第三章 线性方程组的直接解法 编程实验

孔瑞阳 计科91 2019010175

第三章上机题6：

编程生成 Hilbert 矩阵 H_n (见例 3. 4) , 以及 n 维向量 $b=H_nx$, 其中 x 为所有分量都是 1 的向量. 用 Cholesky 分解算法求解方程 $H_nx=b$, 得到近似解 , 计算残差 $r=b-H_n\hat{x}$ 和误差 $\Delta x=\hat{x}-x$ 的 ∞-范数.
(1) 设 $n=10$, 计算 $||r||_\infty$、$||\Delta x||_\infty$.
(2) 在右端项上施加 10^{-7} 的扰动然后解方程组, 观察残差和误差的变化情况.
(3) 改变 n 的值为 8 和 12 , 求解相应的方程, 观察 $||r||_\infty$、$||\Delta x||_\infty$ 的变化情况. 通过这个实验说明了什么问题?

思路:

使用C++编程实现。

先按照书中算法 3.10 的伪代码对 H_n 实现 Cholesky 分解 $H_n=LL^T$。

再使用高斯消元来解线性方程组：先按照 $L(L^Tx)=b$ 解出 L^Tx，再解出 x。

实验结果:

```
--------------------
n=10, delta=0
||r||_inf=1.45717e-16
||dx||_inf=0.000325681
--------------------
n=10, delta=1e-07
||r||_inf=5.82867e-16
||dx||_inf=0.000471863
--------------------
n=8, delta=0
||r||_inf=8.32667e-16
||dx||_inf=4.77907e-07
--------------------
n=12, delta=0
||r||_inf=6.84175e-15
||dx||_inf=0.122812
--------------------
```

结果分析:

虽然$||r||_\infty$ 在所有情况下都很小，但当 $n=8,10,12$ 时，$||\Delta x||_\infty$ 随着 n 的增加超线性增加，说明 Hilbert 矩阵随着 n 的增加病态性越严重。同时，当存在 10^{-7} 的扰动时，$||\Delta x||_\infty$ 增加了 50% ，受扰动的影响非常大，也再次说明了 Hilbert 矩阵是一种病态矩阵。