OOP 第二周作业文档

2019010175 孔瑞阳 土木 92

一、功能说明

输入两个正整数 a,b。
当整数 a,b 不是正整数的时候，提示输出的不是正整数，并要求重新输入。

先输出 a,b 的最大公约数。
然后输出计算最大公约数的时间。
然后输出 a,b 的最小公倍数。
最后输出计算最小公倍数的时间。

二、模型

1、欧几里得算法

首先，记(a,b)为 a,b 的最大公约数，[a,b]为 a,b 的最小公倍数。

那么可能显然地得到若干个性质。
(1) (a,a) = (a,0) = a
(2) (a,b) = (a,a+b) = (a,ka+b)
(3) (a,b) = (a, b mod a) （结论 (2) 的推论）

多次运用上述性质，即可求得两个数的最大公约数。

2、算法实现

设置一个函数 int gcd(int a, int b)，用来计算 a 和 b 的最大公约数。

根据性质(3)，我们就可以得到 gcd(a,b) = gcd(b, a mod b)。
利用递归算法不断进行递归，直到 b=0，那么根据性质(1)，就可以得到 gcd(a,b)=a。

再利用 [a,b] = a * b / (a,b)，可以求出 a 和 b 的最小公倍数。
（为了防止结果不溢出但是 a*b 溢出的情况，实际计算时可以表示为 a / (a,b) * b）。

关于计时，采用 clock() 函数，算法运行前后的 clock 差就是算法所花费的时钟周期数。
那么再除以 CLOCKS_PER_SEC，即可得到算法运行的时间（秒数）。

3、算法时间复杂度的证明

引理：若 a <= b，则 b mod a < b/2。

引理的证明：

(1) 若 a <= b / 2，则 b mod a < a <= b / 2，结论成立。

(2) 若 b / 2 < a <= b，则 b mod a = b - a < b / 2，结论成立。

也就是说，我们每进行一次递归，a 和 b 中的某一个数就会减少为原来的 1/2，也就是说，总共只会进行 O(log a + log b)次递归，那么算法的时间复杂度就是 O(log a + log b)。

三、验证

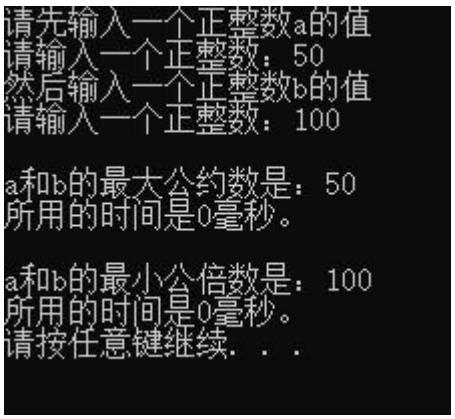
1、关于输入内容的验证

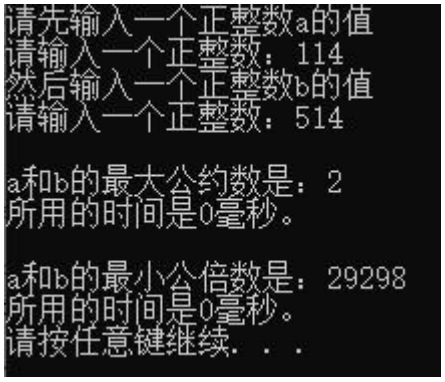
由于程序的输入内容直接使用的上周作业已经编写过的代码，并且在上周文档中已经叙述过输入验证的内容，所以在此不再赘述。

2、关于计时功能的验证

第一步：对于比较小的数据进行手算。

首先，根据 二、3 的内容，计算最大公约数是非常非常快的，以至于我们如果直接在源程序上输出验证，只会得到以下这样子的内容：





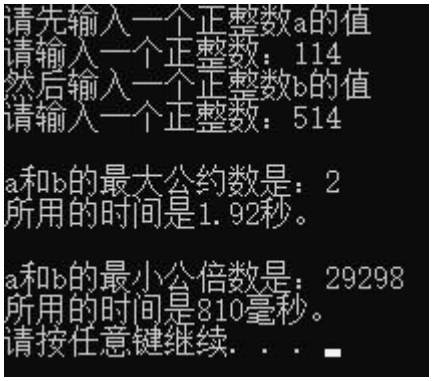
也就是说会直接显示 0 毫秒。

那么为了验证这个部分的正确性，我们可以利用 Sleep 函数，在计时周期内不仅考虑计算 gcd/lcm 的时间，再加上一段人为规定的时间。

```
cal.timeStart();
tmp = integerGcd(a.m_data, b.m_data);
Sleep(1919); // 计时验证用
cal.timeEnd();
```

```
cal.timeStart();
tmp = integerLcm(a.m_data, b.m_data);
Sleep(810); // 计时验证用
cal.timeEnd();
```

不妨设置为 1919ms 和 810ms。如果计时功能正确，那么最终的输出也应该是这个时间。输出结果如下：



符合预期，计时功能没有出现问题。

3、关于计算 gcd, lcm 的正确性验证

首先，对于规模较小的数据，可以直接通过枚举的方法判断递归算法的正确性。

具体地来说，不妨先验证 a,b <= 100 的所有数，我们可以先通过性质 3 的递推用一个二维数组把所有情况的 gcd 先生成出来，再一个个通过编写的 gcd 程序判断两种方法的答案是否相同。

```
void integerGcdCheck1()
{
    int gcdMatrix[101][101]; // gcd矩阵
    for (int i = 0; i <= 100; ++i) gcdMatrix[i][0] = gcdMatrix[0][i] = i;
    for (int i = 1; i <= 100; ++i)
        for (int j = 1; j <= i; ++j)
            gcdMatrix[j][i] = gcdMatrix[i][j] = gcdMatrix[j][i % j]; // 初始化gcd矩阵

    bool flWrong = 0;
    for (int i = 0; i <= 100; ++i)
        for (int j = 0; j <= 100; ++j)
            if (integerGcd(i, j) != gcdMatrix[i][j]) flWrong = 1; // 寻找错误

    if (!flWrong) cout << "Plan1 : Accept!" << endl; // 如果没有错误输出这个方案正确
}
```

如果没有问题，那么程序就会输出 Accept!

```
Plan1 : Accept!
```

没有问题。

事实上，由于 gcd 算法是一个一般性的算法，并且较小的数据已经包括了若干特殊情况（比如 a=b, a=0），所以在较小的数据下没有问题的话基本上可以证明算法和程序正确。

而当数据规模比较大的时候，不管是对于时间还是空间，枚举不再适用。那么我们可以

考虑多次随机生成一组数来验证程序的正确性。（自动验证？）

首先 gcd 一定要是 a 和 b 的公约数。

```
if (a % Gcd != 0 || b % Gcd != 0)
{
    cout << "Wrong Answer! a = " << a << ", b = " << b << ", gcd = " << Gcd << endl;
}
```

其次，为了要是最大的公约数，所以 a/gcd 和 b/gcd 是没有公约数的，可以枚举 a/gcd 的公约数进行验证。

```
a /= Gcd, b /= Gcd; // 一定要是最大的公约数
for(int i = 2; i * i <= a; ++i)
    if (a % i == 0 && b % i == 0)
    {
        cout << "Wrong Answer! a = " << a << ", b = " << b << ", gcd = " << Gcd << endl;
    }
```

如果随机若干次都没有问题，那么就基本可以保证在大数情况下的正确性。

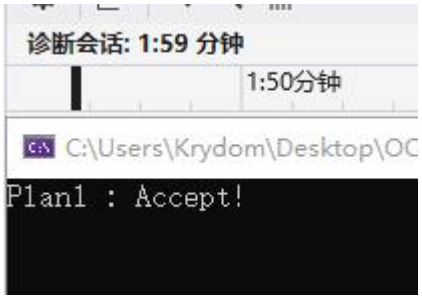
不妨先随机个 5000 次。 `integerGcdCheck2(5000);`

```
Plan1 : Accept!
Plan2 : Accept!
```

依然没有问题。

```
integerGcdCheck2(-1);     // gcd验证方案2，参数为随机次数,-1表示不断随机
```

接下来，我们试着：直到出现错误的时候验证停止。如果没有出现错误，那么程序将一直进行下去。



经过简单计算，1s 至少可以验证 1w 次，那么通过 2 分钟之后，已经进行了上百万次随机验证，都没有出现问题。

以上，基本可以验证算法以及程序的正确性。

以及 Lcm，由于公式简单，肉眼观察法以及上述过程中已经进行过的简单验证即可保证其的正确性。

```
int m_GCD = integerGcd(data1, data2);
return data1 / m_GCD * data2;
```

4、关于以上验证的充分性和有效性

首先，对于计时功能，由于功能十分单一，进行简单的测试即可。

对于 gcd 验证的有效性：

在验证方案 1 中，采用了两种不同方法计算。具有有效性。

在验证方案 2 中，分别验证了一组数据的最大公约数，一定是公约数，并且是最大的一个公约数，保证了验证的有效性。

对于 gcd 验证的充分性：

对于小部分数据进行枚举，验证了某些特殊情况的正确性，并且可以基本保证算法和程序的正确性没有问题。同时对于大数据进行上百万次随机验证，并且算法本身比较简单，基本上可以保证验证的充分性。