1. ddd

1.1 Asymptotic Expansion of Governing Equations

$$
\begin{cases}
\varepsilon^{\epsilon}(x) = \dfrac{\mathrm{d}u^{\epsilon}(x)}{\mathrm{d}x} & \text{strain-displacement relation} \\
\sigma^{\epsilon}(x) = C^{\epsilon}(x)\varepsilon^{\epsilon}(x) & \text{constitutive equation} \\
\dfrac{\mathrm{d}\sigma^{\epsilon}(x)}{\mathrm{d}x} + f^{\epsilon}(x) = 0 & \text{balanced equation (Cauchy's first equation of motion)} \\
u^{\epsilon}(0) = u^{\epsilon}(L) = 0 & \text{boundary conditions}
\end{cases}
\tag{1}
$$

ここで，未知量は $u^{\epsilon}(x)$ のみ，すなわち $f^{\epsilon}(x)$ は既知量とする．微小パラメータ ϵ を用いて変数 y を次のように定義する．

$$
y \equiv \frac{x}{\epsilon} \tag{2}
$$

微分の鎖則より

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

まず，変位 $u^{\epsilon}(x)$ が微小パラメータ ϵ を用いて，漸近級数として

$$
u^{\epsilon}(x) = u(x,y) = u^{(0)}(x,y) + \epsilon u^{(1)}(x,y) + \epsilon^2 u^{(2)}(x,y) + \cdots \tag{4}
$$

と書けるとする[*1)]．ここで，$(\bullet)^{(k)}$ は係数としてくっ付いているパラメータ ϵ のオーダーが k 次であることを表す．式 (4) を式 $(1)_1$ に代入して

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\epsilon}(x) = \frac{\mathrm{d}u^{\epsilon}(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}u(x,y)}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\partial u^{(0)}(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial u^{(0)}(x,y)}{\partial y} + \epsilon\left(\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y}\right) + \cdots \\
&= \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial u^{(0)}(x,y)}{\partial y} + \left(\frac{\partial u^{(0)}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y}\right) + \epsilon\left(\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}(x,y)}{\partial x}\right) + \cdots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$\epsilon \to 0$ としたときに $\varepsilon^{\epsilon}(x)$ は有限値でなくてはならないので，式 (5) における $O(\epsilon^{-1})$ の項 (最右辺第 1 項) は零である．すなわち，

$$
\frac{\partial u^{(0)}(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{6}
$$

式 (6) は変数 $u^{(0)}$ が y を引数に持たないことを意味している．したがって，

$$
u^{(0)} = u^{(0)}(x) \tag{7}
$$

式 (6) および式 (7) を踏まえて，式 (5) 最右辺における ϵ に関する各オーダーの項をまとめて

$$
\begin{cases}
\varepsilon^{(0)}(x,y) = \dfrac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} + \dfrac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y} \\
\varepsilon^{(1)}(x,y) = \dfrac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial u^{(2)}(x,y)}{\partial y} \\
\vdots
\end{cases}
\tag{8}
$$

[*1)] 正確には $u^{\epsilon}(x)$ の独立変数に適当なパラメータ ι が含まれると仮定し ($u^{\epsilon} = u^{\epsilon}(x,\iota)$)，$\{\varphi_n\}_{n\geq 0} = \{1,\ 1/\iota,\ 1/\iota^2,\ \cdots\}$ を漸近列とし，$\{a_n\}_{n\geq 0} = \{u^{(0)}(x,y),\ u^{(1)}(x,y),\ u^{(2)}(x,y),\ \cdots\}$ をそれらの係数とみなして漸近展開をしたのち，$\epsilon \equiv 1/\iota$ としたものである．

と定義する．式 (8) の表記を用いれば，式 (5) は

$$\varepsilon^{\epsilon}(x) = \varepsilon^{(0)}(x,y) + \epsilon\varepsilon^{(1)}(x,y) + \cdots \tag{9}$$

と書ける．次に，弾性係数 $C^{\epsilon}(x)$ も変位と同様に微小パラメータ ϵ を用いて漸近展開できるものとして

$$C^{\epsilon}(x) = C(x,y) = C^{(0)}(x,y) + \epsilon C^{(1)}(x,y) + \epsilon^2 C^{(2)}(x,y) + \cdots \tag{10}$$

と書く．式 (9) および式 (10) を式 $(1)_2$ に代入すれば

$$\begin{aligned}\sigma^{\epsilon}(x) &= \left(C^{(0)}(x,y) + \epsilon C^{(1)}(x,y) + \epsilon^2 C^{(2)}(x,y) + \cdots\right)\left(\varepsilon^{(0)}(x,y) + \epsilon\varepsilon^{(1)}(x,y) + \cdots\right)\\ &= C^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y) + \epsilon\left(C^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(1)}(x,y) + C^{(1)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y)\right) + \cdots\end{aligned} \tag{11}$$

と書ける．式 (11) 右辺の ϵ に関する各オーダーの項をまとめて

$$\begin{cases} \sigma^{(0)}(x,y) = C^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y) \\ \sigma^{(1)}(x,y) = C^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(1)}(x,y) + C^{(1)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y) \\ \vdots \end{cases} \tag{12}$$

と定義する．式 (12) の表記を用いれば，式 (11) は

$$\sigma^{\epsilon}(x) = \sigma^{(0)}(x,y) + \epsilon\sigma^{(1)}(x,y) + \cdots \tag{13}$$

と書ける．式 (13) を式 $(1)_3$ 左辺第 1 項に代入して

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\epsilon}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\sigma^{(0)}(x,y)}{\partial y} + \left(\frac{\partial\sigma^{(0)}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma^{(1)}(x,y)}{\partial y}\right) + \epsilon\left(\frac{\partial\sigma^{(1)}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma^{(2)}(x,y)}{\partial y}\right) + \cdots \tag{14}$$

さらに，外力 $f^{\epsilon}(x)$ に関してもこれまでと同様に微小パラメータ ϵ を用いて漸近展開できるものとして

$$f^{\epsilon}(x) = f(x,y) = f^{(0)}(x,y) + \epsilon f^{(1)}(x,y) + \epsilon^2 f^{(2)}(x,y) + \cdots \tag{15}$$

と書けるとする．式 (14) および (15) を式 $(1)_3$ に代入し，ϵ の任意性を考慮すると，以下の式が導かれる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^{(0)}(x,y)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\sigma^{(0)}(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma^{(1)}(x,y)}{\partial y} + f^{(0)}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\sigma^{(1)}(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma^{(2)}(x,y)}{\partial y} + f^{(1)}(x,y) = 0 \\ \vdots \end{cases} \tag{16}$$

最後に，式 $(1)_4$ で表わされる境界条件は，式 (4) に従って u^{ϵ} を漸近展開し，式 (7) および ϵ の任意性を考慮することで次のように書き換えられる．

$$\begin{cases} u^{(0)}(0) = u^{(0)}(L) = 0 \\ u^{(1)},\ u^{(2)},\ \cdots : \text{arbitrary} \end{cases} \tag{17}$$

1.2 Multiscale Governing Equations

式 $(16)_1$ を解くためには $\sigma^{(0)}(x,y)$ の具体形である式 $(12)_1$ が必要となり，さらに式 $(12)_1$ 中の $\varepsilon^{(0)}(x,y)$ は式 $(8)_1$ で表される．これらをまとめると，

$$\begin{cases} \varepsilon^{(0)}(x,y) = \dfrac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} + \dfrac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y} \\ \sigma^{(0)}(x,y) = C^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y) \\ \dfrac{\partial \sigma^{(0)}(x,y)}{\partial y} = 0 \\ u^{(0)}(0) = u^{(0)}(L) = 0\ , \quad u^{(1)}(x,y)\ :\ \text{arbitrary} \end{cases} \tag{18}$$

となる．式 (18) は $u^{(0)}(x)$ および $u^{(1)}(x,y)$ の 2 つ量が未知量の微分方程式となっている．また，式 (17) より境界条件は $u^{(0)}(x)$ のみ与えられ，$u^{(1)}(x,y)$ は任意である．

一方，式 $(16)_2$ を解くためには $\sigma^{(0)}(x,y)$ の具体形である式 $(12)_1$ に加え，$\sigma^{(1)}(x,y)$ の具体形である式 $(12)_2$ が必要となる．また，式 $(12)_1$ および式 $(12)_2$ に含まれる $\varepsilon^{(0)}(x,y)$ および $\varepsilon^{(1)}(x,y)$ の具体系はそれぞれ式 $(8)_1$ および式 $(8)_2$ で表わされる．これらをまとめると

$$\begin{cases} \varepsilon^{(0)}(x,y) = \dfrac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} + \dfrac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y} \\ \varepsilon^{(1)}(x,y) = \dfrac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial u^{(2)}(x,y)}{\partial y} \\ \sigma^{(0)}(x,y) = C^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y) \\ \sigma^{(1)}(x,y) = C^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(1)}(x,y) + C^{(1)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y) \\ \dfrac{\partial \sigma^{(0)}(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma^{(1)}(x,y)}{\partial y} + f^{(0)}(x,y) = 0 \\ u^{(0)}(0) = u^{(0)}(L) = 0, \quad u^{(1)}(x,y),\ u^{(2)}(x,y) : \text{arbitrary} \end{cases} \tag{19}$$

となる．式 (19) は $u^{(0)}(x)$，$u^{(1)}(x,y)$ および $u^{(2)}(x,y)$ の 3 つの量が未知量[*2)] の微分方程式となっている．また，式 (17) より境界条件は $u^{(0)}(x)$ のみ与えられ，$u^{(1)}(x,y)$ および $u^{(2)}(x,y)$ は任意である．

以上の議論を進めると，式 $(16)_3$ 以降についても微分方程式の具体形を書くことはできるが，その都度高次の u が未知量として増えていく上に，それらの量に対して境界条件が付与されていないため，結局所望の解 (特殊解) を求めることはできない．そこで，次節では高次の u に対していくつかの仮定を設けることでその問題の解決を図る．

1.3 Assumption

もし式 $(19)_5$ において $\dfrac{\partial \sigma^{(1)}(x,y)}{\partial y}$ の項を消すことができるならば，式 $(19)_5$ を解く上で式 $(19)_2$，および式 $(19)_4$ は不要となる．

$$\begin{cases} u^{(1)}(x,y)\ ,\ u^{(2)}(x,y) \\ C^{(0)}(x,y)\ ,\ C^{(1)}(x,y) \end{cases} \quad : \quad Y(x) - \text{periodic} \tag{20}$$

[*2)] $f^{(0)}(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0} f^{\epsilon}(x)$ であり，$f^{\epsilon}(x)$ は既知量なので，$\epsilon \to 0$ とすれば $f^{(0)}(x,y)$ は既知量である

$$\sigma^{(1)}(x,y) = \underbrace{C^{(0)}(x,y)}_{Y(x)-\text{periodic}} \left(\underbrace{\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial x}}_{Y(x)-\text{periodic}} + \underbrace{\frac{\partial u^{(2)}(x,y)}{\partial y}}_{Y(x)-\text{periodic}} \right) + \underbrace{C^{(1)}(x,y)}_{Y(x)-\text{periodic}} \left(\underbrace{\frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x}}_{\text{constant for } y} + \underbrace{\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y}}_{Y(x)-\text{periodic}} \right) \tag{21}$$

$\sigma^{(1)}(x,y)$ は $Y(x)$–周期性を持っている．Gauss の発散定理 $\sigma^{(1)}(x,y)$ の $Y(x)$–周期性と n_Γ の反 $Y(x)$–周期性より，

$$\int_{Y(x)} \frac{\partial \sigma^{(1)}(x,y)}{\partial y} \mathrm{d}y = \int_{\Gamma(x)} \sigma^{(1)}(x,y)\, n_\Gamma \, \mathrm{d}s = 0 \tag{22}$$

したがって，式 (20) の仮定を設ければ，領域 $Y(x)$ で体積分することで $\dfrac{\partial \sigma^{(1)}(x,y)}{\partial y}$ を消すことができる．

1.4 Characteristic Function

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[C^{(0)}(x,y) \left(\frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} + \frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y} \right) \right] = 0 \tag{23}$$

ここで，式 (23) を $u^{(1)}(x,y)$ について解くことを考えてみる．いま，$u^{(1)}(x,y)$ および $C^{(0)}(x,y)$ が次式のように x のみの関数と y のみの関数の積の形で書けるとする．

$$u^{(1)}(x,y) = u_{\mathrm{x}}(x) u_{\mathrm{y}}(y)\,, \qquad C^{(0)}(x,y) = C_{\mathrm{x}}(x) C_{\mathrm{y}}(y) \tag{24}$$

式 (24) を式 (23) に代入して整理すると，次式が得られる．

$$-\frac{1}{u_{\mathrm{x}}(x)} \frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} = \frac{C_{\mathrm{y}}(y) \dfrac{\partial u_{\mathrm{y}}(y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial C_{\mathrm{y}}(y)}{\partial y}} \tag{25}$$

式 (25) の左辺は x のみの関数，右辺は y のみの関数であるため，式 (25) が恒等的に成り立つには (左辺) = (右辺) = (x および y に依らない定数) でなくてはならない．この定数を λ と置けば，式 (25) より $u_{\mathrm{x}}(x)$ は

$$u_{\mathrm{x}}(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} \tag{26}$$

と書ける．また，式 (20) の仮定より，$u^{(1)}(x,y)$ は $Y(x)$-周期性を有している．そのため，$u^{(1)}(x,y) = u_{\mathrm{x}}(x)u_{\mathrm{y}}(y)$ のように変数分離した場合，$Y(y)$ は $Y(x)$– 周期関数でなくてはならない．そこで，$u_{\mathrm{y}}(y)$ を適当な $Y(x)$–周期関数 $\chi(y)$ を用いて次のように置く．

$$u_{\mathrm{y}}(y) = \lambda \chi(y) \quad \text{where} \quad \chi(y) \ : \ Y(x)-\text{periodic} \tag{27}$$

式 (26) および式 (27) より，$u^{(1)}(x,y)$ は次のように書ける．

$$u^{(1)}(x,y) = -\chi(y) \frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} \tag{28}$$

ここで，$\chi(y)$ は**特性関数**と呼ばれる．

$$\varepsilon^{(0)}(x,y) = \left(1 - \frac{\partial \chi(y)}{\partial y} \right) \frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} \tag{29}$$

1.5 Micro-scale Governing Equation

式 (29) を式 (18) に代入して整理すれば，**ミクロ構造の支配方程式**が次式のように書ける．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(C^{(0)}(x,y)\dfrac{\partial \chi(y)}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial\, C^{(0)}(x,y)}{\partial y} \\ \chi(y)\,,\; C^{(0)}(x,y) : Y(x)\text{– periodic} \end{cases} \tag{30}$$

なお，式 (30) を導出するに当たり，$\partial u^{(0)}(x)/\partial x$ の y に対する任意性[*3)] を用いていることに注意されたい．式 (30) は $\chi(y)$ を未知量とする微分方程式である．

1.6 Homogenized Elastic Moduli

Hill の関係式

$$\left\langle \sigma^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y)\right\rangle = \left\langle \sigma^{(0)}(x,y)\right\rangle\left\langle \varepsilon^{(0)}(x,y)\right\rangle \tag{31}$$

$$\left\langle \bullet \right\rangle = \frac{1}{v_{\mathrm{y}}}\int_{Y(x)} \left(\bullet \right) \mathrm{d}y \quad \text{where} \quad v_{\mathrm{y}} = \int_{Y(x)} 1\, \mathrm{d}y \tag{32}$$

式 (31) 左辺に式 $(19)_3$ および式 (29) を代入して

$$\begin{aligned} \left\langle \sigma^{(0)}(x,y)\varepsilon^{(0)}(x,y)\right\rangle &= \left\langle C^{(0)}(x,y)\left(\varepsilon^{(0)}(x,y)\right)^2\right\rangle \\ &= \left\langle C^{(0)}(x,y)\left(1-\frac{\partial \chi(y)}{\partial y}\right)^2\right\rangle\left(\frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x}\right)^2 \end{aligned} \tag{33}$$

式 (31) 右辺に式 (29) を代入して

$$\left\langle \sigma^{(0)}(x,y)\right\rangle\left\langle \varepsilon^{(0)}(x,y)\right\rangle = \left\langle \sigma^{(0)}(x,y)\right\rangle\left\langle 1-\frac{\partial \chi(y)}{\partial y}\right\rangle\frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} \tag{34}$$

$$\left\langle \sigma^{(0)}(x,y)\right\rangle = C^{\mathrm{H}}(x)\frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x} \tag{35}$$

$$C^{\mathrm{H}}(x) = \frac{\left\langle C^{(0)}(x,y)\left(1-\dfrac{\partial \chi(y)}{\partial y}\right)^2\right\rangle}{\left\langle 1-\dfrac{\partial \chi(y)}{\partial y}\right\rangle} \tag{36}$$

1.7 Macro-scale Governing Equation

式 (22) を考慮して式 $(19)_5$ の体積平均を取り，式 (35) を代入すれば，**マクロ構造の支配方程式**が次式のように書ける．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(C^{\mathrm{H}}(x)\dfrac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x}\right) = -\left\langle f^{(0)}(x,y)\right\rangle \\ u^{(0)}(0) = u^{(0)}(L) = 0 \end{cases} \tag{37}$$

式 (37) は $u^{(0)}(x)$ を未知量とする微分方程式である．

---

*3) $\dfrac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x}$ は y の関数ではないので，恒等式を成り立たせるためには y の関数の部分で等号が成り立たなくてはならない．