

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

# Modelowanie i identyfikacja

Dokumentacja projektu I, zadanie 16

Krystian Guliński  
nr albumu 283408

# Spis treści

Równania obiektu dynamicznego .....	2
1. Reprezentacja graficzna modelu ciągłego .....	2
2. Dynamiczny model dyskretny .....	2
▪ Wyprowadzenie wzorów .....	2
▪ Reprezentacja graficzna modelu dyskretnego .....	3
3. Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego .....	3
4. Charakterystyka statyczna .....	7
▪ Wyprowadzenie wzoru .....	7
▪ Uzyskana charakterystyka.....	7
5. Charakterystyka statyczna zlinearyzowana .....	7
6. Charakterystyki statyczne zlinearyzowane na tle nieliniowych .....	8
7. Dyskretny model zlinearyzowany .....	10
8. Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego modelu dyskretnego .....	11
9. Symulacja modelu dyskretnego nieliniowego i zlinearyzowanego .....	11
▪ Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow 0.5$ .....	12
▪ Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow -0.5$ .....	14
▪ Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow 0.8$ .....	16
10. Transmitancja zlinearyzowanego modelu ciągłego .....	18

## Zadania dodatkowe:

1. Wyznaczenie wzmocnienia statycznego transmitancji – zadanie dodatkowe .....	19
▪ Wyprowadzenie wzoru .....	19
▪ Charakterystyka.....	19
2. Porównanie wzmocnienia statycznego transmitancji ze wzmocnieniem dyskretnego układu zlinearyzowanego – zadanie dodatkowe .....	19
▪ Zmodyfikowany układ modelu dyskretnego do badania zgodności wzmocnień .....	20
▪ Wykresy z testów zgodności .....	20

# Równania obiektu dynamicznego

Model w przestrzeni stanu opisany wzorem

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} \{\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t)\}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Dane do zadania

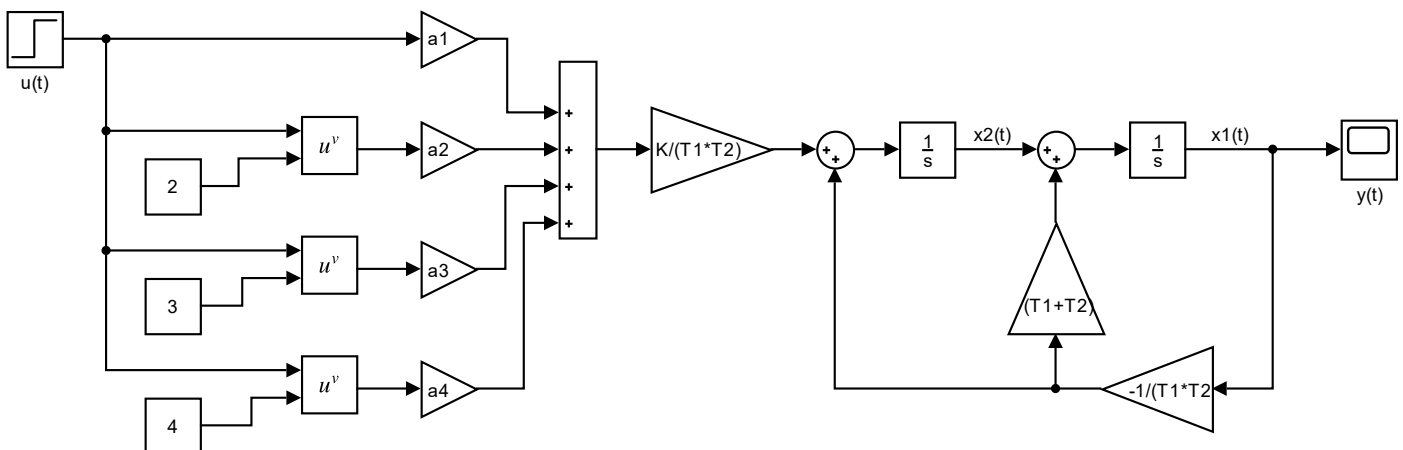
$$K = 2.5,$$

$$T_1 = 5, T_2 = 10,$$

$$\alpha_1 = 0.44, \alpha_2 = 0.51, \alpha_3 = 0.48, \alpha_4 = -0.65$$

## 1. Reprezentacja graficzna modelu ciągłego

Wyznaczona na podstawie równań modelu dynamicznego w przestrzeni stanów



## 2. Dynamiczny model dyskretny

### Wyprowadzenie wzorów

Korzystam z metody dyskretyzacji Eulera

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_p}$$

Wstawiam do równań układu ciągłego

$$\frac{x_1(k) - x_1(k-1)}{T_p} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1)$$

$$\frac{x_2(k) - x_2(k-1)}{T_p} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) + \frac{K}{T_1 T_2} \{\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)\}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

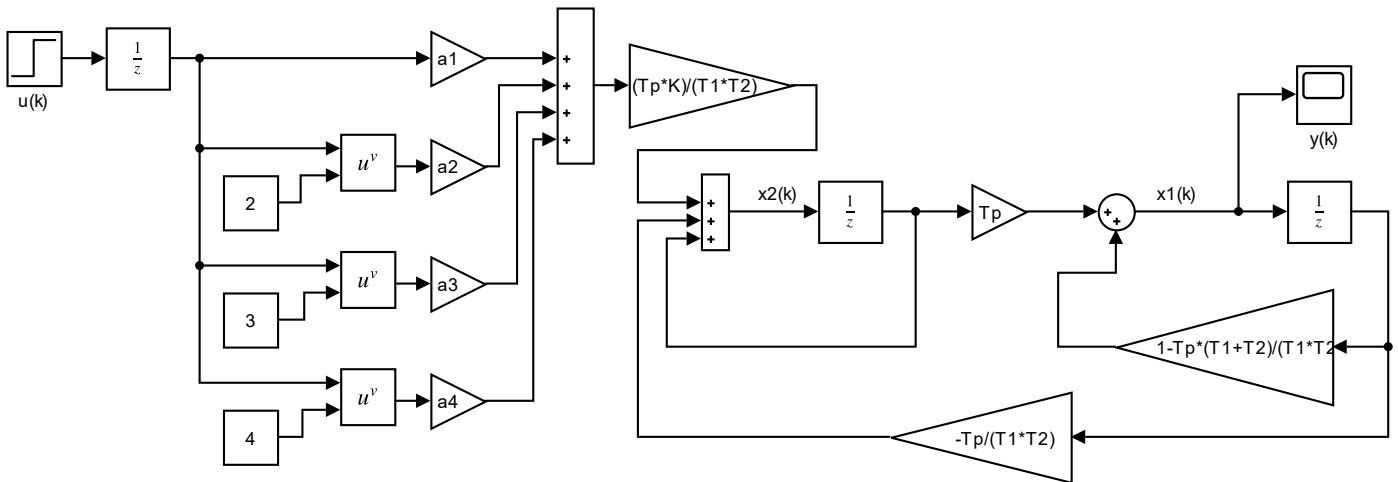
Po przekształceniach otrzymujemy

$$x_1(k) = \left[1 - T_p \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\right] x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1) + \frac{T_p K}{T_1 T_2} \{\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)\}$$

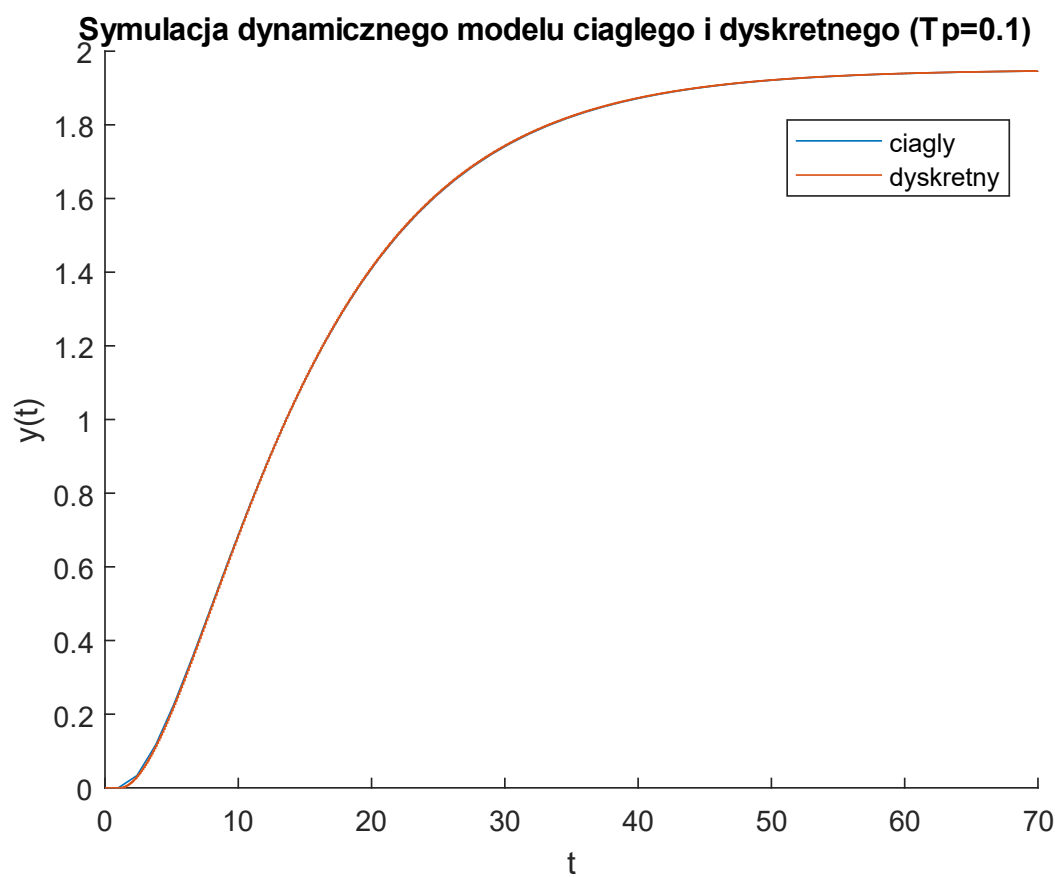
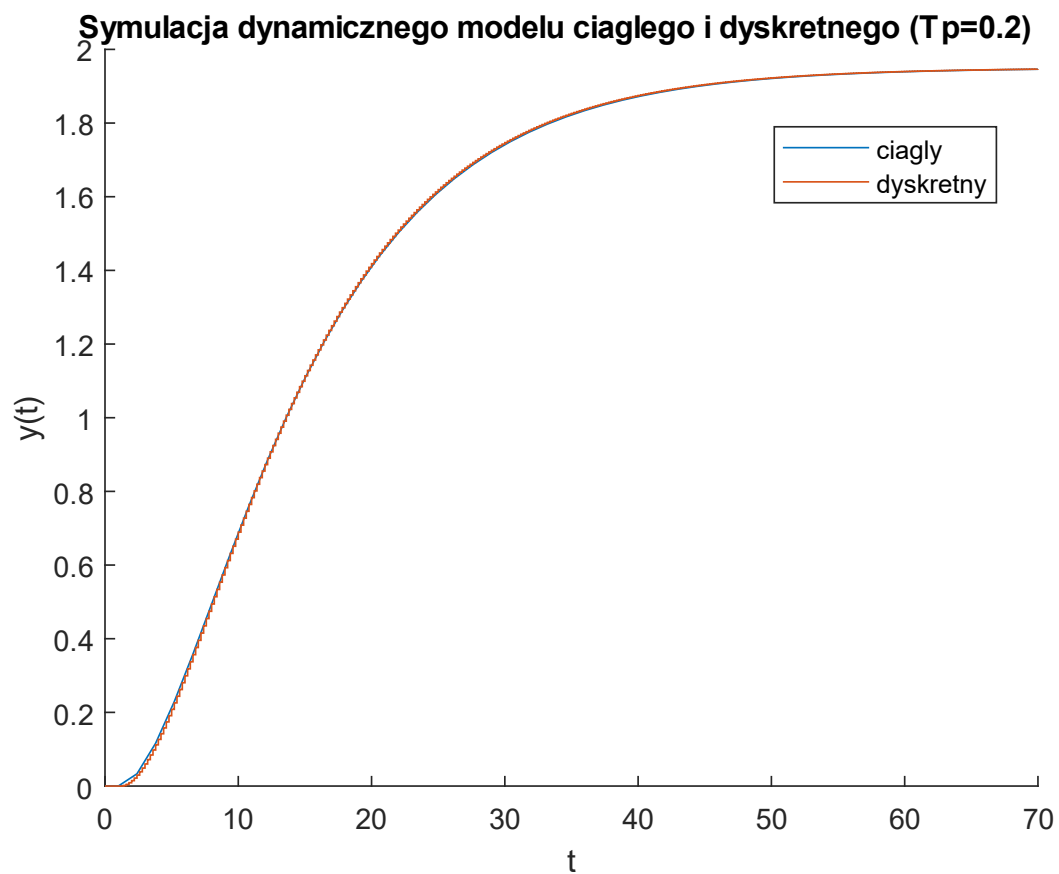
$$y(k) = x_1(k)$$

#### ■ Reprezentacja graficzna modelu dyskretnego

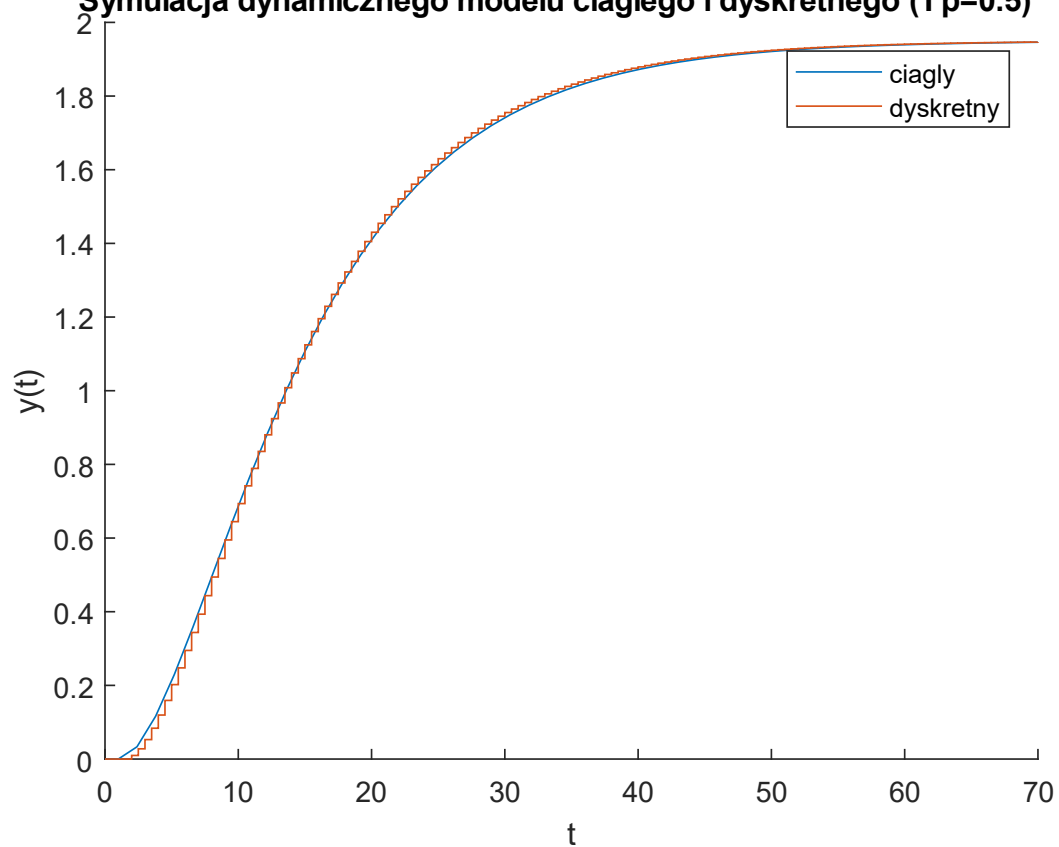


### 3. Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego

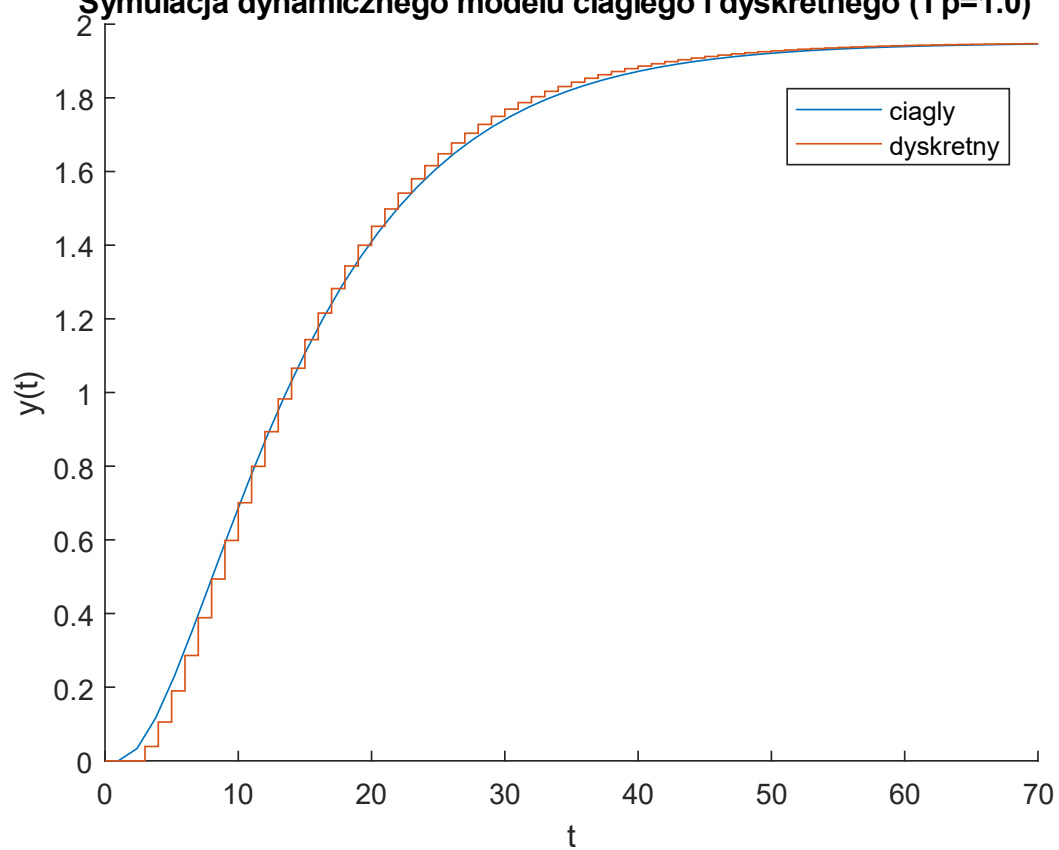
Symulacje wykonane dla różnych czasów próbkowania  $T_p$

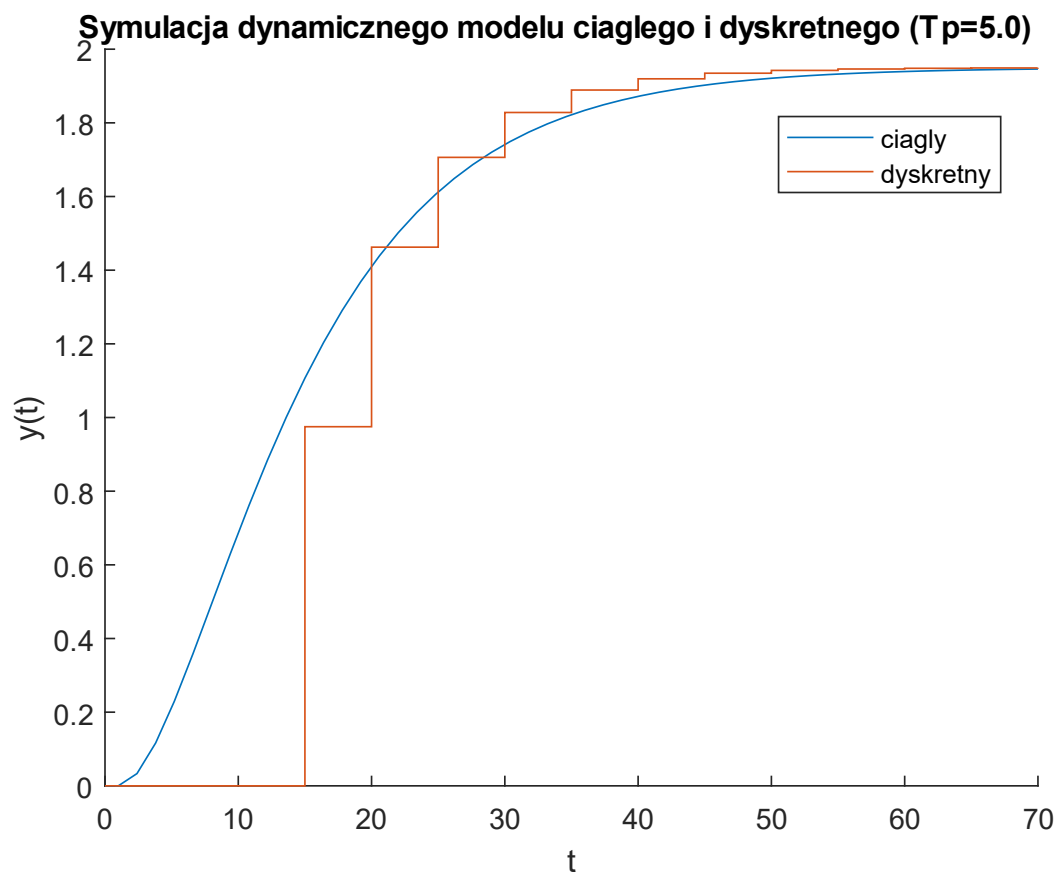
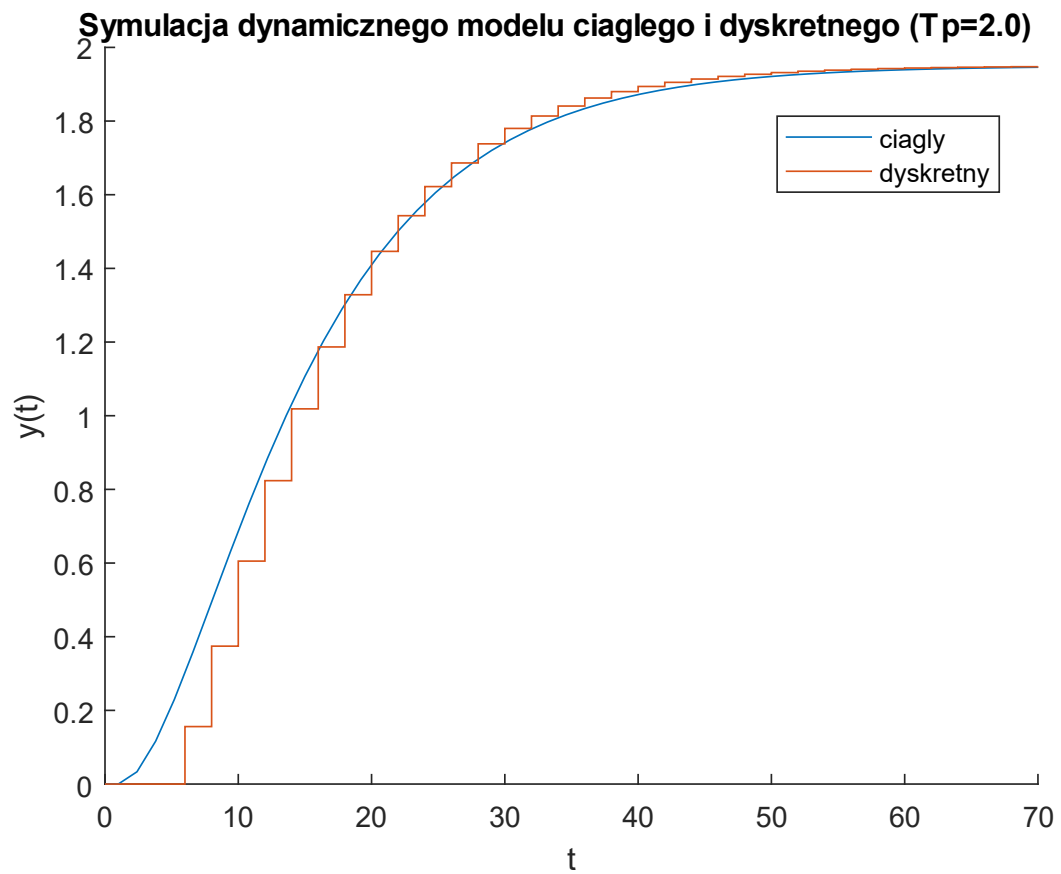


**Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego ( $T_p=0.5$ )**



**Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego ( $T_p=1.0$ )**





## 4. Charakterystyka statyczna

### Wyprowadzenie wzoru

Podstawiamy 0 w miejsce pochodnych w modelu ciągłym

$$0 = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1 + x_2$$

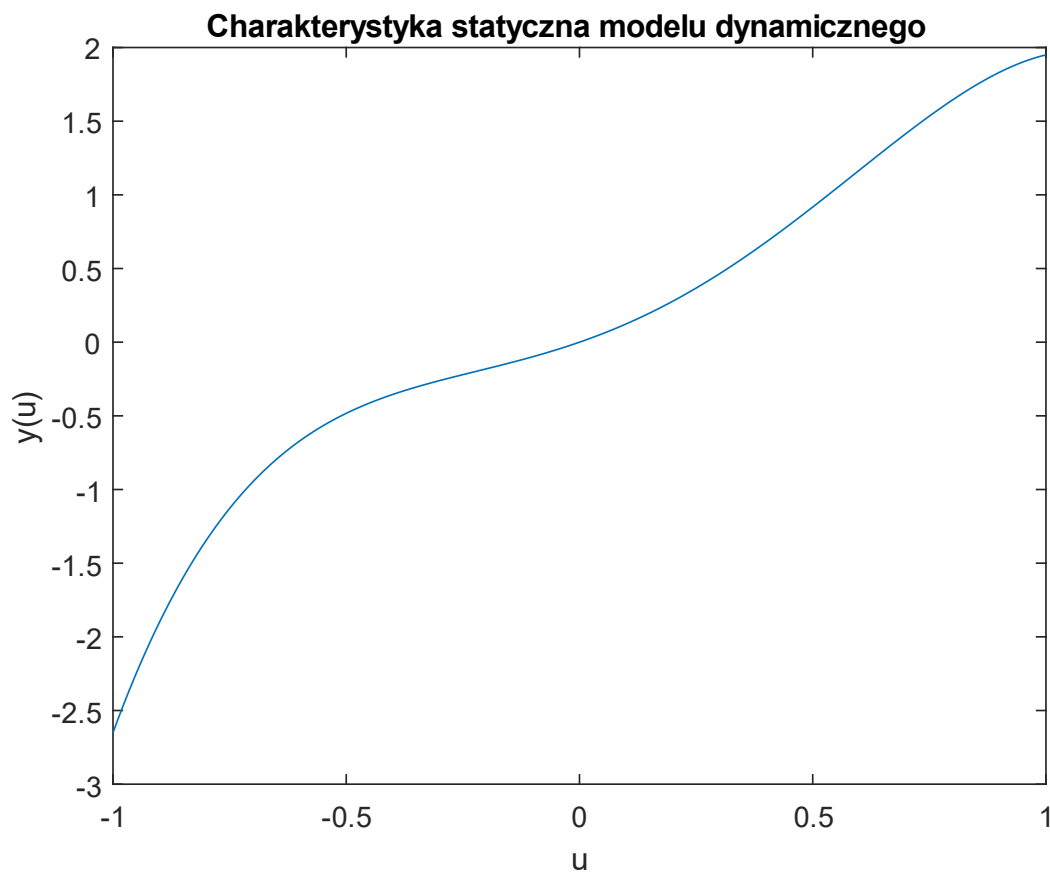
$$0 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1 + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$

$$y = x_1$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$y(u) = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$

### Uzyskana charakterystyka



## 5. Charakterystyka statyczna zlinearyzowana

Człony nieliniowe charakterystyki statycznej linearyzuje korzystając z pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora

$$y(x) \approx y(\bar{x}) + \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

$\bar{x}$  – punkt linearyzacji



Po podstawieniu

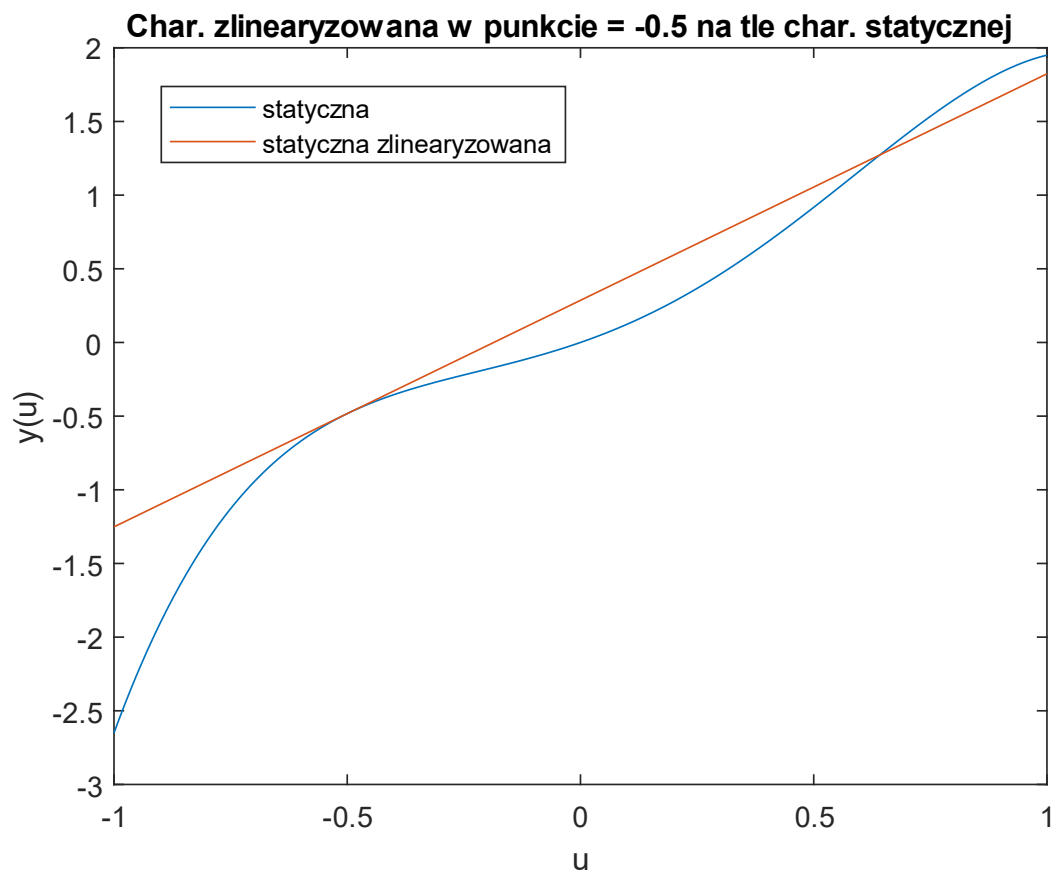
$$y(u) \approx K\{\alpha_1 u + \alpha_2 \bar{u}^2 + 2\alpha_2 \bar{u}(u - \bar{u}) + \alpha_3 \bar{u}^3 + 3\alpha_3 \bar{u}^2(u - \bar{u}) + \alpha_4 \bar{u}^4 + 4\alpha_4 \bar{u}^3(u - \bar{u})\}$$

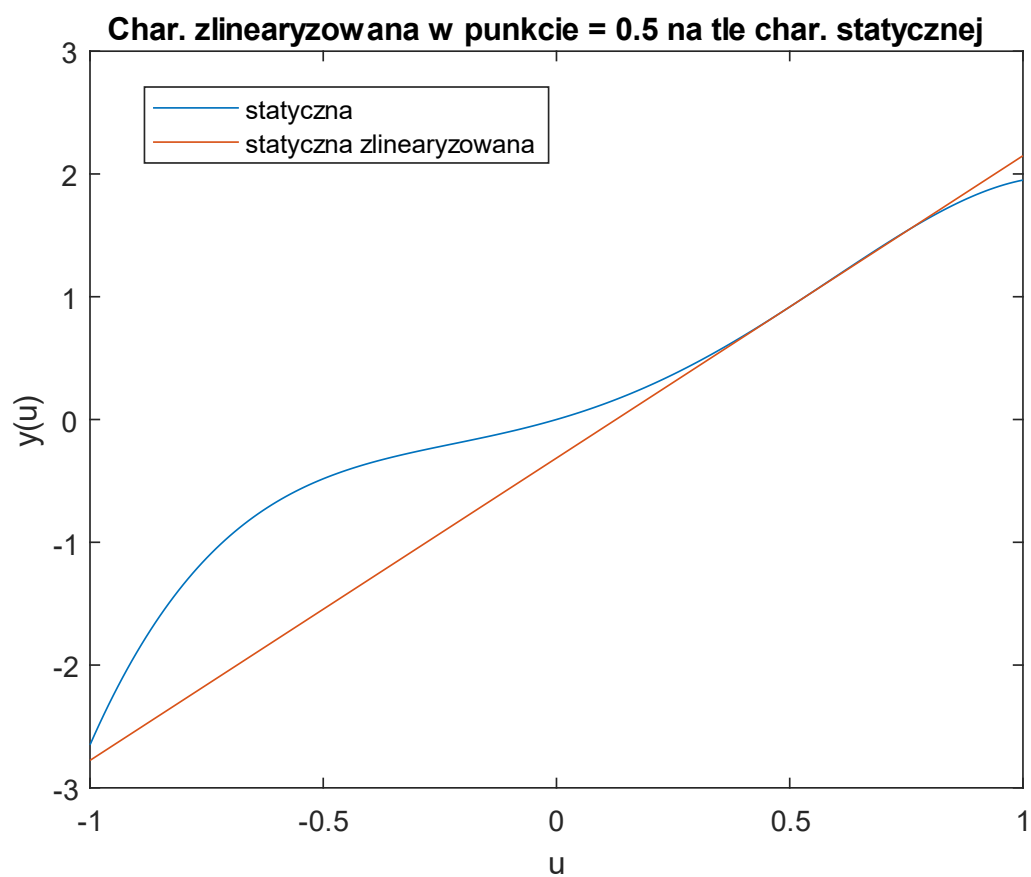
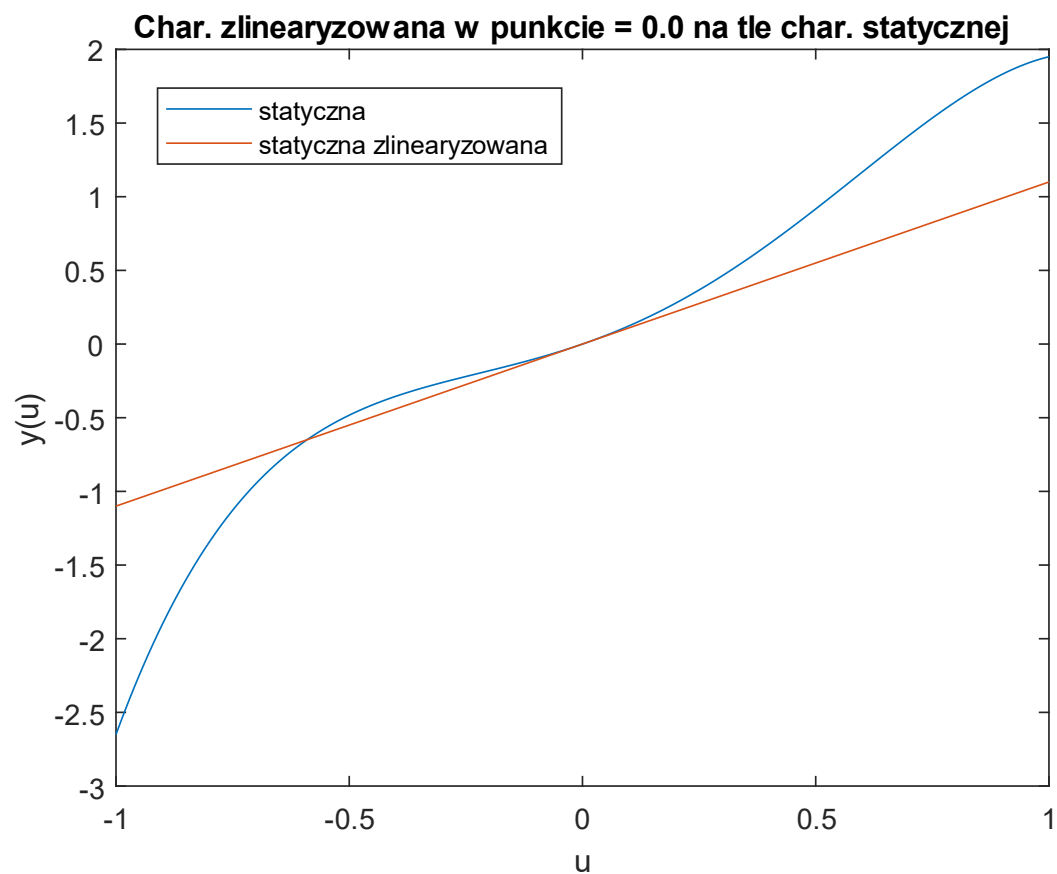
$\bar{u}$  – punkt linearyzacji

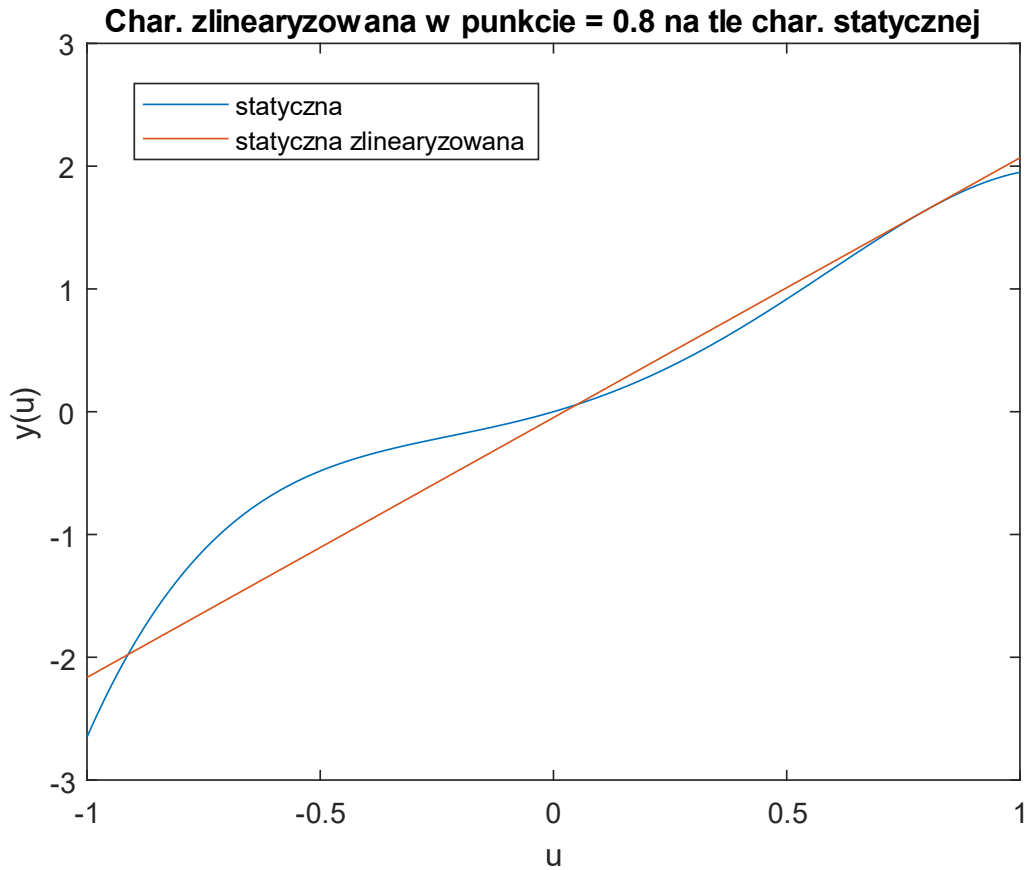
Po przekształceniach

$$y(u) \approx K\{u(\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) - \alpha_2 \bar{u}^2 - 2\alpha_3 \bar{u}^3 - 3\alpha_4 \bar{u}^4\}$$

## 6. Charakterystyki statyczne zlinearyzowane na tle nieliniowych







## 7. Dyskretny model zlinearyzowany

Człony nieliniowe linearyzowane znów korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora

Po zlinearyzowaniu modelu dyskretnego

$$x_1(k) = \left[1 - T_p \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\right] x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1)$$

$$+ \frac{T_p K}{T_1 T_2} \{ \alpha_1 u + \alpha_2 \bar{u}^2 + 2\alpha_2 \bar{u} [u(k-1) - \bar{u}] + \alpha_3 \bar{u}^3 + 3\alpha_3 \bar{u}^2 [u(k-1) - \bar{u}] + \alpha_4 \bar{u}^4 + 4\alpha_4 \bar{u}^3 [u(k-1) - \bar{u}] \}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

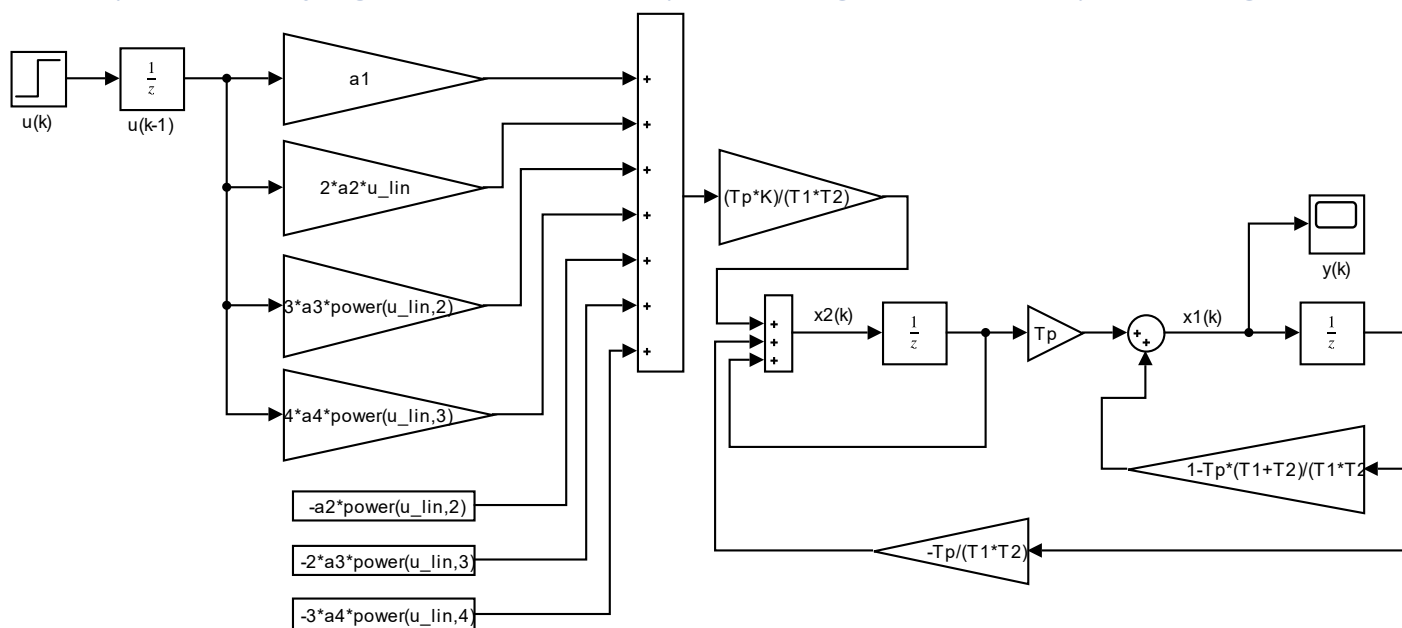
$$x_1(k) = \left[1 - T_p \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\right] x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1)$$

$$+ \frac{T_p K}{T_1 T_2} \{ u(k-1) [\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3] - \alpha_2 \bar{u}^2 - 2\alpha_3 \bar{u}^3 - 3\alpha_4 \bar{u}^4 \}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

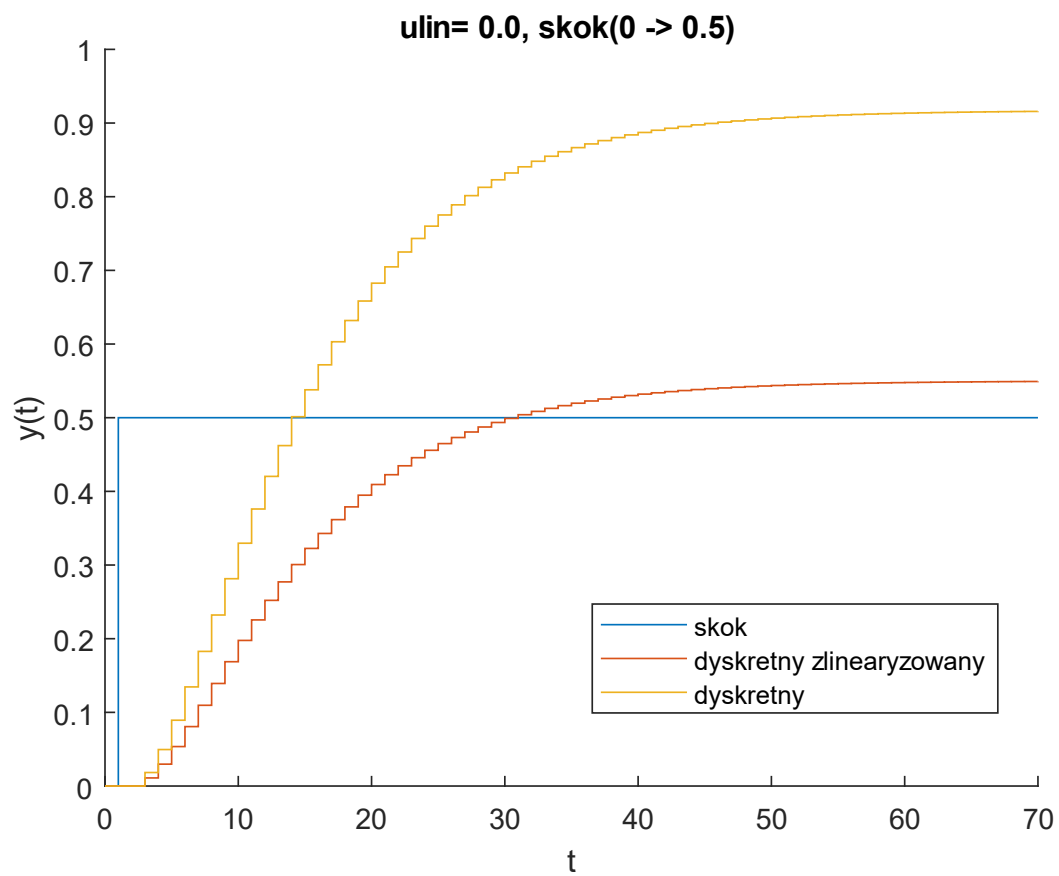
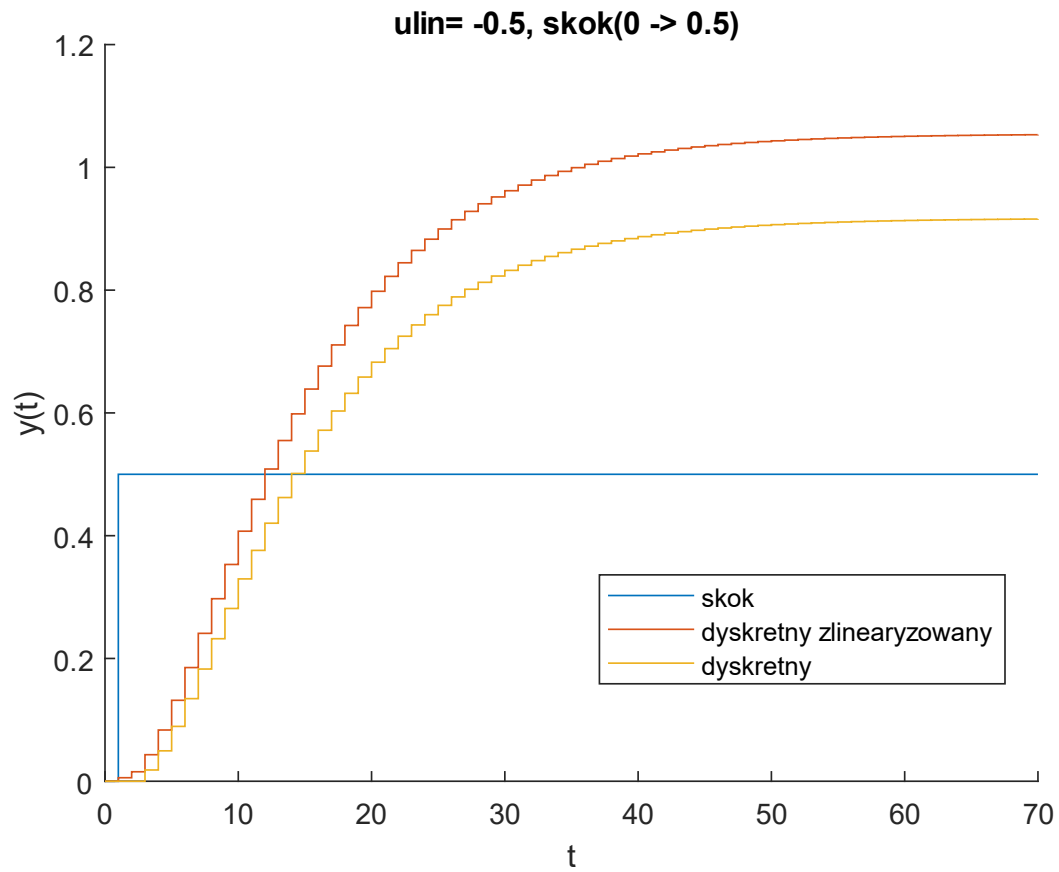
## 8. Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego modelu dyskretnego

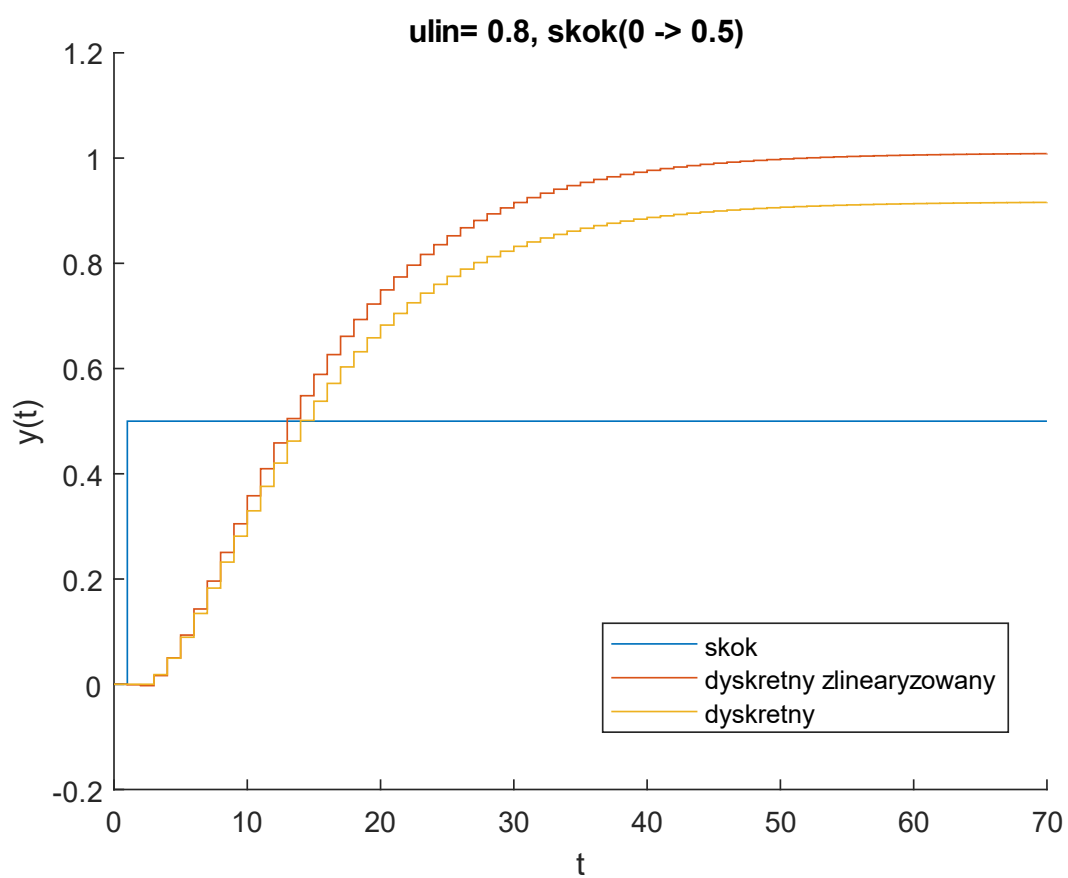
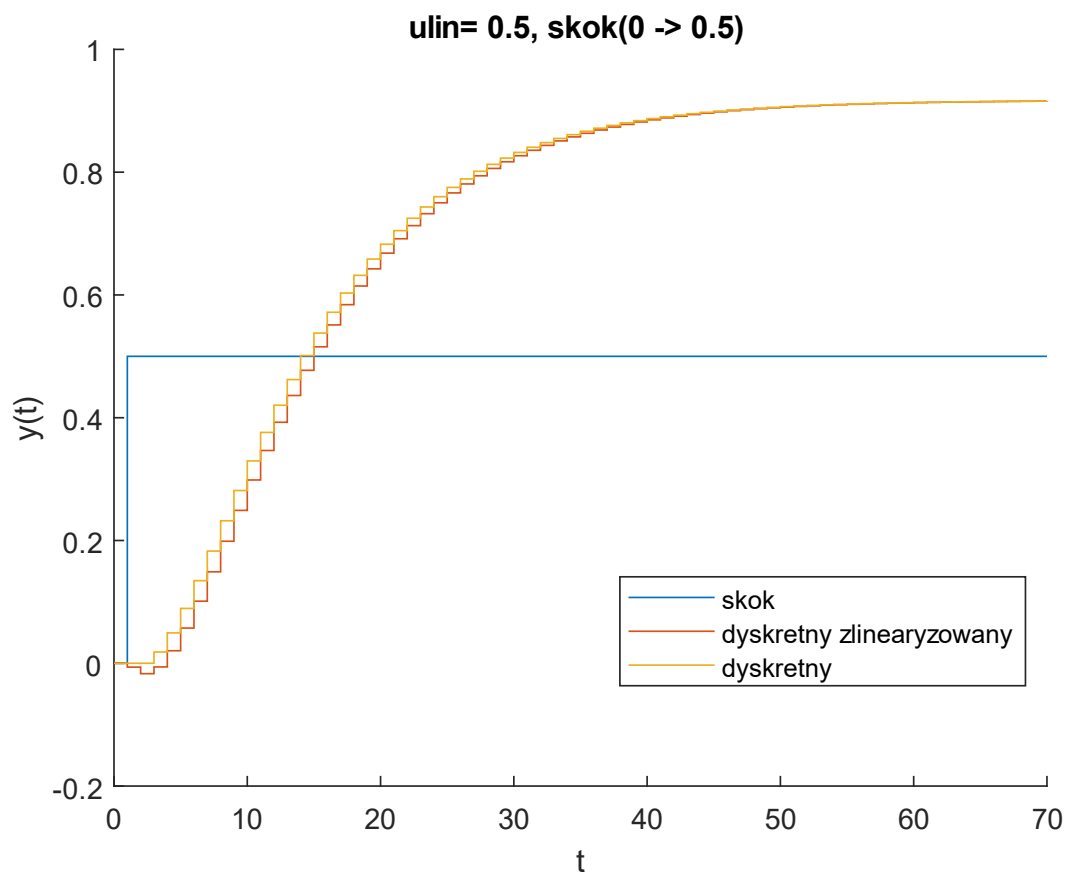


## 9. Symulacja modelu dyskretnego nieliniowego i zlinearyzowanego

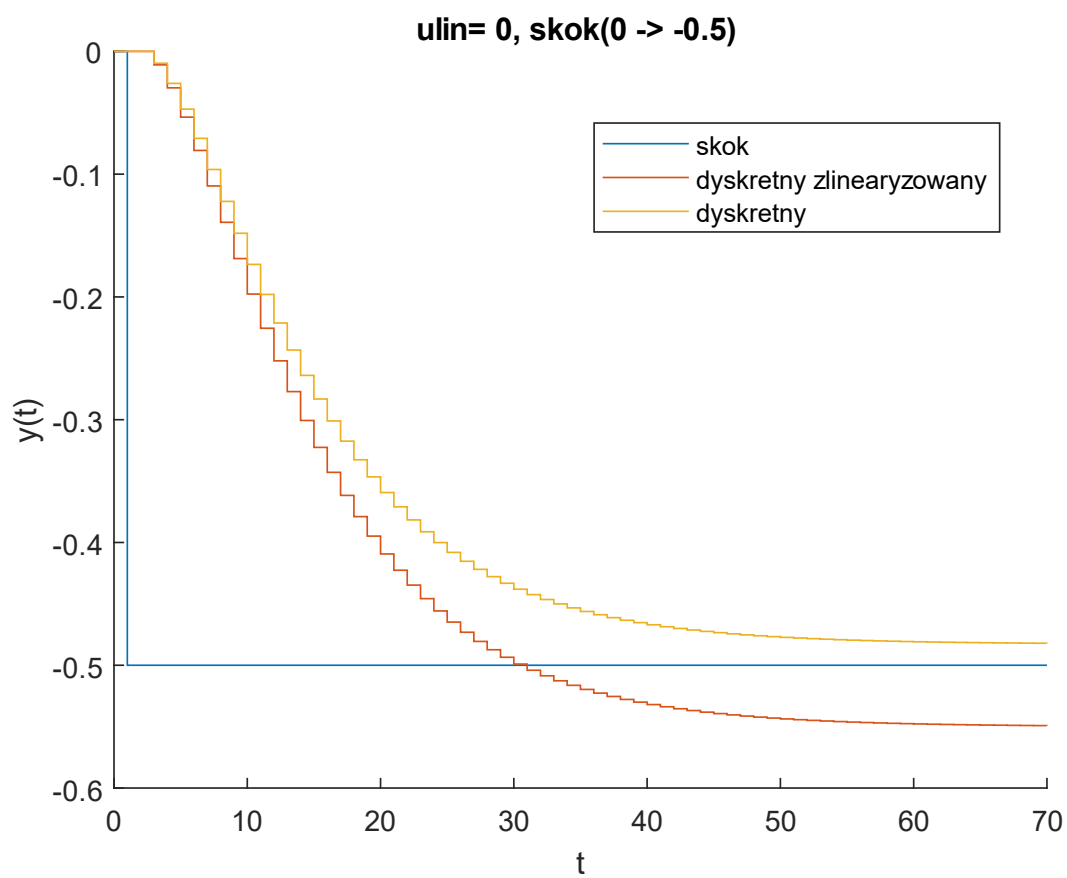
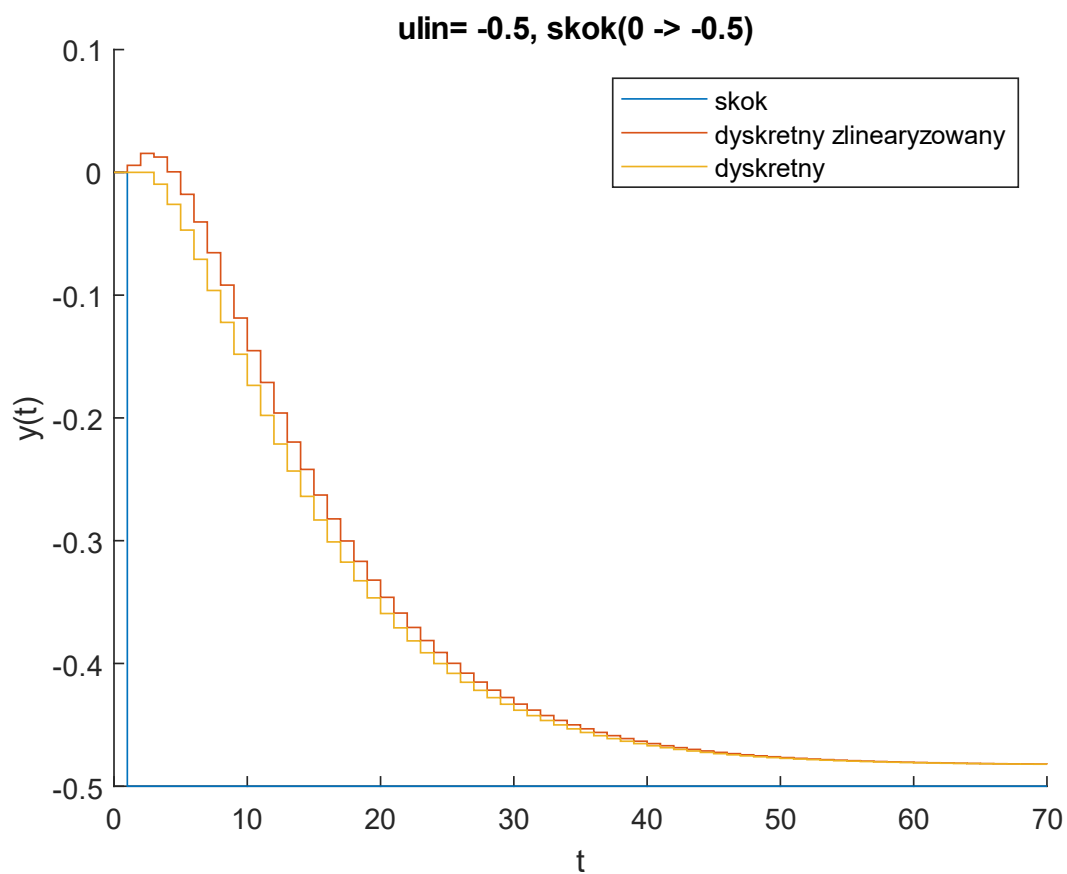
Symulacje wykonano dla różnych skoków i punktów linearyzacji

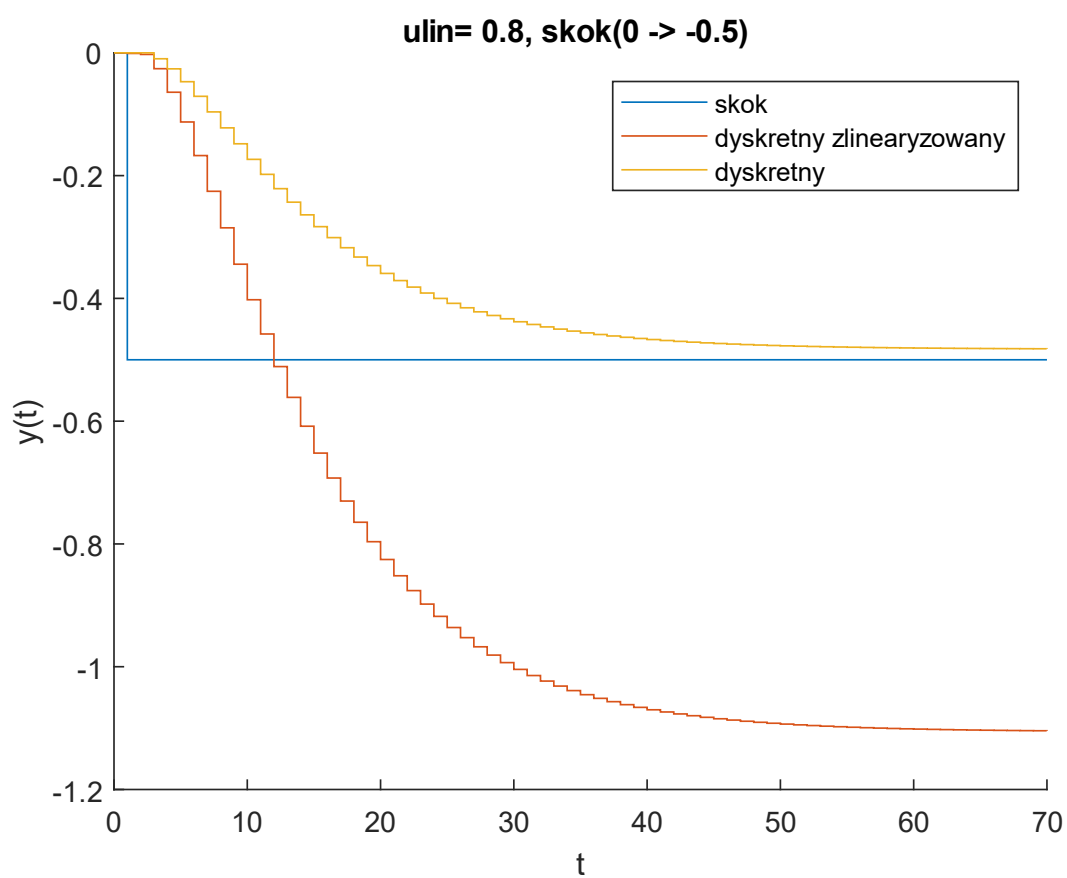
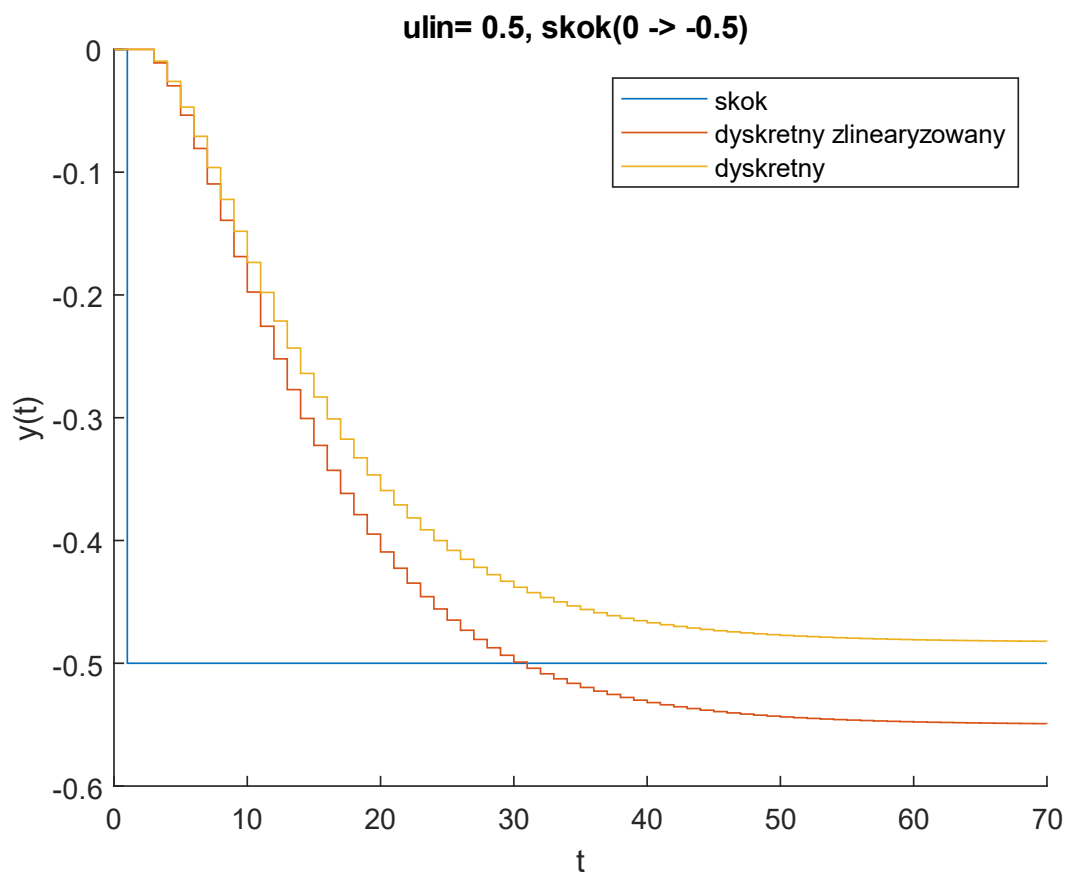
- Skok sygnału sterującego  $0 \rightarrow 0.5$





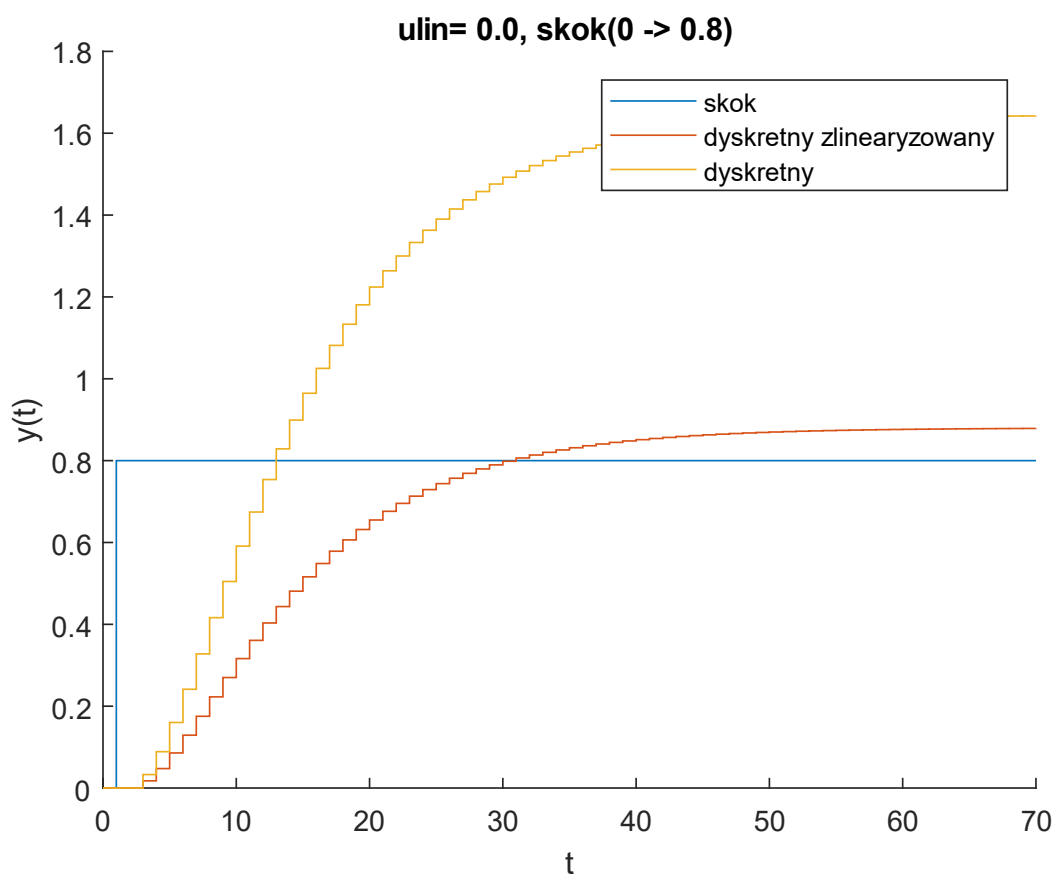
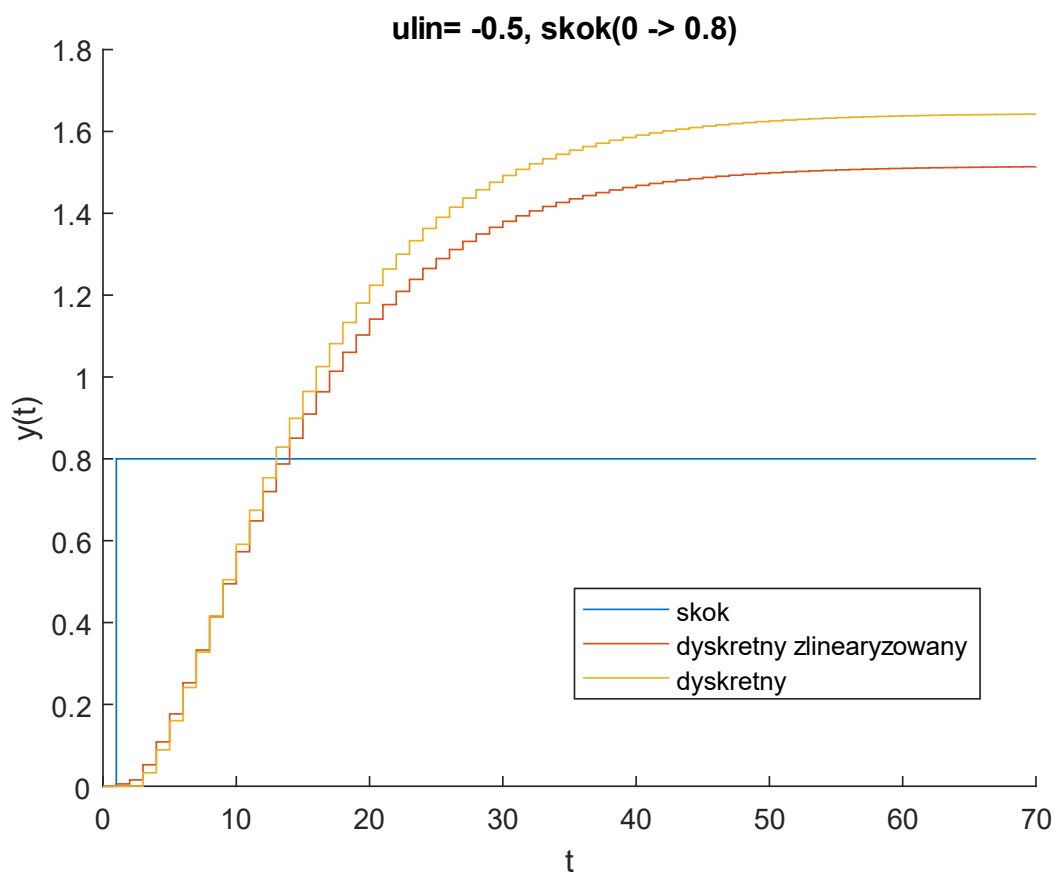
- Skok sygnału sterującego  $0 \rightarrow -0.5$

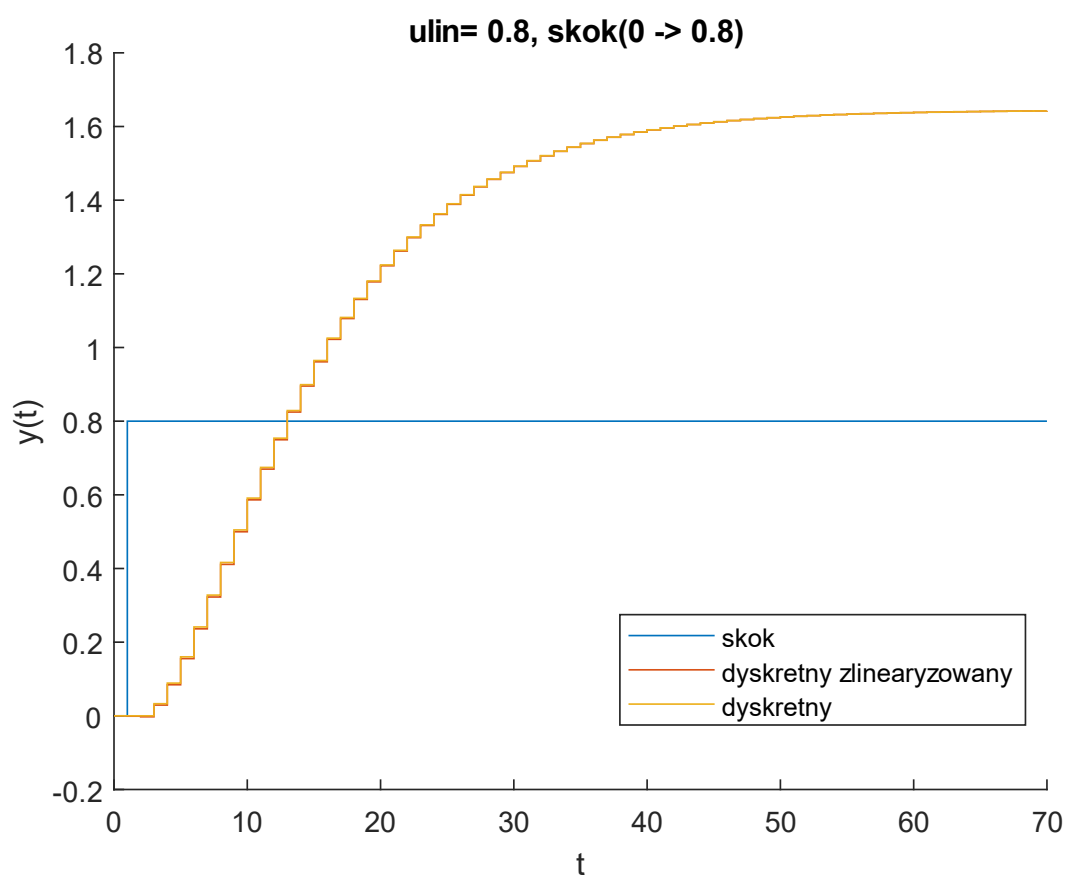
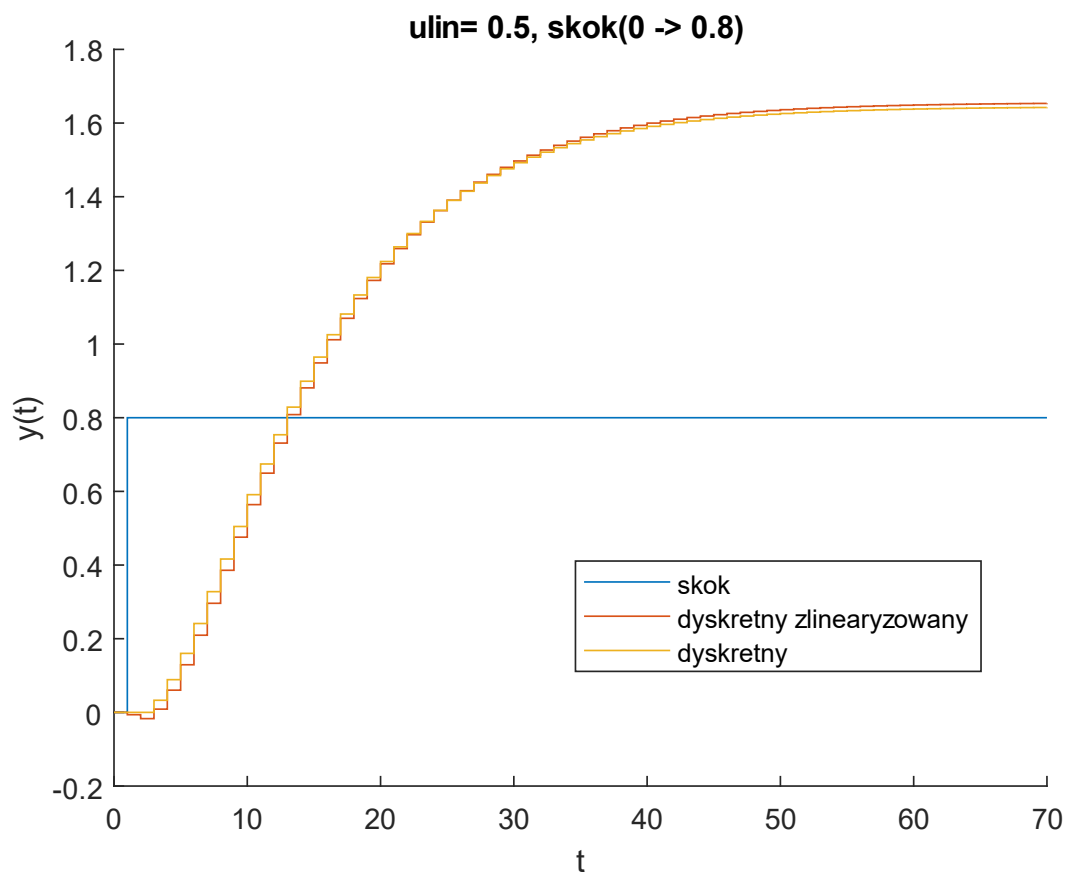






- Skok sygnału sterującego  $0 \rightarrow 0.8$





## 10. Transmitancja zlinearyzowanego modelu ciągłego

Wyprowadzenie transmitancji z modelu ciągłego zlinearyzowanego

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} \{u(t)[\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3] - \alpha_2 \bar{u}^2 - 2\alpha_3 \bar{u}^3 - 3\alpha_4 \bar{u}^4\} \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Macierze pomocnicze

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] & D &= 0\end{aligned}$$

Wyznaczanie transmitancji

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} & -1 \\ \frac{1}{T_1 T_2} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s \left( s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right) + \frac{1}{T_1 T_2}} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{s}{T_1 T_2} & s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3)}{s \left( s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right) + \frac{1}{T_1 T_2}}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$G(s) = \frac{K(\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3)}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

# Zadania dodatkowe

## 1. Wyznaczenie wzmocnienia statycznego transmitancji – zadanie dodatkowe

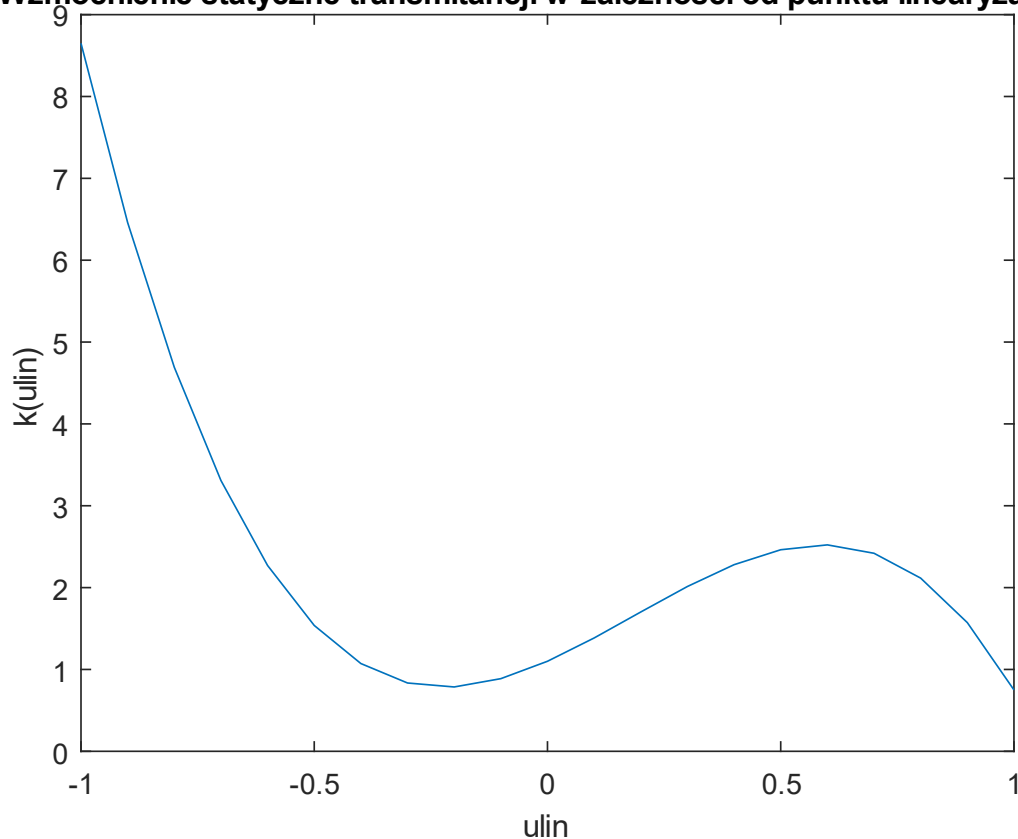
### ■ Wyprowadzenie wzoru

Wyznaczam wzmocnienie statyczne na podstawie transmitancji z poprzedniego punktu obliczając granicę

$$k_{stat}(\bar{u}) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3)$$

### ■ Charakterystyka

**Wzmocnienie statyczne transmitancji w zależności od punktu linearyzacji**



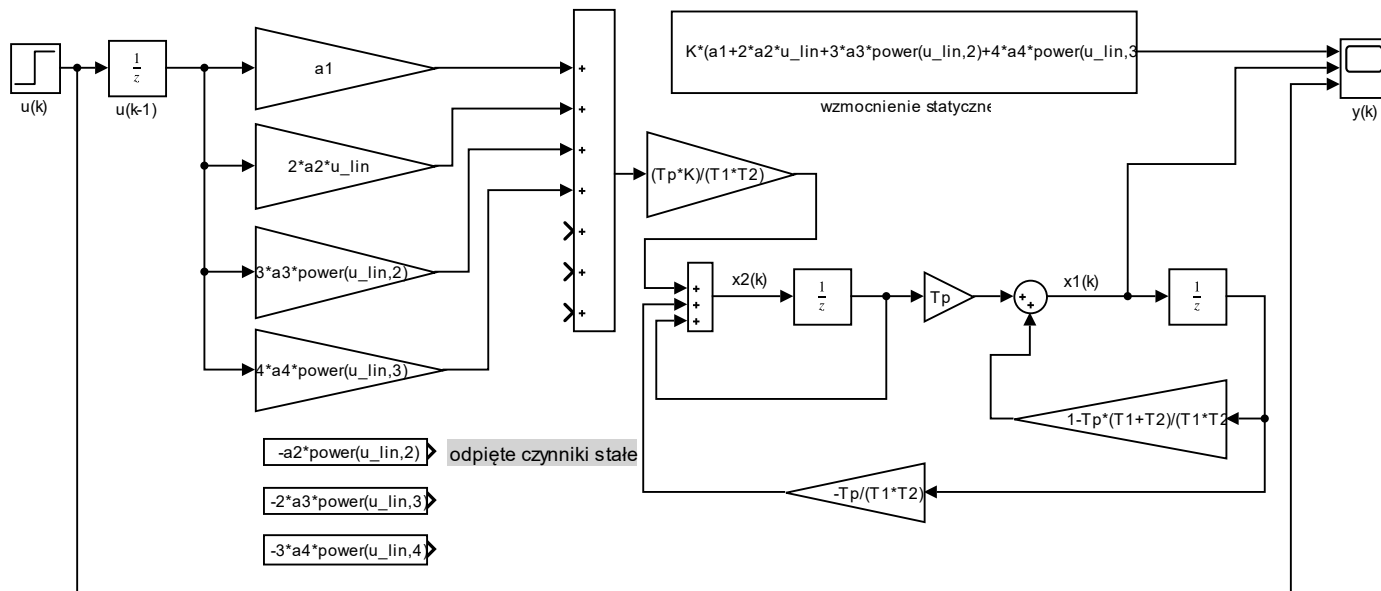
## 2. Porównanie wzmocnienia statycznego transmitancji ze wzmocnieniem dyskretnego układu zlinearyzowanego – zadanie dodatkowe

Wzmocnienie układu z punktu 9 w swojej oryginalnej formie nie odpowiada wzmocnieniu transmitancji. Jest to spowodowane tym, że transmitancja nie uwzględnia punktu pracy, więc pomija człony stałe, które są obecne w układzie w punktu 9.

Zmodyfikowany układ przedstawiony na rysunku poniżej pozwala na sprawdzenie czy dla danego punktu linearyzacji układ dyskretny zlinearyzowany pozbawiony członów stałych stabilizuje się na poziomie wartości wzmocnienia statycznego dla danego punktu linearyzacji przy wymuszeniu skokiem od 0 do 1.

Po wykonaniu testów zamieszczonych poniżej można zauważyć, że rzeczywiście po pominięciu punktu pracy wzmocnienia się zgadzają.

#### ■ Zmodyfikowany układ modelu dyskretnego do badania zgodności wzmocnień



#### ■ Wykresy z testów zgodności

Testy zostały wykonane dla trzech różnych punktów linearyzacji. Jak widać na wykresach zmodyfikowany układ dyskretny stabilizuje się za każdym razem na wartości wzmocnienia transmitancji.

Możemy w ten sposób to testować ze względu na skok o wartości 1 przy którym wyjście układu po stabilizacji odpowiada wartości jego wzmocnienia.

