静止系 $K(x,y,z,t)$ と，それに対して x 軸正の方向へ速さ v で運動している系 $K'(x',y',z',t')$ を考える．時刻 $t=t'=0$ において両系の原点が一致し，そのとき各系の中心から光速度 c で光が発せられたとする．光は各系の中心から同心円状に広がり，それぞれ t および t' だけ時間が経過したときにはそれぞれの座標系において中心から ct および ct' の位置に見える．したがって，

$$x^2+y^2+z^2=(ct)^2 \tag{1}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2 \tag{2}$$

と書ける．ここで，K 系から K' 系への変換を考える．すなわち

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x' & = & a_1x & + & a_2y & + & a_3z & + & a_4t \\ y' & = & a_5x & + & a_6y & + & a_7z & + & a_8t \\ z' & = & a_9x & + & a_{10}y & + & a_{11}z & + & a_{12}t \\ t' & = & a_{13}x & + & a_{14}y & + & a_{15}z & + & a_{16}t \end{array}\right. \tag{3}$$

の各係数 a_1〜a_{16} を求める．いま，K' 系は K 系に対して x 軸方向に速さ v で移動しているので，K 系から見れば K' 系の $x'=0$ の位置は時刻 t には $x=vt$ の位置にあるように見える．したがって，

$$x'=A(x-vt) \tag{4}$$

となる．また，y' および z' は

$$y'=y, \qquad z'=z \tag{5}$$

となることは自明である．さらに，x' が x と t の関数なので，t' も x と t の関数として次のように書ける．

$$t'=Bx+Dt \tag{6}$$

式 (4)，(5) および (6) を式 (2) に代入して整理すると次式を得る．

$$(A^2-c^2B^2)x^2+y^2+z^2=c^2(-\beta^2A^2+D^2)t^2+2(vA^2+c^2BD)xt \tag{7}$$

ここで，$\beta\equiv v/c$ である．式 (7) の各項の係数を式 (1) と比較すれば，

$$\left\{\begin{array}{rcl} A^2-c^2B^2 & = & 1 \\ -\beta^2A^2+D^2 & = & 1 \\ \beta A^2+cBD & = & 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

と書ける．式 $(8)_2$ より

$$D^2=1+\beta^2A^2 \tag{9}$$

であり，式 $(8)_3$ より

$$B=-\frac{\beta A^2}{cD} \tag{10}$$

なので，これらを式 $(8)_1$ に代入して整理すれば

$$A^2-c^2\frac{\beta^2A^4}{c^2\left(1+\beta^2A^2\right)}=1 \quad \text{or} \quad A=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11}$$

となる．ここで，$v \to 0(\beta \to 0)$ で $x' = x$ となるので，式 (4) より $A > 0$ である．したがって，

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{12}$$

となる．また，式 (12) を式 (9) に代入すれば

$$D^2 = 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} \quad \text{or} \quad D = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{13}$$

となり，$v \to 0(\beta \to 0)$，$x' = x = 0$ で $t' = t$ であることを考慮すれば，式 (6) より $D > 0$ である．したがって

$$D = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14}$$

となる．最後に，式 (12) および式 (14) を式 (10) に代入すれば

$$B = -\frac{\beta}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{15}$$

となる．ここで，Lorentz 因子 γ を

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{16}$$

と定義すれば，

$$A = D = \gamma, \qquad B = -\frac{\beta}{c}\gamma \tag{17}$$

と書ける．したがって，最終的に K 系から K' 系への変換は次のように書ける．

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \quad \text{or} \quad x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \quad \text{or} \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \tag{18}$$

また，式 (18) を行列表示すれば

$$\begin{Bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\beta}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{19}$$

または

$$\begin{Bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{20}$$

と書くことができる．式 (19) または式 (20) で表される変換を Lorentz 変換と呼び，$v \ll 0(\beta \simeq 0, \gamma \simeq 1)$ のとき Galilean 変換に帰着する．