Metoda elementów skończonych
Odkształcenia sprężyste

Kamil Rudny
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Styczeń, 2024

Wyprowadzenie sformułowania słabego

Założenia:

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0$$

$$u(2) = 3$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 6 & \text{dla } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$u : [0,2] \ni x \to u(x) \in R$$

$$V = \{f \in H^1 : f(2) = 0\}$$

$$w, v \in V$$

Wyprowadzenie sformułowania słabego zaczynam od przemnożenia równania przez funkcję testującą v i scałkowania po dziedzinie:

$$-\int_0^2 (Eu')' \, v dx = 0$$

Całkuję przez części:

$$-[Eu'v]_0^2 + \int_0^2 (Eu'v')\, dx = -E(2)u'(2)v(2) + E(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 (Eu'v')\, dx$$

Wiemy, że na prawym brzegu mamy warunek Dirichleta, więc $v(2) = 0$:

$$E(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 (Eu'v')\,dx$$

Następnie korzystam z warunku Cauchego:

$$u'(0) = 10 - u(0)$$

$$E(0)(10 - u(0))v(0) + \int_0^2 (Eu'v')\,dx$$

Podstawiam funkcję $E(x)$:

$$20v(0) - 2u(0)v(0) + \int_0^1 2u'v'dx + \int_1^2 6u'v'dx$$

Grupuje równania:

$$-2u(0)v(0) + \int_0^1 2u'v'dx + \int_1^2 6u'v'dx = -20v(0)$$

$$B(u, v) = L(v)$$

Żeby funkcja spełniała warunki dirichleta podstawiam $u = \bar{u} + w$:

$$-2(\bar{u}(0) + w(0))v(0) + \int_0^1 2(\bar{u}' + w)v'dx + \int_1^2 6(\bar{u}' + w)v'dx = -20v(0)$$

Grupuje równania:

$$-2\bar{u}(0)v(0) - 2w(0)v(0) + \int_0^1 2\bar{u}'v'dx + \int_0^1 2w'v'dx + \int_1^2 6\bar{u}'v'dx + \int_1^2 6w'v'dx = -20v(0)$$

Najprosztszą do znalezienia funkcją $\bar{u}$ która spełnia założenia jest:

$$\bar{u}(x) = 3$$

$$\bar{u}'(x) = 0$$

$$\bar{u}(0) = 3$$

To upraszcza równanie do postaci:

$$-2w(0)v(0) + \int_0^1 2w'v'dx + \int_1^2 6w'v'dx = -14v(0)$$

$$B(w, v) = L(v)$$

Dyskretyzacja problemu

Przestrzeń w której będę poszukiwał rozwiązania równania zdefiniowałem następująco:

$$V_h =< e_0, e_1, ..., e_{n-1} >$$

Gdzie N jest liczbą podziałów daną na wejściu algorytmu.
Funkcje testowe tworzące bazę V_h definiuję jako:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & \text{dla } x \in [h(i-1), hi] \\ -\frac{x}{h} + i + 1 & \text{dla } x \in [hi, h(i+1)] \end{cases}$$

gdzie $h = \frac{2}{N}$ oznacza długość przedziału.

Postać macierzowa

Równanie liniowe, do którego sprowadza sie odnalezienie w, możemy zapisać w postaci:

$$w_0 B(e_{n-1}, e_0) + w_1 B(e_{n-1}, e_0) + ...w_{n-1} B(e_{n-1}, e_0) = L(e_0)$$

$$w_0 B(e_{n-1}, e_1) + w_1 B(e_{n-1}, e_1) + ...w_{n-1} B(e_{n-1}, e_1) = L(e_1)$$

$$\vdots$$

$$w_0 B(e_{n-1}, e_{1n-1}) + w_1 B(e_{n-1}, e_{n-1}) + ...w_{n-1} B(e_{n-1}, e_{n-1}) = L(e_{n-1})$$

Co możemy zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \dots & B(e_{n-1}, e_0) \\ B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & \dots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \\ \vdots & & & \\ B(e_0, e_{n-1}) & B(e_1, e_{n-1}) & \dots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Otrzymanie rozwiązania

Żeby otrzymać wynikową funkcje u musimy pamiętać o przesunięciu $u = \bar{u} + w$, więc do każdego punktu z w dodajemy $\bar{u} = 3$ i otrzymamy wartości funkcji u.