

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Modelowanie i identyfikacja

Dokumentacja projektu I, zadanie 16

Krystian Guliński
nr albumu 283408

Spis treści

Równania obiektu dynamicznego	2
1. Reprezentacja graficzna modelu ciągłego	2
2. Dynamiczny model dyskretny	2
▪ Wyprowadzenie wzorów	2
▪ Reprezentacja graficzna modelu dyskretnego	3
3. Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego	3
4. Charakterystyka statyczna	6
▪ Wyprowadzenie wzoru	6
▪ Uzyskana charakterystyka.....	7
5. Charakterystyka statyczna zlinearyzowana	7
6. Charakterystyki statyczne zlinearyzowane na tle nieliniowych	8
7. Dyskretny model zlinearyzowany	10
8. Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego modelu dyskretnego	10
9. Symulacja modelu dyskretnego nieliniowego i zlinearyzowanego	10
▪ Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow 0.5$	11
▪ Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow -0.5$	13
▪ Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow 0.8$	15
10. Transmitancja zlinearyzowanego modelu ciągłego	17

Zadania dodatkowe:

1. Wyznaczenie wzmocnienia statycznego transmitancji – zadanie dodatkowe	18
▪ Wyprowadzenie wzoru	18
▪ Charakterystyka.....	18
2. Porównanie wzmocnienia statycznego transmitancji ze wzmocnieniem dyskretnego układu zlinearyzowanego – zadanie dodatkowe	18
▪ Zmodyfikowany układ modelu dyskretnego do badania zgodności wzmocnień	19
▪ Wykresy z testów zgodności	19

Równania obiektu dynamicznego

Model w przestrzeni stanu opisany wzorem

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} \{\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t)\}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Dane do zadania

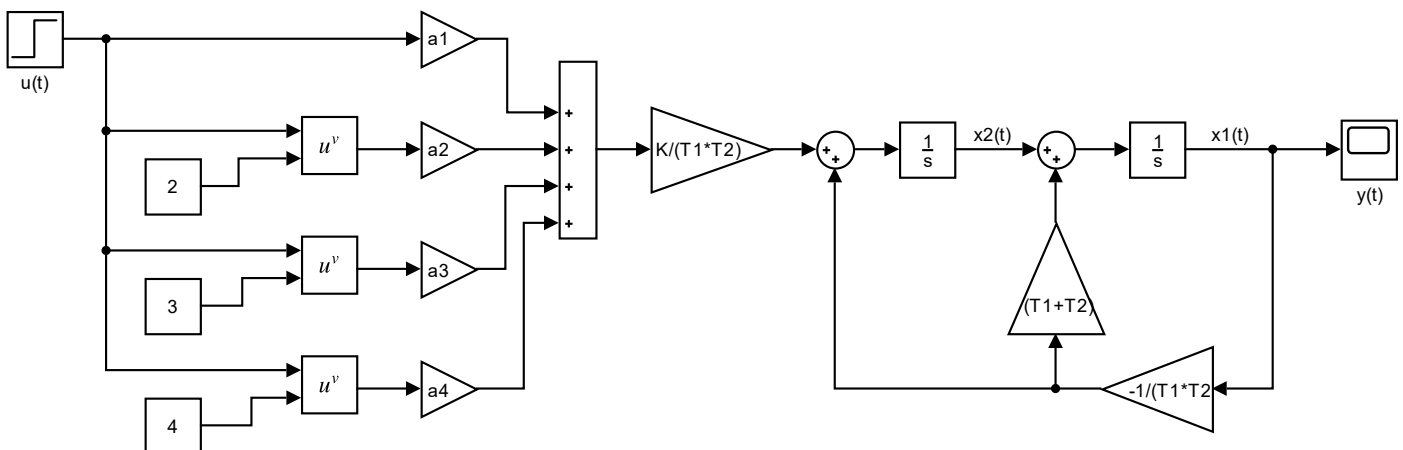
$$K = 2.5,$$

$$T_1 = 5, T_2 = 10,$$

$$\alpha_1 = 0.44, \alpha_2 = 0.51, \alpha_3 = 0.48, \alpha_4 = -0.65$$

1. Reprezentacja graficzna modelu ciągłego

Wyznaczona na podstawie równań modelu dynamicznego w przestrzeni stanów



2. Dynamiczny model dyskretny

■ Wyprowadzenie wzorów

Korzystam z metody dyskretyzacji Eulera

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_p}$$

Wstawiam do równań układu ciągłego

$$\frac{x_1(k) - x_1(k-1)}{T_p} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1)$$

$$\frac{x_2(k) - x_2(k-1)}{T_p} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) + \frac{K}{T_1 T_2} \{\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)\}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

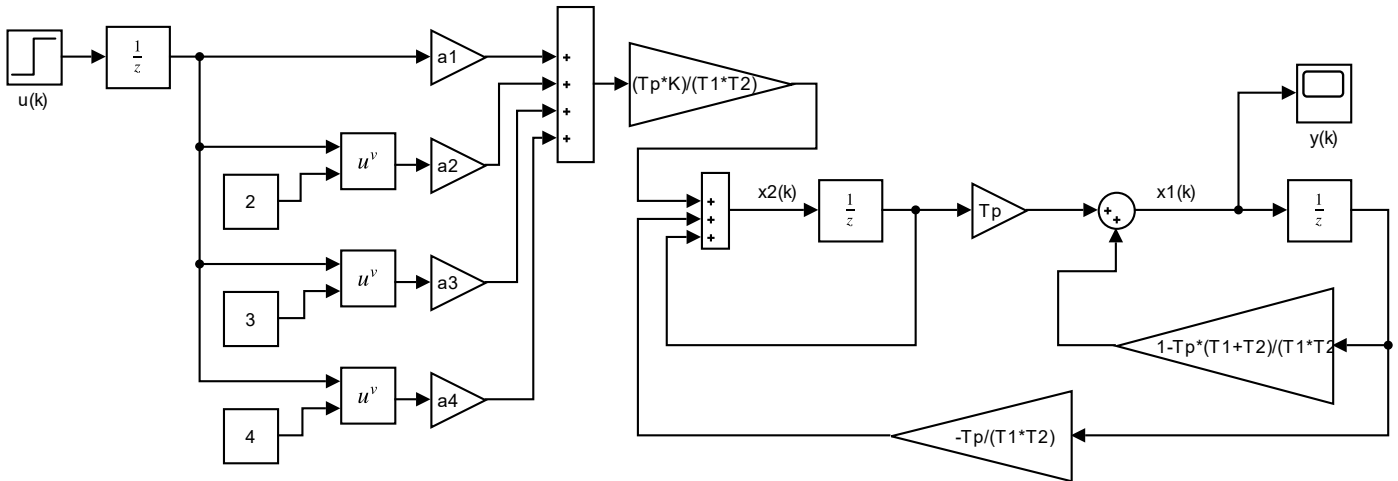
Po przekształceniach otrzymujemy

$$x_1(k) = \left[1 - T_p \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\right] x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1) + \frac{T_p K}{T_1 T_2} \{\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)\}$$

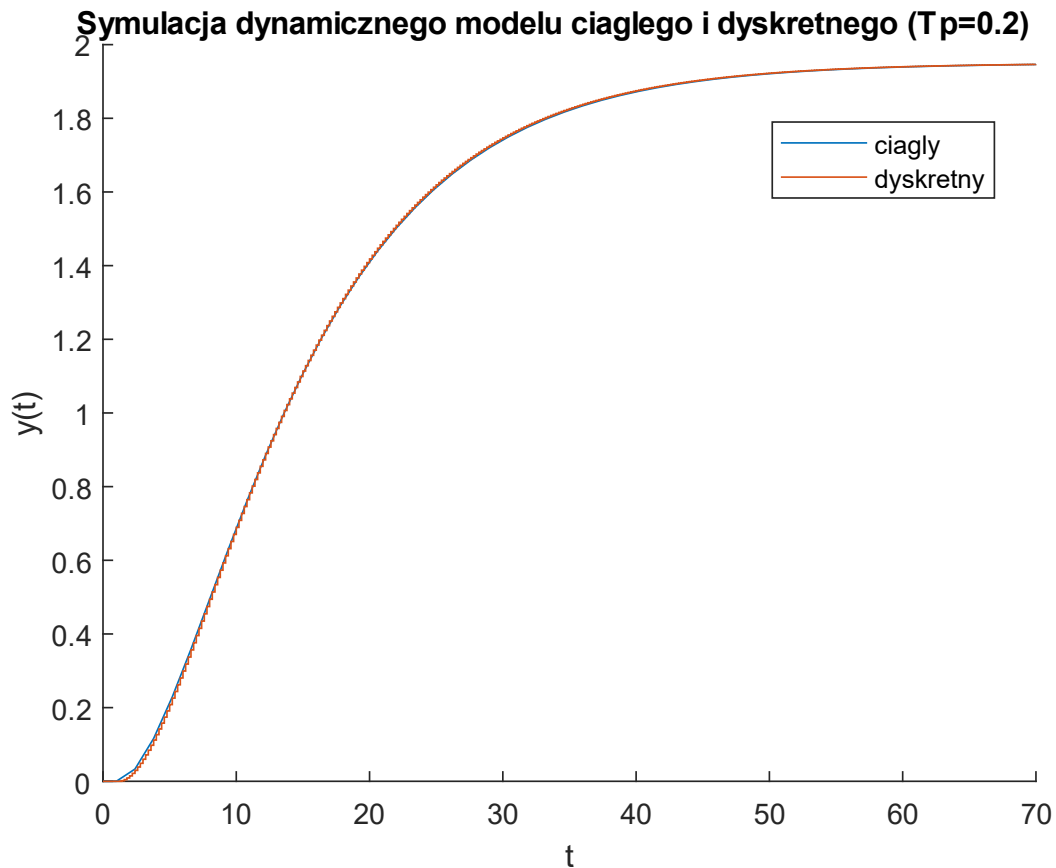
$$y(k) = x_1(k)$$

■ Reprezentacja graficzna modelu dyskretnego

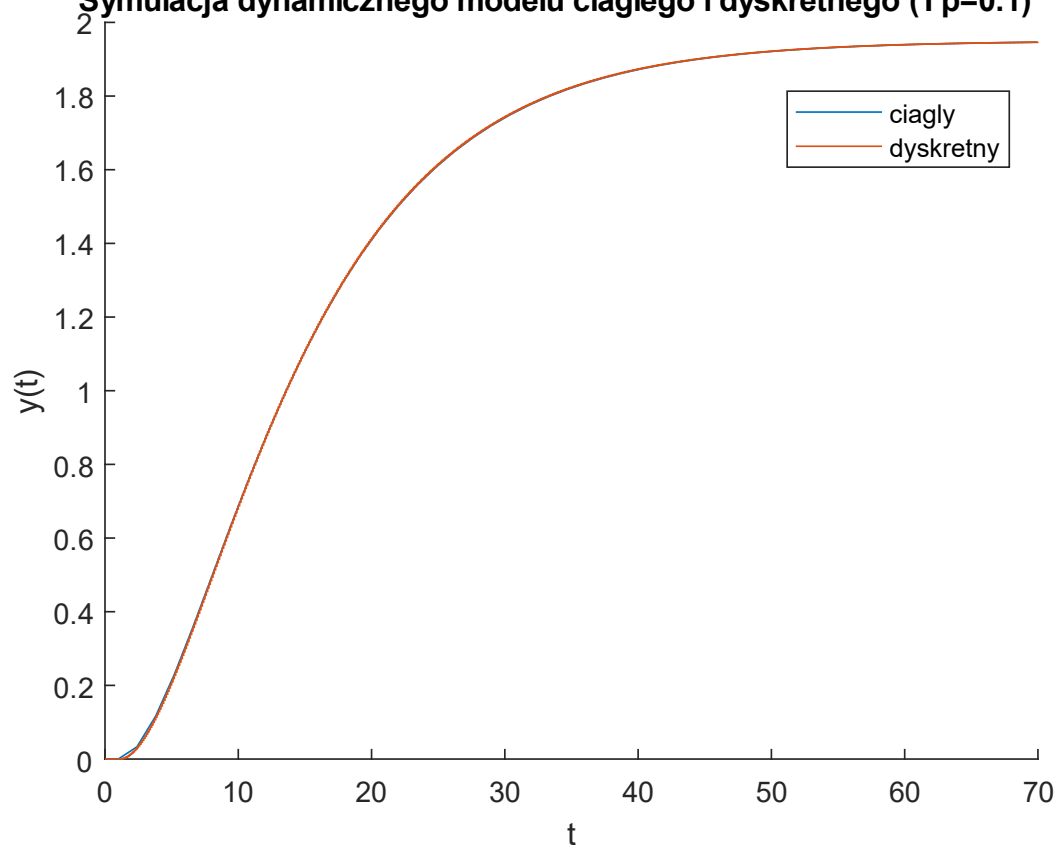


3. Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego

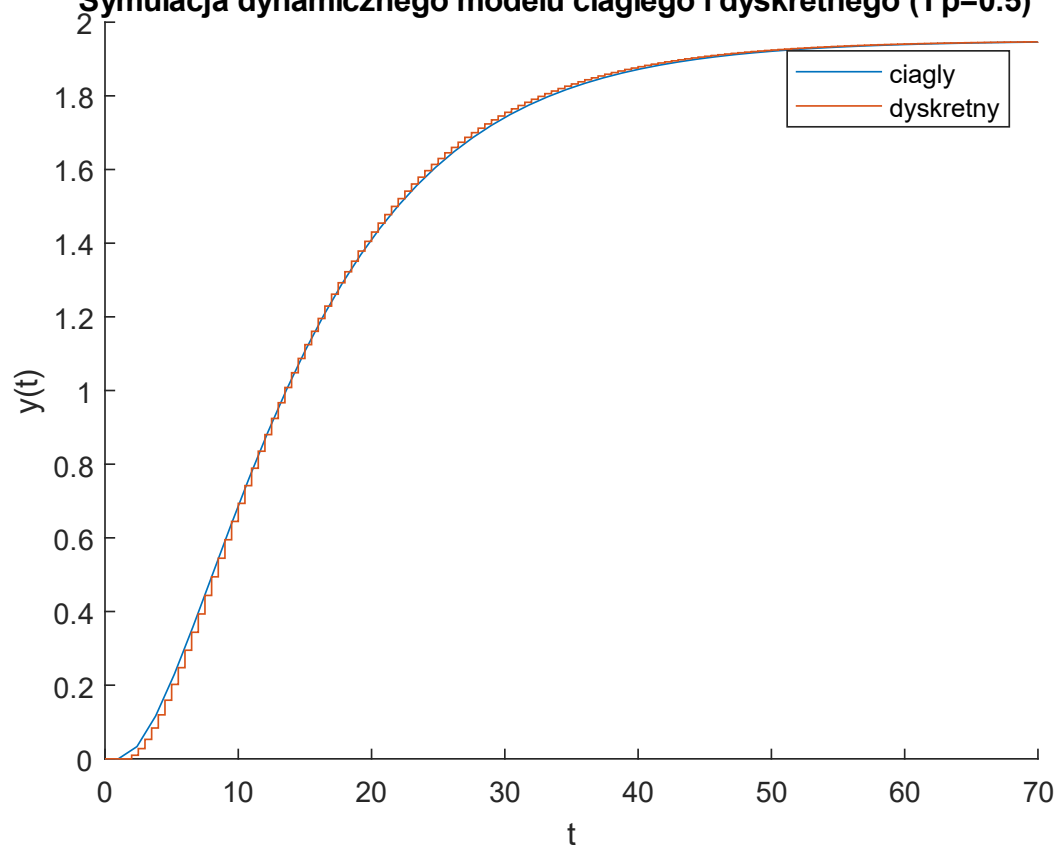
Symulacje wykonane dla różnych czasów próbkowania T_p



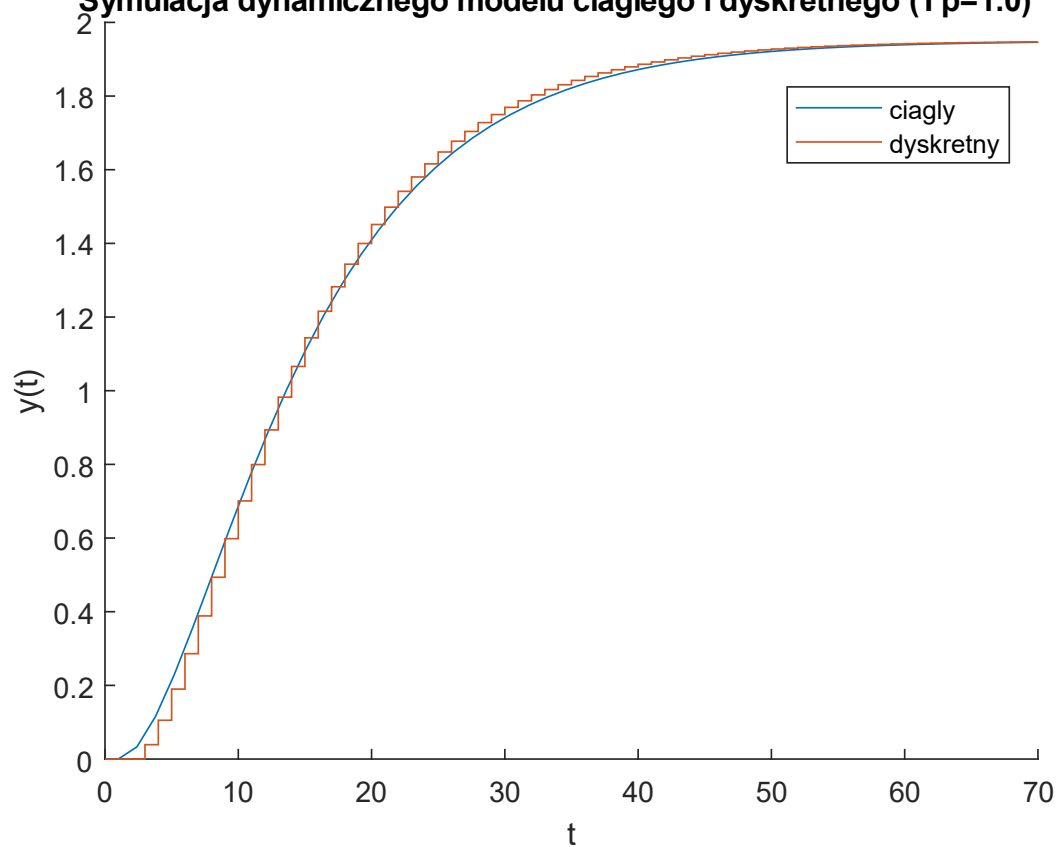
Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego ($T_p=0.1$)



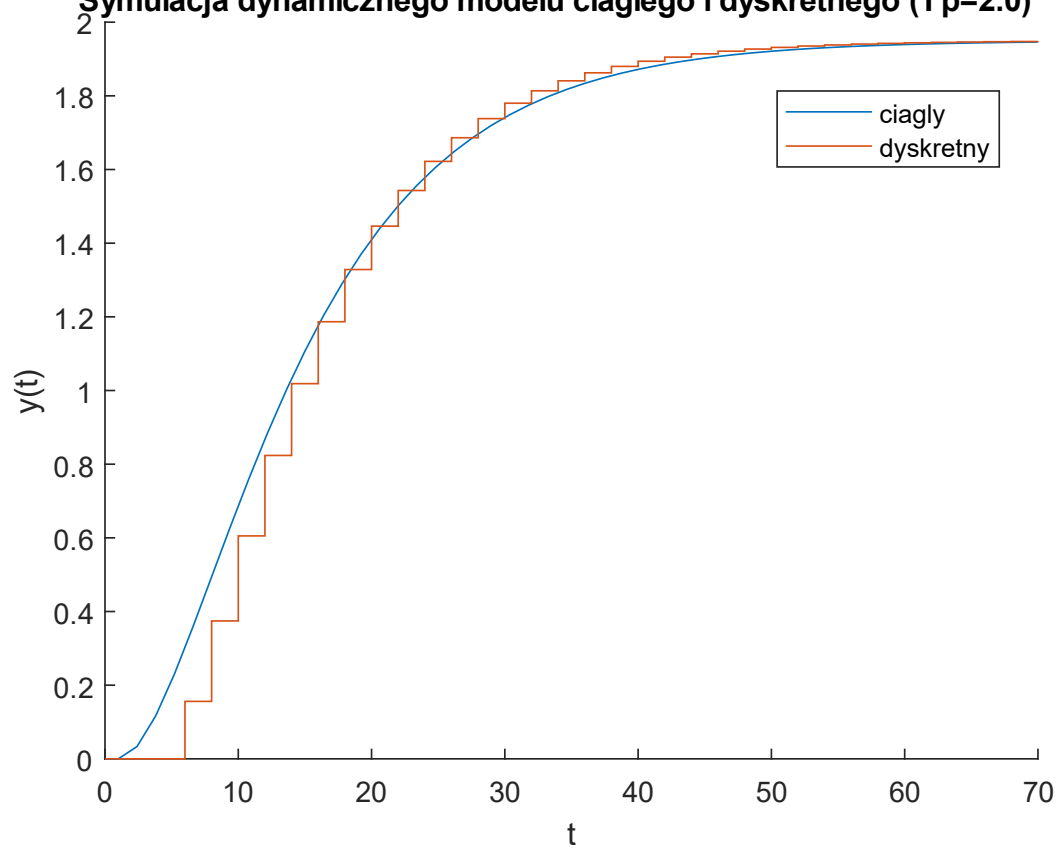
Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego ($T_p=0.5$)

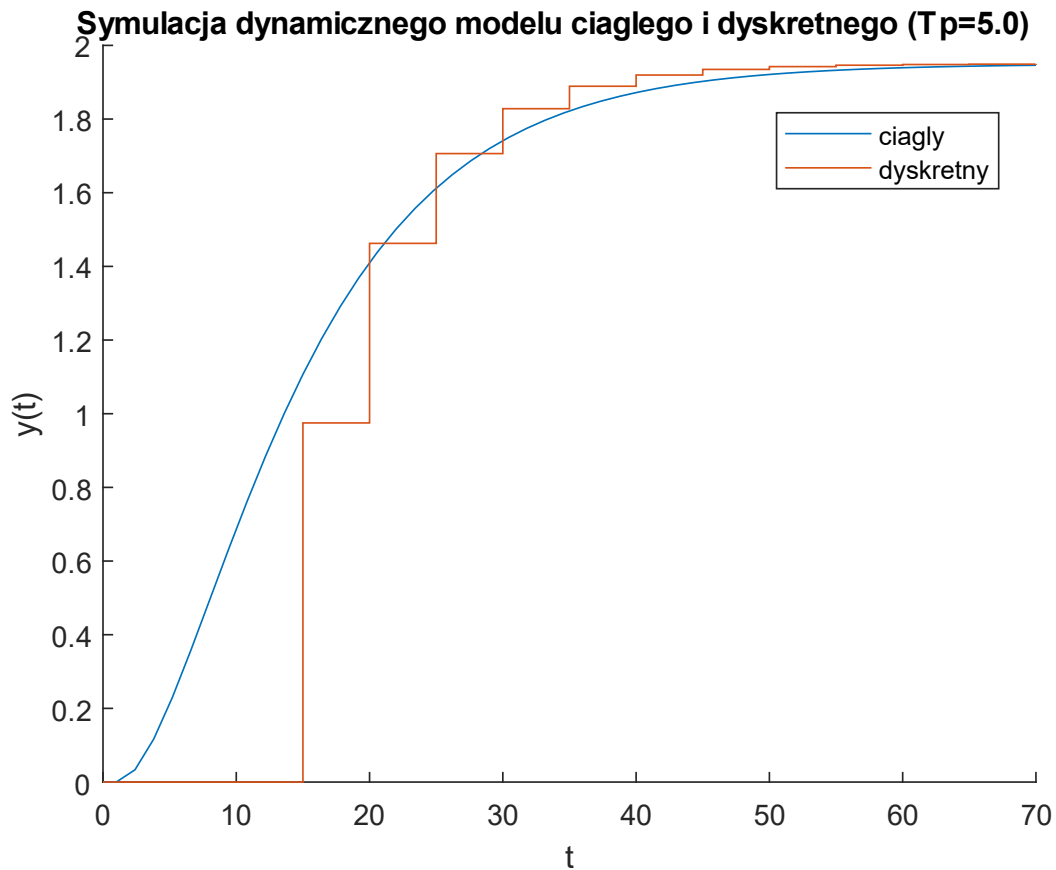


Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego ($T_p=1.0$)



Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego ($T_p=2.0$)





4. Charakterystyka statyczna

■ Wyprowadzenie wzoru

Podstawiamy 0 w miejsce pochodnych w modelu ciągłym

$$0 = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1 + x_2$$

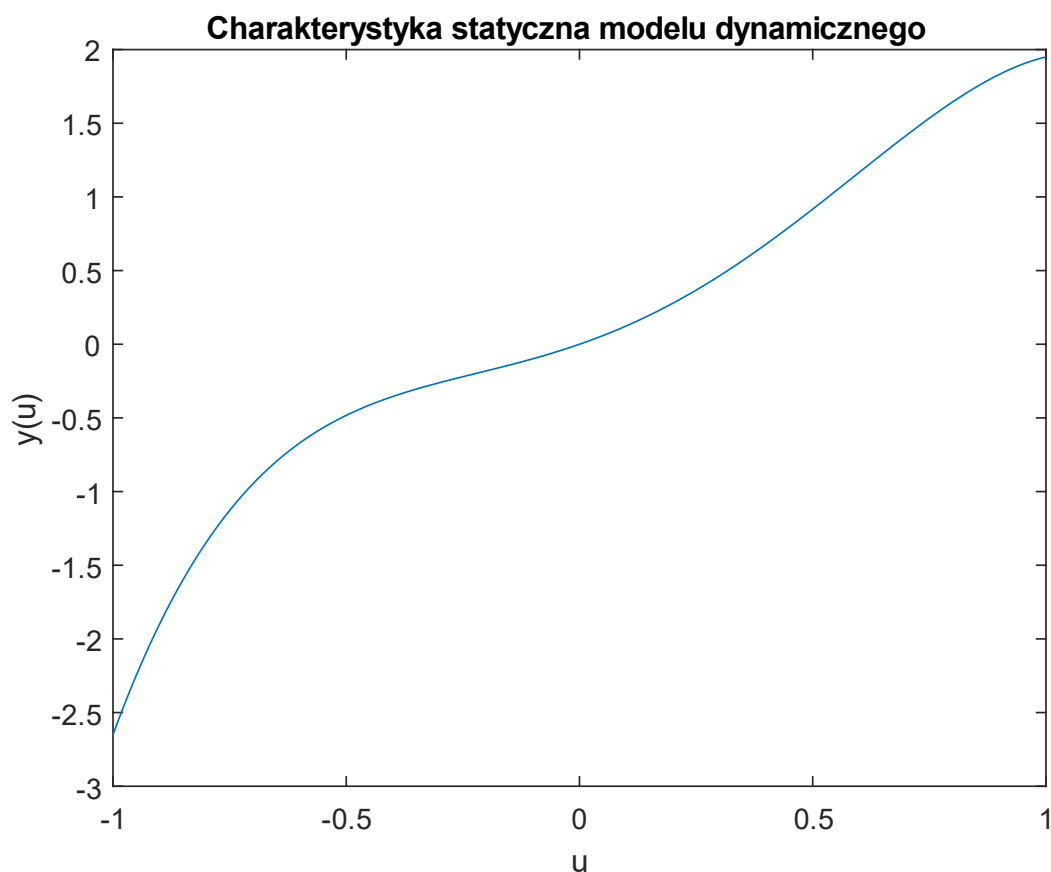
$$0 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1 + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$

$$y = x_1$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$y(u) = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$

- Uzyskana charakterystyka



5. Charakterystyka statyczna zlinearyzowana

Człony nieliniowe charakterystyki statycznej linearyzuje korzystając z pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora

$$y(x) \approx y(\bar{x}) + \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

\bar{x} – punkt linearyzacji

Po podstawieniu

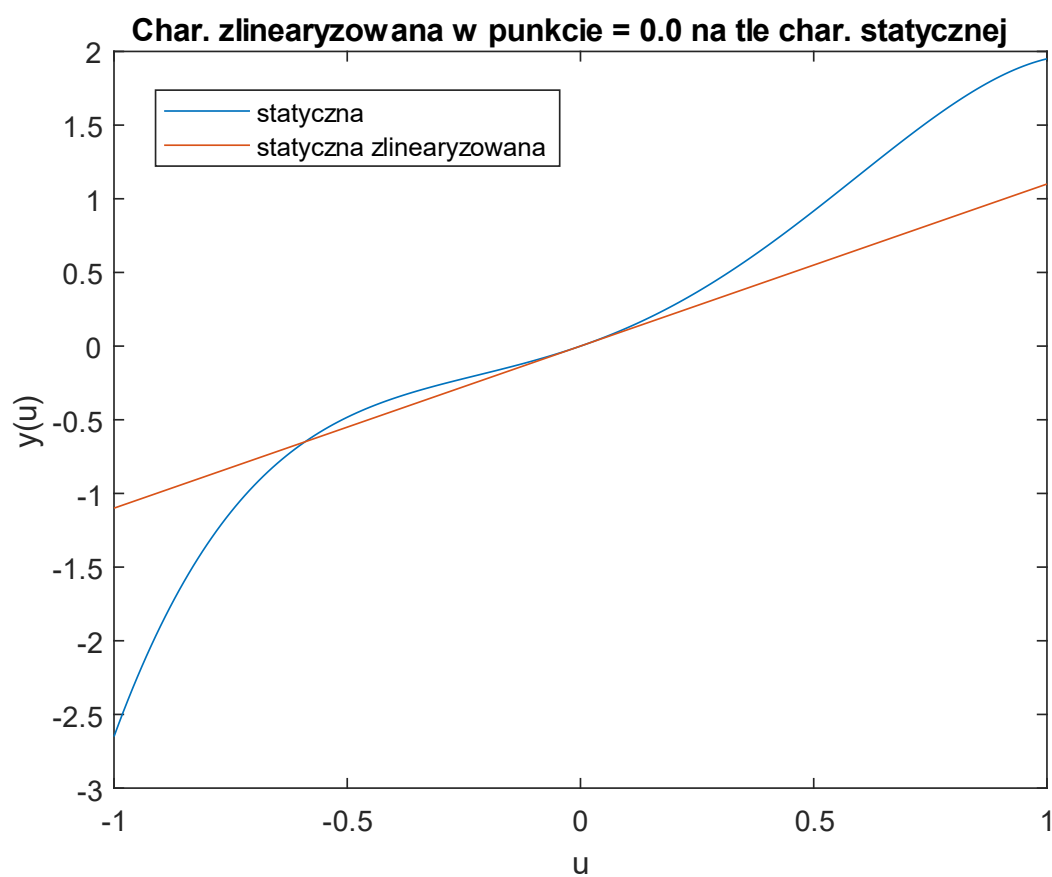
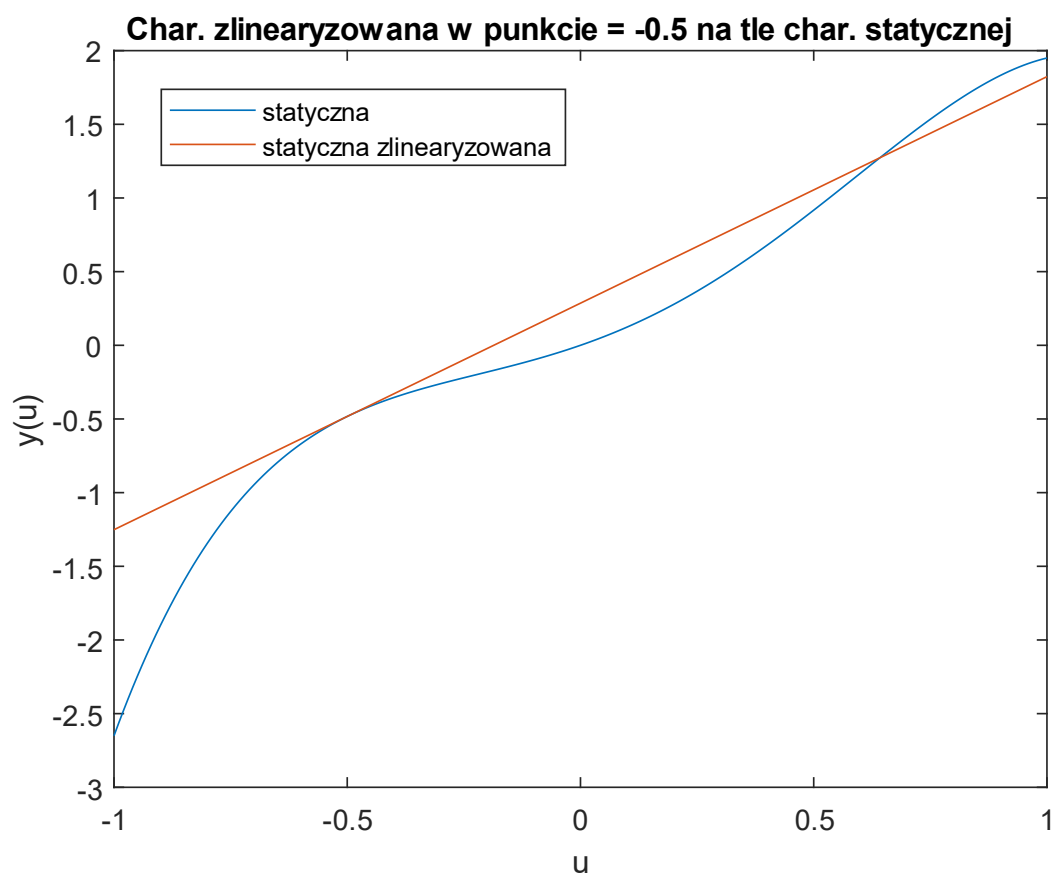
$$y(u) \approx K\{\alpha_1 u + \alpha_2 \bar{u}^2 + 2\alpha_2 \bar{u}(u - \bar{u}) + \alpha_3 \bar{u}^3 + 3\alpha_3 \bar{u}^2(u - \bar{u}) + \alpha_4 \bar{u}^4 + 4\alpha_4 \bar{u}^3(u - \bar{u})\}$$

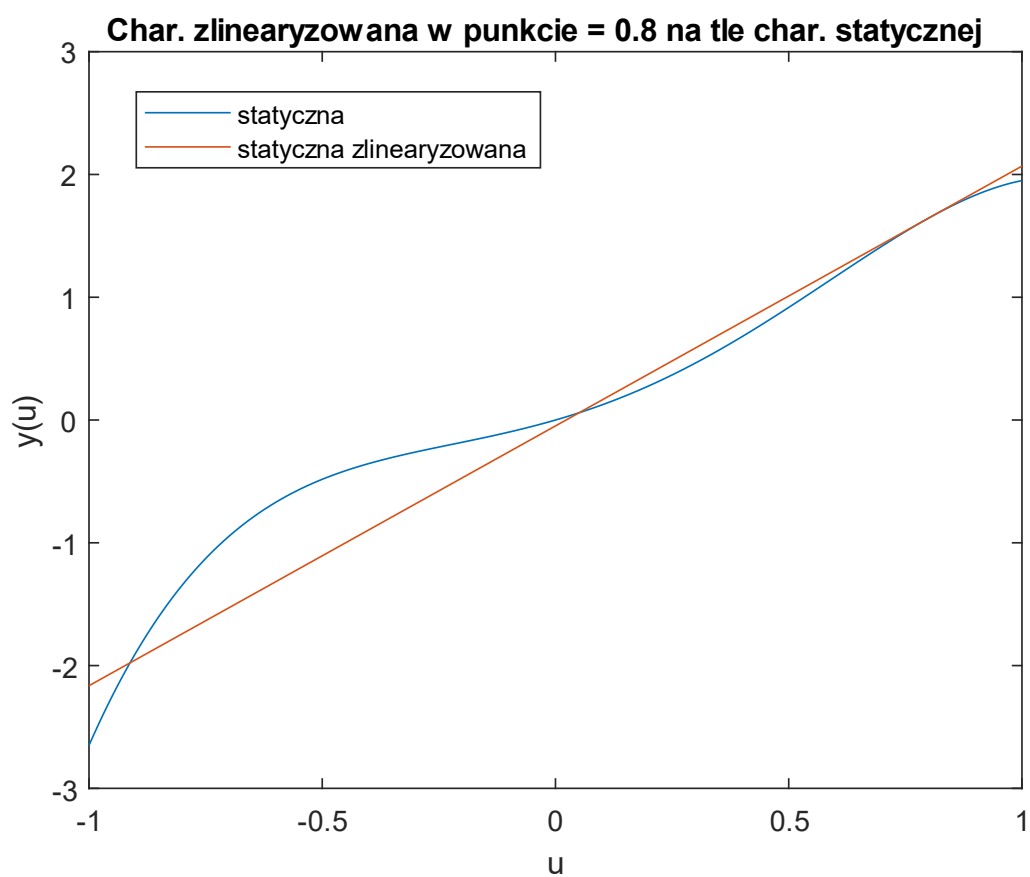
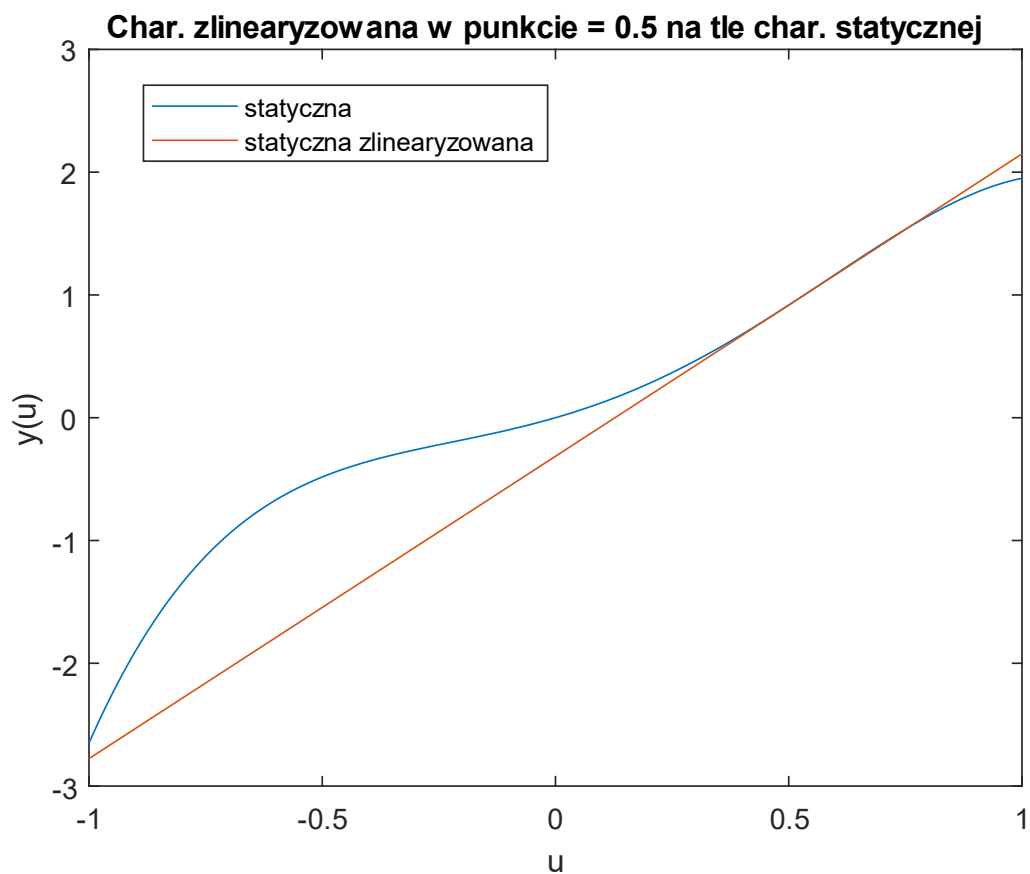
\bar{u} – punkt linearyzacji

Po przekształceniach

$$y(u) \approx K\{u(\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) - \alpha_2 \bar{u}^2 - 2\alpha_3 \bar{u}^3 - 3\alpha_4 \bar{u}^4\}$$

6. Charakterystyki statyczne zlinearyzowane na tle nieliniowych





7. Dyskretny model zlinearyzowany

Człony nieliniowe linearyzowane znów korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora

Po zlinearyzowaniu modelu dyskretnego

$$x_1(k) = \left[1 - T_p \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\right] x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1) + \frac{T_p K}{T_1 T_2} \{ \alpha_1 u + \alpha_2 \bar{u}^2 + 2\alpha_2 \bar{u} [u(k-1) - \bar{u}] + \alpha_3 \bar{u}^3 + 3\alpha_3 \bar{u}^2 [u(k-1) - \bar{u}] + \alpha_4 \bar{u}^4 + 4\alpha_4 \bar{u}^3 [u(k-1) - \bar{u}] \}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

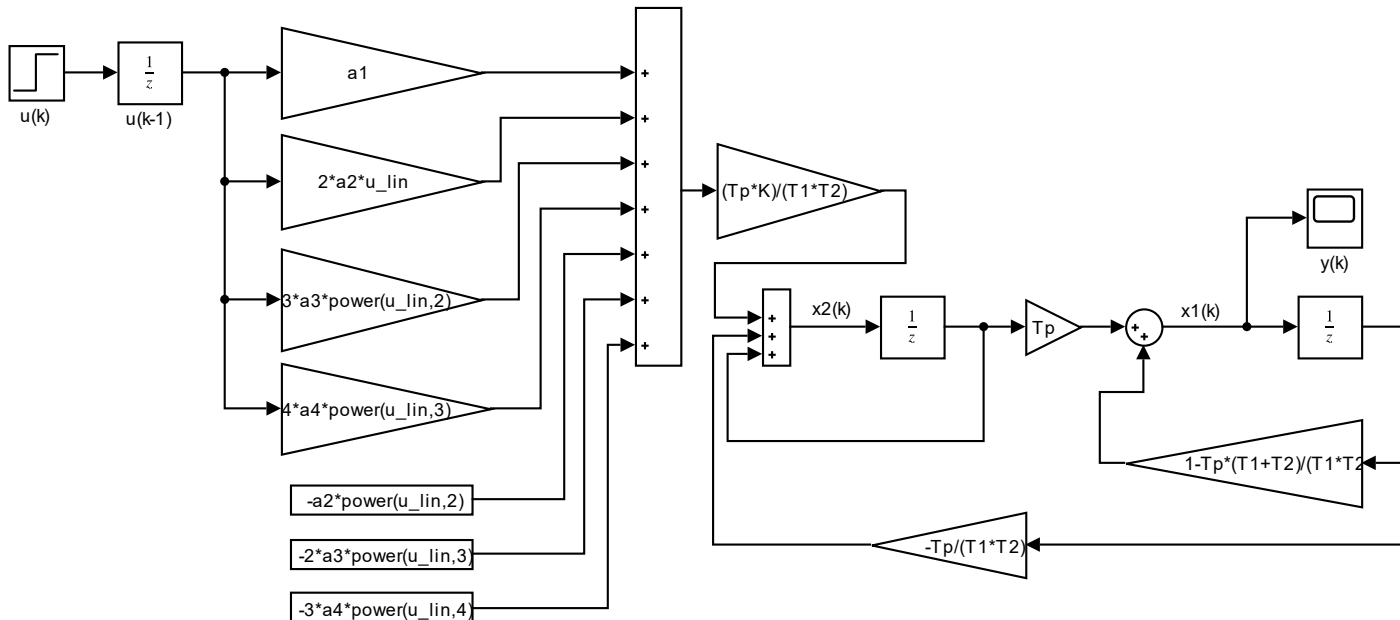
Po przekształceniach otrzymujemy

$$x_1(k) = \left[1 - T_p \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\right] x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1) + \frac{T_p K}{T_1 T_2} \{ u(k-1) [\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3] - \alpha_2 \bar{u}^2 - 2\alpha_3 \bar{u}^3 - 3\alpha_4 \bar{u}^4 \}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

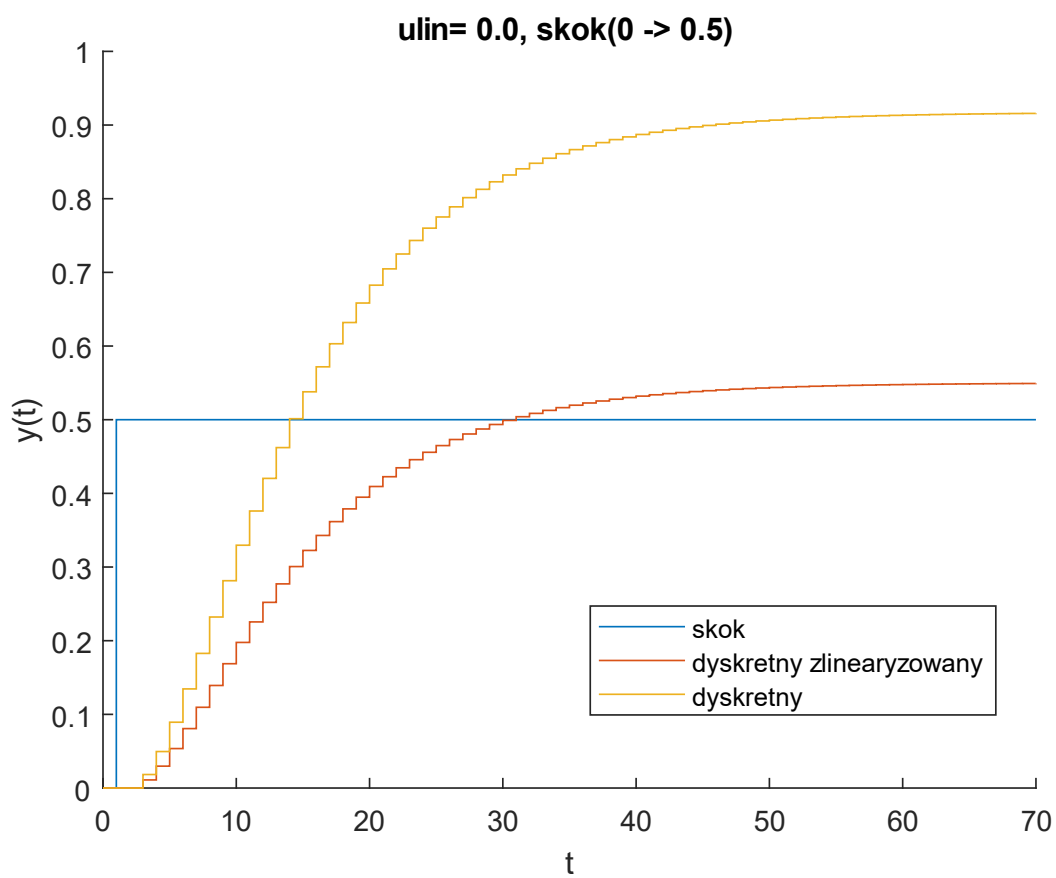
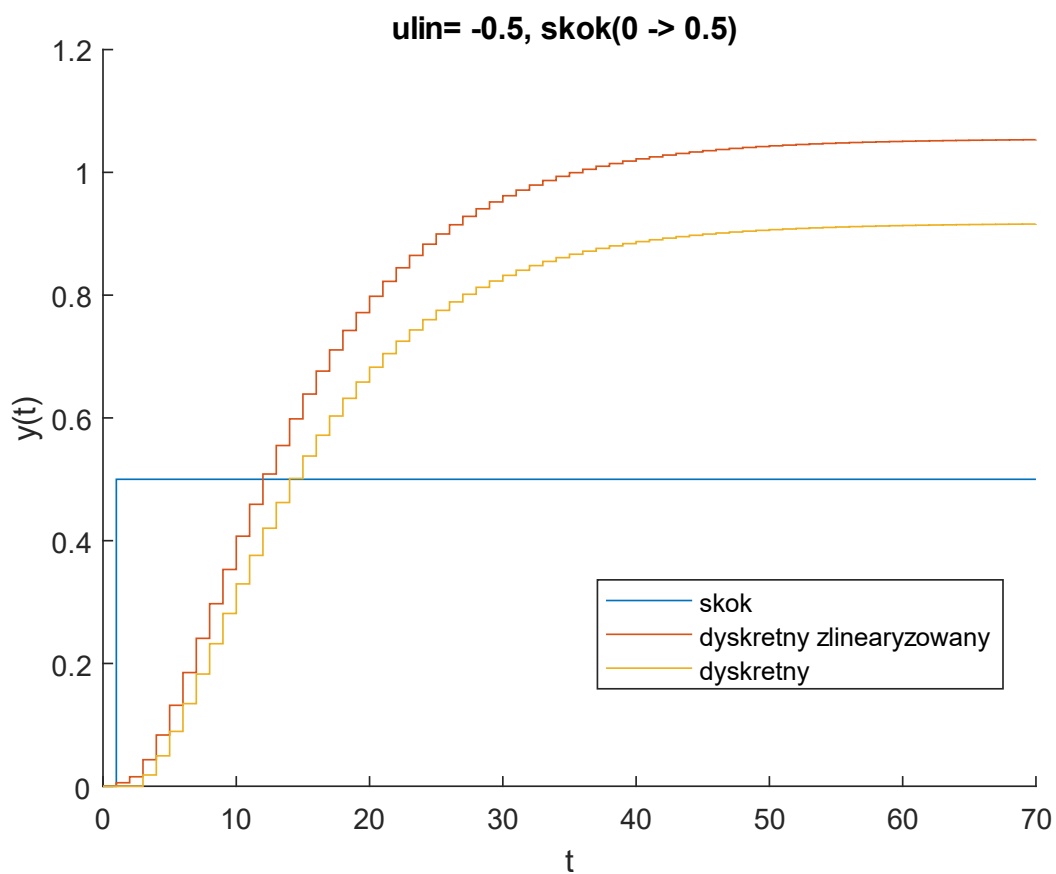
8. Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego modelu dyskretnego

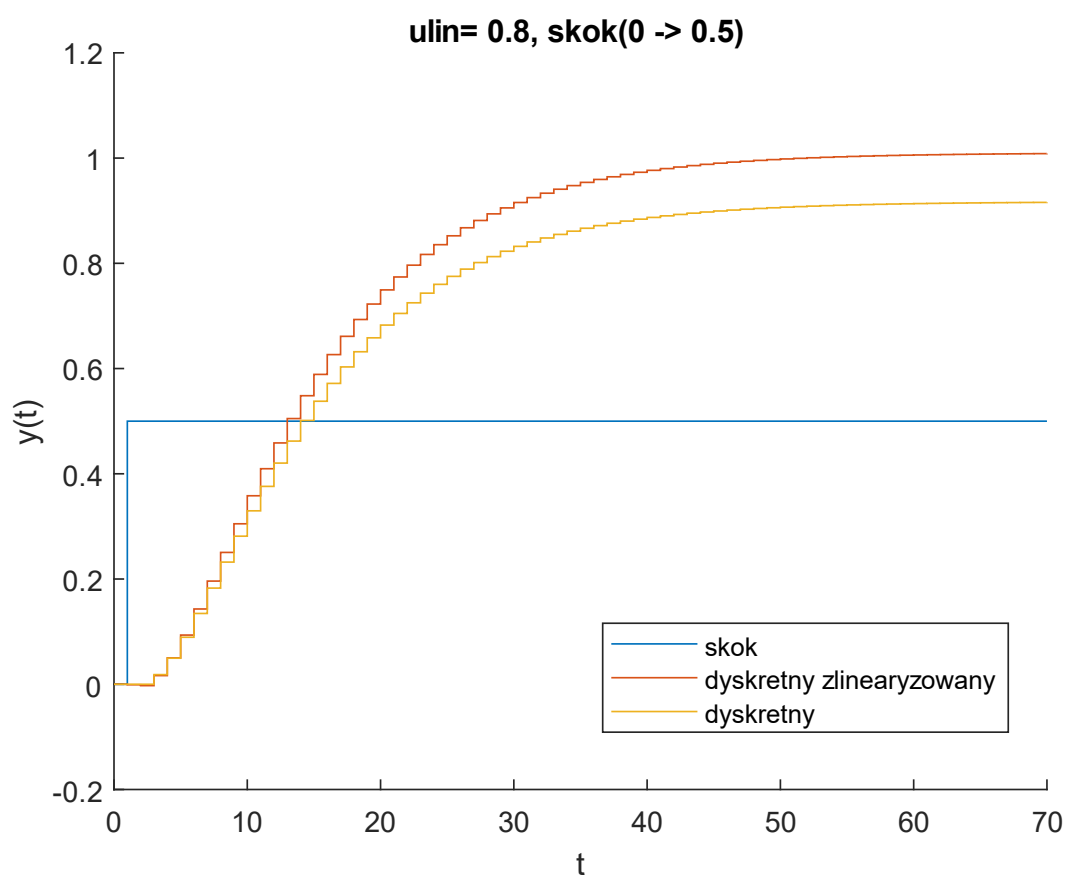
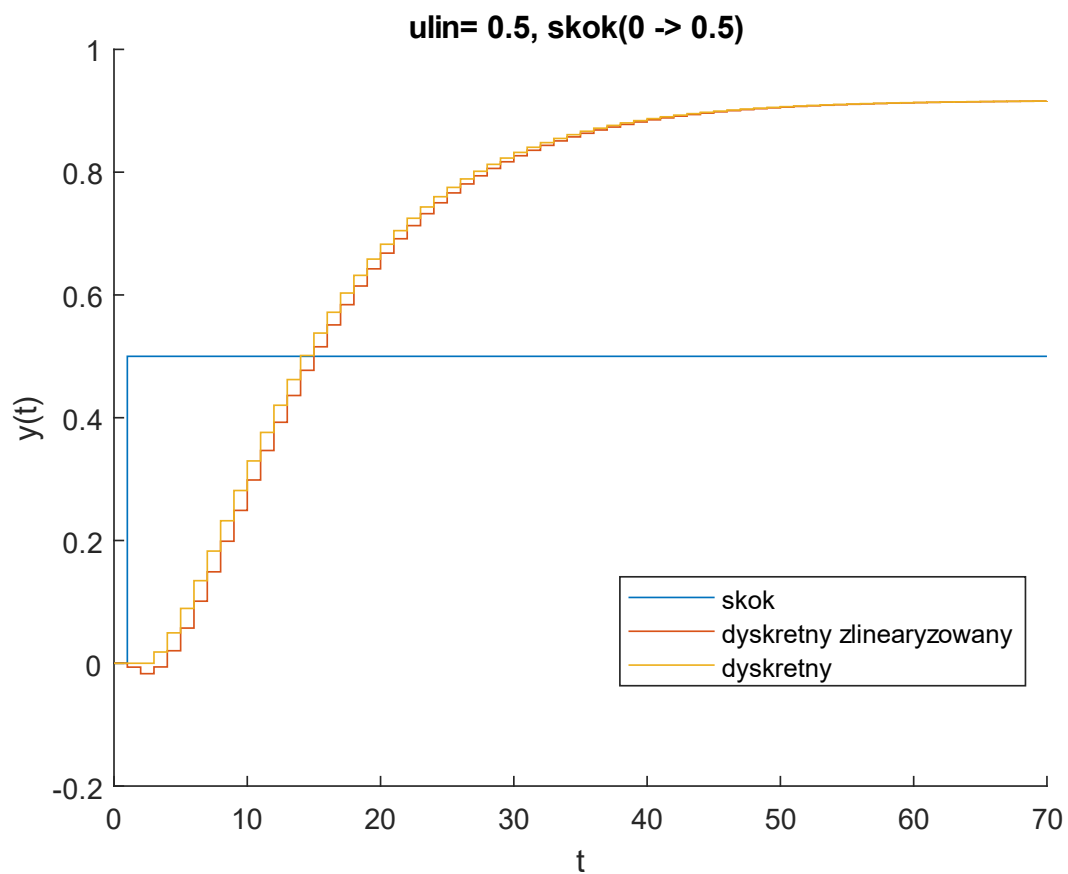


9. Symulacja modelu dyskretnego nieliniowego i zlinearyzowanego

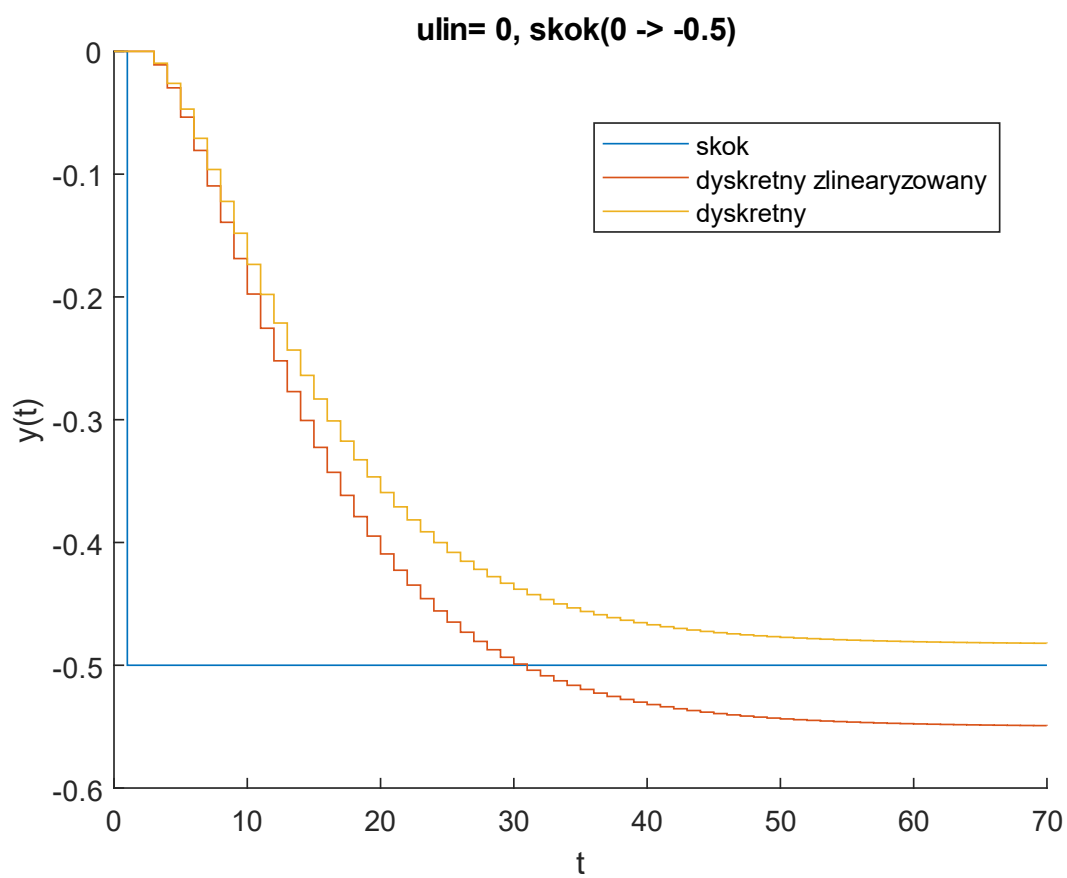
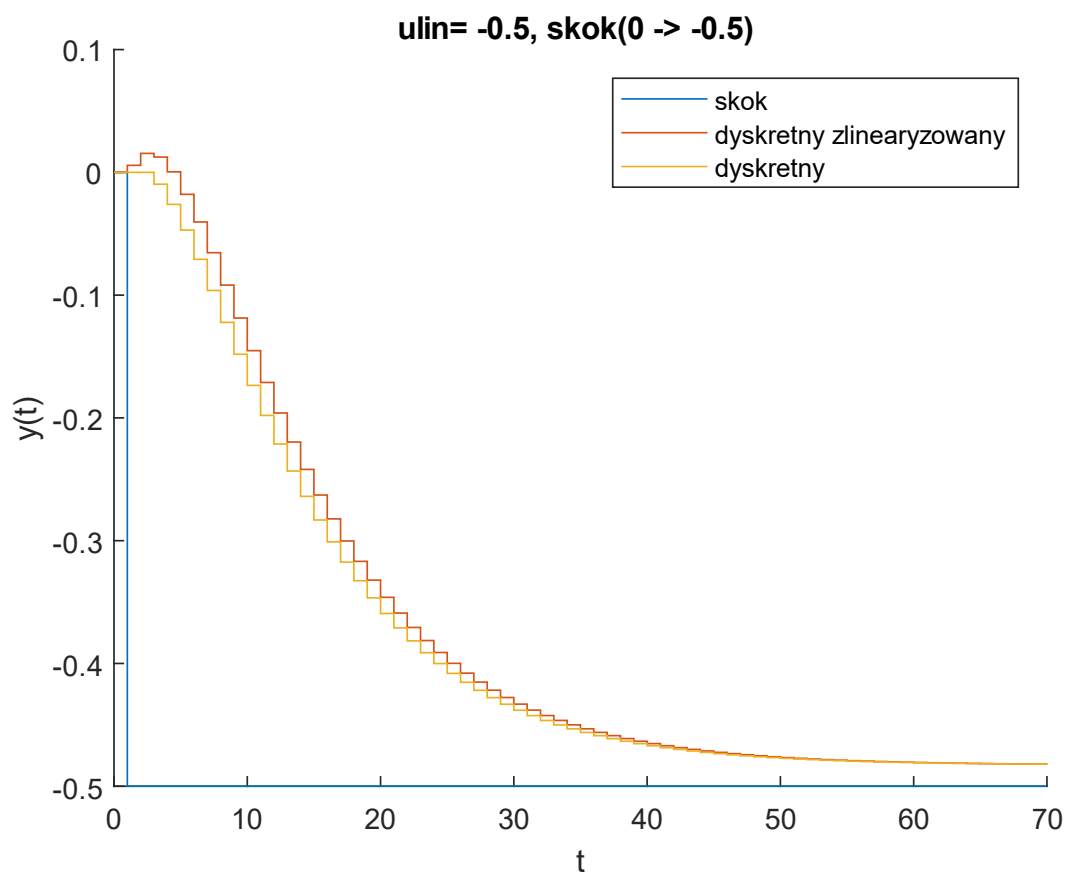
Symulacje wykonano dla różnych skoków i punktów linearyzacji

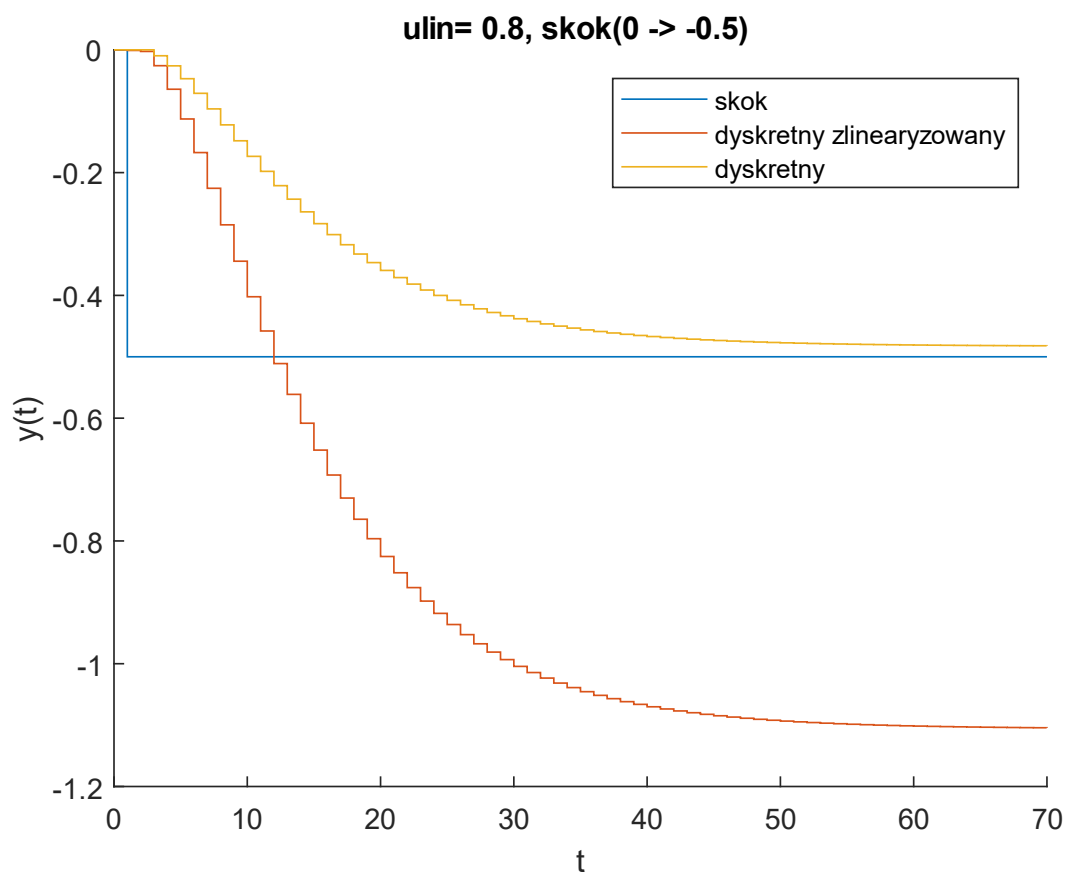
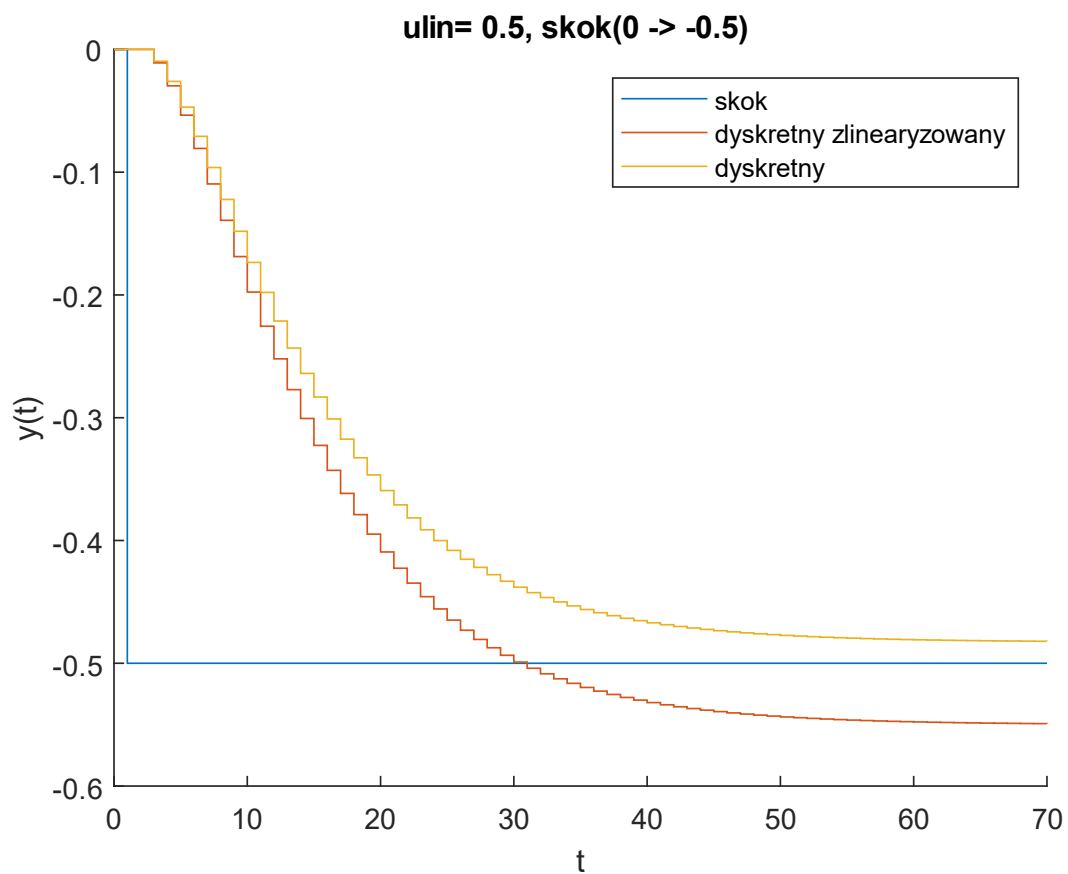
- Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow 0.5$



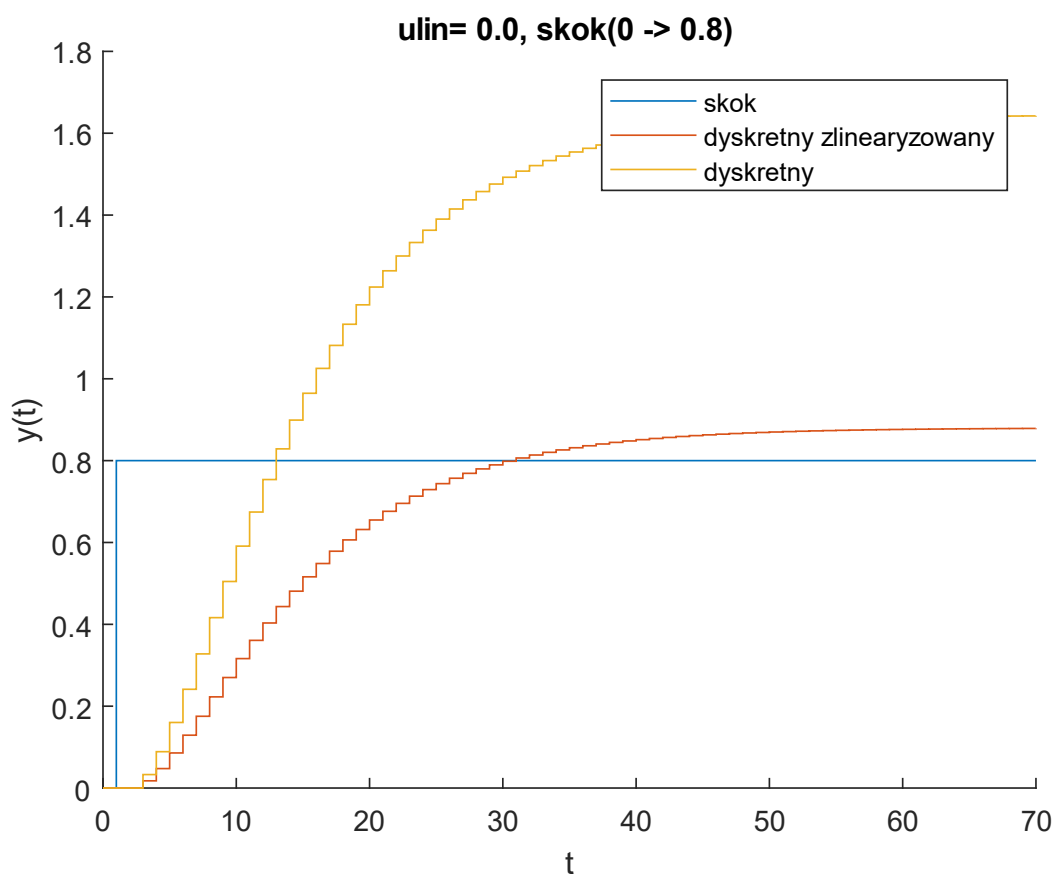
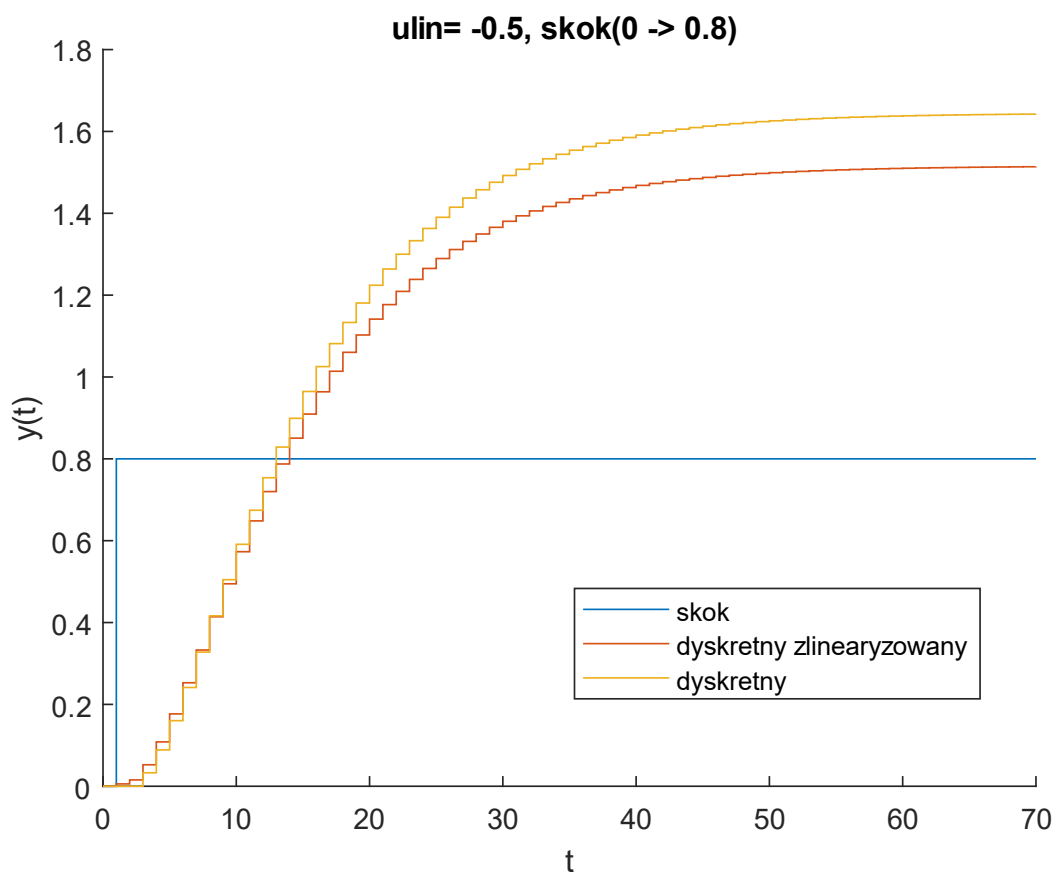


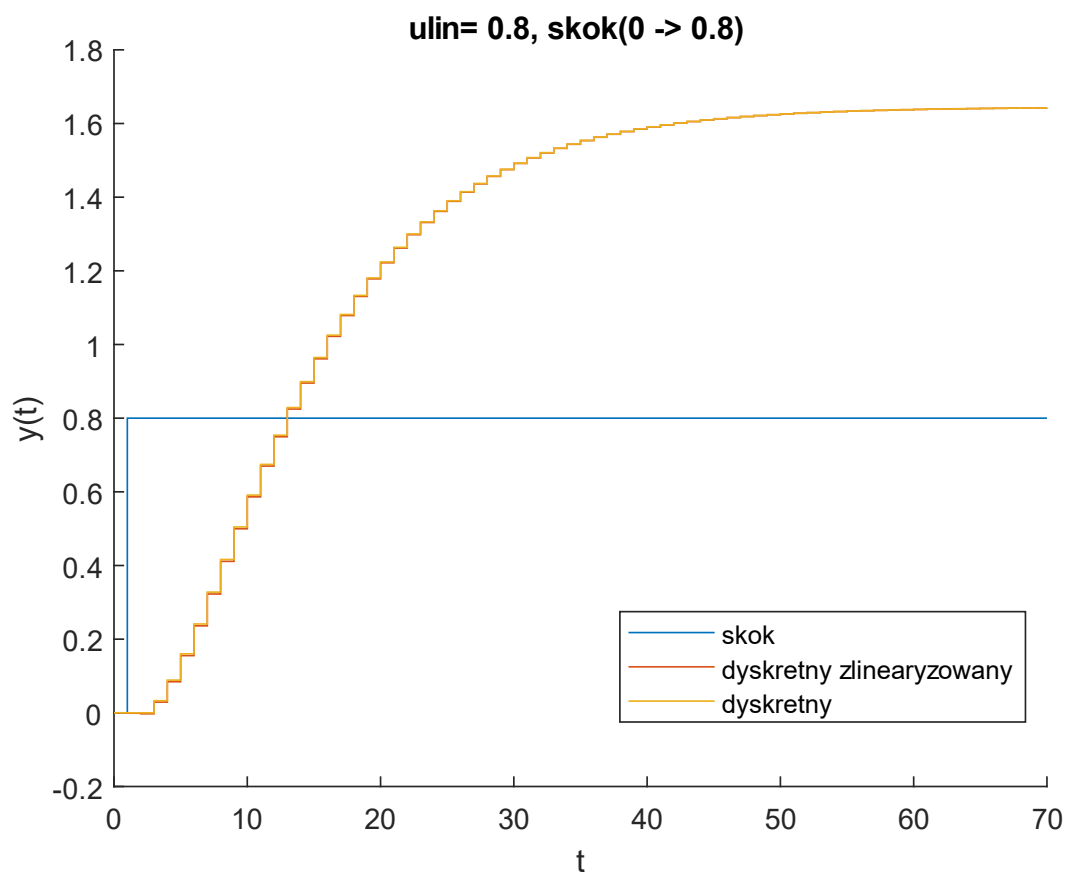
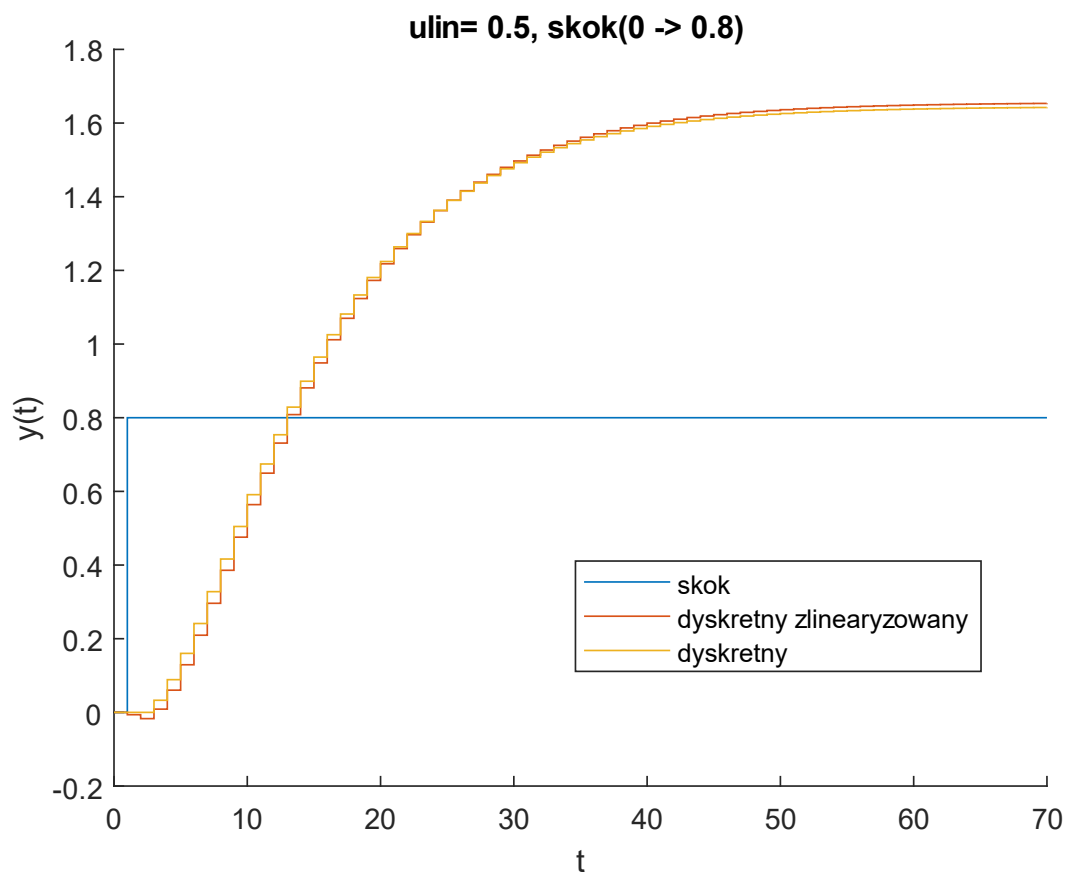
- Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow -0.5$





- Skok sygnału sterującego $0 \rightarrow 0.8$





10. Transmitancja zlinearyzowanego modelu ciągłego

Wyprowadzenie transmitancji z modelu ciągłego zlinearyzowanego

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} \{u(t)[\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3] - \alpha_2 \bar{u}^2 - 2\alpha_3 \bar{u}^3 - 3\alpha_4 \bar{u}^4\} \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Macierze pomocnicze

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] & D &= 0\end{aligned}$$

Wyznaczanie transmitancji

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} & -1 \\ \frac{1}{T_1 T_2} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s \left(s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right) + \frac{1}{T_1 T_2}} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{s}{T_1 T_2} & s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3)}{s \left(s + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right) + \frac{1}{T_1 T_2}}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$G(s) = \frac{K(\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{u} + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 4\alpha_4 \bar{u}^3)}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

Zadania dodatkowe

1. Wyznaczenie wzmocnienia statycznego transmitancji – zadanie dodatkowe

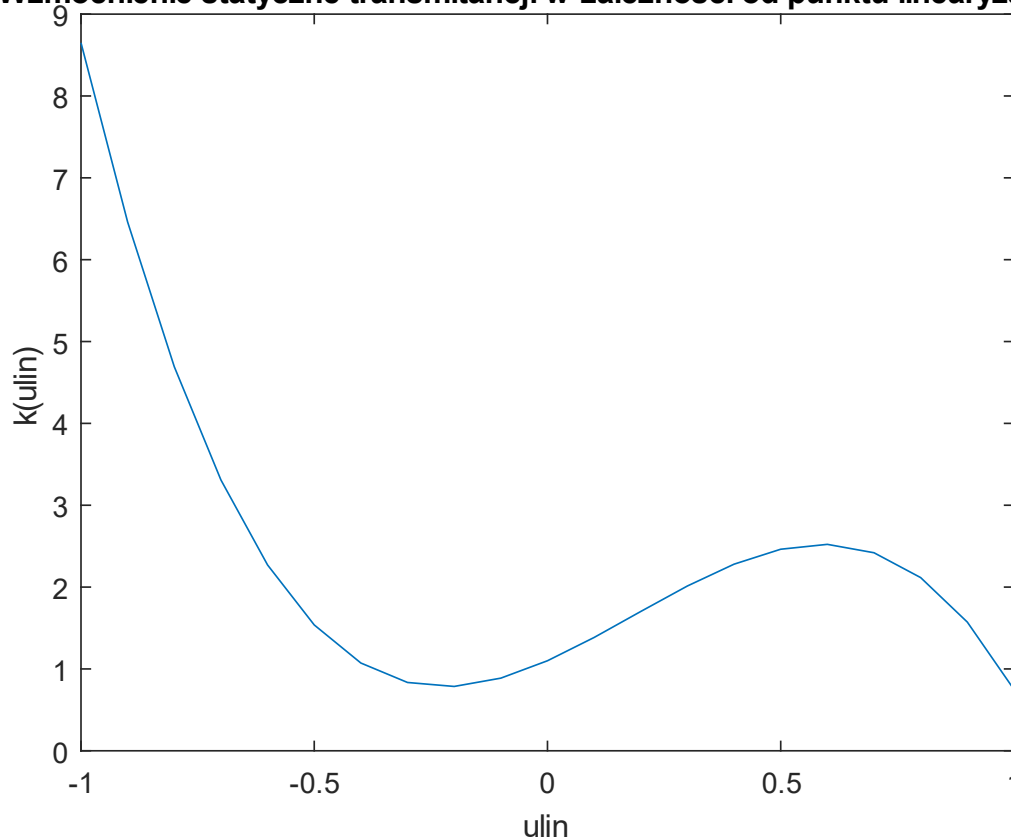
■ Wyprowadzenie wzoru

Wyznaczam wzmocnienie statyczne na podstawie transmitancji z poprzedniego punktu obliczając granicę

$$k_{stat}(\bar{u}) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3)$$

■ Charakterystyka

Wzmocnienie statyczne transmitancji w zależności od punktu linearyzacji



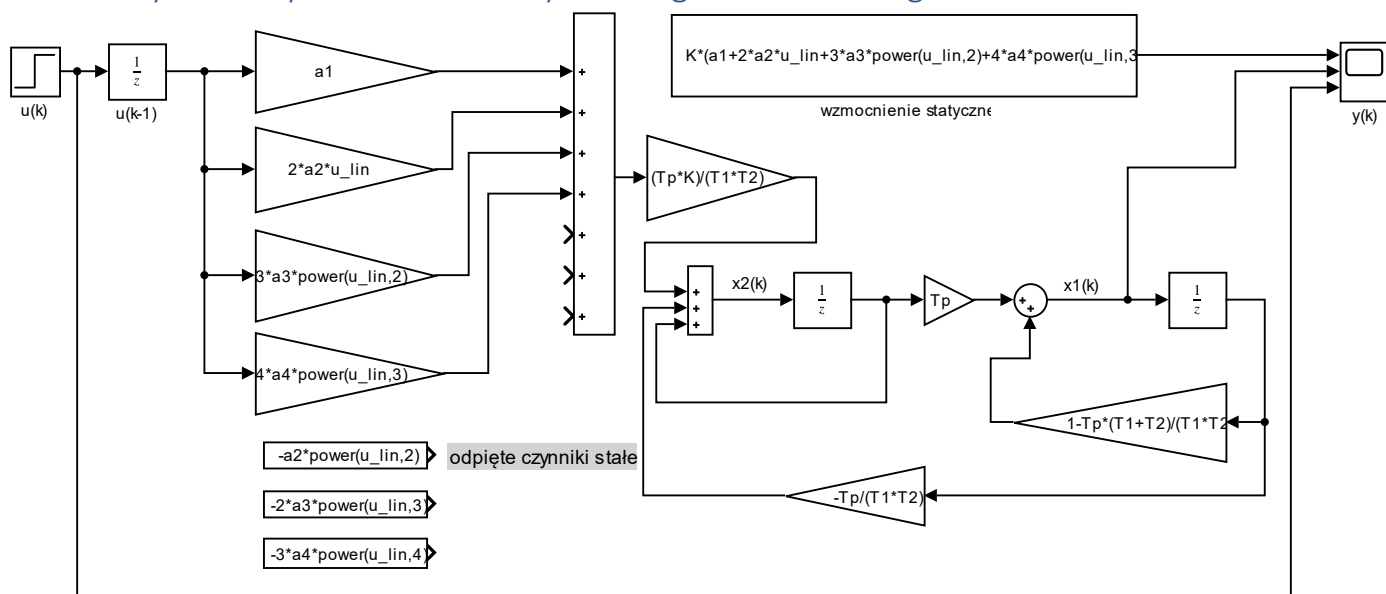
2. Porównanie wzmocnienia statycznego transmitancji ze wzmocnieniem dyskretnego układu zlinearyzowanego – zadanie dodatkowe

Wzmocnienie układu z punktu 9 w swojej oryginalnej formie nie odpowiada wzmocnieniu transmitancji. Jest to spowodowane tym, że transmitancja nie uwzględnia punktu pracy, więc pomija członów stałych, które są obecne w układzie w punktu 9.

Zmodyfikowany układ przedstawiony na rysunku poniżej pozwala na sprawdzenie czy dla danego punktu linearyzacji układ dyskretny zlinearyzowany pozbawiony członów stałych stabilizuje się na poziomie wartości wzmocnienia statycznego dla danego punktu linearyzacji przy wymuszeniu skokiem od 0 do 1.

Po wykonaniu testów zamieszczonych poniżej można zauważyć, że rzeczywiście po pominięciu punktu pracy wzmocnienia się zgadzają.

■ Zmodyfikowany układ modelu dyskretnego do badania zgodności wzmacnień



■ Wykresy z testów zgodności

Testy zostały wykonane dla trzech różnych punktów linearyzacji. Jak widać na wykresach zmodyfikowany układ dyskretny stabilizuje się za każdym razem na wartości wzmacnienia transmitancji.

Możemy w ten sposób to testować ze względu na skok o wartości 1 przy którym wyjście układu po stabilizacji odpowiada wartości jego wzmacnienia.

