Geometria Computacional
Triangulações

Claudio Esperança

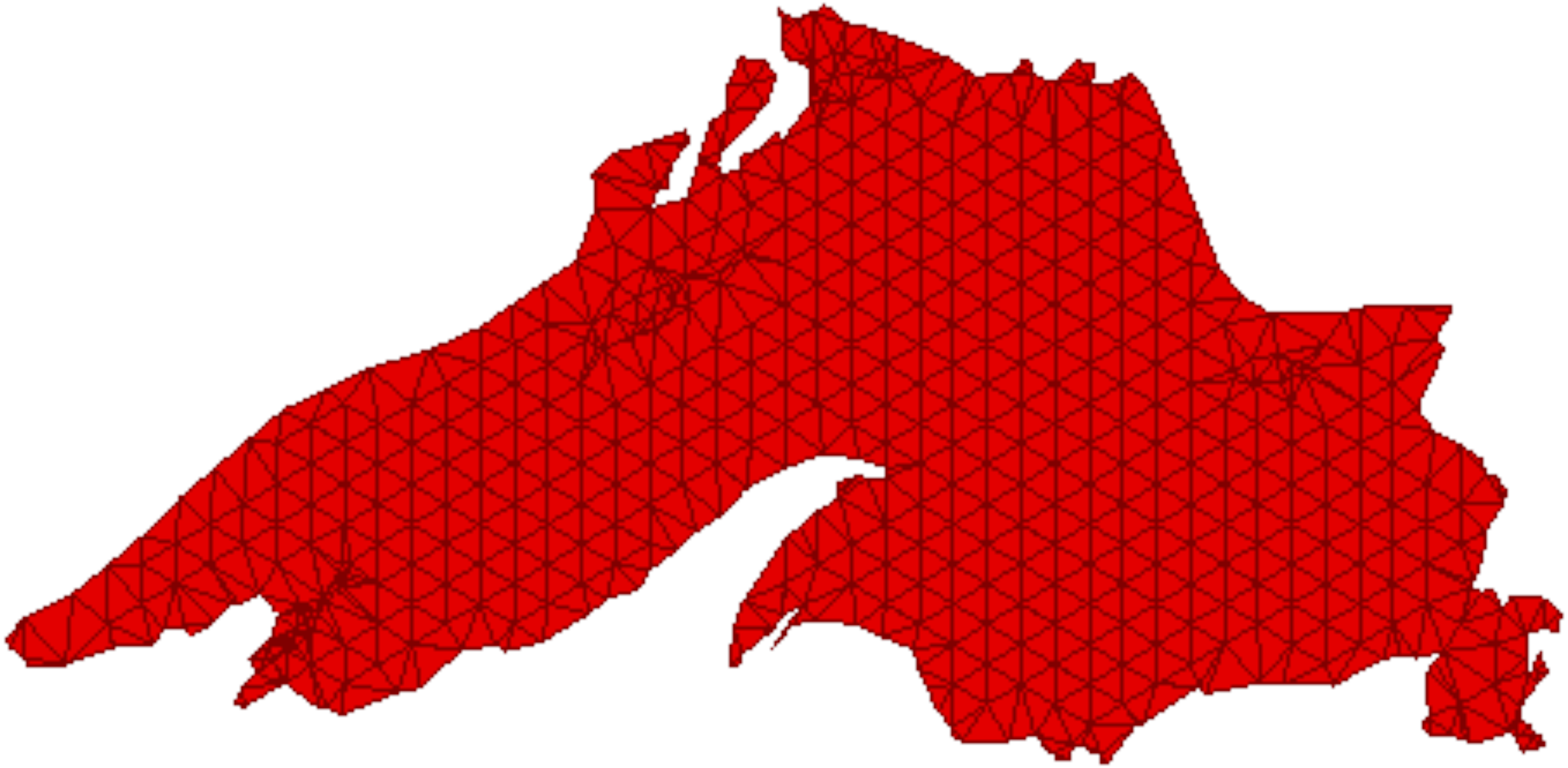
Paulo Roma Cavalcanti

Problema

- Dado um conjunto P de pontos do R^n, decompor o seu fecho convexo $conv(P)$ num complexo simplicial cuja união seja $conv(P)$ e cujo conjunto de vértices contenha P.
- Não existe uma solução única para esse problema.
- No plano, toda triangulação de $conv(P)$ possui exatamente $(2n - v - 2)$ triângulos e $(3n - v - 3)$ arestas, onde v é o número de pontos de P na fronteira de $conv(P)$, n a cardinalidade de P e a o número de arestas.
  - Use a fórmula de Euler para esfera:

$$V - A + F = 2.$$

Exemplo: Lago Superior



Dedução

- O número de faces F é igual ao número de triângulos $T + 1$, pois tem-se de considerar a face externa ilimitada no plano.

$$n - a + (T + 1) = 2$$

- Cada triângulo possui 3 arestas. Como cada aresta aparece em 2 triângulos, arestas são contadas duas vezes.

$$3T + v = 2a \Rightarrow a = \frac{3T + v}{2}$$

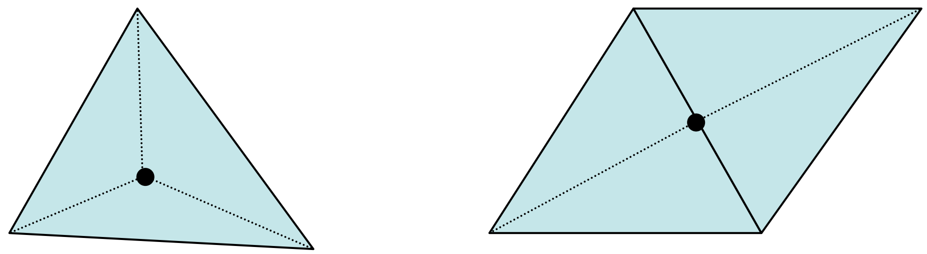
$$n + T + 1 = \frac{3T + v}{2} + 2$$

$$2n + 2T + 2 = 3T + v + 4$$

$$T = 2n - v - 2 \quad \text{e} \quad a = 3n - v - 3$$

Algoritmo Força Bruta

- Obtenha *conv*(P) e triangule-o por diagonais. Cada ponto que não esteja na fronteira de *conv*(P) é inserido em *conv*(P) e o triângulo que o contém é subdividido.
  - Algoritmo $O(n \log n)$ para achar *conv*(P).
  - Inclusão de cada ponto é $O(n)$.
  - Algoritmo completo é $O(n^2)$.



Problema Resolvido?

- Embora todas as triangulações de $conv(P)$ tenham o mesmo número de triângulos, a forma dos triângulos é muito importante em aplicações numéricas.
- Triangulação de Delaunay tem a importante propriedade de, entre todas as triangulações de $conv(P)$, <u>maximizar</u> o <u>menor</u> de todos os ângulos internos dos triângulos.
  - Isso só é verdade no R^2.

Como Triangular?

- Uma triangulação fornece uma <u>estrutura combinatória</u> a um conjunto de pontos.
- Na realidade, um algoritmo de triangulação fornece **regras** para conectar pontos "próximos".
- A triangulação de Delaunay conecta os pontos baseado em um único critério: <u>círculos vazios</u>.
  - Conceitualmente simples e fácil de implementar.
  - O critério de proximidade vem do **Diagrama de Voronoi**.

Diagrama de Voronoi

- É uma partição do R^n em polígonos convexos associados a um conjunto de sítios (**tesselação** de Dirichlet).
- O conceito foi discutido em 1850 por Dirichlet e em 1908 num artigo do matemático russo Georges Voronoi.
- É a <u>segunda</u> estrutura mais importante em Geometria Computacional perdendo apenas para o fecho convexo.
- Possui todas as informações necessárias sobre a proximidade de um conjunto de pontos.
- É a estrutura <u>dual</u> da triangulação de Delaunay.

Definições

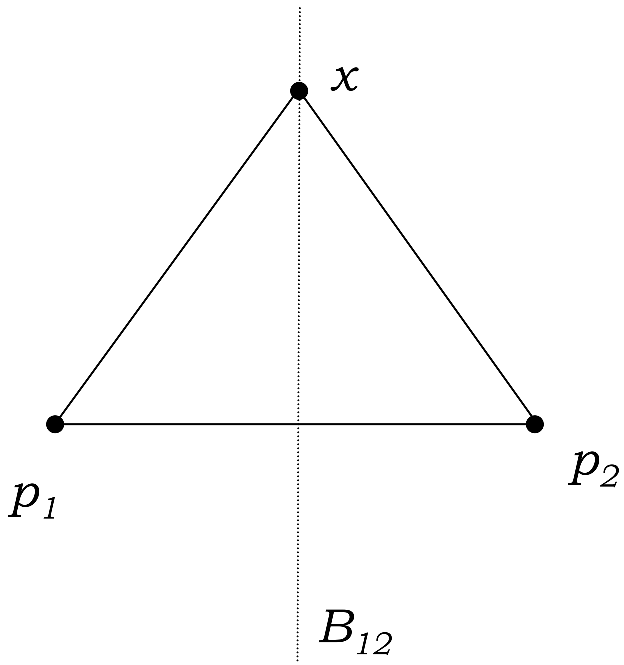
- Seja $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ um conjunto de pontos do plano euclidiano, chamados de sítios. Particione o plano atribuindo a cada ponto do plano o sítio mais próximo.
  - Todos os pontos associados a p_i formam um polígono de Voronoi $V(p_i)$:

$$V(p_i) = \left\{ x : \left| p_i - x \right| \leq \left| p_j - x \right| \forall j \neq i \right\}$$

  - O conjunto de todos os pontos associados a mais de um sítio forma o diagrama de Voronoi $Vor(P)$.

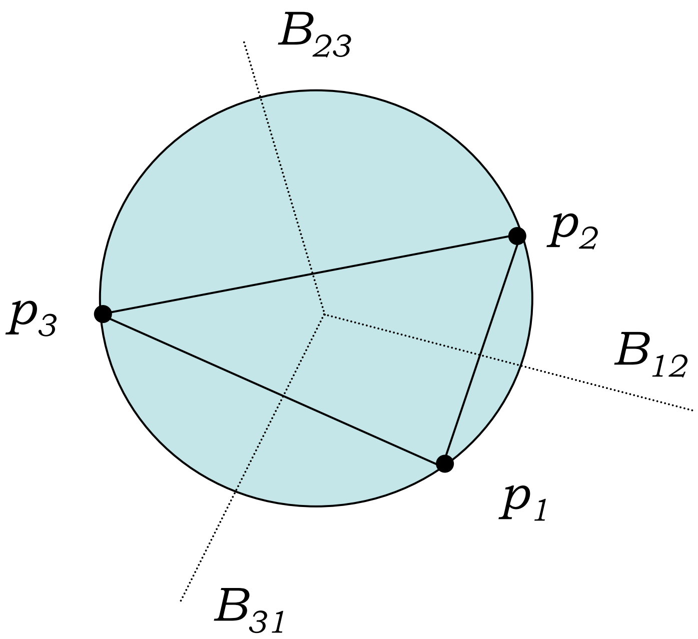
Dois Sítios

- Sejam p_1 e p_2 dois sítios e $B(p_1, p_2) = B_{12}$ a mediatriz do segmento $p_1 p_2$.
  - Cada ponto $x \in B_{12}$ é eqüidistante de p_1 e p_2 (congruência lado-ângulo-lado).



Três Sítios

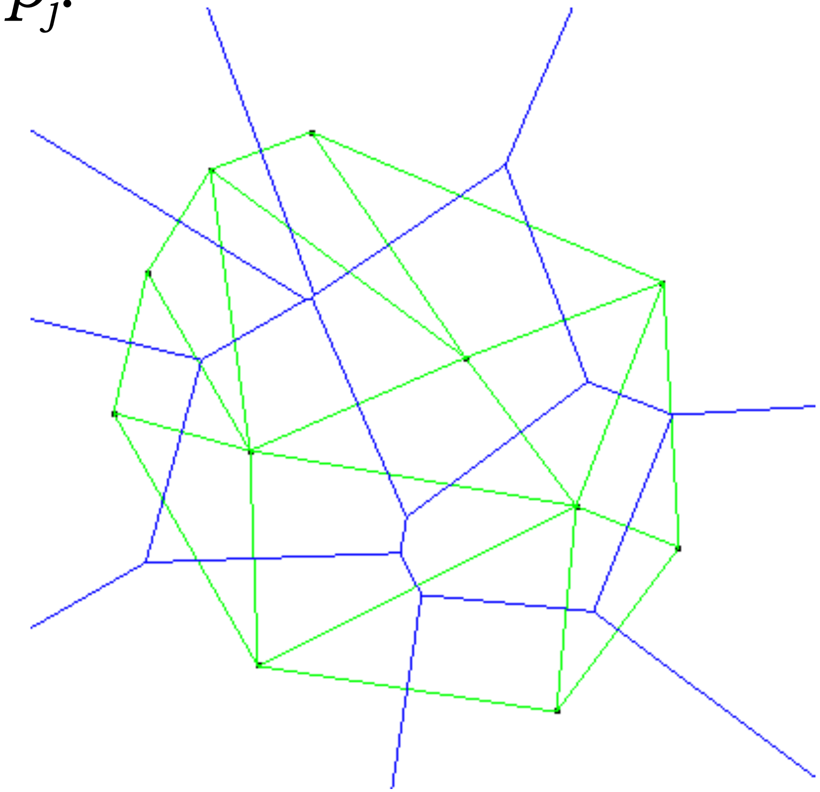
- A menos do triângulo (p_1, p_1, p_3), o diagrama contém as mediatrizes B_{12}, B_{23}, B_{31}.
- As mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram no **circuncentro** do círculo único que passa pelos três vértices (Euclides).



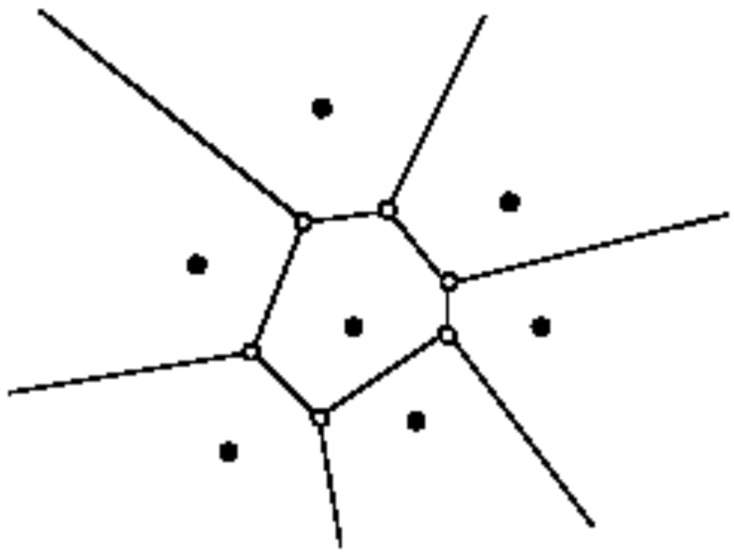
Semi-planos

- A generalização para mais de três pontos corresponde ao local geométrico da interseção dos semi-planos fechados $H(p_i, p_j)$, dos pontos mais próximos de p_i do que de p_j.

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j)$$



Voronoi de 7 pontos



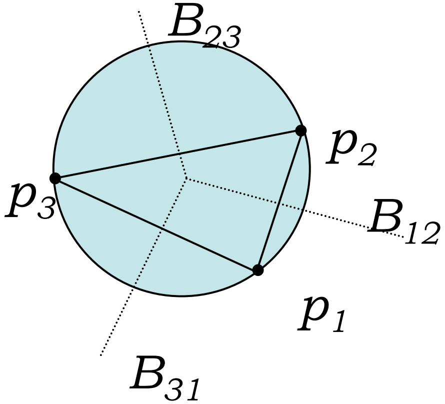
- 7 pontos definem o mesmo número de polígonos de Voronoi.
- Um dos polígonos é limitado porque o sítio correspondente está completamente cercado por outros sítios.
- Cada ponto do R^2 possui pelo menos um vizinho mais próximo. Logo, ele pertence a pelo menos um polígono de Voronoi.
  - Assim, o diagrama de Voronoi cobre completamente o plano.

Teoremas

- Os polígonos de Voronoi correspondentes a um par de pontos x_i e x_j possuem uma aresta comum, se e somente se existem pontos (aqueles da aresta comum) que são eqüidistantes dos pontos x_i e x_j que estão mais próximos deles do que de qualquer outro ponto de P.
- Um polígono de Voronoi é **ilimitado** se somente se o ponto correspondente x_i pertencer à fronteira de $conv(P)$.

Círculos Vazios

- Todo vértice v de $Vor(P)$ é comum a pelo menos três polígonos de Voronoi e é centro de um círculo $C(v)$ definido pelos pontos de P correspondentes aos polígonos que se encontram em v. Além disso, $C(v)$ não contém nenhum outro ponto de P.
- Os pontos de P estão em **posição geral** se nenhum sub-conjunto de P contém <u>4 pontos</u> co-circulares.



Algoritmo para Voronoi

- Pode-se determinar os conjuntos $T_1, T_2, \ldots, T_t$ de P que determinam **círculos vazios** para construir $Vor(P)$.
  - Cada T_k é formado por três ou mais pontos co-circulares de P.
  - Se os pontos de P estão em posição geral, todo T_k contém exatamente 3 sítios de P.
  - As arestas de $Vor(P)$ são os segmentos <u>mediatrizes</u> correspondentes a pontos consecutivos dos T_k.
  - Uma vez conhecidos todos os T_k, $Vor(P)$ pode ser determinado em tempo linear.

Ligação entre Voronoi e Delaunay

- No diagrama de Voronoi cada sítio está associado a um polígono (face) de $Vor(P)$.
- O grafo dual tem por vértices os sítios de $Vor(P)$, e por arestas os pares de sítios cujos polígonos são vizinhos.
- O grafo dual é Chamado de **triangulação de Delaunay** $Del(P)$.
  - Dois sítios x_i e x_j determinam uma aresta de $Del(P)$ se e somente se existe um círculo C contendo x_i e x_j tal que <u>todos</u> os outros sítios sejam exteriores a C.

Triangulação de Delaunay

- Em 1934, o matemático russo Boris Delaunay provou que quando o grafo dual é desenhado com linhas retas ele produz uma triangulação dos sítios do diagrama de Voronoi (supostos estarem em posição geral).
- Não é óbvio que as arestas de $Del(P)$ não se cruzam, já que uma aresta entre dois sítios não cruza, necessariamente, a aresta de Voronoi correspondente.

Propriedades de Delaunay

D_1. *Del*(P) é o dual com arestas retilíneas de *Vor*(P).

D_2. *Del*(P) é uma triangulação se nenhum grupo de 4 pontos forem co-circulares. Cada face é um triângulo (teorema de Delaunay).

D_3. Cada triângulo de *Del*(P) corresponde a um vértice de *Vor*(P).

D_4. Cada aresta de *Del*(P) corresponde a uma aresta de *Vor*(P).

D_5. Cada vértice de *Del*(P) corresponde a um polígono (face) de *Vor*(P).

D_6. A fronteira de *Del*(P) é o fecho convexo dos sítios.

D_7. O interior de cada triângulo (face) de *Del*(P) não contém sítios.

Propriedades de Voronoi

V_1. Todo polígono $V(p_i)$ de Voronoi é convexo.

V_2. $V(p_i)$ é ilimitado se e só se p_i está no fecho convexo.

V_3. Se v for um vértice de Voronoi na junção de $V(p_1)$, $V(p_2)$, $V(p_3)$ então v é o centro do círculo $C(v)$ que passa por p_1, p_2, p_3.

V_4. $C(v)$ é o círculo circunscrito ao triângulo correspondente a v.

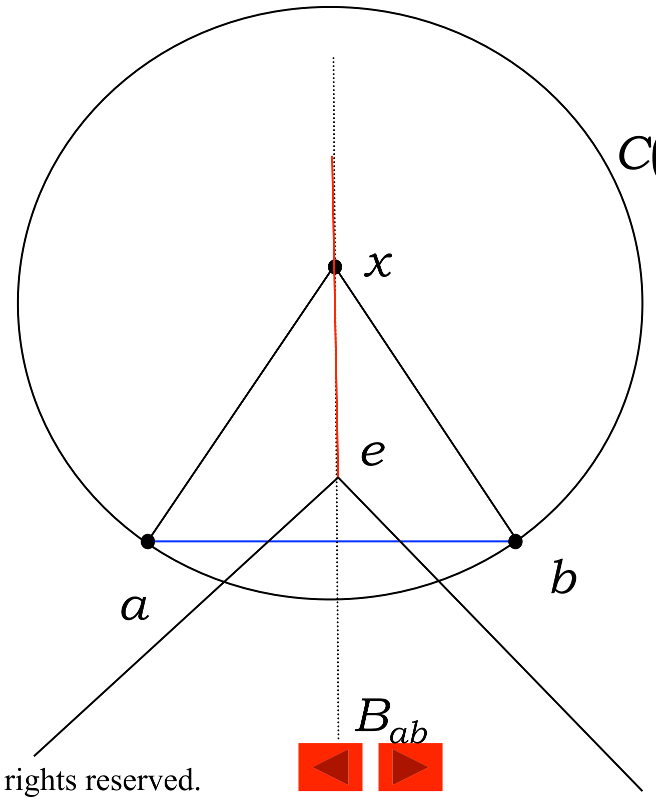
V_5. $C(v)$ é vazio (não contém outros sítios).

V_6. Se p_i for o vizinho mais próximo de p_j, então p_ip_j é uma aresta de $Del(P)$.

V_7. Se existir um círculo vazio passando por p_i e p_j, então p_ip_j é uma aresta de $Del(P)$.

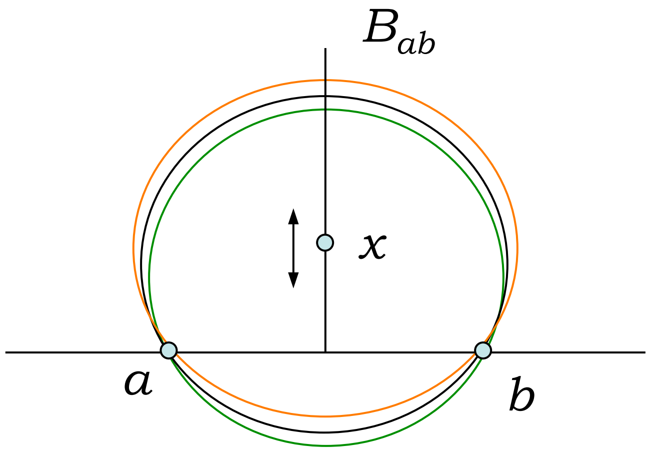
Prova de V_7

- Se ab é uma aresta de Delaunay, então $V(a)$ e $V(b)$ compartilham uma aresta e de $Vor(P)$. Seja um círculo $C(x)$ com centro x no <u>interior</u> de e, de raio igual a distância até a ou b.
  - $C(x)$ é vazio. Caso contrário, um sítio c estaria sobre ou dentro de $C(x)$ e x estaria em $V(c)$ também. Isto é absurdo porque x está em $V(a)$ e $V(b)$ apenas.

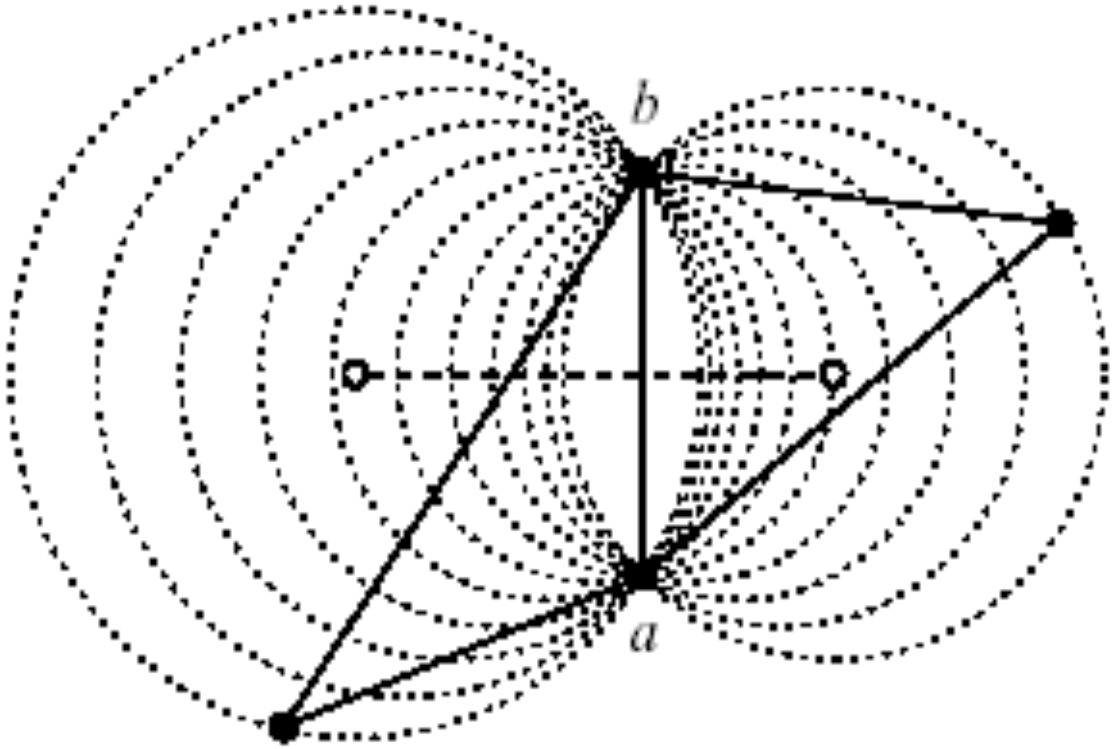


Prova de V_7

- Suponha agora que exista um círculo $C(x)$ vazio passando por a e b, e com centro x. Já que x é eqüidistante de a e b, x está em $V(a)$ e $V(b)$.
  - Há uma certa liberdade para mover x ao longo da mediatriz de ab, mantendo o círculo vazio e passando por a e b. Logo, x está em uma aresta de Voronoi compartilhada por $V(a)$ e $V(b)$.
  - $x \in V(a) \cap V(b) \Rightarrow ab \in Del(P)$.



Feixe de Círculos Vazios de um Segmento



Teorema de Delaunay

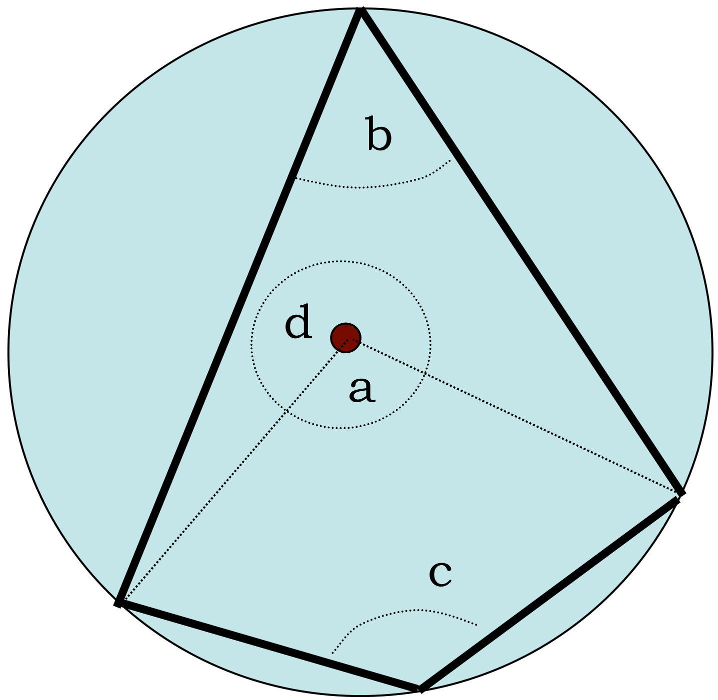
- Seja $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de pontos do plano e seja $\{T_k\}$ a família de subconjuntos ordenados de P que determinam círculos vazios.
  a) O diagrama de Delaunay obtido ligando os pontos consecutivos de cada T_k é uma realização de um grafo planar.
  b) As arestas correspondentes a cada T_k delimitam uma região convexa R_k.
  c) Essas regiões possuem interiores disjuntos e sua união é o fecho convexo de P.
  d) As regiões R_k são exatamente as faces limitadas do diagrama planar determinado por $Del(P)$.
  e) Se os pontos de P estão em posição geral, então os R_k determinam uma triangulação de $conv(P)$, chamada **Triangulação de Delaunay**.

Lema 0

$$a + d = 2\pi$$

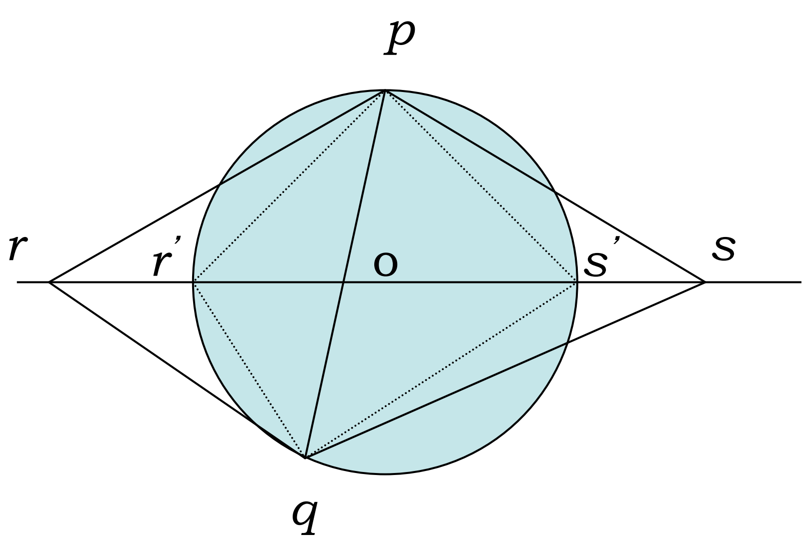
$$b = \frac{a}{2}, c = \frac{d}{2}$$

$$b + c = \pi$$



Lema 1

- Sejam *pq* e *rs* dois segmentos do plano que se interceptam em *o*. Então para que um círculo passe por *p* e *q* com *r* e *s* exteriores, é <u>necessário e suficiente</u> que os ângulos do quadrilátero *prqs* sejam tais que $p + q > \pi$ ou $r + s < \pi$.

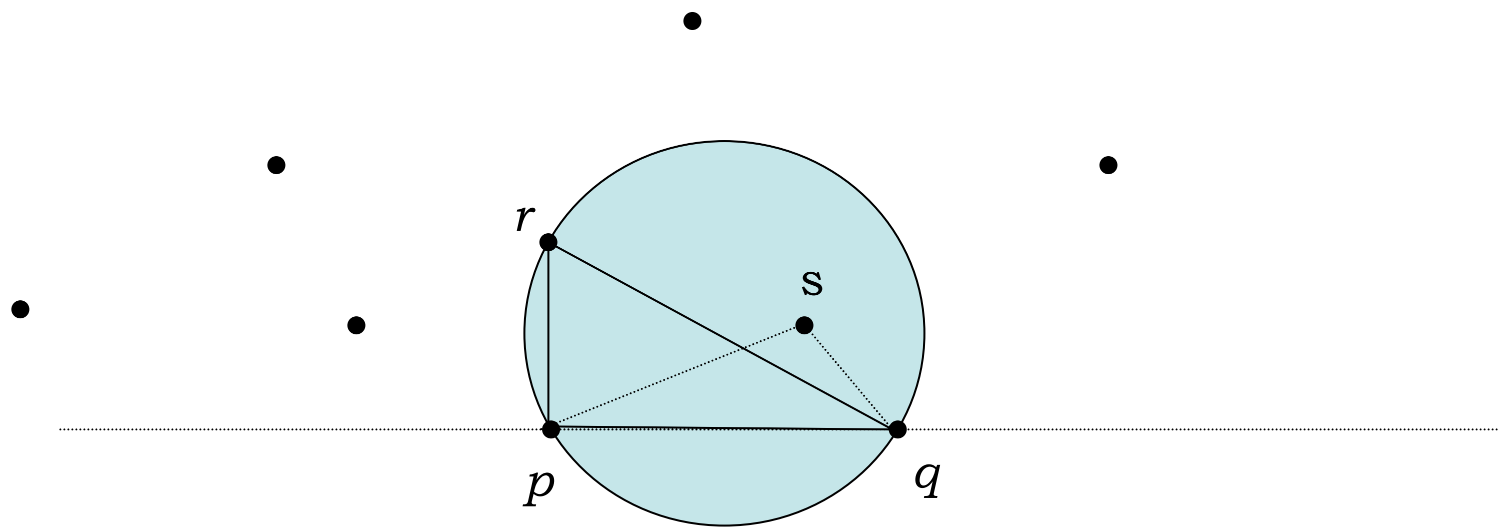


Prova do Lema 1

- Sejam r' e s' as interseções de rs com o círculo.
  - $p + q + r + s = p + q + r' + s' = 2\pi$
    - Soma dos ângulos internos de um polígono é $(n\text{-}2)\,\pi$
  - $r + s < r' + s' = \pi$ ($pr'qs'$ está inscrito).
  - Do mesmo modo, se $r + s < \pi$ então existem r' e s' sobre rs tal que $r' + s' = \pi$

Lema 2

- Se *pqr* é um triângulo de uma triangulação de Delaunay, de *conv*(*P*), então o ângulo *prq* é <u>máximo</u> dentre todos os ângulos da forma *psq*, onde s pertence a *P* e está no mesmo semi-plano de *r* em relação a *pq*.
  - Se $\angle psq > \angle prq$ então *s* está no interior do círculo definido por *p*, *q* e *r*. Logo, *pqr* não pode ser um triângulo de Delaunay.

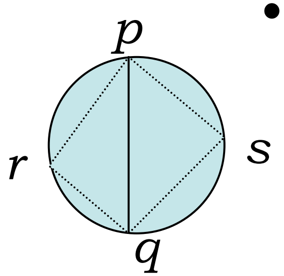


Prova do Teorema de Delaunay (c)

- Vamos mostrar primeiro que as arestas de $Del(P)$ só se intersectam em sítios para em seguida mostrar que a união dos R_k é igual a $conv(P)$.
- Suponha que pq e rs são duas arestas de $Del(P)$ que se intersectam em o e $V(p)$ e $V(q)$ os polígonos de Voronoi correspondentes a p e q.
- $V(p)$ e $V(q)$ possuem uma aresta comum e por isso há um círculo passando por p e q com r e s exteriores a ele.
  - Pelo lema, no quadrilátero $prqs$, temos $r + s < \pi$. Por conseguinte, não há círculo passando por r e s que exclua p e q.
  - Logo, $V(r)$ e $V(s)$ não possuem uma aresta comum, ou seja, $rs \notin Del(P)$.

Prova do Teorema de Delaunay (c)

- As arestas de cada T_k são lados de um polígono inscrito em um círculo. Logo, determinam um polígono convexo.
- O círculo associado a T_k não contém nenhum outro sítio, por definição.
- Vimos que as arestas de $Del(P)$ só se intersectam em sítios.
  - Logo, se os R_k forem triângulos os seus interiores são disjuntos.
  - Se algum R_k for um polígono com mais de 3 lados, a única outra possibilidade seria se houvesse uma aresta de Delaunay pq definida por vértices não consecutivos de T_k.
    - Isso não ocorre porque no quadrilátero $pqrs$, $p + q = \pi$. Assim, não pode haver um círculo passando por p e q com r e s exteriores. Logo $pq \notin Del(P)$.

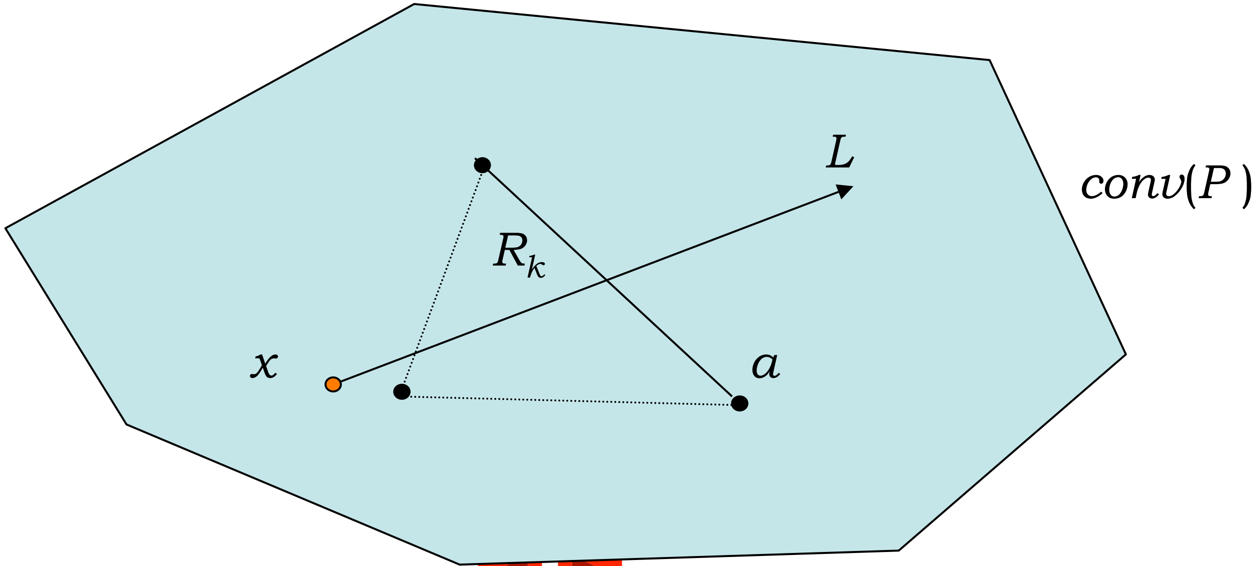


Prova do Teorema de Delaunay (c)

- Segmentos $x_i x_j$ da fronteira de $conv(P)$ fazem parte de $Del(P)$.
  - Basta tomar como centro qualquer ponto da mediatriz suficientemente distante, já que não há sítios fora de $conv(P)$.
- Qualquer aresta de $Del(P)$ delimita uma ou duas regiões (apenas uma, no caso de estar na fronteira de $conv(P)$).
- R_k são regiões convexas contidas em $conv(P)$. Logo, a união dos R_k está contida em $conv(P)$.
- Seja x um ponto arbitrário de $conv(P)$. Se x estiver sobre alguma aresta ou vértice de $Del(P)$, então x pertence a algum R_k.
  - Senão, considere uma reta L qualquer com origem em x e que não passe por nenhum outro sítio.

Prova do Teorema de Delaunay (c)

- Seja a a primeira aresta intersectada por L, e R_k a região adjacente a a no mesmo semi-plano de x.
  - Pelo Lema 2, esta região existe, já que deve haver pelo menos um outro sítio no mesmo semi-plano de x, pois x está em $conv(P)$.
- Se $x \notin R_k$, então certamente L intersectaria uma outra aresta de R_k e a não teria sido a primeira interseção. Logo, $x \in R_k$.
- Assim, as regiões R_k realmente cobrem $conv(P)$ e portanto sua união é igual a $conv(P)$.

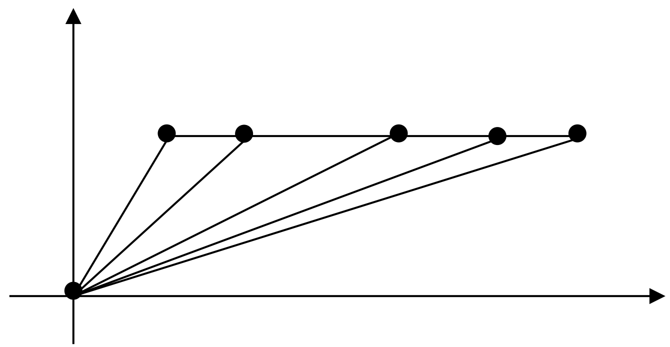


Cotas

- O diagrama de Voronoi de um conjunto P com n sítios tem no máximo $2n$-5 vértices e $3n$-6 arestas.
  - O maior número de arestas ocorre quando todas as faces de $Del(P)$ são triangulares e $conv(P)$ também é um triângulo (substitua v por 3).
  - Diagrama de Voronoi e triangulação de Delaunay são redutíveis um ao outro em tempo linear.
  - Embora o diagrama de Delaunay não produza sempre uma triangulação, caso os pontos não estejam em posição geral, cada região convexa R_k com m vértices pode ser triangulada por m-3 diagonais.

Cota Inferior

- O diagrama de Voronoi fornece uma triangulação de *conv*(P) em tempo linear.
- O problema de ordenação pode ser reduzido ao problema de triangulação.
  - Dados $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ crie $P = \{ (0,0), p_1, p_2, \ldots, p_n \}$ onde $p_i = (x_i, 1)$.
  - Logo, Voronoi e Delaunay $\in \Omega(n \log n)$.



Qualidade dos Triângulos

- Seja T uma triangulação de um conjunto de pontos S, e seja a seqüência angular $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3t})$ a lista dos ângulos dos triângulos ordenada em ordem crescente (t é o número de triângulos).
  - t é constante para cada S.
  - $T > T'$ se a seqüência angular de T for maior <u>lexicograficamente</u> do que a de T'.
  - A triangulação de Delaunay $T = Del(P)$ é **maximal** em relação à forma angular: $T \geq T'$ para qualquer outra triangulação T' de P (Edelsbrunner – 1987).
    - Maximiza o menor ângulo.

Algoritmos para Triangulação de Delaunay

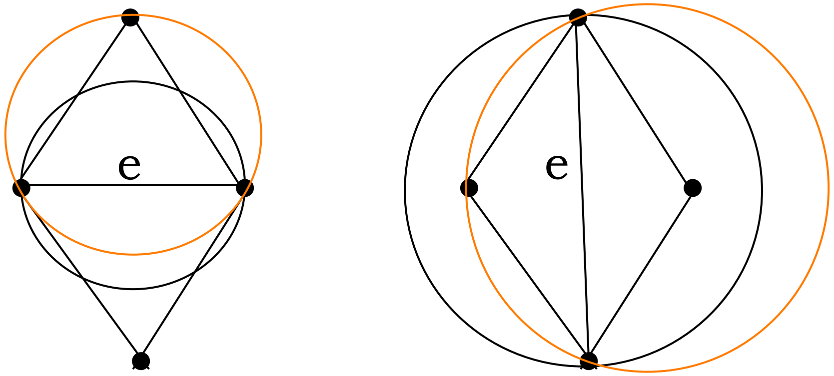
- O lema 2 pode ser usado para construir uma triangulação de Delaunay em O(n^2).
- Um algoritmo complexo para encontrar o diagrama de Voronoi em O(n log n) foi detalhado por Shamos e Hoey (1975).
  - Usa dividir para conquistar.
  - Este artigo introduziu o diagrama de Voronoi à comunidade de computação.
  - O algoritmo é muito difícil de implementar, mas pode ser feito utilizando-se uma estrutura de dados adequada, como a Quadedge de Guibas e Stolfi (1985).
- Algoritmo incremental costuma ser muito usado por ser mais fácil de implementar, mas também é O(n^2).
  - Se for randomizado o tempo médio é O(n log n).

Algoritmo 1

- Encontre uma aresta de Delaunay em $conv(P)$ como na varredura de Graham.
- Ache o triângulo adjacente pelo lema 2 e coloque-o em uma fila F e numa estrutura tipo *WE (winged edge)*.
- Enquanto $F \neq \varnothing$, faça:
  - Remova um triângulo T de F.
  - Para cada aresta livre de T
    - Determine a face adjacente T' pelo lema 2
    - Insira T' em F
    - Insira T' em *WE* marcando as suas arestas livres

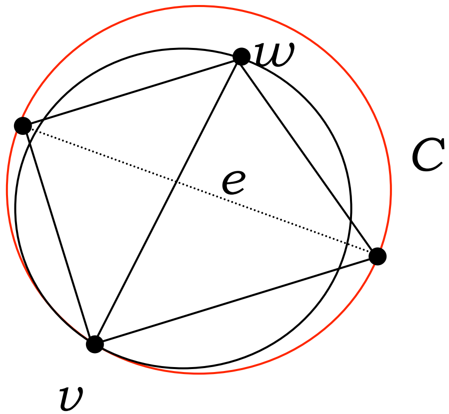
Algoritmo 2

- Lawson criou em 1972 um algoritmo bastante elegante baseado em flip de arestas.
- O algoritmo começa com uma triangulação arbitrária e procura por arestas que não sejam localmente Delaunay.
  - Para verificar se uma aresta *e* é localmente Delaunay, olha-se apenas para os dois triângulos incidentes em *e*.
  - Há apenas duas maneiras de triangular o fecho convexo de 4 pontos.



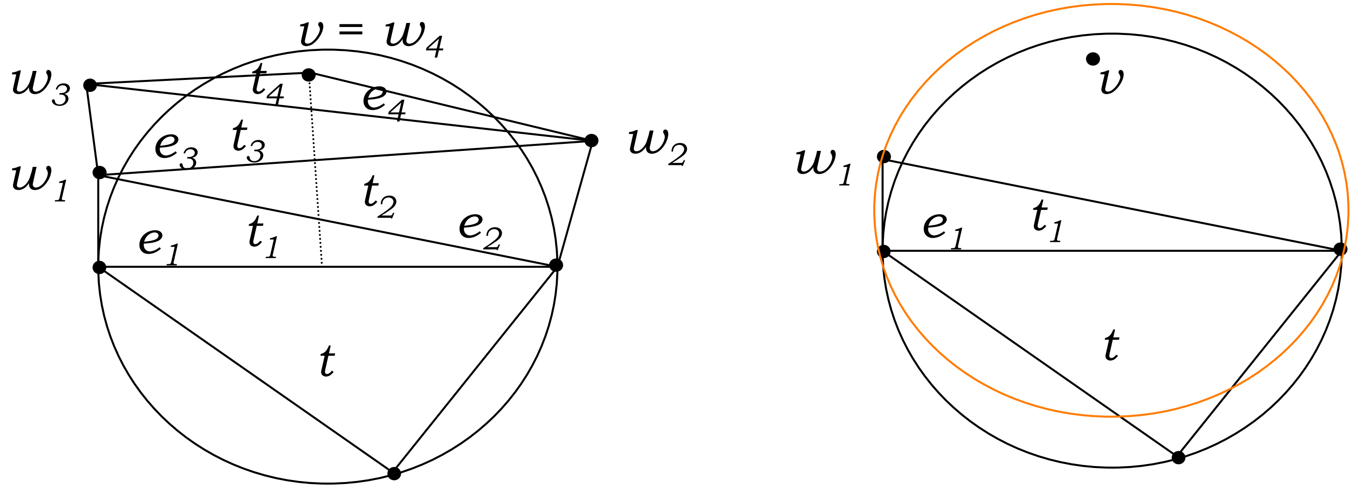
Lema 3

- Seja e uma aresta de uma triangulação de P. Então e é localmente Delaunay ou e pode ser flipado e a nova aresta é localmente Delaunay.
  - Sejam v e w os vértices opostos a e.
  - Se w está dentro de C, o quadrilátero é estritamente convexo e e pode ser flipado.
  - O círculo tangente a v passando por w não inclui os vértices de e. Logo, vw é localmente Delaunay.



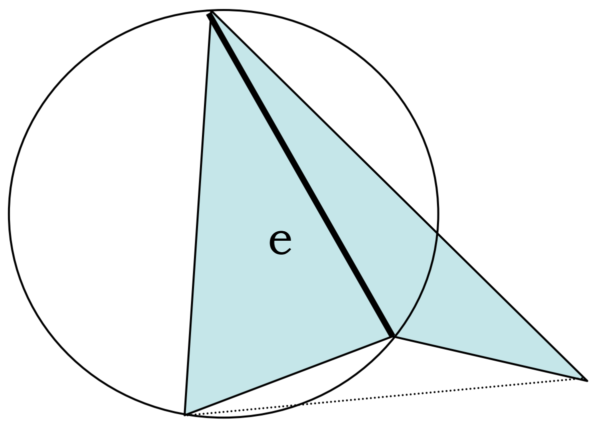
Lema 4

- Seja T uma triangulação cujas arestas são localmente Delaunay. Então toda aresta de T é globalmente Delaunay.
  - Suponha todas as arestas localmente Delaunay, mas alguma aresta não Delaunay. Logo, algum triângulo t não é Delaunay. Seja v o vértice dentro de $C(t)$.
  - Considere o segmento que liga o ponto médio de e_1 a v e a seqüência de aresta e_i intersectadas.
  - e_1 é localmente Delaunay. Logo, w_1 está fora de $C(t)$.
  - Cada $C(t_i)$ inclui v, mas $w_m = v$ é um vértice de t_m. Isso é um absurdo, pois v deveria estar dentro de $C(t_m)$.



Não Há Ciclos Infinitos

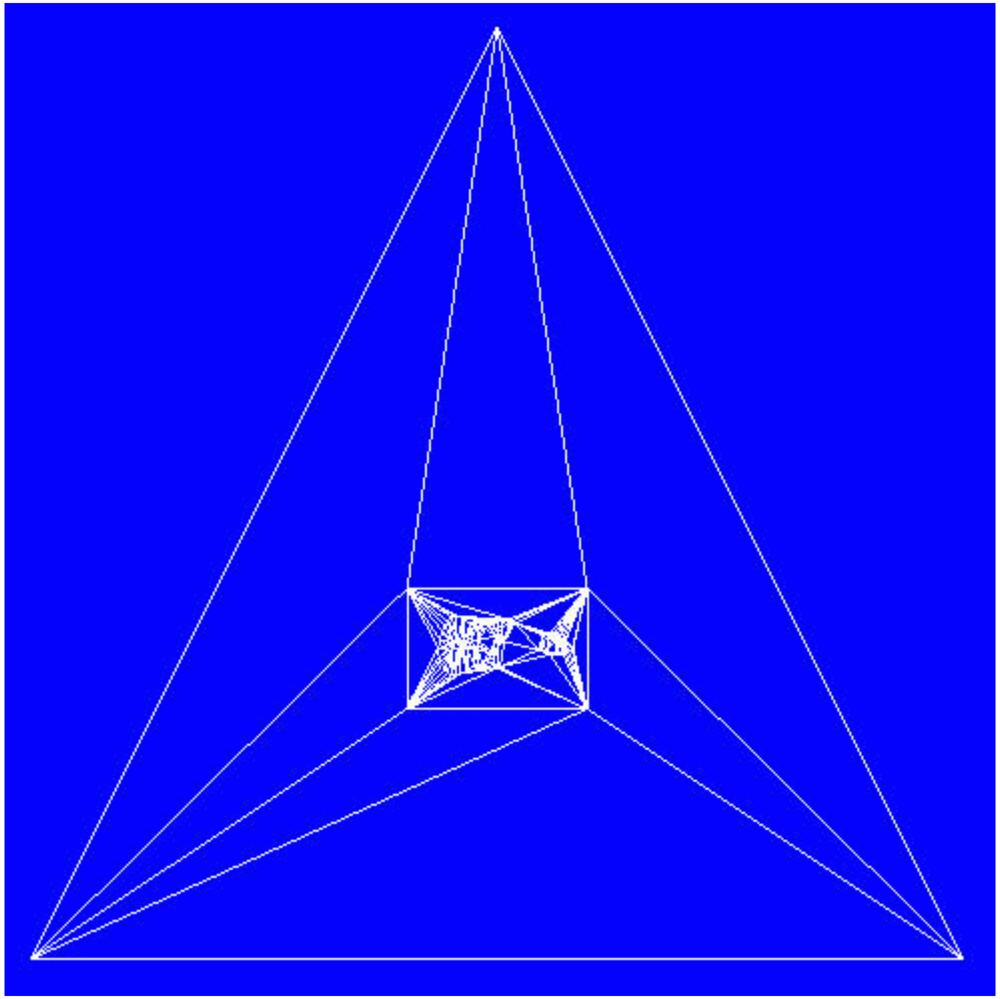
- Dada uma triangulação com n vértices, o algoritmo de flip termina após $O(n^2)$ flips de arestas produzindo uma triangulação cujas arestas são globalmente Delaunay.
  - Note-se que quadriláteros côncavos não podem ser flipados. No R^2 isto não é problema porque se o quarto vértice estiver dentro do círculo o quadrilátero será convexo.



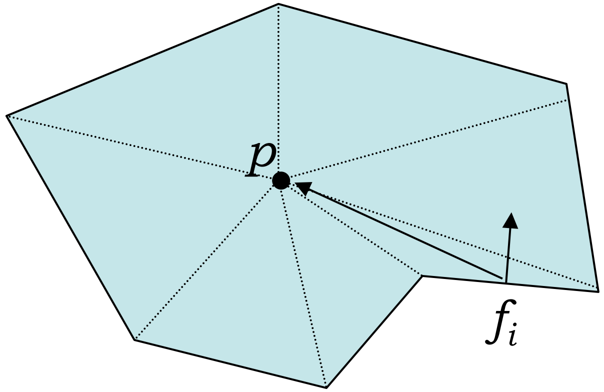
Algoritmo 3

- Watson e Boyer criaram em 1981 os primeiros algoritmos incrementais.
  - Adiciona-se um ponto por vez na triangulação.
  - Inicialmente existe um único simplexo grande o suficiente para conter todos os pontos de *P*.
  - Quando um novo ponto é inserido, são eliminados todos os simplexos que não estão mais vazios, criando-se uma cavidade poliedral.
  - A **cavidade** é então triangulada ligando-se o novo ponto a todos os vértices na fronteira da cavidade.
  - Para evitarem-se inconsistências estruturais, a cavidade deve ser **estrelada**.
    - $n_i\,(p-x_i) > 0.0$, onde n_i é a normal da i-ésima face da cavidade, p é o novo ponto e x_i é um ponto qualquer na i-ésima face.
    - No caso do teste falhar elimina-se uma face e um simplexo, criando-se uma cavidade maior.

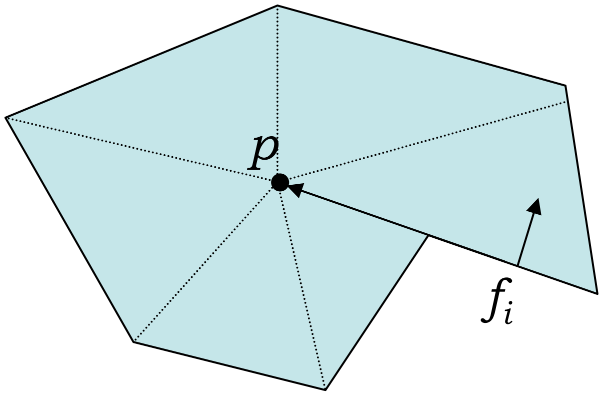
Simplexo Envolvente



Polígono estrelado



Polígono NÃO estrelado

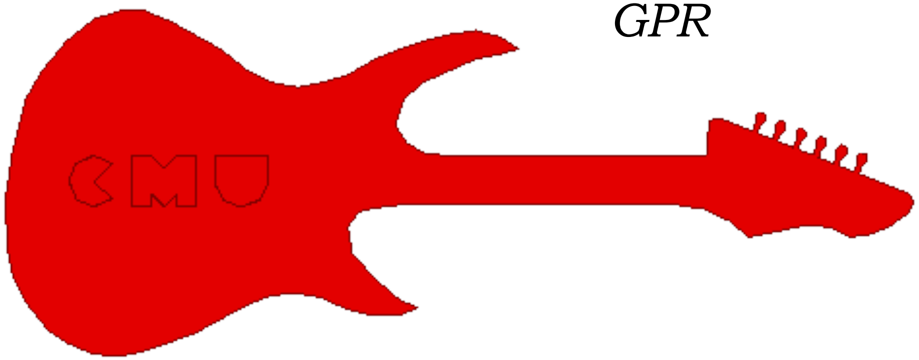


Triangulação de Delaunay Restrita

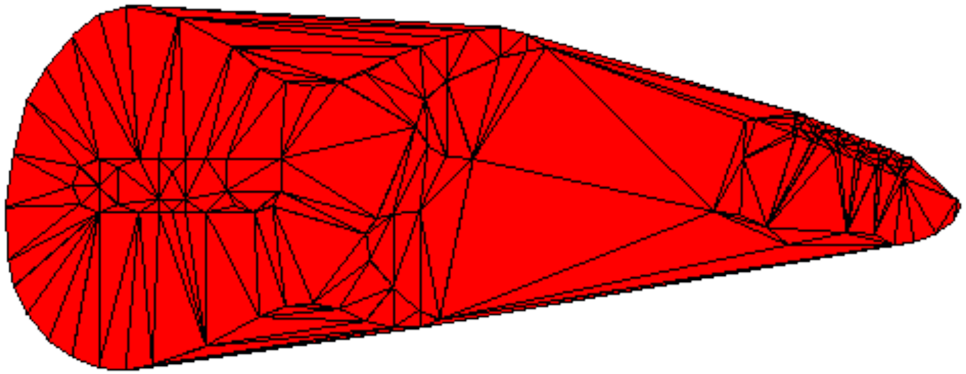
- Muitas vezes é necessário triangular um grafo planar retilíneo (*GPR*).
  - Basicamente, arestas só se intersectam em vértices, que fazem parte do grafo.
- A triangulação de Delaunay é <u>cega</u> para as arestas de um *GPR*, que podem aparecer na triangulação final ou não.
- Triangulação de Delaunay restrita (*TDR*) é similar a triangulação de Delaunay, mas todos os segmentos do *GPR* devem aparecer na triangulação final.

Exemplo

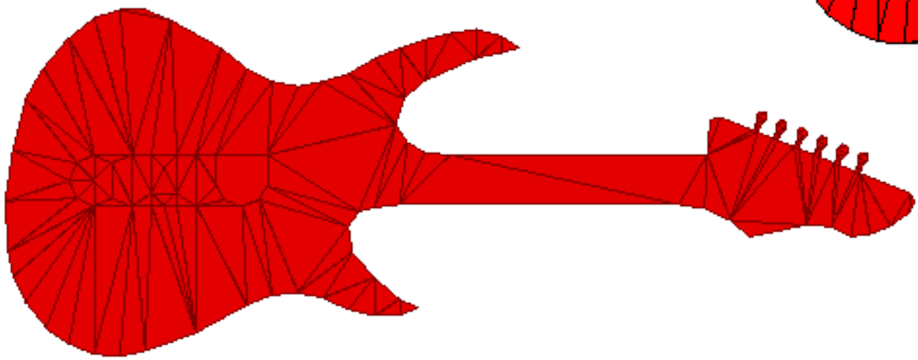
GPR



Triangulação de Delaunay

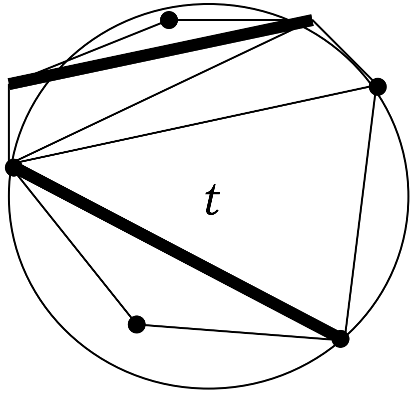


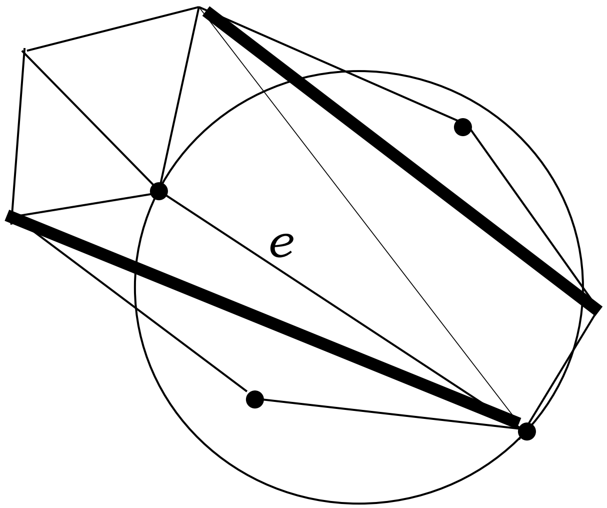
TDR



Restrições

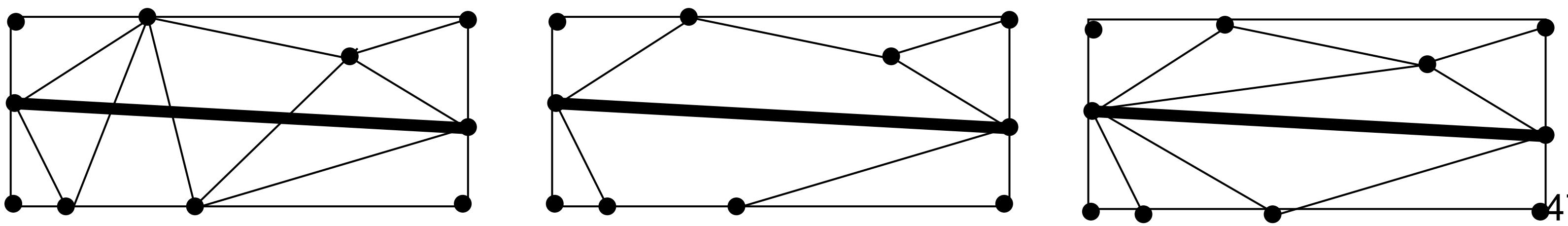
- Uma aresta ou triângulo é dito restrito se:
  - Seu interior não intersecta um segmento de entrada.
  - Seu círculo não contém nenhum vértice visível do interior da aresta ou triângulo.
  - Assume-se que segmentos de entrada do *GPR* bloqueiam a visibilidade.
  - *TDR* contém todos os segmentos de entrada e arestas restritas.





Algoritmo para TDR

- Construa uma triangulação qualquer dos vértices do *GPR*.
- Verifique que segmentos não estão presentes e insira-os eliminando primeiro todas as arestas intersectadas.
  - Triangule os dois sub-polígonos obtidos (por diagonais).
- Use flips para obter a *TDR*. Segmentos de entrada <u>não devem</u> ser flipados nunca.



Inserção de Pontos

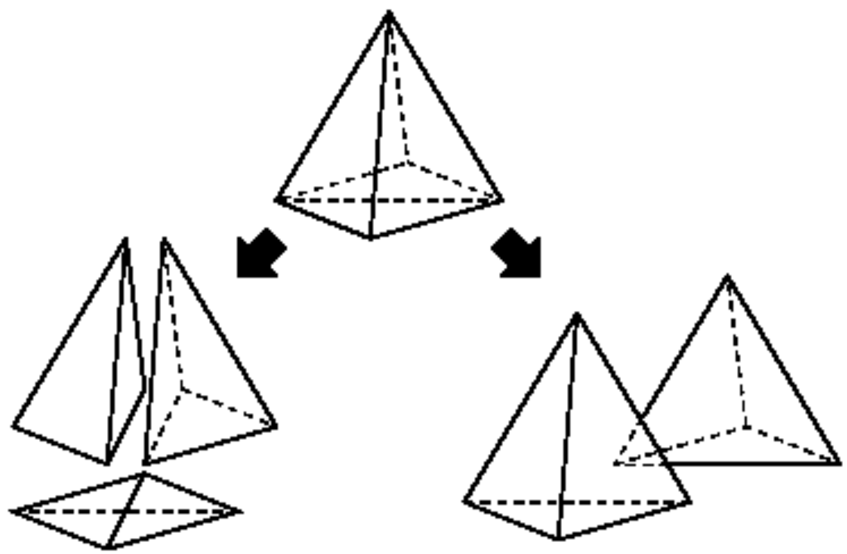
- Se uma triangulação <u>estritamente</u> Delaunay for necessária, pode-se forçar o aparecimento de segmentos ausentes pela inserção recursiva de novos vértices nos pontos médios destes segmentos.
  - Como vizinhos mais próximos definem arestas de Delaunay, eventualmente um segmento ausente será recuperado como a <u>união</u> de segmentos da triangulação.

Triangulação de Delaunay 3D

- Os conceitos vistos até aqui continuam válidos, porém com algumas ressalvas:
  - Simplexos são **tetraedros**.
  - Um poliedro arbitrário pode <u>não ser triangulável</u> sem a inserção de pontos.
  - O teste da esfera vazia permite o aparecimento de tetraedros <u>degenerados</u> (*slivers*).
  - Não maximiza o ângulo (diédrico) mínimo.
  - Flips podem ser usados, já que há apenas duas maneiras de triangular o fecho convexo de 5 pontos: com dois ou três tetraedros.
    - A convexidade deve ser explicitamente testada antes de um flip.
  - No caso de uma triangulação restrita, não só as arestas mas também as faces devem ser recuperadas.

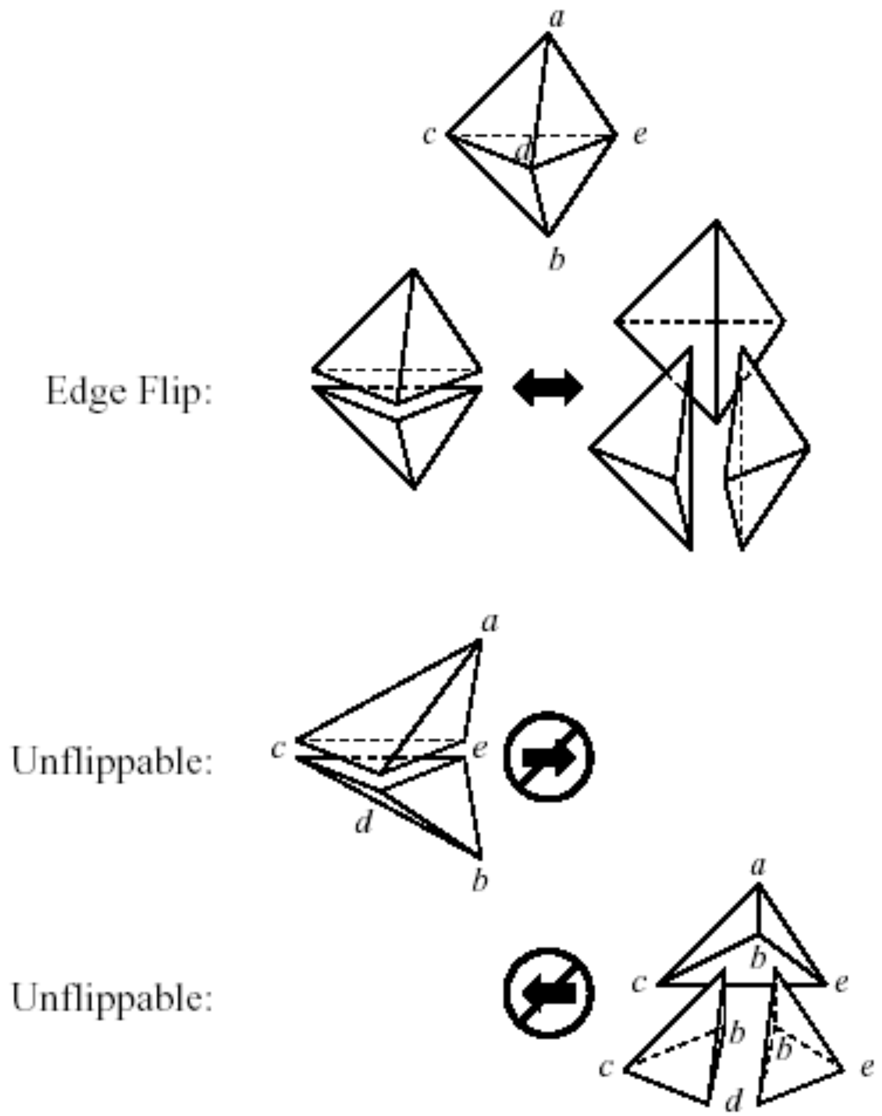
Exemplo de *Sliver*

- Este hexaedro pode ser triangulado de duas maneiras:
  - A triangulação de Delaunay à esquerda produz um *sliver*.
  - A triangulação da direita não é Delaunay, mas produz dois tetraedros com boa forma.



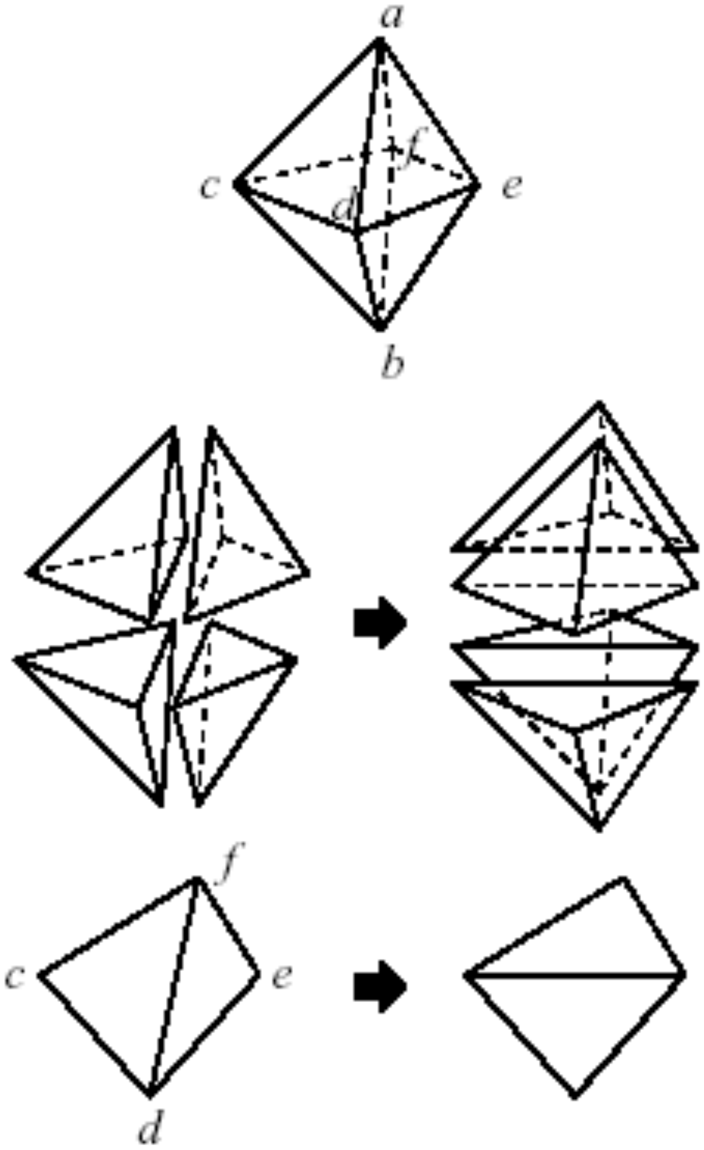
Flips 3D

- Flips 2x3 e 3x2.
  - Os dois tetraedros da esquerda podem ser transformados nos três tetraedros da direita e vice-versa.
- Convexidade deve ser testada.
  - Segmento *ab* deve passar pelo interior do triângulo *cde*.



Flips 3D

- Flip 4x4.
  - Vértices *c*, *d*, *e*, e *f* são co-planares.
- A transformação é análoga ao flip de aresta 2D mostrado no final.

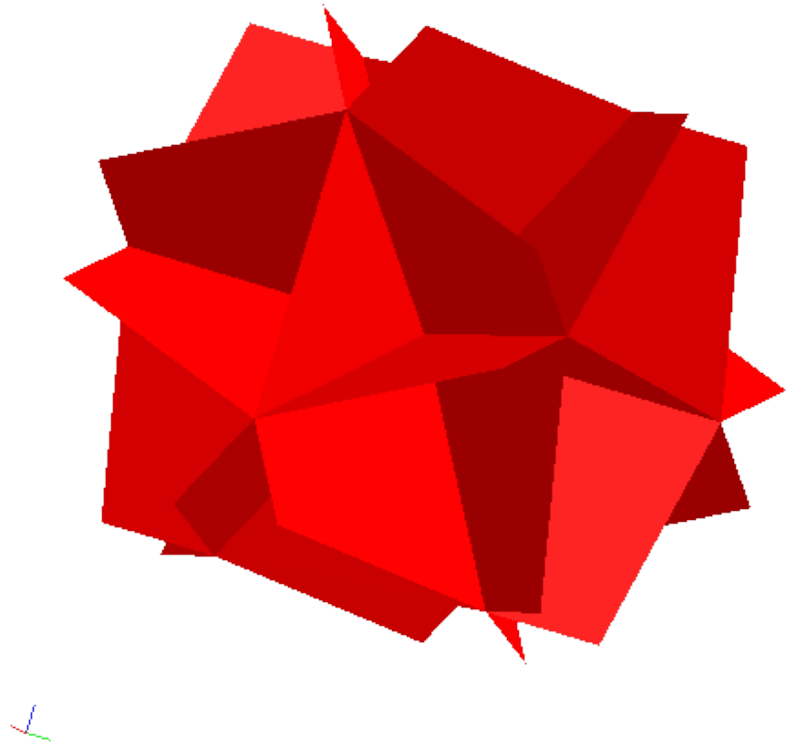


Recuperação de Arestas e Faces

- A recuperação de arestas pode ser feita pela técnica de inserir pontos recursivamente no ponto médio de uma aresta ausente até que ela apareça como união de arestas da triangulação.
- A recuperação de faces normalmente é feita intersectando-se a face ausente contra a triangulação e re-triangulando os tetraedros afetados.
- Flips podem ser usados, mas nem sempre recuperam uma face completamente.

Voronoi 3D

- Os conceitos vistos são todos válidos. Porém agora tem-se poliedros (convexos) de Voronoi.

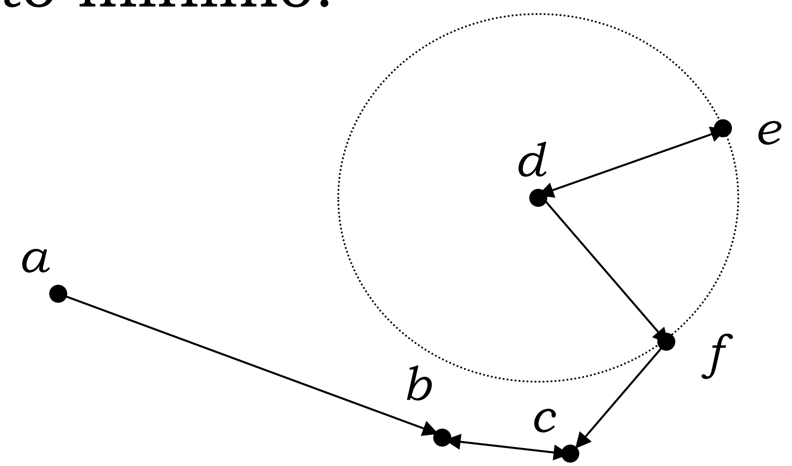


Aplicações

- Vizinhos mais próximos.
  - Qual o vizinho mais próximo de um dado ponto dentre aqueles de um conjunto P?
  - Ache <u>todos</u> os vizinhos mais próximos de cada ponto de um conjunto P dado.
- A relação de vizinho mais próximo é dada por: b é o vizinho mais próximo de a ($a \rightarrow b$) $\Leftrightarrow |a - b| \leq \min_{c \neq a} |a - c|$, $c \in P$.
  - Note que essa relação não é simétrica: $a \rightarrow b$ não significa que $b \rightarrow a$

Solução

- Consultas de vizinho mais próximo.
  - Construa o diagrama de Voronoi em O(n log n).
  - Para um ponto $q \in R^2$ a ser testado, ache os polígonos de Voronoi que o contêm em O(log n).
  - Os sítios desses polígonos são os vizinhos mais próximos.
  - Se $q \in P$ basta percorrer todas as arestas de $Del(P)$ incidentes em q e retornar aquela de comprimento mínimo.



Grafo dos Vizinhos mais Próximos

- Seja o *GVP*, aquele que associa um nó a cada ponto de P e um arco entre dois pontos se um ponto for o vizinho mais próximo do outro.
  - É um grafo não dirigido.
  - Mas porque a relação não é simétrica, pode ser definido como um grafo dirigido.
  - $GVP \subseteq Del(P)$.
  - Algoritmo força bruta é $O(n^2)$, mas o item anterior permite procurar apenas $O(n)$ arestas de $Del(P)$ e portanto pode ser feito em $O(n \log n)$.

Árvore Geradora Mínima

- A *AGM* de um conjunto de pontos é a árvore de comprimento mínimo que gera todos os pontos.
  - Consideramos aqui a norma Euclidiana.
  - Intuitivamente essa árvore pode ser construída incrementalmente pela adição das arestas mais curtas, ainda não usadas, e que não gerem ciclos.
  - Esse é o algoritmo de Kruskal (1956).
  - $AGM \subseteq Del(P)$.
  - A *AGM* no plano pode ter no máximo $\binom{n}{2}$ arestas. Logo, a complexidade da ordenação é $O(n^2 \log n)$, se for usado o grafo completo.
  - Construa $Del(P)$ em $O(n \log n)$ e ordene apenas $O(n)$ arestas em $O(n \log n)$. Assim, a complexidade total no plano é $O(n \log n)$.

Problema do Caixeiro Viajante

- Achar o caminho mínimo fechado que passa por todos os pontos (cidades) que o caixeiro viajante deve visitar.
  - O problema é NP-completo (Garey & Johnson 1979), o que significa que não há solução polinomial conhecida.
  - Heurística: ache a *AGM* dos pontos e siga-a para frente e para trás, de modo que o caminho percorrido seja o dobro do comprimento da *AGM*.