шаг увеличения цены цели в алгоритме.*

**Доказательство.** В аукционном алгоритме задача назначения включает $n$ роботов и $m$ целей, где каждому роботу должна быть назначена ровно одна цель. На каждой итерации алгоритма один робот делает ставку на цель, увеличивая её цену как минимум на $\varepsilon$. Элементы матрицы выгод $a_{ij}$ представляют выгоду от назначения робота $i$ на цель $j$, и максимальная возможная выгода ограничена величиной $C = \max_{i,j} |a_{ij}|$.

В худшем случае, когда начальные цены целей равны нулю, а алгоритм требует достижения цен порядка $C$ для всех $m$ целей, чтобы обеспечить оптимальное распределение, каждая цель может потребовать до $C/\varepsilon$ итераций для достижения своей предельной цены. Поскольку в задаче участвуют $m$ целей, общее количество итераций в худшем случае составляет $m \cdot C/\varepsilon$.

### *1.2.4. Оптимальность*

**Теорема 1.3** (Оптимальность аукционного алгоритма [1])**.** *Если алгоритм завершается с почти равновесным распределением, суммарная выгода находится в пределах* $\min(n,m)\varepsilon$ *от оптимальной. При целочисленных* $a_{ij}$ *и* $\varepsilon < 1/\min(n,m)$*, распределение оптимально.*

**Доказательство**. Оптимальная выгода:

$$A^* = \max_{\{k_i\}} \sum_{i=1}^{n} a_{ik_i}, \quad k_i \neq k_l \text{ для } l \neq i, \text{ где } k_i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Двойственная задача:

$$D^* = \min_{p_j} \left\{ \sum_{j=1}^{m} p_j + \sum_{i=1}^{n} \max_j \{a_{ij} - p_j\} \right\}.$$

Для любого распределения $\{(i,k_i)\}$ и цен $\{p_j\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik_i} \leqslant \sum_{j=1}^{m} p_j + \sum_{i=1}^{n} \max_j \{a_{ij} - p_j\},$$

так как $\max_j\{a_{ij} - p_j\} \geqslant a_{ik_i} - p_{k_i}$. Следовательно, $A^* \leqslant D^*$.

При почти равновесии для распределения $\{(i, j_i)\}$:

$$a_{ij_i} - p_{j_i} \geqslant \max_j \{a_{ij} - p_j\} - \varepsilon.$$

Суммируем по $i$ для назначенных роботов:

$$\sum_{i=1}^{\min(n,m)} (a_{ij_i} - p_{j_i}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \max_j \{a_{ij} - p_j\} - \min(n,m)\varepsilon.$$

Добавим $\sum_{j=1}^{m} p_j$:

$$\sum_{i=1}^{\min(n,m)} a_{ij_i} \geqslant \sum_{j=1}^{m} p_j + \sum_{i=1}^{n} \max_j \{a_{ij} - p_j\} - \min(n,m)\varepsilon.$$

Поскольку $D^* \leqslant \sum_{j=1}^{m} p_j + \sum_{i=1}^{n} \max_j\{a_{ij} - p_j\}$, то:

$$\sum_{i=1}^{\min(n,m)} a_{ij_i} \geqslant D^* - \min(n,m)\varepsilon \geqslant A^* - \min(n,m)\varepsilon.$$

Так как $\sum_{i=1}^{\min(n,m)} a_{ij_i} \leqslant A^*$, получаем:

$$A^* - \min(n,m)\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\min(n,m)} a_{ij_i} \leqslant A^*.$$

Для целочисленных $a_{ij}$ и $\varepsilon < 1/\min(n,m)$, $A^* - \sum_{i=1}^{\min(n,m)} a_{ij_i} < 1$, и, так как разность целочисленная, $A^* = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} a_{ij_i}$.

### *1.2.5. Преимущества и недостатки*

Преимущества:

- Интуитивная экономическая модель: алгоритм имитирует реальный аукцион, упрощая понимание и интерпретацию.
- Гибкость для адаптации: легко модифицируется для асимметричных задач с $n \neq m$, транспортных проблем и задач минимальной стоимости потока [1].
- Хорошо подходит для параллельных и распределенных систем: допускает асинхронные и параллельные реализации, эффективен для разреженных задач [5].

Недостатки:

- Число итераций зависит от $C/\varepsilon$: для больших $C = \max_{i,j} |a_{ij}|$ и малого $\varepsilon$ требует большого числа итераций.
- Чувствительность к выбору $\varepsilon$: большое $\varepsilon$ снижает точность, малое $\varepsilon$ увеличивает число итераций.
- Чувствительность к начальным ценам: плохие начальные цены замедляют сходимость, хотя $\varepsilon$-масштабирование смягчает эту проблему.

## 1.3. Венгерский алгоритм

Венгерский алгоритм, разработанный Х. Куном [2], решает задачу назначения через редукцию матрицы выгод или эквивалентную задачу максимального паросочетания в двудольном графе [6].

### *1.3.1. Матричный подход*

Алгоритм работает с матрицей выгод $\{a_{ij}\}$ размера $n \times m$. Для унификации, если $n \neq m$, матрица дополняется фиктивными роботами или целями с нулевой выгодой, чтобы получить квадратную матрицу размера $\max(n, m) \times \max(n, m)$ [2]:

A. Для каждого ряда вычесть минимальный элемент: $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \min_j a_{ij}$.
B. Для каждого столбца вычесть минимальный элемент: $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \min_i a_{ij}$.
C. Найти минимальное число строк и столбцов, покрывающих все нули.
D. Если число линий равно $\min(n, m)$, найти назначение (нули соответствуют оптимальным парам) и завершить.
E. Иначе найти минимальный непокрытый элемент $\delta$, вычесть $\delta$ из непокрытых элементов, прибавить к элементам на пересечении линий, вернуться к шагу 3.

### *1.3.2. Графовый подход*

Как указано в [6], задача назначения эквивалентна нахождению максимального паросочетания в двудольном графе $G = (V_1 \cup V_2, E)$, где $V_1$ — роботы ($n$ вершин), $V_2$ — цели ($m$ вершин), а ребра $(i, j)$ имеют вес $a_{ij}$. Алгоритм:

A. Построить матрицу $\{a_{ij}\}$ и редуцировать ее, как выше.
B. Сформировать граф, где ребра соответствуют нулям в матрице.
C. Найти максимальное паросочетание (например, с помощью алгоритма Куна или Форда-Фалкерсона).
D. Если паросочетание покрывает $\min(n, m)$ вершин, оно оптимально. Иначе корректировать матрицу ($\delta$) и обновить граф.

### *1.3.3. Доказательство оптимальности*

Алгоритм основан на двойственности линейного программирования [2]. Примитивная задача:

$$\max \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1, x_{ij} \geqslant 0.$$

Двойственная задача:

$$\min \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j, \quad u_i + v_j \geqslant a_{ij},$$

где $u_i$, $v_j$ — двойственные переменные. Редукция матрицы и корректировка $\delta$ обеспечивают выполнение условий $u_i + v_j \geqslant a_{ij}$, а равенство $u_i + v_j = a_{ij}$ для выбранных пар дает оптимальность.

### *1.3.4. Преимущества и недостатки*

Преимущества:

- Гарантированная оптимальность.
- Простота реализации [6].

Недостатки:

- Сложность $O(n^2 * m)$ для больших $n$ или $m$.
- Требует полной матрицы $\{a_{ij}\}$, что проблематично при ограниченной коммуникации.
- Непригодность для распределенных систем: невозможность работы в условиях ограниченной коммуникации между роботами, так как алгоритм предполагает централизованное управление [4].
- Не допускает асинхронных и параллельных реализаций.

## 1.4. Постановка проблемы

В распределенных системах с $n$ роботами и $m$ целями часто возникают ограниченные области связи, при которых каждый робот видит все цели, но не может обмениваться информацией с другими роботами [4],[5]. Аукционный алгоритм [1] предполагает, что роботы могут координировать назначения через обмен информацией, что невозможно в условиях отсутствия коммуникации между роботами. Это приводит к необходимости дополнительных механизмов координации или снижению качества назначений. Венгерский алгоритм [2] требует полной матрицы выгод и централизованного управления, что неосуществимо в таких системах [4]. Необходим модифицированный аукционный алгоритм, который:

- Учитывает отсутствие полной коммуникации между $n$ роботами.
- Обеспечивает эффективность и близость к оптимальности.

Цель — разработать такой алгоритм и сравнить его с венгерским методом.

### 1.5. Выводы

Рассмотрены аукционный [1] и венгерский [2] алгоритмы для задачи назначения $n$ роботов по $m$ целям. Аукционный алгоритм эффективен, но требует адаптации для условий, где не все роботы могут обмениваться информацией друг с другом. Венгерский алгоритм оптимален, но непригоден для распределенных систем без централизации. Необходим модифицированный аукционный алгоритм, учитывающий отсутствие коммуникации между роботами.

## ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МОДИФИЦИРОВАННОГО АУКЦИОННОГО АЛГОРИТМА

В данной главе представлена разработка модифицированного аукционного алгоритма для распределенных систем роботов с ограниченными областями связи. На основе анализа аукционного алгоритма Бертсекаса [1] предлагается модификация, учитывающая топологические ограничения сети, при которых роботы обмениваются информацией только с соседями, объединенными в группы на основе радиуса связи. Описывается математическая модель задачи, а также алгоритмические изменения, обеспечивающие независимую обработку связных компонент и устойчивость к отсутствию коммуникации между группами. Формулируются теоремы об эффективности и близости решения к оптимальному.

### 2.1. Математическая модель задачи

Задача назначения формулируется следующим образом. Дано множество из $n$ роботов $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ и множество из $m$ целей $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Каждый робот $r_i$ имеет координаты $p_i = (x_i, y_i)$, а каждая цель $t_j$ — координаты $q_j = (X_j, Y_j)$. Затраты на назначение робота $r_i$ цели $t_j$ заданы матрицей $\{c_{ij}\}$, где $c_{ij}$ представляет время, необходимое роботу $i$ для достижения цели $j$, вычисляемое по формуле:

$$c_{ij} = \frac{d(p_i, q_j)}{v_i},$$

где $d(p_i, q_j) = \sqrt{(X_j - x_i)^2 + (Y_j - y_i)^2}$ — евклидово расстояние, $v_i$ — скорость робота $i$, предполагаемая постоянной и одинаковой для всех роботов (например, $v_i = 1$). Для решения задачи в терминах максимизации матрица затрат $c_{ij}$ преобразуется в матрицу выгод $\alpha_{ij}$:

$$\alpha_{ij} = C_{\max} - c_{ij}, \quad \text{где} \quad C_{\max} = \max_{i,j} c_{ij}.$$

Все роботы имеют доступ ко всем целям, поэтому $c_{ij}$ и $\alpha_{ij}$ определены для любых $i$ и $j$.

Матрица связи роботов $V = \{v_{ij}\}$ определяет топологию сети: $v_{ij} = 1$, если $d(p_i, p_j) \leqslant R$ (роботы $r_i$ и $r_j$ могут обмениваться информацией), и $v_{ij} = 0$ в противном случае. Роботы объединяются в группы (связные компоненты графа $V$), внутри которых проводится аукцион.

Цель задачи — максимизировать суммарную выгоду:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij_i} \to \max,$$

где $j_i$ — цель, назначенная роботу $r_i$, что эквивалентно минимизации суммарного времени:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij_i} \to \min,$$

поскольку $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij_i} = \sum_{i=1}^{n} (C_{\max} - c_{ij_i}) = nC_{\max} - \sum_{i=1}^{n} c_{ij_i}$, и максимизация $\sum \alpha_{ij_i}$ соответствует минимизации $\sum c_{ij_i}$. Условия задачи:

- Цель может быть назначена нескольким роботам в процессе аукциона, но в итоговом решении для каждой цели $t_j$ учитывается только робот с максимальной выгодой $\alpha_{ij}$, что эквивалентно минимальному времени $c_{ij}$. Остальные назначения для этой цели отбрасываются.
- Роботы обмениваются информацией о ценах и назначениях только внутри связных компонент графа связи $V$.

## 2.2. Модификация аукционного алгоритма

Модифицированный аукционный алгоритм адаптирует подход Бертсекаса [1] для учета отсутствия коммуникации между роботами. Ключевые изменения включают:

– Полная видимость целей: Все цели доступны каждому роботу, поэтому $c_{ij}$ и $\alpha_{ij}$ определены для всех $i, j$.
– Разделение на связные компоненты: Роботы группируются по графу связи $V$, что позволяет проводить аукцион независимо для каждой связанной компоненты.
– Независимая обработка компонент: Каждая связная компонента обрабатывается отдельно, моделируя распределенную систему без коммуникации между группами.
– Разрешение конфликтов: Если несколько роботов из разных компонент выбирают одну цель, учитывается только робот с максимальной выгодой $\alpha_{ij}$, что соответствует минимальному времени $c_{ij}$, а остальные назначения отбрасываются.

### *2.2.1. Описание алгоритма*

Алгоритм состоит из следующих шагов:

A. **Разбиение на компоненты**:
   – Каждый робот $r_i$ определяет своих соседей, с которыми он может обмениваться информацией: $v_{ik} = 1$, если $d(p_i, p_k) \leqslant R$, и $v_{ik} = 0$ иначе. Эта информация хранится локально.
   – Каждый робот $r_i$ участвует в распределённом обмене информацией со своими соседями (где $v_{ik} = 1$), отправляя свой идентификатор и получая идентификаторы соседей. Этот процесс повторяется, пока роботы не определят состав своей связной компоненты $C_l$.
   – В результате каждый робот знает, к какой компоненте $C_l$ он принадлежит, и список роботов в этой компоненте.

B. **Инициализация**:

- Каждый робот $r_i$ знает свои координаты $p_i = (x_i, y_i)$ и координаты всех целей $\{q_j\}$. Робот вычисляет локальную строку матрицы затрат $\{c_{ij}\}$, где $c_{ij} = \frac{d(p_i,q_j)}{v_i}$.
- Через локальный обмен информацией с соседями (где $v_{ik} = 1$) роботы в компоненте $C_l$ совместно определяют $C_{\max} = \max_{i\in C_l, j} c_{ij}$.
- Каждый робот $r_i \in C_l$ преобразует свою строку затрат в строку матрицы выгод: $\alpha_{ij} = C_{\max} - c_{ij}$.
- Каждый робот инициализирует цены целей $\{p_j = 0\}$ и своё назначение $j_i = -1$ (не назначен).

C. **Аукцион в компонентах**:
   - Для каждой компоненты $C_l$:
     1. Для каждого робота $r_i \in C_l$ вычислить текущую прибыль: $\alpha_{ij_i} - p_{j_i}$, если $j_i \neq -1$, иначе 0.
     2. Проверить условие почти счастья: $\alpha_{ij_i} - p_{j_i} \geqslant \max_j\{\alpha_{ij} - p_j\} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.
     3. Если робот не почти счастлив, найти цель $t_{j_i}$: $j_i = \arg\max_j\{\alpha_{ij} - p_j\}$, включая фиктивную цель ($\alpha_{i,-1} = 0$).
     4. Вычислить $v_i = \max_j\{\alpha_{ij} - p_j\}$, $w_i = \max_{j\neq j_i}\{\alpha_{ij} - p_j\}$.
     5. Если $j_i = -1$, переназначить робота на фиктивную цель без изменения цен.
     6. Иначе переназначить: робот $r_i$ получает цель $t_{j_i}$, прежний владелец $t_{j_i}$ (если есть) становится неназначенным.
     7. Увеличить цену: $p_{j_i} += v_i - w_i + \varepsilon$.
     8. Повторять, пока все роботы в $C_l$ не станут почти счастливы.

### *2.2.2. Сходимость алгоритма*

**Теорема 2.1** (Сходимость модифицированного аукционного алгоритма)**.** *Модифицированный аукционный алгоритм завершается за конечное число шагов, при котором все роботы в каждой связной компоненте удовлетворяют условию почти счастья, определенному в главе 1.*

**Доказательство**. Модифицированный алгоритм проводит аукцион в каждой связной компоненте $C_l$, следуя шагам оригинального аукционного алгоритма, описанного в главе 1. Согласно теореме 1.1 (глава 1), оригинальный аукционный алгоритм завершается за конечное число шагов, обеспечивая почти равновесие, при котором все назначенные роботы почти счастливы, то есть для каждого робота $i$, назначенного цели $j_i$, выполняется:

$$\alpha_{ij_i} - p_{j_i} \geqslant \max_{j=1,\ldots,m} \{\alpha_{ij} - p_j\} - \varepsilon.$$

Поскольку аукцион в каждой компоненте $C_l$ идентичен оригинальному, сходимость внутри $C_l$ гарантируется той же теоремой. Таким образом, алгоритм завершается за конечное число шагов, обеспечивая почти равновесие в каждой компоненте.

### *2.2.3. Оценка итераций модифицированного аукционного алгоритма*

**Теорема 2.2** (Оценка числа итераций модифицированного аукционного алгоритма)**.** *Пусть $k$ — число связных компонент графа связи $V$, $n_l$ — число роботов в компоненте $C_l$, $m$ — число целей, $C = \max_{i,j} |a_{ij}|$ — максимальная абсолютная величина выгоды от назначения робота $i$ на цель $j$, а $\varepsilon$ — минимальный шаг увеличения цены цели в алгоритме. Тогда общее число итераций модифицированного аукционного алгоритма в худшем случае не превышает $m \cdot \sum_{l=1}^{k} \frac{C}{\varepsilon}$.*

*Доказательство.* Для каждой связной компоненты $C_l$ графа связи $V$ применяется оригинальный аукционный алгоритм. Согласно теореме 1.2, число итераций для компоненты $C_l$ в худшем случае не превышает $\frac{m \cdot C}{\varepsilon}$. Суммируя по всем $k$ компонентам, получаем общее число итераций: $m \cdot \sum_{l=1}^{k} \frac{C}{\varepsilon}$. □

### *2.2.4. Оптимальность*

**Теорема 2.3** (Оптимальность модифицированного алгоритма)**.** *В каждой связной компоненте $C_l$ модифицированный аукционный алгоритм при целочисленных выгодах $\alpha_{ij}$ и $\varepsilon < 1/n$ дает оптимальное решение локальной задачи аукциона, как определено в главе 1. Однако общее решение после объединения компонент не гарантирует глобальной оптимальности из-за отсутствия коммуникации между компонентами.*

**Доказательство**. В каждой связной компоненте $C_l$ аукцион проводится по правилам оригинального аукционного алгоритма, описанного в главе 1. Согласно теореме 1.3 (глава 1), при целочисленных $\alpha_{ij}$ и $\varepsilon < 1/n$ оригинальный аукционный алгоритм обеспечивает оптимальное решение, где суммарная выгода $\sum_{i \in C_l} \alpha_{ij_i}$ равна локальному оптимуму. Таким образом, в каждой компоненте $C_l$ достигается оптимальное локальное назначение.

Однако глобальная оптимальность не гарантируется. Из-за отсутствия коммуникации между компонентами роботы в $C_l$ не учитывают выгоды роботов из других компонент, что может привести к выбору локально оптимальных, но глобально неоптимальных назначений. Следовательно, суммарная выгода $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij_i}$ может быть меньше глобального оптимума.

### 2.3. Выводы

Разработан модифицированный аукционный алгоритм, учитывающий отсутствие коммуникации между роботами в распределенных системах, за исключением обмена внутри связных компонент. Алгоритм группирует роботов в связные компоненты с помощью матрицы связей $V$, проводит аукцион независимо в каждой компоненте и обеспечивает полную видимость целей. Доказана сходимость за конечное число шагов (теорема 2.1) и оптимальность в каждой компоненте для целочисленных выгод $\alpha_{ij}$ при $\varepsilon < 1/n$ (теорема 2.3), но глобальная оптимальность не достигается из-за отсутствия коммуникации между компонентами. Преимущества включают простоту реализации, снижение коммуникационных затрат и адаптивность к реальным сценариям робототехники. Сформулированные гипотезы задают направления для дальнейших исследований эффективности и устойчивости алгоритма.

## ГЛАВА 3. РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Глава посвящена реализации модифицированного аукционного и венгерского алгоритмов для сравнительного анализа. Описывается программная среда, выбранная для реализации, включая язык программирования и инструменты моделирования распределенных систем роботов. Приводится структура программного обеспечения, обеспечивающего тестирование алгоритмов.

### 3.1. Программная среда

Реализация выполнена на языке C++ с использованием библиотек Qt для визуализации данных. Генерация случайных данных реализована с использованием стандартных средств C++. Код совместим с платформами Windows и Unix.

### 3.2. Структура реализации

Программное обеспечение включает модули для аукционного и венгерского алгоритмов, а также логику тестирования и визуализации результатов. Аукционный алгоритм учитывает ограничения связи, разделяя роботов на группы и назначая задачи с учетом настраиваемого параметра радиуса связи, влияющего на скорость и точность. Венгерский алгоритм решает задачу оптимального назначения. Тестирование проводится на случайных данных с варьированием размеров задачи (5- 300 роботов/целей), радиусов связи (1-300 условных единиц) и параметра точности ε (от $10^{-6}$ до 10.0).

### 3.3. Тестирование и визуализация

Тестирование включало сравнение времени выполнения, числа итераций и точности алгоритмов. Результаты сравнения представлены на графиках, что позволило оценить то, как настройка параметров точности ε и радиуса связи R влияют на работу методов.

## ГЛАВА 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной главе представлены результаты экспериментального исследования модифицированного аукционного алгоритма, описанного в главе 2, в сравнении с классическим венгерским алгоритмом. Рассматриваются модельные задачи, имитирующие распределенные системы роботов с различной топологией сети и радиусом связи $R$. Описываются оценки, включающие количество операций, скорость сходимости, относительную точность. Анализируется эффективность предложенного алгоритма. Результаты визуализированы в виде графиков.

## 4.1. Постановка эксперимента

### *4.1.1. Модельные задачи*

Для исследования эффективности модифицированного аукционного алгоритма были разработаны модельные задачи, имитирующие распределенные системы роботов. Параметры задач включали:

- **Размер задачи**: Число роботов $n$ и целей $m$ варьировалось от 5 до 100, при этом $n = m$ для сбалансированной задачи.
- **Радиус связи**: Рассматривались значения $R \in \{10, 20, 30\}$, а также диапазон от 5 до 100 для анализа влияния радиуса на точность.
- **Координаты**: Координаты роботов $\{p_i = (x_i, y_i)\}$ и целей $\{q_j = (X_j, Y_j)\}$ генерировались случайным образом в диапазоне $[0, 100]$ с использованием генератора псевдослучайных чисел.
- **Матрица затрат и выгод**: Затраты $c_{ij}$ определялись как время, необходимое роботу $i$ для достижения цели $j$, вычисляемое по формуле:

  $$c_{ij} = \frac{d(p_i, q_j)}{v_i}$$

  где $d(p_i, q_j)$ — евклидово расстояние между роботом $i$ и целью $j$, $v_i$ — скорость робота $i$, предполагаемая постоянной и одинаковой для всех роботов (например, $v_i = 1$). Для решения задачи в терминах максимизации матрица затрат $c_{ij}$ преобразуется в матрицу выгод $\alpha_{ij}$ путем вычитания каждого элемента из максимального значения затрат:

  $$\alpha_{ij} = C_{\max} - c_{ij}, \quad \text{где} \quad C_{\max} = \max_{i,j} c_{ij}.$$

  Задача решается как максимизация суммарной выгоды $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij_i}$, что эквивалентно минимизации суммарного времени $\sum_{i=1}^{n} c_{ij_i}$, так как максимизация $\sum_{i=1}^{n}(C_{\max} - c_{ij_i})$ соответствует минимизации $\sum_{i=1}^{n} c_{ij_i}$.

– **Матрица связи**: Матрица $V = \{v_{ij}\}$ формировалась так, что $v_{ij} = 1$, если $d(p_i, p_j) \leqslant R$, и $v_{ij} = 0$ в противном случае.
– **Параметр** $\varepsilon$: Для аукционного алгоритма исследовались значения $\varepsilon$ от $10^{-5}$ до 10 с логарифмическим шагом.

Каждая задача генерировалась 100 раз для усреднения результатов, что обеспечивало статистическую надежность.

#### *4.1.2. Методика проведения экспериментов*

Эксперименты проводились с использованием программной реализации на языке C++ с применением стандартных библиотек для обработки данных и построения графиков. Исследовались следующие аспекты:

A. Сравнение количества элементарных арифметических и логических операций, а также обменов между роботами в аукционном и венгерском алгоритмах для различных размеров задачи.
B. Анализ относительной точности аукционного алгоритма для фиксированных размеров задачи $n \in \{10, 30, 50\}$ и различных радиусов.
C. Исследование влияния параметра $\varepsilon$ на время выполнения и точность при $n = 80$ и $R \in \{10, 20, 30\}$.
D. Оценка точности аукционного алгоритма на каждой итерации для $n \in \{10, 30, 50, 100\}$ и $R = 200$.
E. Оценка числа итераций для фиксированного радиуса $R = 200$ и различных значений параметра $\varepsilon$.

Результаты представлены в виде графиков, сохраненных в формате PNG.

### 4.2. Результаты экспериментов

#### *4.2.1. Число операций и обменов*

Эксперименты проводились для $n = m$ от 5 до 100 и радиуса $R = 200$. Результаты представлены на графике (см. рисунок 4.1).

Эксперименты показывают, что в аукционном алгоритме число арифметических и логических операций значительно меньше, чем в венгерском алгоритме, что делает его более эффективным с точки зрения вычислительной сложности для этих типов операций. Однако число обменов между роботами, которое ха-

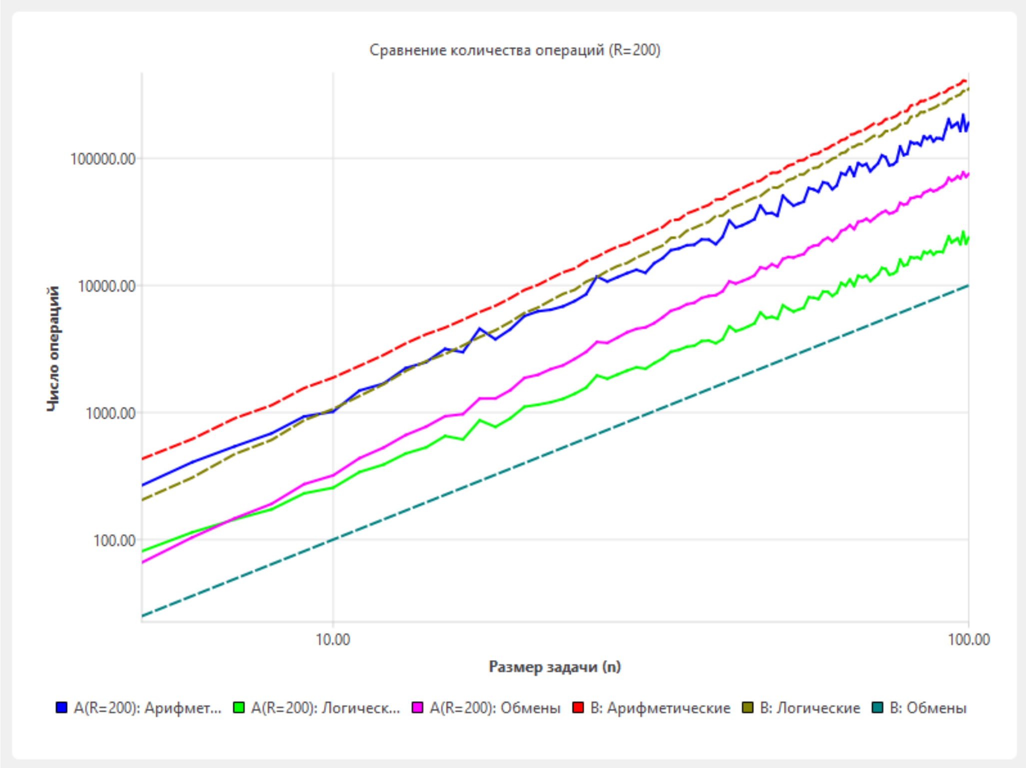


Рис.4.1. Зависимость числа операций и обменов аукционного и венгерского алгоритмов от размера задачи.

рактеризует количество итераций в аукционном алгоритме, значительно больше, что может замедлять выполнение, особенно при большом числе роботов и целей.

Для повышения эффективности аукционного алгоритма по сравнению с венгерским необходимо, чтобы роботы были оснащены технологиями быстрого обмена данными, обеспечивающими минимальное время передачи информации между собой. Это позволит сократить общее время выполнения алгоритма, сохраняя его преимущества в меньшем числе арифметических и логических операций.

Введение двух характеристик — $F_{\text{выч}}$ (количество операций в секунду с вещественными или целыми числами) и $F_{\text{обм}}$ (скорость обмена данными в системе связи, бит/сек) — позволяет оценить, какой подход окажется лучше в зависимости от их значений. Аукционный алгоритм будет предпочтительнее, если $F_{\text{обм}}$ достаточно высоко, что компенсирует большое число обменов, а $F_{\text{выч}}$ обеспечивает достаточную вычислительную мощность для обработки меньшего числа операций. Венгерский алгоритм, напротив, будет эффективнее при высоком $F_{\text{выч}}$ и низком значении $F_{\text{обм}}$, когда обмены не играют значительной роли из-за централизованного характера алгоритма.

### *4.2.2. Относительная точность*

Точность аукционного алгоритма исследовалась для $n \in \{10, 30, 50\}$ и $R$ от 5 до 100 (см. рисунок 4.2).

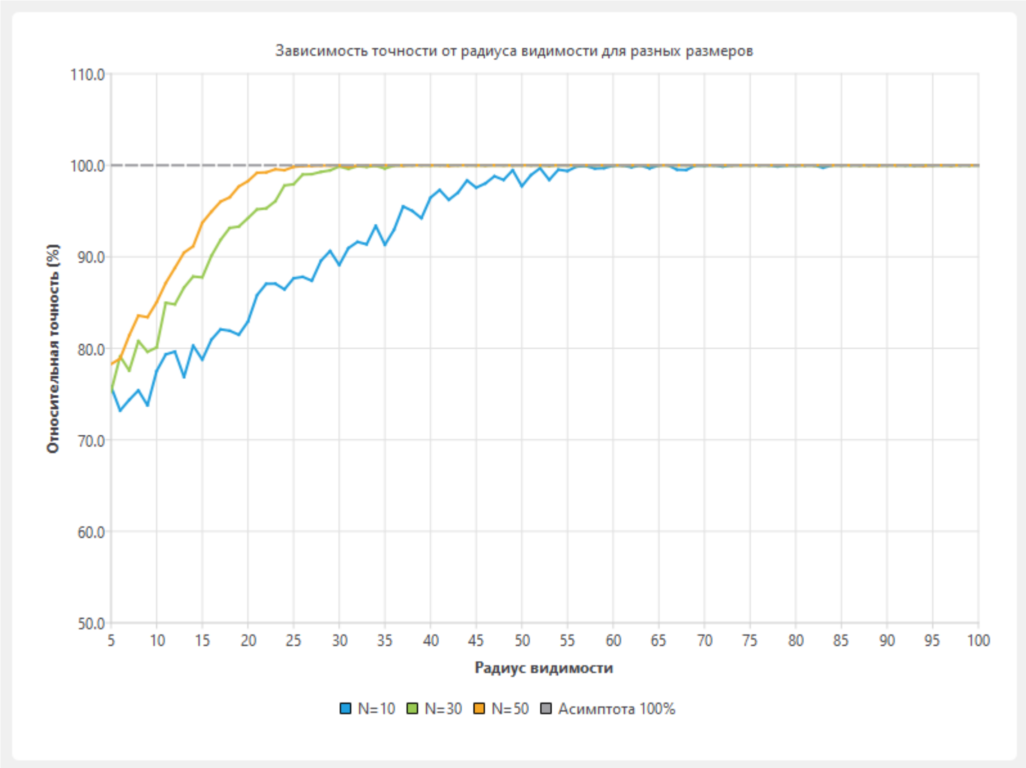


Рис.4.2. Зависимость относительной точности аукционного алгоритма от радиуса связи для различных размеров задачи.

Выводы:

– Точность возрастает с увеличением $R$, достигая 95–100% при $R \geqslant 50$.
– Для больших $n$ точность возрастает быстрее из-за меньшего числа связных компонент.

### *4.2.3. Влияние параметра* $\varepsilon$

Влияние $\varepsilon$ на время и точность исследовалось для $n = 80$ и $R \in \{10, 20, 30\}$ (см. рисунки 4.3 и 4.4).

Наблюдения:

– Время выполнения уменьшается с ростом $\varepsilon$, так как требуется меньшее число итераций.
– Точность падает при больших $\varepsilon$, но при $\varepsilon \leqslant 10^{-2}$ превышает 90%.

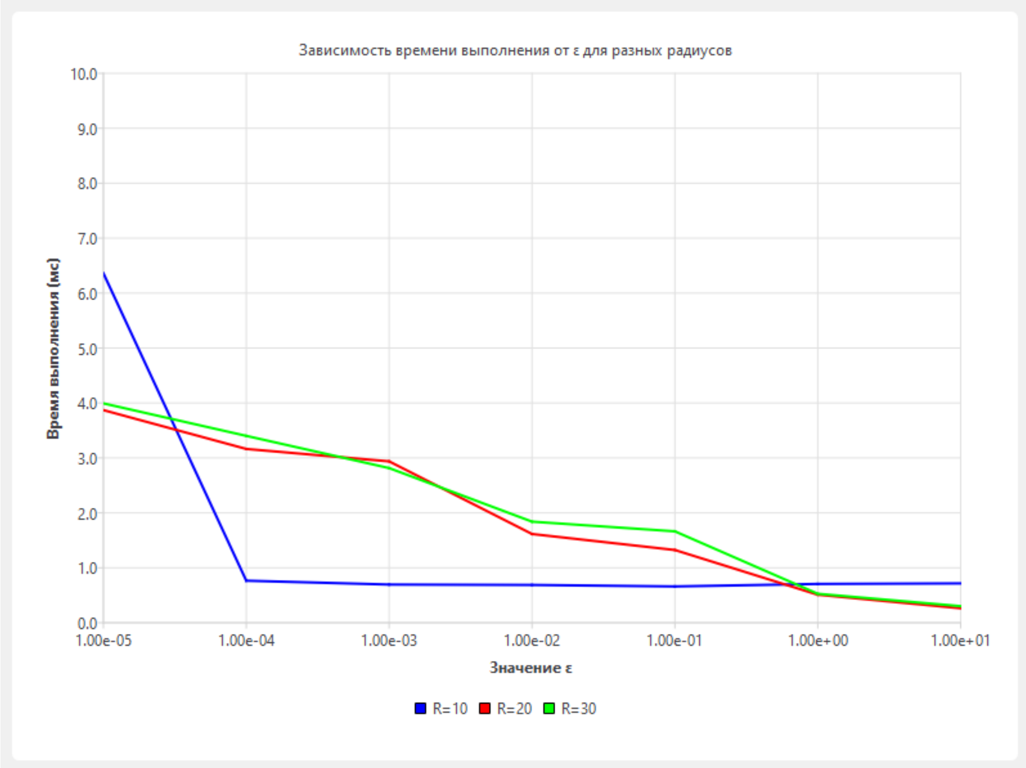


Рис.4.3. Зависимость времени выполнения аукционного алгоритма от ε для различных радиусов связи.

### 4.2.4. Точность по итерациям

Точность на каждой итерации исследовалась для $n \in \{10, 30, 50, 100\}$ и $R = 200$ (см. рисунок 4.5).

Наблюдения:

- Точность аукционного алгоритма быстро растет на первых итерациях, вплоть до значения относительной точности в 95%.
- Для больших $n$ требуется больше итераций из-за увеличения числа конфликтов между роботами.

### 4.2.5. Количество итераций от заданного параметра ε

Зависимость числа итераций от заданного параметра ε исследовалась для $n \in \{20, 40, 70\}$ и радиуса связи $R = 200$ (см. рисунок 4.6). Поскольку матрица выгод $\alpha_{ij}$ вычисляется на основе матрицы затрат $c_{ij}$, где $c_{ij} = \frac{d(p_i, q_j)}{v_i}$, а $\alpha_{ij} = C_{\max} - c_{ij}$, погрешности измерений расстояний $d(p_i, q_j)$ влияют на точность $c_{ij}$ и, следовательно, $\alpha_{ij}$. Предполагается, что ошибка $\varepsilon_{ij}$ в $c_{ij}$ подчиняется нормальному распределению $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_c^2)$, где $\sigma_c^2$ — дисперсия ошибки. Соответственно, ошибка в $\alpha_{ij}$ равна $\varepsilon_{\alpha_{ij}} = -\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_c^2)$.

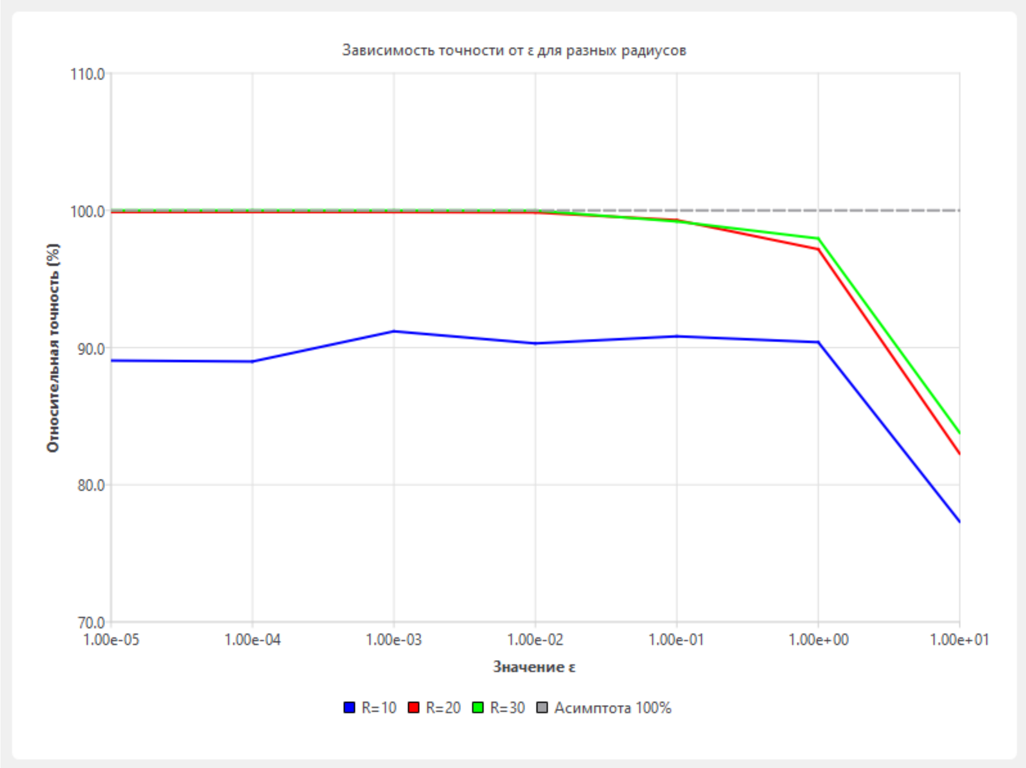


Рис.4.4. Зависимость относительной точности аукционного алгоритма от ε для различных радиусов связи.

Суммарная ошибка целевой функции $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij_i}$ из-за погрешностей измерений равна $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{\alpha_{ij_i}} \sim N(0, n\sigma_c^2)$, со стандартным отклонением $\sqrt{n}\sigma_c$. Согласно теореме 1.3 (глава 1), ошибка аукционного алгоритма ограничена $n\varepsilon$, следовательно достаточно выбирать $\varepsilon$ соизмеримым с $\frac{\sigma_c}{\sqrt{n}}$, чтобы ошибка алгоритма $n\varepsilon$ была сопоставима с $\sqrt{n}\sigma_c$. Например, при $\sigma_c = 0.1$ и $n = 40$, значение $\varepsilon$ порядка 0.0158 является подходящим.

На рисунке 4.6 представлена зависимость числа итераций от $\varepsilon$.

Наблюдения:

- Число итераций монотонно убывает с ростом $\varepsilon$, что согласуется с теоретической оценкой $\frac{m \cdot C}{\varepsilon}$.
- Для больших $n$ требуется больше итераций из-за увеличения числа конфликтов между роботами и размера матрицы $\alpha_{ij}$.

## 4.3. Выводы

Модифицированный аукционный алгоритм продемонстрировал высокую эффективность в задачах распределения ресурсов в системах роботов, обеспечивая баланс между точностью и временем выполнения. Исследования влияния

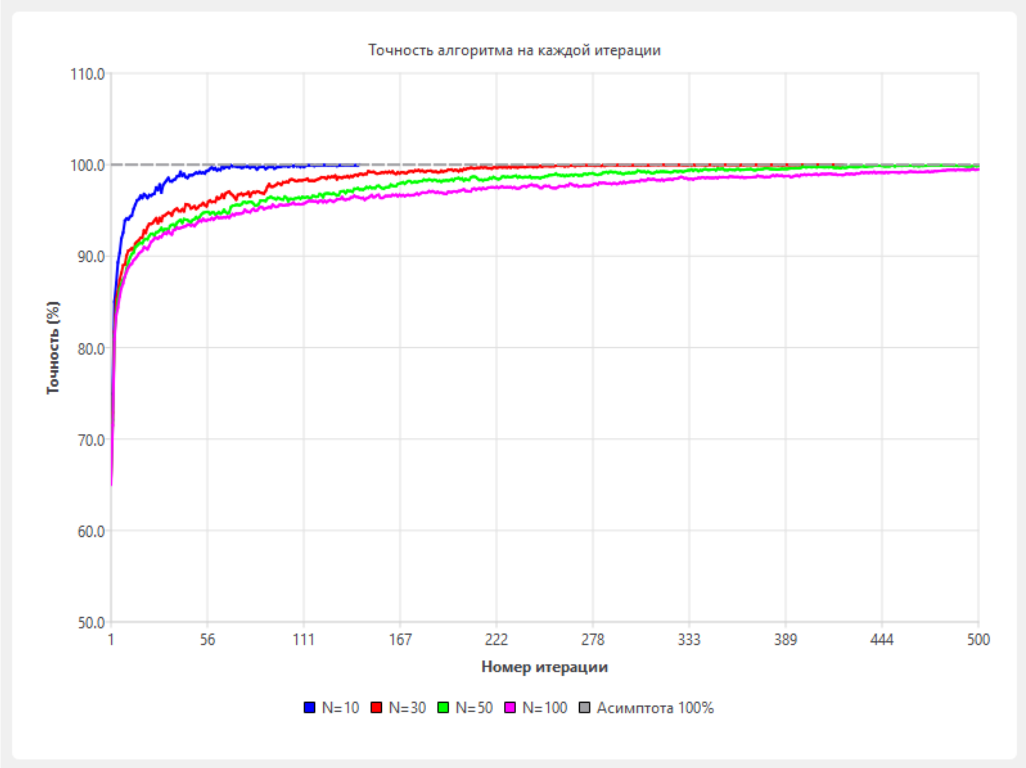


Рис.4.5. Зависимость относительной точности аукционного алгоритма от номера итерации для различных размеров задачи.

параметров алгоритма, включая радиус связи $R$, размер задачи $n$, и параметр $\varepsilon$, показали, что:

- Увеличение радиуса связи $R$ значительно повышает точность алгоритма, достигая 95–100% при $R \geqslant 50$, особенно для больших $n$, за счет уменьшения числа связных компонент.
- Параметр $\varepsilon$ оказывает существенное влияние на производительность: меньшие значения ($\varepsilon \leqslant 10^{-2}$) обеспечивают точность выше 90%, но увеличивают число итераций, тогда как большие $\varepsilon$ сокращают время выполнения за счет снижения точности.
- Параллельная обработка связных компонент снижает вычислительную сложность, делая алгоритм конкурентоспособным по сравнению с классическим венгерским алгоритмом, особенно при высоких скоростях обмена данными ($F_{\text{обм}}$).

Полученные результаты подчеркивают важность настройки параметров аукционного алгоритма для конкретных условий задачи.

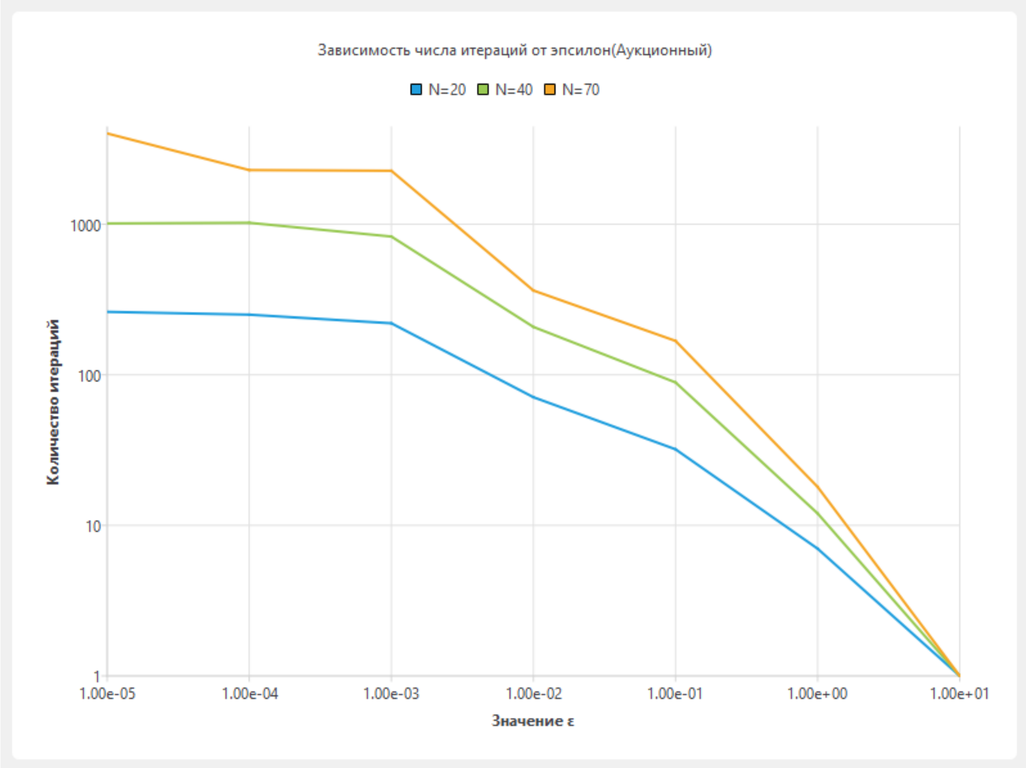


Рис.4.6. Зависимость числа итераций аукционного алгоритма от параметра $\varepsilon$ для различных размеров задачи $n$.

# ГЛАВА 5. ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ

Данная глава посвящена анализу перспектив дальнейшего развития модифицированного аукционного алгоритма, представленного в главе 2, и его применению в распределённых системах управления роботами. Рассматриваются возможные улучшения алгоритма, новые метрики оценки эффективности, а также потенциальные области практического применения.

## 5.1. Поддержка гибкого распределения роботов по целям

Текущая версия алгоритма предполагает, что каждая цель назначается только одному роботу(глава 2). Однако в общем случае может потребоваться более гибкое распределение роботов по целям. Это включает возможность назначения нескольких роботов на одну цель, а также распределение одного робота на несколько целей в зависимости от характеристик задачи, таких как приоритет цели, её сложность, временные ограничения, ресурсы роботов или требования к надёжности. Например, важная цель может требовать совместной работы нескольких роботов для ускорения выполнения, тогда как менее приоритетная цель может быть разделена между роботами с учётом их текущей загрузки. Перспективным направлением является модификация алгоритма, позволяющая задавать для каждой цели $t_j$ максимальное количество роботов $k_j$, а также учитывать возможность назначения одного робота на несколько целей. Все последующие направления исследований должны учитывать возможность гибкого распределения роботов по целям, чтобы обеспечить совместимость с этим подходом.

## 5.2. Обеспечение глобальной оптимальности

Модифицированный аукционный алгоритм, описанный в главе 2, обеспечивает локальную оптимальность внутри связных компонент графа связи, однако не гарантирует глобальную оптимальность из-за отсутствия коммуникации между компонентами (теорема 2.3). Для устранения этого ограничения перспективным направлением является разработка механизмов ограниченного обмена информацией между компонентами. Например, можно реализовать иерархическую структуру, где представители каждой компоненты обмениваются агрегированными данными о ценах и назначениях, или использовать периодическую синхронизацию для координации решений. Такие подходы позволят приблизить суммарную выгоду к глобальному оптимуму, сохраняя преимущества децентрализованного управления.

## 5.3. Адаптивная настройка параметра $\varepsilon$

Экспериментальные результаты (глава 4) показали, что параметр $\varepsilon$ существенно влияет на баланс между точностью и числом итераций алгоритма. Малые значения $\varepsilon$ (например, $\varepsilon \leqslant 10^{-2}$) обеспечивают высокую точность, но увеличивают вычислительные затраты, тогда как большие $\varepsilon$ сокращают время выполнения за счёт снижения качества назначений. Перспективным направлением является разработка адаптивных методов выбора $\varepsilon$ в зависимости от характеристик задачи, таких как размер задачи $n$, радиус связи $R$ и дисперсия ошибок измерений $\sigma_c$.

### 5.4. Учёт динамической топологии сети

Текущая версия алгоритма предполагает статическую топологию сети, где матрица связи $V$ фиксирована на протяжении выполнения аукциона. Однако в реальных системах роботы могут перемещаться, изменяя топологию связных компонент. Перспективным направлением является адаптация алгоритма к динамическим сетям путём интеграции методов обнаружения и обновления связных компонент в реальном времени. Это потребует разработки распределённых алгоритмов для отслеживания изменений в графе $V$ и динамической перегруппировки роботов, что повысит устойчивость алгоритма к изменениям.

### 5.5. Робастность к погрешностям измерений

Как отмечено в главе 4, погрешности измерений расстояний $d(p_i, q_j)$ влияют на точность матрицы затрат $c_{ij}$ и, следовательно, матрицы выгод $\alpha_{ij}$. Для повышения надёжности алгоритма в реальных условиях перспективно интегрировать методы робастной оптимизации, учитывающие вероятностные распределения ошибок (например, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_c^2)$). Это может включать использование интервальных оценок для $c_{ij}$ или байесовских подходов для корректировки назначений с учётом неопределённости. Такие улучшения сделают алгоритм применимым в системах с ограниченной точностью сенсоров.

### 5.6. Разработка новых метрик оценки

Для более полной оценки эффективности алгоритма перспективно ввести дополнительные метрики, такие как:

- Устойчивость к изменениям топологии сети, измеряемая числом итераций, необходимых для адаптации к новым условиям.
- Адаптивность к изменениям числа целей, характеризующая скорость и точность перераспределения задач при добавлении или удалении целей в реальном времени.
- Равномерность распределения задач, оценивающая, насколько равномерно задачи распределяются между роботами.

Эти метрики позволят лучше сравнивать алгоритм с альтернативными подходами и оптимизировать его для конкретных приложений.

### 5.7. Области практического применения

Разработанный алгоритм имеет значительный потенциал для применения в различных областях робототехники и автоматизации. Основные направления включают:

- **Военные робототехнические системы**: Координация роев дронов для выполнения боевых задач, таких как разведка или подавление вражеских объектов, в условиях ограниченной связи.
- **Поисково-спасательные операции**: Управление группами роботов или дронов для поиска пострадавших в зонах стихийных бедствий, таких как землетрясения или наводнения, с учетом нестабильной коммуникационной среды.
- **Промышленная автоматизация**: Распределение задач в децентрализованных производственных системах, где роботы работают в условиях ограниченного обмена данными.

### 5.8. Выводы

Перспективы дальнейшего развития модифицированного аукционного алгоритма включают улучшение глобальной оптимальности, адаптивную настройку параметров, учёт динамической топологии и погрешностей измерений. Введение новых метрик оценки работы алгоритма позволят лучше исследовать его универсальность и эффективность. Практическая значимость подтверждается применимостью алгоритма в военных робототехнических и поисково-спасательных системах, а также промышленной автоматизации.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование демонстрирует, что разработанный модифицированный аукционный алгоритм является эффективным решением для задач оптимального распределения целей в распределенных системах управления роботами, функционирующих в условиях ограниченных областей связи. В отличие от классического венгерского алгоритма, который требует полной матрицы выгод и централизованного управления, что делает его непригодным для децентрализованных систем, модифицированный аукционный алгоритм учитывает топологические ограничения сети, позволяя роботам обмениваться информацией только внутри связных компонент. Это обеспечивает его применимость в реальных сценариях, где коммуникация между роботами ограничена радиусом связи.

Экспериментальные результаты, представленные в главе 4, подтверждают высокую эффективность алгоритма: аукционный алгоритм, в отличие от венгерского, позволяет учитывать погрешности в измерениях матрицы выгод путём выбора параметра $\varepsilon$, что обеспечивает высокую точность при меньших вычислительных затратах. Венгерский алгоритм, не учитывающий погрешности и лишённый параметра $\varepsilon$, стремится к точному решению, которое в условиях реальных погрешностей и ограниченного радиуса связи недостижимо, что делает аукционный алгоритм более эффективным. Алгоритм требует меньшего числа арифметических и логических операций по сравнению с венгерским, что делает его предпочтительным при высоких скоростях обмена данными, несмотря на большее число итераций.

Модифицированный аукционный алгоритм обладает значительным потенциалом для применения в таких областях, как военные робототехнические и поисково-спасательные системы, а также в области промышленной автоматизации. Однако отсутствие глобальной оптимальности из-за ограниченной коммуникации между компонентами указывает на необходимость дальнейших исследований, включая разработку механизмов ограниченного обмена информацией и адаптивной настройки параметра $\varepsilon$. Перспективы, описанные в главе 5, подчеркивают возможность интеграции алгоритма в динамические сети и повышения его робастности к погрешностям измерений, что делает его универсальным инструментом для современных робототехнических систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertsekas Dimitri P.* The Auction Algorithm for Assignment and Other Network Flow Problems: A Tutorial. — 1990. — URL: https://web.mit.edu/dimitrib/www/Auction_Interfaces_Published.pdf.

2. *Kuhn Harold W.* The Hungarian Method for the Assignment Problem. — 1955. — URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nav.3800020109.

3. *Пшихопов В. Х., Соловьев В. В., Титов А. Е., Финаев В. И, Шаповалов И. О.* Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах. — 2015. — (Group-Control-of-Mobile-Objects-in-Uncertain-Environments.pdf).

4. *Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. — 2009. — URL: https://www.litres.ru/get_pdf_trial/18402114.pdf.

5. *Gerkey Brian P.* On Multi-Robot Task Allocation. — 2003. — URL: https://ai.stanford.edu/~gerkey/research/final_papers/diss.pdf.

6. *e-maxx.ru*. Венгерский алгоритм. — 2025. — URL: http://www.e-maxx-ru.1gb.ru/algo/assignment_hungary.

7. *Bertsekas Dimitri P. and Tsitsiklis John N.* Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. — 1989. — URL: https://archive.org/details/paralleldistribu0000bert.

8. *Куприянов А.И., Сахаров А.В.* Теоретические основы радиоэлектронной борьбы. — Москва, 2007. — URL: https://libcats.org/book/355010.

9. *Макаренко С.И.* Анализ средств и способов противодействия беспилотным летательным аппаратам. Часть 3. Радиоэлектронное подавление систем навигации и управления. — 2020. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-sredstv-i-sposobov-protivodeystviya-bespilotnym-letatelnym-apparatam-chast-3-radioelektronnoe-podavlenie-sistem-navigatsii-i/viewer.

10. *Макаренко С. И., Тимошенко А. В., Васильченко А. С.* Анализ средств и способов противодействия беспилотным летательным аппаратам. Часть 1. Беспилотный летательный аппарат как объект обнаружения и поражения. — 2020. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-sredstv-i-sposobov-protivodeystviya-bespilotnym-letatelnym-apparatam-chast-1-bespilotnyy-letatelnyy-apparat-kak-obekt.

11. *Баженов А.В., Малыгин С.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования «Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса», Ставропольский технологический институт сервиса (филиал), 2011. — URL: https://spb.msrabota.ru/content/book_docs/Bazhenov-malygin_.pdf.

12. *Свешников А.А.* Прикладные методы теории вероятностей. — Санкт–Петербург, Москва, Краснодар, 2012. — URL: https://lib.sibadi.org/wp-content/uploads/2013/04/3(11).pdf.