

## Rozdział VII

# Wpływ błędnej specyfikacji struktury zależności w procesie agregacji ryzyka na efekt dywersyfikacji w Solvency II

(Krystian Szczęsny)

### 1. Wprowadzenie

Dnia 1 stycznia 2016 r. weszła w życie Dyrektywa Solvency II będąca największą od 30 lat zmianą obowiązującego systemu wypłacalności na rynku ubezpieczeń i reasekuracji w zakresie ulepszenia i uproszczenia prawodawstwa. Zmiany dotyczące systemu Solvency II obejmują trzynaście dyrektyw przekształconych w jeden dokument z zakresu ubezpieczeń na życie, ubezpieczeń innych niż na życie, reasekuracji, grup ubezpieczeniowych i likwidacji zakładów ubezpieczeń, z których pierwsza pochodzi z 1964 r. Dzięki niej obowiązują jednolite dla wszystkich ubezpieczycieli Unii Europejskiej wymogi dotyczące zarządzania ryzykiem oraz określania niewypłacalności zakładów ubezpieczeń. W tym drugim zasadniczą rolę odgrywa kapitałowy wymóg wypłacalności (SCR – *Solvency Capital Requirement*). SCR jest definiowany jako kapitał ekonomiczny (*economic capital*), który powinien zapewnić bezpieczeństwo ubezpieczonym w przypadku pojawienia się nieprzewidzianych strat<sup>8</sup>. Twórcy Dyrektywy podają Formułę Standardową (FS), zgodnie z którą całkowity SCR jest wyznaczany w drodze agregacji wymogów kapitałowych dla modułów i podmodułów ryzyka.

W niniejszym rozdziale skoncentrowano uwagę na drugim poziomie agregacji ryzyka, na którym jest wyznaczany podstawowy kapitałowy wymóg wypłacalności (BSCR – *Basic Solvency Capital Requirement*). Standardowo BSCR jest obliczany zgodnie z FS za pomocą metody wariancji-kowariancji, w której wartości korelacji są takie same dla wszystkich ubezpieczycieli i zostały podane w Dyrektywie<sup>9</sup>.

---

<sup>8</sup> Directive 2009/138/ec of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II), Note 64, s. 7.

<sup>9</sup> Wartości korelacji między poszczególnymi modułami ryzyka są szczegółowo przedstawione w Rozporządzeniu delegowanym Komisji (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniającym dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).

Założenie takich samych korelacji między modułami ryzyka wiąże się z pojawieniem się dodatkowego ryzyka, płynącego stąd, że rzeczywiste wartości korelacji między modułami ryzyka ubezpieczyciela są różne od tych danych przez twórców Dyrektywy. Według wiedzy autora w literaturze nie przeprowadzono badań dotyczących wpływu zmiany wartości w macierzy korelacji na wartość BSCR. Nowością rozdziału jest sformułowanie analitycznej zależności między BSCR otrzymanym z założoną macierzą korelacji a BSCR otrzymanym z dowolnie zmienioną macierzą korelacji.

FS jest oceniona w piątym badaniu ilościowym Europejskiego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych [EIOPA, 2011]. Wyniki przeprowadzonego badania wskazują, że zastosowanie ustalonych w Dyrektywie współczynników korelacji do pomiaru zależności między czynnikami ryzyka, na które jest narażony ubezpieczyciel, prowadzi do niedoszacowania całkowitego SCR i oszacowania efektu (korzyści) dywersyfikacji na niewłaściwym poziomie. Autorzy Dyrektywy zdają sobie sprawę z niedoskonałości FS i zalecają stosowanie modeli wewnętrznych, które odzwierciedlają w lepszym stopniu profil ryzyka ubezpieczyciela. Model wewnętrzny musi zostać zatwierdzony przez organ nadzoru. Więcej o tym, jakie wymogi powinien spełniać model, pisze Ryngwelska [2012]. Wątpliwości dotyczące FS ma także Europejski Urząd Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych (EIOPA), który w październiku 2020 r. rozpoczął ogólnoeuropejskie badanie porównawcze dotyczące dywersyfikacji w modelach wewnętrznych. Jednym z celów badania jest lepsze zrozumienie związku między sposobami modelowania zależności i agregacją ryzyka a wynikającymi z nich korzyściami z dywersyfikacji. Tematyka niniejszego rozdziału wpisuje się w badania zainicjowane przez EIOPA.

Celem poniższych badań jest określenie wrażliwości efektu dywersyfikacji na zmiany wartości w macierzy korelacji oraz na wybór struktury zależności. W pierwszym rozdziale omówiono związek między efektem dywersyfikacji a strukturą zależności w procesie agregacji ryzyka. Przedstawiono stosowaną w Solwency II standardową metodę szacowania BSCR oraz od strony metodologicznej stosowane w badaniach kopule z rodziny eliptycznych i algorytm ARA (*Adaptive Rearrangement Algorithm*). W drugim rozdziale przeanalizowano wrażliwość BSCR na wybór macierzy korelacji, a następnie udowodniono analityczną zależność między BSCR otrzymanym z założoną macierzą korelacji a BSCR otrzymanym z dowolnie zmienioną macierzą korelacji. Trzeci rozdział zawiera badania empiryczne dla arbitralnie założonych zmiennych losowych opisujących moduły ryzyka.

## 2. Efekt dywersyfikacji a struktura zależności

Kapitałowy wymóg wypłacalności powinien gwarantować z prawdopodobieństwem 0,995, że w razie wystąpienia nieprzewidzianych strat ubezpieczyciel w ciągu 12 miesięcy będzie w stanie wypełnić swe zobowiązania i wypłaci odszkodowanie. Wymóg ten jest obliczany przynajmniej raz w roku oraz w przypadku istotnej zmiany profilu ryzyka ubezpieczyciela. W standardowym podejściu Solvency II całkowity kapitałowy wymóg wypłacalności dla ubezpieczyciela jest obliczany według następującego wzoru:

$$SCR = BSCR + SCR_{op} + Korekta \quad (1)$$

gdzie:

$SCR$  – całkowity kapitałowy wymóg wypłacalności,

$BSCR$  – podstawowy kapitałowy wymóg wypłacalności,

$SCR_{op}$  – wymóg kapitałowy dla ryzyka operacyjnego,

$Korekta$  – korekta z tytułu zdolności rezerw i podatków odroczonych do pokrywania strat.

$BSCR$  jest wyznaczany na drodze agregacji czynników ryzyka, z których nie wszystkie występują równocześnie, dlatego określony w wyniku takiej agregacji kapitał jest na ogół nie większy od kapitału potrzebnego do zabezpieczenia się przed każdym czynnikiem ryzyka z osobna. Otrzymana różnica jest nazywana efektem dywersyfikacji, który jest wyrażany za pomocą zdefiniowanego poniżej współczynnika dywersyfikacji.

Niech zmienne losowe  $L_i$  opisują czynniki ryzyka ubezpieczyciela, a  $L = \sum_{i=1}^k L_i$  jest zmienną losową opisującą łączne ryzyko ubezpieczyciela. Wówczas współczynnik dywersyfikacji wyraża się wzorem:

$$d = 1 - \frac{\kappa(L)}{\sum_{i=1}^k \kappa(L_i)} \quad (2)$$

gdzie:

- $\kappa(L_i)$  – wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka  $L_i$ :

$$\kappa(L_i) = VaR_{0,995}(L_i) - E(L_i) \quad (3)$$

- $\kappa(L)$  – wymóg kapitałowy z tytułu łącznego ryzyka:

$$\kappa(L) = VaR_{0,995}(L) - E(L) \quad (4)$$

W niniejszym rozdziale  $BSCR$  jest wyznaczany w następujący sposób:

- za pomocą FS,
- przy założeniu, że struktura zależności między modułami ryzyka jest dana kopułą Gaussa i kopułą t-Studenta,
- przy założeniu braku wiedzy o strukturze zależności między modułami ryzyka.

## Formuła standardowa

BSCR zgodnie z formułą standardową wyznacza się na drodze agregacji wymogów kapitałowych dla pięciu modułów ryzyka w dwóch krokach:

1. Wyznacza się wymogi kapitałowe  $\kappa(L_i)$  dla modułów ryzyka poprzez agregację wymogów kapitałowych dla podmodułów ryzyka, te zaś wyznacza się poprzez agregację poszczególnych nośników ryzyka. Szerzej problem ten opisano w pracy Wanat [2014].
2. Wyznacza się wymóg kapitałowy  $\kappa(L)$  z tytułu łącznego ryzyka zgodnie ze wzorem:

$$BSCR = \sqrt{WRW^T} \quad (5)$$

gdzie:

$$W = [\kappa(L_1), \kappa(L_2), \kappa(L_3), \kappa(L_4), \kappa(L_5)] \quad (6)$$

a  $R$  jest macierzą współczynników korelacji liniowej między modułami ryzyka (tabela 1). Wartości korelacji liniowej w macierzy  $R$  są podane w Dyrektywie, a ubezpieczyciele, stosując FS, muszą z niej korzystać.

**Tabela 1.** Wartości korelacji między modułami ryzyka ubezpieczyciela

[1]		[2]	<i>Market</i>	[3]	<i>Couterp</i>	[4]	<i>Life</i>	[5]	<i>Health</i>	[6]	<i>No-life</i>
[7]	<i>Market</i>	[8]	1	[9]	0.25	[10]	0.25	[11]	0.25	[12]	0.25
[13]	<i>Couterp</i>	[14]	0.25	[15]	1	[16]	0.25	[17]	0.25	[18]	0.5
[19]	<i>Life</i>	[20]	0.25	[21]	0.25	[22]	1	[23]	0.25	[24]	0
[25]	<i>Health</i>	[26]	0.25	[27]	0.25	[28]	0.25	[29]	1	[30]	0
[31]	<i>No-life</i>	[32]	0.25	[33]	0.5	[34]	0	[35]	0	[36]	1

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: EIOPA [2011].

Ubezpieczyciele mogą wyznaczyć BSCR, korzystając z FS lub modeli wewnętrznych. Wybierając FS, nie mają możliwości identyfikacji właściwej struktury zależności między modułami ryzyka – zgodnie z Dyrektywą muszą stosować macierz  $R$ , w której są ustalone zależności między poszczególnymi modułami ryzyka. Natomiast jeśli ubezpieczyciele chcą zidentyfikować rzeczywistą strukturę zależności między modułami ryzyka, to mogą zbudować model wewnętrzny, który umożliwi zakładom ubezpieczeń lepsze dopasowanie BSCR do profilu prowadzonej przez nie działalności niż FS. Model wewnętrzny musi zostać zatwierdzony przez organ nadzoru, w związku z tym większość zakładów ubezpieczeń stosuje formułę standardową.

Korelacja liniowa opisuje jedynie zależności o charakterze liniowym i nie oznacza związku przyczynowego, co świadczy o tym, że taka sama wartość korelacji może odpowiadać różnym strukturom zależności. Wartości w macierzy korelacji danej w tabeli 1 są ustalone dla wszystkich ubezpieczycieli, bez względu na profil ich działalności. Jak wynika z EIOPA [2011], ubezpieczyciele zgłaszali uwagi, wskazując, że przygotowana przez nich w modelu wewnętrznym macierz korelacji różni się od macierzy danej przez twórców Dyrektywy. W rozdziale tym przeprowadzono badania, w których sprawdzono wpływ błędnie wyznaczonych wartości w macierzy korelacji na efekt dywersyfikacji ryzyka i określono, jak na ten efekt oddziałują inne struktury zależności.

### **Modelowanie zależności z wykorzystaniem kopuli**

Wybór formuły standardowej, w której do opisanía zależności między modułami ryzyka wykorzystuje się ustalone w Dyrektywie wartości korelacji, może prowadzić do przeszacowania lub niedoszacowania wartości BSCR. Dlatego by wyznaczyć BSCR na rzeczywistym poziomie, powinno się zidentyfikować właściwą strukturę zależności między modułami ryzyka ubezpieczyciela.

W literaturze do modelowania zależności między modułami ryzyka w pracach Wanat i Konieczny [2017], Bermúdez, Ferri i Guillén [2013] oraz Bernardi, Falangi i Romagnoli [2015] wykorzystywano kopule. Istotne w teorii kopuli jest twierdzenie Sklara [1959] mówiące o tym, że nieznany, wielowymiarowy rozkład łączny może zostać przedstawiony funkcją kopula oraz rozkładami brzegowymi.

Aby zidentyfikować właściwą strukturę zależności między modułami ryzyka ubezpieczyciela, trzeba znać ich rozkłady brzegowe. Założono, że odpowiednie zmienne losowe opisują moduły ryzyka:

$L_1$  – ryzyko rynkowe (Market),

$L_2$  – ryzyko niewykonania zobowiązania przez kontrahenta (Counterp),

$L_3$  – ryzyko ubezpieczeń na życie (Life),

$L_4$  – ryzyko ubezpieczeń zdrowotnych (Health),

$L_5$  – ryzyko ubezpieczeń innych niż na życie (No-life).

W niniejszym rozdziale w badaniach empirycznych wykorzystano kopule z rodziny eliptycznych, tj. Gaussa oraz t-Studenta. Poniżej podano definicje kopuli eliptycznych w przypadku  $d$ -wymiarowym.

Wielowymiarową kopulę Gaussa definiuje się w następujący sposób:

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \quad (7)$$

gdzie:

$\Phi_R$  – dystrybuenta wielowymiarowego rozkładu normalnego,

$R$  – macierz korelacji,

$\Phi$  – jednowymiarowy rozkład normalny.

Powyższy wzór można zapisać równoważnie:

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |R|}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T R^{-1} x\right) dx_1 \dots dx_d \quad (8)$$

Wielowymiarową kopulę  $t$ -Studenta zdefiniowano w następujący sposób:

$$C_{R,v}^{St}(u_1, \dots, u_d) = t_{R,v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)) \quad (9)$$

gdzie:

$t_{R,v}$  – dystrybuenta wielowymiarowa rozkładu  $t$ -Studenta o  $v$  stopniach swobody,

$R$  – macierz korelacji,

$t_v$  – jednowymiarowy rozkład  $t$ -Studenta o  $v$  stopniach swobody.

Powyższy wzór można zapisać równoważnie:

$$C_{R,v}^{St}(u_1, \dots, u_d) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2}) \sqrt{(v\pi)^d |R|}} \left(1 + \frac{1}{v} x^T R^{-1} x\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx_1 \dots dx_d \quad (10)$$

## Brak informacji na temat struktury zależności

Kluczowe w wyznaczeniu rozkładu zagregowanej zmiennej losowej  $L$  jest znalezienie właściwej struktury zależności między agregowanymi zmiennymi losowymi  $L_i$  opisującymi moduły ryzyka. Wybór konkretnej kopuli wiąże się z ograniczeniem do struktury zależności, jaką opisuje wybrana kopula. Z twierdzenia Skłara wynika, że jeśli znane są rozkłady brzegowe  $L_i$ , to wszystkie informacje na temat zależności między zmiennymi losowymi  $L_i$  są zawarte w kopuli.

Oznaczmy przez  $\Xi_k$  klasę  $k$ -wymiarowych kopuli. Korzystając z twierdzenia Skłara, ustalone rozkłady brzegowe  $L_1, \dots, L_k$  łączymy  $k$ -wymiarową kopulą  $C \in \Xi_k$  i te same rozkłady brzegowe połączone kopulą  $C$  oznaczamy jako  $L_1^C, \dots, L_k^C$ . Natomiast zidentyfikowana rzeczywista struktura zależności między

ustalonymi rozkładami  $L_1, \dots, L_k$  jest opisana przez kopule  $C_0 \in \Xi_k$ . Jeżeli ubezpieczyciel zna rozkłady  $L_i$  odpowiadające poszczególnym modułom ryzyka, a nie zna zależności, jakie występują między zmiennymi losowymi  $L_i$ , to nie może wyznaczyć dokładnej wartości  $VaR_\alpha(L)$ , ale dzięki Embrechts, Wang i Wang [2015] może dla ustalonych rozkładów brzegowych  $L_i$  wyznaczyć przedział możliwych  $VaR_\alpha(L)$ :

$$\underline{VaR}_\alpha(L) \leq VaR_\alpha(L_1^{C_0} + \dots + L_k^{C_0}) \leq \overline{VaR}_\alpha(L) \quad (11)$$

gdzie:

$$\underline{VaR}_\alpha(L) = \inf_{C \in \Xi_k} \{VaR_\alpha(L_1^C + \dots + L_k^C)\} \quad (12)$$

$$\overline{VaR}_\alpha(L) = \sup_{C \in \Xi_k} \{VaR_\alpha(L_1^C + \dots + L_k^C)\} \quad (13)$$

Tematyka poszukiwania ograniczenia  $VaR_\alpha(L)$  jest bardzo ważna w procesie zarządzania ryzykiem ubezpieczyciela. Pierwsze wyniki badań ograniczenia  $VaR_\alpha(L)$  dla dwóch zmiennych losowych były publikowane w latach 80. ubiegłego wieku. W ostatnich latach problem ten był poruszany przez takich autorów, jak Embrechts, Puccetti i Rüschendorf [2013] oraz Bernard i Vanduffel [2015, s. 12-13]. W wyniku tych badań powstał algorytm RA (*Rearrangement Algorithm*), który zaproponowali Embrechts, Puccetti i Rüschendorf [2013]. Pozwala on wyznaczyć granicę  $VaR_\alpha(L)$  dla znanych, różnych rozkładów brzegowych  $L_i$ . Ze względu na złożoność algorytmu RA w kolejnych latach powstały różne jego modyfikacje. Jedną z nich jest algorytm ARA (*Adaptive Rearrangement Algorithm*) zaproponowany przez Hofert i in. [2016].

### 3. Analiza wrażliwości kapitałowego wymogu wypłacalności na zmiany w macierzy korelacji

Model FS wyznacza BSCR na prawidłowym poziomie przy założeniu, że  $L_1, \dots, L_k$  mają wielowymiarowy rozkład normalny. Oznacza to, że rozkłady brzegowe  $L_i$  mają rozkład normalny, a struktura zależności między nimi jest opisana za pomocą macierzy korelacji. Wartości w macierzy korelacji między poszczególnymi modułami ryzyka są ustalone dla wszystkich ubezpieczycieli i podane w Dyrektywie.

W dalszej części rozdziału zbadano wrażliwość BSCR na zmiany parametrów w macierzy korelacji, stosując wielokrotną analizę wrażliwości. Jest ona przeprowadzana w celu oceny jednoczesnych zmian dwóch lub więcej parametrów modelu. W procesie agregacji udział bierze pięć modułów ryzyka, dlatego przeprowadzono badania dla macierzy o wymiarze  $5 \times 5$ . W badaniach przyjęto ogólną postać macierzy korelacji:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 & \rho_{45} \\ \rho_{15} & \rho_{25} & \rho_{35} & \rho_{45} & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

oraz:

$$W = [SCR_1, SCR_2, SCR_3, SCR_4, SCR_5] \quad (15)$$

gdzie  $W$  odpowiada kapitałowym wymogom wypłacalności dla agregowanych modułów ryzyka. Zdefiniowano macierz  $R^*$ , która powstaje z macierzy  $R$  poprzez zmianę odpowiednich jej wartości o  $\varepsilon_h$ . Macierz korelacji jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarze  $5 \times 5$ , dlatego zmian wartości korelacji dokonano symetrycznie względem przekątnej. Jest ich zatem maksymalnie tyle, ile jest wyrazów pod przekątną, czyli 10. Jeśli chce się dokonać zmian  $2k$  wyrazów macierzy  $R$  ( $k$  pod przekątną i  $k$  symetrycznie nad przekątną), to ma się  $\binom{10}{k}$  możliwości wyboru tych zmian.

Poniżej przeanalizowano przykład, w którym zmieniono dwie wartości korelacji w macierzy  $R$ . Przyjęto, że macierz  $R^*$  jest postaci:

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} + \varepsilon_1 & \rho_{13} + \varepsilon_2 & \rho_{14} & \rho_{15} \\ \rho_{12} + \varepsilon_1 & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} \\ \rho_{13} + \varepsilon_2 & \rho_{23} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 & \rho_{45} \\ \rho_{15} & \rho_{25} & \rho_{35} & \rho_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

Zapisano macierz  $R^*$  w postaci:

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 & \rho_{45} \\ \rho_{15} & \rho_{25} & \rho_{35} & \rho_{45} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Idąc dalej:

$$R^* = R + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z własności dodawania i mnożenia przez skalar macierzy, prawą stronę powyższej równości można zapisać w następujący sposób:

$$R + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niech  $S_{i_h, j_h}$  oznacza taką macierz, w której wyraz leżący w  $i_h$  – tym wierszu i  $j_h$  – tej kolumnie, gdzie  $h$  oznacza indeks liczby  $\varepsilon_h$ , przez jaką jest przemnażana ta macierz, jest równy jeden, a pozostałe wyrazy macierzy są równe zero. Korzystając z tych oznaczeń, zapisano macierz  $R^*$ :

$$R^* = R + \varepsilon_1 \cdot S_{21} + \varepsilon_1 \cdot S_{12} + \varepsilon_2 \cdot S_{31} + \varepsilon_2 \cdot S_{13}$$

Zauważono, że w przypadku ogólnym dla ustalonej liczby  $k$  zmian wyrazów w macierzy  $R$ , odpowiednio o  $\varepsilon_h$  dla  $h \in \{1, 2, \dots, k\}$ , macierz  $R^*$  przedstawia się następująco:

$$R^* = R + \sum_{h=1}^k (\varepsilon_h S_{i_h, j_h} + \varepsilon_h S_{j_h, i_h})$$

Korzystając z powyższej postaci macierzy  $R^*$ , policzono  $WR^*W^T$ .

$$\begin{aligned} WR^*W^T &= W(R + \sum_{h=1}^k (\varepsilon_h S_{i_h, j_h} + \varepsilon_h S_{j_h, i_h})W^T = \\ &WRW^T + \sum_{h=1}^k \varepsilon_h (WS_{i_h, j_h}W^T + WS_{j_h, i_h}W^T) \end{aligned}$$

Ponieważ dla ustalonych  $i_h$  i  $j_h$ :

$$\varepsilon_h WS_{i_h, j_h}W^T = \varepsilon_h SCR_{i_h}SCR_{j_h}$$

Oraz:

$$\varepsilon_h WS_{j_h, i_h}W^T = \varepsilon_h SCR_{j_h}SCR_{i_h}.$$

Otrzymujemy:

$$WR^*W^T = WRW^T + 2 \sum_{h=1}^k \varepsilon_h SCR_{i_h}SCR_{j_h}$$

Powyższe obliczenia prowadzą do następującego ogólnego wniosku:

Wniosek: Jeśli  $R$  jest symetryczną macierzą korelacji, a  $(i_h, j_h)$  oznacza numer wiersza i kolumny pod przekątną macierzy  $R$ , do której dodano  $\varepsilon_h$  dla  $h \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \leq 10$  (analogicznie  $(j_h, i_h)$  oznacza numer wiersza i kolumny nad przekątną macierzy  $R$ , do której dodano  $\varepsilon_h$ ), przekształconą macierz oznacza się jako  $R^*$ , wtedy dla dowolnego  $W$  można otrzymać:

$$WR^*W^T = WRW^T + 2 \sum_{h=1}^k \varepsilon_h SCR_{i_h} SCR_{j_h} \quad (16)$$

Z powyższego wniosku wynika, że jeśli dokona się  $k$  zmian wartości korelacji w macierzy  $R$ , a każdą korelację zmieni odpowiednio o  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , to  $WR^*W^T$  jest równy sumie  $WRW^T$  (gdzie macierz  $R$  jest macierzą, w której zostały wykonane zmiany) i podwojonych iloczynów wymogów kapitałowych, między którymi zmienia się wartość korelacji i wartości zmiany  $\varepsilon_h$ .

## 4. Efekt dywersyfikacji ryzyka w Solvency II – badania empiryczne

W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki badań empirycznych, w których wyznaczono wartość BSCR i efekt dywersyfikacji dla arbitralnie przyjętych rozkładów dla modułów ryzyka<sup>10</sup>. Tabela 2 przedstawia rozkłady oraz wyznaczone wymogi kapitałowe zgodnie ze wzorem (3) dla poszczególnych modułów ryzyka podane w mln dolarów.

**Tabela 2.** Rozkłady zmiennych losowych oraz wymogi kapitałowe dla modułów ryzyka

Moduł ryzyka	Rozkład	SCR
Market	$L_1 \sim N(0, 116^2)$	299,6
Couterp	$L_2 \sim 2.175e05 \text{Beta}(0.58, 1954)$	400,1
Life	$L_3 \sim N(0, 392^2)$	1010,5
Health	$L_4 \sim N(0, 248^2)$	640,7
No-life	[37] $L_5 \sim 200 \text{LN}(0, 1)$	[38] 2299,8

Źródło: Opracowanie własne na podstawie obliczeń przeprowadzonych w RStudio.

Tabela 3 przedstawia otrzymane wyniki dla BSCR oraz efektu dywersyfikacji wyznaczone:

- Za pomocą formuły standardowej:
  - przyjmując macierz korelacji daną przez twórców Dyrektywy,

<sup>10</sup> Przyjęto rozkłady pochodzące z pracy Bernard, Denuit i Vanduffel [2018].

- zakładając niezależność między zmiennymi losowymi opisującymi moduły ryzyka (wartości korelacji pomiędzy wszystkimi modułami ryzyka równe 0),
- zakładając pełną zależność liniową między zmiennymi losowymi opisującymi moduły ryzyka (wartości korelacji pomiędzy wszystkimi modułami ryzyka równa 1).
- Za pomocą struktur zależności między zmiennymi losowymi opisującymi moduły ryzyka z wykorzystaniem kopuli eliptycznych: Gaussa, t-Studenta ( $v = 2$ ), t-Studenta ( $v = 5$ ) z macierzą korelacji daną w Solwency II. Parametry kopuli są tak dobrane, by współczynnik korelacji liniowej między odpowiednimi rozkładami brzegowymi odpowiadał wartości w macierzy korelacji.
- Przy założeniu braku informacji na temat zależności. W tym przypadku wyznacza się przedziały zgodnie ze wzorem (11) z wykorzystaniem algorytmu ARA.

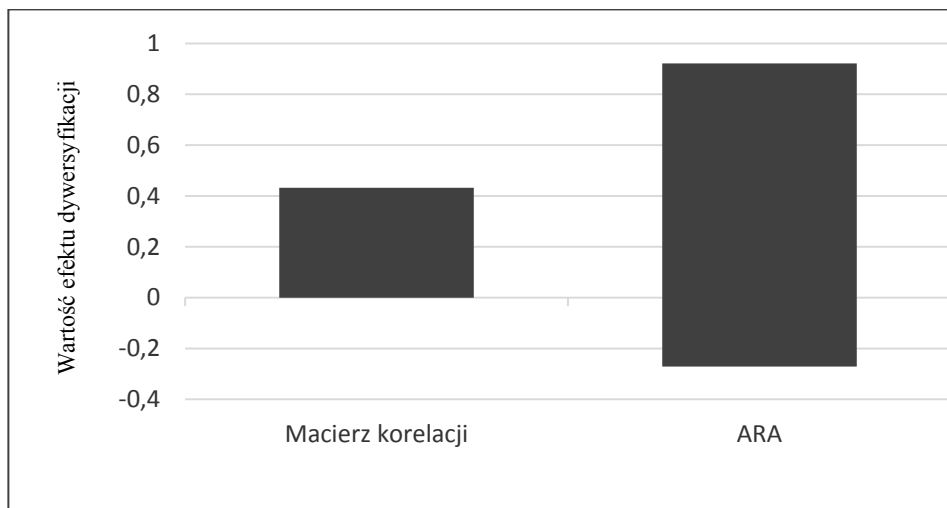
**Tabela 3.** Wartości BSCR oraz efektu dywersyfikacji

Struktura zależności	BSCR (w mln dol.)	Efekt dywersyfikacji
Formuła Standardowa	3032	0,35
Kopula Gaussa	2632	0,43
Kopula t-Studenta ( $v=2$ )	2900	0,38
Kopula t-Studenta ( $v=5$ )	2740	0,40
$VaR_\alpha(L)$	364	-0,27
$\overline{VaR}_\alpha(L)$	5913	0,92
Niezależne zmienne $L_i$	2640	0,43
Pełna zależność między $L_i$	4650	0

Źródło: Opracowanie własne na podstawie obliczeń przeprowadzonych w RStudio.

Przyjmując, że  $L_1, \dots, L_5$  mają wielowymiarowy rozkład normalny, a zależności między rozkładami brzegowymi  $L_i$  są opisane w macierzy korelacji danej przez twórców Dyrektywy (tabela 1), obliczono BSCR zgodnie ze wzorem (5). BSCR obliczono na poziomie 3032 mln, a efekt dywersyfikacji równy 0,35. Korzystając ze wzoru (16), wyznaczono przedział możliwych BSCR w zależności od wyboru macierzy korelacji. W badaniu rozpatrywano macierze, w których wartości korelacji należą do przedziału od 0 do 1. W zależności od wyboru macierzy korelacji otrzymano wartości BSCR, które mieszczą się w przedziale od 2640 mln do 4650 mln dolarów, co przekłada się na efekt dywersyfikacji w przedziale (0; 0,43). Ze względu na to, że macierz korelacji uwzględnia jedynie zależności o charakterze liniowym, założono brak jakichkolwiek informacji o strukturze zależności między modułami ryzyka i do wyznaczenia BSCR wykorzystano algorytm ARA. BSCR otrzymano w przedziale od 364 mln do 5913

mln, co przekłada się na efekt dywersyfikacji w przedziale  $(-0,27; 0,92)$ . Wykorzystując kopule eliptyczne, zawężono przedział możliwych wartości BSCR od 2632 mln do 2900 mln. Wykres 1 obrazuje, jak duży przedział możliwych efektów dywersyfikacji można otrzymać, wykorzystując macierz korelacji o wartości z przedziału od 0 do 1 oraz zakładając brak informacji na temat zależności. Efekt dywersyfikacji otrzymany przy użyciu FS jest w połowie możliwych do otrzymania efektów dywersyfikacji, zależnie od struktury zależności między modułami ryzyka ubezpieczyciela.



**Rys. 1.** Efekt dywersyfikacji z wykorzystaniem macierzy korelacji i ARA

Źródło: Opracowanie własne.

## 5. Podsumowanie

W rozdziale przeprowadzono analizę wrażliwości BSCR wyznaczonego zgodnie z FS na zmiany wartości w macierzy korelacji. Sformułowano analityczną zależność (wzór 16) między BSCR otrzymanym z założoną macierzą korelacji a BSCR otrzymanym z dowolną zmianą wartości w tej macierzy. W badaniu założono arbitralnie rozkłady modułów ryzyka i wyznaczono przedział możliwych do otrzymania BSCR w zależności od wyboru macierzy korelacji. Korzystając z algorytmu ARA, wyznaczono przedział możliwych do otrzymania BSCR. Do modelowania zależności zastosowano kopule z rodziny eliptycznych, ograniczając możliwe do otrzymania wartości BSCR.

Z przeprowadzonych badań wynika, że efekt dywersyfikacji ryzyka ubezpieczyciela zależy głównie od właściwie zidentyfikowanej struktury zależności między agregowanymi modułami ryzyka. Wykorzystanie w FS korelacji liniowej jest niewystarczające, ponieważ opisuje jedynie zależności liniowe między modułami ubezpieczyciela, które w rzeczywistości mogą być znacznie inne. Twórcy Dyrektywy zachęcają zakłady ubezpieczeń do tworzenia częściowych lub pełnych modeli wewnętrznych, które dokładniej odzwierciedlą profil ubezpieczyciela. Dlatego istnieje potrzeba prowadzenia badań skupiających się na poszukiwaniu nowych metod modelowania struktur zależności między modułami ubezpieczyciela. Kolejnym etapem prowadzonych badań będzie wykorzystanie kaskad kopuli do modelowania zależności w procesie szacowania kapitałowych wymogów wypłacalności.

## Literatura

- Bermúdez L., Ferri A., Guillén M. (2013), *A Correlation Sensitivity Analysis of Non-life Underwriting Risk in solvency Capital Requirement Estimation*, "ASTIN Bulletin", Vol. 43(1), s. 21-37.
- Bernard C., Denuit M., Vanduffel S. (2018), *Measuring Portfolio Risk Under Partial Dependence Information*, "Journal of Risk and Insurance", Vol. 85(3), s. 843-863.
- Bernard C., Vanduffel S. (2015), *Risk Aggregation and Diversification*, s. 12-13, <http://belkcollege.uncc.edu/sites/belkcollege.uncc.edu/files/media/RiskAggregationandDiversification.pdf>.
- Bernardi E., Falangi F., Romagnoli S. (2015), *A Hierarchical Copula-based World-wide Valuation of sovereign Risk*, "Insurance: Mathematics and Economics", Vol. 61, s. 155-169.
- EIOPA (2011), *EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II*, <https://eiopa.europa.eu>.
- Embrechts P., Puccetti G., Rüschendorf L. (2013), *Model Uncertainty and VaR Aggregation*, "Journal of Banking and Finance", Vol. 37(8), s. 2750-2764.
- Embrechts P., Wang B., Wang R. (2015), *Aggregation-robustness and Model Uncertainty of Regulatory Risk Measures*, "Finance and Stochastics", Vol. 19(4), s. 763-790.
- Hofert M., Memartoluie A., Saunders D., Wirjanto T. (2016), *Improved Algorithms for Computing Worst Value-at-Risk: Numerical Challenges and the Adaptive Rearrangement Algorithm*, <https://uwaterloo.ca/center-of-actuarial-excellence/sites/ca.center-of-actuarial-excellence/files/uploads/files/ara.pdf> (dostęp: 1.01.2021).
- Rüschendorf L., Witting J. (2017), *Var Bounds in Models with Partial Dependence Information on Subgroups*, "Dependence Modeling", Vol. 5(1), s. 59-74.

- Ryngwelska D. (2012), *Model wewnętrzny w systemie Wyplacalność II – droga do jego zatwierdzenia*,—[https://piu.org.pl/public/upload/ibrowser/WU/WU1\\_2010/3-15.pdf](https://piu.org.pl/public/upload/ibrowser/WU/WU1_2010/3-15.pdf) (dostęp: 1.01.2021).
- Wanat S. (2014), *Ocena efektu dywersyfikacji ryzyka w SolvencyII*, [https://piu.org.pl/public/upload/ibrowser/WU/WU3\\_2014/07%20wanat.pdf](https://piu.org.pl/public/upload/ibrowser/WU/WU3_2014/07%20wanat.pdf) (dostęp: 1.01.2021).
- Wanat S., Konieczny R. (2017), *Estimation of the Diversification Effect in Solvency II under Dependence Uncertainty*, “Financial Sciences”, Vol. 4(33), s. 89-104.