auch Kostenfunktion genannte Gütemaß $J(P)$ eingeführt, für das die Bedingung

$$\hat{P} = \arg\min_{P} J(P) \tag{2.7}$$

gelten soll. Die Kostenfunktion kann je nach Anwendungsfall unterschiedlich aufgestellt werden, meist wird jedoch die Summe der Fehlerquadrate

$$J(P) = \sum_{i=1}^{N} \|y_i - \hat{y}_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^T (y_i - \hat{y}_i) = \mathrm{spur}\big((Y - PU)^T (Y - PU)\big) \tag{2.8}$$

minimiert, wobei $\| \cdot \|$ der euklidischen Norm und $\mathrm{spur}(\cdot)$ der Summe der Hauptdiagonaleinträge entspricht. Unter der Berücksichtigung der Bedingung (2.7) gilt für die geschätzten Parameter

$$\hat{P} = Y(U^T U)^{-1} U^T, \tag{2.9}$$

sofern $U^T U$ invertierbar, also regulär ist. Der Ausdruck $(U^T U)^{-1} U^T$ wird auch als Moore-Penrose-Pseudoinverse bezeichnet und kann beispielsweise durch QR-Zerlegung gelöst werden, [13].

2.3.2 Zustandsraumverfahren 4SID

Die Methode der Subspace-based State-Space System Identification (4SID) ist ein weiteres Verfahren zur Parameterbestimmung anhand von gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Dieses Verfahren basiert auf den Konzepten der Systemtheorie und errechnet die Parameter A, B, C, D und K des Zustandsraummodells

$$x(k+1) = A\ x(k) + B\ u(k) + K\ e(k) \tag{2.10a}$$

$$y(k) = C\ x(k) + D\ u(k) + e(k), \tag{2.10b}$$

welches hier in der zeitdiskreten Variante in Innovationsform aufgeführt ist. Die Systemmatrix A beschreibt das dynamische Verhalten des Systems, die Eingangsmatrix B beschreibt den Einfluss der Eingangsgröße $u(k)$ auf den Zustandsvektor $x(k)$ und die Ausgangsmatrix C bildet die Transformation der Zustände zur Ausgangsgröße $y(k)$ ab. Die Matrix D wird mit Durchgriff bezeichnet und entfällt meist, da dies einer direkten Wirkung von Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen entspricht, was in realen Systemen in der Regel nicht vorkommt. Der Einfluss der Störgrößen $e(k)$ auf die Zustände wird durch die Matrix K beschrieben.

Die prinzipielle Idee des 4SID-Verfahrens besteht darin, zunächst aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen den Zustandsvektor abzuschätzen. Da $u(k)$ und $y(k)$ aus den Messdaten gegeben sind, könnte bei bekanntem Zustandsvektor $x(k)$ mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate der Parametersatz des Zustandsraummodells berechnet werden, wenn davon ausgegangen wird, dass der Fehler $e(k)$ unabhängig und $u(k)$ und $y(k)$ ist. Dieser Zusammenhang lässt sich durch Umformulierung von (2.10) zu

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 1 \end{bmatrix} e(k) \tag{2.11}$$

leichter erkennen. Da $x(k)$ aber gerade nicht bekannt ist, erfolgt die Abschätzung anhand eines Verfahrens, das sich aus einem umfangreichen Satz mathematischer Werkzeuge bedient. Da hier nur ein kurzer Überblick über die Subspace Identifikation gegeben werden soll, sei für eine detaillierte Beschreibung an dieser Stelle auf weiterführende Literatur verwiesen, [14]. Der allgemeine Ablauf des Verfahrens durchläuft folgende Schritte:

1. Umformung von Eingangs- und Ausgangssignalen in Block-Hankel-Matrizen
2. Projektion der Ein- und Ausgangsdaten in einen zu den Eingangssignalen orthogonalen Raum
3. Singulärwertzerlegung der Projektion
4. Bestimmung der Systemordnung anhand der Singulärwerte und Zerlegung der Datenmatrizen in Rausch- und Signalunterräume
5. Bestimmung der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix
6. Parameterabschätzung aus der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix

Die Bestimmung der Systemordnung kann dabei auf unterschiedliche Arten erfolgen. Neben verschiedenen Methoden zum automatischen Auffinden der am besten geeigneten Systemordnung kann diese auch manuell festgelegt werden. Stehen dem Anwender a-priori Informationen zur Abschätzung der Systemordnung zur Verfügung, können durch geeignete Wahl der Systemordnung eventuell bessere Simulationsergebnisse erzielt werden, als wenn ein Verfahren eine viel höhere Systemordnung vorgibt.

Die Implementierung des 4SID Verfahrens in MATLAB durch die Funktion `n4sid` stellt eine einfach zu handhabende Methode zur Parameteridentifikation von linearen zeitdiskreten Zustandsraummodellen dar, die keine tief gehende Kenntnis der im Verfahren verwendeten mathematischen Werkzeuge voraussetzt. Als Funktionsparameter werden lediglich ein Datensatz mit Eingangs- und Ausgangssignalen verlangt sowie die Festlegung, ob die Systemordnung durch das Verfahren selbst bestimmt werden soll oder durch den Anwender.