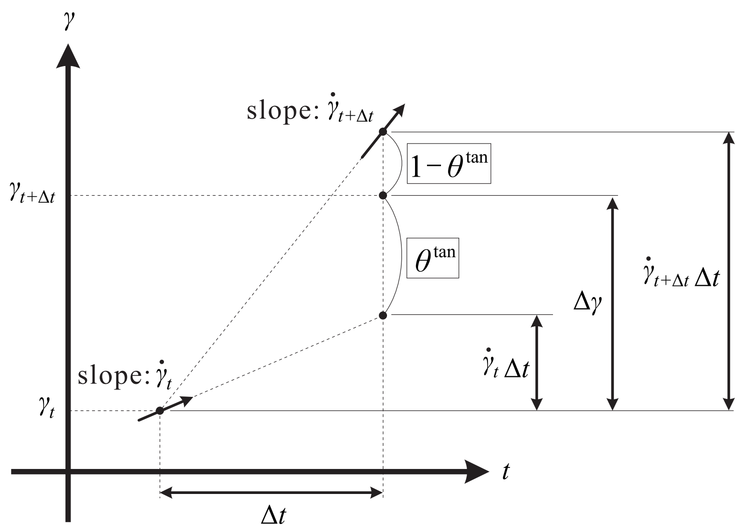

すべり増分 $\Delta\gamma$ を，現時刻 t におけるすべり量 γ_t と，Δt 後のすべり量 $\gamma_{t+\Delta t}$ の差を用いて次のように定義する．

$$\Delta\gamma \equiv \gamma_{t+\Delta t} - \gamma_t \tag{1}$$

また，$\Delta\gamma$ は現時刻 t でのすべり速度 $\dot{\gamma}_t$ と Δt 後のすべり速度 $\dot{\gamma}_{t+\Delta t}$ を用いて次のように線形補間できるものとする (上図参照)．

$$\mathit{\Delta}\gamma - \dot{\gamma}_t\mathit{\Delta}t : \dot{\gamma}_{t+\mathit{\Delta}t}\mathit{\Delta}t - \mathit{\Delta}\gamma = \theta^{\tan} : 1-\theta^{\tan} \qquad \text{or} \qquad \Delta\gamma = \left[(1-\theta^{\tan})\dot{\gamma}_t + \theta^{\tan}\dot{\gamma}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \tag{2}$$

ここで $\theta^{\tan}$ は $0 \le \theta^{\tan} \le 1$ を満たす数値係数であり，$\theta^{\tan} = 0$ なら現時刻での速度のみから Δt 後の値を推測する Euler 法 (陽解法)，$\theta^{\tan} = 1$ なら Δt 後の速度のみから Δt 後の値を推測する陰解法となる．

ここで $\dot{\gamma}_{t+\Delta t}$ の値を求めるため $\dot{\gamma}_{t+\Delta t}$ を Taylor 展開すると，次のように書ける．

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{t+\Delta t} &= \dot{\gamma}_t + \frac{\partial\dot{\gamma}_t}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\dot{\gamma}_t}{\partial t^2}\Delta t^2 + \cdots \\ &\simeq \dot{\gamma}_t + \frac{\partial\dot{\gamma}_t}{\partial t}\Delta t \qquad (\Delta t \ll 1)\end{aligned} \tag{3}$$

これは，Δt 後の速度を現時刻 t における加速度を用いて陽的に推測していることに相当する．また，Pan-Rice 形硬化則を用いる場合，すべり速度 $\dot{\gamma}$ およびすべり速度の時間変化率 (加速度)$\partial\dot{\gamma}/\partial t$ は，現時刻 t における分解せん断応力 τ_t と流れ応力 g_t を用いて次のように書ける．

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \mathrm{sgn}(\tau)\left|\frac{\tau_t}{g_t}\right|^{\frac{1}{m}} \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial\dot{\gamma}_t}{\partial t} = \dot{\gamma}_0 \mathrm{sgn}(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\tau_t}{g_t}\right|^{\frac{1}{m}} \tag{4}$$

ただし $\dot{\gamma}_0$ は参照すべり速度であり，定数とする．ここで式 $(4)_2$ の微分の部分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\tau_t}{g_t}\right|^{\frac{1}{m}} &= \frac{\partial}{\partial\tau_t}\left(\left|\frac{\tau_t}{g_t}\right|^{\frac{1}{m}}\right)\frac{\partial\tau_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial g_t}\left(\left|\frac{\tau_t}{g_t}\right|^{\frac{1}{m}}\right)\frac{\partial g_t}{\partial t} \\ &= \frac{1}{m}\left|\frac{\tau_t}{g_t}\right|^{\frac{1}{m}-1}\left(\frac{\dot{\tau}_t}{g_t} + \frac{-|\tau_t|\dot{g}_t}{g_t^2}\right) \\ &= \frac{1}{m}\left|\frac{\tau_t}{g_t}\right|^{\frac{1}{m}}\left(\frac{\dot{\tau}_t}{\tau_t} - \frac{\dot{g}_t}{g_t}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

となるので，式 (3) に代入すれば $\dot{\gamma}_{t+\Delta t}$ が次のように見積もれる．

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{t+\Delta t} &\simeq \dot{\gamma}_t + \dot{\gamma}_0 \mathrm{sgn}(\tau_t) \left| \frac{\tau_t}{g_t} \right|^{\frac{1}{m}} \frac{\Delta t}{m} \left(\frac{\dot{\tau}_t}{\tau_t} - \frac{\dot{g}_t}{g_t} \right) \\
&= \dot{\gamma}_t + \dot{\gamma}_t \frac{\Delta t}{m} \left(\frac{\dot{\tau}_t}{\tau_t} - \frac{\dot{g}_t}{g_t} \right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

式 (6) に分解せん断応力の物質時間速度 $\dot{\tau}^{(\alpha)} = (\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_s^{(\alpha)}) \cdot \boldsymbol{D}^e$，流れ応力の発展式 $\dot{g}^{(\alpha)} = \sum_\beta h^{(\alpha\beta)} \left| \dot{\gamma}^{(\beta)} \right|$ および $\boldsymbol{D}^e = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p = \boldsymbol{D} - \sum_\alpha \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)}$ を代入し，すべり系 α の記号を省略せずに表記すれば

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{t+\Delta t}^{(\alpha)} \simeq{}& \dot{\gamma}_t^{(\alpha)} + \frac{\Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m \tau^{(\alpha)}} (\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \cdot \boldsymbol{D} \\
&- \frac{\Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m \tau^{(\alpha)}} (\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \cdot \sum_\beta \boldsymbol{P}_S^{(\beta)} \dot{\gamma}_t^{(\beta)} - \frac{\Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m g^{(\alpha)}} \sum_\beta h^{(\alpha\beta)} \dot{\gamma}_t^{(\beta)} \\
={}& \dot{\gamma}_t^{(\alpha)} + \frac{\Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m \tau^{(\alpha)}} (\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \cdot \boldsymbol{D} \\
&- \frac{\Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m} \sum_\beta \left[\frac{(\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \cdot \boldsymbol{P}_S^{(\beta)}}{\tau^{(\alpha)}} + \frac{h^{(\alpha\beta)}}{g^{(\alpha)}} \right] \dot{\gamma}_t^{(\beta)}
\end{aligned} \tag{7}
$$

となる．さらに式 (7) を式 (2) に代入すれば，$\Delta\gamma^{(\alpha)}$ が次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\Delta\gamma^{(\alpha)} ={}& \left[\dot{\gamma}_t^{(\alpha)} + \frac{\theta^{\tan} \Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m \tau^{(\alpha)}} (\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \cdot \boldsymbol{D} \right] \Delta t \\
&- \frac{\theta^{\tan} \Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m} \sum_\beta \left[\frac{(\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \cdot \boldsymbol{P}_S^{(\beta)}}{\tau^{(\alpha)}} + \frac{h^{(\alpha\beta)}}{g^{(\alpha)}} \right] \dot{\gamma}_t^{(\beta)} \Delta t
\end{aligned} \tag{8}
$$

ここで，式 (8) 二段目の項は $\sum_\beta \aleph^{(\alpha\beta)} \dot{\gamma}^{(\beta)}$ の形 ($\boldsymbol{D}^p$ と同じ形) になっていることから，非線形項 ($\boldsymbol{D}$ でくくれない項) であることがわかる．そこでこの項を左辺に移項し，$\dot{\gamma}_t^{(\beta)} \Delta t = \Delta\gamma^{(\beta)}$ として (他のすべり系のすべり量は陽的に解いて) 整理して

$$
\sum_\beta N^{(\alpha\beta)} \Delta\gamma^{(\beta)} = \left(\dot{\gamma}_t^{(\alpha)} + \boldsymbol{\Lambda}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{D} \right) \Delta t \tag{9}
$$

とする．ただし，$N^{(\alpha\beta)}$ および $\boldsymbol{\Lambda}^{(\alpha)}$ はそれぞれ次のように定義する．

$$
N^{(\alpha\beta)} \equiv \delta^{(\alpha\beta)} + \frac{\theta^{\tan} \Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m} \left[\frac{(\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \cdot \boldsymbol{P}_S^{(\beta)}}{\tau^{(\alpha)}} + \frac{h^{(\alpha\beta)}}{g^{(\alpha)}} \right] \tag{10}
$$

$$
\boldsymbol{\Lambda}^{(\alpha)} \equiv \frac{\theta^{\tan} \Delta t \dot{\gamma}_t^{(\alpha)}}{m \tau^{(\alpha)}} (\boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{P}_S^{(\alpha)}) \tag{11}
$$

式 (9) の形にすることで，$\Delta\gamma^{(\alpha)}$ を求めるときの非線形性がやわらげられる．しかしながら，$\Delta\gamma^{(\alpha)}$ を求めるには式 (9) を解かなくてはならない．そこで，$N^{(\alpha\beta)}$ の逆行列を $M^{(\alpha\beta)}$ で表して

$$
\dot{\hat{v}}^{(\alpha)} \equiv \sum_\beta M^{(\alpha\beta)} \dot{\gamma}_t^{(\beta)} \tag{12}
$$

$$
\boldsymbol{\Upsilon}^{(\alpha)} \equiv \sum_\beta M^{(\alpha\beta)} \boldsymbol{\Lambda}^{(\beta)} \tag{13}
$$

とおけば，$\Delta\gamma^{(\alpha)}$ は次のように書ける．

$$
\Delta\gamma^{(\alpha)} = \left(\dot{\hat{v}}^{(\alpha)} + \boldsymbol{\Upsilon}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{D} \right) \Delta t \tag{14}
$$