

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Sterowanie procesami

Dokumentacja projektu I, zadanie 33

Krystian Guliński
nr albumu 283408

Spis treści

Transmitancja ciągła procesu dynamicznego	2
1. Wyznaczenie transmitancji dyskretnej, zer i biegunów.	2
▪ Transmitancja dyskretna.....	2
▪ Zera i bieguny obu transmitancji	2
2. Reprezentacja modelu dyskretnego w przestrzeni stanów	3
▪ Uzyskanie macierzy przestrzeni stanów	3
▪ Szczegółowa struktura modelu wariantu I	4
▪ Szczegółowa struktura modelu wariantu II	4
3. Dowód na to, że obie reprezentacje można sprowadzić do tej samej transmitancji.....	5
4. Symulacja modeli w przestrzeni stanów przy wymuszeniu skokowym.....	5
5. Sprawdzenie sterowalności i obserwowalności	6
6. Wyznaczenie regulatora ze sprzężeniem od stanu.....	7
I. Symulacja układu zamkniętego posiadającego takie same bieguny rzeczywiste.....	7
II. Symulacja układu zamkniętego z jednym biegunem rzeczywistym oraz parą biegunów sprzężonych zespolonych.....	11
a) Symulacja zmiennego współczynnika a	11
b) Symulacja zmiennego współczynnika b	14
7. Wybranie regulatorów	17
▪ Trzy rzeczywiste bieguny	17
▪ Rzeczywisty biegun i dwa sprzężone bieguny zespolone	18
8. Projektowanie obserwatora zredukowanego rzędu	18
▪ Wyznaczanie parametrów	19
▪ Szczegółowa struktura obserwatora	19
▪ Ogólna struktura układu regulacji z obserwatorem	19
9. Testowanie obserwatora przy regulatorze korzystającym z mierzonego stanu	20
▪ Zbieżność zmiennych stanu obserwatora do stanu rzeczywistego	20
▪ Wpływ zmiany biegunów obserwatora na jego działanie (regulator z punktu 6 – trzy identyczne bieguny rzeczywiste)	20
▪ Wpływ zmiany biegunów obserwatora na jego działanie (regulator z punktu 6 – rzeczywisty + 2 sprzężone)	23
10. Testowanie działania regulatora z wykorzystaniem stanu obserwowanego	26
▪ Najlepsza konfiguracja biegunów rzeczywistych z punktu 6.I	26
▪ Najlepsza konfiguracja bieguna rzeczywistego i pary biegunów sprzężonych z punktu 6.II.....	27

Transmitancja ciągła procesu dynamicznego

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s-4)(s+5)(s+6)}$$

1. Wyznaczenie transmitancji dyskretnej, zer i biegunów.

■ Transmitancja dyskretna

Do wyznaczenia transmitancji dyskretnej posłużyłem się pakietem Matlab. Najpierw stworzyłem model transmitancji ciągłej w przestrzeni roboczej, a następnie używając funkcji *c2d* wygenerowałem transmitancję dyskretną. Używa ona domyślnie ekstrapolatora zerowego rzędu, więc wystarczy tylko podać jej jeszcze pożądany czas próbkowania ($T_p=0.25[s]$)

```
>> s = tf('s');  
>> Gs = ((s+2)*(s+3))/((s-4)*(s+5)*(s+6));  
>> Tp=0.25;  
>> Gz = c2d(Gs,Tp)
```

Gz =

```
0.2607 z^2 - 0.2892 z + 0.07612  
-----  
z^3 - 3.228 z^2 + 1.449 z - 0.1738
```

Sample time: 0.25 seconds
Discrete-time transfer function.

■ Zera i bieguny obu transmitancji

Posiadając już w przestrzeni roboczej obydwie transmitancje wystarczyło jedynie wywołać funkcję *roots* dla ich liczników i mianowników, aby łatwo otrzymać zera i bieguny.

```
%Transmitancja ciągła  
>> roots(Gs.Numerator{1,1})  
  
ans =  
  
-3.0000  
-2.0000  
  
>> roots(Gs.Denominator{1,1})  
  
ans =  
  
4.0000  
-6.0000  
-5.0000
```

```
%Transmitancja dyskretna  
>> roots(Gz.Numerator{1,1})  
  
ans =  
  
0.6798  
0.4295  
  
>> roots(Gz.Denominator{1,1})  
  
ans =  
  
2.7183  
0.2865  
0.2231
```

2. Reprezentacja modelu dyskretnego w przestrzeni stanów

■ Uzyskanie macierzy przestrzeni stanów

W celu uzyskania tej reprezentacji użyłem funkcji *tf2ss*, która na podstawie transmitancji generuje równania stanu pierwszego wariantu metody bezpośredniej.

```
>> [A1,B1,C1,D1]=tf2ss(Gz.Numerator{1,1},Gz.Denominator{1,1})
```

```
A1 =  
    3.2279   -1.4493    0.1738  
    1.0000         0         0  
         0    1.0000         0
```

```
B1 =  
     1  
     0  
     0
```

```
C1 =  
    0.2607   -0.2892    0.0761
```

```
D1 =  
     0
```

Aby uzyskać drugi wariant metody bezpośredniej należy skorzystać z zależności pomiędzy tymi dwoma wariantami, czyli transponować wszystkie macierze i zamienić B z C.

```
>> A2=A1'
```

```
A2 =  
    3.2279    1.0000         0  
   -1.4493         0    1.0000  
    0.1738         0         0
```

```
>> B2=C1'
```

```
B2 =  
    0.2607  
   -0.2892  
    0.0761
```

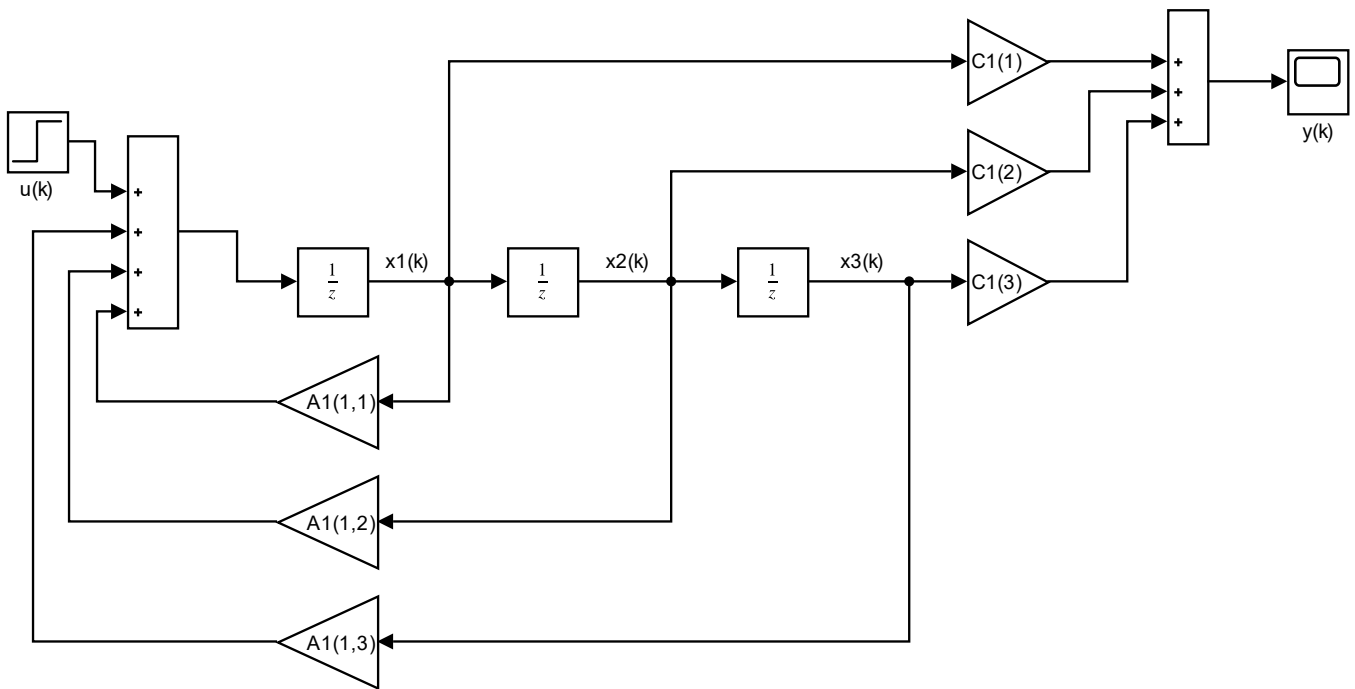
```
>> C2=B1'
```

```
C2 =  
     1     0     0
```

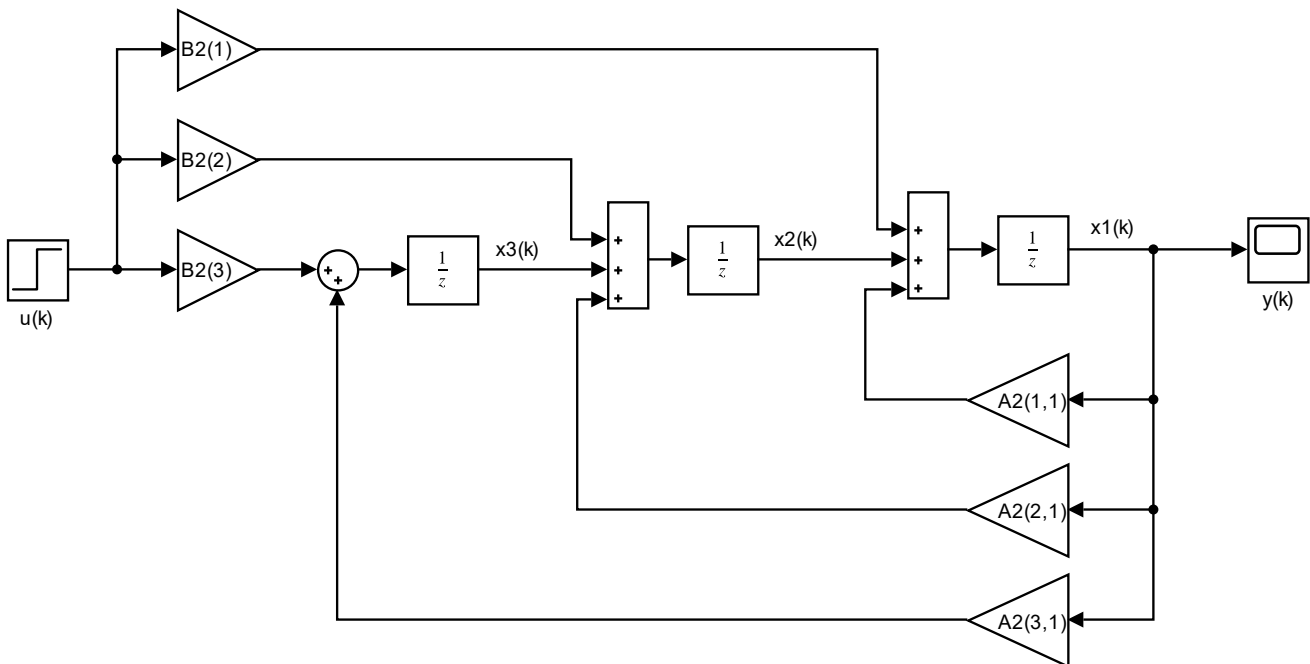
```
>> D2=0
```

```
D2 =  
     0
```

- Szczegółowa struktura modelu wariantu I



- Szczegółowa struktura modelu wariantu II



3. Dowód na to, że obie reprezentacje można sprowadzić do tej samej transmitancji

Wzór na transmitancję dyskretną z wykorzystaniem równań stanu

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

Podstawiając pod niego macierze drugiego wariantu otrzymujemy

$$G(z) = C_2(zI - A_2)^{-1}B_2$$

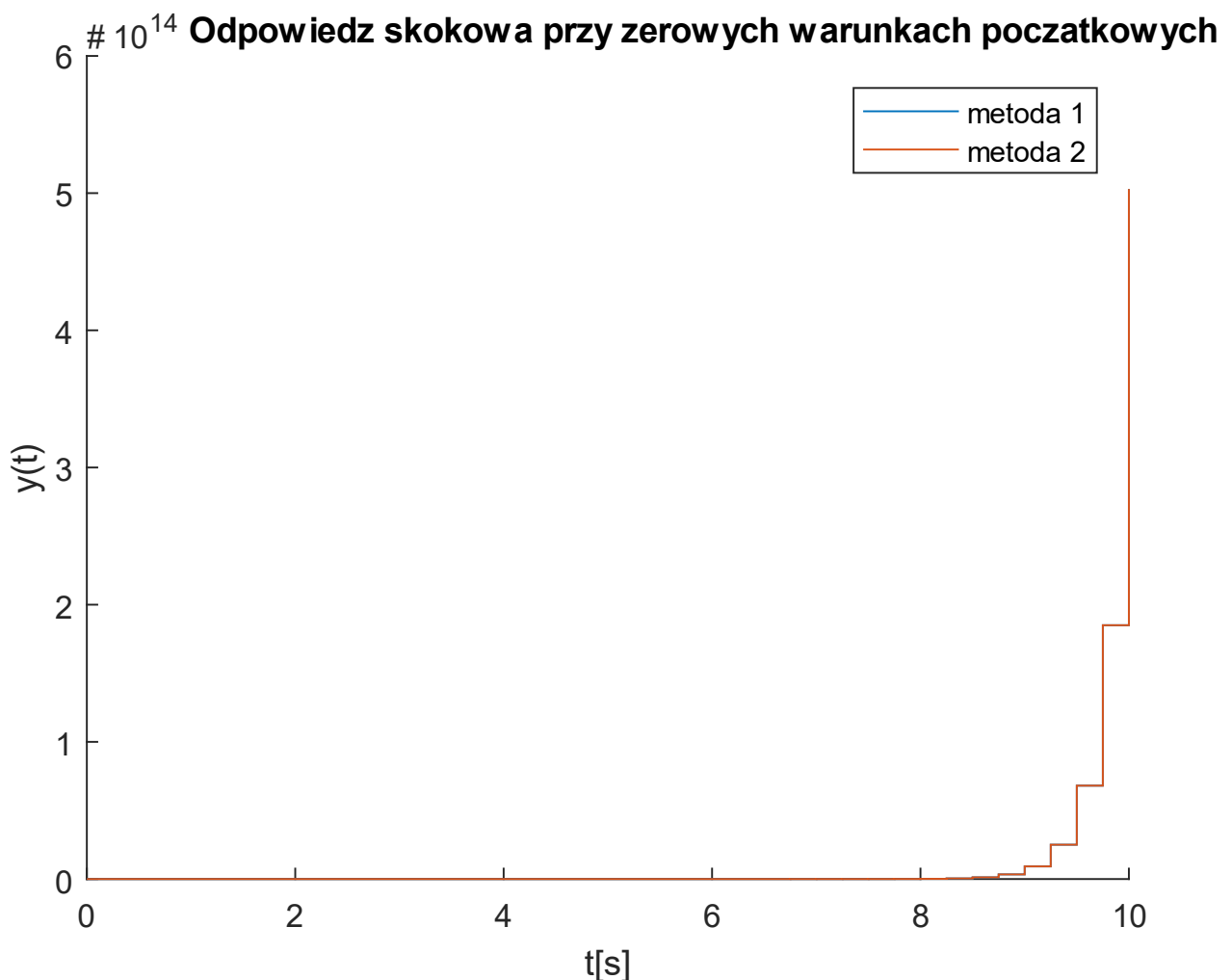
Następnie zamieniamy macierze drugiego wariantu na macierze pierwszego wariantu i przekształcamy

$$G(z) = B_1^T (zI - A_1^T)^{-1} C_1^T = B_1^T [(zI - A_1)^{-1}]^T C_1^T = [B_1 (zI - A_1)^{-1} C_1]^T$$

Po przekształceniach otrzymujemy transponowaną transmitancję wariantu pierwszego. Transponowanie nie wpływa w żaden sposób na transmitancję, bo nie jest ona macierzą, więc te przekształcenia udowadniają, że oba warianty prowadzą do tej samej transmitancji.

4. Symulacja modeli w przestrzeni stanów przy wymuszeniu skokowym

Symulacje wykonano dla skoku sygnału wejściowego z wartości 0 na 1 w chwili 1s. Po kolei wykonano symulację przy zerowych warunkach początkowych i przy niezerowych warunkach początkowych.





Obydwa modele są oczywiście niestabilne. Niepokrycie się przebiegów przy niezerowych warunkach początkowych wynika z różnej interpretacji zmiennych stanu w obu wariantach.

Niestabilność modeli widoczna jest już zanim je wygenerowaliśmy. Transmitancja ciągła posiada dodatni biegun, co od samego początku kwalifikuje proces jako niestabilny.

5. Sprawdzenie sterowalności i obserwowalności

Od tego momentu macierze A, B, C, D oznaczają macierze wariantu drugiego metody bezpośredniej.

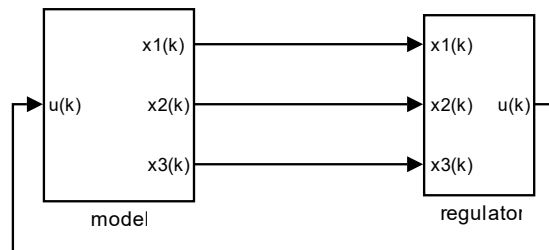
Sterowalność i obserwowalność można określić sprawdzając czy ich macierze są pełnego rzędu. Można to sprawdzić używając funkcji *rank* w środowisku Matlab.

<pre>%Sterowalność >> rank([B A*B A*A*B]) ans = 3</pre>	<pre>%Obserwowalność >> rank([C; C*A; C*A*A]) ans = 3</pre>
---------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------

Rząd 3 oznacza, że macierze są pełnego rzędu, więc model jest sterowalny i obserwowalny.

6. Wyznaczenie regulatora ze sprzężeniem od stanu

$$u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$



Parametry wektora K wyznaczyć można w środowisku Matlab funkcją `acker`, która zwraca przeliczone współczynniki w zależności od tego w którym miejscu chcemy umieścić bieguny.

Przykładowe wywołanie funkcji

```
>> acker(A, B, [0.5, 0.5, 0.5])
```

```
ans =
```

```
11.0099  4.0353  0.3229
```

I. Symulacja układu zamkniętego posiadającego takie same bieguny rzeczywiste

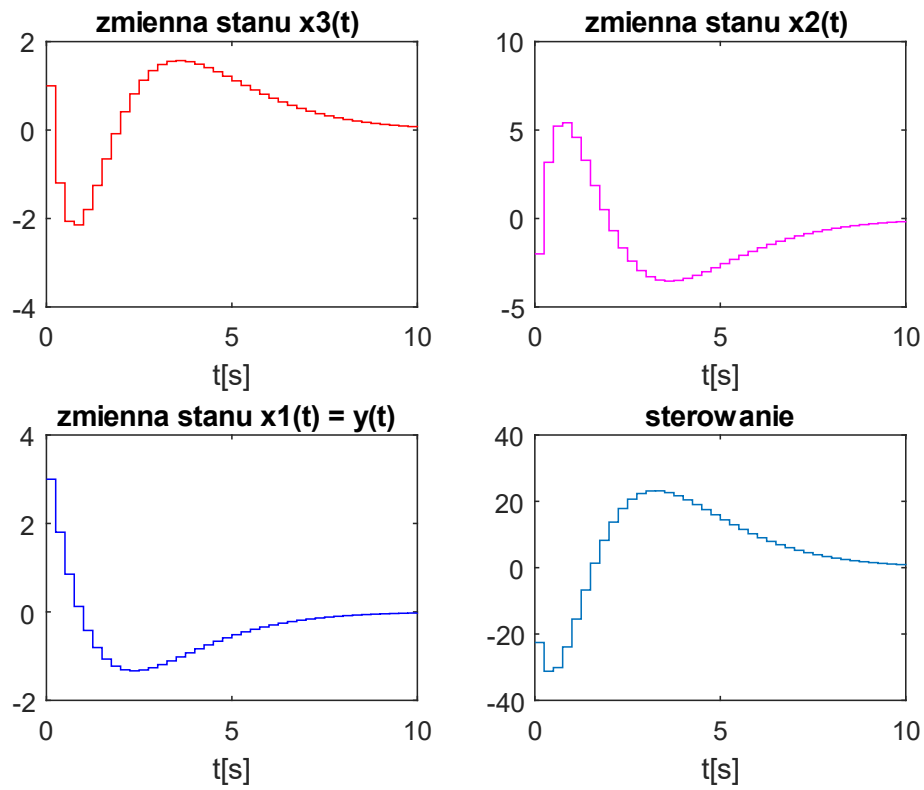
Przyjęto warunek początkowy $x(0) = [3 \ -2 \ 1]^T$.

Symulację rozpocząłem od biegunów najdalej oddalonych od 0, aby pokazać, jak zmienia się odpowiedź skokowa modelu wraz z położeniem biegunów.

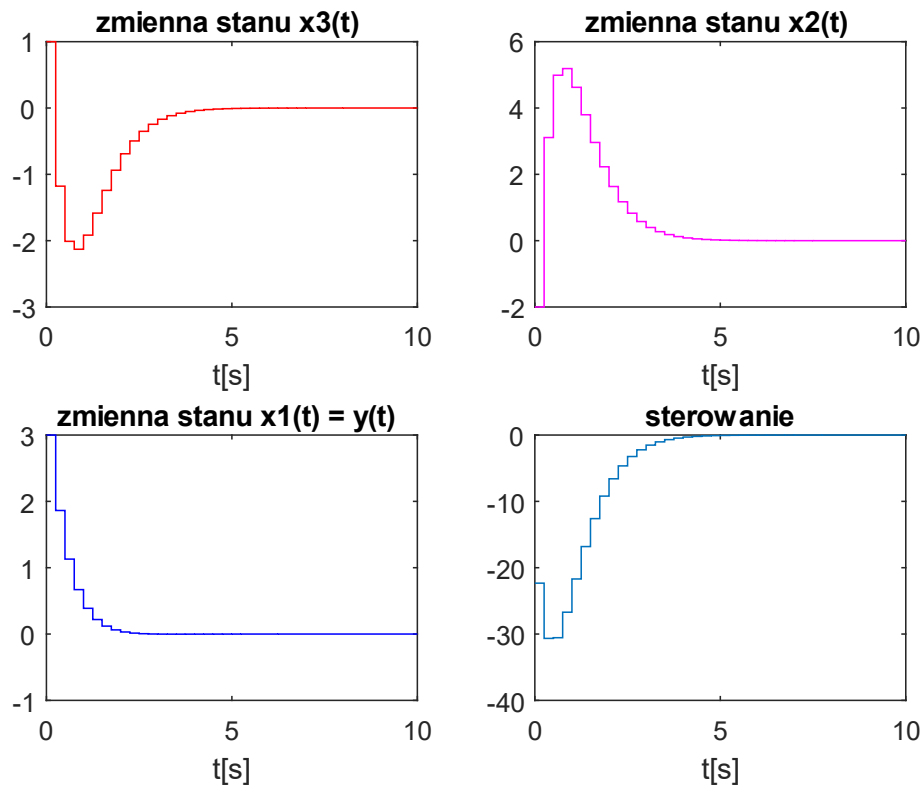
Im bieguny znajdują się bliżej zera tym model szybciej stabilizuje się kosztem wysokich skoków regulacji.

Ogólnie zmniejszanie odległości biegunów do 0 jest dobre ze względu na czas stabilizacji układu, jednak układy o biegunach tak blisko nie są dobrym pomysłem, kiedy pracujemy z rzeczywistym obiektem, który może się zmieniać w czasie. Nasze przesunięcia biegunów mogą przy zmianie obiektu wprowadzić bieguny na część rzeczywistą ujemną co wywoła oscylacje.

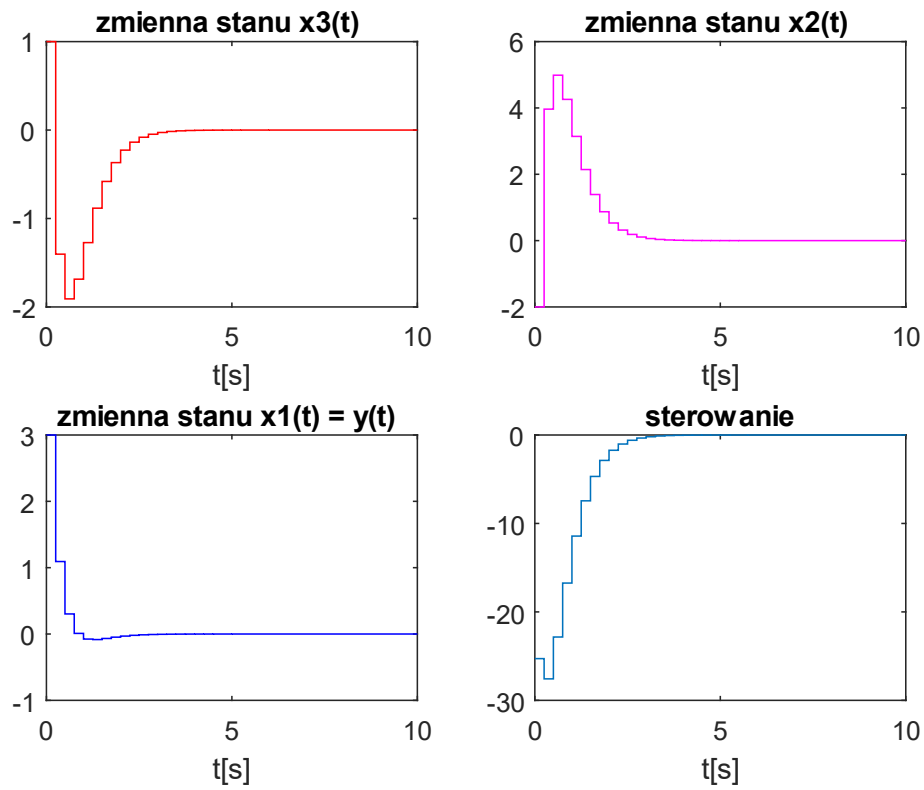
Wykres 1 Bieguny regulatora w punkcie $z=0.8$



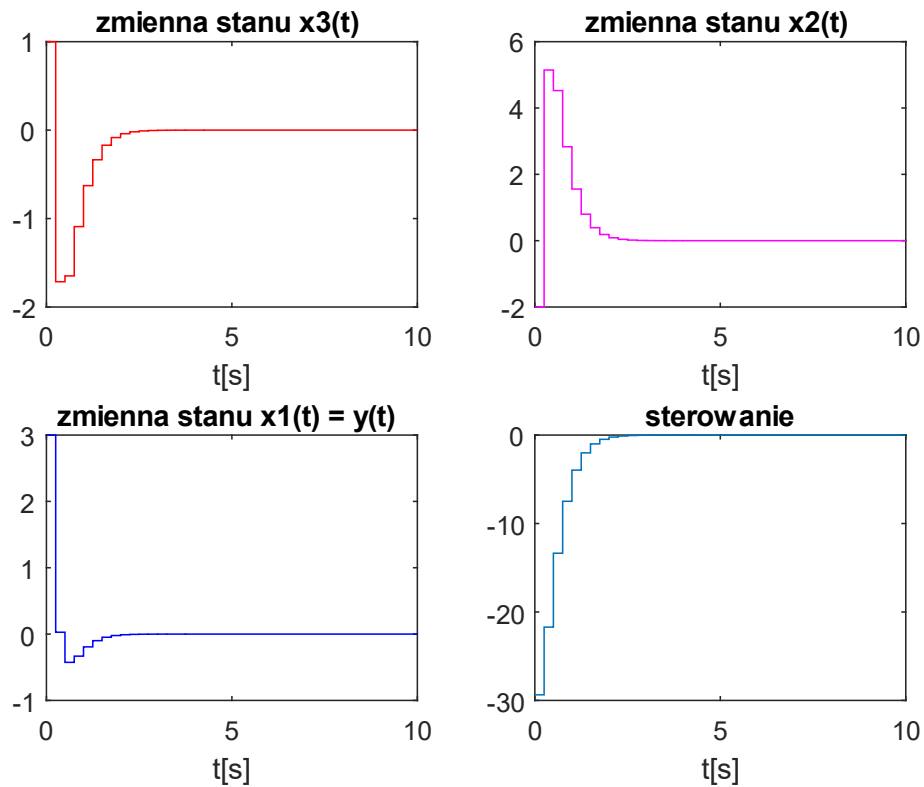
Wykres 2 Bieguny regulatora w punkcie $z=0.6$



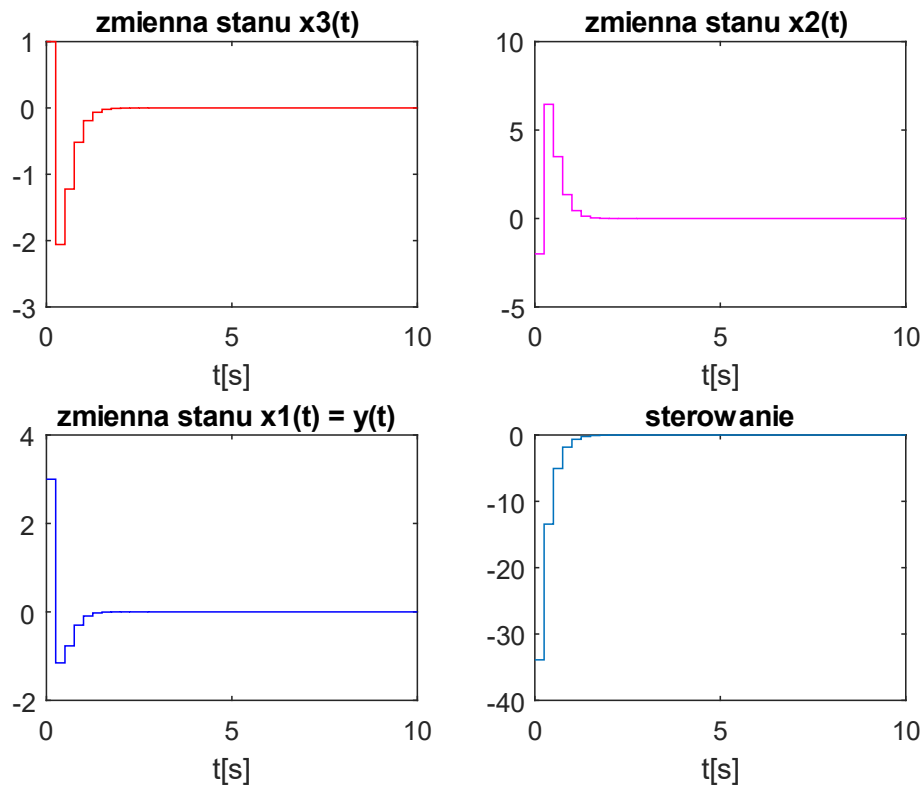
Wykres 3 Bieguny regulatora w punkcie $z=0.5$



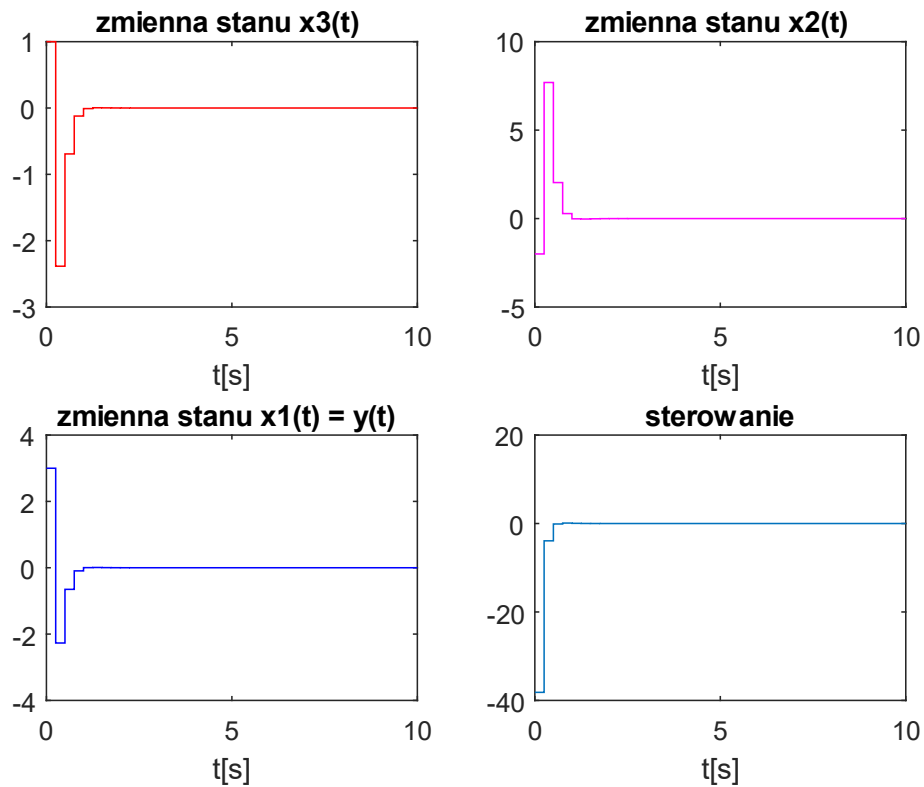
Wykres 4 Bieguny regulatora w punkcie $z=0.4$



Wykres 5 Bieguny regulatora w punkcie $z=0.3$



Wykres 6 Bieguny regulatora w punkcie $z=0.2$



II. Symulacja układu zamkniętego z jednym biegunem rzeczywistym oraz parą biegunów sprzężonych zespolonych

a) Symulacja zmiennego współczynnika a

Warunek początkowy pozostał ten sam.

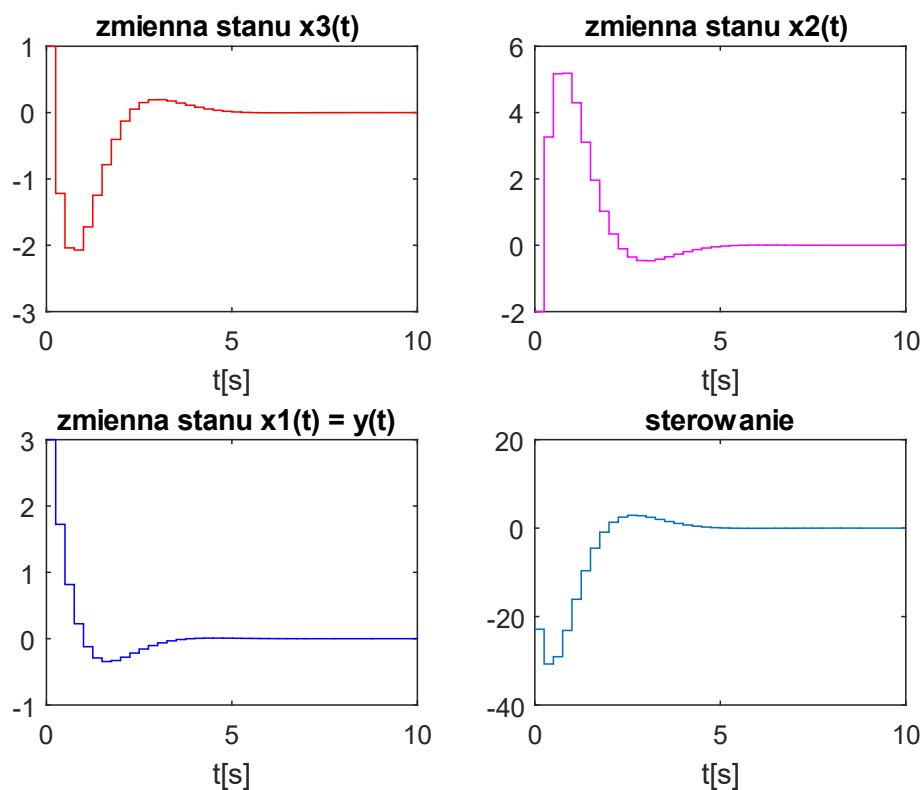
Jako biegun rzeczywisty przyjąłem biegun $z = 0.7$

Bieguny sprzężone natomiast mają postać $z = a + ib; z = a - ib$

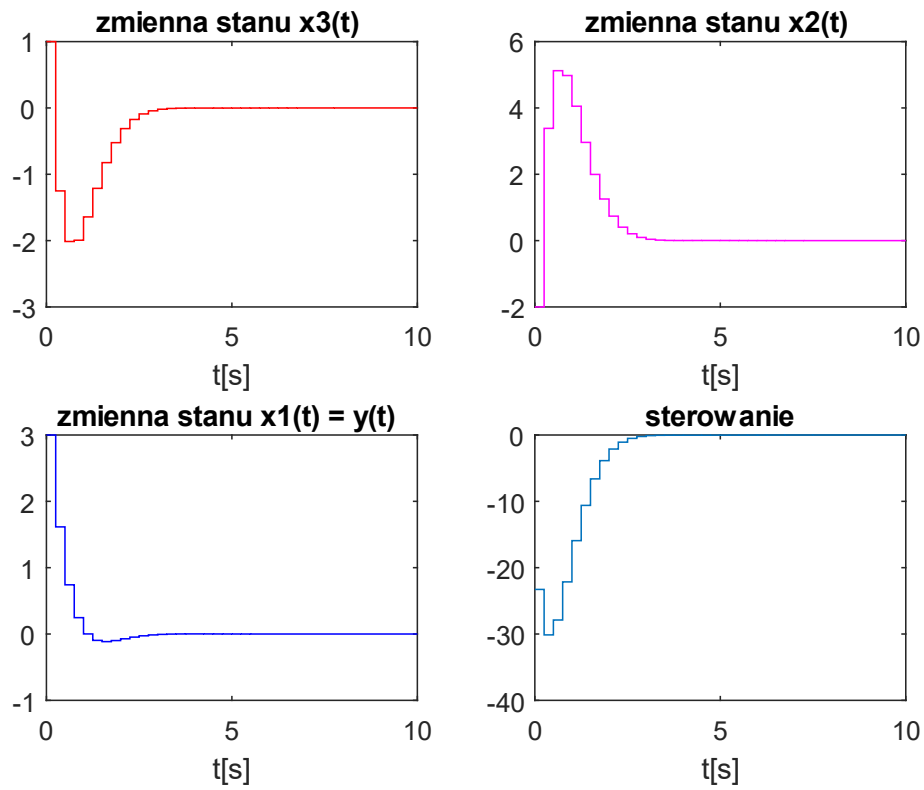
Aby pokazać wpływ parametrów a i b na stabilizację przeprowadziłem dwie serie symulacji. W jednej zmienny jest współczynnik a , a w drugiej współczynnik b .

Zmniejszanie współczynnika a działa bardzo podobnie do zmiany położenia bieguna rzeczywistego z poprzedniego punktu. Reakcje układu jest szybsza kosztem bardziej nagłych zmian sterowania i zmiennych stanu. Również do pewnego momentu zmniejszane jest przeregulowanie.

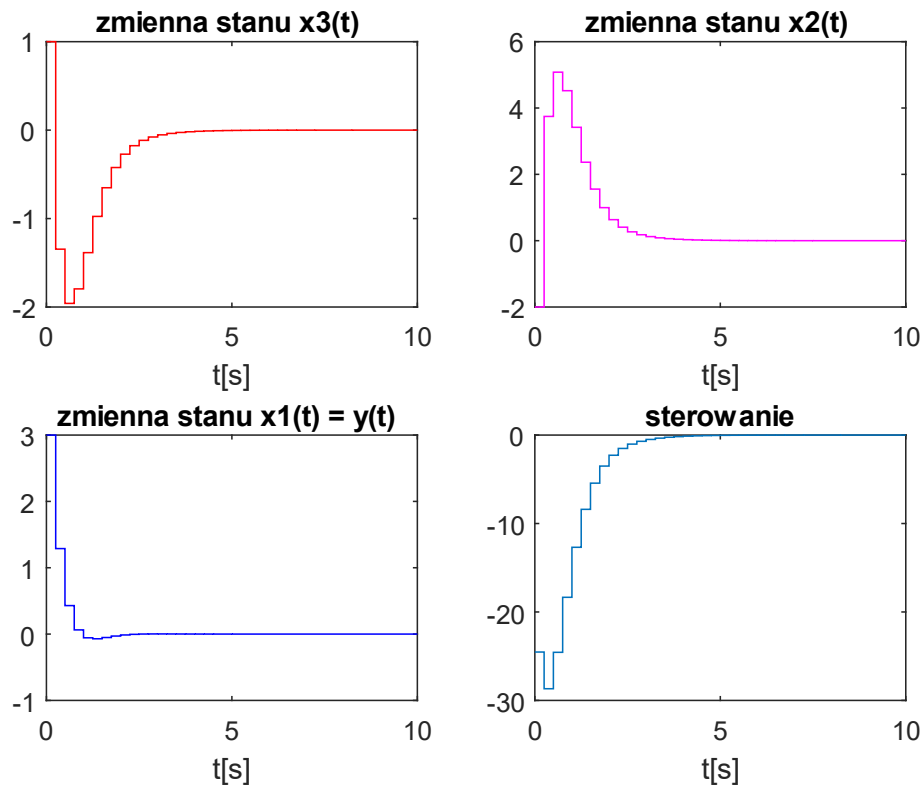
Wykres 1 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.7, b=0.2$



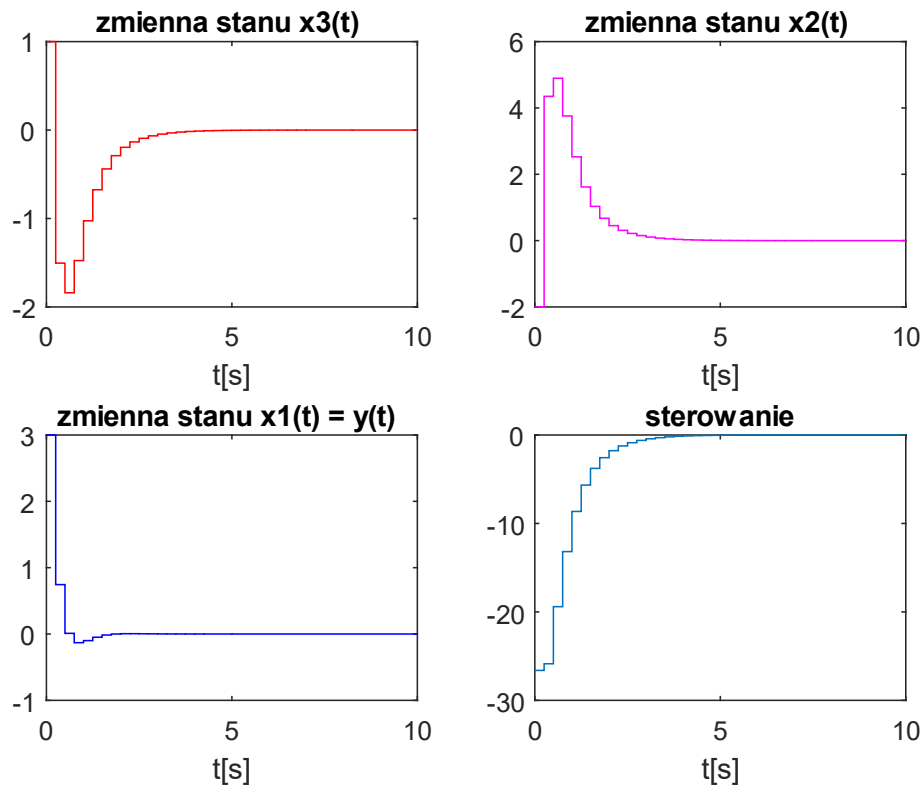
Wykres 2 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.6$, $b=0.2$



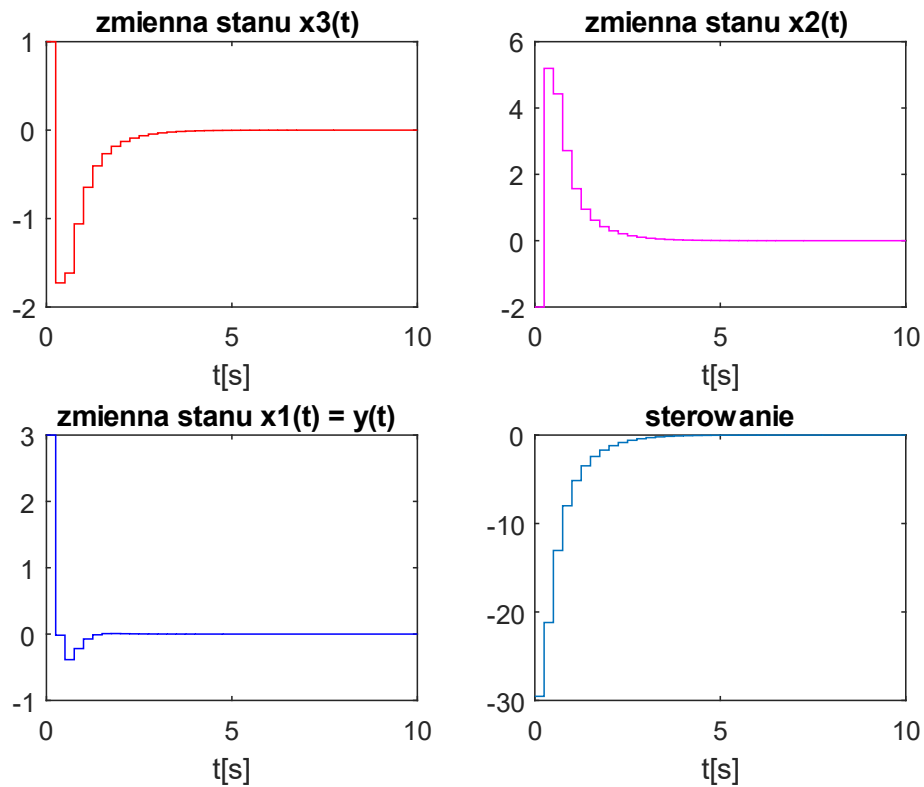
Wykres 3 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.5$, $b=0.2$



Wykres 4 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.4$, $b=0.2$



Wykres 5 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.3$, $b=0.2$

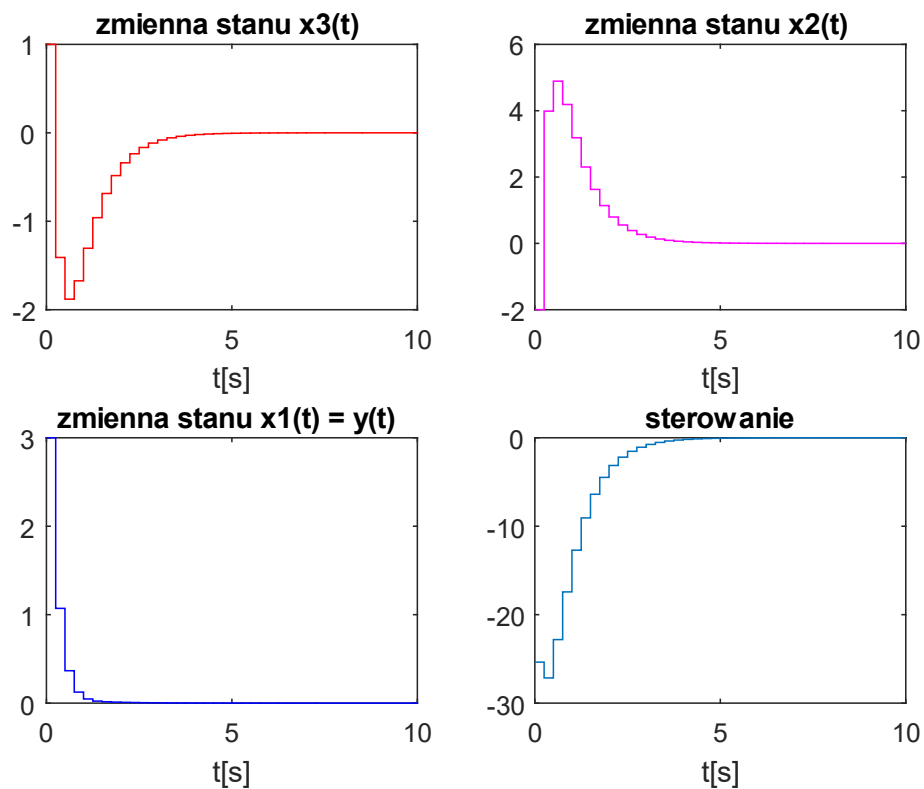


b) Symulacja zmiennego współczynnika b

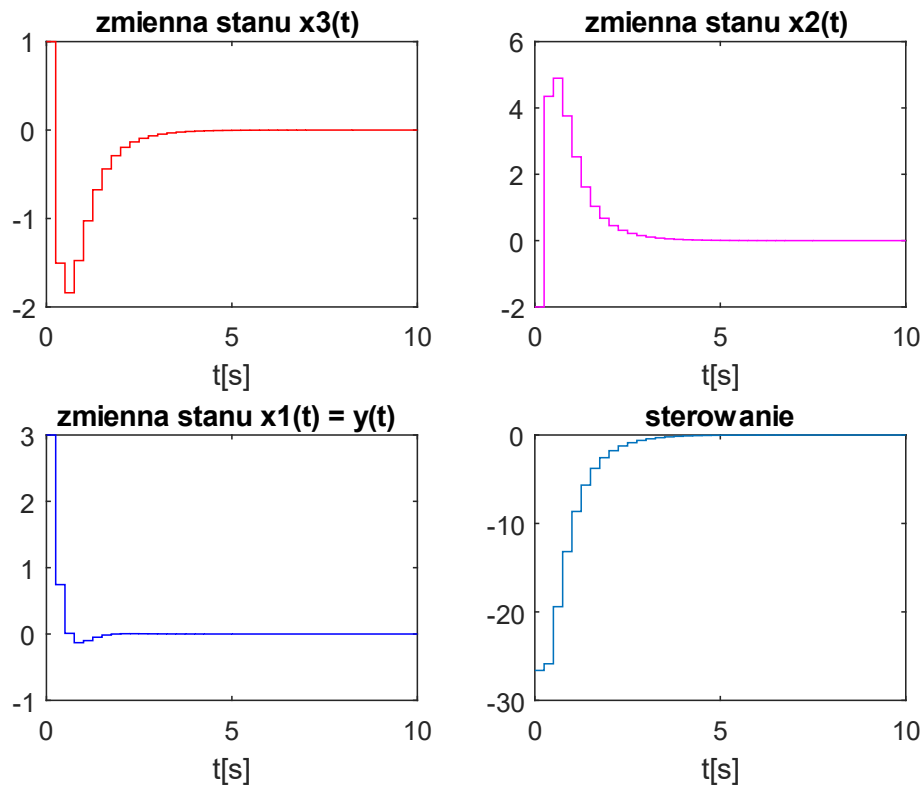
Eksperyment ze zwiększaniem współczynnika b wykazuje, że wraz z jego wzrostem do pewnego momentu szybkość stabilizacji układu rośnie. W momencie przekroczenia $b=0.4$ pojawiły się jednak oscylacje nie tylko na wyjściu, ale też innych zmiennych stanu i sterowaniu.

Jest to więc przydatne narzędzie do zwiększenia szybkości stabilizacji, jednak bardzo łatwo jest z nim przesadzić.

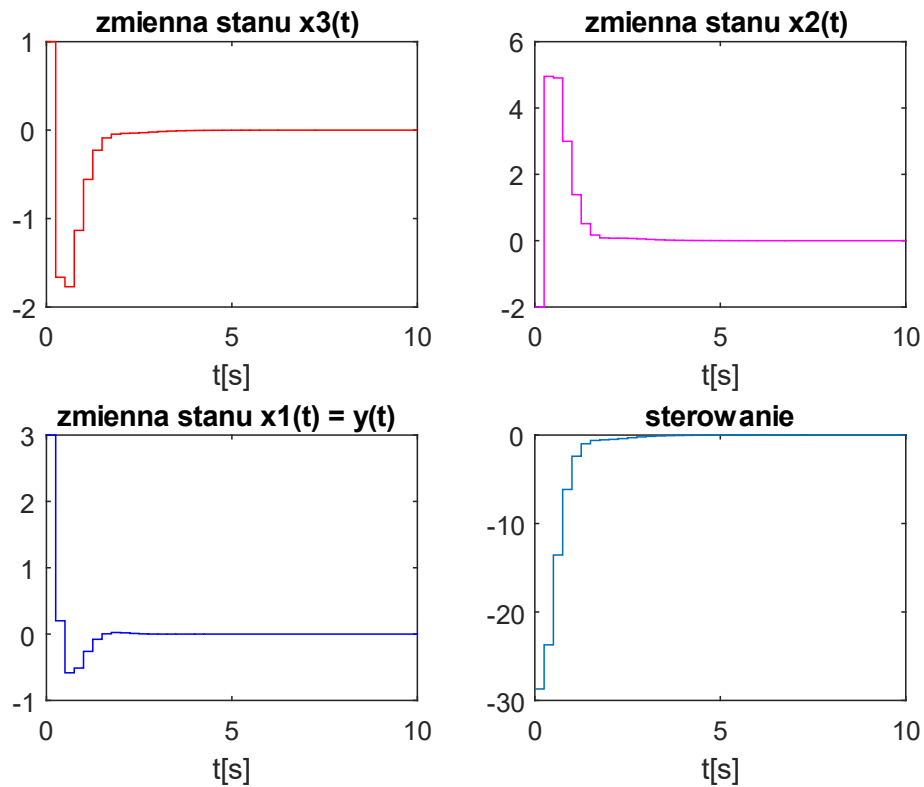
Wykres 1 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.4$, $b=0.1$



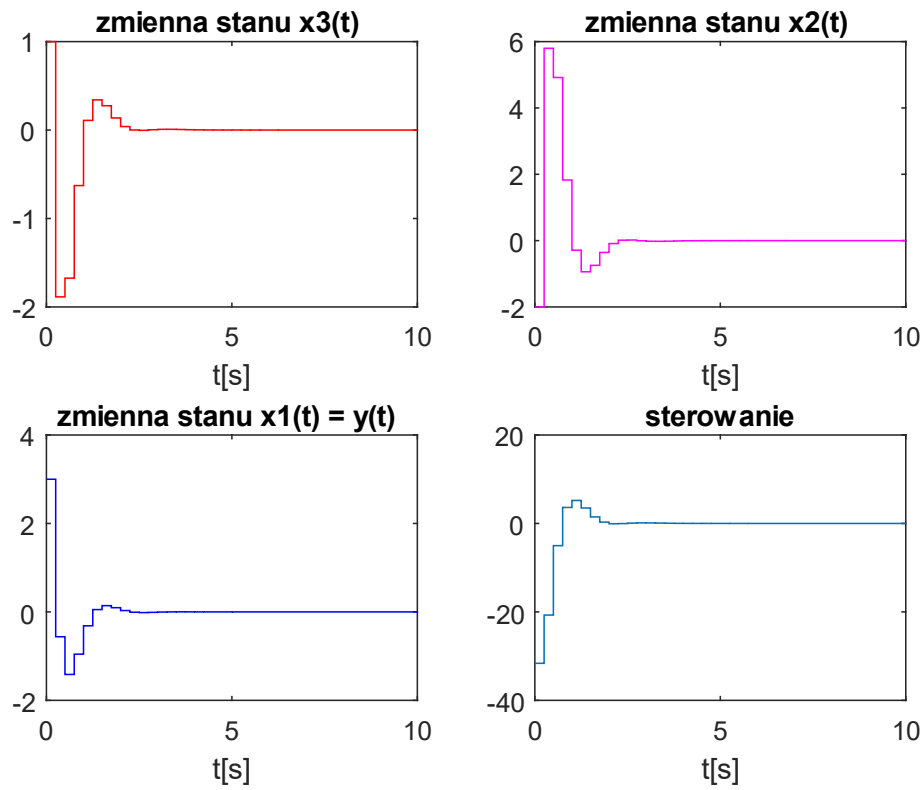
Wykres 2 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.4$, $b=0.2$



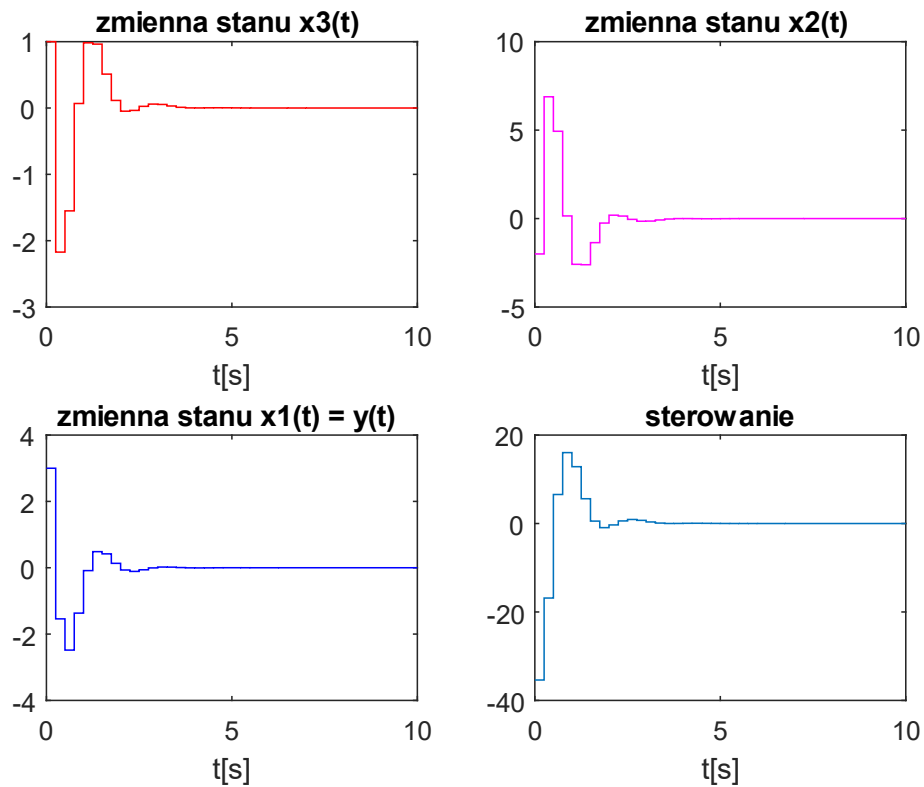
Wykres 3 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.4$, $b=0.3$



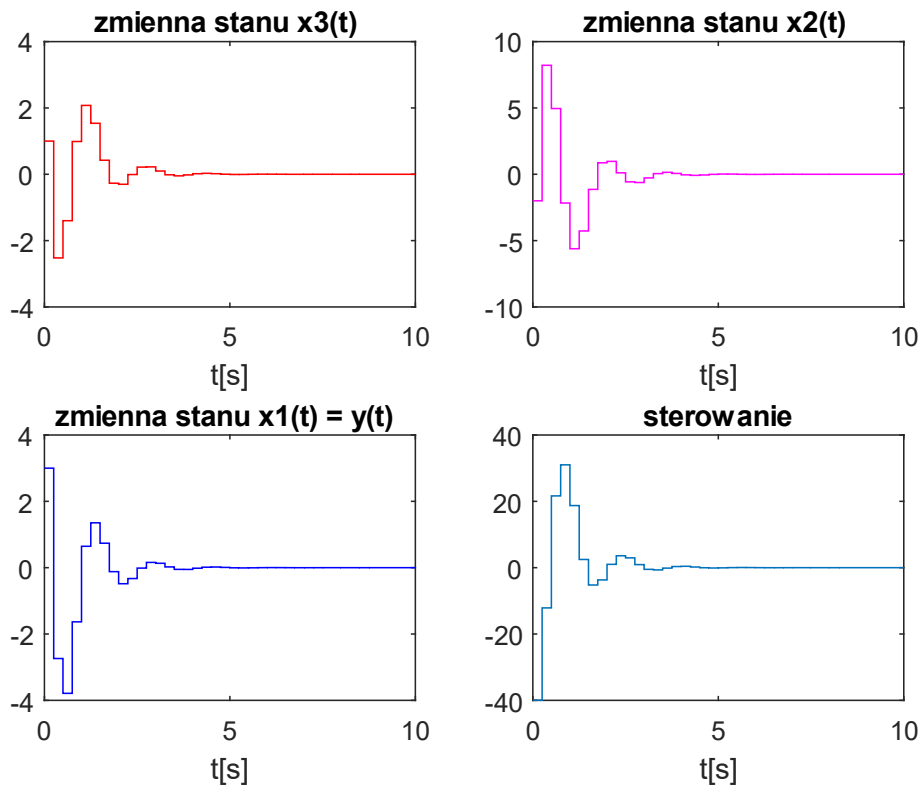
Wykres 4 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.4$, $b=0.4$



Wykres 5 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.4$, $b=0.5$



Wykres 6 Para biegunów sprzężonych o wsp. $a=0.4$, $b=0.6$



7. Wybranie regulatorów

■ Trzy rzeczywiste bieguny

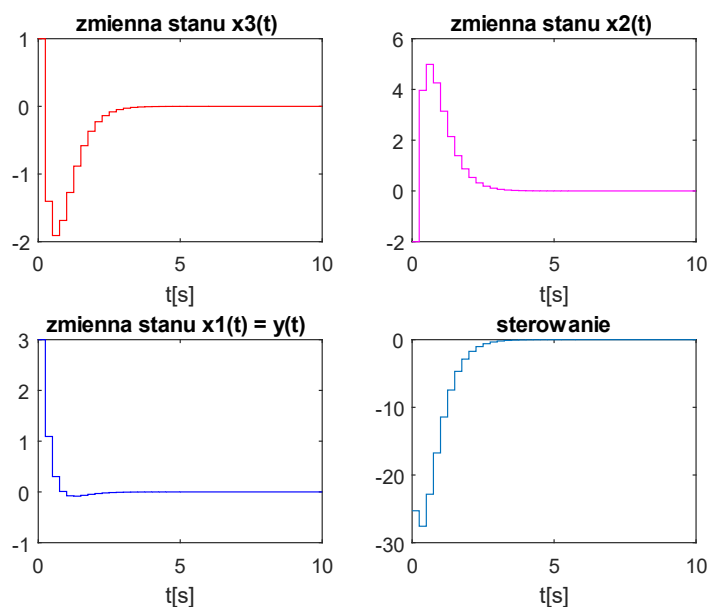
Najlepszym rozmieszczeniem biegunów okazał się punkt $z=0.5$.

Przede wszystkim wykazuje się on najmniejszym skokiem sterowania, które zazwyczaj jest najtrudniejsze do realizacji w rzeczywistości.

Wyjście modelu stabilizuje się równie porównywalnie szybko do biegunów położonych znacznie bliżej zera, bez przeregulowania.

Dodatkowo same zmienne stanu, w porównaniu z innymi wykresami, zmieniają się najłagodniej w trakcie stabilizacji

Bieguny rzeczywiste w punkcie $z=0.5$



- Rzeczywisty biegun i dwa sprzężone bieguny zespolone

Optymalnym rozmieszczeniem okazało się rozmieszczenie biegunów;

$$z_1 = 0.7$$

$$z_2 = 0.4 + i0.2$$

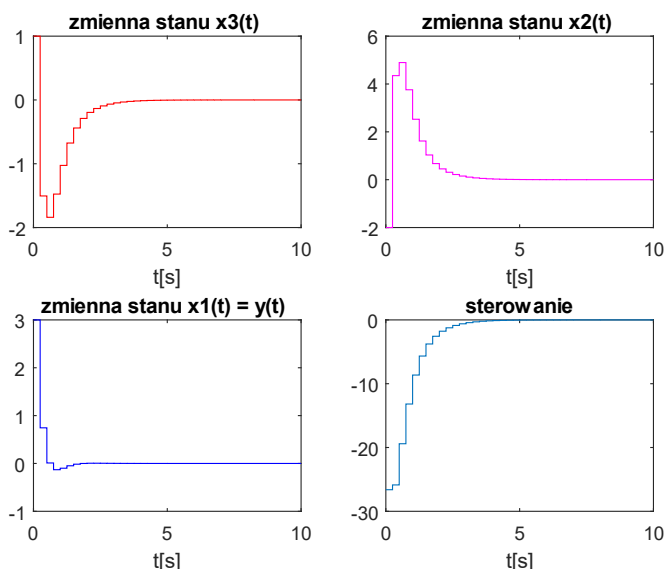
$$z_3 = 0.4 - i0.2$$

Zapewnia ono szybszą stabilizację niż trzy rzeczywiste bieguny z poprzedniego punktu. Szybkość zmiany sterowania i zmiennych stanu jest minimalnie większa.

Wybranie tego zestawu biegunów było znacznie prostsze ze względu na często

skrajne reakcje układów przy niektórych zestawach biegunów (np. widoczne oscylacje). Dobieranie tych biegunów ręcznie może się okazać niebezpieczne ze względu na szybkie zmiany stabilności. Lepiej byłoby określić je stosując optymalizację, aby zapewnić odpowiedni zapas stabilności w razie zmiany obiektu.

Para biegunów sprzężonych $a=0.4$, $b=0.2$



8. Projektowanie obserwatora zredukowanego rzędu

Niech:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Skoro:

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

To można zapisać, że:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix}$$

Wtedy:

$$y(k+1) = A_{11}y(k) + A_{12}w(k) + B_1u(k)$$

$$w(k+1) = A_{21}y(k) + A_{22}w(k) + B_2u(k)$$

Po wymnożeniu przez wektor $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ i odjęciu od drugiego równania

$$w(k+1) = (A_{21} - LA_{11})y(k) + (A_{22} - LA_{12})w(k) + (B_2 - LB_1)u(k) + Ly(k+1)$$

Aby uniknąć korzystania z $y(k+1)$ wprowadza się zmienną

$$z(k) = w(k) - Ly(k)$$

Ostatecznie:

$$z(k+1) = (A_{22} - LA_{12})(z(k) + Ly(k)) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k)$$

- Wyznaczanie parametrów

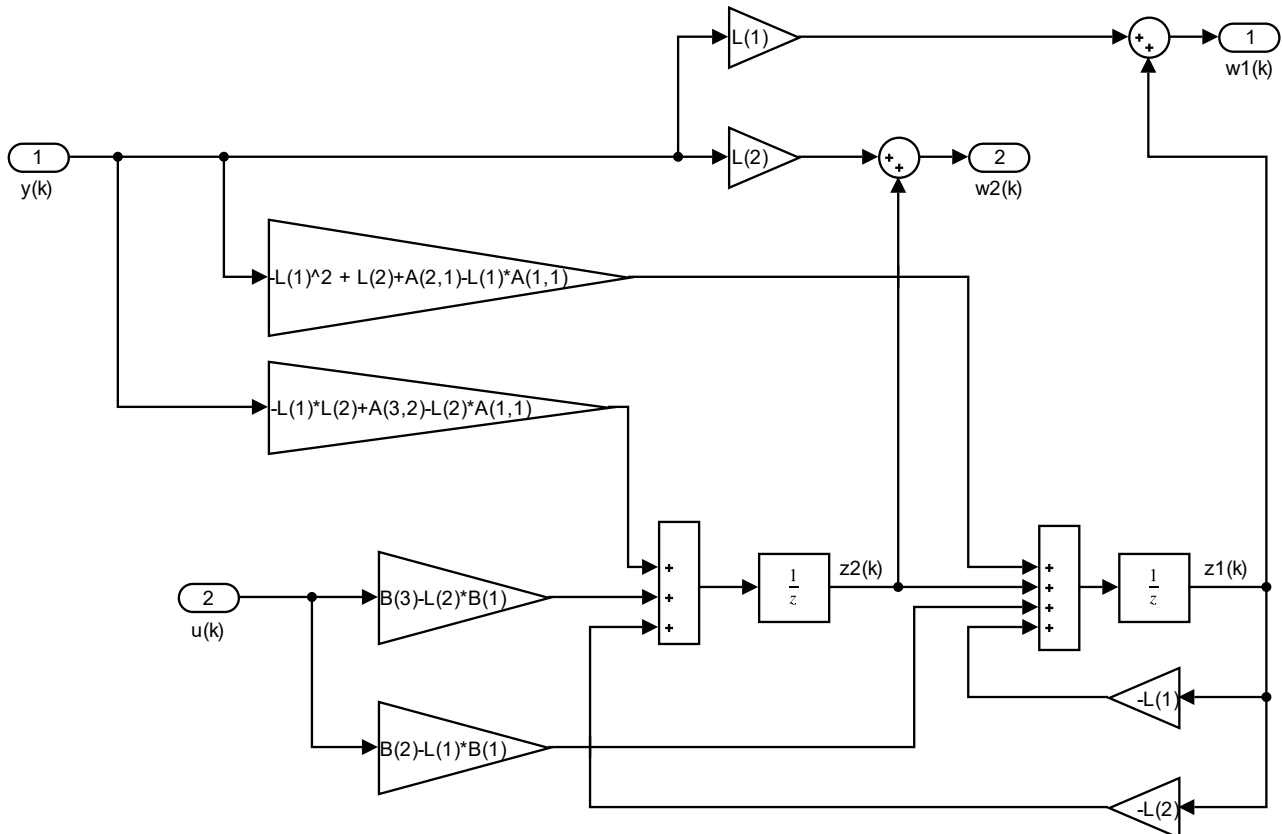
Tym razem również posłuży nam do tego funkcja *acker* ze środowiska Matlab. Tym razem należy podać do niej inne macierze, takie jak podane w przykładzie poniżej.

```
>> L = acker(A22',A12',[0.5 0.5])
```

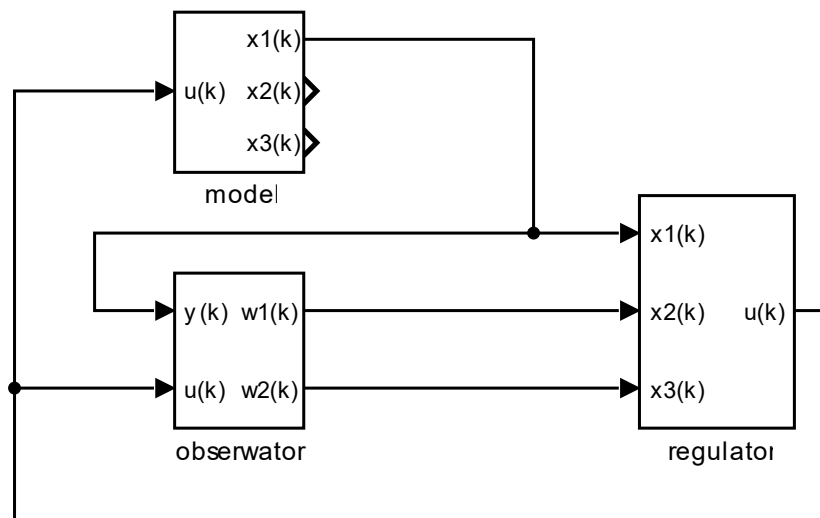
$$L =$$

-1.0000 0.2500

- Szczegółowa struktura obserwatora



- Ogólna struktura układu regulacji z obserwatorem

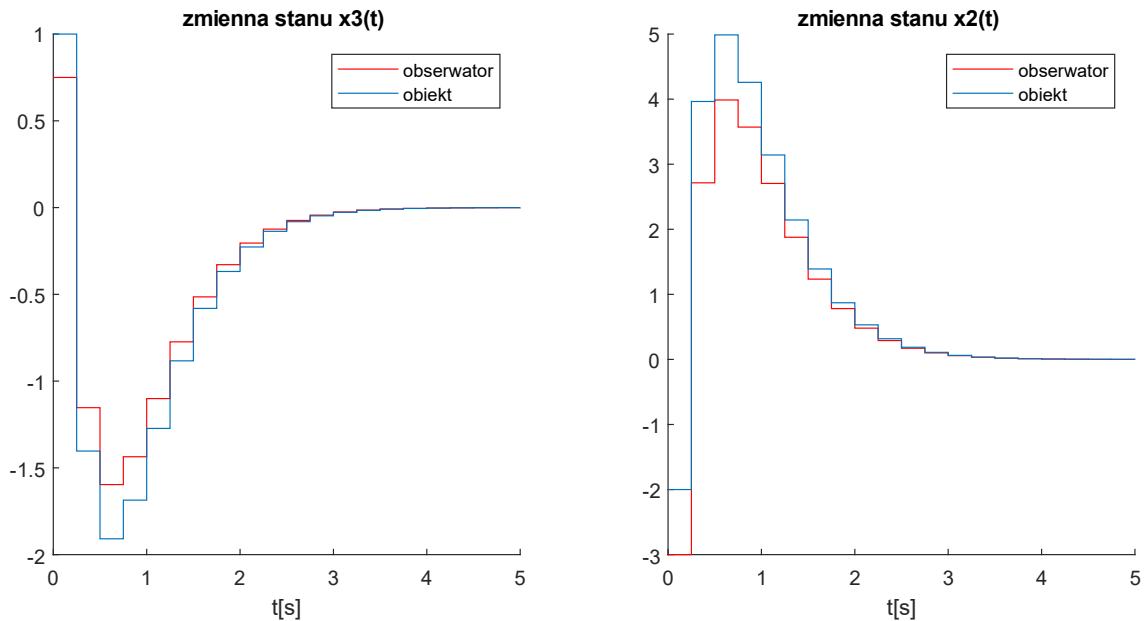


9. Testowanie obserwatora przy regulatorze korzystającym z mierzonego stanu

■ Zbieżność zmiennych stanu obserwatora do stanu rzeczywistego

Eksperyment wykonano dla regulatora z punktu 6 z trzema biegunami rzeczywistymi $z = 0.5$ i dla próbných biegunów obserwatora $z_1 = z_2 = 0.5$.

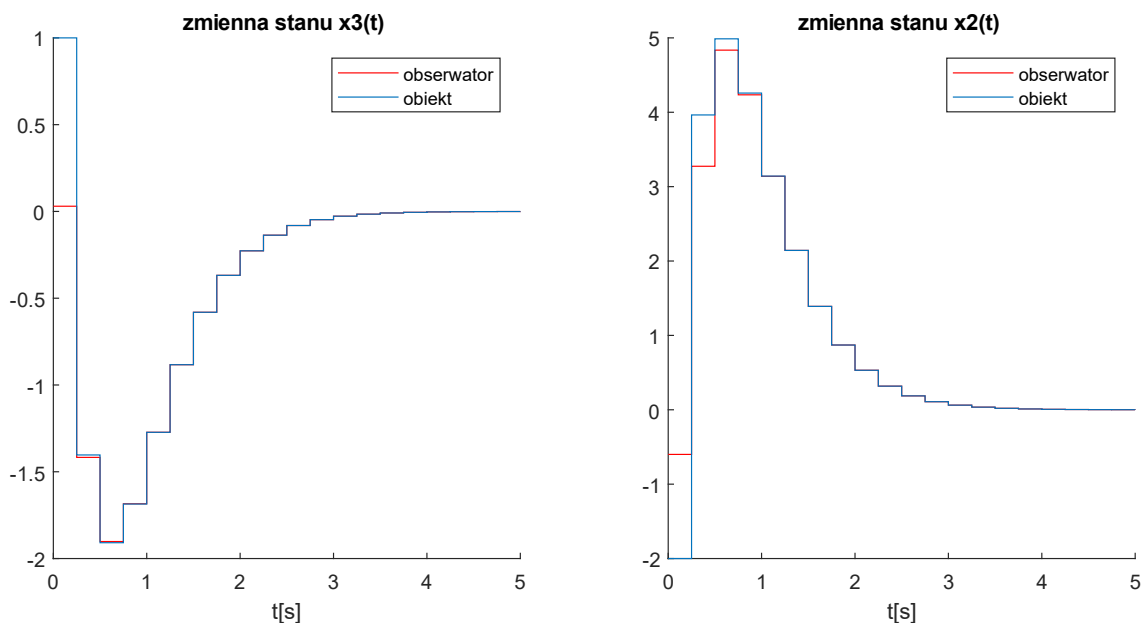
Warunki początkowe obserwatora są równe 0, natomiast warunki początkowe obiektu są równe $x(0) = [3 \ -2 \ 1]$.



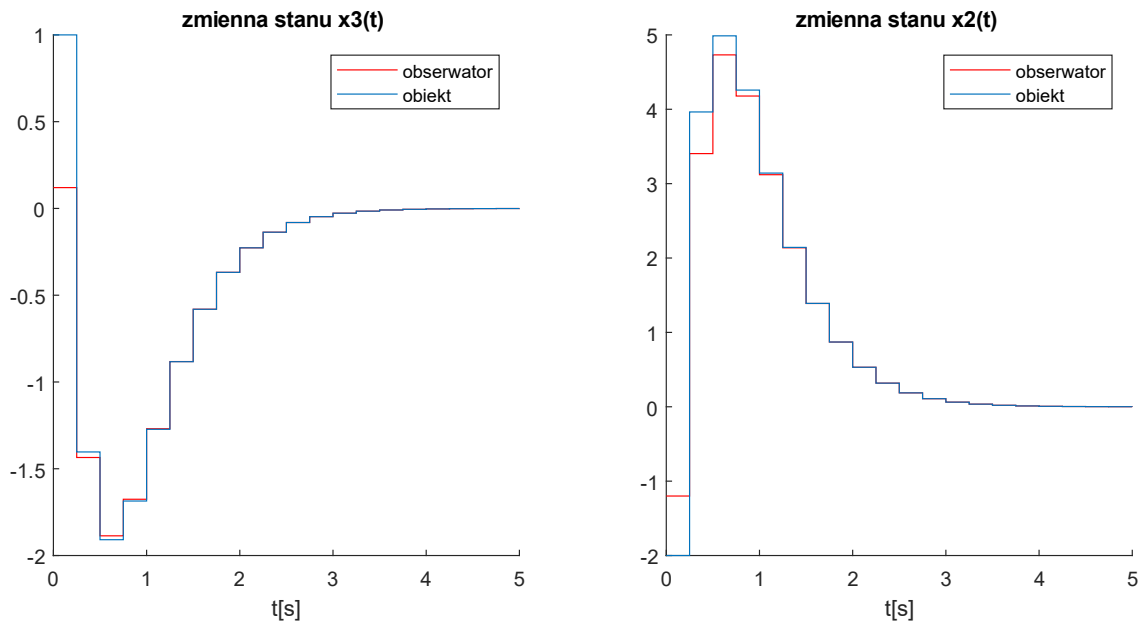
Rzeczywiście zmienne stanu obserwatora zbiegają do zmiennych stanu rzeczywistych.

■ Wpływ zmiany biegunów obserwatora na jego działanie (regulator z punktu 6 – trzy identyczne bieguny rzeczywiste)

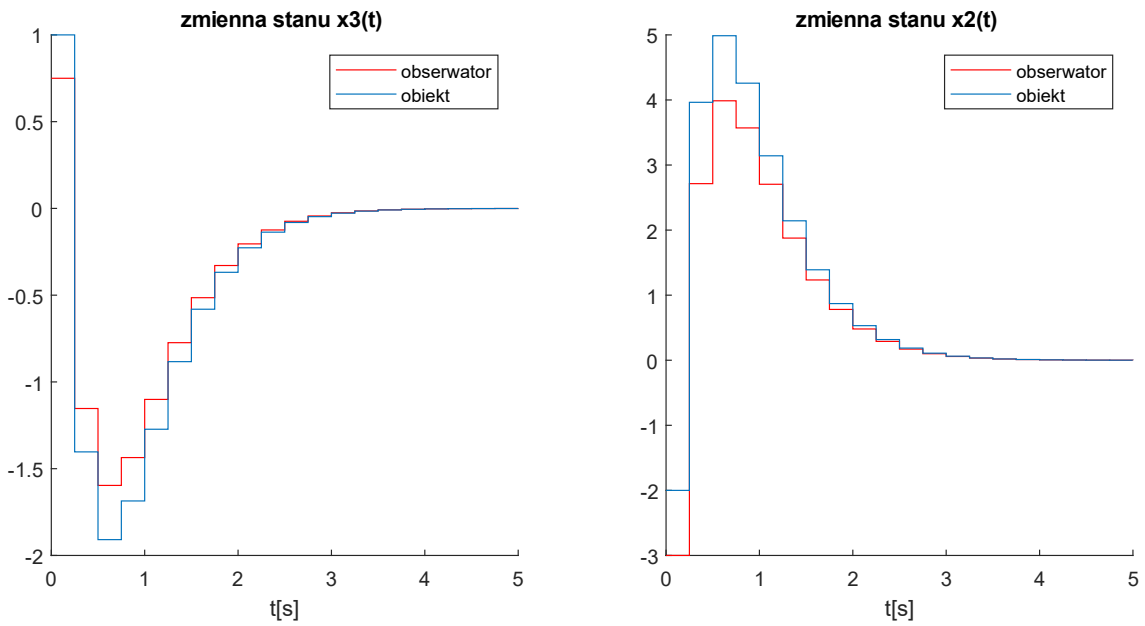
Wykres 1 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.1$



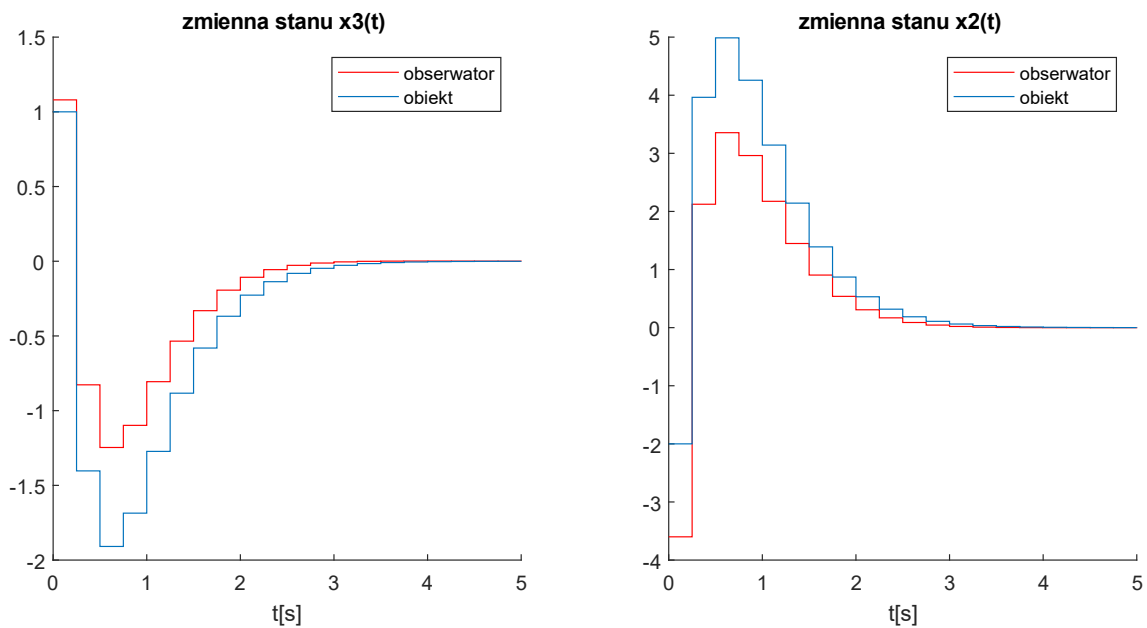
Wykres 2 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.2$



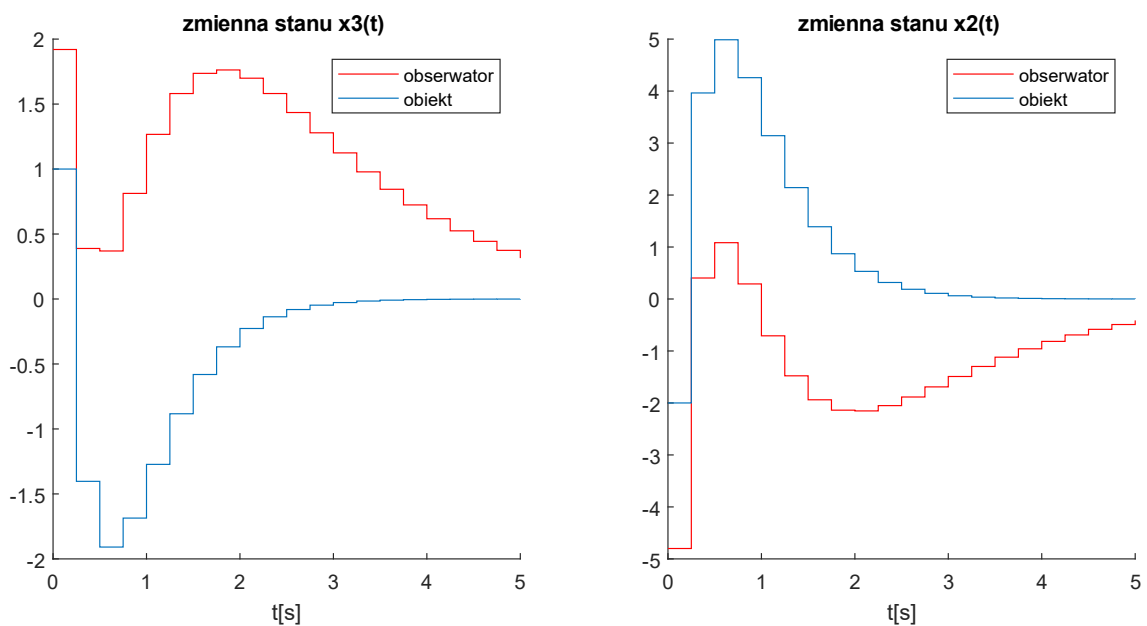
Wykres 3 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.5$



Wykres 4 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.6$



Wykres 5 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.8$



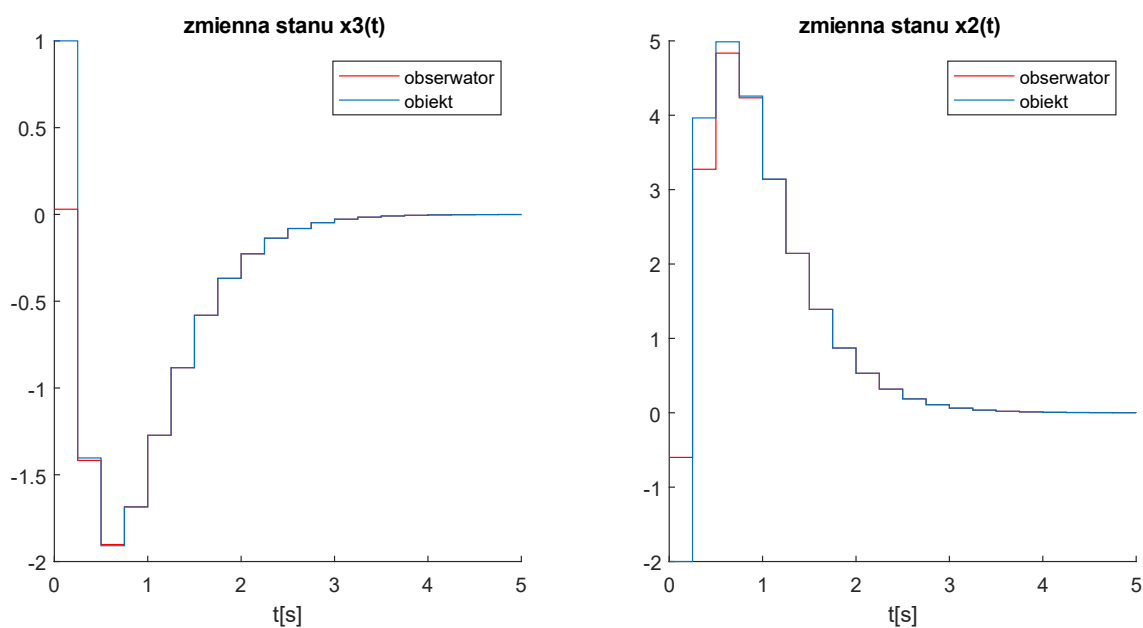
Zmniejszanie wartości biegunów zwiększa szybkość z jaką obserwator zaczyna podążać za rzeczywistym sygnałem. Zbyt duża wartość potrafi nie śledzić wartości rzeczywistej w ogóle.

Jako obserwator szybki wybieram bieguny w $z=0.2$, ponieważ schodzenie bardziej w dół nie przyniosło widocznych rezultatów.

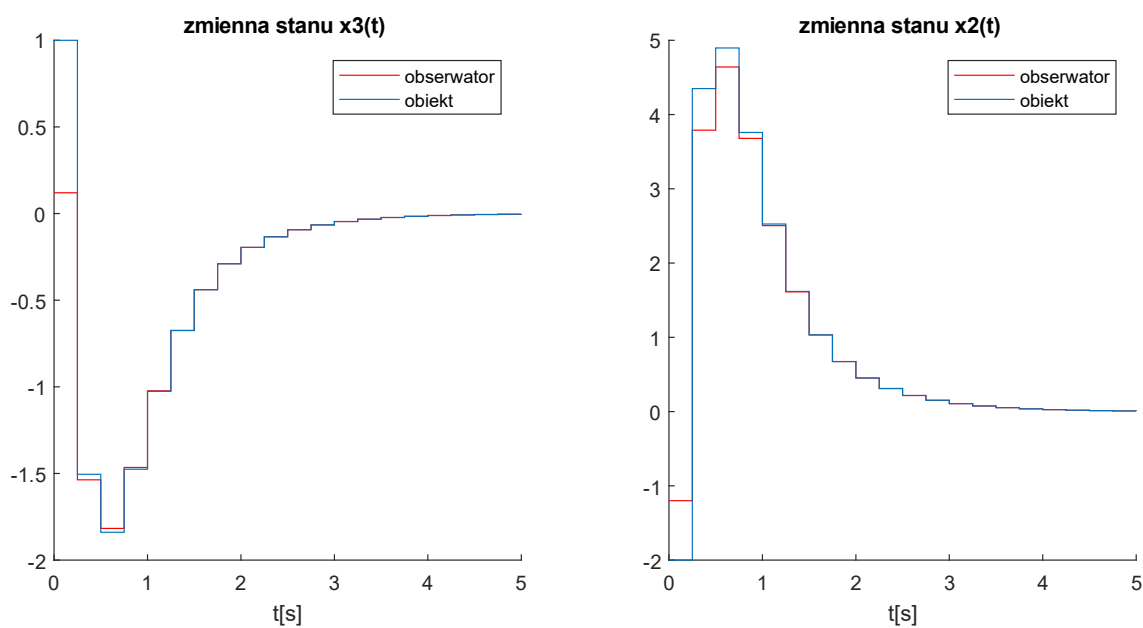
Jako obserwator wolny wybieram bieguny w $z=0.5$, ponieważ jest to pierwsze ustawienie biegunów, które akceptowalnie nadążają za wartością rzeczywistą.

- Wpływ zmiany biegunów obserwatora na jego działanie (regulator z punktu 6 – rzeczywisty + 2 sprzężone)

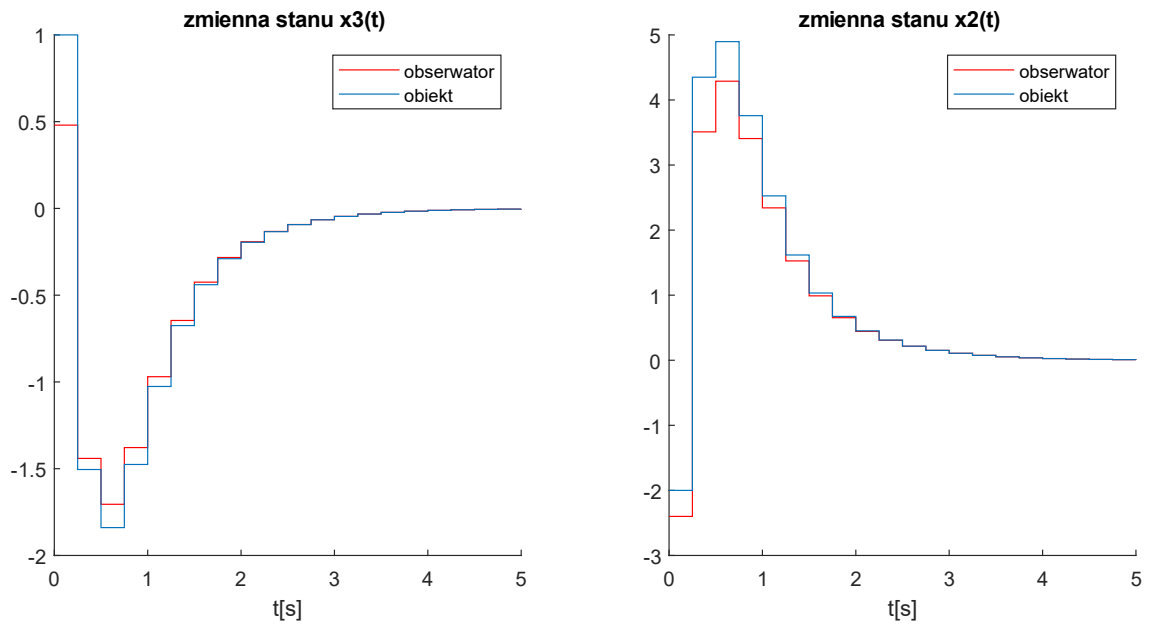
Wykres 1 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.1$



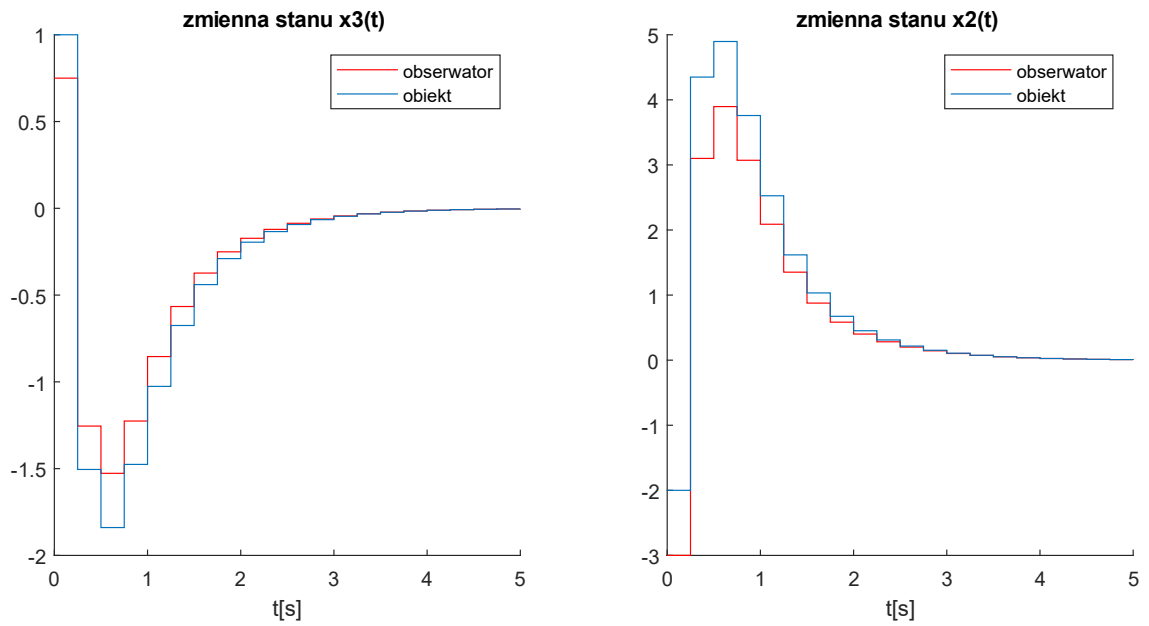
Wykres 2 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.2$



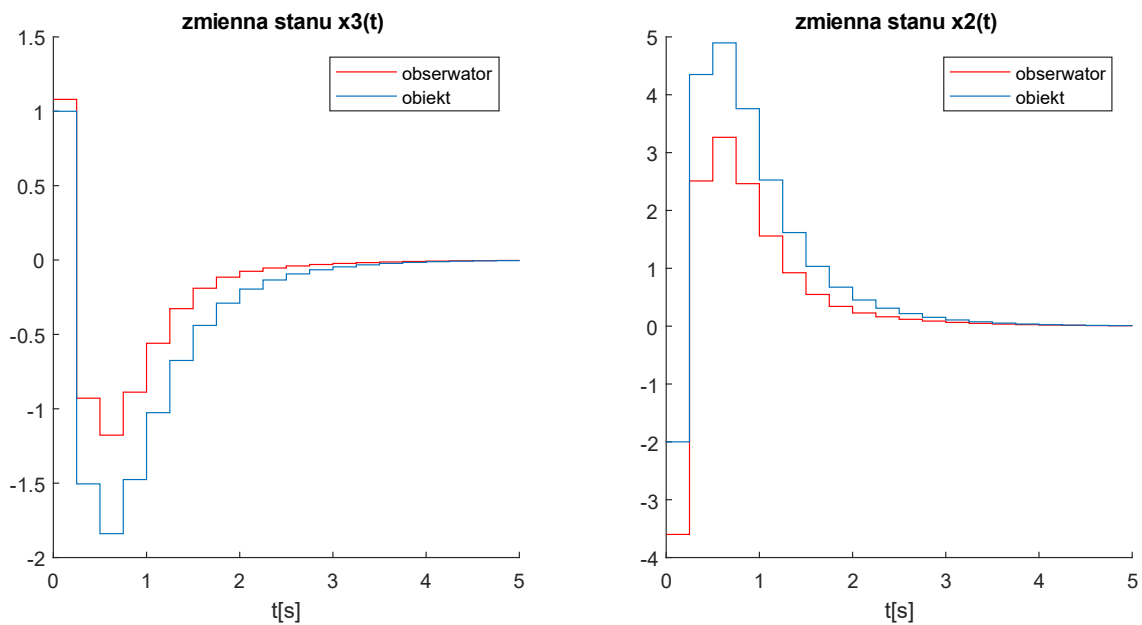
Wykres 3 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.4$



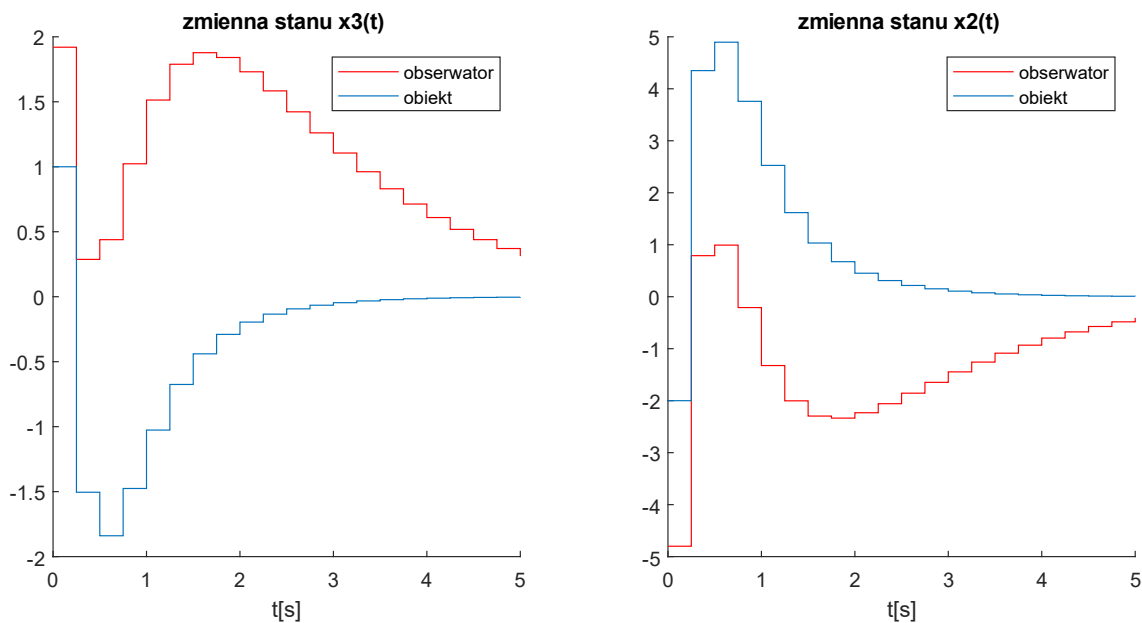
Wykres 4 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.5$



Wykres 5 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.6$



Wykres 6 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.8$



Co do zmniejszania i zwiększania wartości biegunów sytuacja jest taka sama co w poprzednim punkcie.

Jako obserwator szybki wybieram bieguny w $z=0.1$, ponieważ bardzo szybko jest w stanie podążać od samego początku za wartością rzeczywistą.

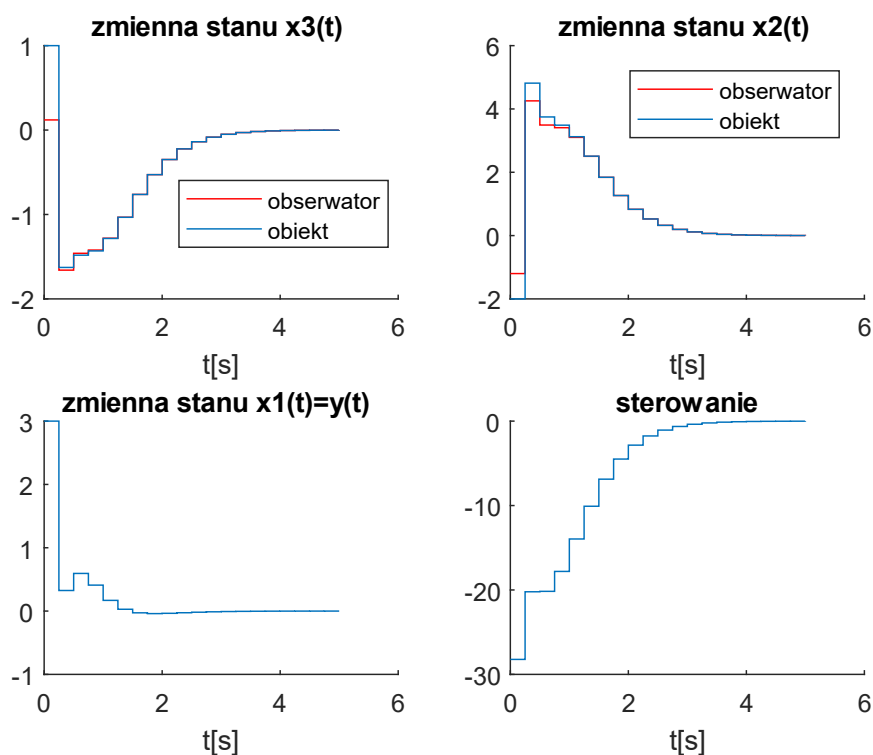
Jako obserwator wolny wybieram bieguny w $z=0.5$, ponieważ jest to pierwsze ustawienie biegunów, które akceptowalnie nadążają za wartością rzeczywistą.

Idealnie byłoby nastawić bieguny w zerze, jednak taki układ byłby bardzo wrażliwy na jakiekolwiek zmiany obiektu, co mogłoby prowadzić do niestabilności.

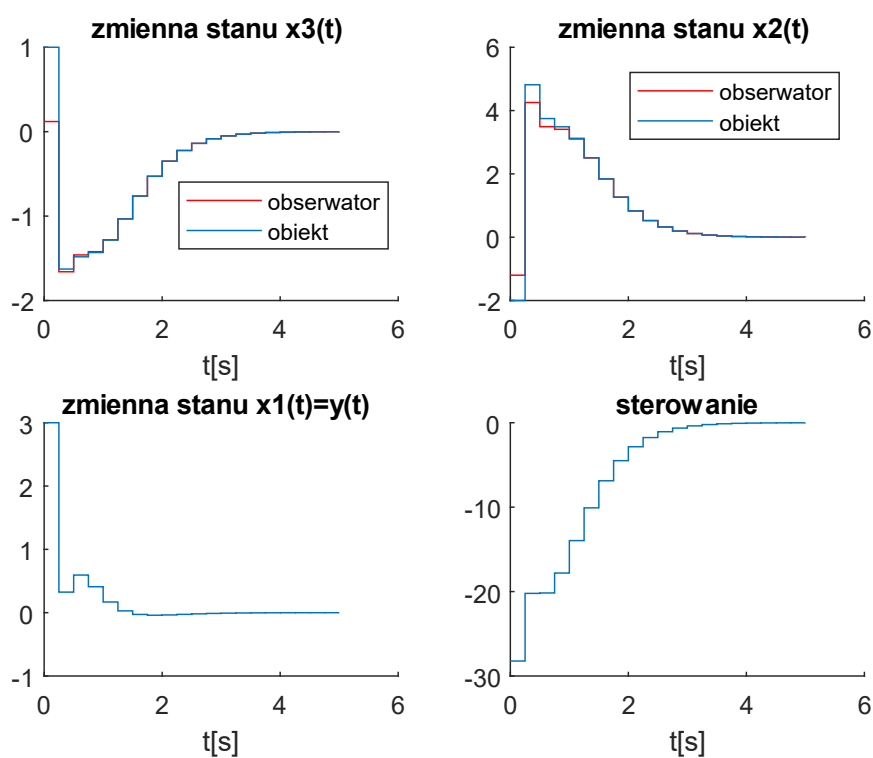
10. Testowanie działania regulatora z wykorzystaniem stanu obserwowanego

- Najlepsza konfiguracja biegunów rzeczywistych z punktu 6.1

Wykres 1 Bieguny obserwatora w $z=0.2$ – obserwator szybki

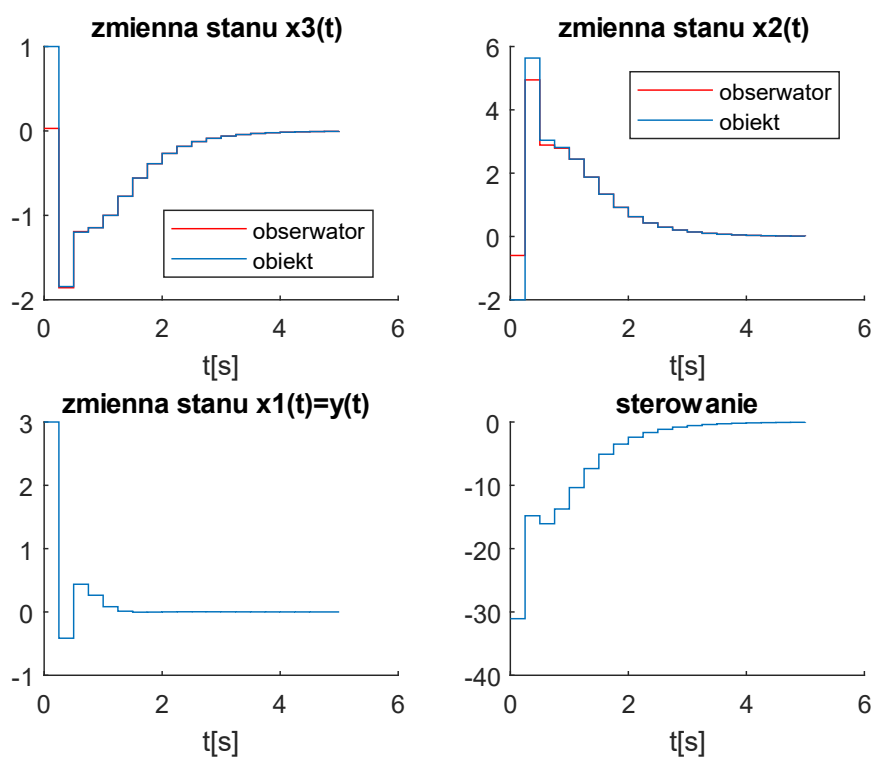


Wykres 2 Bieguny obserwatora w $z=0.5$ – obserwator wolny



- Najlepsza konfiguracja bieguna rzeczywistego i pary biegunów sprzężonych z punktu 6.II

Wykres 1 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.1$ – obserwator szybki



Wykres 2 Bieguny obserwatora w punkcie $z=0.5$ – obserwator wolny

