חישוביות – פתרון תרגיל 3

שאלה 1

א. $(0+1)(00+01+10+11)^*$

ב. $0^*(1+\varepsilon)0^*(1+\varepsilon)0^*(1+\varepsilon)0^*(1+\varepsilon)0^*$

ג. $(0+\varepsilon)(10)^* + (1+\varepsilon)(01)^*$

שאלה 2

א. $L=\left\{1^{2^n} \mid n\geq 0\right\}$ לא רגולרית. הוכחה באמצעות למת הניפוח: לכל p לוקחים $w=1^{2^p}\in L$, ומראים שאם פירוק מקיים את שני תנאי הלמה הראשונים, אז $2^p<\left|xyyz\right|<2^{p+1}$. הוכחה באמצעות Myhill-Nerode: לכל שתי מילים שונות $1^{2^m+1},1^{2^n+1}$ הסיפא 1^{2^n-1} מפרידה ביניהן, ולכן יש אינסוף מחלקות שקילות.

ב. $L=\left\{0^m1^n \mid 0\leq m\leq n\leq 1000\right\}$ סופית ולכן רגולרית.

ג. $L=\left\{w \mid \text{The number of 01 substrings in } w \text{ equals the number of 10 substrings in } w\right\}$

L רגולרית, לדוגמה עם הביטוי הרגולרי: $0(0+1)^*0+1(0+1)^*1+0+1+\varepsilon$

ד. $L=\left\{ww \mid w\in\Sigma^*\right\}$ לא רגולרית. הוכחה באמצעות למת הניפוח: לכל p לוקחים $w=0^p10^p1$, ומראים שאם פירוק מקיים את שני תנאי הלמה הראשונים, אז $xyyz=0^{p+m}10^p1\notin L$ עבור $m>0$. הוכחה באמצעות Myhill-Nerode: לכל $n\neq m$, $0^n1,0^m1$ הן במחלקות שקילות שונות, כאשר 0^n1 סיפא מפרידה, ולכן יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. עבור מספר טבעי קבוע $n\geq 0$, השפה $L_n=\left\{ww \mid w\in\Sigma^n\right\}$ היא סופית, ולכן רגולרית.

שאלה 3

ההגדרה זהה להגדרה הסטנדרטית מלבד הדרישה שקבוצת המצבים סופית.
אוטומט דטרמיניסטי עם מספר אינסופי של מצבים יכול לקבל כל שפה $L\subseteq\Sigma^*$. בהנתן שפה L, האוטומט שיקבל אותה יהיה: $A=\left\langle\Sigma^*,\Sigma,\delta,\varepsilon,L\right\rangle$, כאשר Σ^* היא קבוצת המצבים, ε המצב ההתחלתי, L קבוצת המצבים המקבלים, ו- $\delta(w,a)=w.a$.

שאלה 4

א. כל המילים מעל{a,b} המכילות גם a וגם b.
הביטוי הרגולרי: $(a+b)^*a(a+b)^*b(a+b)^* + (a+b)^*b(a+b)^*a(a+b)^*$.

ב. נוכיח את שני הכיוונים:

i) אם L רגולרית אז קיים DFA שמזהה אותה, וכיון שכל DFA הוא גם אוטומט כולל, יש אוטומט כולל שמזהה אותה.

ii) בהינתן אוטומט כולל, ניתן לבנות לו DFA שקול בדרך דומה למה שראינו עבור NFA. נבנה את אוטומט החזקה, שבו כל מצב הוא קבוצת מצבים של האוטומט המקורי, המצב התחילי והמעברים מוגדרים כמו בבניה עבור NFA, והמצבים המקבלים הם כל הקבוצות שבהן **כל המצבים** הם מקבלים (בניגוד לבניה עבור NFA שבה קבוצה היא מקבלת אם **קיים** בה מצב מקבל).
לכן, אם שפה ניתנת לזיהוי על ידי אוטומט כולל אז היא רגולרית.

שאלה 5

DFA מקבל שפה אינסופית אמ"מ הוא מקבל מילה $n \le |w| \le 2n$.

שני הכיוונים קלים אם מבינים את הוכחת למת הניפוח.

אם מתקבלת מילה באורך גדול מ-n אז בריצה המקבלת על מילה זו יש מעגל. ניתן לנפח מעגל זה כרצוננו ולכן יש אינסוף מילים בשפה.

מצד שני, אם בשפה יש אינסוף מילים אז יש בה מילים ארוכות כרצוננו, ובפרט יש מילה באורך גדול מ-n. בריצה על כל מילה כזו יש מעגל, ובפרט מעגל פשוט, כך שאם המילה באורך גדול מ-2n ניתן להשמיט את המעגל מהריצה ולקבל ריצה מקבלת על מילה קצרה יותר. במעגל פשוט יש לכל היותר n מצבים, לכן אם המילה היתה באורך גדול מ-2n, לאחר ההשמטה היא עדיין באורך גדול מ-n. אם המילה הקצרה יותר עדיין באורך גדול מ-2n, ניתן לחזור על התהליך עד שתתקבל מילה באורך הרצוי.

שאלה 6

ראשית נראה כי השפה מקיימת את תנאי למת הניפוח, עם p=1.

תהי מילה בשפה מהצורה $a^ib^jc^k$, ובאורך לכל הפחות 1. יש שני מקרים:

(i) $i\ge1$: נבחר $x=\varepsilon$, $y=a$, ו-z יהיה שאר המילה. מתקיים $|y|>0$, $|xy|\le1=p$, וכן אם "ננפח" את מספר ה-a, המילה המתקבלת עדיין תהיה בשפה.

(ii) $i=0$: נבחר $x=\varepsilon$, y יהיה האות הראשונה, ו-z יהיה שאר המילה. ברור שכל התנאים מתקיימים.

מצד שני, L אינה רגולרית. עובדה זו נובעת ישירות ממשפט Myhill-Nerode: לכל $i\neq j$ טבעיים, המילים ab^i ו-ab^j נמצאות במחלקות שקילות שונות, ומכאן מספר מחלקות השקילות אינסופי.

לא מדובר בסתירה ללמת הניפוח: למה זו נותנת תנאי הכרחי לכך ששפה כלשהי הינה רגולרית, אך זהו איננו תנאי מספיק.