

# Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales

## Tema 5: Rendezvous de vehículos espaciales. El problema de los tres cuerpos.

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

7 de enero de 2015



# Introducción I

- En el contexto de los vehículos espaciales, se denomina “rendezvous” al encuentro en el espacio de dos vehículos.
- El encuentro debe ser controlado:
  - Proximidad en posición.
  - Proximidad en velocidad.
- Uno de los vehículos es el “**vehículo objetivo**” o “**blanco**”. Se halla en una órbita conocida. Tiene un papel pasivo.
- El otro vehículo es el “**vehículo interceptor**” o “**perseguidor**”. Parte de una órbita inicial y juega un papel activo (realiza maniobras).
- Rendezvous e intercepción:
  - Rendezvous: encuentro es controlado.
  - Intercepción: Sólo se busca la proximidad en posición o incluso el impacto.
- Ambos problemas se estudian mediante técnicas similares.

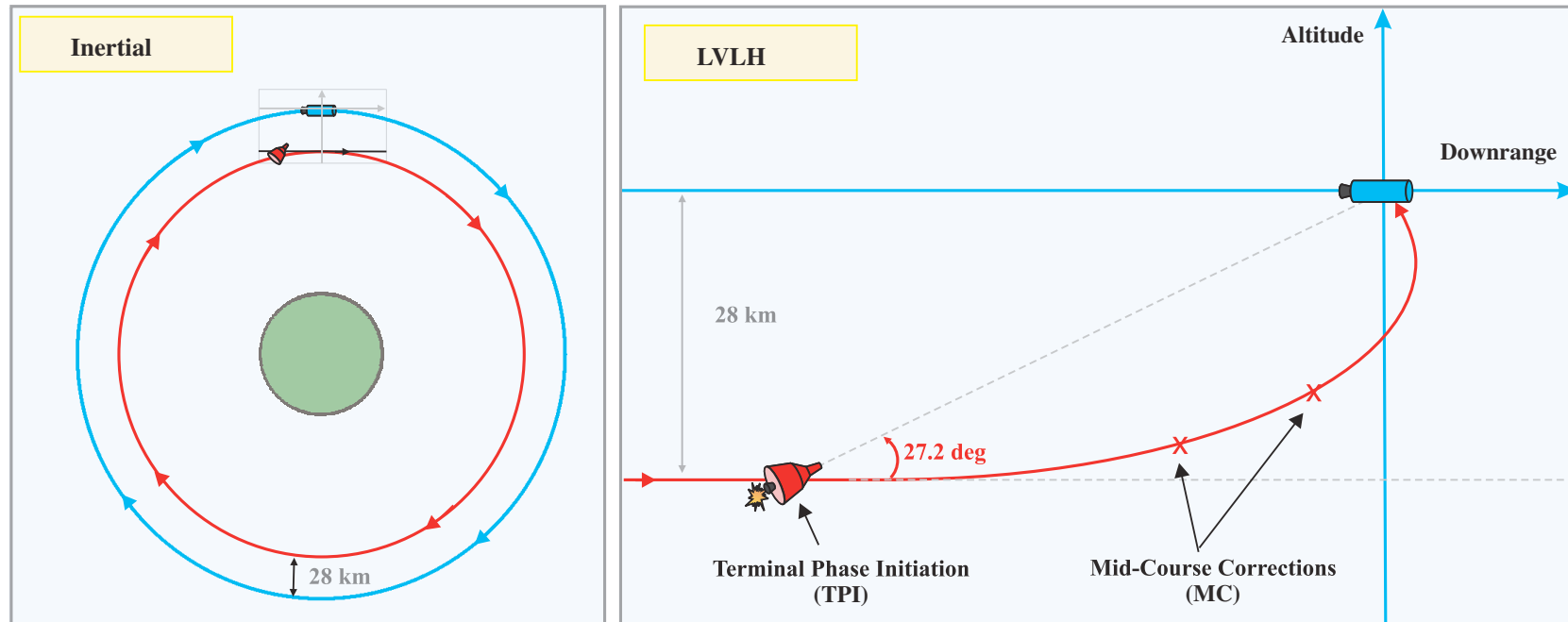


## Introducción II

- Típicamente en órbitas geocéntricas (vehículos orbitando en torno a la Tierra).
- También aplicable a otros planetas, un satélite natural o, incluso, a órbitas en el campo gravitatorio del Sistema Solar.
- Utilidad:
  - Abastecimiento y mantenimiento de estaciones espaciales.
  - Reparación de satélites en órbita.
  - Recuperación de satélites diseñados para ser recogidos en órbita.
  - Operaciones de salvamento.
  - Operaciones militares.
  - Misiones tripuladas lunares e interplanetarias.



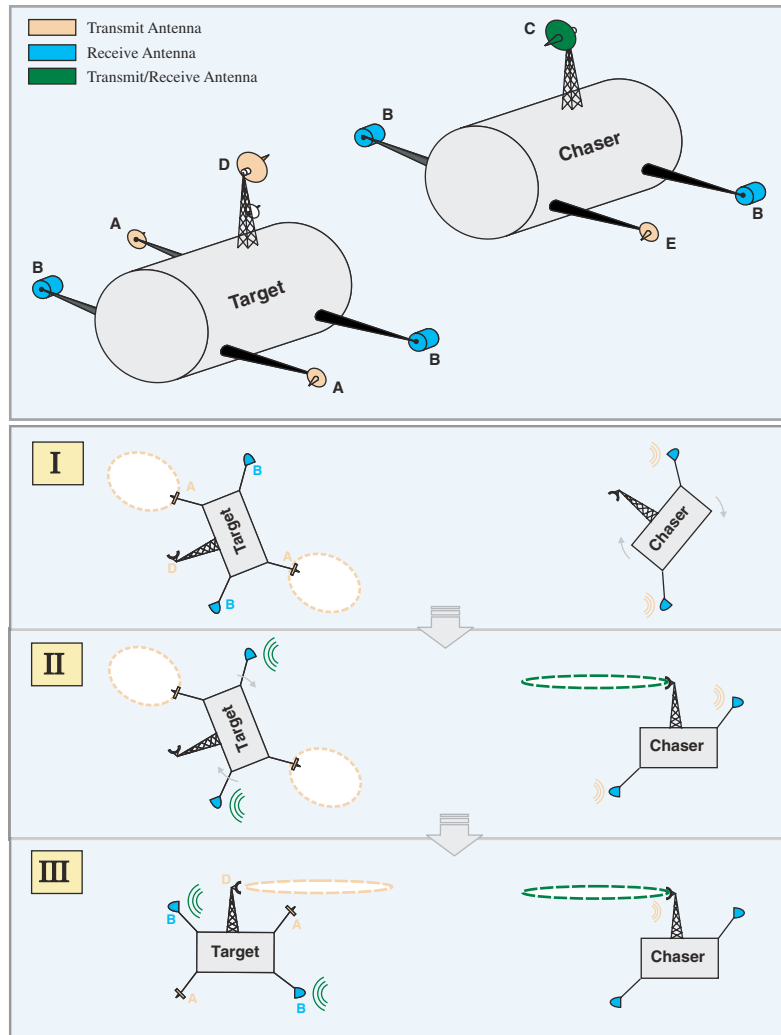
## Antecedentes: Misión Gemini



- Las misiones Gemini realizaron tests de rendezvous en 1965.
- El rendezvous se efectuó con control manual llevado a cabo por astronautas a bordo de los vehículos.
- El 15 de Diciembre de 1965 fue el primer rendezvous orbital de la historia (entre el Gemini VI y el Gemini VII).



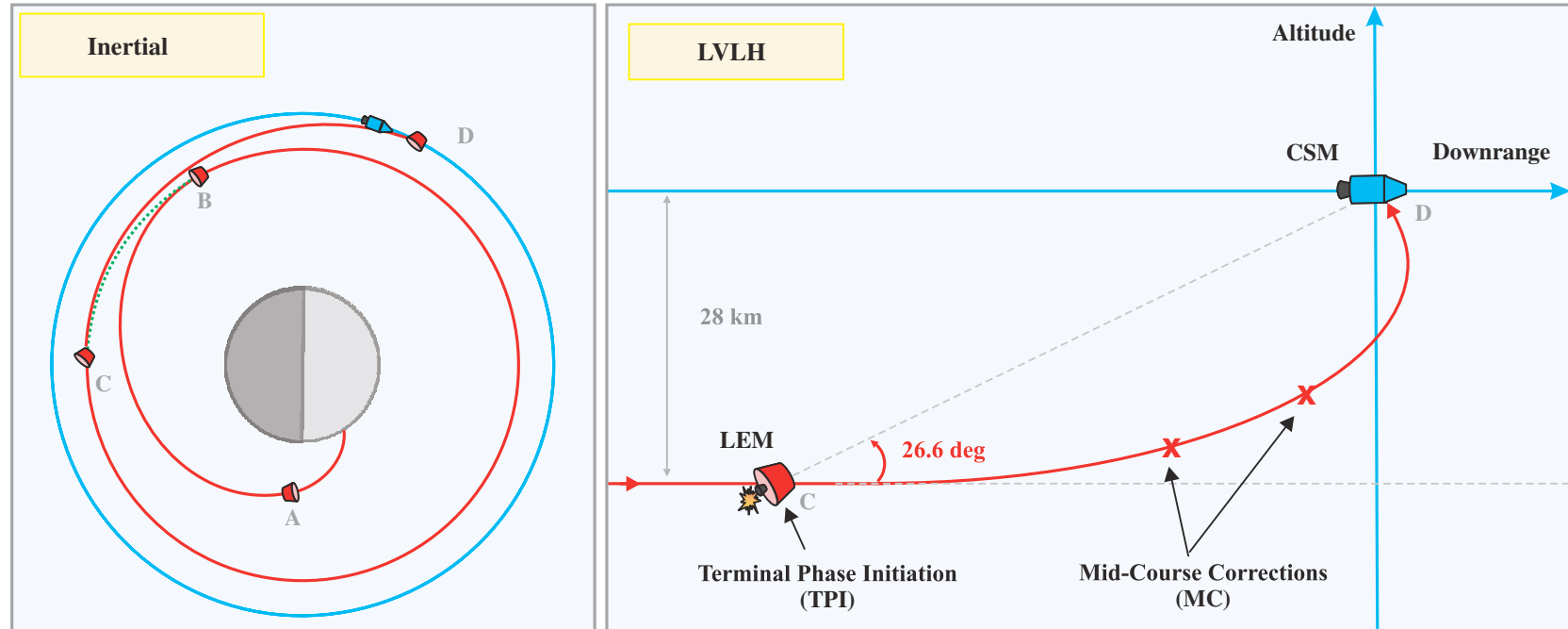
## Antecedentes: Soyuz



- En 1967 se produjo el primer rendezvous automático entre dos vehículos espaciales no tripulados (dos Soyuz).
- Mucho más complejo que el sistema americano.
- Se basaba en la comunicación entre los sistemas de navegación de los vehículos (llamados Igla—aguja), que al poseer varias antenas permitía obtener posición, velocidad y actitud relativas.
- Requiere cooperación del blanco.



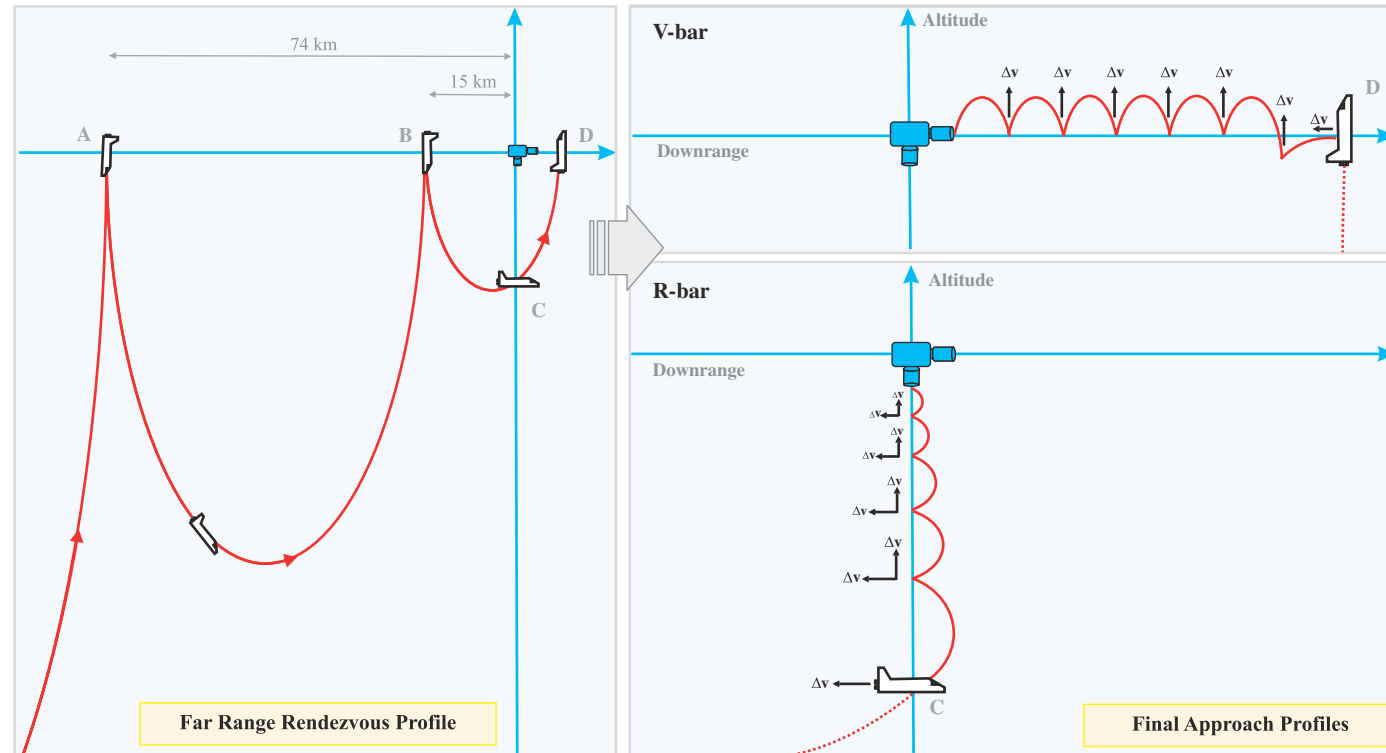
## Antecedentes: Apollo



- Para el programa espacial americano, el Apollo había sido la motivación fundamental para obtener capacidades de rendezvous.
- Uno de los puntos críticos en la misión a la luna era el rendezvous entre el Módulo Lunar y el Módulo de Comando.



## Sistemas modernos: Shuttle



- Se muestra el perfil de un rendezvous entre la estación internacional y el transbordador espacial.
- Aparece una subdivisión en fases según la proximidad.
- La fase final continúa siendo manual.



## Sistemas modernos: Soyuz

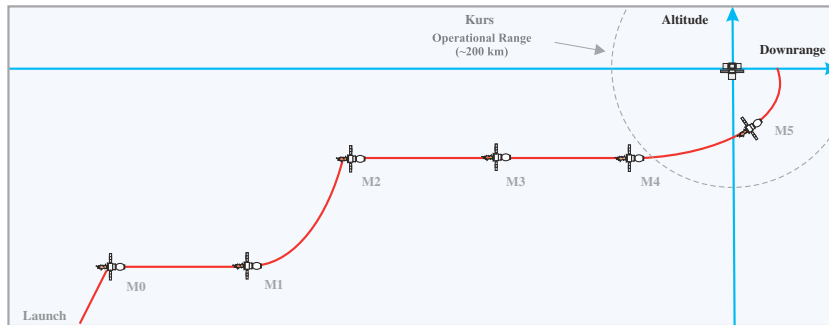
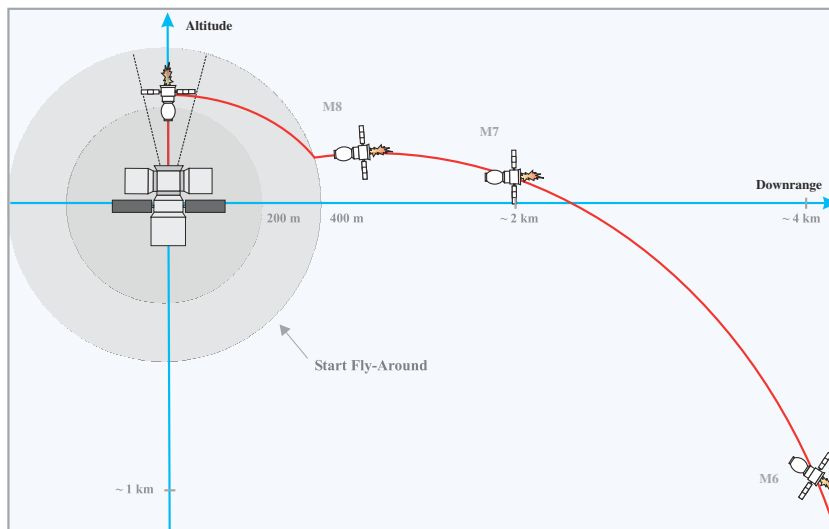


Fig. 6 Phasing and rendezvous sequence for Soyuz/Progress vehicles.

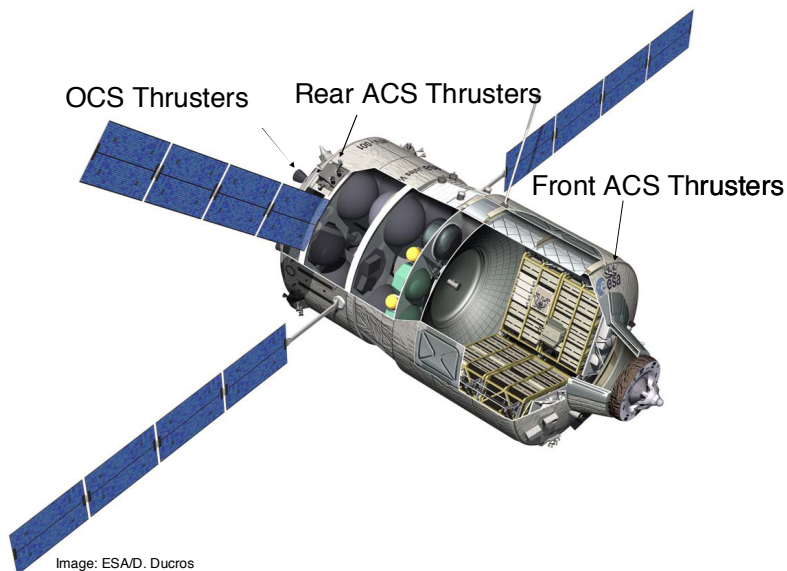
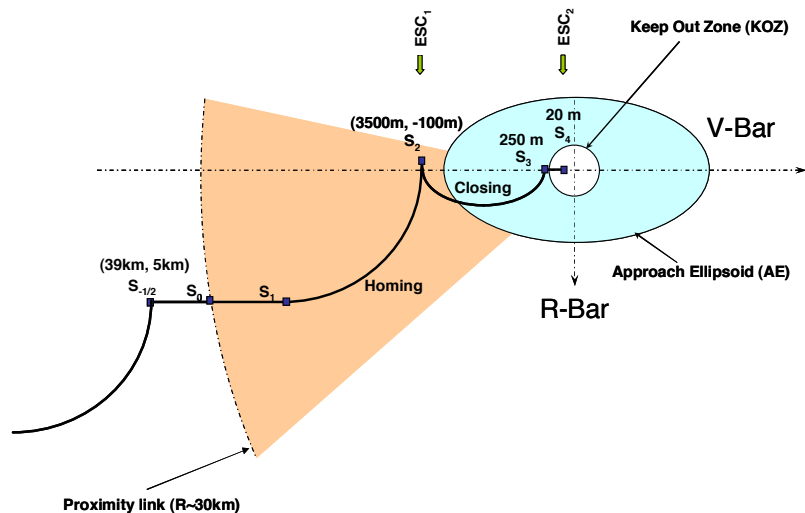


- El sistema Iгла fue reemplazado por el sistema Kurs (curso).
- Permitted el rendezvous entre la Soyuz y la MIR.
- El nuevo sistema también era automático pero mucho más preciso y de mayor alcance que el anterior.
- No requiere cooperación del blanco.
- Problema: pesa 85 kg. y consume 270 W de potencia (en el lado del blanco el sistema tiene similares características).





## Sistemas modernos: ATV



- El ATV (Automated Transfer Vehicle) de la ESA permite reabastecer la ISS y, al final de su vida útil, elevar la altitud de la estación y eliminar los residuos generados.
- Utiliza GPS relativo y star trackers para seguir una maniobra pre-programada que requiere sus diversos sistemas de propulsión.
- Tiene una serie de maniobras adicionales pre-programadas (de escape, de re-entrada, collision-avoidance) para posibles eventualidades.
- Se han lanzado 4 ATVS (Julio Verne, Johannes Kepler, Eduardo Amaldi, Albert Einstein), cada 17 meses.

## Fases del rendezvous

- Modernamente, el problema del encuentro en órbita suele dividirse en cuatro fases:
  - 1 **Fase orbital**: típicamente el vehículo interceptor comienza en Tierra o en una órbita diferente a la del blanco. Es necesario llevar al interceptor a las proximidades del blanco.
  - 2 **Acercamiento inicial** (far range rendezvous): El interceptor comienza cerca del objetivo ( $\sim 10 - 100$  km), y debe acercarse hasta ( $\sim 10 - 1000$  m) metros del objetivo. Se emplea navegación relativa.
  - 3 **Acercamiento final** (close range rendezvous): Se realizan maniobras con el objetivo de acercar el interceptor a muy poca distancia (menos de un metro) del blanco y con velocidades relativas finales del orden de centímetros por segundo.
  - 4 **Acoplamiento** (docking): Se pretende realizar un contacto (captura) lo más suave posible que no dañe estructuralmente a ninguno de los dos vehículos, seguido de un acoplamiento estructural permanente entre los dos vehículos.



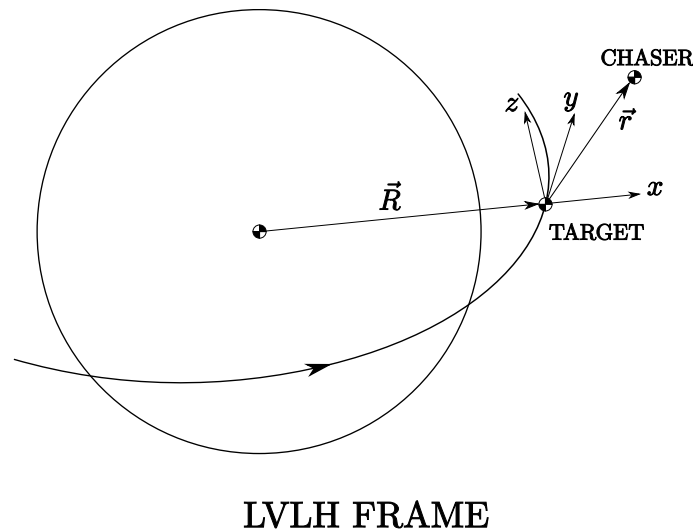
## Acercamiento final

- La proximidad del blanco exige que se extremen las medidas de seguridad.
- Algunos posibles requisitos:
  - Evitar colisiones entre el interceptor y el blanco.
  - El interceptor debe aproximarse por un corredor previamente designado.
  - Si falla alguno de los motores del interceptor, debe garantizarse el rendezvous (si es posible).
  - Si la actitud del blanco cambia con el tiempo (blanco giratorio), el interceptor debe acoplarse con dicho movimiento para garantizar el rendezvous.
  - En caso de fallo total, la posibilidad de impacto debe ser la menor posible.
- Dichas restricciones han de respetarse a la vez que se minimiza el consumo de combustible en los motores del interceptor.
- Esta fase es la considerada en detalle en la asignatura.



## Ecuaciones del movimiento relativo

- Ecuaciones del movimiento relativo en un caso sencillo.
- Hipótesis:
  - El blanco se encuentra en una órbita circular de radio  $R$ .
  - No se consideran perturbaciones orbitales.
  - El interceptor se encuentra “cerca” (¡1 kilómetro) del blanco.



- Trabajamos en el sistema de referencia LVLH (local vertical, local horizontal), centrado en el blanco y definido de forma que la dirección  $x$  tiene la dirección de  $\vec{R}$ , y la dirección de la velocidad, y  $z$  completa el triedro.



## Ecuaciones HCW

- Bajo las hipótesis anteriores, las ecuaciones de Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) describen el movimiento relativo del perseguidor respecto al blanco en el sistema de referencia LVLH.

$$\ddot{x} = 3n^2x + 2n\dot{y},$$

$$\ddot{y} = -2n\dot{x},$$

$$\ddot{z} = -n^2z.$$

- Obsérvese:
  - Los equilibrios son  $x = z = 0$  y cualquier valor constante de  $y$ . Estos valores representan órbitas del perseguidor iguales que las del blanco pero ligeramente desfasadas.
  - La dinámica en  $z$  está desacoplada y es estable (un oscilador no amortiguado) aunque no asintóticamente (las perturbaciones no tenderían a cero, pero tampoco crecerían).



## Estudio de las ecuaciones HCW

- Para ver la estabilidad en  $x - y$ , escribimos el sistema como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

- Los autovalores de la matriz  $A$  son los del sistema. Para encontrar los autovalores se puede desarrollar  $\det(A - \lambda I)$  por la columna en la que sólo hay un elemento, obteniendo fácilmente que los autovalores son  $\lambda = 0(\text{doble}), \pm ni$ .



## Estudio de las ecuaciones HCW

- El hecho de que aparezca un cero doble implica que el sistema es inestable, aunque algebraicamente (es decir, una perturbación crecería como  $C \cdot t$ , no exponencialmente). Físicamente esta situación corresponde a que el perseguidor, aunque esté muy cerca, tendrá en general un periodo orbital ligeramente distinto al del blanco, por lo que (si no se hace nada), eventualmente la distancia entre ambos crecerá.
- Para encontrar más propiedades de las ecuaciones HCW es necesario resolver las ecuaciones, lo que es posible dado que las ecuaciones son lineales y sencillas.



## Solución de las ecuaciones HCW

- Sean  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  las condiciones iniciales.
- Escribiendo  $C = \cos nt, S = \sin nt$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3C & 0 & 0 & \frac{S}{n} & \frac{2(1-C)}{n} & 0 \\ 6S - 6nt & 1 & 0 & \frac{2C-2}{n} & \frac{4S-3nt}{n} & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & \frac{S}{n} \\ 3nS & 0 & 0 & C & 2S & 0 \\ 6nC - 6n & 0 & 0 & -2S & 4C - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -Sn & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}$$





## Solución periódica

- Obsérvese que el único término que crece sin límite cuando crece el tiempo es  $y$ . Haciendo  $x_0 = -\frac{\dot{y}_0}{2n}$ , se cancela este término y ya la solución no crece. Para simplificar, si también  $y_0 = 0$  y  $\dot{x}_0 = 0$ , la solución  $x - y$  es:

$$x = x_0 \cos nt,$$

$$y = -2x_0 \sin nt$$

- Esta solución verifica  $x^2 + \frac{y^2}{4} = x_0^2$ , es decir, una elipse de semieje mayor  $2x_0$  (en el eje  $y$ ) y semieje menor  $x_0$  (en el eje  $x$ ) centrada en el blanco, que el perseguidor recorre en el sentido de las agujas del reloj.
- La solución es como una “órbita” (de periodo igual al periodo orbital del blanco), pero hay que tener en cuenta que no existe atracción gravitatoria entre blanco y perseguidor. Esto se debe a que el perseguidor tenga una órbita ligeramente excéntrica con el mismo periodo que la del blanco.



## Aplicación al rendezvous.

- Escribiendo la matriz que antes encontramos por bloques como

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rr}(t) & A_{rv}(t) \\ A_{vr}(t) & A_{vv}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- Llamando  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ , obtenemos la influencia de las condiciones iniciales de la velocidad y posición en la velocidad y posición actual:

$$\vec{r}(t) = A_{rr}(t)\vec{r}_0 + A_{rv}(t)\vec{v}_0, \quad \vec{v}(t) = A_{vr}(t)\vec{r}_0 + A_{vv}(t)\vec{v}_0$$



## Aplicación al rendezvous.

- Podemos aprovechar esta solución para diseñar maniobras impulsivas que nos permitan ir desde nuestra posición actual a otra en un tiempo prefijado.
- Por ejemplo, supongamos que nuestra velocidad actual es  $\vec{v}_0^-$ , nuestra posición  $\vec{r}_0$  y queremos ir al origen ( $\vec{r} = \vec{0}$ ) en un tiempo  $t = \tau$ . Sustituimos en la primera ecuación:  
 $\vec{0} = A_{rr}(\tau)\vec{r}_0 + A_{rv}(\tau)\vec{v}_0^-$ . Por tanto la velocidad que necesitaríamos para llegar al origen sería:  
 $\vec{v}_0^+ = -(A_{rv}(\tau))^{-1} A_{rr}(\tau)\vec{r}_0$ , y el primer impulso será

$$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_0^+ - \vec{v}_0^- = -(A_{rv}(\tau))^{-1} A_{rr}(\tau)\vec{r}_0 - \vec{v}_0^-.$$

- De la segunda ecuación, la velocidad al llegar sería  $\vec{v}(\tau) = A_{vr}(\tau)\vec{r}_0 + A_{vv}(\tau)\vec{v}_0^+ = \left(A_{vr}(\tau) - A_{vv}(\tau)(A_{rv}(\tau))^{-1} A_{rr}(\tau)\right)\vec{r}_0$ , y para frenar hasta cero el segundo impulso será

$$\Delta\vec{v}_2 = -\vec{v}(\tau) = \left(A_{vv}(\tau)(A_{rv}(\tau))^{-1} A_{rr}(\tau) - A_{vr}(\tau)\right)\vec{r}_0.$$



## El problema de los $n$ cuerpos

- Una de las hipótesis fundamentales en el estudio del problema de los dos cuerpos era la consideración de sistema aislado sin más fuerzas externas. Más adelante se consideraron otros cuerpos como perturbaciones.
- No obstante esta aproximación no es válida cuando se está en una zona intermedia entre estos cuerpos, ya que ningún cuerpo tendrá una influencia dominante.
- Ya desde los tiempos de Newton, se observó que el problema con  $n$  cuerpos para  $n \geq 3$  era mucho más difícil que el de los dos cuerpos, ya que tiene  $6n - 8$  grados de libertad. No obstante aparece en la práctica, por ejemplo un viaje interplanetario es un problema de al menos 4 cuerpos (Tierra, Sol, planeta destino, y el propio vehículo).
- Se buscaban soluciones en series de potencias (ya que en aquella época no existía todavía el cálculo numérico al nivel moderno).



## El problema de los 3 cuerpos

- Para el caso  $n = 3$ , si se realizan algunas hipótesis simplificativas, se pueden obtener algunos resultados de interés que veremos en este tema.
- A finales del siglo XIX el rey Oscar II de Suecia convocó un concurso que requería la solución del problema de los 3 cuerpos (entendiendo como solución una expresión en series de potencias). Nadie fue capaz de encontrar la solución (aunque si existe, Sundman la encontró en 1912, sin embargo no es demasiado útil en la práctica).
- No obstante el matemático francés Poincaré ganó el concurso inventando la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, que permite estudiar el problema desde un punto de vista cualitativo y obtener resultados muy interesantes.



## Caos en el problema de los 3 cuerpos

- El problema de los tres cuerpos, para ciertas relaciones de masa entre los cuerpos masivos, exhibe comportamiento caótico.
- Este comportamiento se caracteriza porque pequeños cambios en las condiciones iniciales se amplifican y resultan en grandes cambios en el estado del sistema pasado un tiempo. Poincaré no encontró este tipo de soluciones (al no disponer de herramientas para cálculo numérico), que fue descrito en detalle por primera vez por Lorenz en 1963 en un artículo sobre un modelo de convección climatológica. Lorenz también creó el término “efecto mariposa”.
- En el sistema solar no se observa este tipo de comportamiento normalmente, pero podría ser posible. Observaremos algunas soluciones caóticas en simulación.



## El problema de los 3 cuerpos circular restringido

- En este tema estudiaremos en detalle el problema de los 3 cuerpos circular restringido (P3CCR), para el cual se pueden obtener bastantes resultados de mucho interés.
- Las hipótesis simplificadoras son las siguientes:
  - De los tres cuerpos, dos son “masivos” (por ejemplo, el Sol, planetas, lunas), de masa  $M_1$  y  $M_2$ .
  - El tercer cuerpo es poco masivo (por ejemplo un vehículo) y no tiene ninguna influencia sobre los otros dos.
  - Por tanto, los dos cuerpos masivos orbitan el uno en torno al otro siguiendo una órbita kepleriana, que se supone circular para el P3CCR; es decir la distancia  $D$  entre ambos cuerpos es una constante y la velocidad angular con la que rotan es

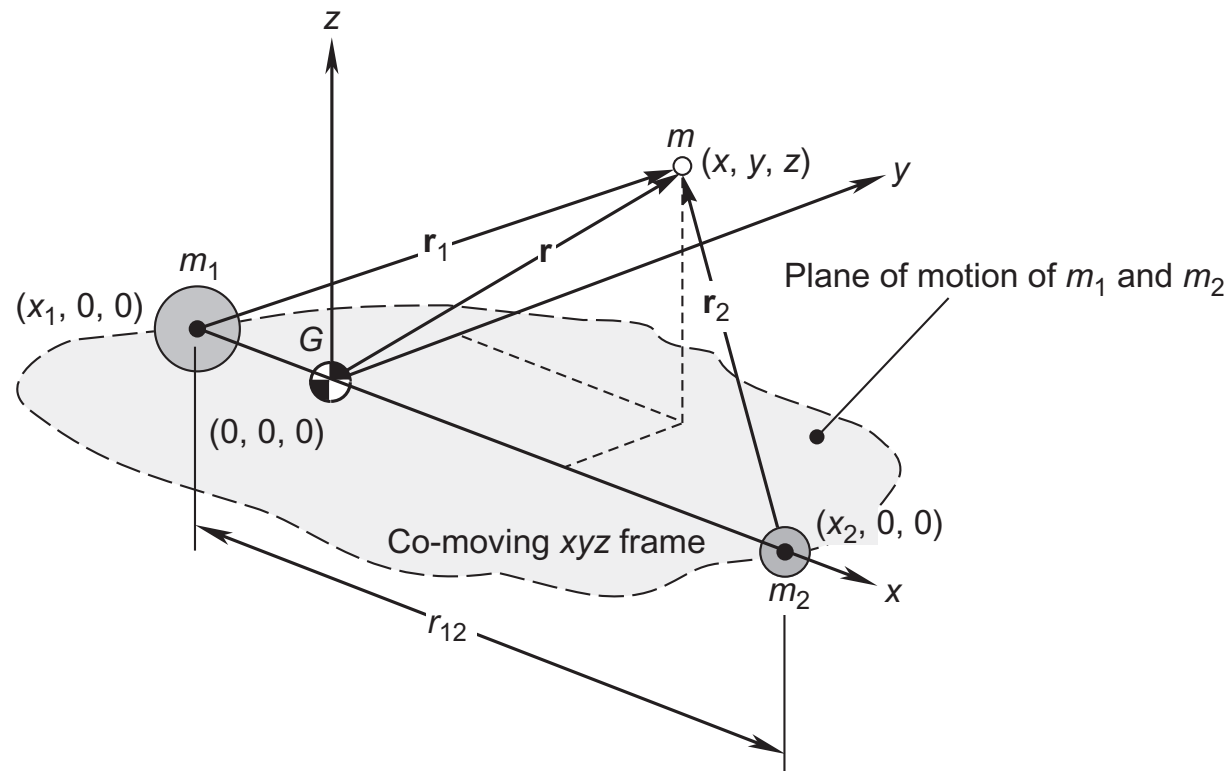
$$n = \sqrt{\frac{\mu_1 + \mu_2}{D^3}}.$$

- También existe el problema de los 3 cuerpos restringido elíptico, pero los resultados son similares y es más complejo.
- Ejemplos que se pueden aproximar: SOL-TIERRA-sonda interplanetaria, TIERRA-LUNA-sonda lunar.



## El problema de los 3 cuerpos circular restringido

- Para estudiar el problema, se usará un sistema de referencia centrado en el centro de masas 1-2 y que rota con velocidad angular  $n$ , de forma que los cuerpos masivos en este sistema de referencia están fijos en el eje  $x$ , tal como se ve en la figura.





## El problema de los 3 cuerpos circular restringido

- La distancia entre el cuerpo 1 y el centro de masas será  $D_1$  y la distancia entre el cuerpo 2 y el cdm será  $D_2$ . Obviamente  $D_1 + D_2 = D$ .
- Se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= -\frac{\mu_1(x + D_1)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x - D_2)}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= -\frac{\mu_1y}{r_1^3} - \frac{\mu_2y}{r_2^3} \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_1z}{r_1^3} - \frac{\mu_2z}{r_2^3}\end{aligned}$$

- Un sistema de ecuaciones no lineal, donde  $r_1 = \sqrt{(x + D_1)^2 + y^2 + z^2}$ , y  $r_2 = \sqrt{(x - D_2)^2 + y^2 + z^2}$ .



## Adimensionalización del P3CCR

- Adimensionalizamos las ecuaciones del P3CCR usando como nuevo tiempo  $\tau = n \cdot t$ , y como posiciones  $\bar{x} = x/D$ ,  $\bar{y} = y/D$ ,  $\bar{z} = z/D$ . Además definimos  $\rho = D_1/D$  y observamos que  $D_2/D = 1 - \rho$ . Finalmente definimos  $\bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$  y  $\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ .

- Las ecuaciones adimensionales resultan

$$\begin{aligned}\bar{x}'' - 2\bar{y}' - \bar{x} &= -\frac{\bar{\mu}_1(\bar{x} + \rho)}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu_2(\bar{x} - 1 + \rho)}{\bar{r}_2^3} \\ \bar{y}'' + 2\bar{x}' - \bar{y} &= -\frac{\bar{\mu}_1\bar{y}}{\bar{r}_1^3} - \frac{\bar{\mu}_2\bar{y}}{\bar{r}_2^3} \\ \bar{z}'' &= -\frac{\bar{\mu}_1\bar{z}}{\bar{r}_1^3} - \frac{\bar{\mu}_2\bar{z}}{\bar{r}_2^3}\end{aligned}$$

donde  $\bar{r}_1 = \sqrt{(\bar{x} + \rho)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$ ,  $\bar{r}_2 = \sqrt{(\bar{x} - 1 + \rho)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$ .

- Obsérvese  $\rho = \frac{D_1}{D} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \bar{\mu}_2$ , luego  $\bar{\mu}_1 = 1 - \rho$ . Luego realmente sólo hay un parámetro,  $\rho$ !



## Equilibrios del P3CCR

- Caso  $y = 0$ : equilibrios colineales. Estos equilibrios fueron ya obtenidos por Euler.
- Hay siempre exactamente tres equilibrios colineales. Uno entre las dos masas (llamado punto  $L_1$ ), otro a la derecha de la masa 2 (llamado punto  $L_2$ ) y otro a la izquierda de la masa 3 (llamado  $L_3$ ).
- Estos equilibrios hay que buscarlos numéricamente de la ecuación

$$F(x) = \frac{\mu_1}{|x + \rho|(x + \rho)} + \frac{\mu_2}{|x - 1 + \rho|(x - 1 + \rho)} - x = 0$$

por ejemplo usando el método de Newton, y comenzando con una estimación inicial en la zona adecuada para cada punto.

- Para el caso  $\rho \approx 0$  (la masa 1 mucho mayor y situada prácticamente en el origen), es fácil ver que el punto  $L_3$  se sitúa aproximadamente en  $x = -1$  y los puntos  $L_1$  y  $L_2$  se aproximan al punto  $x = 1$  (donde está la masa 2).



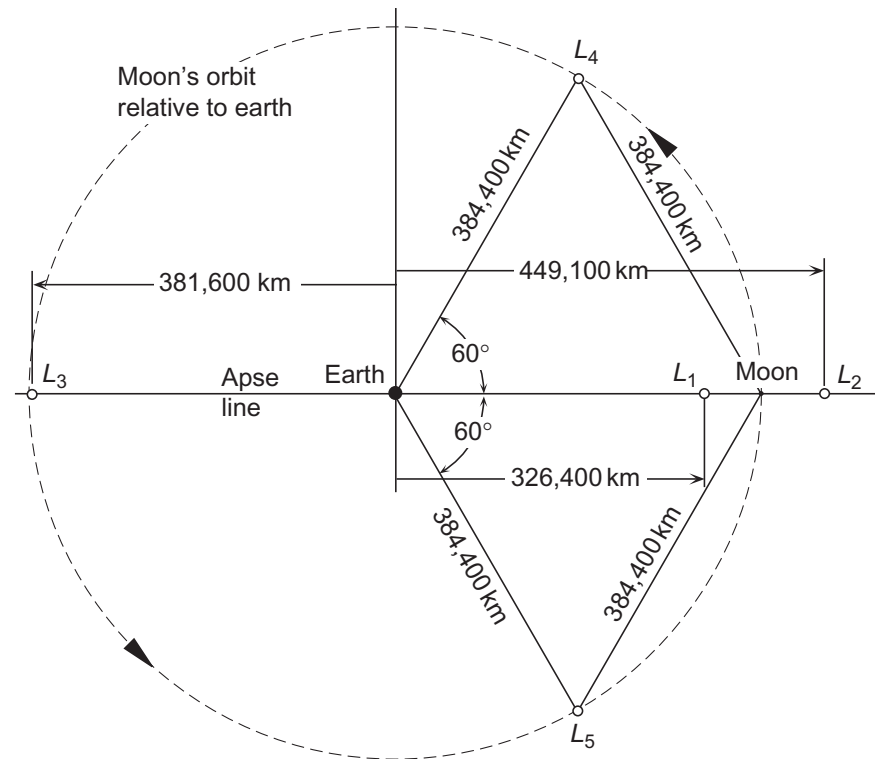
## Equilibrios del P3CCR

- Caso  $\gamma \neq 0$ . Estos puntos fueron hallados por Lagrange.
- Los equilibrios no colineales son dos. si trazamos un triángulo equilátero hacia arriba con base la distancia  $M_1-M_2$  (que es 1 para el problema adimensionalizado), uno de los puntos ( $L_4$ ) estará situado en el vértice opuesto. Sus coordenadas son  $(\frac{1-2\rho}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ .
- Si igualmente trazamos un triángulo equilátero hacia abajo, el otro punto ( $L_5$ ) estará también situado en el vértice opuesto. Sus coordenadas son  $(\frac{1-2\rho}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ .
- En la naturaleza se pueden encontrar a veces asteroides en estos puntos; por ejemplo, en los puntos  $L_4$  y  $L_5$  del sistema Sol-Júpiter existen asteroides, los llamados troyanos.



## Puntos de Lagrange

- Al conjunto de todos los puntos de equilibrio se les denomina puntos de Lagrange, y juegan un papel importante en la dinámica y estabilidad del P3CCR.
- Ejemplo Tierra-Luna:



- En el caso Sol-Tierra,  $L_1$  y  $L_2$  están aproximadamente a 1.5 millones de km de la Tierra.



## La constante de Jacobi

- Llamando  $U(x, y, z)$  al “pseudopotencial”

$U = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{x^2+y^2}{2}$  y  $v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  a la velocidad en el sistema de referencia rotatorio, tenemos una constante del movimiento similar a la energía:

$$\frac{v^2}{2} = U + C$$

- Podemos calcular  $C$  con las condiciones iniciales del problema:

$$C = \frac{v_0^2}{2} - U_0, \text{ donde } U_0 = U(x_0, y_0, z_0).$$

- Para un valor dado de  $C$ , los puntos donde  $v = 0$  nos determinan “barreras del movimiento” (no es posible avanzar a partir de ellos):

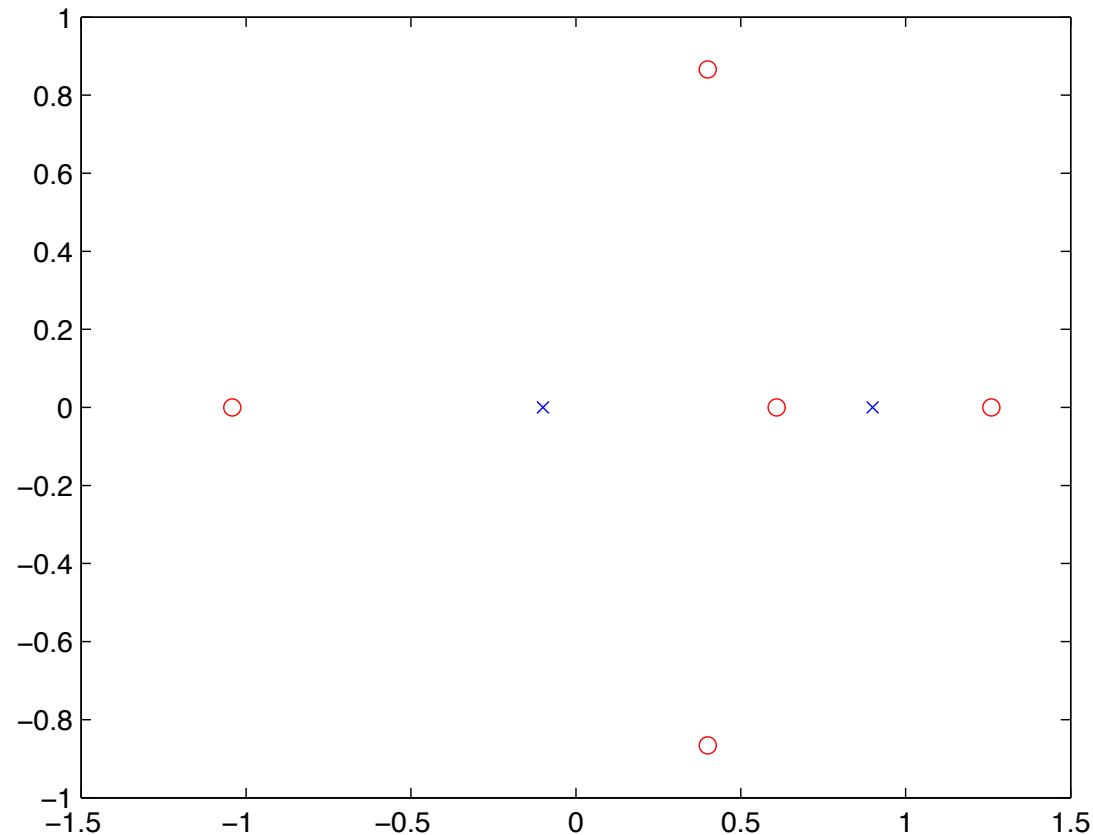
$$U(x, y, z) = -C = U_0 - \frac{v_0^2}{2}$$

- En particular, los valores de  $C$  dados por los puntos de Lagrange nos dan una idea del “papel energético” que juegan estos puntos.



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Consideremos el caso  $\mu_1 = 0,9$  y  $\mu_2 = 0,1$ , es decir, el cuerpo 1 nueve veces más masivo que el cuerpo 2. Entonces  $\rho = \mu_2 = 0,1$ . Los puntos de Lagrange (en rojo) se pueden ver en la siguiente gráfica:



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Los puntos de Lagrange se ubican en los siguientes puntos y tienen el siguiente valor de la constante de Jacobi:

Valor	Punto $L_1$	Punto $L_2$	Punto $L_3$	Punto $L_4$	Punto $L_5$
$(x, y)$	(0.6090,0)	(1.2597,0)	(-1.0416,0)	(0.4,0.866)	(0.4,-0.866)
C	-1.7985	-1.7333	-1.5498	-1.4550	-1.4550

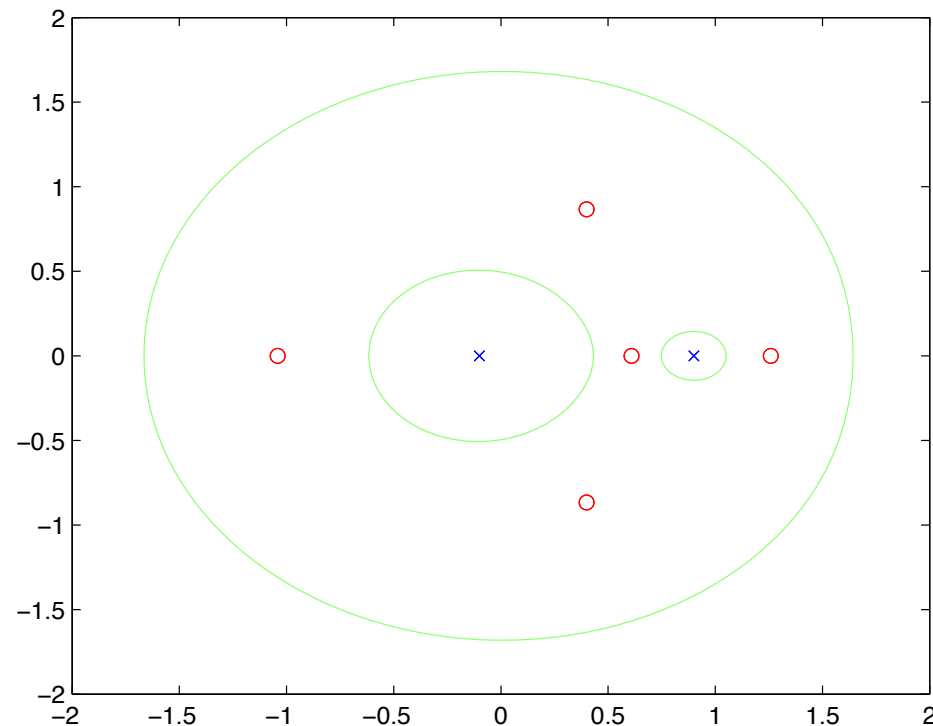
- A continuación mostraremos las curvas que definen valores de la constante de Jacobi en valores intermedios e iguales a los puntos de Lagrange, y veremos que dichos puntos definen “puntos de paso” naturales para órbitas de mínima energía.





## La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de  $C = -2$ , que es menor que el de  $L_1$ , obtenemos:

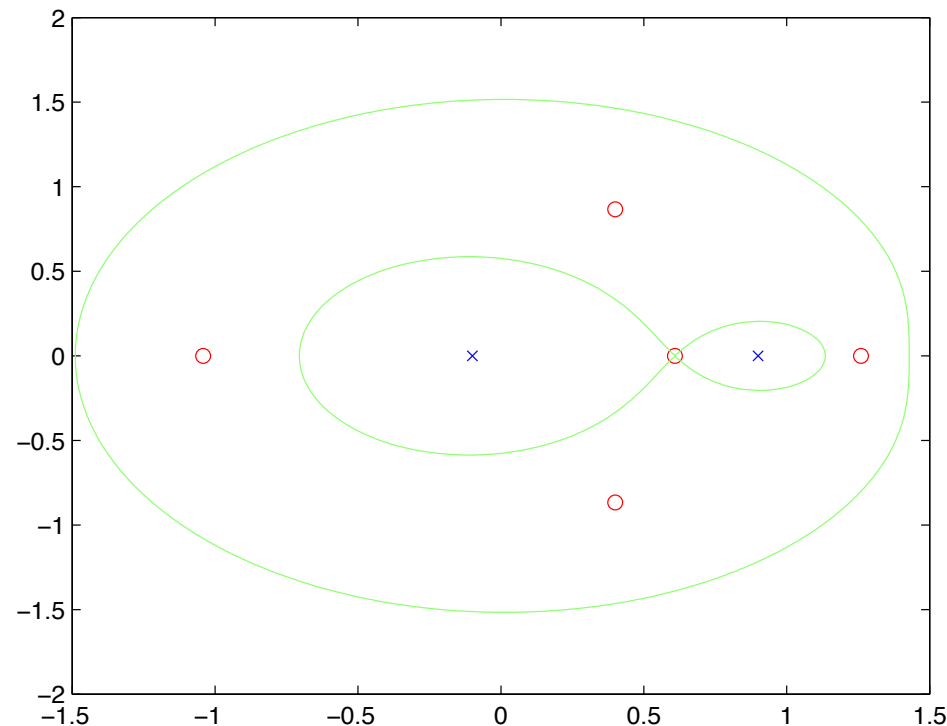


- Las soluciones estarán limitadas a las proximidades de los cuerpos masivos, o al exterior lejano. No se puede ir de 1 a 2.



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de  $C = -1,7985$ , que es del punto  $L_1$ , obtenemos:

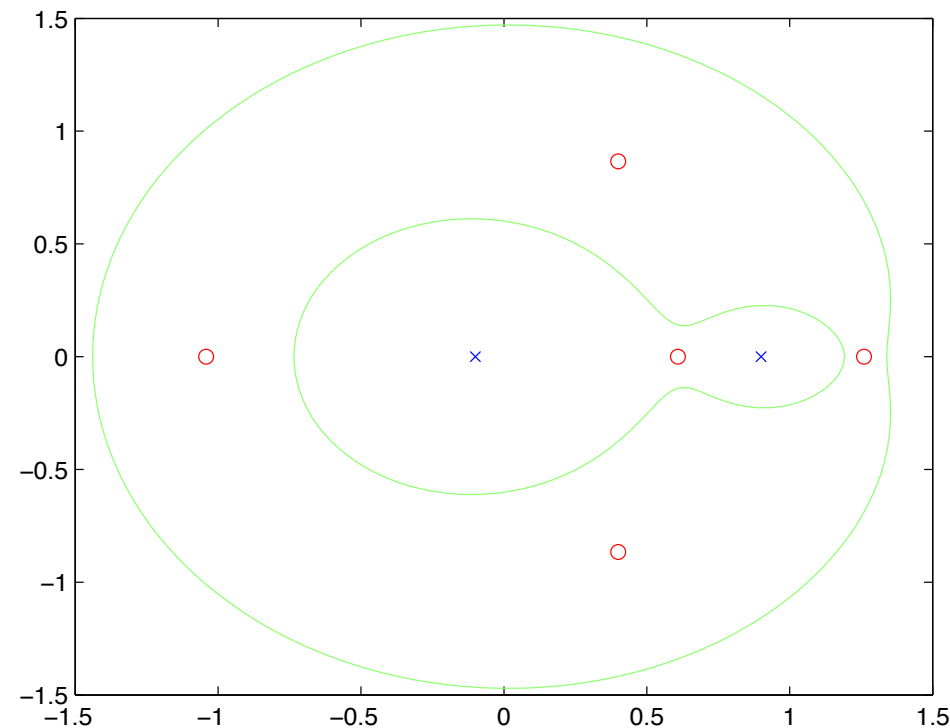


- Luego este valor da la energía mínima que justo permite viajar de 1 a 2. El viaje pasa por el punto  $L_1$ .



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de  $C = -1,75$ , intermedio entre el de los puntos  $L_1$  y  $L_2$ , obtenemos:

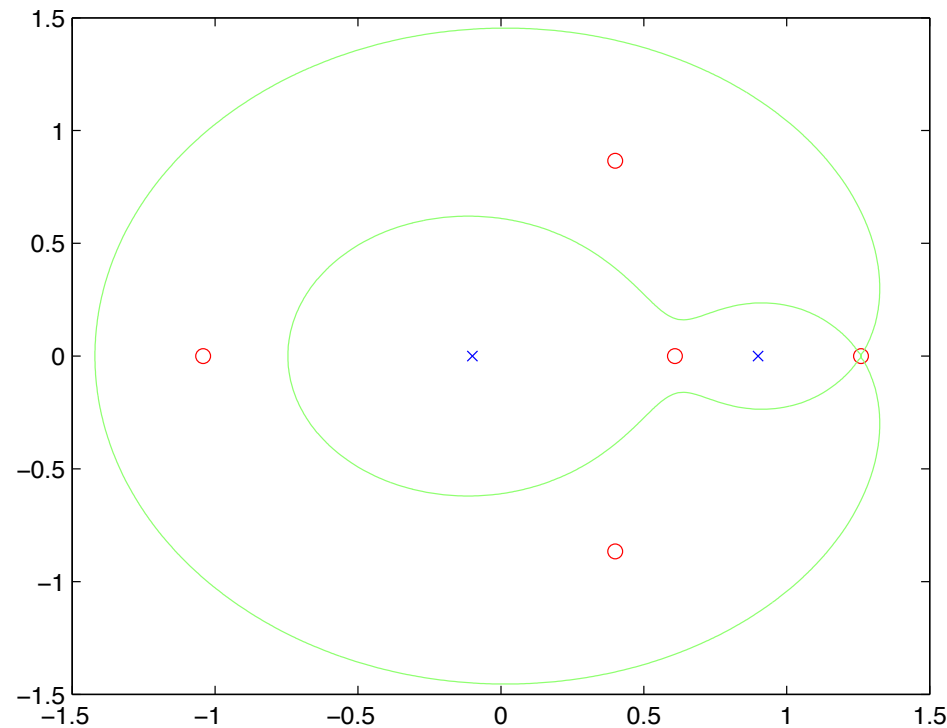


- Seguimos pudiendo ir entre 1 y 2 pero no se puede escapar al exterior.



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de  $C = -1,7333$ , el del punto  $L_2$ , obtenemos:

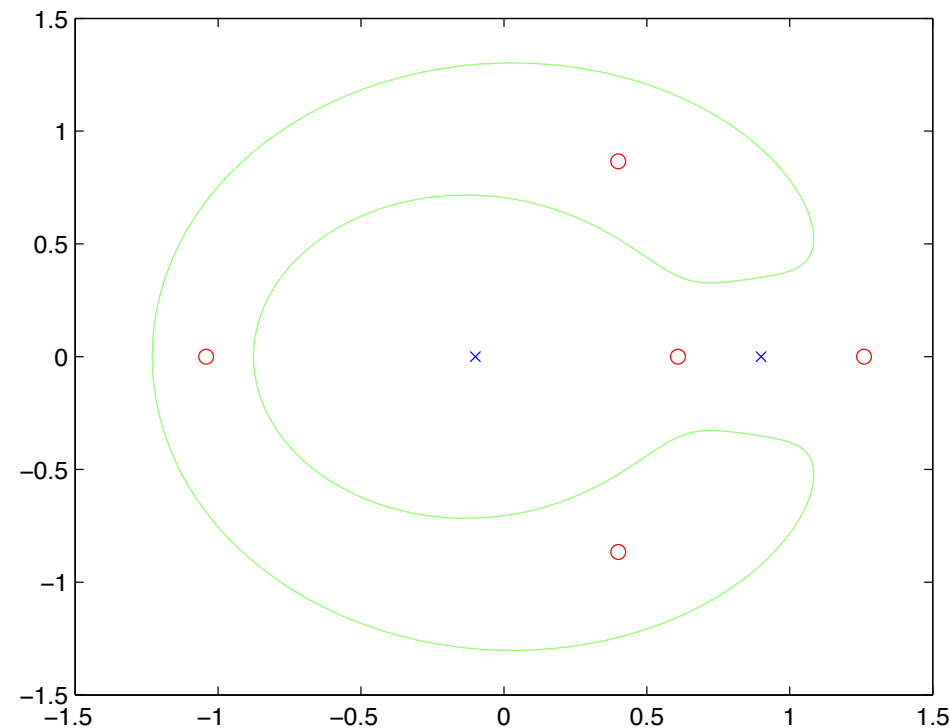


- Luego este valor da la energía mínima que justo permite alejarse tanto de 1 como de 2. El viaje pasa por el punto  $L_2$ .



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de  $C = -1,6$ , intermedio entre el de los puntos  $L_2$  y  $L_3$ , obtenemos:

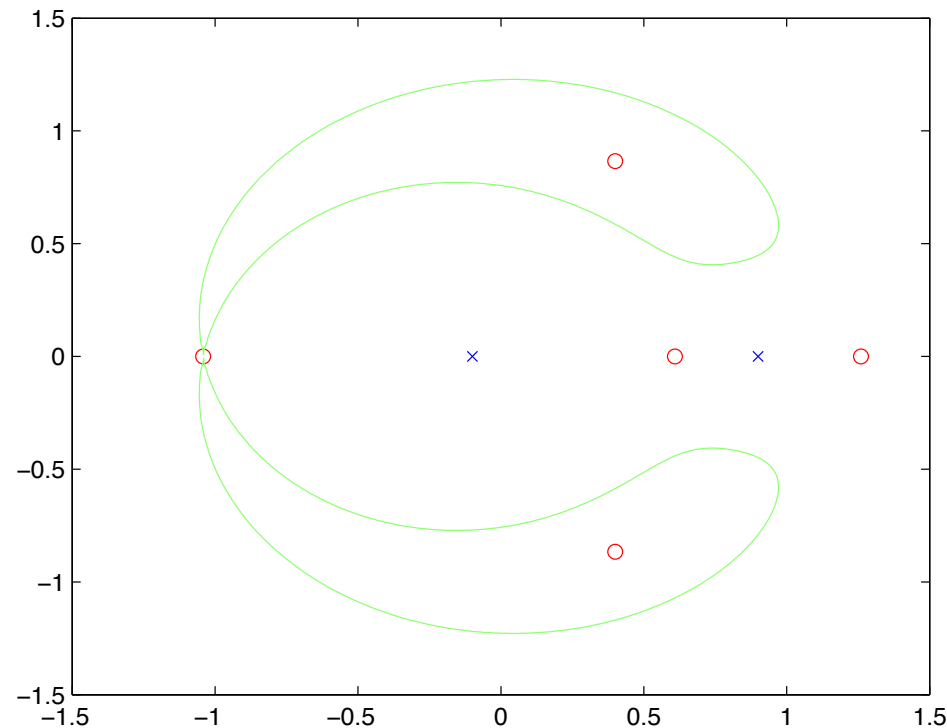


- Se puede escapar al exterior pasando cerca de 2, pero no directamente desde 1.



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de  $C = -1,5498$ , el del punto  $L_3$ , obtenemos:

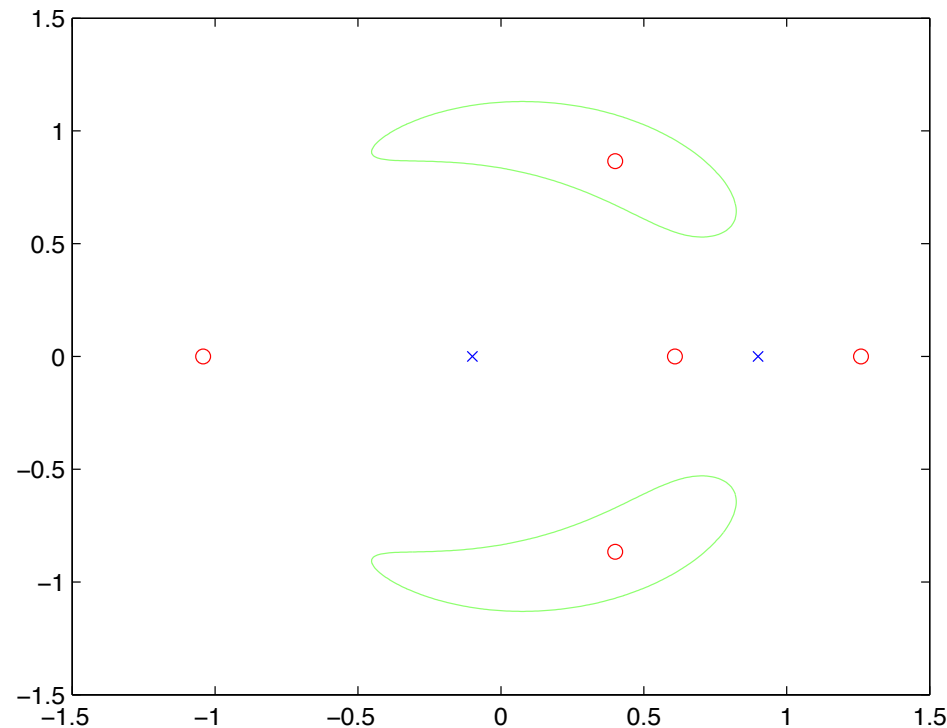


- Luego este valor da la energía mínima que justo permite alejarse de 1 sin pasar primero cerca de 2. El viaje pasa por el punto  $L_3$ .



## La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de  $C = -1,5$ , entre el del punto  $L_3$  y los puntos  $L_4$  y  $L_5$ , obtenemos:



- Con este valor de energía casi todo el espacio está permitido excepto las proximidades de los puntos  $L_4$  y  $L_5$ . Si seguimos aumentando  $C$  todo el espacio estará permitido.



## Estabilidad de los puntos de Lagrange

- Es importante conocer la estabilidad de los puntos de Lagrange para su posible aplicación en misiones espaciales. Si fueran inestables, sería necesario “gastar” combustible para permanecer en las proximidades.
- Se obtiene que los puntos colineales son siempre inestables.
- Los puntos no colineales pueden ser estables o inestables, dependiendo de si la condición  $|2\mu_1 - 1| > \sqrt{23/27}$  (para  $\mu_1$  y  $\mu_2$  adimensionales) se cumple.
- Para el caso Tierra-Sol y Tierra-Luna se cumple. No obstante las perturbaciones introducidas por la Luna (en el primer caso) y el Sol (en el segundo) los inestabilizan.
- Para el caso Júpiter-Sol también se cumple la condición, y en este caso son realmente estables. De hecho se pueden encontrar asteroides (los llamados troyanos) rotando sincronizadamente con Júpiter en estos puntos.
- Para el caso Plutón-Charón no se cumple la condición.





## Aplicaciones de los puntos de Lagrange

- A pesar de su inestabilidad, los puntos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  pueden ser muy útiles.
- Por ejemplo:
  - El  $L_2$  del sistema Tierra-Luna permite ver siempre la cara oculta de la Luna (y garantizar comunicaciones si hubiera una base).
  - El  $L_1$  del sistema Tierra-Luna permitiría tener un punto intermedio para misiones lunares.
  - El punto  $L_1$  del sistema Sol-Tierra permitiría ver siempre a la vez el Sol y la Tierra: ideal para un observatorio solar.
- El problema es que un vehículo situado exactamente en el punto  $L_1$  o  $L_2$  no tendría una posición favorable:
  - El  $L_2$  del sistema Tierra-Luna no se ve directamente desde la Tierra sino que está “tapado” por la Luna.
  - El punto  $L_1$  del sistema Sol-Tierra no podría comunicarse con la Tierra por las interferencias causadas por el propio Sol.



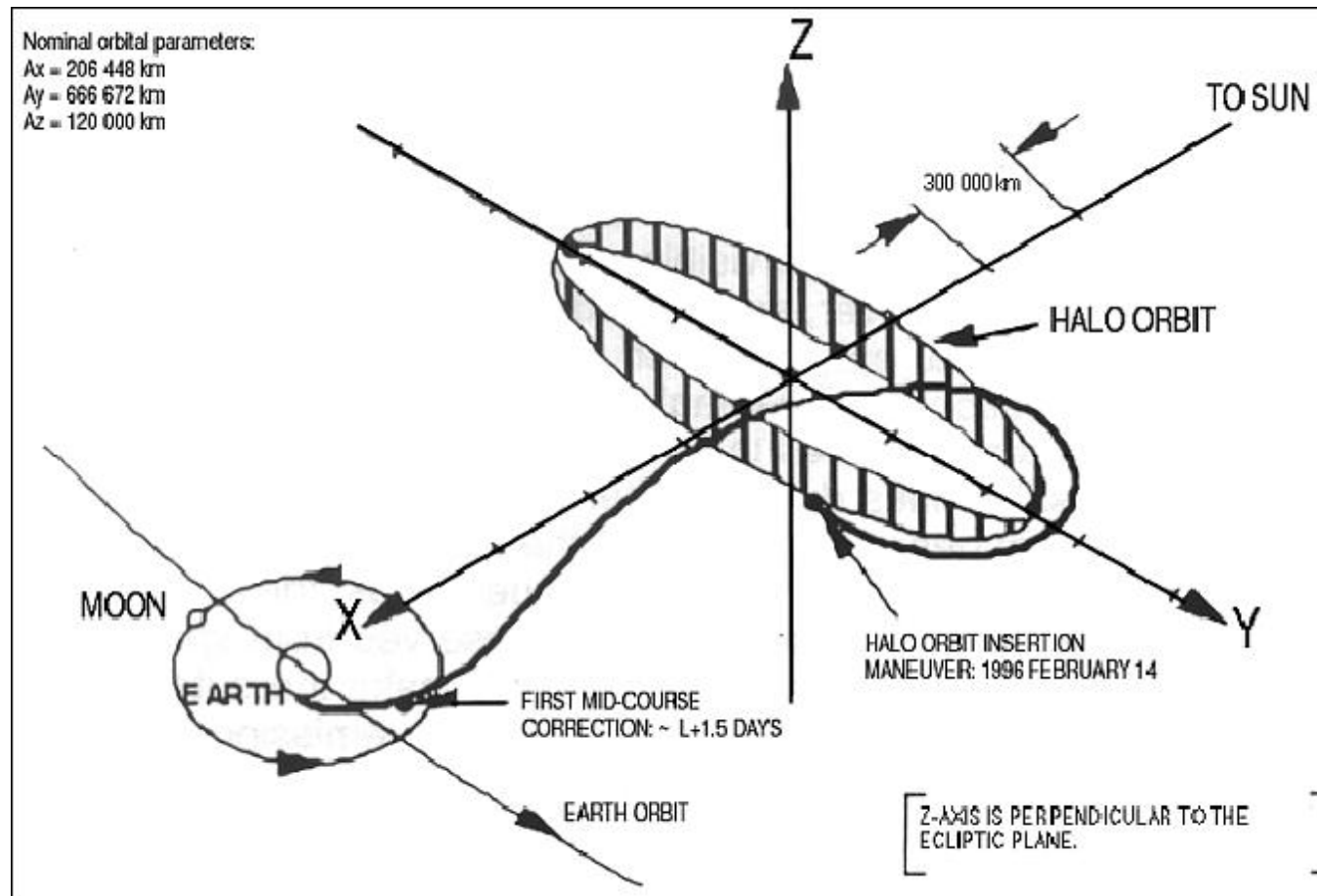
## Órbitas halo

- Por tanto, surge la idea de buscar órbitas periódicas en torno a los puntos  $L_1$  y  $L_2$ .
- Usando algunos conceptos de la teoría de ecuaciones diferenciales, se pueden encontrar estas órbitas: son las llamadas órbitas Halo.
- Así como estos puntos de Lagrange son inestables, las órbitas Halo también lo son: es necesario emplear combustible cada cierto punto para evitar alejarse de la órbita. Por tanto estas misiones tienen siempre vida limitada.
- Por ejemplo, varias misiones han estado o están en una órbita Halo en torno al  $L_1$  Sol-Tierra, que se encuentra a 1.5 millones de kilómetros de la Tierra: la misión SOHO(1996), la misión ISEE-3 (1978) y la misión Génesis (2001).



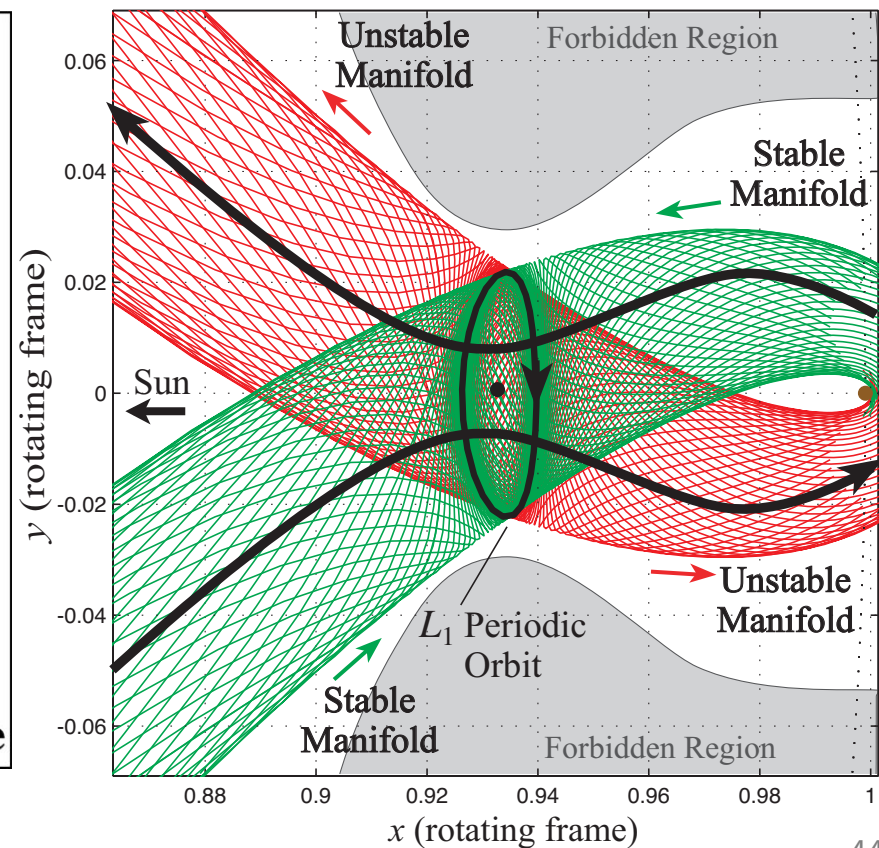
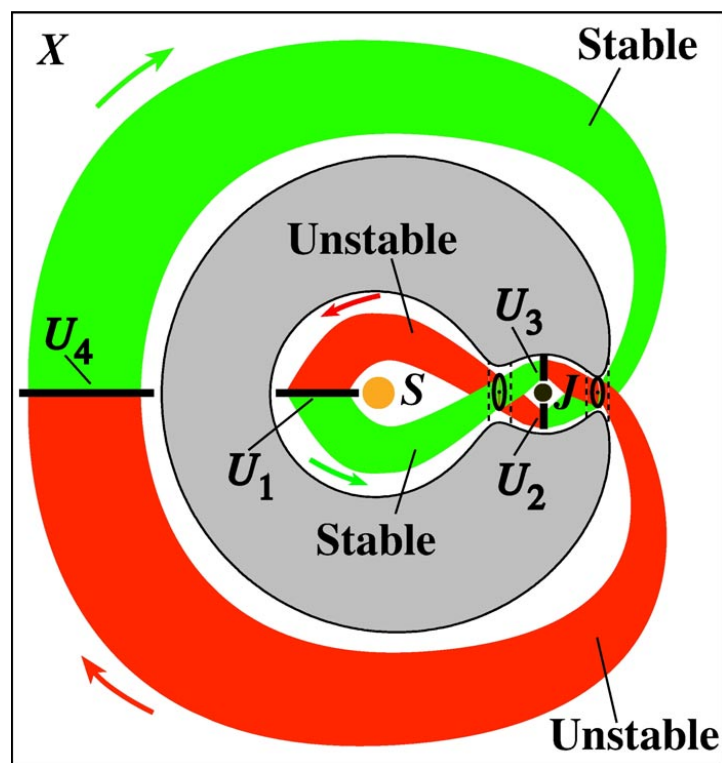
# Órbitas halo: misión SOHO

- Ejemplo—órbita de la misión SOHO:



## Diseño no lineal de misiones

- La proximidad de los puntos  $L$  está llena de otras órbitas: estables (que llevan a una órbita halo) e inestables (que alejaría un vehículo de una órbita halo).



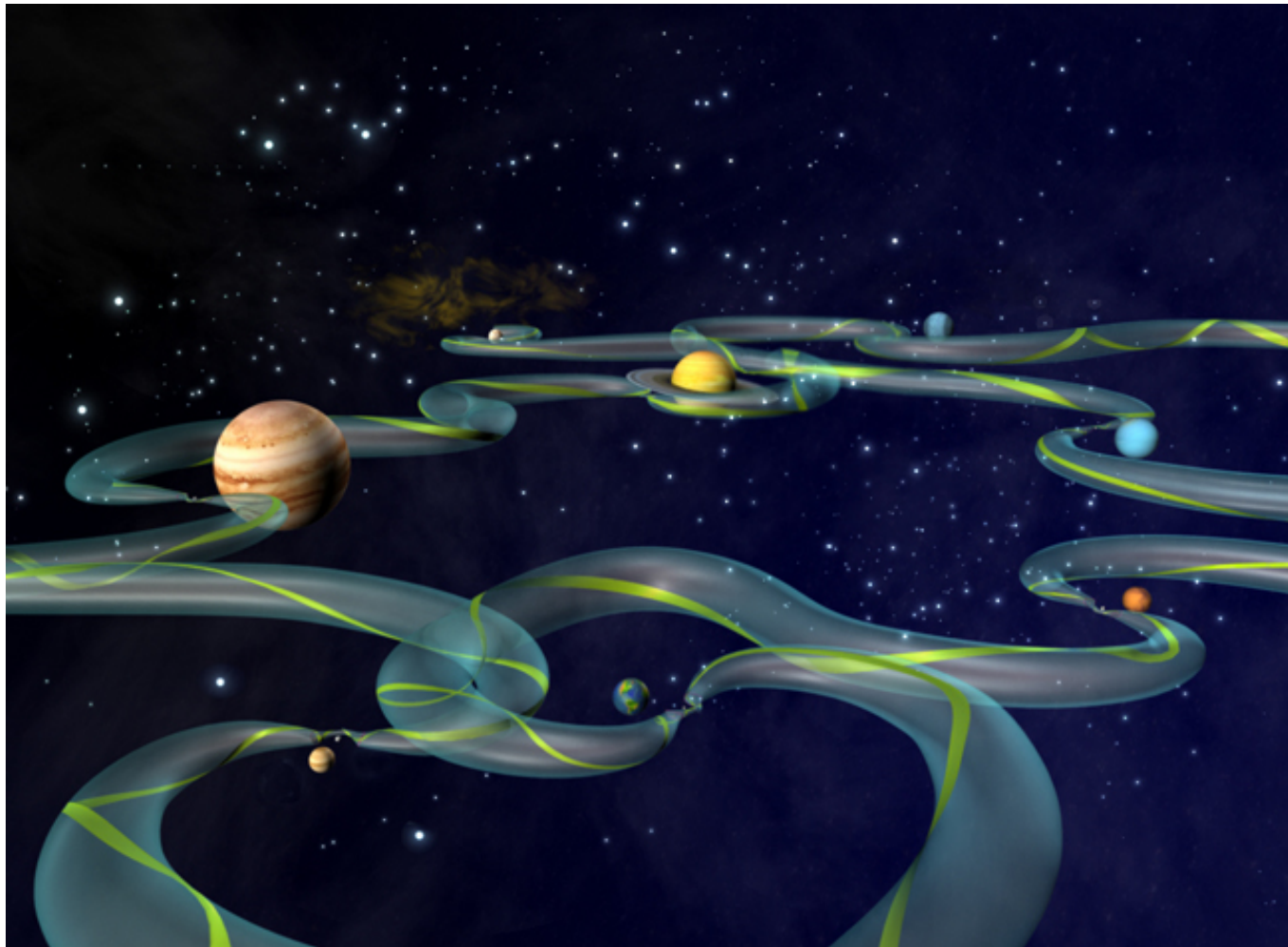
## Diseño no lineal de misiones

- Una idea sería utilizar las órbitas estables para acercarse a los puntos  $L$  y las órbitas inestables para alejarse de ellos y posiblemente conectar con otros puntos  $L$  (por ejemplo pasar del  $L_1$  Tierra-Luna al  $L_1$  Sol-Tierra) utilizando el menor combustible posible, sino simplemente la dinámica no lineal del sistema.
- Esto tendría el inconveniente de tener que esperar el tiempo que dicte la dinámica, pero posibilitaría el ahorro de combustible. Se empleó para rescatar la misión Hiten (sonda lunar japonesa, que tuvo problemas de propulsión) y en la misión Génesis.
- Algunos autores tienen una visión futurista de que algún día estos procedimientos permitirán establecer una “autopista interplanetaria”.



## Diseño no lineal de misiones

- Una imagen de fantasía de la “autopista interplanetaria”:





# Órbitas complejas: misión Génesis

- Ejemplo—órbita de la misión Génesis:

