

6. Transformações Geométricas

Para ilustrar a importância das transformações geométricas na descrição da forma e dos movimentos em cenários virtuais, a Fig. 6.1 apresenta três modelos. O primeiro é um modelo complexo de uma plataforma marítima composta de muitos equipamentos, o segundo é de um tanque militar e o terceiro é um braço mecânico.

A complexidade dos modelos da Fig. 6.1 pode ser reduzida se observarmos que cada componente é composta de um conjunto de sub-componentes. Estes podem, por sua vez, ser compostos de outros sub-componentes ou de formas geométricas simples como cilindros, cubos e calotas esféricas. A partir de modelos padrões destes objetos mais simples podemos gerar o modelo da cena através das transformações geométricas de forma e movimento que são o foco deste capítulo.

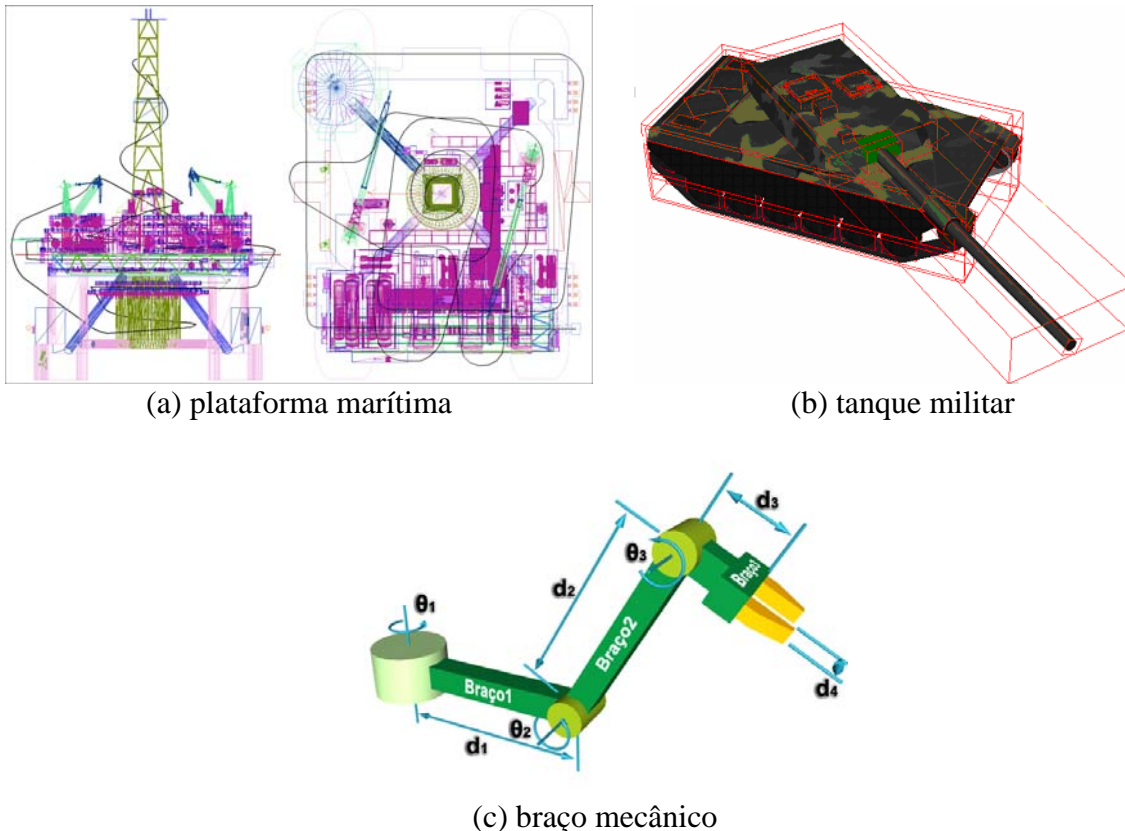


Fig. 6.1 – Exemplos de formas e movimentos descritos por transformações.

Este capítulo começa com uma revisão das transformações lineares no plano e evolui para transformações no espaço homogêneo. A álgebra desenvolvida no espaço homogêneo é suficiente para dar suporte às operações de modelagem de forma e movimento, exceto as

rotações no espaço. Para elas se faz necessário o estudo de quatérnios, conforme será mostrado no final do capítulo.

Apesar de iniciar com uma revisão de conceitos conhecidos dos cursos de Álgebra Linear, este capítulo evolui para assuntos que são tratados apenas nos cursos de Computação Gráfica. A revisão é importante para estabelecer as ligações entre a Álgebra e a Computação Gráfica.

Transformações Lineares e Matrizes

Para facilitar a visualização dos processos geométricos envolvidos, vamos iniciar o nosso estudo de transformações no R^2 . Como ilustra a Fig. 6.2, uma transformação T no R^2 é uma função que associa a cada ponto \mathbf{p} do plano um novo ponto \mathbf{p}' tal que:

$$\mathbf{p}' = T(\mathbf{p}) \quad (6.1a)$$

ou:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.1b)$$

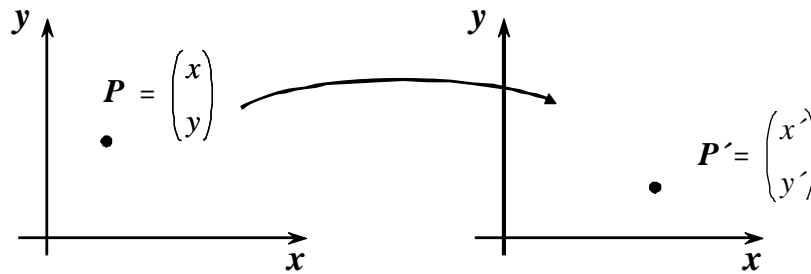


Fig. 6.2 – Transformação no R^2 .

Um exemplo de uma transformação genérica pode ser ilustrado por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Uma transformação é dita **linear** quando a transformada de uma combinação linear for sempre igual à combinação linear dos vetores transformados. Ou seja, para quaisquer \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 pertencentes ao plano ou ao espaço e quaisquer que sejam a_1 , a_2 pertencentes aos reais,

$$T(a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2) = a_1T(\mathbf{p}_1) + a_2T(\mathbf{p}_2) \quad (6.2)$$

a transformação

$$T(\mathbf{p}) = \mathbf{M}\mathbf{p} \quad (6.3)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz e \mathbf{p} um vetor é uma transformação linear, uma vez que o produto de matrizes tem a seguinte propriedade:

$$\mathbf{M}(a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2) = a_1\mathbf{M}\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{M}\mathbf{p}_2 \quad (6.4)$$

Inversamente, podemos também dizer que toda transformação linear pode ser escrita como o produto de uma matriz por um vetor. Ou seja:

A transformação T é Linear $\Leftrightarrow T(\mathbf{p}) = \mathbf{M}\mathbf{p}$

Para determinar a matriz associada basta observar que:

$$T(\mathbf{p}) = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Se tomarmos:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

temos

$$T(\mathbf{p}) = x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Ou seja, a matriz de uma transformação linear é aquela cujas colunas são as coordenadas dos vetores da base transformada.

Como não utilizamos na derivação acima nada que seja específico do R^2 , então esta propriedade é geral, ou seja, ela vale para toda transformação linear sobre um espaço vetorial qualquer. No R^3 , por exemplo, esta matriz pode ser determinada por:

$$\mathbf{M} = \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (6.8)$$

Outra propriedade importante das transformações lineares é que elas necessariamente deixam inalterada a posição do vetor nulo. Esta propriedade deriva diretamente da linearidade:

$$T(0) = T(\mathbf{p} - \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) - T(\mathbf{p}) = 0 \quad (6.9)$$

e é, de certa forma, uma limitação importante das transformações lineares.

Transformações Geométricas no Plano

Exemplos importantes de transformações lineares no plano são: escala, rotação, reflexão e cisalhamento. A transformação de escala simplesmente multiplica todas as coordenadas x por um fator s_x e as coordenadas y por s_y . A Fig. 6.3 ilustra a transformação de escala aplicada ao triângulo **abc**.

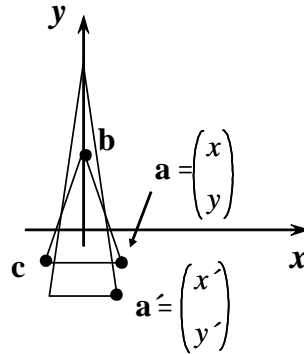


Fig. 6.3 – Transformação de escala no R^2 .

A matriz da transformação de escala é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Escala no sentido comum implica em s_x e s_y positivos. Quando seus valores estiverem no intervalo (0,1) teremos uma redução da dimensão correspondente e quando forem maiores que 1 teremos um aumento. Valores negativos têm o efeito de espelhar os pontos em torno do eixo correspondente.

A transformação linear de espelhamento corresponde à matriz identidade com alguns de seus termos da diagonal com sinal negativo. O espelhamento em relação ao eixo y , ilustrado na Fig. 6.4, corresponde à matriz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

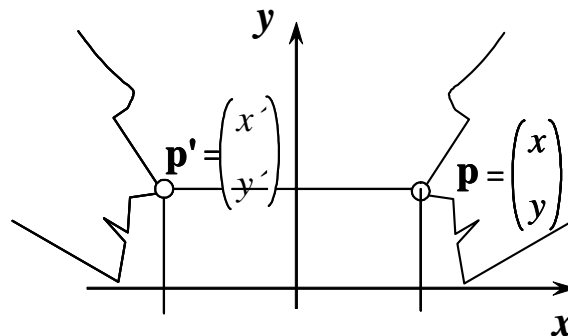


Fig. 6.4 – Transformação de espelhamento no R^2 .

A rotação de um ângulo θ em torno da origem pode ser calculada com base na Fig. 6.5 por meio das seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta \quad (6.12a)$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta \quad (6.12b)$$

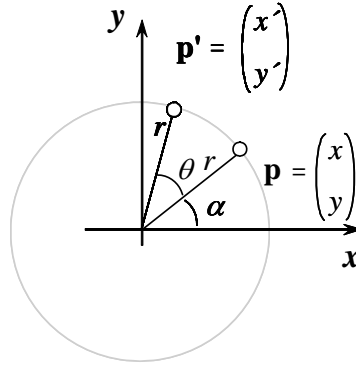


Fig. 6.5 – Transformação de rotação no R^2 .

O ponto \mathbf{p}' pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cdot \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ r \cos \alpha \cdot \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Dado que $x = r \cos \alpha$ e $y = r \sin \alpha$ temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Uma maneira bem mais simples de deduzir a matriz da rotação consiste em utilizar a propriedade de que as colunas da matriz são as coordenadas dos vetores da base transformados. A Fig. 6.6 ilustra a posição dos vetores \mathbf{i} e \mathbf{j} após uma rotação de um ângulo θ . A simples leitura das coordenadas permite escrever a equação (6.14).

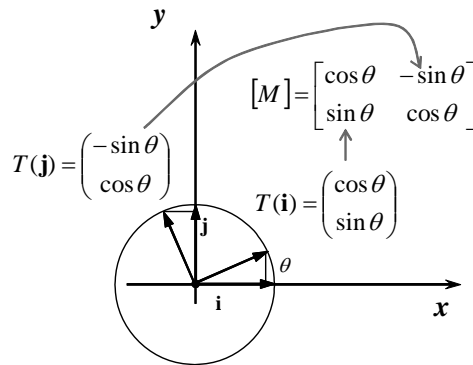


Fig. 6.6 – Dedução direta da matriz de rotação.

O produto da transposta de uma matriz de transformação por ela mesma corresponde ao produto interno dos vetores transformados entre si. Isto porque os elementos ij do produto são o resultado da linha i da transposta pela coluna j . A linha i da transposta é a coluna i da matriz original. Ou seja, o elemento ij é o resultado do produto interno do i -ésimo com o j -ésimo vetor transformado.

Como, no caso da rotação, os vetores da base canônica rodada continuam sendo unitários e perpendiculares entre si, temos que o produto da transposta de uma matriz de rotação por ela mesma resulta na matriz identidade. Como esta propriedade se origina do fato de a base transformada continuar sendo de uma base de vetores ortonormais, diz-se que a matriz de rotação é uma **matriz ortonormal**.

Outro ponto importante a destacar é a questão da mudança de referencial ou base. Aprendemos na Física que as novas coordenadas de um ponto, após um certo movimento, são as mesmas que teríamos se mantivéssemos o ponto parado e movêssemos o referencial no sentido inverso. Assim, em termos de coordenadas, tanto faz rodarmos um ponto de um ângulo θ ou escrevermos as coordenadas deste ponto num sistema de coordenadas rodado de $-\theta$, como ilustra a Fig. 6.7. Ou seja:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Este problema de mudança de uma base ortonormal para outra rodada é bastante comum na Computação Gráfica e por isto merece ser melhor elucidado. Os vetores unitários das direções \mathbf{u} e \mathbf{v} são os vetores \mathbf{i} e \mathbf{j} rodados de $-\theta$. Ou seja, se colocarmos as suas coordenadas nas colunas de uma matriz, estamos representando a rotação de $-\theta$. Para obtermos a matriz de rotação θ basta que tomemos a transposta, ou seja, a matriz com as coordenadas de \mathbf{u} e \mathbf{v} colocadas como linhas. Assim:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

A propriedade expressa na equação (6.6) é geral para qualquer espaço vetorial e pode ser enunciada da seguinte maneira: a matriz que transforma as coordenadas de um vetor qualquer escrito numa base ortonormal para outra é a matriz obtida colocando-se como linhas as coordenadas dos vetores da segunda base escritos na primeira.

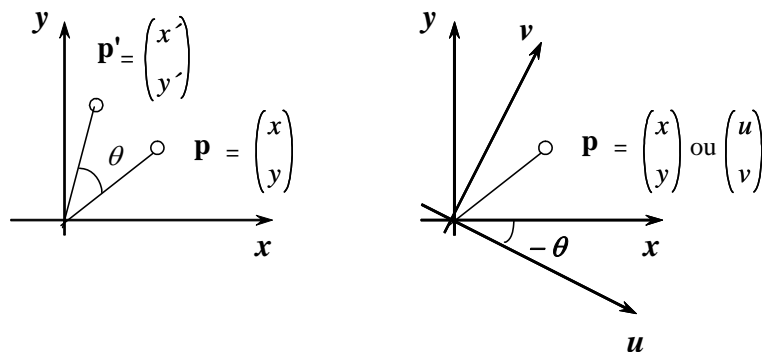
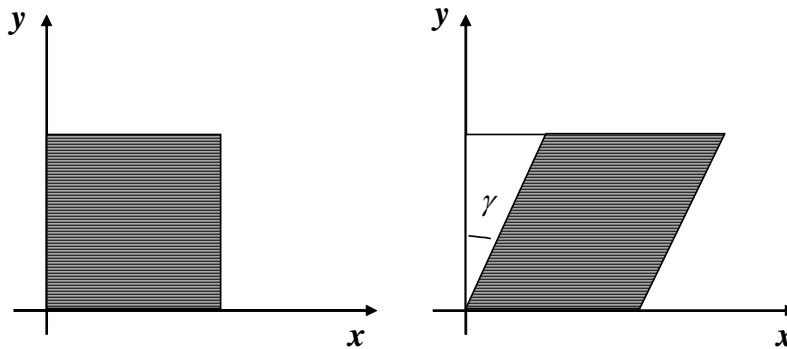


Fig. 6.7 – Transformação versus mudança de base.

No R^2 não é difícil verificar a equação (6.16) observando as Fig. 6.6 e 6.7 e a equação (6.15).

A última transformação linear de interesse geométrico é o cisalhamento. A transformação de cisalhamento na direção x tem um efeito semelhante ao de deslizarmos um baralho de cartas numa mesa, como ilustra a Fig. 6.8.

Fig. 6.8 – Transformação de cisalhamento em x .

Esta transformação preserva a coordenada y e move os pontos na direção x de acordo com o valor de y , ou seja:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \tan \gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Não é difícil deduzirmos a mesma matriz observando a transformada dos vetores da base canônica.

O cisalhamento apresentado acima ocorre somente na direção x . Se ele ocorrer simultaneamente em ambas as direções teremos uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \tan \gamma \\ x \tan \psi + y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ \tan \psi & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

onde γ e ψ são os ângulos de cisalhamento em relação aos eixos x e y , respectivamente.

Esta transformação é muito utilizada na Mecânica dos Meios Contínuos e é, erroneamente, vista pelos alunos como sendo uma transformação que não diz respeito à Computação Gráfica. Para ilustrarmos uma das utilidades desta transformação, considere o problema de transformar a pirâmide de visão simplificada da forma indicada na Fig. 6.9. Sem cisalhamento não temos como fazer esta transformação. Explique por que a rotação não pode ser usada nesse caso.

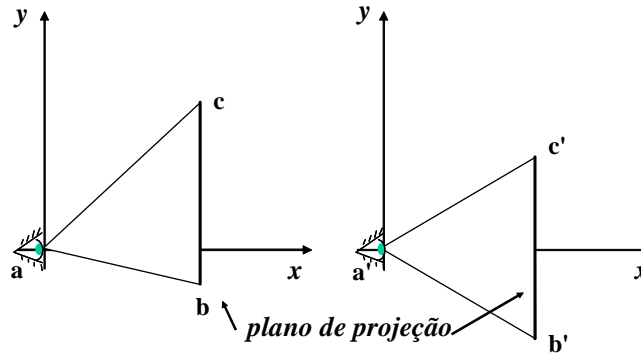


Fig. 6.9 - Exemplo da necessidade da transformação de cisalhamento.

Consequência do Teorema da Decomposição Singular

Apesar da transformação de cisalhamento ser conveniente por dar uma interpretação geométrica direta para as transformações do tipo da ilustrada na Fig. 6.9, a rigor ela é dispensável. Isto porque o Teorema de Decomposição Singular garante que qualquer matriz \mathbf{M} de dimensão $n \times n$ pode ser decomposta em:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V} \quad (6.19)$$

onde \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes ortonormais (rotações) e \mathbf{S} é uma matriz diagonal (escala e espelhamento). Na realidade o Teorema da Decomposição Singular é mais geral, uma vez que ele trata de quaisquer matrizes $n \times m$, mas para o estudo geométrico que estamos fazendo as matrizes são quadradas e esta generalidade pouco contribui.

A prova do Teorema da Decomposição Singular e a descrição de algoritmos que calculam as matrizes $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}$ estão fora do escopo deste capítulo e podem ser encontradas em livros de Álgebra. Tais algoritmos, entretanto, são disponíveis tanto na forma de funções C/C++ quanto em sistemas computacionais tipo Maple. Ou seja, mesmo sem tratarmos da prova e da implementação, podemos calcular a decomposição e utilizar os resultados do teorema.

Considere, por exemplo, uma transformação de cisalhamento de 30° no eixo x . A matriz desta transformação é dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \tan 30^\circ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5773 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz, decomposta em seus valores singulares, resulta em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5773 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6011 & 0.7992 \\ -0.7992 & 0.6011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7522 & 0 \\ 0 & 1.3295 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7992 & -0.6011 \\ 0.6011 & 0.7992 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan 30^\circ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-53^\circ) & -\sin(-53^\circ) \\ \sin(-53^\circ) & \cos(-53^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7522 & 0 \\ 0 & 1.3295 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(37^\circ) & -\sin(37^\circ) \\ \sin(37^\circ) & \cos(37^\circ) \end{bmatrix}$$

Estas matrizes correspondem às transformações de rotação e escala, da forma:

$$\mathbf{Sh}_x(30^\circ) = \mathbf{R}(-53^\circ)\mathbf{S}\mathbf{R}(37^\circ)$$

A Fig. 6.10 ilustra este processo de escrever um cisalhamento como uma combinação de rotações e escala.

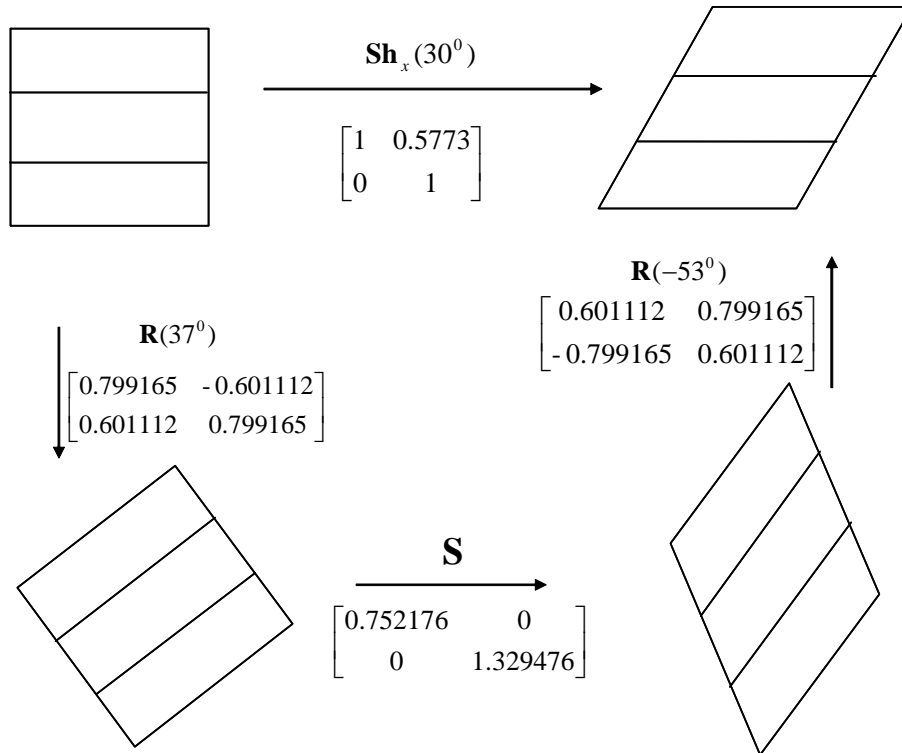


Fig. 6.10 - Cisalhamento escrito como composição de transformações.

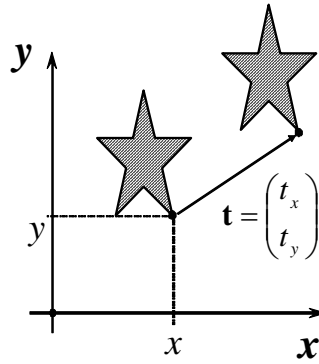
Transformações lineares e translações

As transformações lineares possuem diversas propriedades interessantes mas, infelizmente, existem algumas transformações importantes para a Computação Gráfica que não podem ser classificadas como lineares. Uma delas é a translação, na qual para cada ponto é somado um vetor constante, \mathbf{t} . Esta transformação é fundamental para qualquer processo gráfico e por isto deve ter a representação mais simples possível.

Dado um ponto qualquer P , a translação pode ser escrita como:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{t} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

A Fig.6.11 ilustra a translação de um vértice de um pentágono.

Fig. 6.11 - Translação no \mathbb{R}^2 .

Esta transformação não é linear porque não preserva a origem, isto é, a transformada do vetor zero é \mathbf{t} , que é diferente de zero. Consequentemente a translação também não pode ser escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com a , b , c e d constantes reais. A forma matricial com matrizes 2×2 , comumente apresentada no estudo de transformações lineares afins¹, é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Esta forma tem o inconveniente de complicar a composição de transformações. Isto porque, se duas transformações lineares são dadas por \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 , a sua composta é dada simplesmente por $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$. Já se a transformação for do formato $\mathbf{p}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{p} + \mathbf{t}_1$ e $\mathbf{p}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{t}_2$, a composta $\mathbf{p}_2 = \mathbf{M}_3 \mathbf{p} + \mathbf{t}_3$ é tal que $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$ e $\mathbf{t}_3 = \mathbf{M}_2 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$. Se continuarmos a compor as transformações a expressão da translação vai se complicando mais ainda.

Espaço homogêneo

Existe uma maneira algebricamente elegante de tratarmos translações como combinações lineares. Basta imaginarmos o \mathbb{R}^2 como sendo um plano imerso num espaço de dimensão três. Para não associarmos este espaço ao \mathbb{R}^3 vamos denominar os eixos deste de sistema x_h, y_h, w . Estas coordenadas são chamadas de **homogêneas** ou **projetivas** PR^2 por razões que ficarão claras ao longo deste capítulo.

¹ O termo “transformação linear afim” vem do termo em inglês “affine linear transformation”, que tem o sentido de uma transformação “aparentada” com a linear. As transformações lineares afins são transformações lineares acrescidas da translação.

Podemos tratar a translação de vetores do R^2 como uma transformação linear de pontos que estão no plano $w=1$ associando a cada ponto deste plano sua coordenada incrementada das coordenadas do vetor \mathbf{t} , como ilustra a Fig. 6.12. A seguinte transformação linear:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

descreve a translação que o ocorre no plano $w=1$. Note que os pontos que estão inicialmente neste plano permanecem nele. Isto continua valendo para transformações mais gerais, desde que a última linha da matriz permaneça $[0 \ 0 \ 1]$.

Devemos observar que, para qualquer ponto do R^2 com coordenadas $(x, y)^T$, existe um único ponto no sistema homogêneo dado por $[x, y, 1]^T$ e vice-versa. Esta associação de um para um, denominada *homeomorfismo* ou *isomorfismo*, permite que matrizes 3×3 possam representar transformações do R^2 e matrizes 4×4 representem transformações do R^3 . Para evitar confusões entre um vetor homogêneo do R^2 e um vetor cartesiano do R^3 , que também tem 3 coordenadas, adotamos a notação $[]$ para os homogêneos e $()$ para os cartesianos.

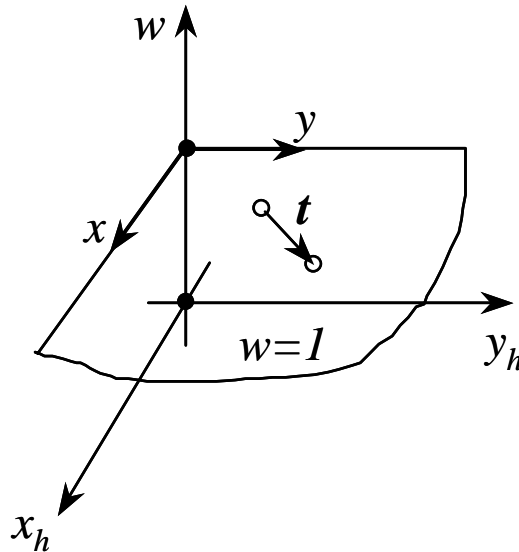


Fig. 6.12 - Imersão do R^2 no sistema homogêneo x_h, y_h e w .

Esta base homogênea permite um mesmo tratamento algébrico para as transformações lineares e para as translações. O produto de matrizes modela a composição destas transformações.

Composição de transformações afins

Para ilustrar o processo de composição de transformações afins com o uso de coordenadas homogêneas, considere a transformação que roda um triângulo em torno do seu centro. Esta

transformação pode ser escrita como uma composição de uma translação do centro de rotação para a origem seguida de uma rotação em torno da origem e, finalmente, uma translação do centro de volta para sua posição original, como mostra a Fig. 6.13.

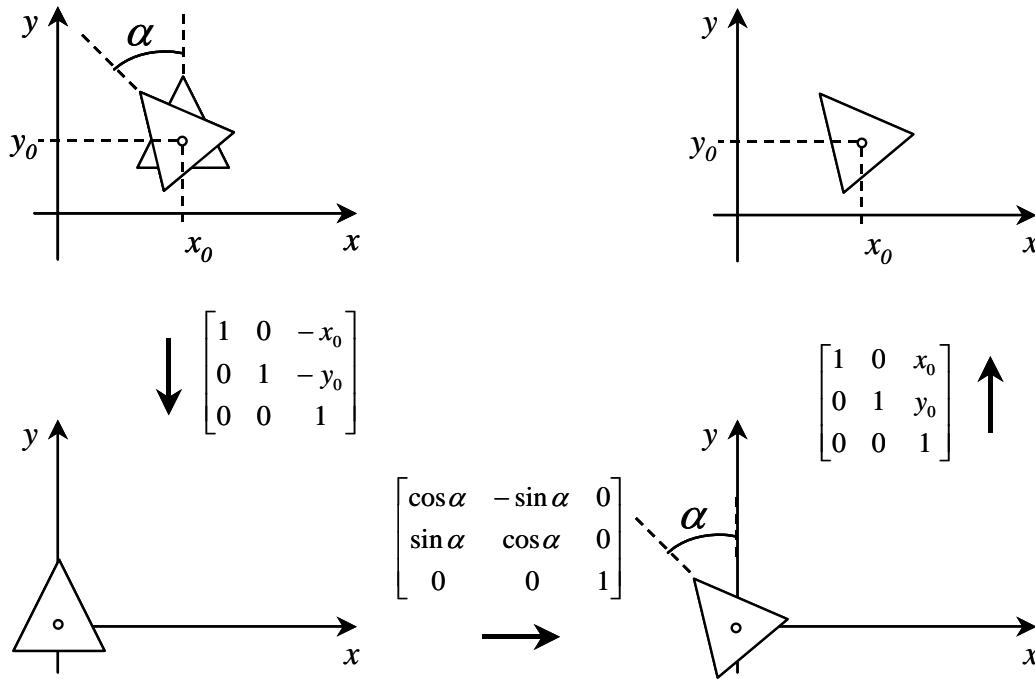


Fig. 6.13 - Composição de transformações escritas em coordenadas homogêneas.

Assim sendo, a equação da transformação que faz a rotação de α em torno de um ponto $(x_0, y_0)^T$, ou $[x_0, y_0, 1]^T$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Note que o produto de matrizes não é comutativo, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, o que também se reflete nas transformações geométricas associadas. O que torna o problema um pouco confuso é a ordem de leitura de texto normal, da esquerda para a direita que corresponde à ordem inversa em que as transformações são aplicadas. Para colocar ambos na mesma ordem, os primeiros textos de Computação Gráfica escreveram as equações matriciais transpostas, ou seja, os vetores eram linhas e multiplicavam as matrizes pelo lado esquerdo. Com o tempo, a notação convencional da Matemática acabou prevalecendo e a ordem de leitura para transformações deve ser a ordem de multiplicação do vetor, da direita para a esquerda.

Transformações Geométricas no Espaço

As transformações de escala, rotação e translação são as mais comumente utilizadas nas cenas compostas por diversos objetos pois atendem ao problema de instanciação de objetos numa cena. As matrizes de translação e escala são uma simples extensão das transformações do plano e, no R^3 homogêneo, são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.24a)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.24b)$$

As matrizes de rotação no espaço, entretanto, são bem mais complicadas do que a matriz de rotação no plano. Uma extensão natural seria definirmos a rotação de um corpo a partir de três rotações em torno de cada um dos eixos cartesianos, como ilustra a Fig. 6.14.

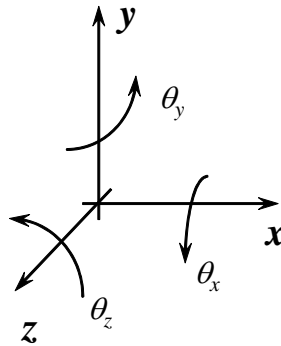


Fig. 6.14 – Rotações em torno dos eixos cartesianos.

Se utilizarmos o fato de que as colunas da matriz são as coordenadas dos vetores da base transformada, podemos facilmente derivar as matrizes de cada uma destas rotações. Para exemplificar, vamos considerar a rotação em torno do eixo y . A Fig. 6.15 mostra a posição dos vetores unitários da base canônica antes e depois da rotação de θ_y .

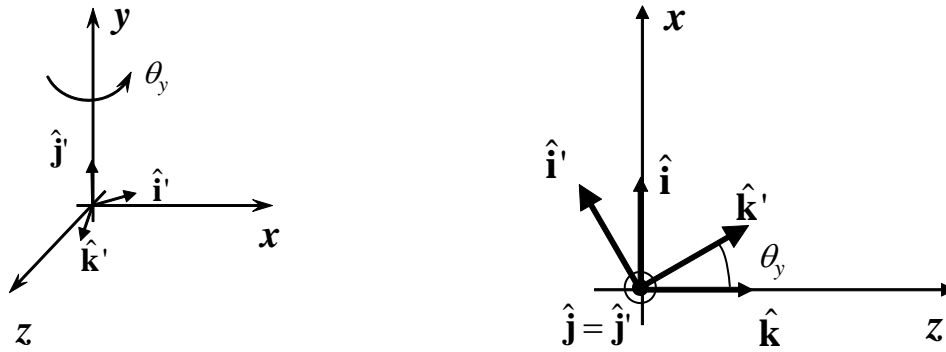


Fig. 6.15 – Rotação em torno do eixo y.

As coordenadas cartesianas dos vetores da base canônica depois da rotação são dadas por:

$$\hat{\mathbf{i}}' = \begin{pmatrix} \cos \theta_y \\ 0 \\ -\sin \theta_y \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{j}}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{k}}' = \begin{pmatrix} \sin \theta_y \\ 1 \\ \cos \theta_y \end{pmatrix}$$

A rotação escrita em forma de matriz resulta em:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Esta rotação pode também ser escrita em coordenadas homogêneas como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.26a)$$

Analogamente, podemos derivar a rotação em torno de x e z chegando a:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.26b)$$

e

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.26c)$$

respectivamente. A Fig. 6.16 ilustra estas rotações aplicadas à base canônica para estes dois casos.

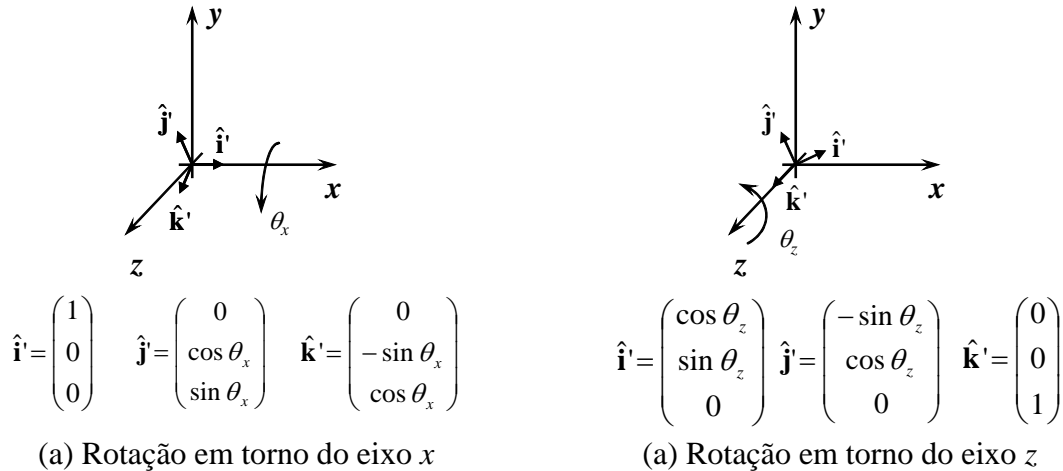
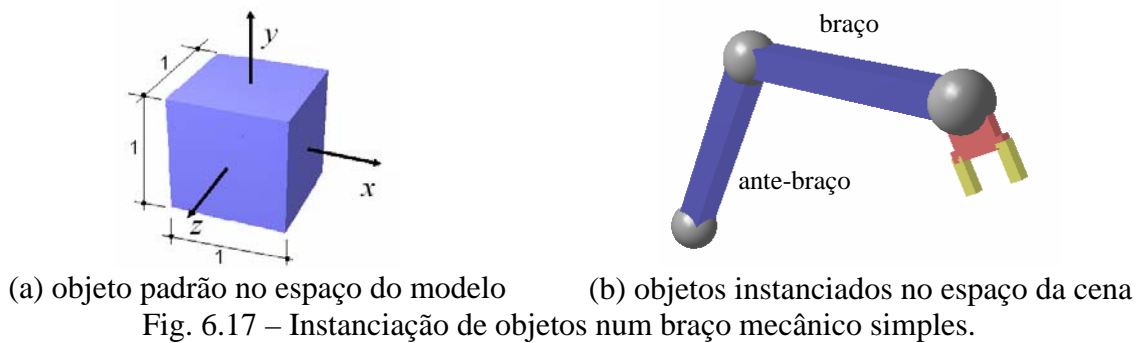


Fig. 6.16 – Matrizes das rotações em torno dos eixos coordenados.

Instanciação de objetos e hierarquia de movimentos

Quando instanciamos um objeto numa cena, aplicamos transformações geométricas que colocam o modelo geométrico padrão do objeto no tamanho e na posição corretos na cena. Considere, por exemplo, o modelo do braço mecânico simples ilustrado na Fig. 6.17. O cubo unitário mostrado na esquerda pode ser utilizado como o modelo geométrico padrão tanto do braço quanto do ante-braço do braço mecânico mostrado à direita². Basta que o cubo seja escalado, rodado e transladado de forma adequada.



Antes de prosseguirmos com a discussão de como instanciar objetos que obedecem uma hierarquia, vamos esclarecer as questões de ordem e de interpretação geométrica das composições de transformações.

A Fig. 6.18 mostra um exemplo simples que procura enfatizar o fato de que a ordem das transformações altera o resultado. Nesta figura os vértices de um quadrado sofrem uma

² Usamos aqui a nomenclatura do braço humano para facilitar a referência às partes do braço mecânico no texto.

translação e uma rotação. Na Fig. 6.18a a rotação ocorre antes da translação e na Fig. 6.18b ocorre a ordem inversa. Os resultados são claramente diferentes. Esta diferença também aparece na formulação matricial. As opções a e b da Fig. 6.18 têm as seguintes expressões algébricas:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{TRp} \quad (6.27a)$$

ou:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{RTp} \quad (6.27b)$$

Como o produto de matrizes não é comutativo, estas equações produzem, em geral, resultados diferentes.

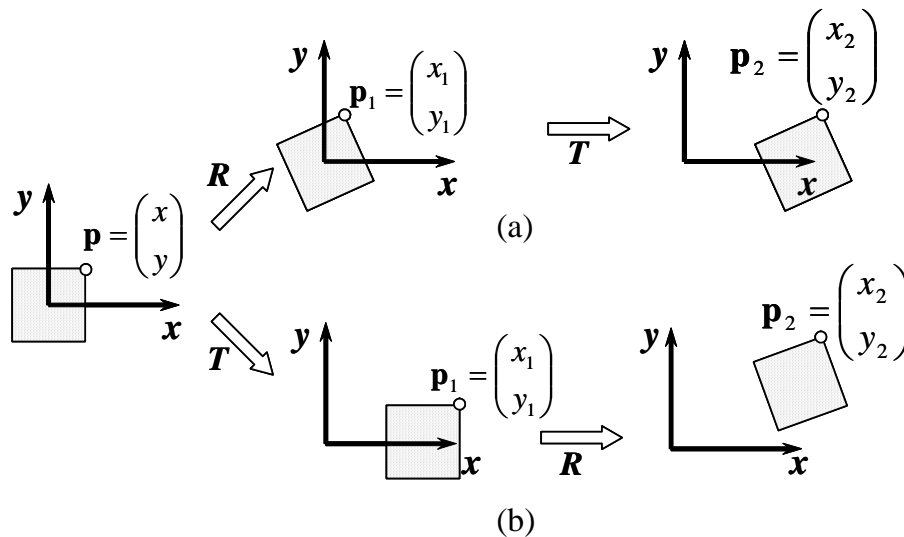


Fig. 6.18 – Ordem das transformações.

A Fig. 6.18 mostra também que, se trabalhamos com matrizes de transformações geométricas em torno da origem, é melhor aplicarmos escala, rotação e translação nesta ordem. Assim não temos a interferência da transformação de escala ou de rotação na posição do objeto.

A escala, a rotação e a translação, entretanto, podem não ser simples de serem especificadas em cenas como esta, em que a posição de um objeto depende da posição de outros. Esta dependência cria uma hierarquia na qual a posição do braço da Fig. 6.17, por exemplo, depende da posição do ante-braço.

Para seguir uma cadeia de transformações que ocorre em objetos articulados como o braço mecânico é conveniente pensarmos em outra interpretação geométrica para as transformações. Ao invés de considerarmos as transformações como ocorrendo nos objetos, podemos pensar nelas ocorrendo num sistema de eixos, chamados de **eixos locais**, que rodam e transladam. A idéia geral é que os eixos locais estão originalmente coincidentes com os eixos globais. A cada transformação de rotação e translação, o eixo local muda de posição. Quando algum objeto for desenhado, ele estará referenciado no sistema local transformado.

A Fig. 6.19 apresenta um exemplo de um sistema de eixos locais x_L, y_L para o problema de rotação e translação do quadrado. A idéia consiste em lermos a expressão algébrica desta transformação dada pela equação (6.27b) da esquerda para a direita. Nesta leitura primeiro encontramos a rotação, depois a translação na direção do eixo x_L e, finalmente, o posicionamento dos pontos neste sistema rodado e transladado. Note na Fig. 6.19 que a posição final do quadrado corresponde exatamente à posição esperada na Fig. 6.18b. Apenas a maneira de interpretar geometricamente as transformações muda.

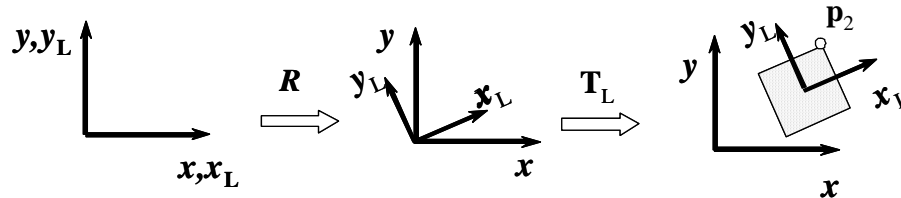


Fig. 6.19 – Raciocínio com eixos locais.

Por que o resultado é equivalente? Acontece que no caso da Fig. 6.18b $p_2 = R T p$, enquanto no caso da Fig. 6.19 $p_2 = T_L R p$. Para provar que a posição de p_2 é a mesma em ambas as figuras é preciso mostrar que $T_L R = R T$. Isto pode ser verificado se notarmos que uma translação na direção x_L pode ser escrita como sendo a concatenação de 3 transformações: (i) rotação que roda o eixo x_L para que ele fique alinhado com o eixo x (R^{-1}), (ii) translação em x (T), e (iii) rotação de volta para a posição original de x_L (R). Ou seja, $T_L = R T R^{-1}$. Sendo assim $T_L R = R T R^{-1} R = R T$, como queríamos mostrar. Em geral a transformação em um sistema de eixos transformado é obtida pela concatenação da transformação de eixos inversa, a transformação do objeto e a transformação de eixo original. Quando estas três matrizes multiplicam a transformação original, ocorre a mesma inversão da ordem mostrada no exemplo. Ou seja, apesar de nossa argumentação ser específica para problemas de rotação seguida da translação, o caso geral pode ser demonstrado de forma semelhante.

Com a idéia de eixos locais, a instanciação de objetos para compor o braço mecânico simples é mais fácil de ser organizada. Considere os eixos locais colocados no esqueleto do braço mecânico como mostra a Fig. 6.20. A partir dos eixos xyz a cinemática do braço mecânico pode ser descrita seguindo a ordem dos objetos, como ilustra o Quadro 6.1.

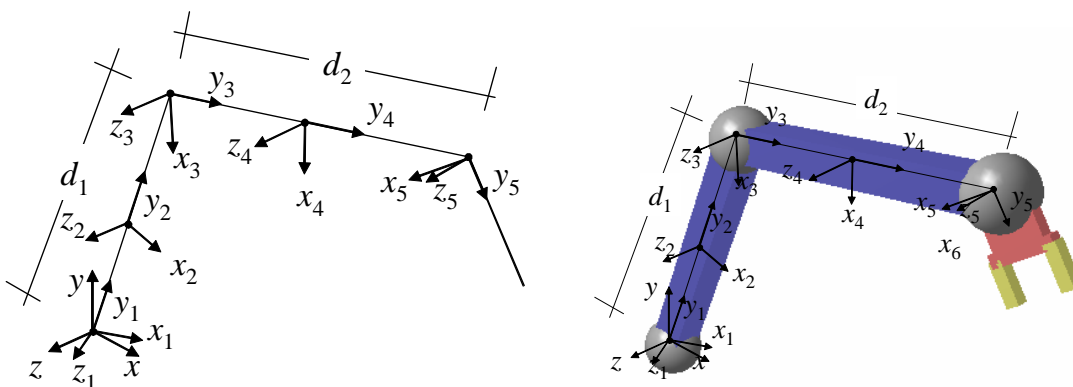


Fig. 6.20 – Eixos locais do braço mecânico.

```

Desenha a base no sistema xyz;
Roda em y;
Roda em z1;
Translada em y1 de d1/2;
Desenha o ante-braço no sistema x2y2z2;
Translada em y1 de d1/2;
Desenha cotovelo no sistema x3y3z3;
Roda em z3;
Translada em y3 de d2/2;
Desenha o braço no sistema x4y4z4;
Translada em y3 de d2/2;
Desenha o pulso no sistema x5y5z5;
Roda em z5;
Desenha a mão no sistema x5y5z5;

```

Quadro 6.1 – Procedimento para instanciar objetos no braço mecânico simples.

É interessante notarmos que o procedimento de instanciação do Quadro 6.1 resulta na cadeia de matrizes mostrada na Tabela 6.1.

base	I
ante-braço	$\mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{T}_{y1}$
cotovelo	$\mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{T}_{y1} \mathbf{T}_{y1}$
braço	$\mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{T}_{y1} \mathbf{T}_{y1} \mathbf{R}_{z3} \mathbf{T}_{y3}$
pulso	$\mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{T}_{y1} \mathbf{T}_{y1} \mathbf{R}_{z3} \mathbf{T}_{y3} \mathbf{T}_{y3}$
mão	$\mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{T}_{y1} \mathbf{T}_{y1} \mathbf{R}_{z3} \mathbf{T}_{y3} \mathbf{T}_{y3} \mathbf{R}_{z5}$

Tabela 6.1 – Cadeia de matrizes para instanciar objetos.

Sistemas gráficos como o OpenGLTM trabalham com o conceito de **matriz corrente** para tratar as transformações que levam do espaço do modelo para o espaço da cena. Desta forma apenas uma matriz fica armazenada no sistema gráfico para esta função. Todos os vértices das primitivas que estão sendo definidas são transformados por ela. O sistema gráfico fornece funções para iniciar e alterar esta matriz. No OpenGLTM esta matriz é chamada de *matriz de modelagem e visualização (model view)* e as transformações são acumuladas à direita. Ou seja, ao fornecermos ao sistema uma nova matriz **M**, ela é multiplicada pela esquerda pela matriz corrente **C** e a nova matriz corrente assume o valor **CM**. Geometricamente isto significa que a transformação **M** ocorre antes das transformações acumuladas em **C**. Isto é bastante conveniente para a forma de instanciar objetos descrita acima. Considere, por exemplo, o procedimento do braço mecânico simples ilustrado no Quadro 6.1. Este quadro se traduz diretamente no seguinte trecho código OpenGLTM:

```

glMatrixMode(GL_MODELVIEW); /* transformações do modelo */
glLoadIdentity( );          /* carrega a identidade como corrente */
desenhaBase( );
glRotatef(ry, 0.,1.,0.);     /* roda em y */
glRotatef(rz1, 0.,0.,1.);    /* roda em z1 */
glTranslatef(0.,d1/2,0.);    /* translada em y1 */
desenhaAnteBraco( );

```

```

glTranslatef(0.,d1/2,0.);      /* translada em y1 */
desenhaCotovelo( );
glRotatef(rz3, 0.,0.,1.);    /* roda em z3 */
glTranslatef(0.,d2/2,0.);    /* translada em y3 */
desenhaBraco( );
glTranslatef(0.,d2/2,0.);    /* translada em y3 */
glRotatef(rz5, 0.,0.,1.);    /* roda em z5 */
desenhaPulso( );
desenhaMao( );

```

Quadro 6.2 – Trecho de código OpenGL para o braço mecânico simples.

Nos procedimentos acima, omitimos uma dificuldade comum das hierarquias de instanciação: elas não são sempre representáveis por uma cadeia de transformações que só aumenta, acrescentando uma matriz à direita, como mostra a Tabela 6.1. Considere, por exemplo, um robô de dois braços e o detalhe do modelo da mão ilustrados na Fig. 6.21

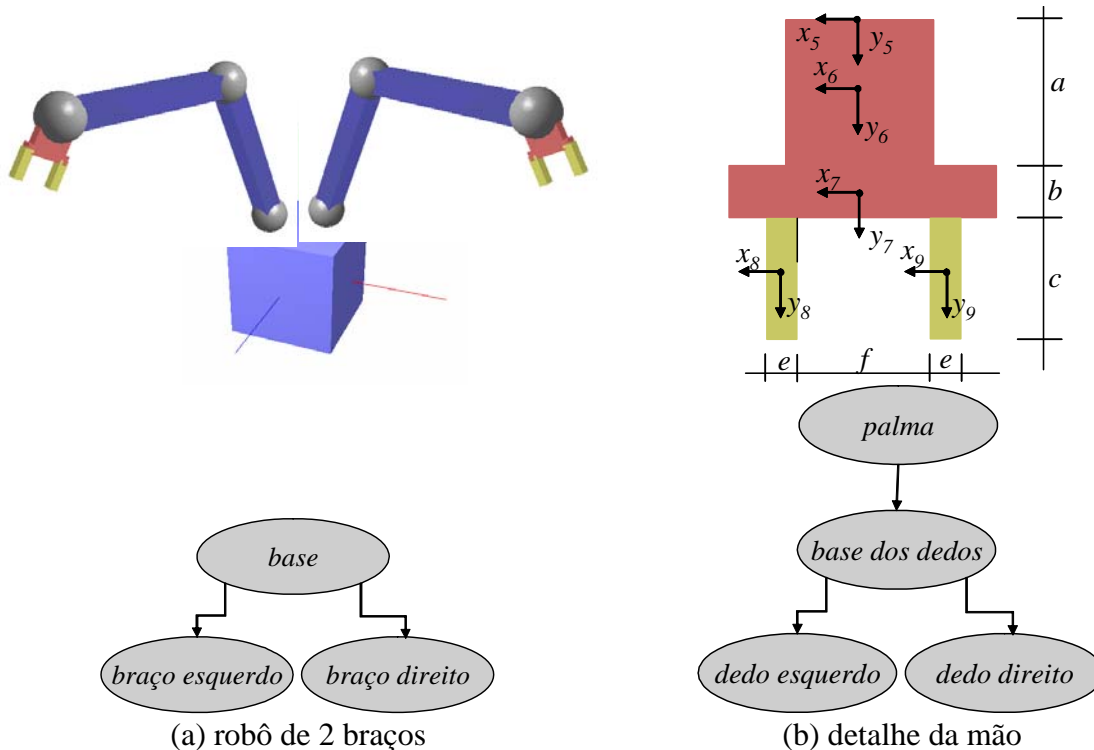


Fig. 6.21 – Hierarquia em árvore em um robô de dois braços.

Quando a hierarquia do modelo é representada por uma árvore, ao terminar de percorrer um dos ramos desejamos recuperar a matriz do nó quando primeiro chegamos a ele. Assim, por exemplo, é mais conveniente definirmos tanto o dedo da direita quanto o da esquerda da mão do robô a partir da base dos dedos.

Para dar suporte a modelos hierárquicos, alguns sistemas gráficos permitem que a cena seja descrita por uma árvore na qual os nós podem ser tanto transformações quanto modelos geométricos de objetos.

O sistema OpenGL implementa um mecanismo de pilha para a matriz de transformação. Com ele o programador pode percorrer a árvore salvando e recuperando as matrizes dos nós

tipo pai através de mecanismos de *push* e *pop* na pilha. O Quadro 6.3 mostra uma função para desenhar os dedos esquerdo e direito a partir da transformação corrente em $x_7y_7z_7$. Note que neste caso simples poderíamos acumular as transformações indo do centro do dedo esquerdo ao centro do dedo direito, mas o mecanismo de pilha torna o código mais claro. Ele também é importante para implementarmos funções que possam ser utilizadas em vários programas. Com o mecanismo de *push* e *pop* na pilha podemos garantir que a função retorna sem alterar o estado corrente das transformações, ou seja, sem efeitos colaterais indesejados.

```
void desenhaDedos( float b, float c, float f, float f)
{
    /* dedo esquerdo */
    glPushMatrix();                /* Salva matriz corrente C0 */
    glTranslatef((f+e)/2,(b+c)/2,0.); /* C=CTesq */
    glScalef(e,c,e);               /* C=CS */
    glutSolidCube(1.0);
    glPopMatrix();                /* Recupera da pilha C=C0 */
    /* dedo direito */
    glPushMatrix();                /* Salva matriz corrente C0 */
    glTranslatef((f+e)/2,(b+c)/2,0.); /* C=CTdir */
    glScalef(e,c,e);               /* C=CS */
    glutSolidCube(1.0);
    glPopMatrix();                /* Recupera da pilha C=C0 */
}
```

Quadro 6.3 – Função exemplo de uso de *push* e *pop*.

Estrutura das matrizes de transformações homogêneas

Em geral a matriz de uma transformação escrita em coordenadas homogêneas tem a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & (\mathbf{t}) \\ [\mathbf{s}] & 1 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Se as dimensões da matriz \mathbf{M} e do vetor \mathbf{s} forem 2×2 e 1×2 , respectivamente, a transformação é no R^2 , ao passo que se estas dimensões forem 3×3 e 1×3 trata-se do espaço R^3 . Neste capítulo, mantivemos os pontos dentro dos hiperplanos homogêneos, $w=1$, mantendo a última linha com $\mathbf{s}=0$. No estudo de transformações projetivas que faremos no próximo capítulo, a última linha destas matrizes assume outros valores.

A forma matricial homogênea apresentada na equação (6.29) pode representar: (a) transformações lineares, (b) translações e (c) transformações afins (transformações lineares acrescidas de translações) resultando em:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & (\mathbf{0}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.29a)$$

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & (\mathbf{t}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.29b)$$

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & (\mathbf{t}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.29c)$$

respectivamente. Nesta equação, \mathbf{I} é a matriz identidade.

A equação (6.30c) representa uma transformação linear \mathbf{M} seguida de uma translação. Isto porque:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & (\mathbf{t}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & (\mathbf{0}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & (\mathbf{t}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix} \quad (6.30a)$$

Caso a ordem fosse inversa teríamos:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & (\mathbf{0}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & (\mathbf{t}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & (\mathbf{Mt}) \\ [\mathbf{0}] & 1 \end{bmatrix} \quad (6.30b)$$

Como esperado, a ordem influi no resultado e as matrizes são diferentes. No caso (6.30b) a translação não pode ser lida diretamente da última coluna da matriz. Ela está transformada pela a rotação que foi aplicada depois.

Como a última linha das matrizes das transformações lineares afins é uma linha do tipo $[0 \dots 0 \ 1]$ e estas matrizes mantêm os pontos do plano $w=1$ dentro dele mesmo, sabemos que, por exemplo, dado um ponto qualquer do R^2 , $[x \ y \ 1]^T$, sua transformada é necessariamente um ponto da forma $[x' \ y' \ 1]^T$. Por isto alguns sistemas gráficos usam matrizes 2×3 ou 3×4 para especificar uma transformação linear afim no R^2 ou R^3 . A última coluna fica implicitamente definida como sendo $[0 \ 0 \ 1]^T$ ou $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$. Ou seja, é só uma forma econômica (ainda que às vezes confusa) de escrever matrizes que são de fato 3×3 ou 4×4 .

Rotações no Espaço

Poderíamos imaginar que qualquer rotação no espaço pode ser especificada por três ângulos compondo as três rotações em torno dos eixos cartesianos. Seguir por este caminho requer alguns cuidados. Primeiramente, as rotações não comutam, ou seja, o efeito de duas rotações seguidas depende da ordem em que elas são aplicadas. Considere por exemplo a coruja da Fig. 6.22. Suponha que desejemos aplicar sobre ela um vetor de rotação (90° , 0 , -90°). Ou seja, rodaríamos de 90° em torno do eixo x e de -90° em torno do eixo z . Observe que a posição final seria completamente diferente se aplicamos a rotação na ordem xz ou na ordem zx .

Alguém poderia argumentar que bastaria definirmos uma ordem para as rotações para eliminarmos as ambigüidades. Por exemplo, rodaríamos sempre em torno do eixo x , depois em torno do eixo y e, finalmente, em z . Assim, por exemplo, a coruja de cara para baixo

seria representada pelo vetor rotação $(90^\circ, 90^\circ, 0)$. Para visualizar este vetor, considere como passar da coruja deitada de lado após a rotação de 90° em x mostrada na Fig. 6.22 para a posição final desejada (veja a linha tracejada).

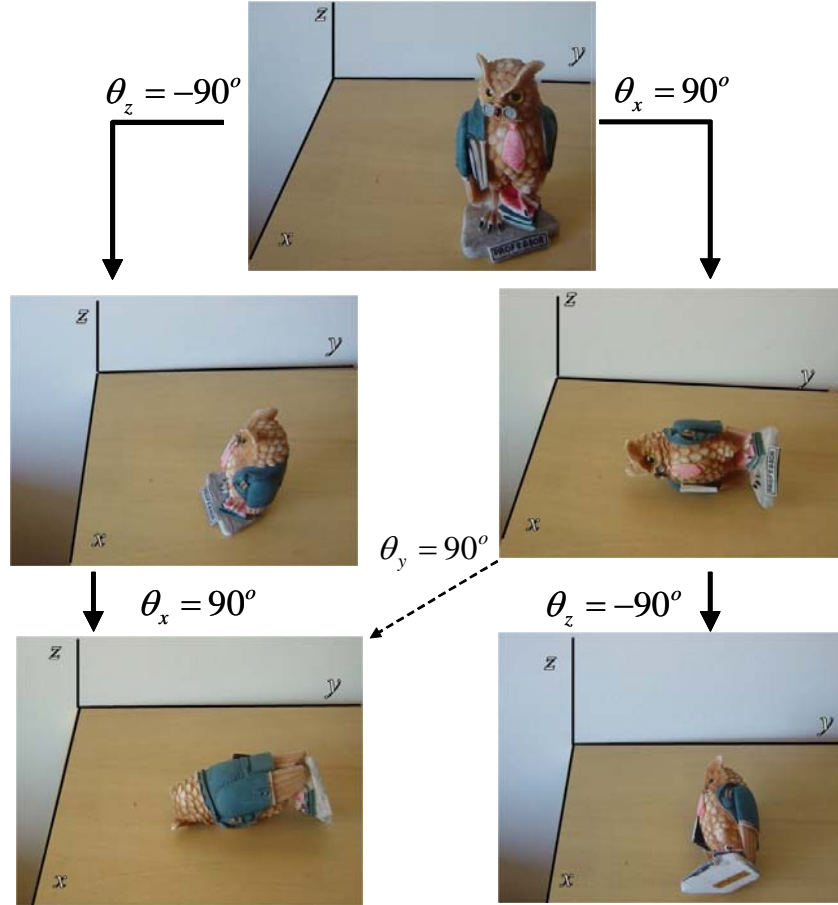


Fig. 6.22 – Rotações não comutam.

Esta forma de representar as rotações, chamada **ângulos de Euler**, é historicamente a parametrização mais popular de rotações no espaço. Na literatura da Aeronáutica, por exemplo, estas rotações têm até nomes próprios como *roll*, *pitch* e *yaw*. O ângulo de rolagem (*roll*) é a manobra em que o avião roda em torno de seu eixo longitudinal. O ângulo de ataque (*pitch*) é a inclinação para baixo ou para cima e *yaw* é a rotação do avião em torno de um eixo vertical.

Em termos matriciais, uma rotação especificada pelos ângulos de Euler resulta numa matriz que é a multiplicação das matrizes dadas nas equações (6.26). Ou seja, para uma rotação definida por $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$, a matriz é dada por:

$$\mathbf{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} c_y c_z & c_y s_z & -s_y & 0 \\ s_x s_y c_z - c_x s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & s_x c_y & 0 \\ c_x s_y c_z + s_x s_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

onde s_x e c_x são o seno e o co-seno de θ_x e s_y c_y são o seno e o co-seno de θ_y , respectivamente.

A parametrização de rotações no espaço por ângulos de Euler, entretanto, apresenta diversos problemas. Um dos mais perturbadores é o chamado *Gimbal lock*, que também ocorre com instrumentos, como o giroscópio de um avião, para determinados valores de rotação. Considere, por exemplo, a Fig. 6.23, na qual o boneco sofre uma rotação de $(30^\circ, 90^\circ, 60^\circ)$. Vamos imaginar que o animador gostaria de rodar o boneco de lado, $\theta_x = 30^\circ$, inclinar o boneco para frente $\theta_y = 90^\circ$ e levantar seu braço esquerdo. Ao aplicar a rotação em torno de z este efeito de torção em torno do eixo longitudinal já não pode ser aplicado. A rotação de $\theta_y = 90^\circ$ fez com que a rotação em torno de z fosse equivalente a uma rotação em torno de x . A sequência mostrada na Fig. 6.23b coloca o boneco na mesma posição compondo as rotações em x e z .

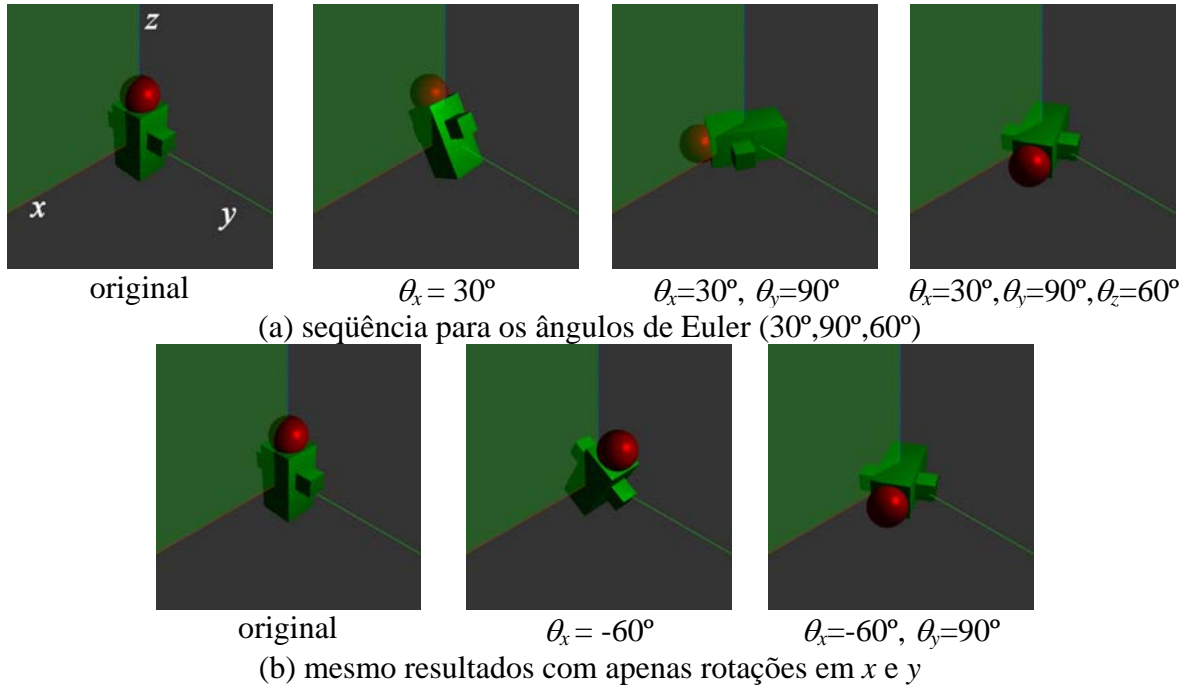


Fig. 6.23 – “Gimbal lock”.

Esta perda de um grau de liberdade também pode ser vista algebricamente na matriz de rotação dada pela equação (6.31). Se atribuímos $\theta_y = 90^\circ$ a matriz se reduz para:

$$\mathbf{R}(\theta_x, 90^\circ, \theta_z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_x c_z - c_x s_z & s_x s_z + c_x c_z & 0 & 0 \\ c_x c_z + s_x s_z & c_x s_z - s_x c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando as fórmulas da trigonometria que tratam do seno e do co-seno da diferença de ângulos (veja as equações (6.12)) chegamos a:

$$\mathbf{R}(\theta_x, 90^\circ, \theta_z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_x - \theta_z) & \cos(\theta_x - \theta_z) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_x - \theta_z) & -\sin(\theta_x - \theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz corresponde a uma rotação que não consegue tirar os braços do boneco do plano onde ele está deitado. Existe apenas um grau de liberdade, apesar de especificarmos dois valores.

Os ângulos de Euler apresentam outro problema sério: não são parâmetros adequados para interpolações. Suponha, por exemplo, que desejemos interpolar o movimento do boneco entre o quadro inicial e o quadro final mostrados na Fig. 6.24 b e c, respectivamente. Algebricamente o vetor intermediário deveria ser calculado por interpolação, gerando, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 90^\circ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 45^\circ \\ 45^\circ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 90^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$$

A Fig. 6.24c ilustra esta posição intermediária. Note que a interpolação “natural” não traria a cabeça do boneco tão para a frente, longe do plano vertical (verde na figura). Numa animação, o natural seria ele rolar e cair sem que o eixo do corpo se afaste muito do plano vertical (verde).

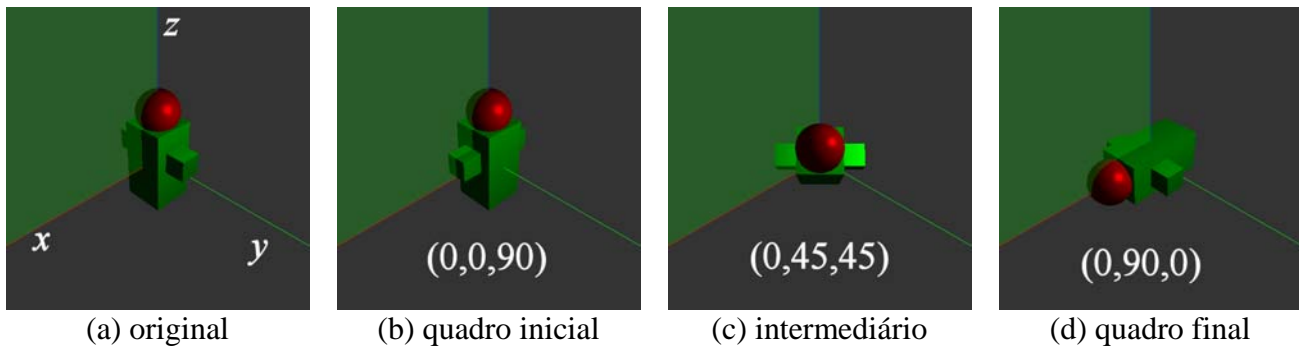


Fig. 6.24 – Posição inadequada de um quadro intermediário.

Geometricamente, Euler provou em 1775 que dadas duas posições rotacionadas de um objeto é sempre possível levar de uma posição a outra através de uma única rotação definida através de um eixo e um ângulo. Esta rotação tem o mesmo comportamento que a interpolação de duas posições pelo segmento de reta que os une: sai da primeira posição direto para a segunda sem oscilações indesejáveis.

Rotações em torno de uma eixo qualquer

Antes de evoluirmos na questão da interpolação de rotações, vamos estudar melhor o processo geométrico que ocorre durante uma rotação em torno de um eixo. Inicialmente vamos admitir que o eixo passe pela origem.

Sejam o ponto original \mathbf{p} , o ponto transformado \mathbf{p}' e o eixo definido pelo vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}$, como ilustra a Fig. 6.25.

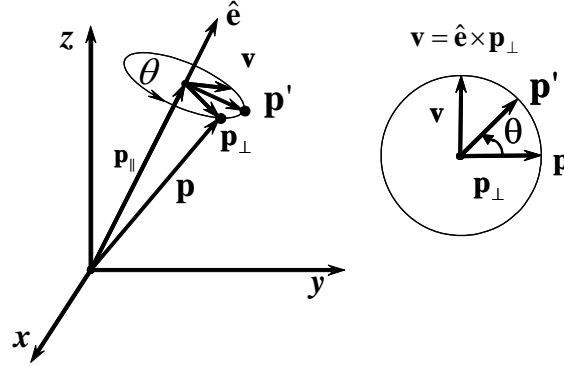


Fig. 6.25 – Rotação de \mathbf{p} de θ em torno de $\hat{\mathbf{e}}$ gerando \mathbf{p}' .

O vetor \mathbf{p} na figura acima está decomposto em dois vetores, um paralelo a $\hat{\mathbf{e}}$ e outro perpendicular:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\parallel} + \mathbf{p}_{\perp} \quad (6.32)$$

A rotação do ponto \mathbf{p} é uma transformação linear e pode ser escrita como:

$$\mathbf{p}' = R(\mathbf{p}_{\parallel}) + R(\mathbf{p}_{\perp}) \quad (6.33)$$

A componente paralela permanece inalterada. A componente perpendicular é rodada do ângulo θ , como ilustra a Fig. 6.25. Esta componente rodada pode ser escrita como sendo a soma da componente perpendicular original mais uma parcela correspondente à direção perpendicular a ela na direção \mathbf{v} , dada por:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{p}_{\perp} \quad (6.34)$$

Como $\hat{\mathbf{e}}$ é um vetor unitário e o seno deste produto vetorial vale 1, temos que o vetor \mathbf{v} tem a mesma norma que \mathbf{p}_{\perp} . A componente perpendicular rodada, \mathbf{p}' , também tem esta mesma norma, daí o círculo na Fig. 6.25 e a possibilidade de escrevermos:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_{\parallel} + (\cos \theta) \mathbf{p}_{\perp} + (\sin \theta) \mathbf{v} \quad (6.35)$$

Resta agora escrevermos os vetores \mathbf{p}_{\parallel} , \mathbf{p}_{\perp} e \mathbf{v} nos dados do problema: $\hat{\mathbf{e}}$, \mathbf{p} e θ . A componente paralela pode ser escrita como a projeção de \mathbf{p} em $\hat{\mathbf{e}}$:

$$\mathbf{p}_{\parallel} = (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{e}} \quad (6.36)$$

e a componente perpendicular pode ser tirada da diferença entre \mathbf{p} e a componente paralela:

$$\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{e}} \quad (6.37)$$

Com isto \mathbf{v} também pode ser re-escrito como:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{p}_\perp = \hat{\mathbf{e}} \times (\mathbf{p} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{e}}) = \hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{p} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{p} \quad (6.38)$$

uma vez que a componente paralela não contribui no produto vetorial.

Substituindo as componentes de \mathbf{p}_\parallel , \mathbf{p}_\perp e \mathbf{v} na equação (6.35) temos:

$$\mathbf{p}' = (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{e}} + (\cos \theta)(\mathbf{p} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{e}}) + (\sin \theta)(\hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{p}) \quad (6.39)$$

Re-arrumando os termos chegamos a:

$$\mathbf{p}' = (\cos \theta)\mathbf{p} + (1 - \cos \theta)(\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{e}} + (\sin \theta)(\hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{p}) \quad (6.40)$$

Apesar de ser diretamente escrita em termos dos dados do problema, não podemos dizer que esta equação seja prática nem que a formulação seja elegante.

Uma maneira de se facilitar de uso o cálculo da rotação em torno de um eixo qualquer consiste em calcularmos a matriz da transformação correspondente. Para tanto, podemos calcular cada coluna da matriz como a transformada dos vetores da base canônica. Sejam $\mathbf{p} = (x, y, z)^T$ e $\hat{\mathbf{e}} = (e_x, e_y, e_z)$, a primeira coluna da matriz corresponde à rotação do vetor $\hat{\mathbf{i}}$, escrita como:

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta)e_x \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ e_z \\ -e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_x^2 \\ e_x e_y (1 - \cos \theta) + e_z \sin \theta \\ e_x e_z (1 - \cos \theta) - e_y \sin \theta \end{pmatrix} \quad (6.41a)$$

$$\begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta)e_y \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} -e_z \\ 0 \\ e_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_y e_x (1 - \cos \theta) - e_z \sin \theta \\ \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_y^2 \\ e_y e_z (1 - \cos \theta) - e_x \sin \theta \end{pmatrix} \quad (6.41b)$$

$$\begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta)e_z \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} e_y \\ -e_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_z e_x (1 - \cos \theta) + e_y \sin \theta \\ e_z e_y (1 - \cos \theta) - e_x \sin \theta \\ \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_z^2 \end{pmatrix} \quad (6.41c)$$

Montando a matriz de rotação temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

onde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_x^2 & e_y e_x (1 - \cos \theta) - e_z \sin \theta & e_z e_x (1 - \cos \theta) + e_y \sin \theta & 0 \\ e_x e_y (1 - \cos \theta) + e_z \sin \theta & \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_y^2 & e_z e_y (1 - \cos \theta) - e_x \sin \theta & 0 \\ e_x e_z (1 - \cos \theta) - e_y \sin \theta & e_y e_z (1 - \cos \theta) - e_x \sin \theta & \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Caso o eixo não passe pela origem, teríamos que compor transformações. Supondo que o eixo passe pelo ponto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ e tenha a direção e sentido de $\hat{\mathbf{e}} = (e_x, e_y, e_z)$, como ilustra a Fig. 6.26, a rotação final seria dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

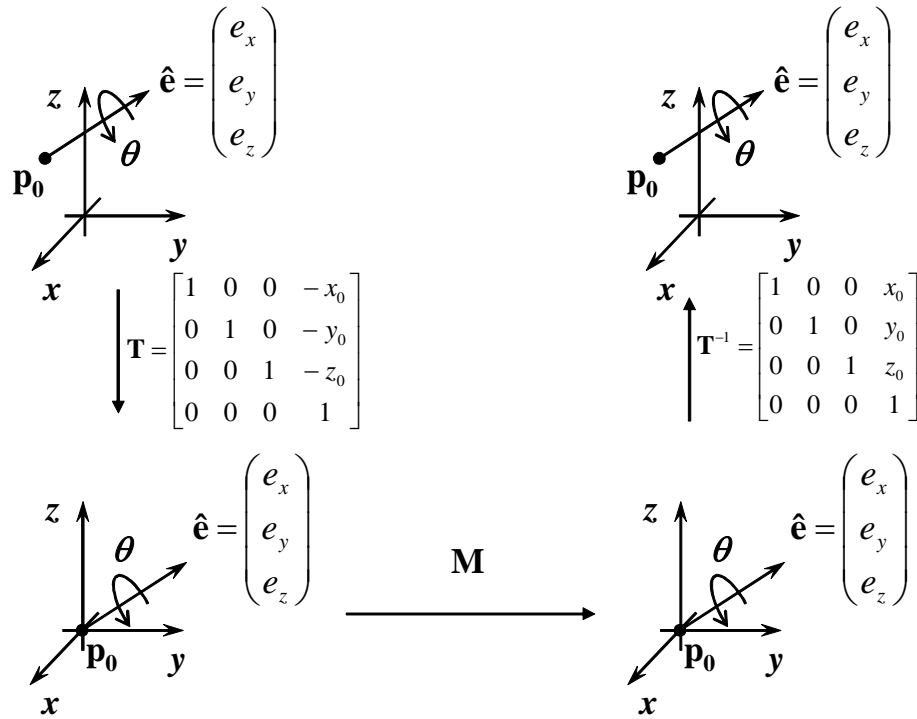


Fig. 6.26 – Rotação em torno de um eixo que não passa pela origem.

Estas soluções matriciais são simples de serem implementadas num programa de computador, mas também não resolvem o sério problema que surge quando desejamos, por exemplo, criar animações com rotações 3D. Poderíamos desenvolver um pouco mais a cinemática de corpos rígidos na procura de expressões algébricas que resolvessem o problema ou poderíamos tratar o problema com Quatérnios, com os quais a solução fica mais simples.

Quatérnios

A procura por uma forma algébrica simples e elegante para representar as rotações no espaço foi um problema que ocupou os matemáticos desde Euler (☆1707 †1783). Em 1843, Hamilton estendeu os números complexos, inventando uma estrutura algébrica, chamada **quatérnios**, para atender a esta demanda. Em 1985, Shoemake introduziu os quatérnios na Computação Gráfica e hoje eles formam a base das implementações de animações computadorizadas que envolvem rotações no espaço.

Um quatérnio, $\underline{\mathbf{q}}$, é definido por quatro componentes:

$$\underline{\mathbf{q}} = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (6.44)$$

sendo o escalar s a componente real e o vetor $\mathbf{v}=(x, y, z)$ a componente imaginária (a exemplo dos complexos). Adotamos o sublinhado como notação para distinguir um quatérnio de um vetor.

Uma forma mais compacta de escrever um quatérnio é:

$$\underline{\mathbf{q}} = (s, \mathbf{v}) \quad (6.45)$$

As operações **adição de dois quatérnios** e **multiplicação de quatérnio por escalar** seguem o esperado de um vetor de quatro dimensões:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 + \underline{\mathbf{q}}_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) + (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (6.46)$$

$$a\underline{\mathbf{q}} = a(s, \mathbf{v}) = (as, a\mathbf{v}) \quad (6.47)$$

O produto de dois quatérnios

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = (s_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})(s_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \quad (6.48)$$

pode ser distribuído nas suas componentes resultando em:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = & s_1 s_2 + s_1 x_2 \mathbf{i} + s_1 y_2 \mathbf{j} + s_1 z_2 \mathbf{k} \\ & + x_1 s_2 \mathbf{i} + x_1 x_2 \mathbf{ii} + x_1 y_2 \mathbf{ij} + x_1 z_2 \mathbf{ik} \\ & + y_1 s_2 \mathbf{j} + y_1 x_2 \mathbf{ji} + y_1 y_2 \mathbf{jj} + y_1 z_2 \mathbf{jk} \\ & + z_1 s_2 \mathbf{k} + z_1 x_2 \mathbf{ki} + z_1 y_2 \mathbf{kj} + z_1 z_2 \mathbf{kk} \end{aligned} \quad (6.49)$$

A exemplo dos números complexos e do produto vetorial, os produtos das unidades imaginárias dos quatérnios ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) são definidos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} &= -1 \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Substituindo estas equações em (6.49) chegamos a:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = & s_1 s_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \\ & + s_1 (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) + s_2 (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \\ & + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \mathbf{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.51)$$

Escrevendo esta equação de forma vetorial, temos:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \quad (6.52)$$

Assim como os números complexos, o **conjugado de um quatérnio** é obtido negando a componente imaginária, ou seja:

$$\underline{\mathbf{q}}^* = (s, \mathbf{v})^* = (s, -\mathbf{v}) \quad (6.53)$$

A **norma de um quatérnio** também segue a regra das normas de números complexos:

$$n(\underline{\mathbf{q}}) = \underline{\mathbf{q}} \underline{\mathbf{q}}^* = (s, \mathbf{v})(s, -\mathbf{v}) = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.54)$$

O **produto interno de dois quatérnios** segue uma regra semelhante ao R^4 :

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \cdot \underline{\mathbf{q}}_2 = s_1 s_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (6.55)$$

Apesar do produto interno de dois quatérnios ser completamente diferente do que o produto de dois quatérnios, a diferença em notação é sutil: o produto interno tem um ponto “.” e o outro não. Com o produto interno definido podemos calcular a **norma euclidiana** e perceber que ambas as normas estão relacionadas por:

$$n(\underline{\mathbf{q}}) = \|\underline{\mathbf{q}}\|^2 \quad (6.56)$$

Como uma consequência direta da definição de norma de um quatérnio, podemos calcular o **inverso de um quatérnio** como sendo:

$$\underline{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{1}{n(\underline{\mathbf{q}})} \underline{\mathbf{q}}^* \quad (6.57)$$

Para comprovar basta multiplicar:

$$\underline{\mathbf{q}} \underline{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{1}{n(\underline{\mathbf{q}})} \underline{\mathbf{q}} \underline{\mathbf{q}}^* = \frac{n(\underline{\mathbf{q}})}{n(\underline{\mathbf{q}})} = 1$$

Note que o número real 1 (um) pode ser escrito como o quatérnio $(1, \mathbf{0})$.

Uma vez definida a norma podemos também definir o quatérnio unitário como sendo aquele cuja norma é 1. Dado um quatérnio qualquer $\underline{\mathbf{q}}$, podemos calcular o seu unitário por:

$$\underline{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{1}{\|\underline{\mathbf{q}}\|} \underline{\mathbf{q}} \quad (6.58)$$

Uma forma conveniente de escrever um quatérnio unitário é:

$$\underline{\hat{\mathbf{q}}} = (\cos \phi, \sin \phi \hat{\mathbf{v}}) \quad (6.59)$$

Não é difícil ver que:

$$\|\underline{\hat{\mathbf{q}}}\| = (\cos \phi, \sin \phi \hat{\mathbf{v}})(\cos \phi, -\sin \phi \hat{\mathbf{v}}) = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 1$$

Quatérnios e rotações

A **relação de quatérnios com rotações no espaço** pode ser obtida da seguinte maneira:

1. Dada uma rotação definida por um eixo $\hat{\mathbf{e}}$ e um ângulo θ , construímos o quatérnio unitário:

$$\underline{\hat{\mathbf{q}}} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}} \right) \quad (6.60a)$$

2. Dado um ponto qualquer \mathbf{p} do R^3 , construímos o quatérnio:

$$\underline{\mathbf{p}} = (0, \mathbf{p}) \quad (6.60b)$$

3. Calculamos o produto:

$$\underline{\mathbf{p}}' = \underline{\hat{\mathbf{q}}}\underline{\mathbf{p}}\underline{\hat{\mathbf{q}}}^{-1} \quad (6.60c)$$

4. A parte real deste produto resulta em 0 e a parte imaginária corresponde ao vetor do R^3 rodado. Ou seja, o ponto rodado \mathbf{p}' é dado por:

$$\underline{\mathbf{p}}' = (0, \mathbf{p}') \quad (6.60d)$$

Um detalhe a ser observado é que, como o quatérnio que representa uma transformação é unitário, o quatérnio inverso é simplesmente o conjugado, isto é:

$$\underline{\hat{\mathbf{q}}}^{-1} = \underline{\hat{\mathbf{q}}}^* \quad (6.61)$$

Para provarmos que o procedimento acima funciona é necessário provar que a componente imaginária de

$$\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}} \right) (0, \mathbf{p}) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}} \right)$$

resulta no mesmo vetor calculado pela equação (6.40). Esta prova é extensa mas não possui dificuldade e por isto é deixada a cargo do leitor.

Com base na equação (6.60a) podemos elaborar uma pergunta importante: qual o quatérnio corresponde à rotação nula? A resposta pode ser obtida atribuindo-se zero para o ângulo de rotação em torno de qualquer eixo. O quatérnio resultante é

$$\underline{\hat{\mathbf{q}}} = (1, 0\hat{\mathbf{e}}) = (1, \mathbf{0}) = (1, 0, 0, 0)$$

Se aplicamos este quatérnio na fórmula (6.60c) vemos que $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$.

Finalmente, a questão a ser levantada é: se a complexidade da formulação por quatérnios é igual ou maior que a equação (6.40), por que ela se tornou tão utilizada na Computação Gráfica? A resposta é porque ela torna mais tratáveis os problemas de composição e interpolação de rotações.

Composição de rotações

Considere duas rotações seguidas definidas pelos quatérnios $\hat{\mathbf{q}}_1$ e $\hat{\mathbf{q}}_2$. Não é difícil mostrar que a rotação combinada é dada por:

$$\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1 \quad (6.62)$$

Ou seja, temos facilmente o eixo e o ângulo da rotação que leva diretamente da posição original ao final da segunda rotação.

Para provar esta propriedade, considere que a posição final de um vetor qualquer \mathbf{p} pode ser calculada como sendo:

$$\hat{\mathbf{q}}_2 (\hat{\mathbf{q}}_1 \mathbf{p} \hat{\mathbf{q}}_1^{-1}) \hat{\mathbf{q}}_2^{-1} \quad (6.63a)$$

ou

$$(\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1) \mathbf{p} (\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1)^{-1} \quad (6.64b)$$

A expressão (6.63a) calcula o resultado da rotação representada por $\hat{\mathbf{q}}_2$ aplicada à posição final de \mathbf{p} depois de rodado pela rotação representada por $\hat{\mathbf{q}}_1$. A equação (6.64b) representa o ponto \mathbf{p} rodado do quatérnio $\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1$.

Para ilustrar esta propriedade considere o boneco da Fig. 6.23b submetido às duas rotações $\theta_x = -60^\circ$ seguido de $\theta_y = 90^\circ$. Escrevendo estas rotações como quatérnios, temos:

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \left(\cos(-30^\circ), \sin(-30^\circ)(1,0,0) \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}(1,0,0) \right)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_2 = \left(\cos(45^\circ), \sin(45^\circ)(0,1,0) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0) \right)$$

Qual a rotação que colocaria o boneco diretamente deitado como mostra a Fig. 6.23b? A resposta não é intuitiva mas pode ser facilmente calculada por:

$$\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0) \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}(1,0,0) \right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right)$$

Ou seja, a rotação desejada é de $\theta = 104.5^\circ$ em torno do eixo $\hat{\mathbf{e}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. A Fig. 6.27 mostra o resultado desta rotação ao lado do resultado da composição da rotação $\theta_x = -60^\circ$ seguido de $\theta_y = 90^\circ$.

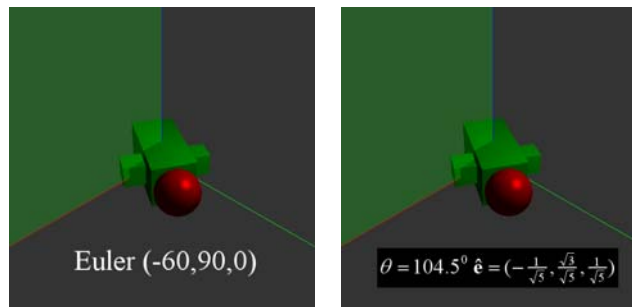


Fig. 6.27 – Composição de rotações por quatérnios.

Interpolação de rotações

O problema de gerar quadros intermediários entre duas posições rodadas de um objeto foi ilustrado na Fig. 6.24, quando mostramos que a interpolação baseada em ângulos de Euler apresenta movimentos indesejados.

Dados dois quatérnios $\underline{\hat{q}}_1$ e $\underline{\hat{q}}_2$ que representam a posição inicial e final, podemos determinar uma posição intermediária simplesmente aplicando o quatérnio interpolado $\underline{\hat{q}}(t)$, $t \in [0,1]$ tal que $\underline{\hat{q}}(0) = \underline{\hat{q}}_1$ e $\underline{\hat{q}}(1) = \underline{\hat{q}}_2$.

O quatérnio interpolado pode ser escrito como uma combinação linear

$$\underline{\hat{q}}(t) = a\underline{\hat{q}}_1 + b\underline{\hat{q}}_2 \quad (6.65)$$

onde a e b são números reais. O único detalhe a considerar é que os quatérnios que representam rotações são necessariamente unitários, ou seja, pertencem a uma hipersfera do espaço de quatro dimensões. Quando interpolamos entre vetores de uma esfera não podemos simplesmente adotar

$$b = 1 - a, \quad a \in [0,1]$$

Isto implicaria na interpolação ilustrada na Fig. 6.28a, que não preserva a norma unitária e não é linear nos ângulos. Para atender a estas condições devemos calcular a e b impondo:

$$\|\underline{\hat{q}}(t)\| = 1 \text{ (unitário)}, \quad (6.66a)$$

$$\underline{\hat{q}}_2 \cdot \underline{\hat{q}}(t) = \cos(t\phi) \text{ (interpolação baseada em ângulo)}, \quad (6.66b)$$

$$\underline{\hat{q}}_1 \cdot \underline{\hat{q}}_2 = \cos \phi \text{ (ângulo entre os quatérnios)} \quad (6.66c)$$

Estas condições aplicadas à equação (6.65) resultam na interpolação esférica denominada *SLERP* (*Spherical Linear Interpolation*), dada por:

$$\underline{\hat{q}}(t) = \text{Slerp}(\underline{\hat{q}}_1, \underline{\hat{q}}_2, t) = \underline{\hat{q}}_1 \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin(\phi)} + \underline{\hat{q}}_2 \frac{\sin(t\phi)}{\sin(\phi)} \quad (6.67)$$

O ângulo ϕ pode ser calculado pelo produto interno dos quatérnios (6.55). A Fig. 6.28 ilustra esta interpolação.

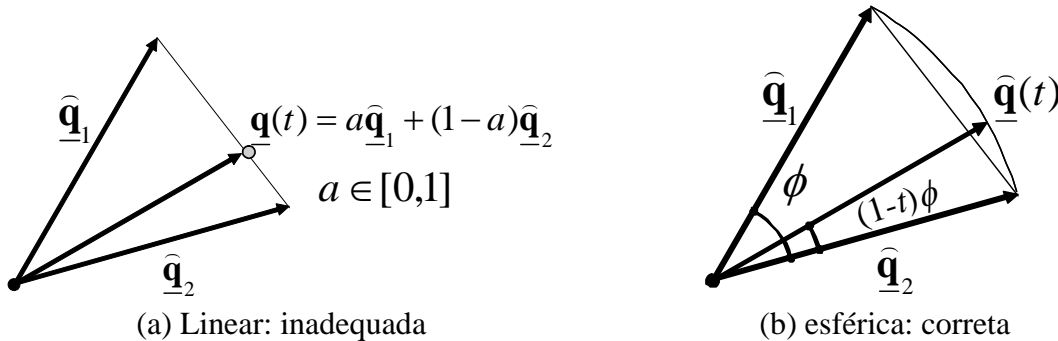


Fig. 6.28 – Interpolação de quatérnios.

Para ilustrar esta proposta considere o problema ilustrado na Fig. 6.24. Os quatérnios que representam as rotações $(0,0,90)$ e $(0,90,0)$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = (\cos(45^\circ), \sin(45^\circ)(0,0,1)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1)\right)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_2 = (\cos(45^\circ), \sin(45^\circ)(0,1,0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0)\right)$$

O produto interno deles resulta em:

$$\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, (0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)\right) = \frac{1}{2}$$

indicando um ângulo de 60° no \mathbb{R}^4 .

Para acharmos a posição intermediária correspondente a $t=0.5$, avaliamos a equação (6.67) e chegamos a:

$$\hat{\mathbf{q}}(0.5) = \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{\sin(30)}{\sin(60)} + \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{\sin(30)}{\sin(60)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, (0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)\right)$$

ou

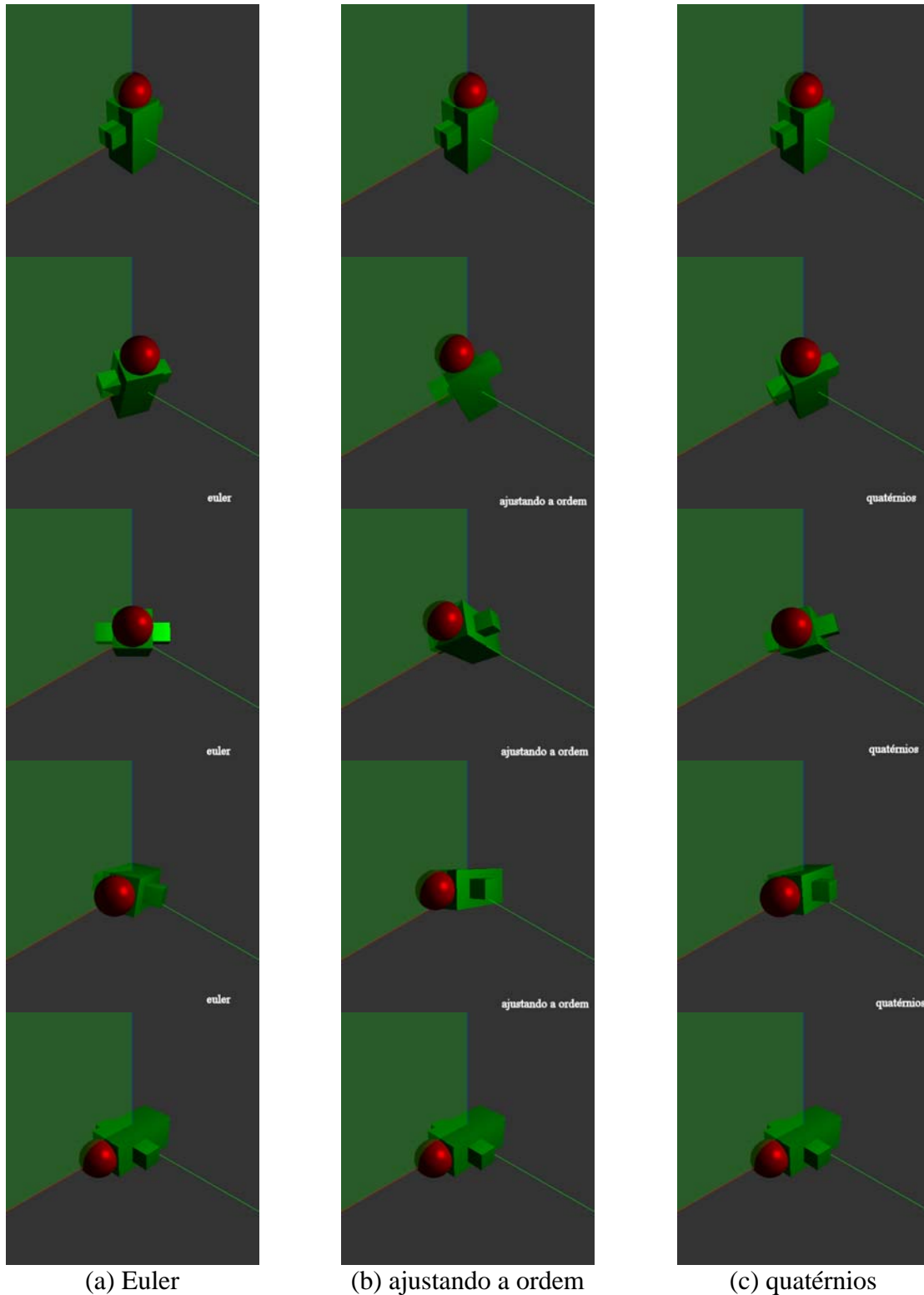
$$\hat{\mathbf{q}}(0.5) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, (0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right) = (\cos 35.3^\circ, \sin 35.3^\circ(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}))$$

A Fig. 6.29 re-visita o problema de interpolação de posições rodadas ilustrado na Fig. 6.24. Ela ilustra uma animação na qual três quadros são gerados entre a posição inicial do boneco rodada de 90° em torno do eixo vertical (eixo z) e a posição na qual ele está rodado de 90° em torno do eixo da direita (eixo y). Na coluna da esquerda a interpolação se faz com as rotações parametrizadas por ângulos de Euler seguindo a ordem xyz . Na coluna central as rotações também estão interpoladas por Euler mas seguem uma ordem específica para este caso na qual a rotação em torno do eixo z ocorre antes da rotação em torno do eixo y . Na coluna da direita as rotações são interpoladas seguindo o procedimento *SLERP* descrito acima.

A interpolação de Euler seguindo a ordem xyz não apresentou bons resultados, como já havíamos ilustrado na Fig. 6.24. A inversão de ordem fez com que o boneco caísse sem que seu eixo saísse do plano vertical. Esta seria a melhor solução se não fosse particular para este problema. Se adotarmos a ordem zyx e interpolarmos entre uma posição do boneco rodada em y até outra rodada em z , teremos o mesmo problema da coluna da esquerda. Ou seja, a ordem seria dependente do problema. Como a ordem tem que ser estabelecida a priori, esta parametrização não tem a generalidade necessária.

A interpolação segundo os quatérnios segue a rotação que resulta do teorema de Euler. Ou seja, a interpolação *SLERP* se faz em torno de um eixo fixo que é exatamente o eixo da rotação que leva da posição inicial para a final. Podemos determinar este eixo algebricamente utilizando quatérnios através da expressão:

$$\hat{\mathbf{q}}_{rot} \hat{\mathbf{q}}_1 = \hat{\mathbf{q}}_2$$



(a) Euler

(b) ajustando a ordem

(c) quatérnios

Fig. 6.29 - Quadros interpolados segundo Euler e quatérnios.

Multiplicando esta expressão à direita pelo inverso de $\hat{\mathbf{q}}_1$ temos:

$$\hat{\mathbf{q}}_{rot} = \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1^{-1} = \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1^*$$

Substituindo os valores calculados acima:

$$\hat{\mathbf{q}}_{rot} = \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right)$$

ou:

$$\hat{\mathbf{q}}_{rot} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\right) = \left(\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right), \sin\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

De onde podemos concluir que a rotação de 120° em torno de um eixo $(-1, 1, -1)$ leva da posição inicial até a final. O que a interpolação *SLERP* faz é aplicar uma rotação de $120t$, t variando de 0 a 1, em torno deste eixo. O que torna esta interpolação interessante é o fato de que ela é única o que torna o procedimento algébrico previsível geometricamente.

A hipersfera do R^4 que contém os quatérnios que representam rotações no R^3 possui uma particularidade importante: uma mesma rotação pode ser representada por $\hat{\mathbf{q}}$ ou por $-\hat{\mathbf{q}}$.

Isto porque os produtos $\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ e $(-\hat{\mathbf{q}})\mathbf{p}(-\hat{\mathbf{q}}^{-1})$ resultam no mesmo vetor. Ou seja, existe uma certa redundância de quatérnios. O problema que temos que enfrentar é que a interpolação entre, por exemplo, $\hat{\mathbf{q}}_1$ e $\hat{\mathbf{q}}_2$ não produz os mesmos quatérnios intermediários que a interpolação entre $\hat{\mathbf{q}}_1$ e $-\hat{\mathbf{q}}_2$. Como ao interpolar queremos o menor movimento possível, temos que escolher o sinal de $\hat{\mathbf{q}}_1$ ou $\hat{\mathbf{q}}_2$ de forma a minimizar o ângulo entre eles.

Quatérnios e matrizes

Apesar dos quatérnios serem necessários para as interpolações, as rotações, em sistemas gráficos do tipo do OpenGLTM, são normalmente especificadas por matrizes e não por equações do tipo (6.60). Além disto, normalmente as operações com matrizes são feitas na placa gráfica, aliviando o processador central. Por razões como esta, temos que transformar rotações especificadas por quatérnios em rotações especificadas por matrizes e vice-versa.

Dada uma rotação especificada por um quatérnio $\hat{\mathbf{q}} = (s, x, y, z)$, a matriz pode ser derivada através do produto $\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$, resultando em:

$$\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & 2xy - 2zs & 2xz + 2ys & 0 \\ 2xy + 2zs & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2yz - 2xs & 0 \\ 2xz - 2ys & 2yz + 2xs & 1 - 2(x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

Inversamente, dada uma matriz de rotação qualquer da forma

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

podemos calcular o escalar w do quatérnio associado observando que a soma da diagonal (também chamada de **traço da matriz**) é dada por:

$$4 - 2(2x^2 + 2y^2 + 2z^2) = 1 + m_{11} + m_{22} + m_{33} + m_{44}$$

Como o quatérnio de rotação é unitário temos $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - s^2$ e:

$$4 - 4(1 - s^2) = 1 + m_{11} + m_{22} + m_{33} + m_{44}$$

ou seja:

$$s = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + m_{11} + m_{22} + m_{33} + m_{44}} \quad (6.69a)$$

de maneira similar temos:

$$x = \frac{m_{32} - m_{23}}{4s} \quad (6.69b)$$

$$y = \frac{m_{13} - m_{31}}{4s} \quad (6.69c)$$

$$z = \frac{m_{21} - m_{12}}{4s} \quad (6.69d)$$

Transformação de Pontos e Normais

Quando um conjunto de objetos sofre uma determinada transformação, calculamos a matriz desta transformação e a aplicamos a todos os vértices do modelo. Assim, ao transformarmos os pontos das extremidades de um segmento de reta, estamos de fato transformando todos os pontos do segmento. O mesmo acontece com outras entidades geométricas, como triângulos e quadriláteros. Todos utilizam a mesma matriz. As normais destes objetos, entretanto, não seguem a mesma transformação. Para exemplificar o problema considere a Fig. 6.30.

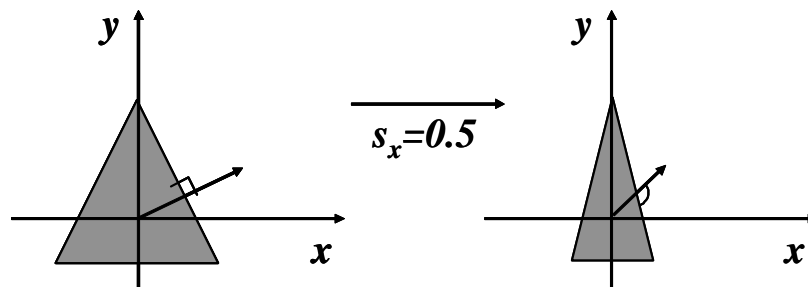


Fig. 6.30 – As normais não sofrem a mesma transformação que os pontos.

Para computar a transformação da normal, considere a equação do plano $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0$ escrita na forma:

$$\mathbf{n}^T \mathbf{p} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.70)$$

Esta equação não se altera se incluirmos a matriz identidade na forma de uma matriz \mathbf{M} e da sua inversa:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.71)$$

Se \mathbf{M} é a matriz da transformação homogênea da transformada que estamos tratando, os pontos \mathbf{p} são levados para:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{M} \mathbf{p} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Substituindo esta equação na equação (6.71) temos:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = 0 \quad (6.73)$$

Esta equação pode ser vista com a equação do plano transformada, $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{p}' = 0$, se:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{M}^{-T} \mathbf{n} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-T} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

De onde concluímos que, se \mathbf{M} transforma os pontos, \mathbf{M}^{-T} transforma as normais. Note que se a matriz \mathbf{M} for ortonormal as duas matrizes são iguais.

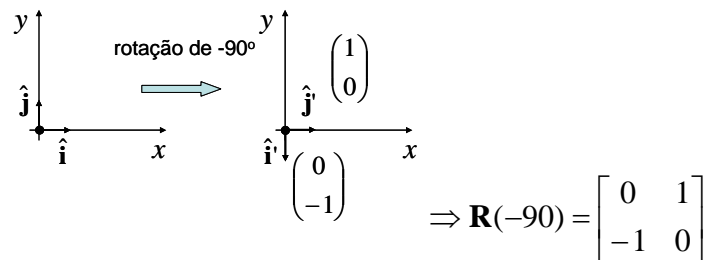
Exercícios resolvidos

1. Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que os objetos rodem em torno do ponto $(3,4)^T$ de um ângulo de 90° graus no sentido horário. Qual o significado geométrico das colunas desta matriz? Faça um desenho ilustrando este significado geométrico.

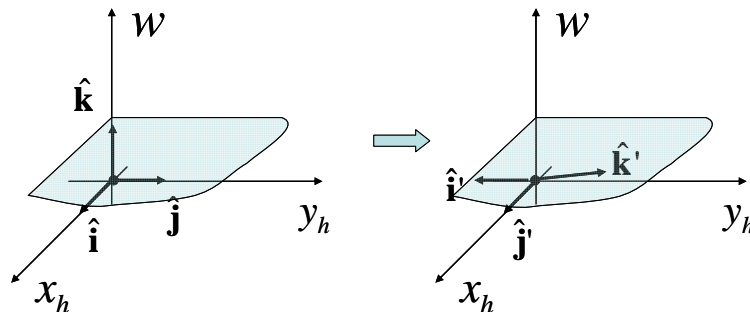
Resp.:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

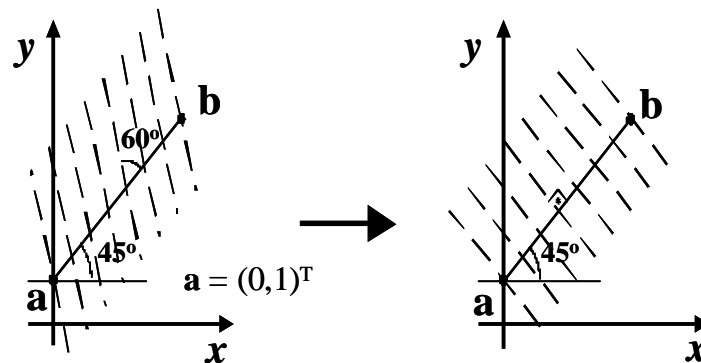
As colunas de uma matriz que representa uma transformação linear correspondem a imagem da transformada dos vetores da base. Servem, por exemplo, para se determinar a matriz de rotação mostrada acima, como ilustra a figura abaixo.



Como estamos envolvendo translações estamos trabalhando no espaço homogêneo e a interpretação geométrica é a da figura abaixo (que é pouco intuitiva).



- Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que as retas tracejadas fiquem ortogonais à reta que passa por **a** na forma indicada nos desenhos abaixo. Note que a reta que passa por **a** deve permanecer com sua posição inalterada.



Para poder transformar as retas tracejadas, de forma que fiquem ortogonais a reta **ab**, será necessário realizar 5 operações:

- Primeiramente é necessário transladar a reta de forma que ela passe na origem, ou seja:

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Em seguida devemos realizar uma rotação de 45° no sentido horário. Esta rotação faz com que a reta **ab** fique sobreposta ao eixo **x** e, conseqüentemente a reta não sofrerá alterações na terceira operação (cisalhamento). Vale a pena ressaltar as retas tracejadas serão afetadas, sim, pelo cisalhamento.

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) & 0 \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Nesta operação, é realizado o cisalhamento que inclina as retas tracejadas em 30° no sentido negativo de x . As retas que anteriormente formavam um ângulo de 60° ficam ortogonais à reta **ab**.

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} 1 & \tan(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A quarta e a quinta operação basicamente desfazem a segunda e primeira, respectivamente, ao rotacionar (ou desfazer a rotação anterior) os pontos do plano em 45° no sentido anti-horário e transladar os mesmos aumentado em +1 o eixo **y**, fazendo com que os pontos **a** e **b** voltem as suas posições originais.

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

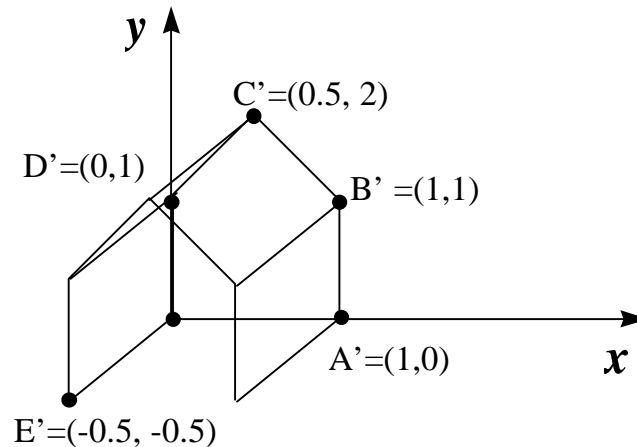
$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- No final, a matriz que transformará os pontos do plano, de forma que as retas tracejadas fiquem ortogonais à reta que passa por **ab** será:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(continuação) $\begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) & 0 \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Determine a matriz da transformação linear que leva $A = (10, 0, 0)$, $B = (10, 10, 0)$, $C = (5, 20, 0)$, $D = (0, 10, 0)$ e $E = (0, 0, 20)$ para os pontos A' , B' , C' , D' , e E' mostrados na figura abaixo.



Resposta:

É uma matriz 3×2 com as colunas sendo a transformada dos vetores $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ e $(0,0,1)^T$.

O ponto A é $10(1,0,0)^T$, logo a transformada de $(1,0,0)^T$ é $(1/10,0)^T$.

O ponto D é $10(0,1,0)^T$, logo a transformada de $(0,1,0)^T$ é $(0,1/10)^T$.

O ponto E é $20(0,0,1)^T$, logo a transformada de $(0,0,1)^T$ é $(-0.5/20, -0.5/20)^T$.

Ou seja: $\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & -1/40 \\ 0 & 1/10 & -1/40 \end{bmatrix}$

4. Calcule a inversa da matriz, **M**, mostrada abaixo. O resultado era esperado? Qual a interpretação geométrica da transformação associada a esta matriz?

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Resposta:

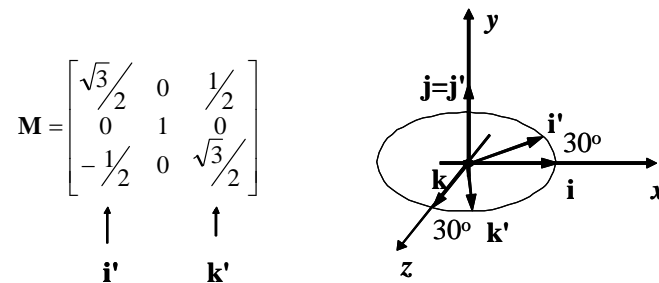
Pela regra de Cramer a inversa de um matriz pode ser calculada por:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \mathbf{M}^{adj}$$

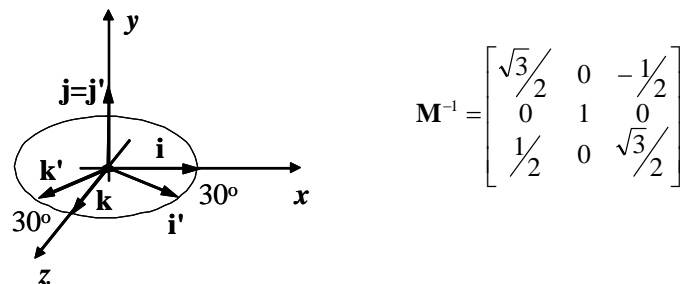
$$\det(\mathbf{M}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 0 - (-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + 0 + 0) = 1$$

$$\mathbf{M}^{adj} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Examinando as colunas da matriz \mathbf{M} vemos que a transformada da base canônica consiste numa rotação de 30° em torno do eixo y , como ilustra a figura abaixo.



Como a matriz de rotação é ortonormal, a inversa é a transposta. Ou, continuando o raciocínio geométrico, a inversa é corresponde à rotação de -30° que resulta na mesma matriz, como ilustra a figura a seguir.



Em ambos caminhos chegamos à mesma resposta.

5. Mostre que a matriz, \mathbf{R} , associada a uma rotação em torno de um eixo qualquer que passa pela origem é ortonormal, ou seja, $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ou $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

Dica: qual a interpretação geométrica das colunas da matriz R ?

Resp.:

Se aplicarmos uma transformação \mathbf{M} ao sistema canônico $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{M}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{M}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{k}' = \mathbf{M}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$$

Pela equação (6.8) podemos escrever a matriz \mathbf{M} como sendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Podemos notar que as colunas da matriz correspondem aos vetores da base rodada escrita na base original e as linhas são vice-versa. Ou seja:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{j}' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{k}' \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{i}' | & \langle \mathbf{j}' | & \langle \mathbf{k}' | \end{bmatrix}$$

A interpretação da matriz transposta também é imediata:

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{j} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{k} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{i} | & \langle \mathbf{j} | & \langle \mathbf{k} | \end{bmatrix}$$

O produto da matriz pela sua transposta pode ser interpretado como sendo o produto interno entre os vetores da base canônica original:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

O produto da transposta pela matriz contém os produtos internos dos vetores da base rodada:

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}' \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Em ambos os casos, como as bases são ortonormais, os produtos resultam na matriz identidade, como queríamos provar.

6. Um objeto que está numa posição A sofre uma rotação em torno do eixo y de 90° chegando a uma posição B. A partir de B o objeto sofre outra rotação de 90° em torno do eixo x chegando a uma posição C. Determine o eixo de uma rotação que o leve diretamente de A para C.

Resp.:

Quatérnio correspondente à primeira rotação:

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0) \right)$$

Quatérnio correspondente à segunda rotação:

$$\hat{\mathbf{q}}_2 = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0) \right)$$

Quatérnio correspondente à rotação de A para C:

$$\hat{\mathbf{q}}_3 = \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0) \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0) \right)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1) \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1,1,1) \right)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \left(\cos \frac{120^\circ}{2}, \sin \frac{120^\circ}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

Ou seja o eixo de rotação pedido é: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

7. A que pontos do R^2 correspondem as seguintes coordenadas homogêneas?

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resp.:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \cdot 3/2 \\ 2 \cdot 3/2 \\ 2/3 \cdot 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

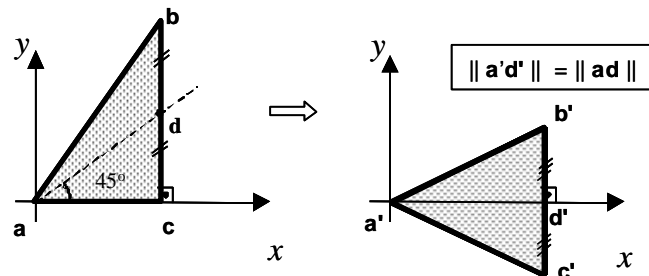
$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \infty \text{ na direção } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios

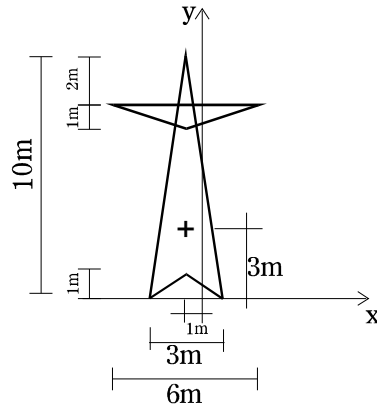
- 1) Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que os objetos rodem em torno do ponto $(2,3)^T$ de um ângulo de 90° graus.
- 2) Determine o centro, o sentido e o ângulo de rotação da transformação geométrica representada pela matriz \mathbf{M} mostrada abaixo.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

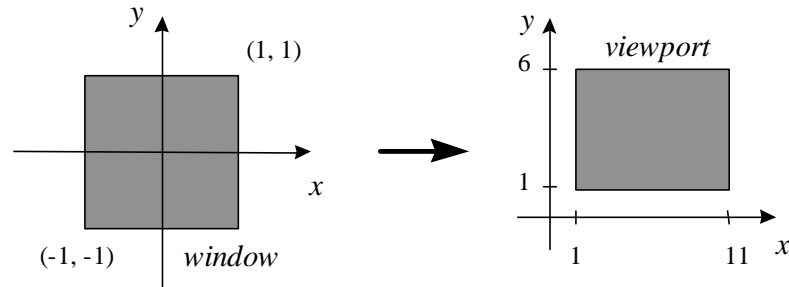
- 3) Determine um produto de matrizes cuja matriz resultante transforme o triângulo **abc** em **a'b'c'** respeitando as condições geométricas indicadas na figura abaixo.



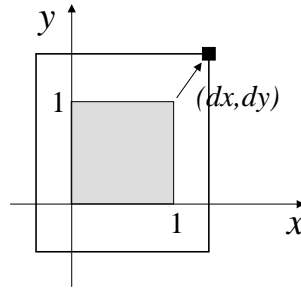
- 4) Determine a matriz que escala o objeto mostrado na figura de $s_x = 2$ e $s_y = 3$ em torno do ponto $(-1, 3)^T$. Qual o significado geométrico das colunas desta matriz? Em que espaço essas colunas têm este significado?



- 5) Determine um produto de matrizes homogêneas que represente a sequência de transformações geométricas que transforma a *window* da figura da esquerda na *viewport* da figura da direita. Este produto é único? E a matriz resultante, é única?



- 6) Nos sistemas gráficos no plano, as transformações entre sistemas de coordenadas são geralmente feitas através do par *window*, *viewport*. Como pode-se refazer um desenho aumentando seu tamanho na superfície de visualização (zoom +)? (Marque certo ou errado após cada frase.)
- ☐ aumentando a *window*;
 - ☐ diminuindo a *viewport*;
 - ☐ diminuindo a *window*;
 - ☐ aumentando a *window* e diminuindo a *viewport* de um mesmo fator;
 - ☐ aumentando a *window* e aumentando a *viewport* de um mesmo fator.
- 7) Determine o produto de matrizes homogêneas que transforma o quadrado unitário da forma indicada na figura. A resposta pode ser dada na forma de um produto de matrizes (não é necessário fazer as contas).



- 8) Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que os objetos rodem em torno do ponto $(3,2)^T$ de um ângulo de 45° graus no sentido anti-horário. Qual o significado geométrico das colunas desta matriz? Faça um desenho ilustrando este significado geométrico.
- 9) Determine o quatérnio que representa uma rotação de 30° em torno do eixo y .
- 10) Determine a matriz correspondente ao quatérnio do exercício anterior utilizando a equação (6.68).
- 11) Calcule posição do ponto $\mathbf{p} = (1,2,2)$ após uma a rotação de 60° em torno do eixo que passa pela origem e tem a direção do vetor $(1,1,1)$ utilizando três formulações diferentes. São elas: (a) matriz de rotação dada pela equação (6.42); (b) expressão vetorial dada pela equação (6.40); e (c) pelo procedimento de quatérnios (veja (6.60)).
- 12) A Fig. 6.22 mostra três fotos de uma coruja em três posições diferentes. A foto da esquerda mostra a coruja rodada de -90° em z . A foto da direita mostra a coruja rodada de 90° em x . Finalmente, a foto do meio mostra a coruja rodada de aproximadamente 45° em x e -45° em z . Esta posição intermediária corresponde à interpolação dos ângulos de Euler. Calcule o ângulo e o eixo de rotação de uma posição intermediária através da interpolação linear esférica de quatérnios.
- 13) Considere o objeto composto de paralelepípedos mostrado na figura abaixo. Supondo que o estado da matriz ModelView do OpenGL seja tal que qualquer ponto seja desenhado no sistema (x_I, y_I, z_I) escreva os comandos do OpenGL que, através da `glutSolidCube`, desenha as quatro componentes do objeto.

