Tartalom

MATEK 2 Jegyzet

Krusóczki Ádám

June 1, 2024

1 Előszó

Ez a jegyzet főképp a BME VIK villamosmérnöki szak Matematika II. tárgyára készült, de használhatja bárki, akinek jegyzetre van szüksége, lineáris algebából, végtelen sorokból vagy többváltozós függvényekből. Ebben a jegyzetben nincsen részletesen leírva a lineáris algebra sok része (egyenletrendszerek, Gauss-Jordan elimináció, determinánsok, mátrixok, mátrixműveletek), mert ezeket a témákat a Számítástudomány alapjai tárgyban tartották nekünk, amihez volt kidolgozott jegyzetünk.

A hatványsorokig ellenörzött, a matematika gyakorlatvezetőnk által, de előfordulhatnak hibák a jegyzetben! A hibák jelzését nagyon megköszönöm, erre a jegyzet GitHub repository-jában van lehetőség (Issues menüpont alatt).

Jó tanulást (és sok szerencsét a vizsga/zh-hoz)!

2 Lineáris algebra

2.1 Ismétlés

2.1.1 Egyenes egyenlete síkban

Adott $P(x_0, y_0)$ és $\underline{n} = (A, B)^T$ **normálvektor**. Ekkor az egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

2.1.2 Egyenes egyenlete térben

Adott $P(x_0, y_0, z_0)$ és $\underline{v} = (A, B, C)^T$ **irányvektor**. Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

2.1.3 Sík egyenlete

Adott $P(x_0, y_0, z_0)$ és $\underline{n} = (A, B, C)^T$ **normálvektor**. Ekkor a sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2.1.4 Sklaláris/Diadikus/Vektoriális szorzat

Adott

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

vektorok. Ekkor a **skaláris szorzatuk**:

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \underline{b} = x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1$$

És a **diadikus szorzatuk**:

$$\underline{a} \circ \underline{b} = \underline{a}\underline{b}^T = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0x_1 & x_0y_1 & x_0z_1 \\ y_0x_1 & y_0y_1 & y_0z_1 \\ z_0x_1 & z_0y_1 & z_0z_1 \end{bmatrix}$$

Végül a **vektoriális szorzatuk**:

$$\underline{a} \times \underline{b} = det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}$$

Ahol e_1, e_2, e_3 az egységvektorok. A vektoriális szorzat iránya merőleges mindkét vektorra.

2.2 Vektorterek

2.2.1 Definíció

Azt mondjuk, hogy V vektortér $\mathbb{F}$ számtest felett, ha értelmezett a következő két művelet:

1. $+ : V \times V \to V \qquad + (\underline{u}, \underline{v}) := \underline{u} + \underline{v} \in V$:
   - $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V \qquad \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
   - $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V \qquad \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$
   - $\exists! 0 \in V \qquad \forall \underline{u} \in V \qquad \underline{u} + 0 = \underline{u}$.
   - $\forall \underline{u} \in V \exists! -\underline{u} \in V \qquad \underline{u} + (-\underline{u}) = 0$.
2. $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V \qquad \cdot (\lambda, \underline{u}) := \lambda \underline{u} \in V$:
   - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \qquad \forall \underline{u} \in V \qquad \lambda (\mu \underline{u}) = (\lambda \mu) \underline{u}$
   - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \forall \underline{u} \in V \qquad (\lambda + \mu) \underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$
   - $\forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V \qquad \lambda (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v}$
   - $\exists! 1 \in V \qquad \forall \underline{u} \in V \qquad 1\underline{u} = \underline{u}$.

2.3 Lineáris függetlenség, Generátorrendszerek, Bázisok

2.3.1 Lineáris függetlenség

Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok. Ezek akkor alkotnak lineárisan független rendszert, ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

2.3.2 Generátorrendszerek

Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok. Ezek akkor alkotnak generátorrendszert **V vektortérben**, ha:

$$\forall \underline{w} \in V : \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i$$

2.3.3 Bázisok

Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok. Ezek akkor alkotnak bázist **V** vektortérben, ha:

1. Generátorrendszert alkotnak
2. Lineárisan függetlenek

Bármely vektor kifejezhető egyértelműen a bázis vektorok lineáris kombinációjaként.

2.3.4 Dimenzió

Egy vektortér dimenziója a bázisának számossága. Jelölése: $\mathbf{dim(V)}$.

2.3.5 Rang

Egy vektortér rangjának száma a benne lévő független vektorok maximális száma. Jelölése: $\mathbf{rank(V)}$.

2.3.6 Altér

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W is egy vektortér a V-beli műveletekre. Jelölése: $W \leq V$.

2.3.7 Ortogonális bázis/Gram-Schmidt ortogonalizáció

Az ortogonális bázis egy olyan bázis ahol a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra. A Gram-Schmidt ortogonalizáció egy olyan eljárás, amely egy tetszőleges bázist ortogonális bázissá alakít.

Adott $\underline{u}$ és $\underline{x}$ vektorok. Ekkor az $\underline{x}$ vektor $\underline{u}$ vektorra vetítése a következőképpen számítható:

$$\operatorname{proj}_{\underline{u}} \underline{x} = \frac{\langle \underline{u}, \underline{x} \rangle}{\|\underline{u}\|^2} \underline{u}$$

ahol $\langle \underline{u}, \underline{x} \rangle$ a két vektor skaláris szorzatát jelöli.

Az eljárás lényege, hogy az első vektor marad, a második vektort kivonjuk az első vektorra vetített második vektorból, a harmadik vektort pedig kivonjuk az első két vektorra vetített harmadik vektorból, és így tovább.

$$\begin{aligned}
\underline{v}_1 &= \underline{u}_1 & e_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\
\underline{v}_2 &= \underline{u}_2 - \operatorname{proj}_{\underline{v}_1} \underline{u}_2 & e_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} \\
\underline{v}_3 &= \underline{u}_3 - \operatorname{proj}_{\underline{v}_1} \underline{u}_3 - \operatorname{proj}_{\underline{v}_2} \underline{u}_3 & e_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} \\
\underline{v}_n &= \underline{u} - \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{proj}_{\underline{v}_k} \underline{u}_n & e_n &= \frac{v_n}{\|v_n\|}
\end{aligned}$$

Ha ortonormált bázist $(e_1 \dots e_n)$ szeretnénk, akkor az ortogonalizált vektorokat $(v_1 \dots v_n)$ osszuk le a hosszukkal.

2.4 Mátrixok, Inverz Mátrixok

2.4.1 Mátrixok felépítése

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ (vagy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times k}$) Mátrix n darab sorból áll és k darab oszlopból, ha $n = k$ akkor a mátrixot **négyzetes mátrixnak** nevezzük. A mátrix i-edik sorának j-edik elemét a_{ij}-nek jelöljük.

2.4.2 Műveletek mátrixokkal

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Ez a két mátrix akkor adható össze (vagy kivonható egymásból), ha $n = l$ és $k = m$, vagyis a dimenziójuk megegyezik. A művelet:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1k} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2k} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{l1} & a_{n2} + b_{l2} & \dots & a_{nk} + b_{lm} \end{bmatrix}$$

Ha egy mátrix skalárral szorzunk akkor minden eleme skalárral szorzódik. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ Ekkor:

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nk} \end{bmatrix}$$

Mátrix mátrixszal való szorzásának feltétele, hogy a bal oldali mátrix oszlopainak száma megegyezzen a jobb oldali mátrix sorainak számával. Legyen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ekkor az eredmény $n \times n$ dimenziójú ($\mathbb{R}^{\mathbf{n}\times n} \cdot \mathbb{R}^{n\times \mathbf{n}}$) mátrix lesz.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ m & n & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bu+cm & ay+bv+cn & az+bw+co \\ dx+eu+fm & dy+ev+fn & dz+ew+fo \\ gx+hu+im & gy+hv+in & gz+hw+io \end{bmatrix}$$

2.4.3 Mátrixok transzponálása, nyoma

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja a mátrix sorait és oszlopait felcserélve kapott mátrix. Jelölése: $\mathbf{A}^T$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Mátrixok nyoma a főátló elemeinek összege. Jelölése: $tr(\mathbf{A})$.
Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor:

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.4.4 Mátrixok inverze

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix akkor invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, hogy:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

Ilyenkor a mátrix inverze $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. Ezt Gauss-eliminációval szokták meghatározni.

2.5 Determináns

2.5.1 Definíció

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix determinánsa definíció szerint a következőképpen számítható:

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

ahol S_n az n elemű permutációk halmaza, $I(\sigma)$ az σ permutáció inverzióinak száma, $a_{i,\sigma(i)}$ az A mátrix i sorának $\sigma(i)$ oszlopának eleme. **Ezt a módszert nem használjuk mert nagyon számításigyényes.**

2.5.2 Egyedi szabályok (2x2, 3x3)

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix determinánsa a következőképpen számítható:

$$det\mathbf{A} = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix determinánsa a Szarrusz szabály szerint számítható:

$$det\mathbf{A} = det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

2.5.3 Kifejtési tétel

A kifejtési tétel szerint egy $n \times n$-es mátrix determinánsát kiszámolhatjuk az alábbi módon (oszlop szerinti kifejtés):

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

ahol $\mathbf{A}_{ij}$ az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorát és j-edik oszlopát kivéve tartalmazza (Aldetermináns).
Ha sor szerint akarjuk kifejteni, akkor a mátrix determinánsa a következőképpen számítható:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

Érdemes akkor használni, ha a mátrixban sok 0 található.

2.5.4 Vandermonde mátrix determinánsa

A Vandermonde mátrixok determinánsa a következőképpen számítható:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{j<i}(x_i - x_j)$$

Példa:

$$V(2,3,4,7) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{bmatrix} = (7-2)(7-3)(4-2)(4-3)(3-2) = 120$$

2.5.5 Determináns tulajdonságai

1. Ha a mátrixban van csupanulla sor vagy oszlop, akkor a determinánsa 0.
2. Ha a mátrixban van két azonos sor/oszlop, akkor a determinánsa 0.
3. Ha a mátrix egy sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop szorzottját egy λ számmal, akkor a determinánsa nem változik.
4. A mátrix sorát/oszlopát λ-val szorozva, a determinánsa λ-szorosa lesz. (Minden sorát λ-val szorozva, a determinánsa λ^n-szeres lesz.)
5. Ha a mátrixunk felsőháromszög mátrix (a főátló alatt csak 0-ák vannak), akkor a determinánsa a főátló elemeinek szorzata. (Gauss-elimináció)
6. Sorcsere esetén a determináns (-1)-el szorzódik.
7. $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^T)$
8. $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A}) \cdot det(\mathbf{B})$
9. $det(\mathbf{A}^k) = det(\mathbf{A})^k$ és $det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{det(\mathbf{A})}$

2.5.6 Szinguláris/Reguláris Mátrixok

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor szinguláris, ha a determinánsa 0. Egy mátrix akkor reguláris, ha a determinánsa nem 0.

1. Ha egy mátrix szinguláris, akkor nem invertálható.
2. Ha egy mátrix szinguláris, akkor $rank(\mathbf{A}) < n$
   Ha reguláris akkor $dim(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A})$.
3. Ha a mátrix szinguláris, akkor az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van, vagy nem létezik megoldása.
   Ha a mátrix reguláris, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

2.5.7 Cramer-szabály

Ha egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix reguláris, akkor az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldása a következőképpen számítható:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$$

ahol A_i az A mátrix, az i-edik oszlopát $\underline{b}$-vel helyettesítve.

2.5.8 Sajátvektor és Sajátérték

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sajátvektora $\underline{v}$ ($\underline{v} \neq \underline{0}$) és sajátértéke λ, ha:

$$\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

A sajátértékek számítása (**karakterisztikus egyenlet**):

$$det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai lesznek a sajátértékek. Az alábbi egyenletbe behelyettesítve a sajátértékeket, és megoldva az egyenletrendszert, megkapjuk a sajátvektorokat.

$$(\mathbf{A} - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$$

Mivel végtelen sok megoldása lehet az egyenletrendszereknek, a sajátvektorokat paraméteresen kapjuk meg. A paraméter sosem lehet 0, mert a sajátvektor nem lehet 0.

2.5.9 Diagonalizálhatóság

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor diagonalizálható, ha a mátrixnak van n darab lineárisan független sajátvektora. Ekkor a mátrixot a sajátértékekkel és sajátvektorokkal felírhatjuk a következőképpen:

$$\mathbf{D} = diag(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

Ahol a $diag(\mathbf{A})$ a mátrix diagonális alakja, $\mathbf{P}$ a sajátvektorokból álló mátrix.

$$\mathbf{D} = diag(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix}$$

Az A mátrix sajátfelbontása:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

Ezt fel tudjuk használni a mátrix egyszerűbb hatványozására is:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

2.6 Lineáris leképezések

2.6.1 Definíció

Legyen V és W két vektortér. Egy $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ akkor lineáris leképzezés, ha:

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V : \phi(\underline{v} + \underline{w}) = \phi(\underline{v}) + \phi(\underline{w})$$
$$\forall \lambda \in F, \forall \underline{v} \in V : \phi(\lambda \underline{v}) = \lambda \phi(\underline{v})$$

Ilyenkor nem biztos, hogy a teljes W vektortér előáll képekként. W azon elemei, amelyek előállnak a leképezés során, a ϕ képtere, vagyis $\mathbf{Im}(\phi)$.
A ϕ leképezés magtere a ϕ leképezésnek azon elemei, amelyek a nullvektorra képződnek le, azaz $\mathbf{Ker}(\phi)$.

$$\mathbf{Ker}(\phi) \leq V \text{ és } \mathbf{Im}(\phi) \leq W,$$
$$\dim(\mathbf{Ker}(\phi)) + \dim(\mathbf{Im}(\phi)) = \dim(V).$$

2.6.2 Lineáris leképezések további tulajdonságai

1. Ha ϕ lineáris leképezés, akkor $\phi(0) = 0$.
2. Ha ϕ lineáris leképezés, akkor $\phi(-\underline{v}) = -\phi(\underline{v})$.
3. Ha ϕ lineáris leképezés, akkor $\phi(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \phi(\underline{v}_1) - \phi(\underline{v}_2)$.

2.6.3 Lineáris leképezések mátrixa és inverze

Egy $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés mátrixa a következőképpen számítható:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi(\underline{e}_1) & \phi(\underline{e}_2) & \dots & \phi(\underline{e}_n) \end{bmatrix}$$

ahol $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ a V vektortér bázisvektorai.

Minden lineáris leképezés egy mátrixszal való szorzásnak felel meg. Legyen $\underline{v} \in \mathbf{V}$. Ekkor:

$$\phi(\underline{v}) = \mathbf{A}\underline{v}$$

Az inverz leképezés mátrixa a következőképpen számítható:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \phi^{-1}(\underline{e}_1) & \phi^{-1}(\underline{e}_2) & \dots & \phi^{-1}(\underline{e}_n) \end{bmatrix}$$

Tehát:

$$\phi^{-1}(\underline{v}) = \mathbf{A}^{-1}\underline{v}$$

Ezért egy leképezésnek akkor létezik inverze, ha a leképezés mátrixa invertálható.

2.6.4 Lineáris leképezések kompozíciója

Legyen $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ és $\psi : \mathbf{W} \to \mathbf{U}$ két lineáris leképezés. Ekkor a két leképezés kompozíciója a következőképpen számítható:

$$\psi \circ \phi : \mathbf{V} \to \mathbf{U} = \psi(\phi(\underline{v})) = \psi(\mathbf{A}\underline{v}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\underline{v})$$

Ezért a két leképezés kompozíciója egy újabb lineáris leképezés, aminek a mátrixa a két leképezés mátrixainak a szorzata.

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA}$$

$$\psi \circ \phi(\underline{v}) = \psi(\phi(\underline{v})) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\underline{v}) = \mathbf{C}\underline{v}$$

2.6.5 Áttérés másik bázisba

Egy $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezésének $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, mint a bázisvektorokra való képzésnél:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi(\underline{b}_1) & \phi(\underline{b}_2) & \ldots & \phi(\underline{b}_n) \end{bmatrix}$$

Ha egy újabb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bázisban szeretnénk felírni a mátrixot, akkor a következőképpen számítható:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi(\underline{a}_1) & \phi(\underline{a}_2) & \ldots & \phi(\underline{a}_n) \end{bmatrix}$$

Ha egyenesen az első bázisból szeretnénk a lineáris leképezést a másodikba, akkor a következőképpen számítható az új mátrix:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$$

Ahol P az (régi bázis szerinti) új bázisvektorokat tartalmazó mátrix.

Tehát a leképezés $\underline{v} \in \mathbf{V}$ vektorra a következőképpen számítható:

$$\phi(\underline{v}) = \mathbf{A}\underline{v} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP})\underline{v}$$

Itt $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ugyannak a leképezésnek más bázisban való mátrixai.

2.6.6 Nevezetes lineáris leképezések

A forgatások mátrixai tengelyek szerint 3D-ben (θ szögben, λ nyújtással):

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Vetítés mátrixa $\underline{n}$ normálvektorú egyenesre ($\mathbf{P}$):

$$\mathbf{P} = \frac{\underline{n} \circ \underline{n}}{\|\underline{n}\|^2} = \frac{1}{\|\underline{n}\|^2} \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{bmatrix}$$

Vetítés mátrixa $\underline{n}$ normálvektorú síkra ($\mathbf{A}$):

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\underline{n} \circ \underline{n}}{\|\underline{n}\|^2}$$

Tükrözés mátrixa egy $\underline{n}$ normálvektorú egyenesre ($\mathbf{M}$):

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I} = 2\frac{\underline{n} \circ \underline{n}}{\|\underline{n}\|^2} - \mathbf{I}$$

Tükrözés mátrixa egy $\underline{n}$ normálvektorú síkra ($\mathbf{N}$):

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\frac{\underline{n} \circ \underline{n}}{\|\underline{n}\|^2}$$

2.7 Euklideszi terek

2.7.1 Skalárszorzások

Euklideszi tereknek nevezzük azokat a vektortereket **T** számtest felett, amikre a vektorréraxiómákon kívül teljesül a következő skaláris szorzat definíciója:

1. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V : (\underline{v}, \underline{w}) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{T}$
2. $\forall \underline{v} \in V : \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$
3. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V : \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \overline{\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle}$ (komplex konjugált, ha $T = \mathbb{R}$, akkor kommutatív).
4. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \forall \lambda \in T : \langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$
5. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \forall \lambda \in T : \langle \underline{v}, \lambda \underline{w} \rangle = \overline{\lambda} \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$
6. $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V : \langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

Minden euklideszi térben van egyfajta hossz definíció, amit **euklideszi normának** hívunk ezt a következőképpen kapjuk meg:

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}$$

2.7.2 Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Minden euklideszi térben teljesül a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség:

$$|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$$

Az egyenlőség csak akkor áll fent ha $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan összefüggő.

3 Végtelen sorok, sorbafejtések

3.1 Sorok konvergenciája

3.1.1 Definíció

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy az $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ sorozat konvergál A-hoz, azaz:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A$$

3.1.2 Geometriai sor

A geometriai sor akkor konvergens, ha $|q| < 1$. Ez esetben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{ha } |q| < 1$$

Ahol az a_1 az első tag, q a hányados.
Ha $|q| \geq 1$, akkor a sor divergens.

3.2 Konvergencia kritériumok

3.2.1 Konvergencia szükséges feltétele

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

3.2.2 Leibniz-féle konvergencia kritérium

Ha az a_n sorozat monoton csökkenő és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor konvergens.

3.2.3 Abszolút konvergencia

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens. Fontos, hogy egy sor lehet konvergens akkor is, ha nem abszolút konvergens, ilyenkor **feltételesen konvergens**.

3.2.4 Gyök kritérium

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra, ha létezik olyan $q \in \mathbb{R}$, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, akkor:

1. Ha $q < 1$, akkor a sor abszolút konvergens.
2. Ha $q > 1$, akkor a sor divergens.
3. Ha $q = 1$, akkor a sor konvergencia szempontjából nem dönthető el.

3.2.5 Hányados kritérium

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra, ha létezik olyan $q \in \mathbb{R}$, hogy $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, akkor:

1. Ha $q < 1$, akkor a sor abszolút konvergens.
2. Ha $q > 1$, akkor a sor divergens.
3. Ha $q = 1$, akkor a sor konvergencia szempontjából nem dönthető el.

3.2.6 Összehasonlítási kritérium

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ két sor. Ha $0 \le a_n \le b_n$ minden n-re:

Majoráns kritérium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergens} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Minoráns kritérium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergens}$$

Különleges eset (hasznos ennél a kritériumnál, ha a polinom/polinom eset van):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergens ha } \alpha > 1 \text{ és divergens ha } \alpha \le 1$$

3.2.7 Integrál kritérium

Legyen $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő és pozitív függvény. Ekkor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergens} \Leftrightarrow \exists \int_{1}^{\infty} f(x)dx \text{ és véges}$$

3.3 Sorok összege

3.3.1 Teleszkopikus sorok összege

A teleszkopikus sorok olyan sorok, amiknél ki kell bontani az összeget, és a legtöbb tag kiesik. Ilyenkor érdemes felsorolni az első és az utolsó pár tagot. Példa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Ilyenkor szükség lehet a parciális törtekre bontásra, ugyanúgy mint az integrálásnál.

3.4 Hatványsorok

3.4.1 Definíció

Egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sor a hatványsor, ahol a_n konstansok, x a változó, x_0 pedig a hatványsor középpontja.

3.4.2 Konvergencia tartomány

Általában hatványsorok konvergenciatartományát a gyökkritériummal számoljuk ki. Ha végigcsináljuk gyökkritériummal és behelyettesítjük az x_0 középpontot, akkor a konvergencia tartományt kapjuk meg.

A konvergenciasugár (r) a következőképpen számítható:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

A hatványsor konvergencia tartománya (R) a következőképpen is számítható (Cauchy-Hadamard-tétel):

$$R = r^{-1} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

A hatványsor konvergencia tartománya (R) a következőképpen számítható (hányados kritérium):

$$R = r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Ahol R a konvergencia tartomány, ha x_0 a középpont.

A konvergencia tartomány szélein külön meg kell vizsgálni, az eredeti sorba behelyettesítve az $x_0 \pm R$ értékeket az x-helyére. A tartományon belül mindenhol abszolút konvergens a sor.

A konvergenciasugár lehet végtelen is, ilyenkor a sor minden valós számra konvergens. Ekkor a konvergencia tartomány a valós számok halmaza.

3.5 Taylor sorok, Mclarin sorok

3.5.1 Definíció

Egy $f(x)$ függvény Taylor sorfejtése a következőképpen számítható:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ahol $f^{(n)}(x_0)$ az n-edik derivált értéke az x_0 pontban. A **Mclarin sorok** a Taylor sorok speciális esetei, ahol $x_0 = 0$.

3.5.2 Nevezetes Taylor sorok x_0 körül

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x - x_0)^n \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1} \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} \\
\ln(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x - x_0)^n \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\
\cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} \\
\sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1}
\end{aligned}$$

3.5.3 Taylor sorok előállítása deriválással

Ha egy olyan függvényt kell sorba fejteni aminek nem tudjuk a Taylor sorát, de a deriváltjáét tudjuk, akkor a következőképpen számítható a sor:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Erre a módszerre példa a $f(x) = \arcsin(x)$ függvény sorba fejtése ($x_0 = 0$ körül):

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3.6 Fourier Sorok

3.6.1 Hasznos Trigonometria alapok

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) \\
\cos(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right) \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right) \\
\sin(\alpha) &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \\
\cos(\alpha) &= \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}
\end{aligned}
$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\cos(kx)dx \text{ (tetszőleges a-ra)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\sin(kx)dx \text{ (tetszőleges a-ra)}$$

Trükk az addíciós tételek megjegyzésére: Vegyük 2D-ben az α és β szögekkel való forgatás mátrixát.

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

Ekkor a szorzást levezetve megkapjuk az addíciós tételeket kifejtve.

3.6.2 Definíció

A $\cos(kx)$ és a $\sin(kx)$ ortonormált bázist alkotnak a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Tehát bármely $f(x)$ függvényt le tudunk írni ezen függvények lineáris kombinációjaként:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Ahol az a_k és b_k együtthatókat a következőképpen számíthatjuk (C egy általunk választott konstans, ahol a függvény ismert, általában -π):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x)dx$$

$$b_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \sin(kx)dx$$

Ha $f(x)$ páros, akkor a b_k együtthatók 0-k lesznek, mert a $\sin(kx)$ függvény páratlan, és a páros függvényekkel való szorzatuk integrálja 0.

Ha $f(x)$ páratlan, akkor a a_k együtthatók 0-k lesznek, mert a $\cos(kx)$ függvény páros, és a páratlan függvényekkel való szorzatuk integrálja 0.

3.6.3 Fourier sorok komplex alakja

A Fourier sorokat komplex alakban is fel lehet írni a következőképpen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Ahol a c_k együtthatókat a következőképpen számíthatjuk:

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k)$$

4 Többváltozós analízis

4.1 Definíció, Ábrázolás

Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt többváltozós függvénynek hívunk. Az $n = 2$ esetben a függvényt ábrázolhatjuk 3D-ben, az $n = 3$ esetben 4D-ben.

Ábrázolásnál színskálával is ábrázolhatjuk a függvény értékeit, ahol a színek a függvény értékét jelzik., de akár wireframe-el is ábrázolhatjuk a függvényt.

4.2 Parciális deriváltak

Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjait a következőképpen számíthatjuk:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Lényegében a parciális deriváltak a függvény értékének a változását mutatják az adott változó szerint. A deriváláskor a többi változót konstansnak tekintjük, és eszerint deriválunk.

Erre egy példa a $f(x, y) = yx^2 + y^2$ függvényre:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2yx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$$

4.2.1 Első- és másodrendű parciális deriváltak

Az elsőrendű parciális deriváltakat a következőképpen jelöljük:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ f'_y &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

A másodrendű deriváltakat a következőképpen jelöljük:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f''_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ f''_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Az első kettő a tisztán másodrendű parciális derivált, az utolsó pedig a vegyes másodrendű parciális derivált.

Ha a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, akkor a függvény **kétszer totálisan deriválható (Young-tétel)**.

4.3 Lokális szélsőértéktípusok

Szélsőérték típusokból 3 féle létezik:

1. Lokális minimum
2. Lokális maximum
3. Nyereg-pont

Ezek rendre a következőképpen néznek ki:

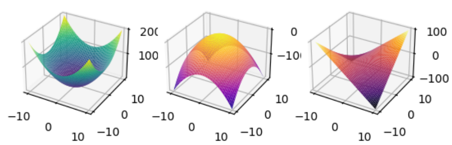

Figure 1: Lokális szélsőértéktípusok

4.3.1 Hesse-mátrix

A Hesse-mátrix a következőképpen számítható:

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

A Hesse mátrix determinánsa a következőket árulja el a szélsőértékről:

1. Ha a determináns pozitív, akkor szélsőértéke van
2. Ha a determináns negatív, akkor nyeregpontja van.
3. Ha a determináns 0, akkor nem dönthető el, további vizsgálat kell.

Hesse mátrix n változós függvényekre:

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

4.3.2 Lokális szélsőértékek megtalálása

A lokális szélsőértékeket a következőképpen számíthatjuk:

1. Számítsuk ki a függvény parciális deriváltjait.
2. Rendezzük egy homogén egyenletrendszerbe a parciális deriváltakat, és oldjuk meg.
3. Az így kapott pontok a stancionárius pontok, ahol a függvény szélsőértékei lehetnek.
4. A stancionárius pontokat helyettesítsük a Hesse-mátrixba.
5. Ha az első sarokfőminor ($\mathbf{H_{11}}$) és a második sarokfőminor (determináns) is pozitív, akkor **lokális minimumja van**.
6. Ha az első sarokfőminor ($\mathbf{H_{11}}$) negatív és a második sarokfőminor (determináns) pozitív, akkor **lokális maximumja van**.
7. Ha a determináns 0, akkor nem dönthető el, további vizsgálat kell.

4.3.3 Feltételes szélsőértékek megtalálása, Lagrange multiplikátor módszer

Ha egy függvénynek egy feltétel szerint keressük a szélsőértékeit, akkor a következőképpen számíthatjuk ki:

Legyen $f(x, y)$ a függvényünk, és legyen $g(x, y)$ a feltételünk. Ekkor a Lagrange-függvény a következőképpen néz ki:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Ezután a szélsőértékeket a következőképpen számíthatjuk:

1. Számítsuk ki a Lagrange-függvény parciális deriváltjait.
2. Rendezzük egy homogén egyenletrendszerbe a parciális deriváltakat, és oldjuk meg.
3. Így eggyel kevesebb egyenlet van mint változó ezért a feltétel egyenletét is felhasználjuk.
4. Megkapjuk a stancionárius pontokat, ahol az $L(x, y, \lambda)$ függvény feltétel szerinti szélsőértékei lehetnek.
5. Behelyettesítjük a Hesse-mátrixba a stancionárius pontoka és kiértékeljük a szélsőértékeket.

4.4 Szintvonalak

Egy többváltozós függvényt szintvonalakkal is le tudunk írni. A szintvonalak a következőképpen néznek ki:

$$f(x, y) = C \quad \text{ahol C egy konstans}$$

A szintvonalakat ábrázolva a függvény értékei egyenlőek lesznek a szintvonalakon, hiszen egy síkidom egyenletét írják le.

Ha a szintvonalak belülről kifele sűrűsödnek, és a függvény belefe növekedik, akkor a függvény konkáv, ha kifele növekedik, akkor konvex, ha egyenletesen sűrűsödnek, akkor egyik sem (lineáris).

Lehetséges hogy egy szintvonal nem létezik, vagy nincs ott megoldása a függvénynek, ekkor ott a függvény nem értelmezhető.

4.5 Érintősík

Míg egyváltozós függvényeknél érintőt kerestünk, kétváltozósnál érintősíkot kerestünk. Az érintősík egy adott pontban érinti a függvényt, és a függvény értékének a változását mutatja az adott pontban.

Az érintősík egyenlete a következőképpen számítható $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ezt nullára rendezve megkapjuk az érintősík egyenletét. Az érintősík normálvektora a következőképpen számítható:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.6 Gradiens

A gradiens egy olyan vektor, ami a függvény értékének a változását mutatja az adott pontban. A gradiens a következőképpen számítható:

$$\underline{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

A gradiens iránya a legnagyobb növekedés iránya, a gradiens hossza pedig a legnagyobb növekedés mértéke.

Az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számíthatjuk:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \underline{\nabla} f \cdot \underline{v}$$

Ahol $\underline{v}$ a vizsgált irány vektora. Ha $\underline{v}$ nem egységnyi hosszú, akkor el kell osztani a saját hosszával:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\underline{\nabla} f \cdot \underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

4.7 Implicit függvények deriválása

Egy $F(x, y) = 0$ implicit függvény deriválását a következőképpen számíthatjuk:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$x' = \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Fontos hogy $F(x, y) = 0$ nem kétváltozós függvény, hanem egyenlet, ezért a deriválásnál figyelni kell a változókra. Tehát ezzel a módszerrel a Matematika 1.-ben tanult implicit deriválást tudjuk alkalmazni egyszerűbben.

Ez akár n változós implicit függvényekre is alkalmazható:

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_i}}$$

4.8 Többváltozós függvények határértékszámítása

4.8.1 Definció kétváltozós függvényekre

B az $f(x, y)$ határértéke a (x_0, y_0) pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $(x, y) \in B_\delta((x_0, y_0))$ és $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, vagyis:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

ekkor:

$$|f(x, y) - B| < \varepsilon$$

Ezeknél a feladatoknál hasznos lehet a háromszög egyenlőtlenség:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

4.8.2 egyszerűbb határértékek számítása

Lehetséges (nem ezen az egyetemen), hogy behelyettesítjük x-et és y-t és létezik a határérték:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) = B$$

Ha polinom/polinom függvényünk van akkor néha a **szorzattá alakítás** segíthet:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{x^2y - 4xy}{yx^2 - 16y} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{y(x^2 - 4x)}{y(x^2 - 16)} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{x}{x - 4} = \frac{1}{2}$$

4.8.3 Egyenes mentén való határérték számítása

Veszünk egy $y = mx+b$ egyenest ami érinti x-et és y-t, és ezen az egyenesen számoljuk a határértéket. Ekkor a következőképpen számíthatjuk a határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{x\to x_0} f(x, mx + b)$$

Itt sajnos ahhoz hogy létezzen a határérték, minden m értékre a határértéknek ugyanaznak kell lennie. Ha ez nem teljesül, akkor a határérték nem létezik. De ha nem függ m-től, akkor a határérték létezik. Ne felejtsük el a konstans egyenest se.

4.8.4 Átviteli elv

Ha egy függvény egyenletesen konvergens egy sorozatban, akkor a határértéke a függvénynek a sorozat határértékével egyenlő.

Ennek gyakori fajtáka a polárkoordinátás helyettesítés:

$$x = \rho\cos(\phi) \quad y = \rho\sin(\phi) \quad \rho \to 0 \quad \phi = \text{tetszőleges konstans}$$

Ezeket felhasználva a határértéket könnyen ki tudjuk számolni (mivel a $\cos(\phi)$, és a $\sin(\phi)$ véges).

4.9 Totális és parciális deriválhatóság

Az $f(x, y)$ függvény totálisan deriválható (x_0, y_0) helyen ha $\exists A, B \in \mathbb{R}$ amire igaz, hogy:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - (A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0))}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Ha itt a határértkben y-t y_0-nak vagy x-et x_0-nak választjuk, akkor a parciális deriváltakat kapjuk:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = A$$

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = B$$

Itt az A és B értékek a függvény parciális deriváltjai a (x_0, y_0) pontban, amiket az érintősík egyenletében is használhatunk.

$$f(x, y) \text{ totálisan deriválható } \Rightarrow f(x, y) \text{ parciálisan is deriválható}$$

Ez fordítva nem igaz, tehát ha a függvény parciálisan deriválható, akkor nem biztos hogy totálisan is deriválható.

4.9.1 Young tétel

$$f(x, y) \text{ kétszer totálisan deriválható } \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

5 Többváltozós függvények integrálása

5.1 Kettős integrál

Mígy az egyváltozós integrál a függvény alatti területet számolta, addig a kettős integrál a függvény alatti test térfogatot számolja.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Az integrálás sorrendje tetszőleges, viszont figyelni kell hogy a határok is megfelelőek legyenek.

5.1.1 Kettős integrál számítása téglalap alakú tartományon

A kettős integrált elkezdjük a belső integrálással, majd a külső integrálással számoljuk ki. Ilyenkor a külső integrálás változója konstansnak számít, és ugyanúgy integráljuk. Amint megvan a primitív függvény, behelyettesítjük ay első integrálás határait és integrálunk a külső változó szerint.

Példa egy ilyen integrálra:

$$\int_0^1 \int_0^2 (x^2+y)dydx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^1 (2x^2+2)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

5.1.2 Kettős integrál számítása normáltartományon

Ha a tartomány nem téglalap alakú, akkor a következőképpen számíthatjuk a kettős integrált:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

Ahol $g(x)$ és $h(x)$ a tartomány x tengely menti határai és D a tartomány. Ilyenkor a belső integrálásban a y-tól (amelyik nem tartalmaz változót) függő határokat kell behelyettesíteni.

A tengely menti határokat úgy kapjuk meg, hogy a tartományt a $y = g(x)$ és $y = h(x)$ függvényekkel határoljuk.

5.1.3 Kettős integrál határai

Sokszor érdemes az integrálás megkezdése előtt megnézni, hogy esetleg a a határok cseréjével egyszerűsíthető-e az integrál.

Például:

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{2x\arcsin(xy)}{\sqrt{1+(xy)^2}}dxdy = \int_1^2 \int_0^1 \frac{2x\arcsin(xy)}{\sqrt{1+(xy)^2}}dydx$$

Itt jóval egyszerűbb először a y szerint integrálni, hiába eredetileg x szerint volt megadva.

5.1.4 Helyettesítéses integrálás

Helyettesítéses integrálásnál ha egy $x = x(u,v)$ és $y = y(u,v)$ helyettesítést végzünk, akkor a Jacobi-féle determináns abszolút értékének segítségével tudjuk a kettős integrált átalakítani (fontos, hogy a determináns nem lehet nulla).

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Ahol a Jacobi-féle determináns a következőképpen számítható:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|$$

5.1.5 Kettős integrál számítása polárkoordinátákban

Ha mondjuk egy kör alakú tartományban szeretnénk számolni a kettős integrált (de sok más esetben is), akkor érdemes polárkoordinátákat használni.

$$x = r\cos(\phi) \quad y = r\sin(\phi) \quad r \in [0,R] \quad \phi \in [0,2\pi]$$

Ahol r a sugarat, ϕ pedig a szöget, az R pedig a kör sugarát jelöli. Ekkor a kettős integrált a következőképpen számítható:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R rf(r\cos(\phi),r\sin(\phi))drd\phi$$

Itt azért szorozzuk r-rel a függvényt, mert a Jacobi-féle determináns abszolút értéke ilyenkor r.

5.2 Hármas integrál

A hármas integrál már inkabb fizikai alkalmazásokban fordul elő, ezzel például térfogatot, nyomást, sűrűséget, vagy töltéseloszlást lehet számolni.

5.2.1 Hármas integrál számítása téglalap alakú tartományon

A hármas integrálás ugyanúgy működik mint a kettős, téglalap alapú tartományon, csak itt már 3 dimenzióban számolunk.

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x,y,z)dzdydx$$

5.2.2 Hármas integrál számítása normáltartományon

Ha a tartomány nem téglalap alakú, akkor a következőképpen számíthatjuk a hármas integrált:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Ahol $g(x)$ és $h(x)$ a tartomány x tengely menti határai, $p(x,y)$ és $q(x,y)$ a tartomány y tengely menti határai és D a tartomány.

5.2.3 Helyettesítéses integrálás

Helyettesítéses integrálásnál ha egy $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ és $z = z(u,v,w)$

helyettesítést végzünk, akkor a Jacobi-féle determináns abszolút értékének segítségével tudjuk a hármas integrált átalakítani (fontos, hogy a determináns nem lehet nulla).

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint_{D_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

Ahol a Jacobi-féle determináns a következőképpen számítható:

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right|$$

5.2.4 Hármas integrál számítása hengerkoordinátákban

Ha henger alakú tartományban szeretnénk számolni a hármas integrált, akkor érdemes hengerkoordinátákat használni.

$$x = r\cos(\phi) \quad y = r\sin(\phi) \quad z = z \quad r \in [0, R] \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad z \in [a, b]$$

Szerencsére a Jacobi-féle determináns itt is r, így a hármas integrált a következőképpen számítható:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^R rf(r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)drd\phi dz$$

5.2.5 Hármas integrál számítása gömbkoordinátákban

Ha gömb alakú tartományban szeretnénk számolni a hármas integrált, akkor érdemes gömbkoordinátákat használni.

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \quad y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \quad z = r\cos(\theta)$$

$$r \in [0, R] \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad \theta \in [0, \pi]$$

A Jacobi-féle determináns itt $r^2\sin(\theta)$, így a hármas integrált a következőképpen számítható:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2\sin(\theta)f(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))drd\theta d\phi$$