IX1304 Matematik, analys vt 2019

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Kapitel 9: Talföljder och serier

Mattias Hammar

Adams Kap. 9.1-9.2, 9.5-9.7

Innehåll

Kapitel 9: Talföljder och serier

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Sekvens

- Sekvens eller talföljd är en oändligt lång numererad lista av element (tal, termer – “terms”): $\{a_i\}$
- Exempel

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ the sequence of positive integers, *Divergent*

$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ the sequence of positive integer powers of $-\frac{1}{2}$.

Konvergent

- En sekvens kan vara konvergent eller divergent
- Representeras på olika sätt:

$\{1, 3, 6, 10, \ldots\}$ Uppenbar följd

$a_n = \frac{n}{n^2+1}$ Explicit uttryck för varje term

$a_1 = 1, a_{2=1}, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ Rekursiv formel (Fibonacci)

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Talföljder - Nomenklatur

- Talföljden har en övre (M) eller undre (L) begränsning ⇒ $a_n \geq L \; \forall \; n$ eller $a_n \leq M \; \forall \; n$
- Är **begränsad** om den har en övre och en undre begränsning ⇒ $|a_n| \leq K \; \forall \; n$
- Är positiv om $L = 0$ och negativ om $M = 0$
- Är **monotont ökande** om $a_{n+1} \geq a_n \forall \; n$ och **monotont minskande** om $a_{n+1} \leq a_n \forall \; n$
- Är **alternerande** om $a_{n+1} a_n < 0 \; \forall \; n$

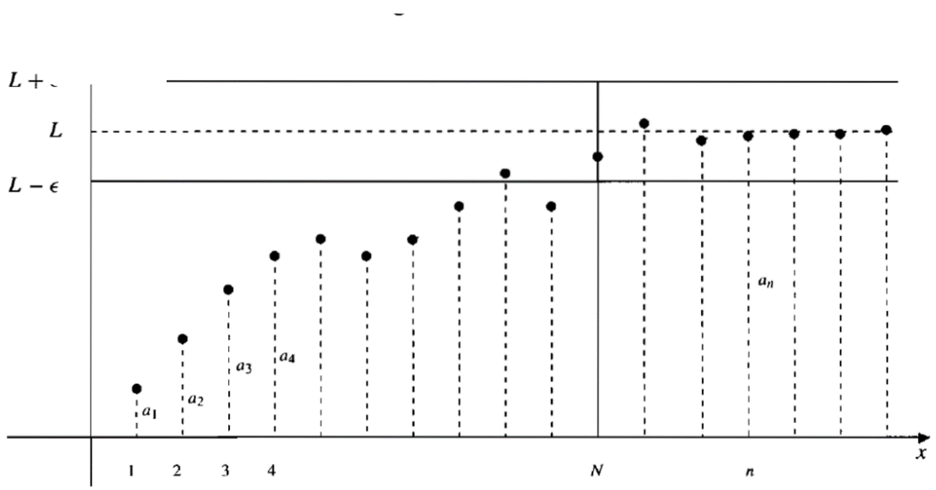
ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Talföljder
Konvergens och gränsvärde

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Specialfall av gränsvärde för en funktion:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{a^n\} = L \text{ om } a^n = f(n)$$



$$\lim_{n\to\infty}\{a^n\} = L \text{ om det för varje } \varepsilon \text{ existerar ett tal } N \text{ så att } n > N \Rightarrow |a^n - L| < \varepsilon$$

Talföljder
Konvergens och gränsvärde, Exempel

$$\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Metod: Ersätt $\{a^n\}$ med motsvarande funktionsvärde $f(x)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{a^n\} = L \text{ om } a^n = f(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$\left\{\text{l}'\text{Hopital}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+(1/x^2)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Talföljder
Konvergens och gränsvärde

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ **då** $|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \ln x^n = \lim_{n\to\infty} n \ln x = -\infty \text{ (eftersom } \ln x < 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln x} = 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ **då** $|x| \in \mathbb{R}$

$$N > |x|, n > N$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n}$$

$$< \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}$$

$$= \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} = K\left(\frac{|x|}{N}\right)^n, \quad K = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{1-N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

KTH VETENSKAP OCH KONST

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Talföljder
Exempel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \right] = 0 + 0 + 1 = 1$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

9.2 Serier

Talföljd (sekvens) - Numererad lista med oändligt många element:

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

Oändlig **serie** - Summan av alla talen i en sekvens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots$$

Delsumma (partial sum) av en serie:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n$$

Ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för att en serie ska vara konvergent är att motsvarande element i sekvensen går mot noll när n går mot oändligheten.

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Geometrisk serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

r: gemensam faktor: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= \quad\;\; ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (1-r)s_n = a - ar^n$$

$$\boxed{\Rightarrow s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

Exempel: $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{for} \; -1 < x < 1$

Geometrisk serie - Förräntning

Givet en årsränta om 5%, vilken initiell insättning krävs för \$1000 uttag i a) 10 år och b) för alltid?

År	Uttag (\$)	Kostnad
1	1000	$1000/1.05$
2	1000	$1000/1.05^2$
...	...	...
n	1000	$1000/1.05^n$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Total kostnad efter n år: $S_n = \frac{1000}{1.05} + \frac{1000}{1.05^2} + \cdots + \frac{1000}{1.05^n} =$

$$\frac{1000}{1.05}\left(1 + \frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.05^2} + \cdots + \frac{1}{1.05^{n-1}}\right) = \left\{\begin{matrix} \text{Geometrisk serie} \\ \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a(1-r_n)}{1-r} \\ a = 1, r = \frac{1}{1.05} \end{matrix}\right\} =$$

$$\frac{1000}{1.05}\left(\frac{1 - \frac{1}{1.05^n}}{1 - \frac{1}{1.05}}\right) = \begin{cases} n = 10 \Rightarrow \ S_n \approx \$7721 \\ n \to \infty \Rightarrow \ S_n \approx \$20000 \end{cases}$$

$n \to \infty$: Beloppet får inte minska och räntan ska täcka hela uttaget $\Rightarrow$ initiell insättning: $\$1000/0.05$

Geometrisk serie

Teleskopsumma (telescoping series): Nästa alla termer tar ut varandra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots$$

Partialbråksuppdelning: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \quad s_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Geometrisk serie

Exempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1-(1/3)} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/3}{1-(2/3)} = 4$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Nödvändigt villkor för konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ kan endast konvergera om } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- Om inte så kan serien inte konvergera
- Omvändningen gäller ej (se t.ex. den harmoniska serien)

Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \quad \text{divergerar eftersom} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = 1/2 > 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \sin(1/n)$ divergerar eftersom

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n n \sin\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0.$$

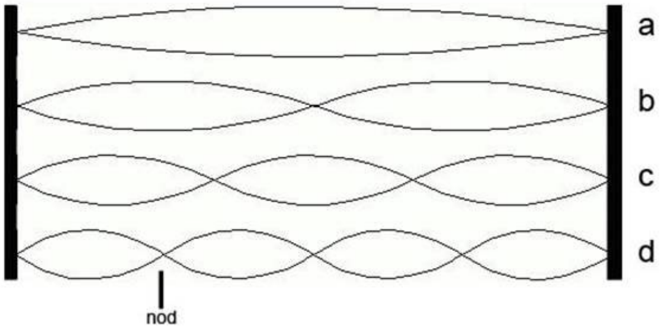
ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Harmonisk serie

"Harmonisk" eftersom den svarar mot våglängdsfördelningen av övertoner från en vibrerande sträng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

divergerar mot oändligheten trots att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

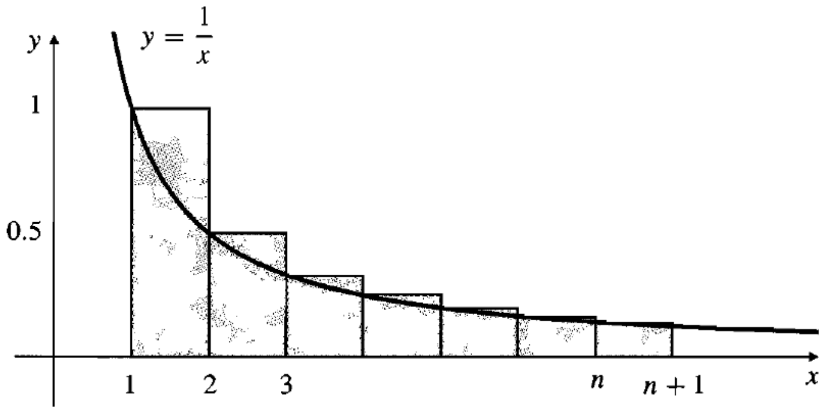


ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Harmonisk serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

$$\text{Delsumman } S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$



$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \text{ divergerar mot oändligheten}$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

9.5 Potensserier

Geometrisk serie: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

r: gemensam faktor

Potensserie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2\,(x-c)^2 \ldots$

a_n: Seriens koefficienter

c: konvergenscentrum (center of convergance)

$x = c \Rightarrow$ serien kovergerar till a_0

Taylor– och Maclaurinserier är potensserier

KTH VETENSKAP OCH KONST

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Konvergensfall för potensserie

För en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ gäller något av alternativen:

1 – Serien konvergerar endast för $x = c$

2 – Serien konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$

3 – Serien konvergerar för $|x - c| < R$ men divergerar för $|x - c| > R$

R kallas för seriens **konvergensradie** som definierar ett intervall för x,
$(c - R, c + R)$, för vilket serien konvergerar (mökligen inklusive ändpunkterna)

Fall 1 $\Rightarrow R = 0$

Fall 2 $\Rightarrow R = \infty$

Varför "Radie"?
R definierar ett maximalt avstånd från c för att fortfarande få konvergens. I det komplexa talplanet översetts det till en cirkel med radie R.

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Konvergensradie

Potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergerar där gränsvärdet

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)|x-c| < 1$$

$$\Rightarrow |x-c| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{L} = R$$

"Kvottestet" för konvergens av serie, se Adams s. 517

men serien divergerar om $|x-c| > R$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Konvergenscentrum, radie och intervall

Exempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n} = \left\{\begin{matrix}\text{Skriv om på formen} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\end{matrix}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1} \left(x+\frac{5}{2}\right)^n$$

$\Rightarrow$ **Konvergenscentrum** i $x = -\frac{5}{2}$

Konv.radien ges av $\frac{1}{R} = L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left| \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1}} \right| = \lim \frac{2}{3} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \frac{2}{3}$

Undersök ändpunkterna: $\begin{cases} c + 3/2 = -1 \\ c - 3/2 = -4 \end{cases}$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \qquad x = -4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1} \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

$\Rightarrow$ Bägge serierna konvergerar $\Rightarrow$ Konvergensintervall $[-4, -1]$

Konvergenscentrum, radie och intervall
Exempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad L = \left| \lim \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow R = \infty$, dvs konvergerar för alla x: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \qquad L = \left| \lim \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim(n+1) = \infty$$

$\Rightarrow R = 0$, dvs konvergerar endast för $x = 0$

ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

Skalning och addition av potensserier

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ och } \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ har } R = R_a \text{ och } R = R_b$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{har } R = R_a$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{har } R \geq \min(R_a, R_b)$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Multiplikation av potensserier

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

där $\quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kallas för **Cauchyprodukten** mellan serierna $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\Longrightarrow R = \min(R_a, R_b)$$

Cauchyprodukt

Exempel

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}}$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1\ )$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$, dvs Cauchyprodukt med $a_n = b_n = 1$

$$\Rightarrow \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \qquad (-1 < x < 1\ )$$

Derivering och integrering av potensserier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \qquad (-R < x < R),$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots, \qquad (-R < x < R).$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots, \qquad (-R < x < R)$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

De deriverade och integrerade serierna har samma konvergensradie *R* som den ursprungliga serien

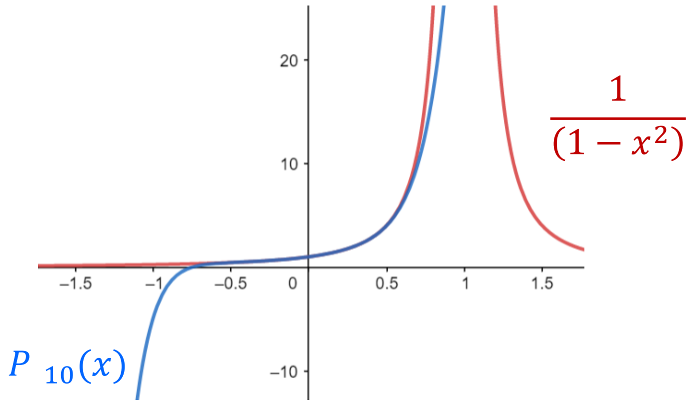
Derivering och integrering av potensserier

Exempel

Potensserie för $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ givet $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$



ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Derivering och integrering av potensserier

Exempel 2

Potensserie för $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ givet $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad (-1 < x < 1)$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,x^{n-2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Derivering och integrering av potensserier

Exempel 3

Potensserie för $\ln(1+x)$ givet $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$

$$\frac{1}{1-x} = \{t = -x\} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$\Longrightarrow \quad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\Rightarrow \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

9.6 Taylor och Maclaurinserier

En funktion $f(x)$ kan approximeras med en potensserie

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

$$\text{givet att } a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \text{ och } x \in (c-R, c+R)$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

är **Taylorserien** av f runt c (eller **Maclaurinnserien** om $c = 0$)

Med ett ändligt antal termer utläses detta som **Taylorutvecklingen** (eller **Maclaurinutvecklingen**) av f i närheten av c

Med En funktion $f(x)$ är **analytisk** i en punkt c om den har en konvererande Taylorutveckling för $x = c$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Härledning av Taylorutvecklingen

Varför är koefficienterna just $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$?

a_n ska väljas så att derivatorna blir rätt i punkten $x = c$!

1. Ställ upp uttrycken för derivatorna

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-c) + 4\cdot 3a_3(x-c)^2 + 5\cdot 4a_4(x-c)^3 + \cdots$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

2. Sätt in funtionsvärdet $\boldsymbol{x = c}$ och identifiera koefficienterna

$$f(c) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(c)$$

$$f'(c) = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(c)$$

$$f''(c) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}f''(c)$$

$$f^{(3)}(c) = 3\cdot 2a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3\cdot 2}f^{(3)}(c)$$

...

$$f^{(n)}(c) = n!\,a_n \Rightarrow \boldsymbol{a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)}$$

Taylorutveckling av e^x runt $x = c$

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Longrightarrow e^x = e^c + e^c(x-c) + \frac{1}{2}e^c(x-c)^2 + \cdots =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n = \lim_{n\to\infty} a_n (x-c)^n$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Konvergensradien: $R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$\Longrightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^c/(n+1)!}{e^c/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$\Longrightarrow R = \infty$, dvs serien konvergerar för alla x

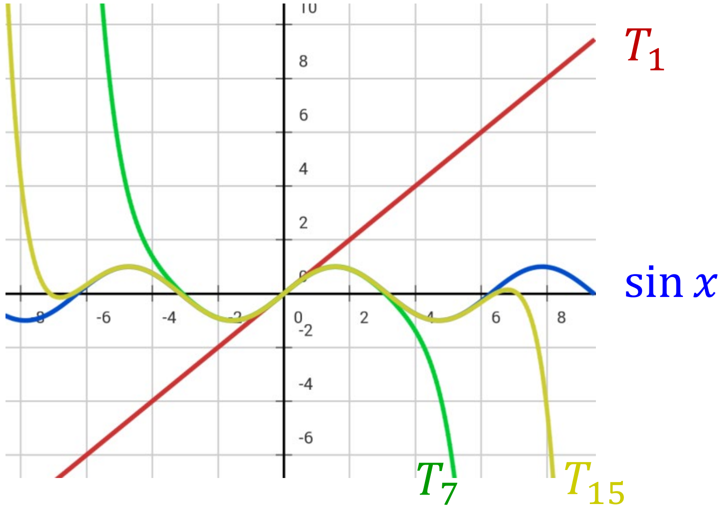
Trigonometriska funktioner

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{(for all } x\text{)},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{(for all } x\text{)}.$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Maclaurinutveckling för sin x med 1, 7 och 15 termer



Vanliga Maclaurinserier

Some Maclaurin series

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

KTH VETENSKAP OCH KONST

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Maclaurinserier från Maclaurinserier

$$e^x = e^c + e^c(x-c) + \frac{1}{2!}e^c(x-c)^2 + \cdots = \{c=0\} =$$

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ (Maclaurinserien för } e^x\text{)}$$

$$\Longrightarrow e^{-\frac{x^2}{3}} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOG

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Taylors formel för att uppskatta feltermen

Om funktionen $f(x)$ runt $x=c$ approximeras med ett Taylorpolynom $P_n(x)$ av ordning n ges felet av termen

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$E_n(x)$ har samma form som $P_{n+1}(x)$ men ska utvärderas för $x = s$ där **s har ett värde mellan c och x**

$\Longrightarrow$ **Lagranges restterm**: $E_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

För en uppskattning av felet i en approximation ska alltså s väljas mellan c och x så att E_n maximeras

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Lagranges restterm

Exempel

e^x har utvecklats med fyra termer runt $c = 2$ för att approximera värdet av e^3.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$
$$= e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

Felet uppsakttas mha Lagranges restterm: $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$

Här gäller $n = 3, x = 3, c = 2$

$$\Rightarrow E_n(x) = \frac{e^s}{4!}(3-2)^4 = \frac{e^s}{4!}$$

$s \in (2,3) \Rightarrow$ max fel fås för s=3 $\Rightarrow E_n(x) < \frac{e^3}{4!} = \frac{e^3}{24} \approx 0.84$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Taylorutveckling m.h.a. tabeller

- Ofta ganska omständlig algebra för att härleda Taylorutvecklingen direkt ur dess definition
- Alternativt kan man använda sig av tabullerade serieutvecklingar
- Exempel: Taylorutvecklingen av e^x runt $x = c$ härleds ur Maclaurinutvecklingen för e^x i formelsamlingen
- Ansätt $u = x - c$ vilket ger att utvecklingen sker runt noll och Maclaurinutvecklingen kan användas

$$e^x = e^{u+c} = e^c e^u = e^c \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots\right) =$$

$$e^c + e^c(x - c) + \frac{e^c(x - c)^2}{2!} + \cdots$$

9.7 Tillämpningar av Taylor och Maclaurinserier

Polynomapproximationer av funktioner har flera fördelar, bl.a.

- Approximation av funktionsvärden
- Enkel derivering och integrering
- Bestämma gränsvärden

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Approximation av funktionsvärde
Maclaurinutveckling vs Taylorutveckling

Approximation av $\cos(43°) = \cos\left(\frac{43\pi}{180}\right)$

Alternerande serie: Den första trunkerade termen bestämmer maximala felavvikelsen

Maclaurin: $\cos\frac{43\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \cdots$

Felterm efter n termer: $|E| \le \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n} < \frac{1}{(2n)!}$, $< 1\cdot 10^{-4}$ för $\boldsymbol{n = 4}$

Fyra termer ($n = 0 - 3$) behöver inkluderas

Taylor: $\cos\left(\frac{43\pi}{180}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{90} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{90}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 - \cdots\right) + \left(\frac{\pi}{90} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 + \cdots\right)\right]$$

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 < \frac{1}{20{,}000},$$

Tre termer behöver inkluderas

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Komplicerad integral

Approximation till $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Utnyttja Maclaurin utvecklingen $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\Longrightarrow \quad E(x) = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots\right) dt$$

$$= \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \times 2!} - \frac{t^7}{7 \times 3!} + \frac{t^9}{9 \times 4!} - \cdots\right)\Bigg|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \times 2!} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \frac{x^9}{9 \times 4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

Exempel $E(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1{,}320} \approx 0.747$

Tre gällande decimaler; alternerande serie
$\Longrightarrow$ första uteslutna termen ger en övre gräns för felet

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Gränsvärde

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2}$$ är av typen "0/0" men l'Hospital inte rättfram

Maclaurinutveckla!

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots-1\right)\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\cdots\right)}{\left(1-\left(1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\cdots\right)\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+2x^5+\cdots}{\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{3^4}{4!}x^4+\cdots\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2+2x+\cdots}{\left(\frac{9}{2}-\frac{3^4}{4!}x^2+\cdots\right)^2}=\frac{2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{8}{81}$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Sammanfattning

- Talföljder (sekvenser) $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

  Oändligt lång numererad lista av element

  Konvergens

- Serier $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$

  Summan av alla elementen i en sekvens

  Geometrisk serie $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

  Potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2\,(x-c)^2 \ldots$

  Konvergenstest – Konvergensradie $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

  Algebra, derivering, integration

- Taylor och Maclaurinutveckling

  Härledning genom definitionen $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

  Tabellmetoden

  Feltermen $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

  Tillämpningar

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY