Sprawozdanie – laboratorium nr 1 Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji

Tomasz Madej

9 Marzec 2021

1 Wstęp teoretyczny

Algebraiczne układy równań liniowych(UARL) można zapisać w postaci macierzowej, ten fakt umożliwia nam skorzystanie z dość ciekawych możliwości rozwiązywań zadań tego typu, między innymi metodą omawianą w dalszej części a mianowicie 'Metoda Gaussa-Jordana', na początek jednak przedstawię jak zapisać układ równań liniowych w postaci macierzowej

Uład równań liniowych:

$$\begin{cases} \mathrm{a}_1 * x_1 + b_1 * x_2 + c_1 * x_3 = d_1 \\ \mathrm{a}_2 * x_1 + b_2 * x_2 + c_2 * x_3 = d_2 \\ \mathrm{a}_3 * x_1 + b_3 * x_2 + c_3 * x_3 = d_3 \end{cases}$$

Układ równań liniowych zapisany w postaci macierzowej:

$$Mx = b,$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Metoda Gaussa-Jordana służy właśnie do rozwiązywania takich Układów równań. Polega ona na sprowadzeniu macierzy M do macierzy jednostkowej za pomocą podstawowych przekształceń na wierszach takich jak dodawanie, mnożenie itp,
Dzięki temu uzyskamy postać która umożliwi nam odczytanie wyniku.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Jednym ze źródeł UARL mogą być równania różniczkowe.Dla oscylatora harmonicznego(czyli układu drgającego wykonującego ruch harmoniczny taki jak wahadło itp.) z drugiej zasady dynamiki Newtona otrzymujemy:

$$\frac{\delta^2 x(t)}{\delta t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{1}$$

Po przybliżeniu drugiej pochodnej położenia x w chwili t ilorazem różnicowym jest:

$$\frac{\delta^2 x(t)}{\delta t^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\delta t^2}. \tag{2}$$

Następnie wprowadziliśmy następujące oznaczenia: $\delta t = h, x_i = x(ih)$, które umożliwią nam z równania (1) stworzyć iteracyjny przepis na wyznaczenie elementu x_{i+1} za pomocą x_i i x_{i-1}, który ma następującą postać:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{3}$$

Na podstawie poprzedniego wniosku i wzoru (3) widzimy, aby jednoznacznie wyliczyć równanie potrzebujemy posiadać informacje o wartościach x_0 i x_1. Otrzymujemy te wartości z warunków początkowych takich jak $x_0 = A$, gdzie A jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, natomiast wartość x_1 otrzymamy z informacji o początkowej wartości prędkości ciała z następującej zależności $v_0 = \frac{(x_1 - x_0)}{h}$, gdzie h jest krokiem całkowania.
Równanie (2) wraz z warunkami początkowymi daje się zapisać w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiukroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4)

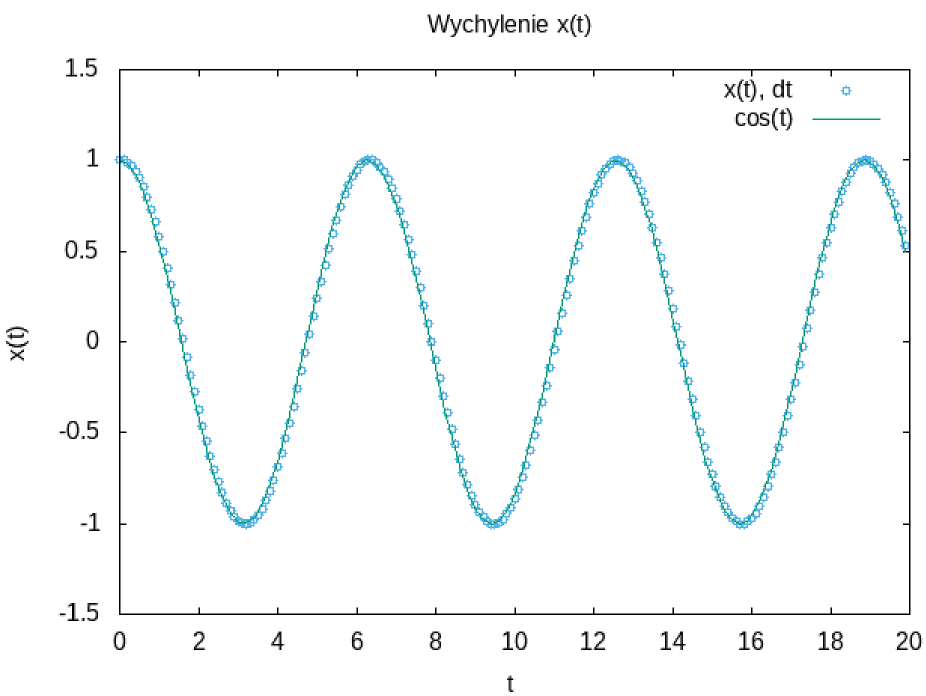
2.2 Wyniki

Na labolatoriach rozwiązywaliśmy UARL z równania (2) z warunkami początkowymi:

- $\frac{k}{m} = 1$
- $v_0 = 0$

- $A = 1$
- $h = 0.1$
- wykonaliśmy to dla $n = 200$ kroków czasowych h.

Ćwiczenie przeprowadziłem w języku C korzystając z gotowej procedury obliczającej metodą Gaussa-Jordana UARL. Następnie program do rysowania wykresów(gnuplot) sporządziłem wykres, który przedstawia przewidywany wykres wychylenia oscylatora w funkcji czasu.



Rysunek 1: Wychylenie x(t) oscylatora harmonicznego oraz wykres funkcji cosinus

Na podstawie Rysunek1. widzimy, że punkty obliczone numerycznie oscylatora harmonicznego wpasowują się idealnie w funkcje cosinus, co świadczy o tym, że wykorzystane dane przy obliczeniach są dla idealnego oscylatora harmonicznego.

3 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonego ćwiczenia widzimy, że korzystając z algorytmów obliczeniowych w tym przypadku algorytmu na podstawie Metody Gaussa-

Jordana, uzyskujemy wynik, z bardzo dużą precyzją o czym przekonuje nas Rysunek1, trzeba jednak pamiętać, że ważnym aspektem jest staranność wpisywania danych. Dodatkowo obliczenia wykonywane w ten sposób są wykonywane szybko, i możemy je wykonywać dla bardzo dużych macierzy.