

数值分析课程上机实验题目

实验一

第一章上机题1: 用 MATLAB 编程实现例 1.4, 绘出图 1-2, 体会两种误差对结果的不同影响.

第一章上机题3: 编程观察无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

的求和计算.

(1) 采用 IEEE 单精度浮点数, 观察当 n 为何值时, 求和结果不再变化, 将它与理论分析的结论进行比较 (注: 在 MATLAB 中可用 single 命令将变量转成单精度浮点数).

(2) 用 IEEE 双精度浮点数计算 (1) 中前 n 项的和, 评估 IEEE 单精度浮点数计算结果的误差.

(3) 如果采用 IEEE 双精度浮点数, 估计当 n 为何值时求和结果不再变化, 这在当前做实验的计算机上大概需要多长的计算时间?

实验二

第二章上机题2: 编程实现牛顿下山法. 要求: (1) 设定合适的下山因子初始值 λ_0 及迭代判停准则; (2) 下山因子 λ 用逐次折半法更新; (3) 打印每个迭代步的最终 λ 值及近似解; (4) 请用其他方法 (如 fzero 函数) 验证结果, 并考虑采用牛顿下山法的效果. 用所编程序求解:

(1) $x^3 - x - 1 = 0$, 取 $x_0 = 0.6$.

(2) $-x^3 + 5x = 0$, 取 $x_0 = 1.35$.

第二章上机题3: 利用 2.6.3 节给出的 fzerotx 程序, 在 MATLAB 中编程求第一类的零阶贝塞尔函数 $J_0(x)$ 的零点. $J_0(x)$ 在 MATLAB 中通过 besseli(0,x) 得到. 试求 $J_0(x)$ 的前10个正的零点, 并绘出函数曲线和零点的位置.

实验三

第三章上机题6: 编程生成 Hilbert 矩阵 \mathbf{H}_n (见例 3.4), 以及 n 维向量 $\mathbf{b} = \mathbf{H}_n \mathbf{x}$, 其中 \mathbf{x} 为所有分量都是 1 的向量. 用 Cholesky 分解算法求解方程 $\mathbf{H}_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$, 得到近似解 $\hat{\mathbf{x}}$, 计算残差 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{H}_n \hat{\mathbf{x}}$ 和误差 $\Delta \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ 的 ∞ -范数.

(1) 设 $n = 10$, 计算 $\|\mathbf{r}\|_{\infty}$ 、 $\|\Delta \mathbf{x}\|_{\infty}$.

(2) 在右端项上施加 10^{-7} 的扰动然后解方程组, 观察残差和误差的变化情况.

(3) 改变 n 的值为 8 和 12, 求解相应的方程, 观察 $\|\mathbf{r}\|_{\infty}$ 、 $\|\Delta \mathbf{x}\|_{\infty}$ 的变化情况. 通过这个实验说明了什么问题?

实验四

第四章上机题2: 考虑常微分方程的两点边值问题:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a, & (0 < a < 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 1 \end{cases}$$

它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-1/\varepsilon}}(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) + ax,$$

为了把微分方程离散, 把 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 令 $h = \frac{1}{n}$,

$$x_i = ih, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

得到有限差分方程

$$\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a,$$

简化为

$$(\varepsilon + h)y_{i+1} - (2\varepsilon + h)y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2,$$

从而离散后得到的线性方程组的系数矩阵与右端向量为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ah^2 \\ \vdots \\ ah^2 - \varepsilon - h \end{bmatrix}.$$

(1) 对 $\varepsilon = 1, a = \frac{1}{2}, n = 100$, 分别用雅可比, G-S 和 SOR 方法求线性方程组的解, 要求相邻迭代解的差的无穷范数不超过 10^{-3} , 然后比较与精确解的误差.

(2) 对 $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.0001$ 考虑同样的问题.

实验五

第五章上机题1: 用幂法求下列矩阵按模最大的特征值 λ_1 及其对应的特征向量 \mathbf{x}_1 , 使 $|(\lambda_1)_{k+1} - (\lambda_1)_k| < 10^{-5}$.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

第五章上机题3: 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$, 在 MATLAB 中实现基本的 QR 算法, 观察矩阵

序列收敛的情况, 然后解释观察到的现象.

第五章上机题4: 采用带原点位移的 QR 算法计算 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ 的特征值, 观察迭代过程的收敛情况, 与上机题 3 的实验结果做比较.

实验六

第六章上机题3: 对物理实验中所得下列数据

t_i	1	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4	
y_i	33.40	79.50	122.65	159.05	189.15	214.15	238.65	
t_i	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
y_i	252.2	267.55	280.50	296.65	301.65	310.40	318.15	325.15

- (1) 用公式 $y = a + bt + ct^2$ 做曲线拟合.
- (2) 用指数函数 $y = ae^{bt}$ 做曲线拟合.
- (3) 比较上述两条拟合曲线, 哪条更好?

第六章上机题8: 已知直升飞机旋转机翼外形曲线的采样点坐标如下:

x	0.520	3.1	8.0	17.95	28.65	39.62	50.65	78	104.6	156.6
y	5.288	9.4	13.84	20.20	24.90	28.44	31.10	35	36.9	36.6
x	208.6	260.7	312.50	364.4	416.3	468	494	507	520	
y	34.6	31.0	26.34	20.9	14.8	7.8	3.7	1.5	0.2	

以及两端点的 1 阶导数值 $y'_0 = 1.865\ 48$ 和 $y'_n = -0.046\ 115$.

利用第一种边界条件的三次样条插值函数计算翼型曲线在 $x = 2, 30, 130, 350, 515$ 各点上的函数值及 1 阶导数、2 阶导数的近似值.

实验七

第七章上机题4: 用数值积分方法近似计算

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

及圆周率

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

(1) 用复合 Simpson 求积公式计算, 要求绝对误差限小于 $\frac{1}{2} \times 10^{-8}$, 试根据积分余项估计步长 h 的取值范围. 按要求选择一个步长进行计算, 观察数值结果与误差要求是否相符.

(提示: 可利用 MATLAB 的符号运算工具箱求函数的高阶导数表达式, 详见命令 diff、syms 的帮助文档.)

(2) 用下面的复合 Gauss 公式计算近似积分

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right] \\ + \frac{(b-a)h^4}{4320} f^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (a, b),$$

其中, $h = (b-a)/n$, $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$. 复合 Gauss 积分的思想是: 将 $[a, b]$ 做等距划分, 即 $x_i = a + ih$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), 然后在每个子区间内应用两点 Gauss 公式. 试对步长 h 做先验估计 (误差要求与 (1) 同), 并计算近似积分.